



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche
scientifique



Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Civil

Laboratoire de Génie Sismique & Dynamique des Structures

Mémoire de projet de fin
d'études

En vue de l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat en Génie Civil

Thème

*Réponse sismique des barrages par la méthode
des éléments finis : modèle à fluide
incompressible*

Élaboré par :

LOUNIS Ali

MEZRAG Redouane

Encadreur :

Pr. M. HAMMOUTENE

Co-encadreur

Mr. A.TADJADIT

Promotion juin 2014

Ecole Nationale Polytechnique 10, Avenue Pasteur Hassen Badi BP182 El-Harrach
16200 Alger (Algérie)

Tel : 213 21 52 53 01/03 – Fax : 213 21 52 29 73 www.enp.edu.dz

ملخص:

هذه المذكرة تحتوي على تحليل أثر الضغط الديناميكي المائي المتولد عن الاهتزازات الزلزالية على السطح الأمامي للسدود الصلبة، وهو عامل هام في تصميم السدود. وللتحليل الدقيق لشدة، وتوزيع الضغوط الديناميكية المائية على الأسطح الأمامية يوجب التمعّن الدقيق عند كتابة الشروط الحدودية لتركييب الجملة مائع - هيكل والنموذجية العددية عن طريقة العناصر المنتهية في هذه الدراسة.

مفتاحية: الضغط الديناميكي المائي، الشدة، مائع - هيكل، العناصر المنتهية.

Abstract:

The memory relates to the analysis of the influence of the hydrodynamic pressure an important factor in the design of dams. The effect of hydrodynamic pressure exerted on the face of the dam as a result of earthquake ground motions. For an accurate analysis of hydrodynamic pressure on the dam having irregular geometries, a particular attention must be considered to the formulation of the boundary conditions of the fluid-structure system and their numerical modeling by finite element method (FEM).

Key Words: modélisation numérique, dam, earthquake ground motions, irregular, numerical, FEM.

Résumé:

Ce mémoire porte sur l'analyse des effets des pressions hydrodynamiques sur la réponse sismique des barrages en béton. L'effet des pressions hydrodynamiques générées par les chargements sismiques sur le parement amont de barrage constitue un facteur important dans la conception des barrages. Pour une analyse précise de l'intensité et de la distribution des pressions hydrodynamiques s'exerçant sur les parements amont présentant des géométries irrégulières, une attention particulière doit être consacrée à la formulation des conditions aux limites du système barrage-réservoir et à leur modélisation numérique par la méthode des éléments finis (MEF).

Mots clés : pression hydrodynamique, barrage, réponse sismique, chargement, parement, géométries irrégulières, modélisation numérique, MEF.

Remerciement

Louange ALLAH le Tout Puissant et Miséricordieux de nous avoir accordé force, courage, persévérance et détermination afin de mener à son terme ce travail.

Nos vifs remerciements s'adressent à nos promoteurs et directeurs de thèse le Professeur M.Hmmoutene, Mr. Tadjadit ainsi que Mr. Ouanani qui nous ont été d'une aide essentiel et leur présence permanente afin de nous orienter.

Nous tenons à remercier aussi, le Professeur B. Tiliouine qui nous a fait l'honneur de présider le jury et le Professeur A. Bermad et Dr. M. Demidem pour avoir bien voulu examiner ce travail et participer au jury.

Nous souhaiterions exprimer notre profond respect à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation du deuxième cycle universitaire à l'Ecole Nationale Polytechnique.

Que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail, que tous ceux qui ont su nous soutenir durant sa préparation, que toutes ces personnes trouvent ici l'expression de nos plus chaleureux remerciements.

Table des matières

Table des matières

| | |
|----------------------------------------------------------------|----|
| Introduction générale | 1 |
| 1 Les barrages | 3 |
| 1.1 Historique..... | 3 |
| 1.2 Différents usages..... | 3 |
| 1.3 Techniques de construction | 4 |
| 1.4 Quelques exemples de grands barrages dans le monde | 4 |
| 1.5 Différents types de barrages | 4 |
| 1.5.1 Barrages rigides..... | 5 |
| 1.5.2 Barrages souples (en remblai)..... | 8 |
| 2 Le séisme..... | 12 |
| 2.1 Définition de séisme..... | 12 |
| 2.2 Fonctionnement d'un séisme..... | 12 |
| 2.3 Paramètres d'un séisme..... | 13 |
| 2.3.1 Hypocentre et épicentre | 13 |
| 2.3.2 Les ondes sismiques..... | 14 |
| 2.4 Enregistrement d'un séisme | 18 |
| 2.5 Localisation d'un séisme | 19 |
| 2.6 Comment mesure-t-on les séismes ? | 19 |
| 2.6.1 La magnitude..... | 19 |
| 2.6.2 Energie libérée | 20 |
| 2.6.3 L'intensité..... | 21 |
| 2.7 Accélération et vitesse de déplacement du sol | 22 |
| 1 Introduction | 24 |
| 2 Les différentes méthodes d'interaction fluide-structure..... | 25 |
| 2.1 La méthode de masse ajoutée | 25 |
| 2.1.1 Solution de Westergaard | 27 |
| 2.2 Solution analogique de Zangar..... | 29 |
| 2.3 Solution semi-analytique de Chopra-Chakrabarti..... | 29 |
| 2.4 Méthode numérique par les éléments finis..... | 32 |
| 1 Introduction | 33 |
| 2 Historique..... | 34 |
| 3 Les grandes lignes de la méthode..... | 34 |
| Etape 1 : | 35 |
| Etape 2 : | 35 |

Table des matières

| | |
|--------------------------------------------------------------------|----|
| Etape 3 : | 35 |
| Etape 4 : | 36 |
| Etape 5 : | 36 |
| 4 Formulation variationnelle..... | 36 |
| 4.1 Forme forte | 37 |
| 4.2 Forme faible | 38 |
| 5 Discrétisation de domaine | 38 |
| 6 Approximation sur l'élément | 40 |
| 6.1 Approximation polynomiale et Approximation nodale | 40 |
| 6.2 Élément de référence..... | 42 |
| 6.3 Jacobien et transformation des coordonnées | 43 |
| 6.4 Construction des matrices élémentaires | 47 |
| 7 Assemblage « matrices globales » | 48 |
| 8 La résolution..... | 49 |
| 9 Convergence de la méthode des éléments finis | 49 |
| 1 Introduction | 51 |
| 2 Développement des équations | 53 |
| 2.1 Equation du mouvement | 53 |
| 2.2 Equations gouvernantes du solide..... | 55 |
| 2.2.1 Equation d'élasticité..... | 55 |
| 2.2.2 Equations pour l'élasticité plane à 2 dimensions..... | 55 |
| 2.2.3 Expression du principe des travaux virtuels..... | 56 |
| 2.3 Equation gouvernantes dans le fluide..... | 57 |
| 2.3.1 Expression des équations du mouvement | 58 |
| 3 Modélisation de système barrage-réservoir..... | 59 |
| 3.1 Formulation..... | 59 |
| 3.1.1 Le barrage..... | 59 |
| 3.1.2 Le réservoir..... | 61 |
| 4 Formulation variationnelle des équations du fluide | 63 |
| 1 Introduction | 65 |
| 2 Discrétisation spatiale..... | 65 |
| 2.1 Cas du barrage | 66 |
| 2.2 Cas du fluide | 70 |
| 2.3 Expression explicite des matrices | 70 |
| 3 Processus d'analyse & approximation par le logiciel MATLAB | 71 |
| 3.1 Utilisation de pdetool..... | 71 |

Table des matières

| | | |
|-----|------------------------------------------------------------|----|
| 1 | Introduction | 72 |
| 2 | Etude de cas de barrage de Oued-Fodda | 73 |
| 2.1 | Bref historique sur le barrage de Oued-Fodda | 73 |
| 2.2 | Considération de barrage..... | 73 |
| 3 | L'effet de position de limite de rayonnement | 74 |
| 4 | Choix de Maillage | 76 |
| 5 | L'évolution de pression hydrodynamique dans le temps | 80 |
| 6 | Caractéristique de vibration libre du barrage..... | 81 |
| | Conclusion générale..... | 85 |
| | Bibliographie | |
| | Annexes | |

Table des figures

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure 1-1 Barrage poids | 6 |
| Figure 1-2 Barrage voûte | 6 |
| Figure 1-3 Barrages à contreforts | 7 |
| Figure 1-4 Barrage mixte (poids- voûtes)..... | 8 |
| Figure 1-5 Barrage homogène | 9 |
| Figure 1-6 Barrage à noyau | 10 |
| Figure 1-7 Barrage à masque | 10 |
| Figure 1-8 Barrages en enrochement | 11 |
| Figure 2-1 Carte globale des épaisseurs crustales | 13 |
| Figure 2-2 Hypocentre et zone épiscoptrale d'un séisme..... | 14 |
| Figure 2-3 Vitesses de déplacements des ondes sismiques (hodochrones) | 15 |
| <i>Figure 2-4 Propagation des ondes P</i> | 16 |
| Figure 2-5 Propagation des ondes S | 16 |
| Figure 2-6 Propagation des Ondes de Love..... | 17 |
| Figure 2-7 Propagation des ondes de Rayleigh | 18 |
| Figure 2-8 Exemple d'enregistrement en continu d'une activité sismique par un séismographe analogique | 18 |
| Figure 2-9 Exemple de graphe d'un sismogramme numérique avec piquage du temps d'arrivée des ondes P et S | 19 |
| Figure 2-10 Relation Energie / Magnitude d'un séisme..... | 21 |
| Figure 2-1 Pression hydrodynamique sur la face amont du barrage..... | 26 |
| Figure 3-1 Etapes générales de la méthode des éléments finis..... | 35 |
| Figure 4-1 Domaine géométrique et contour | 37 |
| Figure 5-1 Discrétisation du domaine – éléments triangulaires | 39 |
| Figure 5-2 Règles de discrétisation..... | 39 |
| Figure 6-1 Approximation linéaire à 1D..... | 41 |
| Figure 6-2 Élément réel et élément de référence | 42 |
| Figure 6-3 Intégrations aux bords | 45 |
| Figure 2-1 Volume infinitésimal $d\Omega$ | 53 |
| Figure 2-2 Tenseur des contraintes | 54 |
| Figure 3-1 Domaine barrage-réservoir | 59 |
| Figure 2-1 Le système barrage-réservoir | 74 |
| <i>Figure 2-2 Réservoir de barrage</i> | 74 |
| <i>Figure 3-1 Distribution du coefficient des pressions hydrodynamiques CP en fonction (Y/H)</i> | 75 |
| <i>Figure 4-1 Maillage grossier du fluide dans le réservoir</i> | 77 |
| <i>Figure 4-2 Maillage moyen du fluide dans le réservoir</i> | 77 |
| <i>Figure 4-3 Maillage fin du fluide dans le réservoir</i> | 77 |
| <i>Figure 4-4 les Contours des iso pressions hydrodynamiques</i> | 78 |
| <i>Figure 4-5 Variation du coefficient des pressions hydrodynamiques CP en fonction du nombre des nœuds de maillage</i> | 79 |
| <i>Figure 4-6 Maillage optimal du fluide dans le réservoir</i> | 79 |
| <i>Figure 4-7 Distribution de coefficient de pression CP pour le maillage optimal</i> | 80 |
| <i>Figure 5-1 Accélération d'El-Centro 18 mai 1940 en fonction de temps normalisé par (0.349g)</i> | 80 |
| Figure 5-2 L'évolution de pression hydrodynamique dans le temps..... | 81 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Figure 6-1 L'allure de la déformée de la première mode</i> | 82 |
| <i>Figure 6-2 L'allure de la déformée de la deuxième mode</i> | 83 |
| <i>Figure 6-3 L'allure de la déformée de la troisième mode</i> | 83 |
| <i>Figure 6-4 L'allure de la déformée de la quatrième mode</i> | 84 |
| <i>Figure 6-5 L'allure de la déformée de la cinquième mode</i> | 84 |

Liste des tableaux

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tableau 1: Liste de grands barrages dans le monde | 4 |
| Tableau 2: Classification des séismes selon l'échelle de Richter | 20 |
| Tableau 3: Echelle des intensités de Mercalli modifiée..... | 22 |
| Tableau 4: Comparaison de CP obtenu et solution de Westergaard..... | 75 |
| Tableau 5: Influence de nombre des noeuds de maillage dans le parement amont du barrage sur le coefficient des pressions hydrodynamiques CP..... | 78 |
| Tableau 6: Etude de comportement libre du barrage de Oued-Fodda..... | 81 |

Introduction générale

Les barrages représentent des systèmes constructifs complexes, vu leurs dimensions, l'importance de leur caractère économique et stratégique. L'augmentation de la demande d'approvisionnement en eau, d'irrigation et d'énergie hydroélectrique propre, donne un intérêt important à la construction de nouveaux barrages. La construction de ces ouvrages en zone sismique, constitue un danger potentiel permanent pour les populations avoisinantes, et une préoccupation importante pour les gouvernements. En conséquence, il est important, voir nécessaire de développer des méthodologies d'approche indispensables pour leur étude dynamique, en vue de l'évaluation de leur performance et de leur sécurité sous l'action sismique. Les barrages, comme toute autre structure, présentent une certaine interaction sismique fluide-structure avec le réservoir d'eau de stockage, ainsi que l'interaction sol -structure.

Du point de vue analyse, les barrages diffèrent d'autres classes de structures dans un important sens : une procédure d'analyse complète doit considérer les effets du réservoir d'eau sur les propriétés et réponses dynamiques du barrage. Les mouvements du terrain et les déformations de la face amont du barrage, engendrent des ondes de pression dans le réservoir, qui contribuent en retour, aux déformations de la structure, et influencent ainsi la répartition du champ de pression sur le parement amont. Pour tenir compte de ce cycle fermé de cause et effet, la formulation du problème doit reconnaître l'interaction dynamique entre le barrage et l'eau.

L'étude du phénomène d'interaction dynamique fluide-structure constitue un domaine de recherche vaste et actif. En particulier, dans les études de cas des barrages poids en béton sous sollicitations sismiques.

L'ouvrage étudié est modélisé en 2D par la méthode des éléments finis, en utilisant le code de calcul MATLAB système 8.2 pour déterminer le comportement dynamique d'un système barrage réservoir constitué par un barrage poids en béton et sa retenue. Cet objectif sera atteint en 3 étapes :

- 1) Modélisation mathématique du système et écriture du problème variationnelle associée.
- 2) Discrétisation par la méthode des éléments finis et expression des différentes matrices.

3) Résolution du système matriciel et analyse des résultats.

La thèse est organisée en six (6) chapitres :

Chapitre 1 : porte des généralités sur les barrages et les séismes.

Chapitre 2 : expose les différentes approches pour l'évaluation des forces agissantes sur un barrage poids.

Chapitre 3 : présente la méthode des éléments finis (MEF), ainsi que les différents outils utilisés par la suite pour la modélisation, discrétisation et résolution.

Chapitre 4 : pose le problème mathématique modélisant le système physique sous forme prête à la discrétisation, en se basant sur les lois de l'élasticité linéaire et de la mécanique des fluides.

Chapitre 5 : utilise les outils de la MEF présentés dans le chapitre 3, pour discrétiser le problème posé au chapitre 4 et construit le système algébrique correspondant.

Chapitre 6 : consacré à l'application numérique (cas de barrage oued fodda).

1 Les barrages

Un barrage est un ouvrage d'Art placé en travers d'un cours d'eau, destiné à retenir et stocker de l'eau ou à la dériver.

1.1 Historique

Les barrages existent depuis la préhistoire (réserve d'eau potable, d'irrigation, viviers, piscicultures) mais c'est au moyen âge qu'ils se sont fortement développés en Europe pour alimenter les moulins à eau. Il semble qu'ils aient parfois pu s'appuyer sur des sédiments accumulés en amont d'embâcles naturels, ou sur les lieux de barrages de castors dont la toponymie conserve des traces.

Les techniques de la fin du XIXe et du début du XXe siècle ne permettaient pas l'édification de retenues de grande capacité. Les premiers barrages ont surtout une fonction de dérivation d'une partie de l'eau (écrémage) vers une conduite forcée ou un canal d'irrigation.

L'amélioration des techniques et des bétons dans le premier quart du XXe siècle permet d'envisager la réalisation de retenues plus conséquentes, capables de réguler la production hydro-électrique.

La géologie (nature des roches sur lesquelles sera édifié le barrage, agrégats extraits sur place) et la topographie (largeur de la vallée), commande le type de barrage utilisé.

1.2 Différents usages

Les barrages sont conçus dans un objectif bien précis, mais certains ouvrages peuvent combiner plusieurs usages. Parmi ces fonctions, on trouve la régulation des cours d'eau (maintien d'un niveau minimum des eaux en période de sécheresse, barrage écrêter de crue), le stockage d'une réserve d'eau, utilisée pour alimenter un canal ou une ville, lutter contre les incendies ou irriguer les cultures, une prévention relative des catastrophes naturelles (crues, inondations), par la création des lacs artificiels ou des réservoirs, la production d'énergie électrique, la plaisance ou encore la décantation et le stockage de déchets miniers.

1.3 Techniques de construction

Un barrage est soumis à plusieurs forces. Les plus significatives sont :

- La poussée hydrostatique exercée par l'eau sur son parement exposé à la retenue d'eau ;
- Les sous-pressions (poussée d'Archimède), exercées par l'eau percolant dans le corps du barrage ou la fondation ;
- Les éventuelles forces causées par l'accélération sismique.

Pour résister à ces forces, deux stratégies sont utilisées :

- Construire un ouvrage suffisamment massif pour résister par son simple poids, qu'il soit rigide (barrage-poids en béton) ou souple (barrage en remblai);
- Construire un barrage capable de reporter ces efforts vers des rives ou une fondation rocheuse résistante (barrage-voûte, barrage à voûtes multiples...).

1.4 Quelques exemples de grands barrages dans le monde

Tableau 1: Liste de grands barrages dans le monde

| Nom | Hauteur | Type | Pays | Cours d'eau |
|------------------------------|---------|------------------|-------------|--------------|
| Barrage de Nourek | 304 m | Remblai en terre | Tadjikistan | Vakhch |
| Barrage de Xiaowan | 292 m | Voûte en béton | Chine | Mékong |
| Barrage de la Grande-Dixence | 285 m | Poids en béton | Suisse | Dixence |
| Barrage d'Inguri | 271.5 m | Voûte en béton | Géorgie | Ingouri |
| Barrage de Vajont | 261.6 m | Voûte en béton | Italie | Vajont |
| Barrage Chicoasén | 261 m | Remblai en terre | Mexique | Río Grijalva |
| Barrage de Mauvoisin | 250 m | Voûte en béton | Suisse | Bagnes |

1.5 Différents types de barrages

Chaque barrage est un cas particulier par ses dimensions, sa nature du terrain sur lequel il s'appuie, l'importance des débits dans la rivière, par sa conception générale et les matériaux qui le constituent, il peut généralement être classé en deux groupes :

- Les barrages rigides (en béton ou en maçonnerie).
- Les barrages souples (en remblai) : terre ou enrochement.

1.5.1 Barrages rigides

Les barrages en maçonnerie sont des matériaux moins utilisés actuellement mais composant un grand nombre des barrages existants.

Les barrages en béton comportent :

- Les Barrages poids ;
- Les Barrages voûtes ;
- Les Barrages à contreforts ;
- Les Barrages mixtes (poids-voûtes).

1.5.1.1 Barrages poids

La stabilité des barrages poids sous l'effet de la poussée de l'eau est assurée par le poids du matériau.

Ces ouvrages peuvent être en maçonnerie ou en béton, en maçonnerie hourdée à la chaux pour les plus anciens, en béton compacté au rouleau pour les plus récents. Ce type de barrage convient bien pour des vallées larges ayant une fondation rocheuse. Ils sont souvent découpés en plots à la construction.

La stabilité des barrages poids repose essentiellement sur leur fruit et, si nécessaire, sur l'efficacité du drainage qui met le massif poids à l'abri des sous-pressions.

La méthode classique d'étude de la stabilité d'un barrage poids consiste à analyser l'équilibre global du barrage sous l'action du poids, de la poussée hydrostatique, des sous-pressions et éventuellement d'autres actions secondaires (par exemple poussée des sédiments ou séisme).



Figure 1-1 Barrage poids

1.5.1.2 Barrages voûtes

Les barrages voûtes sont des barrages généralement en béton dont la forme courbe permet un report des efforts de poussée de l'eau sur les rives rocheuses de la vallée. L'utilisation de l'effet d'arc bien connu des constructeurs de cathédrales est plutôt récente dans le domaine des barrages (encore qu'on en trouve des applications dès le XIII^{ème} siècle en Iran ainsi que, sous une forme plus rustique, par les Romains).

La réalisation d'une voûte est certainement la façon d'utiliser au mieux les capacités du béton à supporter les efforts de compression, de diminuer le volume du matériau à mettre en œuvre.



Figure 1-2 Barrage voûte

1.5.1.3 Barrages à contreforts

Un barrage à contreforts comprend une série de murs parallèles, généralement de forme triangulaire, plus ou moins épais et plus ou moins espacés (les contreforts); une bouchure entre contreforts transmettant à ceux-ci la poussée de l'eau.

Les parements amont sont en général fortement inclinés de manière à transmettre directement au pied des contreforts et donc à la fondation rocheuse une partie de la poussée de l'eau sur le parement amont.

Les barrages à contreforts sont bien adaptés aux vallées larges avec une fondation rocheuse de bonne qualité.



Figure 1-3 Barrages à contreforts

1.5.1.4 Les Barrages mixtes (poids- voûtes)

Sont des barrages poids dont la forme nettement arquée rend possible la création d'un véritable effet voûte et donc un report des efforts sur les appuis latéraux.

Ce type de barrage convient bien lorsque la topographie permet de fermer la vallée par une forme arquée de longueur réduite sans pour autant avoir une qualité de rocher en fondation suffisante pour admettre des sollicitations ponctuelles fortes de type encastrement. Il s'agit en général de barrages construits dans la première moitié du XX^{ème} siècle.



Figure 1-4 Barrage mixte (poids-voûtes)

1.5.2 Barrages souples (en remblai)

On appelle barrages en remblai tous les barrages constitués d'un matériau meuble, qu'il soit très fin (argile) ou très grossier (enrochement).

Cette famille regroupe plusieurs catégories, très différentes. Les différences proviennent des types de matériaux utilisés, et de la méthode employée pour assurer l'étanchéité. On cite :

- Les barrages en terre (homogène, à noyau central, à masque amont)
- Les barrages en enrochements

1.5.2.1 Barrage en terre

Les barrages en terre présentent notamment l'avantage de pouvoir reposer sur des fondations de médiocre qualité, c'est-à-dire compressibles.

Tous les barrages en terre peuvent être considérés comme des barrages poids, c'est-à-dire qu'ils résistent à la pression de l'eau par leur propre poids. On en trouve de trois types :

- Homogène,
- A noyau,
- A masque.

1.5.2.1.1 Barrage Homogène

Un barrage en terre est dit homogène lorsqu'il est constitué d'un même matériau à dominante argileuse, relativement imperméable pour assurer à la fois l'étanchéité et la résistance. Selon les ouvrages, la pente des talus sera plus ou moins forte, en fonction notamment des caractéristiques du matériau employé.

La structure des barrages est souvent complétée par des dispositifs de drainage tels qu'une butée aval drainante, un tapis drainant sous le tiers ou la moitié aval, une cheminée drainante communiquant avec l'aval par un tapis ou des bretelles.

Des protections peuvent être disposées sur les faces extérieures : enrochements ou rip-rap sur le parement amont pour éviter l'érosion due aux vagues, terre végétale engazonnée ou enrochements sur le parement aval pour stabiliser la terre vis-à-vis du ruissellement de la pluie. Ce type de barrages est bien adapté aux sites ayant une fondation déformable.



Figure 1-5 Barrage homogène

1.5.2.1.2 Barrage à noyau

Dans un barrage à noyau, les fonctions de résistance et d'étanchéité sont en quelque sorte séparées. La résistance est assurée par les recharges placées sur les flancs de l'ouvrage, et l'imperméabilité par le noyau central.

Le noyau au centre de l'ouvrage va être constitué de la terre la plus imperméable possible. Il sera tenu de part et d'autre par des recharges composées, selon les cas, de terre plus perméable, d'alluvions ou d'enrochements.

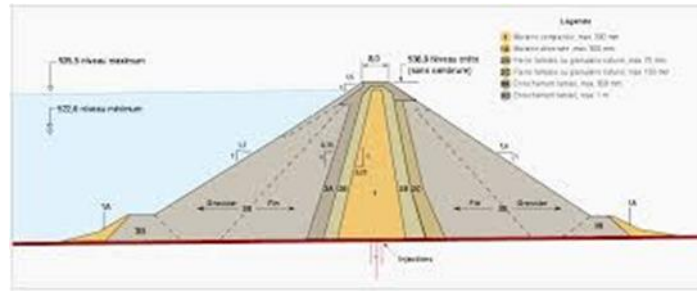


Figure 1-6 Barrage à noyau

1.5.2.1.3 Barrage à masque

Il peut aussi exister des sites où aucune terre n'est disponible, mais seulement des enrochements. Ceux-ci sont alors employés pour réaliser le corps du barrage, tandis que l'étanchéité est assurée par un masque de béton, ciment ou béton bitumineux posé sur l'ouvrage lui-même, côté amont. Le masque amont présente l'avantage de pouvoir être exécuté après l'édification du remblai et de pouvoir être réparé aisément.

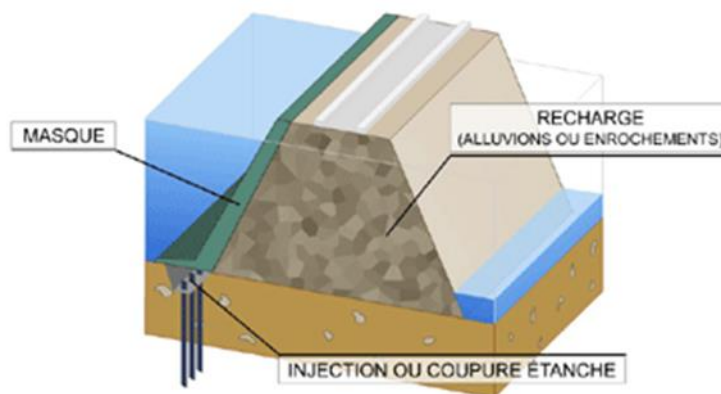


Figure 1-7 Barrage à masque

1.5.2.2 Barrages en enrochement

Un barrage en enrochement n'est pas autre chose qu'un tas de cailloux à grande échelle qui résiste par sa masse aux efforts auxquels il est soumis.

Il y a eu trois types de barrages en enrochement :

- Le type en enrochements rangés ou arrimés, ils tiennent avec des talus plus raides et permettent de réduire les volumes à mettre en place. Ils se tassent d'autant moins que les enrochements sont mieux rangés. On leur a longtemps

donné la préférence en France et en Italie dans les années 50 (cas le plus ancien, le barrage de la Noie le second grand barrage français construit en Bretagne en 1752).

- Le type en enrochements déversés (cas des barrages construits dans la première du XX^{ème} siècle).
- Le type en enrochements compactés (qui s'est généralisé après les années 60).

Actuellement la tendance générale est de construire les barrages en enrochements compactés. Grâce au compactage, les tassements des enrochements de bonne qualité peuvent être réduits de 0.3 à 0.4% de la hauteur du barrage.

Des très grands barrages en enrochement son construit dans le monde. Le plus haut du monde est celui de Chicoasen (Mexique) de 263m de hauteur et d'un volume de 15hm³. Il est suivi par celui de Chivor (Colombie) de 237m de haut et d'un volume de 10,8hm³.

En France le plus important est le barrage de Grand-Maison (avec noyau en terre) de 160m de hauteur et 16hm³ de volume.

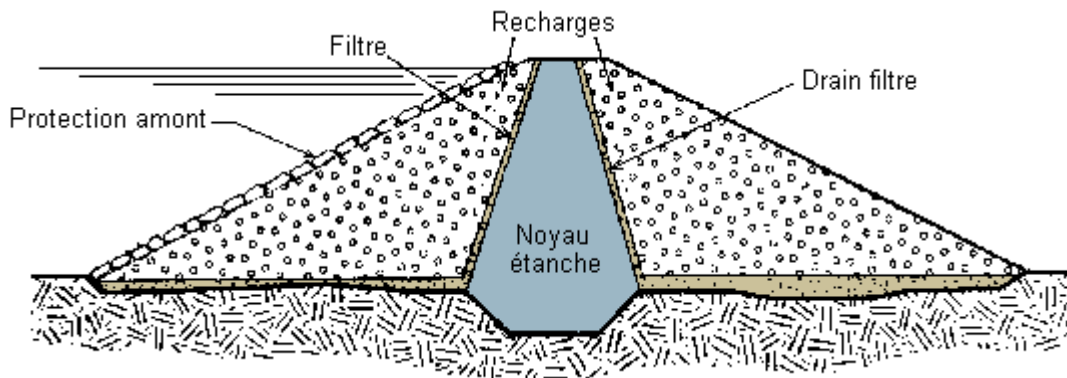


Figure 1-8 Barrages en enrochement

2 Le séisme

2.1 Définition de séisme

Un séisme ou tremblement de terre est la libération brusque d'énergie dans la croûte terrestre, lorsque le seuil de rupture mécanique des roches en profondeur est atteint. C'est la conséquence d'une accumulation d'énergie le long de failles, zones de faiblesse de la croûte où se libère cette énergie. Ce phénomène d'accumulation est cyclique et résulte directement du mouvement des plaques à la surface de l'asthénosphère, considérée comme ductile.

Le séisme génère à la surface du sol des vibrations pouvant atteindre des amplitudes centimétriques à décimétriques et des accélérations de quelques centièmes à plusieurs dixièmes de l'accélération de la pesanteur g , sur des durées qui varient de quelques secondes à plusieurs minutes.

Le **choc principal** représente la secousse sismique dont la magnitude est la plus élevée sur une série d'enregistrement et les **répliques** sont de faibles secousses qui suivent généralement un choc principal. Elles peuvent durer quelques jours à quelques mois.

2.2 Fonctionnement d'un séisme

L'explication la plus récente est fournie par la théorie de la tectonique des plaques. Chaque plaque est épaisse d'environ 80 km et se déplace horizontalement par rapport aux plaques voisines, sur une couche de roches plus ductiles située au niveau du manteau.

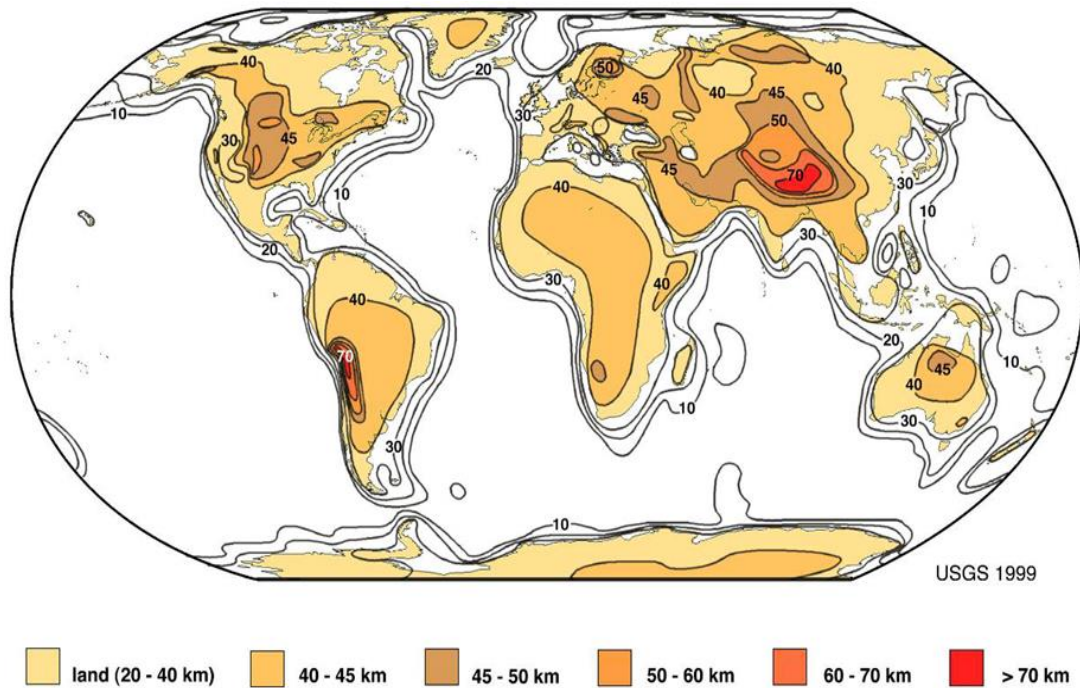


Figure 2-1 Carte globale des épaisseurs crustales

Comme la plupart des séismes ont lieu près du bord des plaques, on peut en conclure que les forces géologiques ou tectoniques qui façonnent le paysage en montagnes, vallées de rifts, crêtes médio-océaniques et fosses océaniques sont aussi à l'origine des grands tremblements de terre.

Ainsi, le rebond élastique était donné actuellement comme cause immédiate des séismes. Les roches de la croûte terrestre accumulent d'autant plus d'énergie qu'elles sont plus élastiquement contraintes. Lors d'une rupture de faille, l'énergie élastique emmagasinée dans les roches est libérée d'une part en chaleur, d'autre part en ondes élastiques. Ces ondes constituent le tremblement de terre.

2.3 Paramètres d'un séisme

2.3.1 Hypocentre et épicerentre

Lorsqu'un séisme est déclenché, un front d'ondes sismiques se propage dans la croûte terrestre. On nomme **foyer ou hypocentre**, le lieu dans le plan de faille où se produit réellement le séisme, alors que la **zone épicerentrale** désigne la portion de surface terrestre à la verticale du foyer. Il s'agit généralement de la zone géographique où le maximum des effets du séisme est observé.

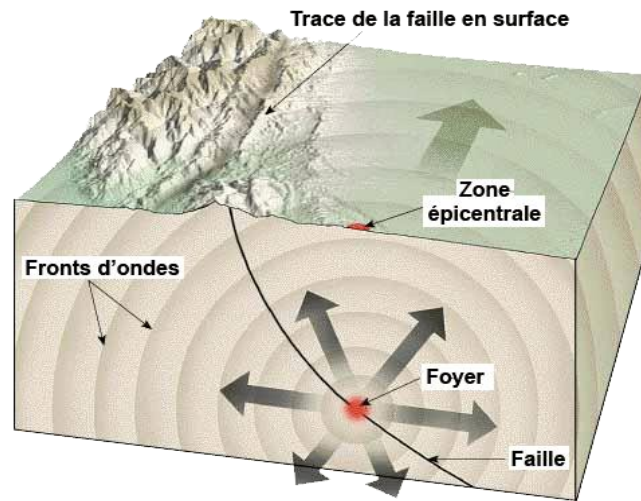


Figure 2-2 Hypocentre et zone épiscopentrale d'un séisme

2.3.2 Les ondes sismiques

Les ondes sismiques sont des ondes élastiques qui traversent un milieu sans pour autant modifier durablement ce milieu. L'impulsion de départ va « pousser » des particules élémentaires, qui vont « pousser » d'autres particules et reprendre leur place. Ces nouvelles particules vont « pousser » les particules suivantes et reprendre leur place et ainsi de suite.

Les vibrations engendrées par un séisme se propagent dans toutes les directions. Selon leur nature, on distingue deux grands types d'ondes émises par un tremblement de terre: les **ondes de volume** appelées également **ondes de fond** qui traversent la Terre et les ondes de surface qui se propagent parallèlement à sa surface. Elles se succèdent et se superposent sur les enregistrements des sismomètres. Leur vitesse de propagation et leur amplitude sont modifiées par les structures géologiques traversées, c'est pourquoi, les signaux enregistrés sont la combinaison d'effets liés à la source, aux milieux traversés et aux instruments de mesure.

Selon leur nature, on distingue deux grands types d'ondes émises par un tremblement de terre :

- Les ondes de fond « S » et « P ». Elles se propagent à l'intérieur de la terre.
- Les ondes de surface, qui comprennent les ondes de Love et de Rayleigh.

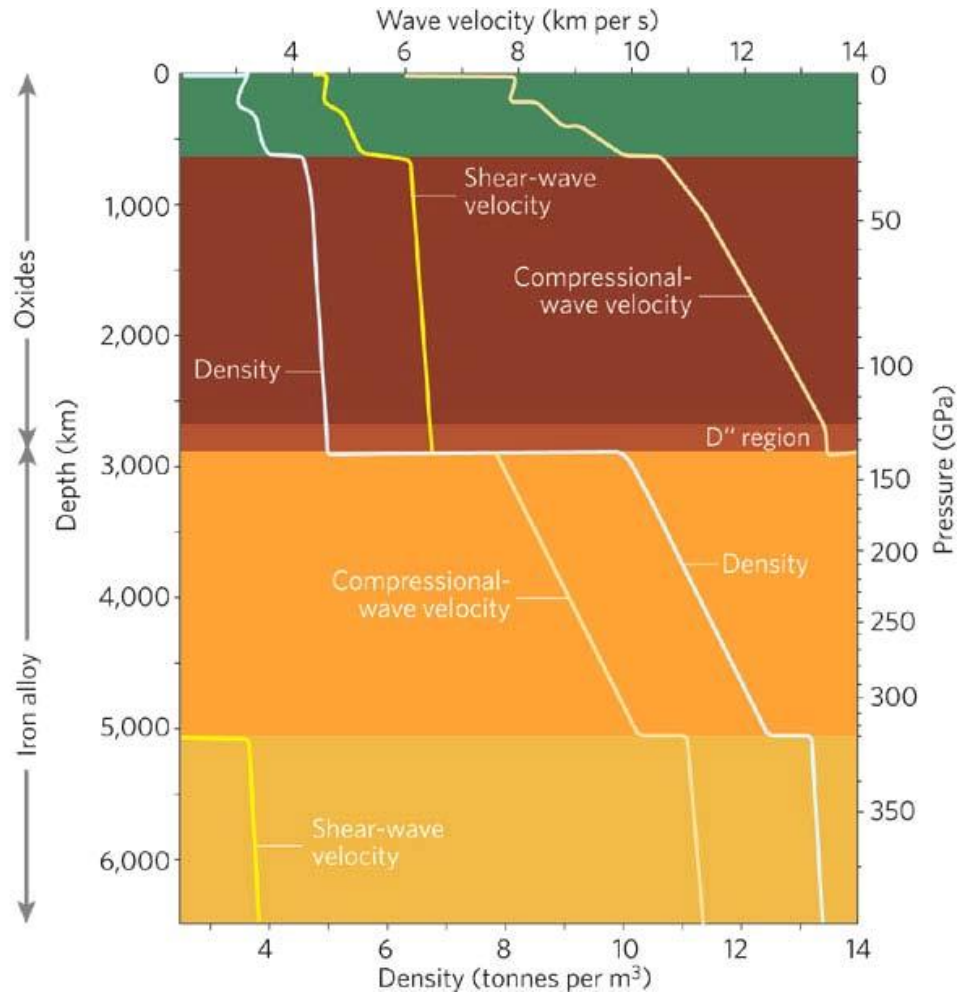


Figure 2-3 Vitesses de déplacements des ondes sismiques (hodochrones)

2.3.2.1 Les ondes « P »

Les ondes P ou ondes primaires appelées aussi ondes de compression ou ondes longitudinales. Elles se matérialisent par un mouvement préférentiel d'une particule parallèlement à la direction de propagation. Le déplacement du sol qui accompagne leur passage se fait par dilatation et compression successives, parallèlement à la direction de propagation de l'onde. Ce sont les plus rapides ($6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ près de la surface) et sont enregistrées en premier sur un sismogramme. Elles sont responsables du grondement sourd que l'on peut entendre au début d'un tremblement de terre.

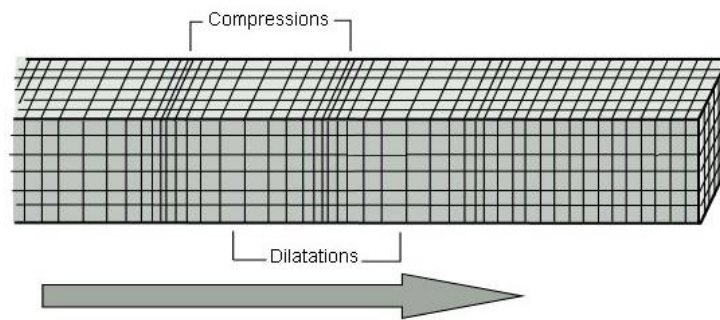


Figure 2-4 Propagation des ondes P

2.3.2.2 Les ondes « S »

Les ondes S ou ondes secondaires appelées aussi ondes de cisaillement ou ondes transversales, ne peuvent se propager que dans les solides. Les particules oscillent dans un plan vertical, à angle droit par rapport à la direction de propagation de l'onde. A leur passage, les mouvements du sol s'effectuent perpendiculairement au sens de propagation de l'onde. Ces ondes ne se propagent pas dans les milieux liquides, elles sont en particulier arrêtées par le noyau de la Terre. Leur vitesse est plus lente que celle des ondes P, elles apparaissent en second sur les sismogrammes.

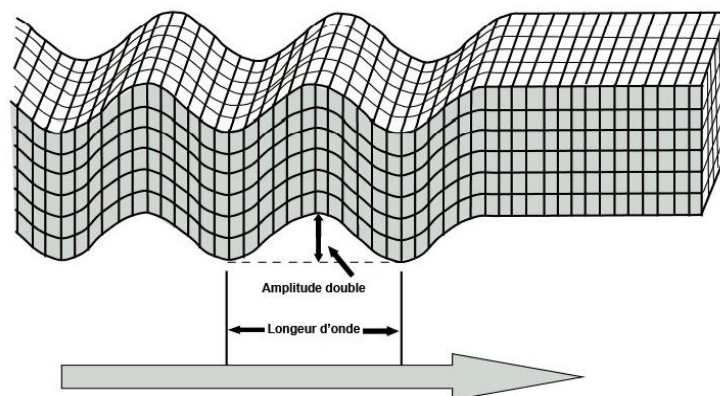


Figure 2-5 Propagation des ondes S

2.3.2.3 Les ondes de surface

Ce sont des ondes guidées par la surface de la Terre. Leur effet est comparable à celui des rides qui se forment à la surface d'un plan d'eau. Leur vitesse

de propagation est inférieure à celle des ondes de volume, mais leur amplitude est généralement plus forte.

Deux types d'ondes de surfaces sont à définir : Les ondes dites de Love et les ondes de Rayleigh.

2.3.2.3.1 Les ondes de Love « L ou L_Q »

Résultant d'interférences constructives entre les ondes P_H et S_H horizontales, les ondes de Love ont un déplacement similaire à celui des ondes S sans mouvement vertical. Les particules du sol sont déplacées d'un côté à l'autre dans un plan horizontal perpendiculairement à sa direction de propagation engendrant ainsi un ébranlement horizontal qui est la cause de nombreux dégâts aux fondations des édifices.

La vitesse moyenne de propagation des ondes de Love $V_L \approx 4\text{km/s}$.

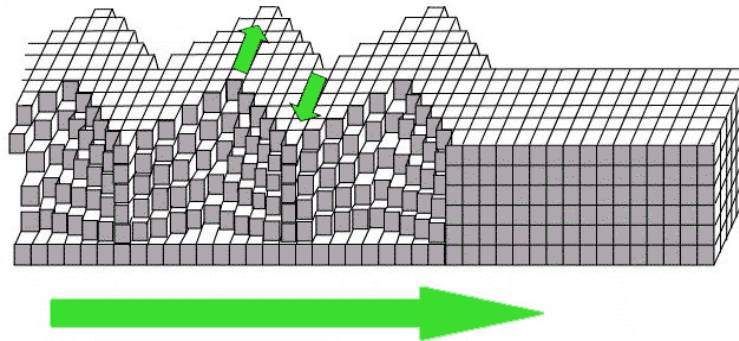


Figure 2-6 Propagation des Ondes de Love

2.3.2.3.2 Les ondes de Rayleigh « L_R »

Résultant d'interférences constructives entre les ondes P_v et S_v verticales, les ondes de Rayleigh ont un déplacement complexe, assez semblable à celui d'une poussière portée par une vague, un mouvement elliptique à la fois horizontal et vertical, rétrograde à faible profondeur R et pro grade pour une profondeur supérieure au cinquième de la longueur d'onde (λ). Les vibrations engendrées par cette onde durent plusieurs minutes.

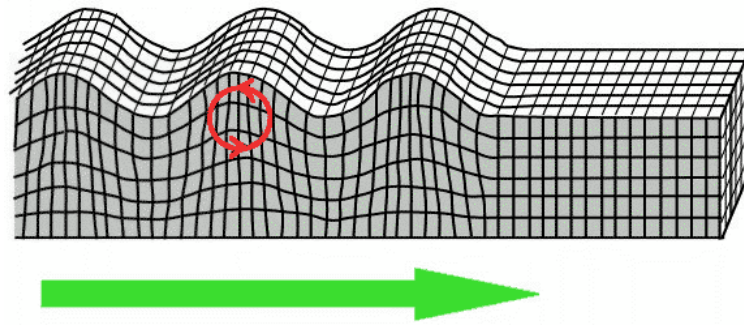


Figure 2-7 Propagation des ondes de Rayleigh

2.4 Enregistrement d'un séisme

Plusieurs types d'appareils d'enregistrement de l'activité tellurique sont utilisés dans la surveillance sismique. Les capteurs de type courte période sont utilisés pour la surveillance locale. De nouveaux capteurs de type large bande ont été récemment introduit dans la surveillance sismique, ils permettent d'enregistrer des séismes modérés en champ proche et lointain sans saturation. Les enregistrements numériques permettent aussi des traitements plus détaillés des enregistrements sismiques.

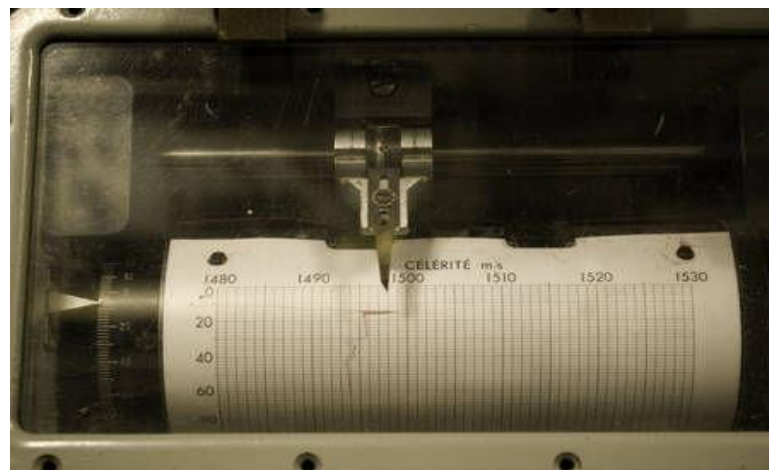


Figure 2-8 Exemple d'enregistrement en continu d'une activité sismique par un séismographe analogique

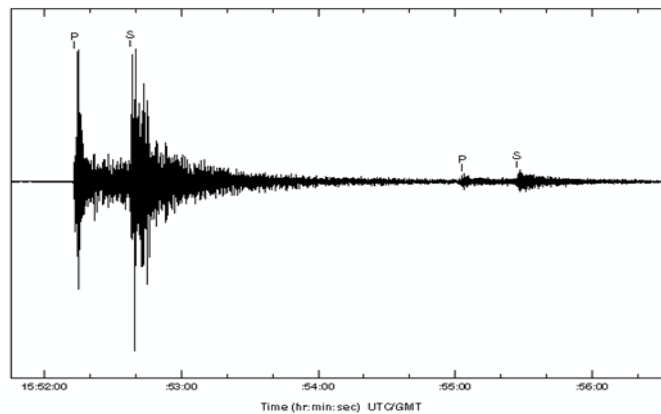


Figure 2-9 Exemple de graphe d'un sismogramme numérique avec piquage du temps d'arrivée des ondes P et S

2.5 Localisation d'un séisme

Les ondes utilisées dans la localisation de la zone épacentrale ou foyer d'un séisme sont les ondes de volume (*P* et *S*). Une meilleure détermination exige un certain nombre de stations sismique autour de la source sismique. Le nombre minimal pour cette opération est de trois stations sismologiques situées en des lieux différents. La méthode graphique était utilisée dans la pratique jusqu'à l'avènement des ordinateurs. La méthode graphique est basée sur la lecture des distances épacentrales sur des tables à partir des différences entre les temps d'arrivée des ondes P et S, ensuite sur une carte, des cercles sont dessinés autour de chaque station dont les rayons sont les distances épacentrales. L'intersection des cercles donne l'épicentre.

2.6 Comment mesure-t-on les séismes ?

2.6.1 La magnitude

La magnitude dite de Richter instaurée par ce dernier en 1935 est basée sur la mesure de l'amplitude maximale des ondes sismiques sur un sismogramme. La magnitude est définie comme le logarithme décimal de cette valeur. Cette définition très générale montre bien le caractère empirique de cette mesure qui dépend d'une part du type de sismomètre et d'autre part du type d'élaboration graphique utilisée pour la réalisation du sismogramme sur lequel se fait la mesure. Cette dernière est aussi très variable d'une station sismique à l'autre car la radiation sismique d'un séisme n'est pas toujours homogène.

2.6.1.1 Classification sismique selon la magnitude

En étudiant statistiquement les effets et les magnitudes de l'ensemble des séismes ayants été enregistrés jusqu'à présent, une classification des séismes selon la magnitude a été proposée. Le tableau suivant synthétise cette classification en donnant un aperçu sur la fréquence d'occurrence des séismes.

Tableau 2: Classification des séismes selon l'échelle de Richter

| Séisme | Magnitude | Effets | Fréquence d'occurrence |
|--------------|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| Micro | < 2,0 | Micro tremblement de terre, non ressenti. | 8000 par jour |
| Très mineur | 2,0-2,9 | Généralement non ressenti mais enregistré par les sismomètres. | 1000 par jour |
| Mineur | 3,0-3,9 | Souvent ressenti mais causant rarement des dommages. | 49000 par an |
| Léger | 4,0-4,9 | Secousses d'objets à l'intérieur des maisons, bruits d'entrechoquement. Dommages légers. | 6200 par an |
| Modéré | 5,0-5,9 | Peut causer des dommages majeurs à des édifices mal conçus dans des zones restreintes. Cause de légers dommages aux édifices bien construits. | 800 par an |
| Fort | 6,0-6,9 | Peut-être destructeur dans des zones allant jusqu'à 180 kilomètres à la ronde si elles sont peuplées. | 120 par an |
| Majeur | 7,0-7,9 | Peut provoquer des dommages sévères dans des zones plus vastes. | 18 par an |
| Important | 8,0-8,9 | Peut causer des dommages sérieux dans des zones à des centaines de kilomètres à la ronde. | 1 par an |
| Exceptionnel | > 9,0 | Dévaste des zones de plusieurs milliers de kilomètres à la ronde. | 2 tous les 100 ans |

2.6.2 Energie libérée

Les séismes dissipent une grande quantité d'énergie. Cela résulte de la dissipation soudaine de l'énergie de contrainte emmagasinée au sein des roches de la terre. A partir des mesures de l'énergie des ondes sismiques produites lors d'une fracture brusque, on estime que l'énergie globale dissipée annuellement par les différents séismes dans le monde est comprise entre 10^{18} et 10^{19} joules.

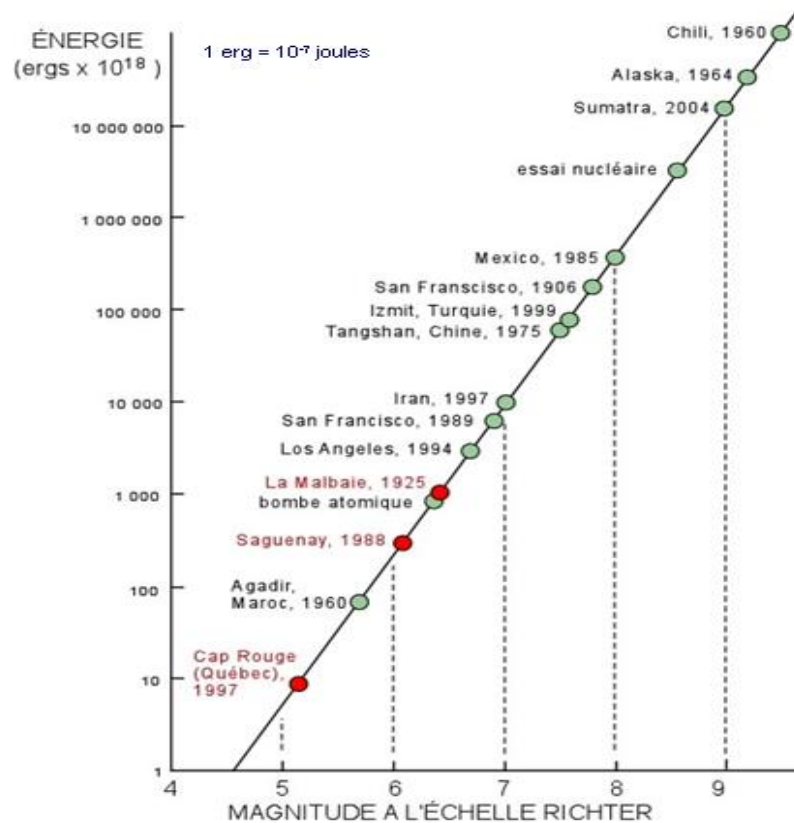


Figure 2-10 Relation Energie / Magnitude d'un séisme

2.6.3 L'intensité

L'intensité des tremblements de terre est une échelle utilisée pour l'évaluation de la grandeur d'un séisme. On mesure l'intensité à partir de l'importance des dégâts causés, de l'importance des perturbations qui se sont produites à la surface du sol et des réactions aux secousses des animaux.

La première échelle d'intensité a été mise au point par l'Italien Rossi et le Suisse Forel en 1880. Cette échelle va de I à X.

Une échelle plus affinée, à 12 degrés, a été construite par le sismologue et volcanologue italien Mercalli en 1902. Une version de cette échelle, appelée Echelle de Mercalli modifiée, a été mise au point par H.O. Wood et Frank Neumann pour établir les règlements de construction aux Etats Unies d'Amérique.

Actuellement, lorsqu'on étudie l'intensité d'un séisme, on distribue souvent aux habitants de la région sinistrée des questionnaires relatifs aux descriptions données à chaque degré de l'échelle. A partir des réponses obtenues, on peut dresser des cartes. On délimite alors les zones d'intensité égale par des isoséistes. La carte des isoséistes peut montrer les effets des couches géologiques sous-jacentes et du terrain superficiel

sur l'intensité des secousses et dans beaucoup de cas la position même de la faille causale.

Tableau 3: Echelle des intensités de Mercalli modifiée

| Intensités | Effets | Magnitude équivalente |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Intensité I | Perçu uniquement par quelques personnes dans des circonstances particulières ; détecté seulement par des sismographes sensibles. | 2 à 3 |
| Intensité II | Perçu par quelques personnes au repos et/ou se trouvant dans des étages élevés de grands immeubles (balancement d'objets). | |
| Intensité III | Perçu par des personnes à l'intérieur des édifices. A l'extérieur, rien n'est ressenti. | |
| Intensité IV | Perçu par la plupart des gens à l'intérieur des édifices et par certains à l'extérieur. | 4 |
| Intensité V | Perçu par presque tout le monde. Les personnes sommeillant se réveillent. | 5 |
| Intensité VI | Perçu par tout le monde aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur des bâtiments. Effet de panique (marche troublée) ; déplacement de meubles ; claquement de portes ; dommages légers. | |
| Intensité VII | Les personnes ont du mal à se tenir debout. Les conducteurs sentent les secousses dans leurs véhicules. Dommages minimes à moyens chez les bonnes constructions ordinaires, importants chez les mauvaises constructions. | 6 |
| Intensité VIII | Dommages légers aux constructions parasismiques, importants pour les constructions solides ordinaires avec effondrements possibles. | 7 |
| Intensité IX | Tous les immeubles subissent de gros dommages. Edifices déplacés sur leurs fondations, fissuration du sol, bris des canalisations souterraines. | |
| Intensité X | Destruction de la plupart des constructions. Sol fortement fissuré. Génération de plusieurs glissements de terrain. | 8 |
| Intensité XI | Effondrement de la plupart des constructions. Destruction de ponts, rails tordus, larges fissures dans le sol. | 9 |
| Intensité XII | Changement du paysage. Ondulations visibles à la surface du sol. Objets projetés dans l'air. | |

2.7 Accélération et vitesse de déplacement du sol

Le concept d'accélération est d'un intérêt fondamental quand on essaye de mesurer un mouvement quelconque évoluant au cours du temps comme cela se produit lors d'un tremblement de terre. L'accélération du sol qui accompagne les ondes sismiques est mesurée par des accélérographes, conçus pour fonctionner près de la source d'un séisme sans saturation de l'enregistrement. La référence est l'accélération de la gravité.

L'accélération des secousses sismiques est importante, mais pour comprendre parfaitement les effets vibratoires, il faut bien comprendre la vitesse et le déplacement du sol et les propriétés des ondes elles-mêmes.

Les accélérographes, à trois composantes, sont installés simultanément en champ libre et sur structures, ainsi on peut comprendre à la fois le comportement sismique des sols et des bâtiments.

D'après les observations accélérométriques, les dégâts sont plus souvent dus à la rapidité du mouvement latéral des fondations qu'aux maxima d'accélération. Les mouvements horizontaux du sol renversent les bâtiments et font même tomber les gens. L'autre paramètre important dans les enregistrements de l'accélération est la durée des fortes secousses.

1 Introduction

L'interaction fluide-structure est très probablement, après l'interaction sol-structure, l'interaction la plus fréquemment rencontrée. Une analyse de la réponse sismique des structures telles que les barrages, les réservoirs de stockage et les structures offshore, nécessite la considération des effets d'interaction fluide-structure et, dans quelques circonstances, de la compressibilité de l'eau. Ces effets peuvent introduire des modifications substantielles dans les caractéristiques modales de la structure, telles que les fréquences et modes propres de vibrations.

La première approche de ce problème des pressions hydrodynamiques sur les barrages ayant un parement amont vertical exposé à un mouvement horizontal et harmonique a été élaborée par Westergaard en 1933. Depuis, beaucoup de recherches sont apparues sur ce sujet dans lesquelles différents aspects du problème ont été pris en compte.

Le problème de compressibilité de l'eau a été pris en considération dans l'étude de Westergaard et d'après ces résultats il a remarqué que pour une hauteur de parement limitée à 100 m l'augmentation en pression n'excède pas 5%, alors la compressibilité peut être négligée, ce qui a été fait dans la plus part des recherches et dans notre étude.

Différentes méthodes de modélisation du fluide ont été développées, modélisation par des éléments finis. Ces différentes méthodes se basent sur diverses hypothèses :

- Le barrage est supposé infiniment rigide ;
- Le fluide est considéré comme homogène, non visqueux et incompressible ;
- Le phénomène des ondes de surface est négligé ;
- Le mouvement du liquide est considéré comme irrotationnel ;
- Aucun changement n'intervient dans la configuration géométrique de la région occupée par le liquide durant les vibrations ;
- Seules les vibrations de petit ordre sont prises en considération.

Le problème de détermination de la pression hydrodynamique en cas de tremblement de terre est une partie essentielle de la tâche générale, qui consiste à assurer la stabilité sismique des structures :

- a. Formulation du problème.
- b. Recherche d'un système acceptable d'hypothèses concernant :
 - Le type de barrage et les différentes formes qui en découlent.
 - La nature du tremblement de terre (surtout son sens de propagation).
- c. Recherche de modèles mathématiques.
- d. Résolution numérique de problème.

En pratique beaucoup de problème ont été résolus à partir de ces hypothèses par T.Karman, C. Zangar, L.S.Jacobsen, et d'autres. A première vue, cette approche paraît très simplifiée, cependant, il apparaît que le modèle d'un liquide idéal incompressible come simple formulation théorique, décrit suffisamment la nature de l'action dynamique de l'eau sur les structures dans la plupart des cas intéressants. C'est aussi le cas de nombreuses applications de Génie-Civil ou les travaux originaux de Housner, Chopra, Fenvers, Haroun, et d'autres collaborateurs font figure de référence.

2 Les différentes méthodes d'interaction fluide-structure

2.1 La méthode de masse ajoutée

La première approche de ce problème a été abordée par Westergaard, qui a calculé la répartition des pressions sur un écran vertical limitant un réservoir semi-infini de profondeur constante dans l'hypothèse d'un mouvement horizontal harmonique de l'écran de période T .

Le problème de compressibilité de l'eau a été pris en considération dans une étude faite par Westergaard, et d'après ces résultats, il a remarqué que pour une hauteur du parement limitée à 100 m, l'augmentation en pression n'excède pas 5%, alors la compressibilité peut être négligée.

L'effet du fluide non compressible peut être simplement pris en compte par ajout d'une masse appropriée à chaque nœud de contact barrage-fluide du parement amont, donc selon la structure, le fluide peut introduire :

- Un effet d'inertie (qui s'ajoute à l'inertie de la structure).
- Un effet de compressibilité (qui produit des modes de résonance).
- Un effet de viscosité (qui produit un facteur d'amortissement ajouté).

a) Effet d'inertie

Selon Westergaard, l'effet du fluide sur la structure est caractérisé par l'adjonction à la matrice masse de la structure d'une matrice des masses ajoutées, pour cela, il a proposé de représenter le volume d'eau par un tronçon de parabole.

Les hypothèses sur lesquelles repose cette méthode :

- Le barrage est rigide ;
- La face amont est un plan vertical ;
- Le liquide est incompressible ;
- Le réservoir est étendu à l'infini dans la direction amont.

La superposition due à l'inertie de l'eau, peut être représentée par un diagramme parabolique (ou elliptique éventuellement), défini par l'expression :

$$P(y = 0) = \frac{7}{8} \rho_w H \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1/2} \ddot{u}_g$$

P : Surpression sur la face amont ($y = 0$).

ρ_w : Masse volumique du fluide.

H : Niveau d'eau du réservoir.

Z : Côté de la partie immergée de la face amont.

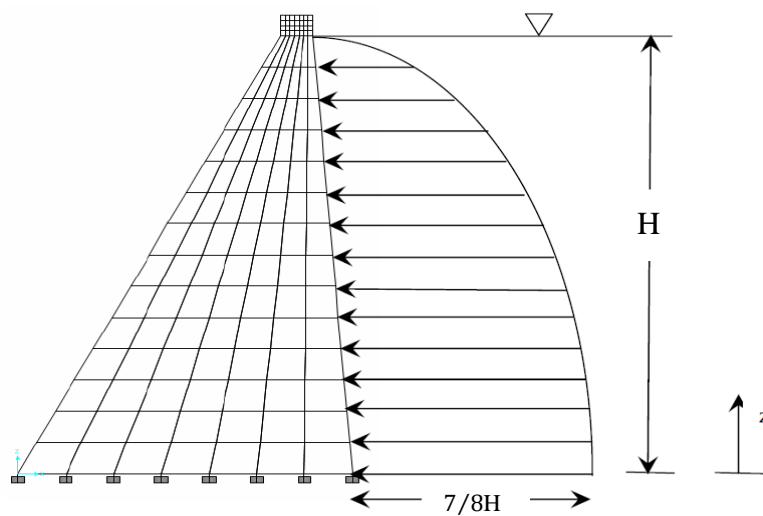


Figure 2-1 Pression hydrodynamique sur la face amont du barrage

Le même effet peut être obtenu par un bloc d'eau attaché à la face amont du barrage. Conformément à la théorie de Westergaard, ce bloc doit avoir une forme parabolique avec une épaisseur à la base égale à $7/8 H$.

Les masses ajoutées, aux éléments de la matrice masse du barrage, correspondant aux degré de liberté de l'interface barrage-fluide, sont proportionnelles aux aires tributaires de chaque nœud de la face amont.

b) Effet de compressibilité

Il engendre un effet d'amortissement qui correspond à l'absorption des ondes sismiques à l'infini. Cet effet est toujours très faible par rapport aux autres effets amortisseurs rencontrés dans la structure, sauf dans le cas de grand barrage où les résultats négligeant cet effet sont sans significations.

Des études effectuées par Chopra à l'université de Californie, Berkeley, semble indiquer que la présence d'une couche de vase a pour résultat une réduction importante du phénomène de compressibilité et de réflexion, autrement dit que la vase est parfois bénéfique.

c) Effet de viscosité

Contrairement à l'effet d'inertie et à l'effet de compressibilité (quand il est important), l'effet de viscosité est souvent faible et ne modifie quasiment pas les fréquences de résonance et les déformées modales des structures.

2.1.1 Solution de Westergaard

La solution exacte donnée par Westergaard est exprimée sous forme d'un développement en série de fonctions sinusoïdales :

$$C_n = \sqrt{1 - \frac{16\gamma_w H_1^2}{n^2 g k T^2}} = \left[1 - \frac{1}{n^2} \left(\frac{T_0}{T}\right)^2\right]^{1/2} \text{ et } T_0 = \frac{4H}{c}$$

$$P(Z) = \frac{8\alpha H}{\pi^2} \gamma_w \sum_{1,3,5} \frac{1}{n^2 C_n} \sin\left(\frac{n\pi}{2H} Z\right)$$

Avec :

P : Pression sur l'écran.

α : Coefficient de l'intensité sismique en direction horizontale, sur le site.

γ_w : Poids volumique de l'eau.

H : Profondeur de l'eau.

K : Module de compressibilité de l'eau.

T : Période du mouvement de l'écran, supposé harmonique.

T_0 : Période propre du réservoir.

C : Célérité des ondes de compression dans l'eau ($C \cong 1440 \text{ m/s}$).

On constate que le terme correctif $1 - \frac{1}{n^2} \left(\frac{T_0}{T}\right)^2$ dû à la compressibilité de l'eau est négligeable, dès que la période propre du réservoir (T_0) est petite devant la période propre de l'écran.

Si la compressibilité de l'eau est négligeable, il est possible d'établir une expression approchée de forme parabolique ou elliptique, indépendante de la période de vibration de l'écran. On a :

- La répartition parabolique de Westergaard:

$$P(Z) = \frac{7}{8} \alpha \gamma_w \sqrt{HZ}$$

- La répartition elliptique de Karman :

$$P(Z) = 0,707 \alpha \gamma_w \sqrt{Z(2H - Z)}$$

Remarque :

Pour l'évaluation de la pression hydrodynamique, M.Hatanaka recommande d'introduire, dans la relation de Westergaard, un coefficient d'amplification C'_0 . En cas d'un

mouvement du sol de type choc ce coefficient peut atteindre sa valeur maximale estimée à 1,5. On aura :

$$P(Z) = \frac{7}{8} C'_0 \alpha \gamma_w \sqrt{HZ}$$

2.2 Solution analogique de Zangar

L'influence de l'inclinaison du parement amont sur la distribution des pressions hydrodynamiques dans les mêmes conditions de mouvement harmonique que pour la méthode de l'analogie électrique pour la résolution de l'équation de Westergaard a été évaluée par Zangar, qui a utilisé la même méthode de l'analogie électrique pour la résolution de l'équation de Laplace gouvernant l'évolution de la pression dans le réservoir dans l'hypothèse de fluide incompressible.

Les résultats expérimentaux ont été utilisés pour élaborer un modèle de calcul dans lequel la période de l'excitation n'est pas prise en compte.

Le diagramme des pressions résultant est plus uniforme que dans le cas du parement vertical. Ceci est dû au fait qu'une partie de la pression se décharge verticalement.

La formule expérimentale proposée est :

$$P(y) = \frac{1}{2} \alpha \rho h C_m \left[\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right) + \left(\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right) \right)^{1/2} \right]$$

Avec les mêmes notations précédentes, et C_m est un coefficient déterminé en fonction de θ .

2.3 Solution semi-analytique de Chopra-Chakrabarti

Dans les développements précédents l'ensemble fond-structure était considéré rigide durant les vibrations, ceci reste approximativement valable tant que la fréquence du séisme est largement inférieur à la fréquence propre de l'ouvrage.

Chopra et Chakrabarti développèrent une procédure de calcul dite semi-analytique. Le système barrage-réservoir est alors subdivisé en deux sous-structures.

- Le barrage est considéré comme étant flexible, et est modélisé par la méthode des éléments finis.

- Le réservoir est modélisé par un milieu continu semi-infini régit par l'équation d'onde résolue analytiquement.

D'où le nom de procédure semi-analytique.

Cette méthode permet de prendre en compte l'influence du réservoir sur les caractéristiques vibratoires de la structure, et donc la réponse du système couplé à une sollicitation sismique.

La méthode est basée sur les hypothèses suivantes :

- Le mouvement du système barrage-eau est considéré bidimensionnel, c'est-à-dire qu'il est le même pour n'importe quelle section verticale perpendiculaire à l'axe du barrage.
- Le parement amont est vertical.
- Le fond du réservoir est horizontal. La profondeur de l'eau est H, et le réservoir s'étend à l'infini amont.
- L'eau est supposée linéairement compressible et la viscosité est négligée.
- L'effet des ondes de surface libre de l'eau est ignoré, l'erreur associée est connue comme petite.
- En considérant les réponses à la composante verticale du mouvement du sol, les effets de flexibilité du fond du réservoir sur les pressions hydrodynamiques sont considérés.
- Le mouvement du sol est supposé atteindre tous les points de base en même temps, c'est-à-dire que la vitesse horizontale de propagation du mouvement du sol est infinie.

Son principe est de résoudre l'équation d'équilibre dynamique obtenue par le modèle éléments finis en ajoutant aux forces sismiques les forces hydrodynamiques.

Donc tout le problème revient à quantifier ces forces.

L'équation s'écrit :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = -[M_s]\{\ddot{X}\} + \{F_h\}$$

En écrivant les quantités vectorielles sous forme :

$$\xi(t) = \bar{\xi}(w)e^{iwt}$$

La force hydrodynamique :

$$\bar{F}_h(\omega) = \bar{F}_0(\omega) + \sum_{k=1}^m \bar{Y}_k(\omega) \bar{F}_k(\omega)$$

Avec :

\bar{Y}_k : Amplitude de l'accélération généralisée.

($U(t) = \sum_{k=1}^m \phi_k Y_k$, ϕ_k : Vecteur forme correspondant au mode m).

\bar{F}_0 et \bar{F}_k : correspondent respectivement aux pressions $\bar{P}_0(y, \omega)$ et $\bar{P}_k(y, \omega)$, peuvent être évalués par application du principe des travaux virtuel.

Les termes $\bar{P}_0(y, \omega)$ et $\bar{P}_k(y, \omega)$ sont les composantes de la solution de l'équation d'onde dans le fluide, tel que :

$$\bar{P}(y, \omega) = \bar{P}_0(y, \omega) + \sum_{k=1}^m \bar{Y}_k(\omega) \bar{P}_k(y, \omega)$$

Avec :

$$\bar{P}_0(y, \omega) = \frac{4\rho}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1) \sqrt{[\lambda_n^2 - (\omega^2/c^2)]}} \cdot \cos \lambda_n y$$

$$\bar{P}_k(y, \omega) = \frac{-2\rho}{H} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{kn}}{\sqrt{[\lambda_n^2 - (\omega^2/c^2)]}} \cdot \cos \lambda_n y$$

Dans lesquelles :

$$\begin{cases} \lambda_n = (2n - 1)\pi/2H \\ I_{kn} = \int_0^H \phi_k(y) \cdot \cos \lambda_n y dy \end{cases}$$

Rappelons que cette méthode pose : $P(t) = \bar{P}(\omega) \cdot e^{i\omega t}$ comme solution de :

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \ddot{P} = 0$$

Ayant come conditions aux limites :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y}(x, 0, t) = 0 \\ P(x, H, t) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x}(0, y, t) = -\rho \left[1 + \sum_{k=1}^M \phi_k(y) \cdot \bar{Y}_k(\omega) \right] \cdot e^{i\omega t} \end{cases}$$

2.4 Méthode numérique par les éléments finis

De nombreux travaux de recherche antérieurs réalisés par Chopra et col. ont été spécifiquement effectués dans le domaine fréquentiel en utilisant une discrétisation par éléments finis bidimensionnels des monolithes de barrage supposés linéairement élastiques et une représentation analytique de la solution de l'équation des ondes de pression régnant dans un réservoir semi-infini. Ces efforts ont ainsi permis d'identifier un certain nombre de paramètres susceptibles d'avoir un effet significatif sur la réponse sismique des barrages.

Néanmoins, la nécessité de représenter des configurations géométriques quelconques du réservoir et des conditions aux frontières complexes ne se prêtant pas toujours à un traitement analytique, ainsi que le besoin de prédire les dégâts susceptibles d'être engendrés par le comportement non linéaire des barrages en zones de forte sismicité impliquent que la solution doit être déterminée dans le domaine temporel.

1 Introduction

Pour analyser un phénomène naturel en générale ou un problème d'ingénierie en particulier, on est souvent amené à développer un modèle mathématique pouvant décrire d'une manière aussi fiable que possible le problème en question. Le développement d'un modèle mathématique s'appuie généralement sur quelques postulats de base et plusieurs hypothèses simplificatrices pour aboutir à des équations gouvernantes qui sont souvent des équations différentielles auxquelles sont ajoutées des conditions aux limites. Exemple, la théorie d'élasticité s'appuie sur le postula fondamental de l'existence du vecteur contrainte et les équations générales d'élasticité linéaire isotrope sont obtenues avec les hypothèses de petites déformations, d'homogénéité et d'isotropie des matériaux ainsi que la linéarité des relations liants les contraintes et les déformations.

La résolution analytique d'équations différentielles pose parfois des difficultés insurmontables, et une solution exacte décrivant bien le problème étudié n'est pas toujours facile à trouver. Le recours aux modèles physiques et à la simulation expérimentale pour la recherche d'une solution analogue à la solution recherchée peut s'avérer coûteux en temps et en moyens. Cependant, avec les progrès enregistrés dans le domaine de l'informatique et les performances des ordinateurs de plus en plus grandes, il est devenu possible de résoudre des systèmes d'équations différentielles très complexes. Plusieurs techniques de résolution numérique ont été ainsi développées et appliquées avec succès pour avoir des solutions satisfaisantes à des problèmes d'ingénierie très variés.

La méthode des éléments finis est l'une des techniques numériques les plus puissantes. L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traitée par la méthode des éléments finis. Cette méthode consiste à diviser le domaine physique à traiter en plusieurs sous domaines appelés éléments finis à dimensions non infinitésimales. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments.

2 Historique

La méthode des éléments finis est le fruit de deux domaines de recherche : Les mathématiques et les sciences de l'ingénieur. Les outils mathématiques remontent jusqu'aux résidus pondérés de Gauss (1775), Galerkin (1915) et Biezenokoch (1923), ainsi qu'aux méthodes variationnelles de Rayleigh (1870) et Ritz (1909). La contribution des sciences de l'ingénieur a débuté dans les années quarante avec Hrenikoff (1941), Henry (1943) et Newmark (1949) qui touchèrent pour la première fois aux structures continues, en faisant une approximation sur des portions de petites dimensions dans un problème continu d'une barre longue. D'où l'idée de base des éléments finis. Par suite, Argyris (1955), Turner (1956), Glough (1956) et Martin (1956) ont fait une analogie directe en adoptant un comportement simplifié pour des petites portions : ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires, sur lesquels les déplacements sont supposés variés linéairement comme pour chaque barre ou poutre du système discret : chaque panneau est décrit par une matrice de rigidité et l'assemblage donnait la rigidité globale du milieu continu. D'où la naissance d'éléments finis avec "panneaux" comme nom.

Argyris et Kelsy (1960) utilisent la notion d'énergie dans l'analyse des structures et font appel à des méthodes mathématiques (résidus pondérés, principes variationnels...). Le terme " élément fini " est utilisé pour la première fois par Glough (1960), et dès lors, il y a un développement rapide de la méthode. Dans les années soixante; Zienkiwicz (1965), De Arante (1968), Oliviera (1968), Green (1969), Tones (1969), Lay (1969), Storne (1969), et Finlayson (1975) ont reformulé la méthode à partir de considérations énergétiques et variationnelles sous forme générale de résidus pondérés, d'où le modèle mathématique de la MEF. En 1969 la MEF est reconnue comme un outil général de résolution d'EDP, et utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires et non stationnaires dans plusieurs domaines.

3 Les grandes lignes de la méthode

Dans ce paragraphe, nous essayerons de présenter d'une manière simplifiée, les étapes d'application de la méthode des éléments finis et les outils nécessaires à sa mise en œuvre. La résolution d'un problème physique par éléments finis suit grosso modo les étapes suivantes (figure 3.1) :

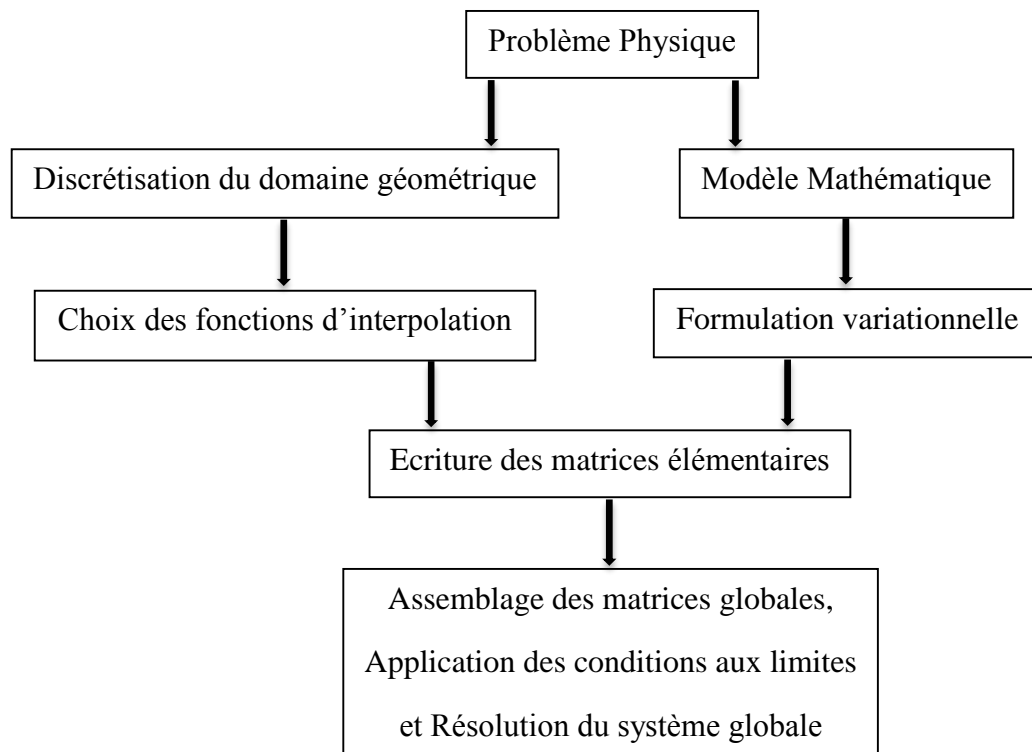


Figure 3-1 Etapes générales de la méthode des éléments finis

Étape 1 : Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites.

La majorité des problèmes d'ingénierie sont décrits par des équations différentielles aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites définies sur un domaine et son contour. L'application de la MEF exige une réécriture de ces équations sous forme intégrale. La formulation faible est souvent utilisée pour inclure les conditions aux limites.

Étape 2 : Division du domaine en sous domaines.

Cette étape consiste à discrétiser le domaine en éléments et calculer les connectivités de chacun ainsi que les coordonnées de ses nœuds. Elle constitue ainsi la phase de préparation des données géométriques.

Étape 3 : Approximation sur un élément.

Dans chaque élément la variable tel que le déplacement, la pression, la température, est approximée par une simple fonction linéaire, polynomiale ou autres. Le degré du polynôme d'interpolation est relié au nombre de nœuds de l'élément. L'approximation nodale est appropriée. C'est dans cette étape que se fait la construction des matrices élémentaires.

Etape 4 : Assemblage et application des conditions aux limites.

Toutes les propriétés de l'élément (masse, rigidité,...) doivent être assemblées afin de former le système algébrique pour les valeurs nodales des variables physiques. C'est à ce niveau qu'on utilise les connectivités calculées à l'étape 2 pour construire les matrices globales à partir des matrices élémentaires.

Etape 5 : Résolution du système global.

Le système global peut être linéaire ou non linéaire. Il peut définir soit un problème d'équilibre, de valeurs critiques ou de propagation.

Le problème d'équilibre concerne les cas statiques et les cas stationnaires. Dans un problème de valeurs critiques, on s'intéresse aux fréquences et aux modes propres de vibrations du système physique étudié. Les problèmes de propagations, concernent les cas transitoires dans lesquels sont déterminées les variations dans le temps des variables physiques. Les méthodes d'intégration pas à pas conviennent mieux pour ce type de problème. Les plus utilisées sont : méthode des différences finies centrales, méthode de Newmark, méthode de Wilson. A ces méthodes doivent être associées des techniques d'itération pour traiter le cas non linéaire. La plus fréquente est la méthode de Newton Raphson.

4 Formulation variationnelle

Actuellement, le principe des travaux virtuels est bien connu et très répandu. Il est souvent formulé en termes d'égalité des travaux effectués par les forces extérieures et intérieures lors d'un déplacement virtuel quelconque. Ce concept est essentiel pour la résolution des équations aux dérivées partielles. En effet, les déplacements sont remplacés par une fonction arbitraire continue sur le domaine et l'équation est réécrite sous forme intégrale.

4.1 Forme forte

Un problème classique d'équations différentielles gouvernant un système physique s'énonce comme suit :

Trouver une fonction $u \in V$; V espace des fonctions, telle que :

$$\begin{cases} A(u) = 0 & | \Omega \\ B(u) = 0 & | \Gamma \end{cases} \quad (III.1)$$

Où $A(u)$ est l'ensemble d'équations gouvernantes définies sur le domaine Ω et $B(u)$ est l'ensemble des conditions aux limites que les fonctions u doivent vérifier sur le contour Γ (figure 4.1). La fonction u peut-être un scalaire tel que la température, la pression, ... ou un vecteur tel que le déplacement, la vitesse, ...

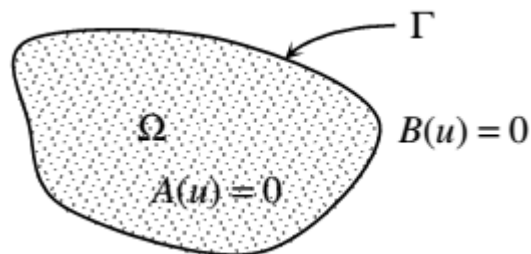


Figure 4-1 Domaine géométrique et contour

Le problème variationnel associé au système (III.1) s'écrit en prenant l'intégrale du système d'équations gouvernantes pondérées par des fonctions poids, l'énoncé devient :

Trouver $u \in V$ tel que :

$$\forall \Psi \in V: \int_{\Omega} \Psi A(u) d\Omega = 0 \quad (III.2)$$

Cette équation est appelée forme intégrale forte de l'équation différentielle (ou du système d'équations différentielles). Elle est analogue à l'expression des travaux virtuels. En fait la solution de (III.2) a encore plus de portée, on peut affirmer que si elle est satisfaite pour toute fonction poids w , alors l'équation différentielle (III.1) est satisfaite en tout point du domaine Ω .

4.2 Forme faible

Pour satisfaire les conditions aux limites nous avons deux manières de procéder; soit par le choix de la fonction de pondération, soit vérifier que :

$$\int_{\Gamma} \Psi B(u) d\Gamma = 0 \quad (III.3)$$

Dans la pratique, il est possible d'intégrer (III.2) par partie et de la remplacer par :

$$\int_{\Omega} C(\Psi) D(u) d\Omega + \int_{\Gamma} E(\Psi) F(u) d\Gamma = 0 \quad (III.4)$$

Les opérateurs C, D, E et F contiennent des dérivées d'ordre moins élevé, d'où un choix de fonctions d'approximation de u plus large.

Cette équation est la formulation faible de l'équation différentielle, elle forme la base de l'approximation par éléments finis.

Remarque : Pour obtenir de telles formulations intégrales, nous disposons de deux procédés : le premier est la méthode des résidus pondérés connue sous le nom de la méthode de Galerkin, le deuxième est la détermination de fonctionnelles variationnelles que l'on cherche à rendre stationnaire.

Dans la pratique, il n'est pas toujours facile de trouver une fonctionnelle. Le premier procédé est plus utilisé ; il consiste à choisir $\Psi = \delta u$ fonction de Dirac (une perturbation de la fonction cherchée) et d'utiliser l'approximation nodale pour la discrétisation. Ψ s'appelle aussi fonction poids d'où le mot : « pondéré ».

5 Discrétisation de domaine

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation par sous domaines, donc avant toute application il faut diviser le domaine à étudier en éléments. Chaque élément est défini géométriquement par un nombre de nœuds bien déterminé qui constituent en général ses sommets. (figure 5.1)

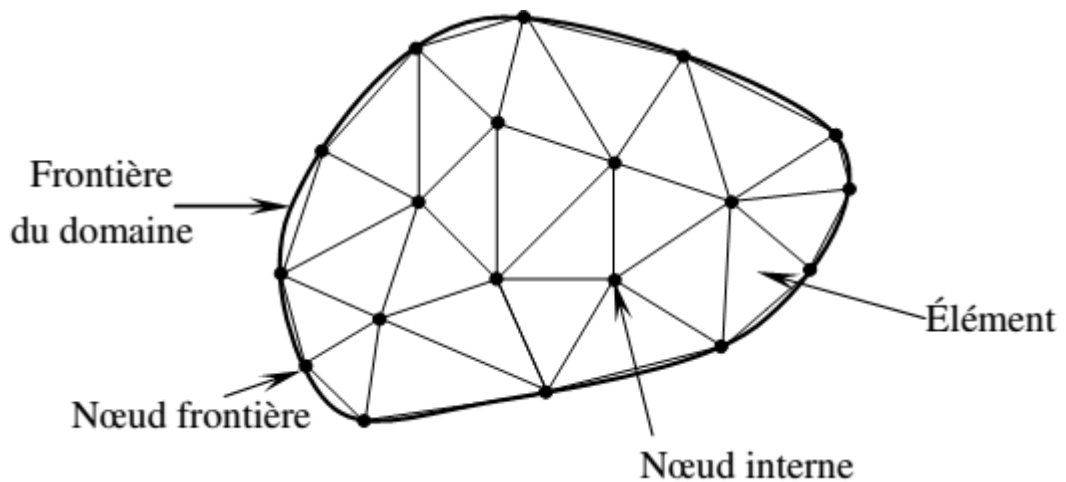


Figure 5-1 Discretisation du domaine – éléments triangulaires

La discrétisation géométrique doit respecter les règles suivantes :

- 1) Un nœud d'un élément ne doit pas être intérieur à un côté d'un autre du même type. (figure 5.2 a)
- 2) Aucun élément bidimensionnel ne doit être plat, éviter les angles proches de 180° ou de 0° . (figure 5.2 b)
- 3) Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés dans leurs frontières communes ; le recouvrement est exclu. (figure 5.2 c)
- 4) L'ensemble de tous éléments doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné ; les trous entre éléments sont exclus. (figure 5.2 d)

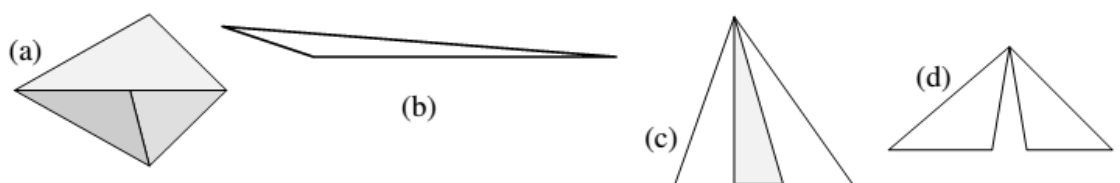


Figure 5-2 Règles de discrétisation

Le résultat du procédé de discrétisation doit contenir deux données essentielles qui sont les coordonnées des nœuds et les connectivités des éléments. On doit numéroter tous les nœuds et les éléments de façon à avoir des matrices globales à petite largeur de bande, pour cela, la numérotation se fait selon la plus petite largeur du domaine.

6 Approximation sur l'élément

Après avoir défini l'élément, on peut remplacer la fonction exacte par une approximative. On utilise souvent des polynômes ou des fonctions faciles à mettre en œuvre sur ordinateur.

6.1 Approximation polynomiale et Approximation nodale

La fonction approchée est exprimée, dans le cas unidimensionnel, par :

$$u = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (III.5)$$

Qu'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$u = \langle 1 \ x \ x^2 \ \dots \rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{Bmatrix} \equiv \langle P(x) \rangle \{A\} \quad (III.6)$$

Cette forme d'approximation est appelée interpolation polynomiale. Si on exprime la fonction sur tous les nœuds on obtient pour chaque nœud i de coordonnée x_i :

$$u_i = \langle P(x_i) \rangle \{A\} \equiv \sum_j P_{ij} a_j \quad (III.7)$$

Soit pour tous les nœuds :

$$\{U\} = \begin{bmatrix} \langle P_{1j} \rangle \{a_j\} \\ \langle \dots \dots \rangle \{ \dots \} \\ \langle P_{nj} \rangle \{a_j\} \end{bmatrix} \equiv U_n = P_n a_n \quad (III.8)$$

U_n : représente les valeurs aux nœuds de la fonction.

P_n : valeurs des polynômes aux nœuds de coordonnées x_i .

a_n : variables généralisées qui sont les facteurs des polynômes.

L'inconvénient de cette interpolation réside dans l'utilisation des paramètres a_i comme variable de base, des calculs supplémentaires sont nécessaires pour calculer la fonction recherchée u . Afin d'éviter ces calculs, on peut mettre les valeurs de la fonction u aux nœuds comme variables de base en procédant comme suit :

A partir de l'équation (III. 8), on peut tirer les a_n en fonction des u_n et on les remplace dans l'équation (III. 6). Ce qui donne :

$$U = \langle P(x) \rangle P_n^{-1} U_n \equiv \langle N(x) \rangle U_n \quad (\text{III. 9})$$

C'est la forme la plus utilisée par le fait que ses variables sont les valeurs de la fonction aux nœuds, la résolution donne directement ces valeurs.

Ce type d'approximation est appelée interpolation nodale, les fonctions N_i sont appelées fonction de forme, elles sont fonction du type d'élément utilisé pour la discrétisation géométrique.

Exemple pour un élément à une dimension (figure 6.1), l'approximation polynomiale s'écrit :

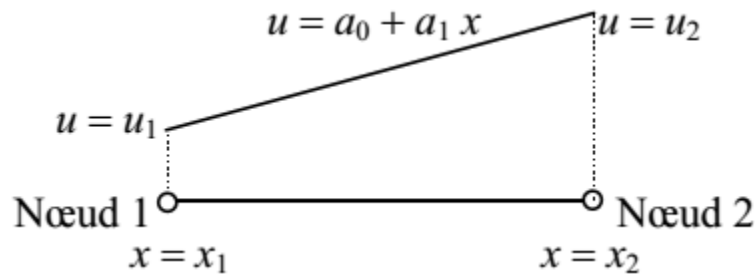


Figure 6-1 Approximation linéaire à 1D

$$u = \langle 1 \ x \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

Donc
$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

D'où
$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Soit sous la forme $a_n = P^{-1} u_n$

Donc l'approximation nodale s'écrit :

$$u = \left\langle \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Soit sous la forme $u = Nu_n$

Remarque : Les termes de N sont appelés fonctions de forme. Ils doivent définir de façon unique la variable approximative et assurer sa continuité dans l'élément et d'un élément à autre.

6.2 Élément de référence

Pour des éléments à nombre de nœuds élevé ou à cotés curvilignes, la formulation devient complexe et leur manipulation plus lourde. On pense évidemment aux expressions telles que dérivées et intégrales. L'astuce est de ramener le problème à un plan de référence de manière à standardiser les formules. C'est-à-dire définir un élément de forme très simple qui peut être transformé en chaque élément réel par une transformation géométrique, et de construire des fonctions de forme en coordonnées locales.

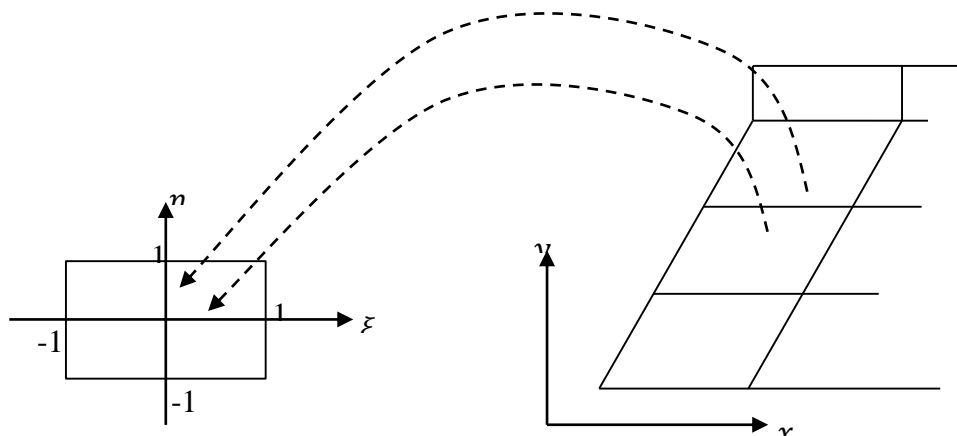


Figure 6-2 Élément réel et élément de référence

Cette méthode s'applique de manière générale, à condition qu'il existe une relation bijective entre les coordonnées cartésiennes $X \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ et les coordonnées locales $\xi \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}$. C'est-à-dire que $X = f(\xi)$.

La méthode la plus simple pour déterminer les formules de transformation de coordonnées consiste à utiliser les fonctions de forme standard déjà calculées pour représenter la variable inconnue sur l'élément de référence.

$$x = N\{X_n\}, y = N\{y_n\} \quad (III. 10)$$

Ou les N_i sont maintenant exprimés en fonction de ξ et η plusieurs élément sont présentés avec leur formulation dans la plus part des ouvrages d'éléments finis.

6.3 Jacobien et transformation des coordonnées

Dans ce qui suit nous allons montrer comment exprimer les dérivées et les intégrales en fonction des coordonnées de références par le biais du Jacobien de l'élément réel. Les écritures sont restreintes au cas de deux dimensions.

$$\text{On a:} \quad x = \langle N(\xi, \eta) \rangle \{X_n\}, y = \langle N(\xi, \eta) \rangle \{Y_n\} \quad (III. 11)$$

Donc:

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial \xi} = \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} = \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \equiv \begin{Bmatrix} N_{,\xi} \\ N_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{,x} \\ N_{,y} \end{Bmatrix} \quad (III. 12)$$

$$\text{Ou bien} \quad N_{,\xi} = J N_{,x} \quad (III. 13)$$

La matrice J est appelée matrice jacobienne de l'élément.

Explicitons $x_{,\xi}$ et $y_{,\xi}$ dans J on obtient :

$$J = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \{x_n\} & \langle N_{,\xi} \rangle \{y_n\} \\ \langle N_{,\eta} \rangle \{x_n\} & \langle N_{,\eta} \rangle \{y_n\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} [\{x_n\} \quad \{y_n\}] \quad (III. 14)$$

a. Expression des dérivées

Pour exprimer les dérivées dans le plan de référence il suffit de multiplier les expressions données dans le plan physique par l'inverse de la matrice jacobienne.

$$N_{,x} = J^{-1} N_{,\xi} \quad (III. 15)$$

b. Expression de $dx \cdot dy$

Dans le calcul des intégrales de volumes $dx \cdot dy$ doit être écrite en fonction de $d\xi \cdot d\eta$.

$$dx = dN \cdot X_n, dy = dN \cdot Y_n \quad (III.16)$$

$$dN = N_{,\xi} d\xi + N_{,\eta} d\eta \quad (III.17)$$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \{x_n\} & \langle N_{,\eta} \rangle \{x_n\} \\ \langle N_{,\xi} \rangle \{y_n\} & \langle N_{,\eta} \rangle \{y_n\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (III.18)$$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_n \rangle \{N_{,\xi}\} & \langle x_n \rangle \{N_{,\eta}\} \\ \langle y_n \rangle \{N_{,\xi}\} & \langle y_n \rangle \{N_{,\eta}\} \end{bmatrix} \quad (III.19)$$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x_n \rangle \\ \langle y_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{N_{,\xi}\} & \{N_{,\eta}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = [J]^T \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (III.20)$$

Donc $dx \cdot dy = \det(J^T) d\xi \cdot d\eta = \det(J) d\xi \cdot d\eta \quad (III.21)$

c. Expression de $d\Gamma$

Dans le calcul des intégrales aux contours formulant les conditions aux limites $d\Gamma$ doit être aussi remplacé par $d\xi$ ou $d\eta$ selon le côté de l'élément réel.

On peut écrire : $d\Gamma = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (III.22)$

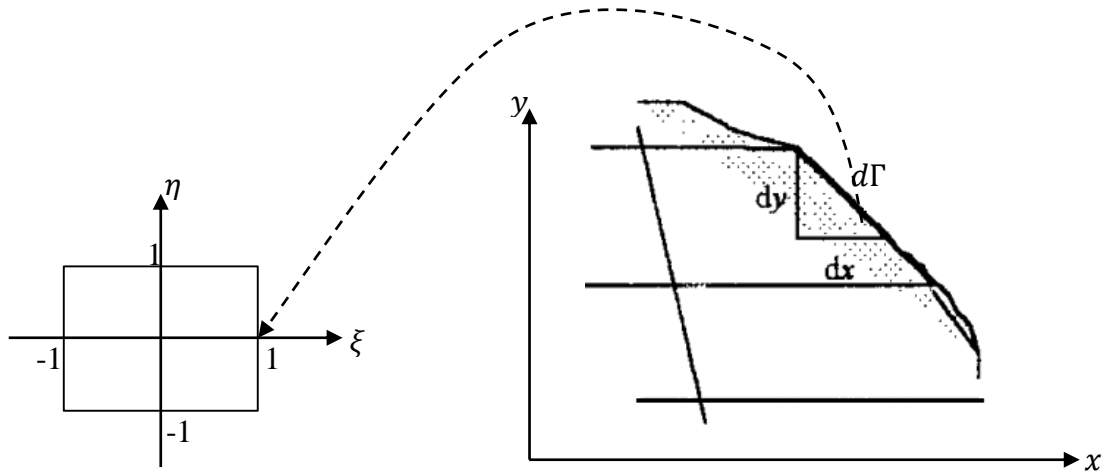


Figure 6-3 Intégrations aux bords

Le contour Γ correspond à une arête de l'élément, donc l'intégration sur l'élément se fait suivant une variable (ξ ou η).

Nous allons expliciter la procédure pour l'exemple de la figure (6.3) :

Sur l'arête concernée on a $\xi = 1$, donc :

$$\begin{cases} x = \langle N(\xi = 1, \eta) \rangle \{x_n\} \\ y = \langle N(\xi = 1, \eta) \rangle \{y_n\} \end{cases} \quad (III. 23)$$

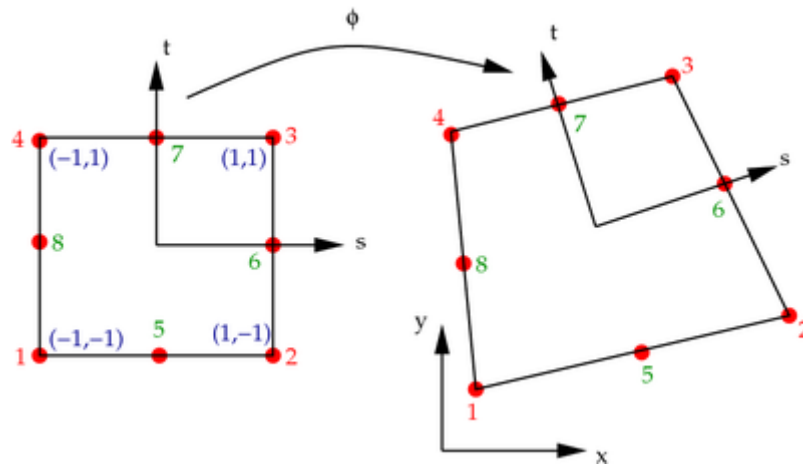
$\int_B^C f(x, y) d\Gamma$ devient :

$$\int_{-1}^1 f(\eta) \sqrt{\left[\left\langle \frac{\partial N}{\partial \eta}(\xi = 1, \eta) \right\rangle d\eta \{x_n\} \right]^2 + \left[\left\langle \frac{\partial N}{\partial \eta}(\xi = 1, \eta) \right\rangle d\eta \{y_n\} \right]^2} = \int_{-1}^1 f(\eta) J_s d\eta \quad (III. 24)$$

Avec :

$$J_s = \sqrt{x_{,\eta}^2 + y_{,\eta}^2} = \sqrt{\left[\langle N_{,\eta}(\xi = 1, \eta) \rangle \{x_n\} \right]^2 + \left[\langle N_{,\eta}(\xi = 1, \eta) \rangle \{y_n\} \right]^2} \quad (III. 25)$$

- Pour un élément quadrilatéral :



$$\Gamma_{12}: \left\| \begin{array}{l} \eta = -1 \\ d\Gamma = d\xi \end{array} \right.$$

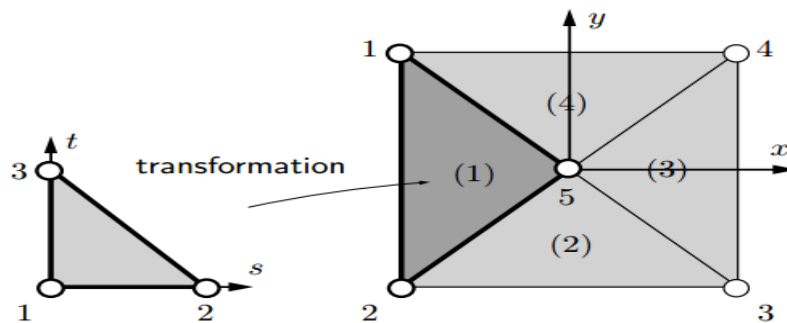
$$\Gamma_{34}: \left\| \begin{array}{l} \eta = 1 \\ d\Gamma = d\xi \end{array} \right.$$

$$\Gamma_{23}: \left\| \begin{array}{l} \xi = 1 \\ d\Gamma = d\eta \end{array} \right.$$

$$\Gamma_{14}: \left\| \begin{array}{l} \xi = -1 \\ d\Gamma = d\eta \end{array} \right.$$

Et l'intégration de 1 à 2 d'une quantité quelconque se ramène de -1 à +1.

- Pour un élément triangulaire :



$$\Gamma_{12}: \left\| \begin{array}{l} \eta = 0 \\ d\Gamma = d\xi \end{array} \right.$$

$$\Gamma_{23}: \left\| \begin{array}{l} \eta = 1 - \xi, (\xi = 1 - \eta) \\ d\Gamma = d\xi, (d\Gamma = d\eta) \end{array} \right.$$

$$\Gamma_{13}: \left\| \begin{array}{l} \xi = 0 \\ d\Gamma = d\eta \end{array} \right.$$

Dans le cas le bord 1 à 2 se ramène à 0,1.

6.4 Construction des matrices élémentaires

Jusqu'à maintenant nous avons vu presque tous les outils nécessaires pour la définition d'un élément.

Il convient donc de passer à leurs utilisation pour discrétiser les formes intégrales dans le but construire les matrices élémentaires correspondantes. Nous nous intéressons qu'aux formes construites par la méthode de Galerkin, utilisée dans notre cas d'étude.

Commençons, tout d'abord, par exprimer les différents opérateurs agissant sur U .

On a :
$$U = \langle N \rangle \{U_n\} \equiv NU_n$$

- La perturbation $\delta U = \delta(NU_n) = N\delta U_n$ (III. 26)

Puisque la perturbation n'agit que sur U , N étant un polynôme de x, y .

Pour pouvoir simplifier δU_n des équations générales, il est commode d'écrire :

$$\delta U = \delta U_n^T N^T \equiv \langle \delta U_n^T \rangle \{N\} \quad (III. 27)$$

- Le gradient : il est composé de $\partial/\partial x, \partial/\partial y$:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \langle \frac{\partial N}{\partial x} \rangle \{U_n\} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \langle \frac{\partial N}{\partial y} \rangle \{U_n\} \end{cases} \quad (III. 28)$$

D'où :

$$\nabla U = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial N}{\partial x} \rangle \\ \langle \frac{\partial N}{\partial y} \rangle \end{bmatrix} \{U_n\} \equiv \nabla N \cdot U_n \quad (III. 29)$$

Et la divergence : $\nabla^T U = \nabla^T N \cdot U_n$

- La dérivée par rapport au temps :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \langle N \rangle \left\{ \frac{\partial U_n}{\partial t} \right\} \equiv N \cdot \dot{U}_n \quad (III. 30)$$

Dans ce qui suit, il reste à évaluer les intégrales des combinaisons de ces opérateurs. Deux manières sont possibles :

- Intégration explicite sur l'élément de référence (ou réel), ce qui donne l'expression exacte de chaque élément de la matrice.
- Intégration numérique : utilisant souvent la quadrature de Gauss, qui consiste à remplacer l'intégrale d'une fonction par une somme des valeurs pondérées de cette fonction en des points bien déterminés.

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega = \sum_{i=1}^n \Psi_i f(x_i, y_i) \quad (III. 31)$$

n : Nombre de points de Gauss.

Ψ_i : Poids correspondants.

7 Assemblage « matrices globales »

Afin d'obtenir la solution complète d'un système, il faut que la condition d'équilibre global soit satisfaite.

Comme cette condition est vérifiée à l'intérieur de chaque élément (par la formulation de la matrice élémentaire), il ne nous reste donc, qu'à la vérifier au niveau de chaque nœud.

Pour cela, on doit déterminer les contributions de tous les éléments auxquels un nœud " i " appartient pour les égalités avec l'excitation extérieure appliquée en ce nœud.

Autrement dit, on doit situer chaque élément de la matrice élémentaire dans la matrice globale, et le sommer avec la valeur existante qui est le résultat des contributions des autres matrices élémentaires. Cet emplacement dans la matrice globale n'est qu'une localisation de la variable élémentaire dans la variable globale.

8 La résolution

Le passage par les étapes décrites dans les sections précédentes a pour but de substituer le problème posé en termes d'équations aux dérivées partielles, par un système d'équation différentielle équivalent qui définit un équilibre entre les forces d'inertie, de dissipation, de réactions internes et les force extérieures:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = R \quad (III. 32)$$

Parmi les procédés de résolution du système (III. 32) à titre indicatif et non à titre exhaustif ; deux types : intégration directe et superposition modale.

Dans les méthodes d'intégration directe, les équations sont intégrées en utilisant les procédures numériques pas à pas. Aucune transformation des équations en quelconques autres formes n'est effectuée.

En revanche, dans les méthodes de superposition modale les équations doivent être découplées. Chacune des équations ainsi obtenue est alors intégrée explicitement ou numériquement. La solution cherchée est une combinaison linéaire des solutions des équations découplées.

Le choix entre les deux méthodes dépend de leur efficacité numérique ainsi que la nature du problème et de l'information cherchée. Les méthodes pas à pas sont utilisées pour la simulation dans le temps de la réponse d'un système soumis à une excitation sismique quelconque (accélérogramme). Les méthodes d'analyse modale pour déterminer les caractéristiques vibratoires du système (modes et fréquences propres).

9 Convergence de la méthode des éléments finis

Puisque le domaine idéalisé par cette méthode est un assemblage d'éléments, donc, la performance de l'analyse dépend essentiellement du nombre d'élément utilisé et l'approximation dans chacun. La solution doit converger quand le nombre d'éléments augmente, sous réserve que l'élément soit complet et compatible c'est-à-dire conforme.

On note ici que « complet », veut dire que les déplacements du corps rigide doivent être effectués par l'élément sans se déformer ni développer des contraintes à l'intérieur. En d'autre termes l'approximation doit utiliser au moins une base polynomiale complète jusqu'à l'ordre m si des dérivées jusqu'à cet ordre apparaissent dans la formulation. Et que « compatible », assure la continuité de la fonction dans l'élément et entre éléments.

Pour poser ces conditions de convergence, Zienkiewicz annonce trois critères que la fonction représentative des déplacements (fonction d'interpolation) doit satisfaire :

- **Critère 1** : il est impossible que l'élément se déforme quand les déplacements de ses nœuds sont causés par un mouvement de corps solide.
- **Critère 2** : si les déplacements nodaux correspondent à des déformations constantes, on obtient effectivement ces déformations.
- **Critère 3** : les déformations aux interfaces restent bornées.

Les deux premiers critères ne doivent être satisfaits qu'à la limite lorsque la taille des éléments tend vers zéro. La convergence obtenue quand la taille des éléments tend vers zéro s'appelle convergence h (h : taille de l'élément).

D'un autre côté, nous pouvons obtenir la convergence vers la solution exacte en fixant une fois pour toute la taille des éléments et en augmentant le degré p des polynômes dans chaque élément (nombre de nœud). Dans ce cas, on parle de convergence p . D'une manière générale, la convergence p est la plus rapide.

Pour conclure nous pouvons confirmer, d'après cet exposé, que la MEF est facilement exploitable et peut toucher plusieurs domaines.

1 Introduction

Souvent, les études réalisées dans le domaine de la recherche présentent des phénomènes physiques réels. Le comportement de ces systèmes continus est généralement représenté par des équations aux dérivées partielles, associées à des conditions aux limites sur le domaine considéré. Dans la plus part des cas, les solutions analytiques de ces systèmes d'équations n'existent pas. Pour cela, il faudrait remplacer le système continu par un autre discret équivalent, dont le comportement est décrit par des équations algébriques qu'on peut résoudre par des méthodes numériques. Pour obtenir de telles équations algébriques, il existe des procédés comme : la méthode des résidus pondérés, la détermination de fonctionnelles variationnelles.

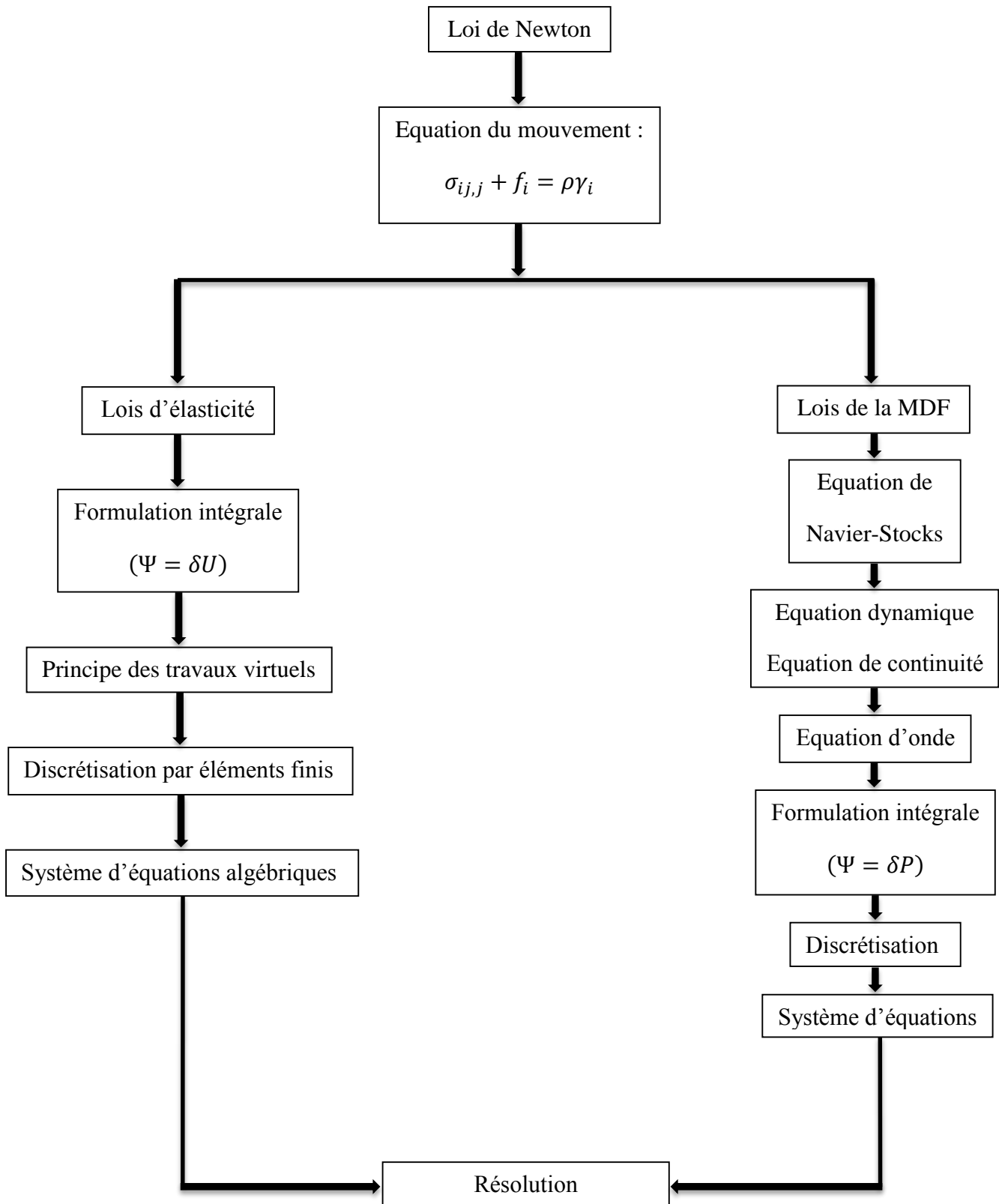
La formulation intégrale présentée dans ce présent chapitre s'applique pour le cas des réservoirs à deux et à trois dimensions, elle est obtenue en appliquant la méthode des résidus pondérés de type Galerkin aux équations d'équilibre dynamique des différents systèmes fluide, barrage et réservoir. Par la suite, les forces d'interaction dynamiques liant au système barrage-réservoir sont introduites en discrétisant les conditions d'équilibre des deux domaines considérés.

Le système barrage-réservoir étant constitué par deux milieux continus à savoir :

- Solide : corps du barrage.
- Fluide : réservoir.

Obéit à la loi fondamentale de la dynamique « loi de Newton ». Les équations gouvernantes de chaque milieu découlent de cette loi.

L'analyse du problème ainsi que la discrétisation par la méthode des éléments finis se fait selon le plan de la figure suivante :



2 Développement des équations

2.1 Equation du mouvement

L'énoncé classique de la loi de Newton se traduit par l'égalité des tenseurs des quantités d'accélération et celui des forces extérieures agissant sur une partie d'un système donné.

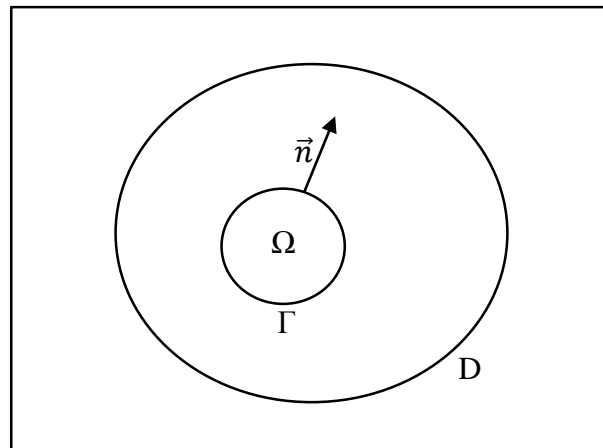


Figure 2-1 Volume infinitésimal $d\Omega$

Par conséquent, pour un volume infinitésimal $d\Omega$ (figure 2.1), l'égalité des forces s'écrit :

$$\int_{\Omega} \gamma dm = \int_{\Omega} f_v d\Omega + \int_{\Gamma} T(M, \vec{n}) d\Gamma \quad (IV.1)$$

Ou :

f_v : forces de volume.

$T(M, \vec{n})$: effort extérieur de cohésions.

γ : accélération de la partie $d\Omega$ ayant la masse dm .

L'effort intérieur de cohésions s'exprime par :

$$T(M, \vec{n}) = \sigma_{ij} n_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (IV.2)$$

Avec :

σ_{ij} : tenseur des contraintes (figure 2.2).

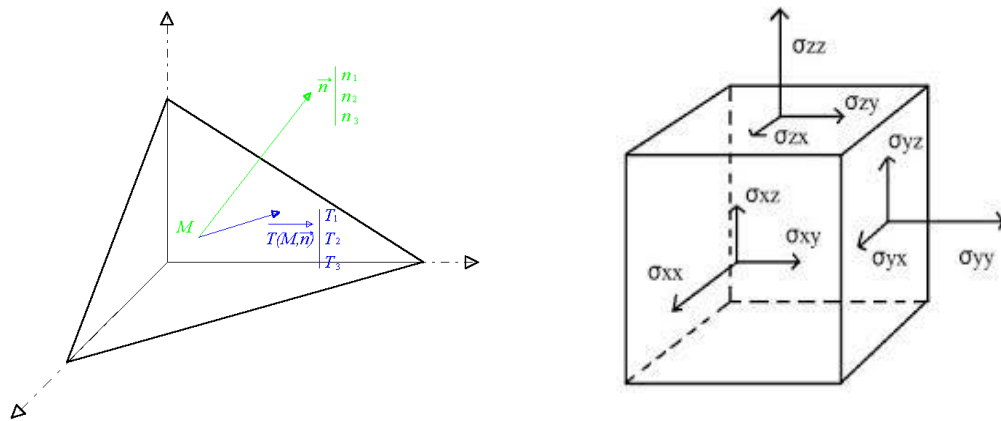


Figure 2-2 Tenseur des contraintes

Récrivons les termes de (IV. 1):

$$\int_{\Omega} \gamma dm = \int_{\Omega} \gamma \rho d\Omega \quad (IV. 3)$$

$$\int_{\Gamma} T(M, \vec{n}) d\Gamma = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} d\Omega \quad (IV. 4)$$

Donc (IV. 1) s'exprime par :

$$\int_{\Omega} \gamma \rho d\Omega = \int_{\Omega} f_v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} d\Omega \quad (IV. 5)$$

Si : $\int_{\Omega} \varphi d\Omega = 0 \quad \forall \Omega \in D$; alors: $\varphi = 0$ dans D

L'équation du mouvement s'écrit alors sur x_i :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \gamma_i \quad (IV. 6)$$

2.2 Equations gouvernantes du solide

2.2.1 Equation d'élasticité

Ce sont les équations usuelles d'un milieu élastique continu ; on ne ferait que de les rappeler :

- Les déformations : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (U_{i,j} + U_{j,i})$ (IV. 7)

Avec U_i déplacement suivant la direction x_i .

- Les contraintes : $\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$ (loi de Hook) (IV. 8)

2.2.2 Equations pour l'élasticité plane à 2 dimensions

Vu la symétrie des tenseurs, nous allons adopter la notation vectorielle suivante pour alléger les équations.

Posons que :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} ; \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad (IV. 9)$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} ; \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \quad (IV. 10)$$

$$U = \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

D'où:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} U_{i,i} \\ U_{j,j} \\ U_{i,j} + U_{j,i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} \quad (IV. 11a)$$

$$\varepsilon = [S]\{U\} \equiv SU \quad (IV. 11b)$$

Et :

$$\sigma = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \cdot \varepsilon = DSU \quad (IV.12)$$

D : matrice d'élasticité dont les éléments sont donnés par :

$$d_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad d_2 = \nu d_1 \quad \text{en contraintes planes}$$

$$d_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad d_2 = \frac{\nu d_1}{1-\nu} \quad \text{en déformations planes} \quad (IV.13)$$

Dans les deux cas, de contraintes ou de déformations planes, d_3 est défini par :

$$d_3 = \frac{1}{2}(d_1 - d_2)$$

Où E et ν sont respectivement le module d'élasticité et le coefficient de poisson du matériau considéré.

2.2.3 Expression du principe des travaux virtuels

L'expression du principe des travaux virtuels, qui stipule que pour un déplacement virtuel, dans la structure, le travail du chargement extérieur est égal au travail des contraintes développées par le système, peut être obtenue par application de la formulation variationnelle aux équations d'équilibre.

En prenant comme fonction poids $\Psi = \delta U$, la forme forte est :

$$w = \int_{\Omega} \delta U_i (\sigma_{ij,j} + f_i - \rho \gamma_i) d\Omega = 0 \quad (IV.14)$$

$$w = \int_{\Omega} \delta U_i \sigma_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} \delta U_i f_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta U_i \rho \gamma_i d\Omega = 0 \quad (IV.15)$$

$$w = w_1 + w_2 + w_3 = 0$$

$$\Rightarrow w_1 = \int_{\Omega} \delta U_i \sigma_{ij,j} d\Omega = \int_{\Omega} (\delta U_i \sigma_{ij})_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \delta U_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega \quad (IV.16)$$

$$w_{11} + w_{12}$$

$$w_{11} = \int_{\Omega} (\delta U_i \sigma_{ij})_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta U_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma \text{ (théorème de Gauss) (IV.17)}$$

$$w_{12} = -\int_{\Omega} \delta U_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega = -\int_{\Omega} \delta \varepsilon \sigma d\Omega \text{ (IV.18)}$$

σ et ε sont données par (IV.9) et (IV.10).

$$w = \int_{\Omega} \delta \varepsilon \sigma d\Omega + \int_{\Gamma} \delta U \sigma \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta U f d\Omega - \int_{\Omega} \delta U \rho \ddot{U} d\Omega = 0 \text{ (IV.19)}$$

$$w = w_c + w_f + w_v + w_i$$

Donc, on a obtenu l'expression des travaux virtuels dont lequel on a :

$$w_c = \int_{\Omega} \delta \varepsilon \sigma d\Omega : \text{énergie de déformation ou de réaction du milieu. (IV.20)}$$

$$w_v = \int_{\Omega} \delta U f d\Omega : \text{travail des forces de volume. (IV.21)}$$

$$w_i = \int_{\Omega} \delta U \rho \ddot{U} d\Omega : \text{travail des forces d'inertie. (IV.22)}$$

$$w_f = \int_{\Gamma} \delta U \sigma \vec{n} d\Gamma : \text{travail du chargement extérieur. (IV.23)}$$

2.3 Equation gouvernantes dans le fluide

D'après les lois de la mécanique des fluides :

Dans le fluide, le tenseur des contraintes s'exprime par :

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + \tau_{ij} \text{ (IV.24)}$$

Avec :

P : pression.

δ_{ij} : symbole de Kronecker ; $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

τ_{ij} : contraintes de cisaillement dues à la viscosité du fluide.

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (IV.25)$$

μ : coefficient de viscosité dynamique.

ε_{ij} : vitesse des déformations.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}) \quad (IV.26)$$

V_i : vitesse du fluide dans la direction x_i .

2.3.1 Expression des équations du mouvement

Remplaçons les termes obtenus ci-dessus dans l'équation fondamentale (IV.6) :

$$(-P\delta_{ij} + \tau_{ij})_{,j} + f_i - \rho\gamma_i = 0 \quad (IV.27)$$

$$-P_{,j} + \left(2\mu \cdot \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i})\right)_{,j} + f_i - \rho\gamma_i = 0 \quad (IV.28)$$

$$-P_{,j} + \mu(V_{i,jj} + V_{j,ij}) + f_i - \rho\gamma_i = 0 \quad (IV.29)$$

Soit en écriture condensée :

$$-\nabla P + \mu\nabla^2 V + f - \rho \frac{dV}{dt} = 0 \quad (IV.30)$$

C'est l'équation de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes.

3 Modélisation de système barrage-réservoir

Les équations précédentes sont applicables au cas de barrage-réservoir si celui-ci est considéré comme problème bidimensionnel.

3.1 Formulation

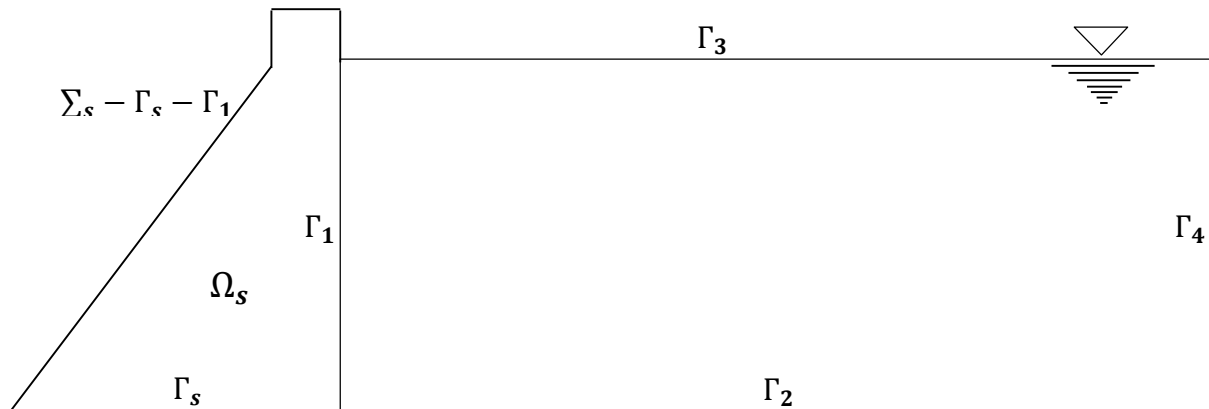


Figure 3-1 Domaine barrage-réservoir

3.1.1 Le barrage

En se basant sur les notations suivantes :

Ω_s, Σ_s domaine solide et son contour à l'équilibre

Γ_s base de la structure du barrage

Γ_1 l'interface fluide-structure

ρ_s densité massique de la structure du barrage

U_i, \ddot{U}_i déplacement et accélération dans la $i^{\text{ème}}$ direction à l'intérieur du corps du barrage

p pression hydrodynamique sur le parement amont

n_i la $i^{\text{ème}}$ composante de la normale unitaire \mathbf{n}

f_i forces de volume dans la $i^{\text{ème}}$ direction

σ_{ij} composante du tenseur des contraintes,

Le barrage serait donc modélisé comme une plaque à 2D avec les hypothèses suivantes :

- Matériau homogène et isotrope.
- Comportement élastique linéaire.
- Fondation rigide.

Les conditions aux limites appropriées devant être vérifiées sont :

- a) La condition d'équilibre dynamique entre les contraintes et le chargement du à la pression hydrodynamique sur la face amont du barrage :

$$\sigma_{ij}n_j = pn_j \quad |\Gamma_1$$

- b) Les déplacements relatifs sont nuls à la base. La liaison entre le corps du barrage et le rocher de fondation supposé rigide est parfaite ; l'interaction sol-structure étant simplifiée dans cette étude :

$$U_i = 0 \quad |\Gamma_s$$

- c) Sur le reste du contour, le barrage étant libre, les contraintes sont nulles :

$$\sigma_{ij}n_j = 0 \quad |\Sigma_s - \Gamma_s - \Gamma_1$$

L'équation (IV. 19) s'écrit :

$$w = -\int_{\Omega} \delta \varepsilon \sigma d\Omega + \int_{\Omega} \delta u \rho \ddot{U} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta u (-P) \vec{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \delta u \rho \ddot{x} d\Gamma \quad (IV. 31)$$

\ddot{x} : accélération sismique.

3.1.2 Le réservoir

Le fluide serait modélisé comme étant linéairement incompressible et sans écoulement, ayant comme hypothèses :

- Non visqueux ;
- Domaine finis.

L'équation (IV. 29) se réduit à :

$$\rho V = -\nabla P \quad (IV. 32)$$

Puisque $\mu = 0$, et les effets convectifs sont négligés ($\nabla^2 V = 0$).

Pour une discrétisation complète, on doit associer à cette équation :

- L'équation de conservation de la masse :

$$\rho + \rho \nabla V = 0 \quad (IV. 33)$$

- L'équation de compressibilité :

$$K = \frac{-dP}{-dV/V} = \frac{dP}{d\rho/\rho} \quad (IV. 34)$$

Donc :
$$d\rho = \frac{\rho}{K} dP \quad (IV. 35)$$

Ainsi l'équation de la pression dans le fluide peut être obtenue comme suit :

Remplaçant l'équation (IV. 35) dans (IV. 33), cela donne :

$$\frac{\rho}{K} \dot{P} + \rho \nabla V = 0 \quad (IV. 36)$$

Multiplions (IV. 36) par ∇ , et (IV. 32) par $\partial/\partial t$

On obtient :

$$\begin{cases} \rho \nabla \dot{V} + \nabla^2 P = 0 \\ \rho \nabla \dot{V} + \frac{\rho}{K} \ddot{P} = 0 \end{cases} \quad (IV. 37)$$

D'où par soustraction :

$$\nabla^2 P - \frac{1}{\left(\frac{\rho}{K}\right)^{-1}} \ddot{P} = 0$$

Soit : $\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \ddot{P} = 0$ (IV. 38)

Qui régit la propagation d'ondes sonores dans un milieu bidimensionnel isotrope avec une célérité C .

Pour l'eau $C = \sqrt{K/\rho} \approx 1440 \text{ m/s}$ (IV. 39)

Dans le cas d'hypothèse d'un fluide incompressible, cette équation se réduit à l'équation de Laplace suivante :

$$\nabla^2 P = 0$$
 (IV. 40)

Les conditions aux limites nécessaires pour bien poser le problème mathématique sont :

- **Sur le parement amont du barrage Γ_1 :**

Sur le parement amont du barrage (Γ_1), on suppose que les particules fluides soient parfaitement solidaires avec les particules solides du barrage, l'équation dynamique (IV. 32) du fluide s'écrit pour cette limite par :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho_f \dot{V}_n = -\rho_f \ddot{U}_n$$
 (IV. 41)

Où \ddot{U}_n désigne la projection des accélérations des particules solides sur la normale \mathbf{n} à la face amont du barrage.

- **Sur le fond Γ_2 :**

Lorsque le chargement sismique d'accélérations \ddot{x} au fond du réservoir, ou bien les deux en même temps sont inclinés, l'écriture de l'équation dynamique devient :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho_f \ddot{x} \vec{n}$$
 (IV. 42)

Au fond du réservoir (Γ_2), considéré rigide et horizontal, on suppose que les particules fluides sont parfaitement solidaires avec les particules solides du barrage, le séisme est horizontal ;

Donc, cette condition se réduit à :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \quad (IV.43)$$

- **Sur la surface libre Γ_3 :**

Au niveau de la surface libre du réservoir (Γ_3), on prendra un gradient de pression nul tout en négligeant l'effet des ondes de surfaces pouvant être générées en présence de grandes fluctuations des pressions hydrodynamiques dans le réservoir.

$$p = 0 \quad (IV.44)$$

- **Sur la limite de troncature Γ_4 :**

Sur la limite (Γ_4), considérée comme limite de troncature du domaine délimitant le réservoir, l'effet de radiation des ondes est considéré négligeable en adoptant une longueur du réservoir supérieure ou égale à trois fois celle de la hauteur du barrage.

Plusieurs travaux de recherches sont effectués à ce sujet, notamment ceux de Zienkiewicz et Newton en 1969 concernant cette limite connue sous le nom de «Limite de radiation ».

$$P = 0 \quad (IV.45)$$

4 Formulation variationnelle des équations du fluide

Dans le but d'obtenir une expression décrivant le comportement du fluide, analogue à celle du principe des travaux virtuels utilisée par la méthode des éléments, réécrivons les équations (IV. 38,41, et 42) sous forme intégrale faible.

Le problème mathématique classique revient à résoudre pour l'inconnu p le système suivant :

$$\begin{cases} \nabla^2 P = 0 & |\Omega_f \\ \frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \ddot{U}_n & |\Gamma_1 \\ \frac{\partial P}{\partial n} = 0 & |\Gamma_2 \\ P = 0 & |\Gamma_3 \\ P = 0 & |\Gamma_4 \end{cases}$$

Le problème variationnel s'écrit en forme forte via la méthode de Galarkin :

$$w = \int_{\Omega} \delta P \nabla^2 P d\Omega \quad (IV.46)$$

La forme faible :

$$w = -\int_{\Omega} \delta \nabla P \nabla P d\Omega + \int_{\Omega} \delta P \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (IV.47)$$

$$w = w_1 + w_2 = 0$$

$$w_2 = \sum_{i=1}^4 \int_{\Gamma_i} \delta P \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma \quad (IV.48)$$

En remplaçant l'intégrale sur Γ_i par la somme des intégrales sur les différentes limites constituant le contour, et en utilisant pour chacune d'elles la condition à la limite correspondante, l'expression finale de la formulation variationnelle devient :

$$w_2 = \int_{\Gamma_1} \delta P (-\rho \ddot{U} \vec{n}) d\Gamma \quad (IV.49)$$

En multipliant le tout par (-1) :

$$w = \int_{\Omega} \delta \nabla P \cdot \nabla P d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta P \rho \ddot{U} \vec{n} d\Gamma \quad (IV.50)$$

1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons présenté le modèle mathématique associé aux problèmes d'interaction fluide-structure.

Le but de ce chapitre est de présenter le modèle numérique du problème posé à l'aide de l'approximation par élément finis.

Nous utilisons les notions du chapitre III, pour obtenir une discrétisation spatiale des formes intégrales et la résolution du système matriciel obtenu.

2 Discrétisation spatiale

Le domaine barrage-réservoir étant discrétisé en éléments finis, nous utilisons l'élément suivant :

- Triangulaire à 3 nœuds (approximation linéaire).
- Rectangulaire à 4 nœuds (approximation linéaire).

Avec un degré de liberté par nœud pour les éléments « solides » (U, V), et un degré de liberté par nœud pour les éléments « fluide » (P).

On a alors :
$$U = N_u U_n$$

Avec :
$$\begin{cases} N_{ui} = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} : \text{fonction de forme} \\ U_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} : \text{variable nodale} \end{cases} \quad (V.1)$$

Et :
$$P = N_p P_n$$

Avec :
$$\begin{cases} N_p = \langle N_i \rangle : \text{fonction de forme} \\ P_i = \{ P_i \} : \text{variable nodale} \end{cases} \quad (V.2)$$

Exemple :

Pour l'élément triangulaire à trois nœuds :

$$U = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix}$$

Et
$$P = \langle 1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

2.1 Cas du barrage

Reprenons les termes (IV.30) et appliquons (IV.9) à (IV.12)

- L'énergie interne :

$$w_e = \int_{\Omega} \delta \varepsilon \sigma d\Omega = \int_{\Omega} \delta(SU)(DSU) d\Omega \quad (V.3)$$

Remplaçons par (V.1) :

$$w_e = \int_{\Omega} \delta(SN_u U_n)(DSN_u U_n) d\Omega \quad (V.4)$$

Posons $SN = B$, on obtient :

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (V.5)$$

Et
$$\delta(SN_u U_n) = \delta U_u^T N_u^T S^T = \delta U_u^T B^T \quad (V.6)$$

$$D'où : \quad w_e = \int_{\Omega} \delta U_u^T B^T D B d\Omega = \delta U_u^T K U_n \quad (V.7)$$

$$\text{Avec :} \quad K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega \quad (V.8)$$

Expression de la matrice de rigidité de la structure ayant les caractéristiques suivantes :

- Définie positive : $\forall X \in R^n; X^T K X > 0$
Pour $X = U$ (déplacement)
 $U^T K U = 1/2 K U^2$: Énergie de réaction, toujours positive.
- Symétrique, car D est symétrique (théorème de Maxwell-Betti). On donne la forme explicite de K élémentaire:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & N_{i,y} \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} d\Omega \quad (V.9)$$

- Les termes d'inertie :

$$w_i = \int_{\Omega} \delta U \rho \ddot{U} d\Omega = \int_{\Omega} \delta U_n^T N^T \rho N \ddot{U}_n d\Omega \quad (V.10)$$

$$w_i = \delta U_n^T M \ddot{U}_n$$

$$\text{Avec :} \quad M = \int_{\Omega} N^T \rho N d\Omega \quad (V.11)$$

Expression de la matrice masse non condensée, qui caractérise l'inertie de la structure.

Elle peut être exprimée sous forme condensée (matrice diagonale) si l'on opte pour le concept de condensation de la masse sur les nœuds.

L'expression explicite est :

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \rho \begin{bmatrix} N_j & 0 \\ 0 & N_j \end{bmatrix} d\Omega$$

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \rho \begin{bmatrix} N_i N_j & 0 \\ 0 & N_i N_j \end{bmatrix} d\Omega \quad (V.12)$$

Pour le concept de masse répartie.

$$\text{Et :} \quad M_{ii} = \int_{\Omega} N_{ui} \rho N_{ui} d\Omega \quad (V.13)$$

Pour le concept de masse concentrée.

- Les termes du chargement :

$$w_f = \int_{\Gamma_1} \delta U (-P) \vec{n} d\Gamma \quad (V.14)$$

Ce qui marque cette expression de celle des chargements courant est que la pression elle-même est inconnue et est influencée par les déplacements. Dans ce cas il faut remplacer P par son approximée (V.2).

$$w_f = - \int_{\Gamma_1} \delta U_n^T N_u^T \vec{n} N_p P_n d\Gamma \quad (V.15)$$

$$w_f = \delta U_n^T Q P_n$$

$$\text{Avec :} \quad Q = - \int_{\Gamma_1} N_n^T \vec{n} N_p d\Gamma \quad (V.16)$$

C'est l'expression de la matrice d'interaction liant le comportement des deux milieux. Elle caractérise l'échange d'énergie mécanique au niveau de l'interface.

L'expression explicite est :

$$Q_{ij} = \int_{\Gamma_1} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} \langle N_{pj} \rangle d\Gamma$$

$$Q_{ij} = \int_{\Gamma_1} \begin{bmatrix} N_i N_{pj} & 0 \\ 0 & N_i N_{pj} \end{bmatrix} d\Gamma \quad (V.17)$$

Remarque :

- Pour un chargement sismique à la base :

$$w_{fs} = \int_{\Gamma_b} \delta U \rho \ddot{u} \vec{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_b} \delta U_n^T N_u^T \vec{n} \rho \ddot{u} d\Gamma \quad (V.18)$$

Avec \ddot{u} : accélération sismique.

$$w_{fs} = \delta U_n^T F$$

$$F = \int_{\Gamma_b} N_u^T \vec{n} \rho \ddot{u} d\Gamma \quad (V.19)$$

L'expression explicite est :

$$F_i = \int_{\Gamma_b} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} \rho \ddot{u} d\Gamma \quad (V.20)$$

- L'amortissement de système est exprimé par :

$$w_a = C U_n \quad (V.21)$$

Avec C : matrice d'amortissement dont l'expression diffère d'un auteur à un autre.

$$C = \int_{\Omega} N^T \mu N d\Omega \quad (V.22a)$$

μ : viscosité du matériau.

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (V.22b)$$

α, β : Coefficients déterminés expérimentalement ou à partir de l'analyse modale de la structure.

L'expression du système globale est : après simplification de δP_n

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{Q}\mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (V.23)$$

2.2 Cas du fluide

Remplaçons dans l'équation (IV.50) par (V.2) et (V.1) :

$$w = \int_{\Omega} \delta P_n^T \nabla N_p^T \nabla N_p P_n d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta P_n^T N_p^T \rho \vec{n} \dot{U}_n d\Gamma = 0 \quad (V.24)$$

Simplifions δP_n (perturbation quelconque) :

$$\left(\int_{\Omega} \nabla N^T \nabla N d\Omega \right) P_n + \left(\int_{\Gamma_1} N_p^T \rho N_u \vec{n} d\Gamma \right) \dot{U} = 0 \quad (V.25)$$

Le système s'écrit sous la forme :

$$HP + Q_p \dot{U} = 0 \quad (V.26)$$

2.3 Expression explicite des matrices

- La matrice H

$$H = \int_{\Omega} \nabla N^T \nabla N d\Omega ; H_{ij} = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} \langle N_{i,x} \quad N_{i,y} \rangle d\Omega$$

$$H_{ij} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_{i,x}^2 & N_{i,x} N_{i,y} \\ N_{i,y} N_{i,x} & N_{i,y}^2 \end{bmatrix} d\Omega \quad (V.27)$$

H : est la matrice de l'opérateur laplacien.

- La matrice Q_p

$$Q_p = \int_{\Gamma_1} N_p^T \rho N_u \vec{n} d\Gamma$$

C'est la même expression que la matrice d'interaction (V.16) avec les termes transposés :

$$Q_p = -\rho Q^T \quad (V.28)$$

Par cette expression on trouve bien la dépendance entre P et U .

3 Processus d'analyse & approximation par le logiciel MATLAB

Matlab est un système interactif de programmation scientifique, pour le calcul numérique et la visualisation graphique. Il possède un langage de programmation puissant et simple à utiliser.

3.1 Utilisation de pdeTool

Le pdeTool sous Matlab est un outil informatique permettant le traitement des équations aux dérivées partielles en deux dimensions en utilisant la méthode des éléments finis. Les étapes de l'utilisation sont :

- Tapez sous la fenêtre des commandes de Matlab la commande pdeTool, vous devez recevoir l'espace de travail.
- Choix d'un repère avec indication de l'échelle pour l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
- Définition du domaine l'objectif de l'étude.
- Définition des conditions aux limites pour chaque contour élémentaire.
- Choix du type d'équation différentielle au dérivé partiel.
- Choix de l'élément de référence et de la densité du maillage.
- Lancement des calculs et exploitation des résultats.

1 Introduction

Ce chapitre est organisé en plusieurs parties. En premier temps on a commencé par la validation de modèle adapté en comparons les résultats avec sous obtenu par Westergaard.

Les travaux de Westergaard constituent une référence reconnue, c'est pour cette raison que nous les utiliserons comme élément de comparaison.

La distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage sera représentée par la variation du coefficient de pression hydrodynamique normalisée par la pression hydrostatique en fonction du rapport de la profondeur considérée à la profondeur total du réservoir Y/H , elle est d'une forme parabolique par rapport à la hauteur d'eau. Elle atteint sa valeur maximale près du pied amont du barrage. Cette valeur est illustrée par le tableau 1 représentant la variation du coefficient de pression C_p en fonction de (Y/H) .

Dans cette étude on considère un domaine de fluide incompressible rectangulaire représentant un réservoir d'un barrage de hauteur H . Le domaine est borné à gauche par le parement amont de la structure de barrage supposé infiniment rigide, et encastrée à la base (figure1). Le fond de réservoir est considéré comme horizontal, et le sol est supposé indéformable en mouvement vibratoire.

En deuxième partie on aborde l'effet de position de limite de rayonnement.

La troisième partie est l'étude sur le maillage optimal à utiliser pour le domaine de discrétisation.

La quatrième partie est concernée par l'évolution de pression hydrodynamique dans le temps.

Enfin, dans la cinquième partie on calcul les caractéristiques de vibration libre de barrage.

2 Etude de cas de barrage de Oued-Fodda

2.1 Bref historique sur le barrage de Oued-Fodda

Le barrage de l'Oued Fodda est le premier en date des grands ouvrages modernes construits en Algérie, le début de sa mise en eau remontant à la fin de l'année 1932. C'est aussi le plus élevé (101 m), et le volume de sa retenue (228 millions de m^3) le place immédiatement après le barrage du Gribe (280 millions de m^3) au point de vue capacité.

2.2 Considération de barrage

Le barrage choisi pour cette étude est le barrage de l'oued fodda, sa discrétisation a fait par la méthode des éléments finis

Le comportement du béton dans le barrage est supposé linéaire, élastique avec les propriétés suivantes :

- Masse volumique = $2460 \text{ kg}/m^3$
- Coefficient de poisson = 0.2
- Module de Young = 24600 MPa
- Le facteur d'amortissement critique est choisie constate (5%) dans tous les modes propres de vibration de barrage

Données géométriques du barrage d'après la commission internationale des grands barrages (1952) :

- Type et caractéristique de barrage : barrage-poids en béton
- Altitude de la retenue maxima : 370.50 m
- Surface de la retenue au niveau maximum : 700 ha
- Capacité totale du réservoir : 228 Hm^3
- Hauteur maxima au-dessus du point le plus : 101 m
- Hauteur de la crête de barrage au-dessus de la crête du déversoir : 4.6 m
- Pente des parements
 - parement amont : $f = 1/10$
 - Parement aval : $f = 0.675$
- Largeur au couronnement : 5 m
- Longemer au couronnement : 181.4 m
- Rayon de courbure du couronnement implantation rectiligne
- Volume du corps du barrage $273 \text{ 000 } m^3$

Présentation de la géométrie de barrage-réservoir

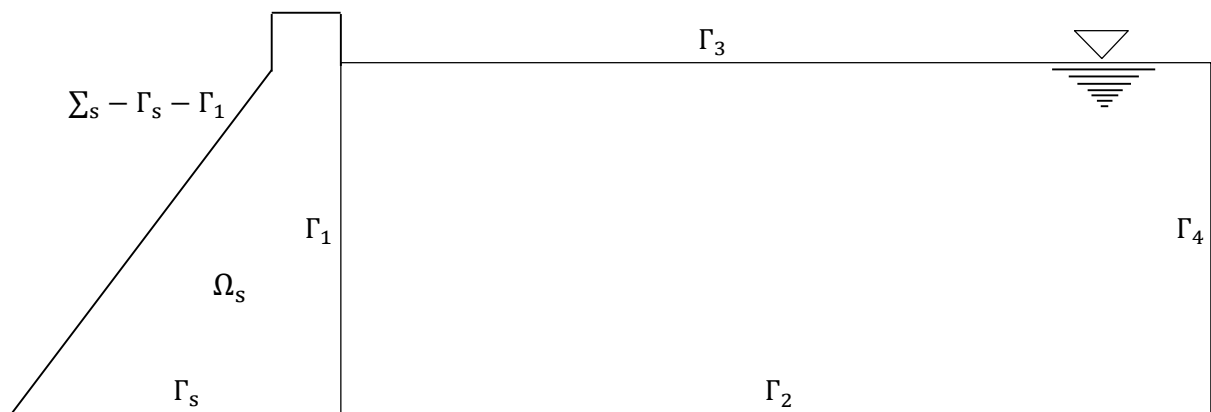


Figure 2-1 Le système barrage-réservoir

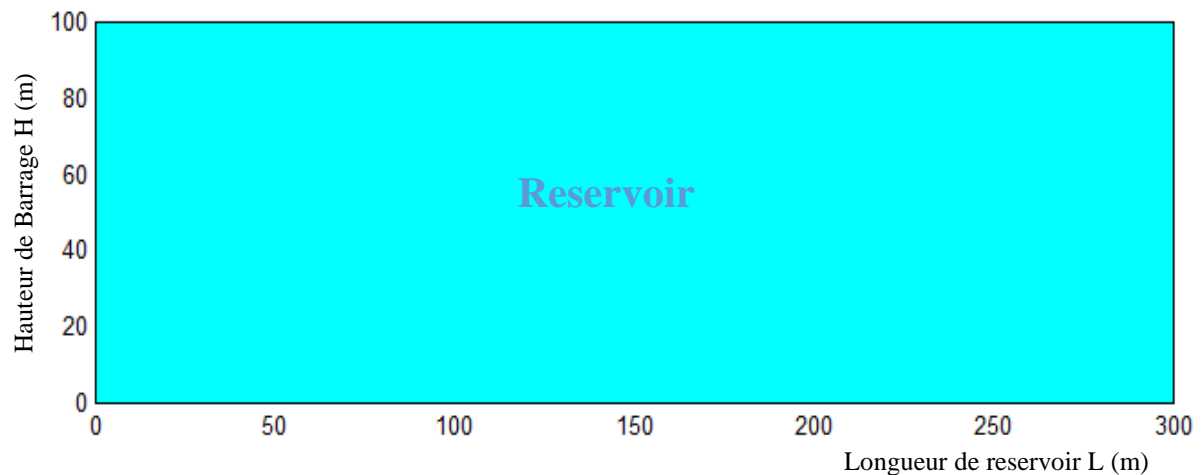


Figure 2-2 Réservoir de barrage

3 L'effet de position de limite de rayonnement

La nature de la condition aux limites à imposer sur le bord amont du réservoir dépend de la hauteur de barrage d'une part. Généralement, les réservoirs de la grande hauteur de barrage s'étendent sur une distance très éloignée de la structure du barrage. D'autre part, les ondes de pressions hydrodynamiques générées par les vibrations de la structure se propagent vers l'amont du réservoir sans se réfléchir et on admet qu'à une distance supposer étendu assez loin pour être considéré comme infini, la pression s'annule.

Une étude paramétrique a été effectuée sur le choix de cette région, la longueur de réservoir (L). La figure (3.1) présente les tendances de la distribution du coefficient des pressions hydrodynamiques C_p en fonction de rapport de la profondeur considérée à la profondeur totale de réservoir Y/H sur le parement amont du barrage verticale. On a observé l'allure de coefficient des pressions hydrodynamiques sont confondu à partir de la valeur du paramètre L/H supérieurs au égale à 2 ça graphiquement, est ce qui m'indique sur le tableau suivant à l'échelle 1 dixième.

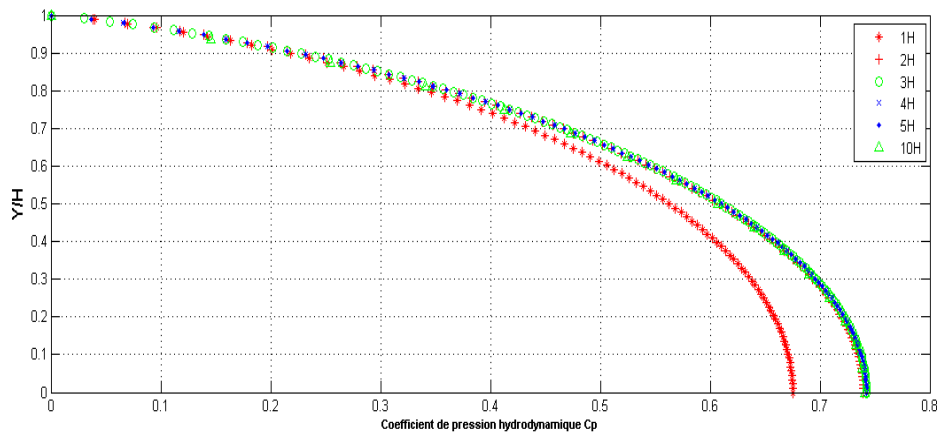


Figure 3-1 Distribution du coefficient des pressions hydrodynamiques C_p en fonction (Y/H)

Dans le tableau 1 on a présenté le maximum des résultats de coefficient des pressions hydrodynamiques $C_{p_{max}}$ sur le parement amont du barrage, ces résultats elles sont confondues avec le $C_{p_{base}}$ à la base de parement amont de barrage. Ce qui autorise par la suite de prendre la longueur de réservoir $L = 3H$.

Tableau 4: Comparaison de C_p obtenu et solution de Westergaard

| Longueur | H | 2H | 3H | 4H | 5H | 10H | Westergaard |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|
| $C_{p_{max}}$ | 0.675 | 0.739 | 0.742 | 0.742 | 0.742 | 0.742 | 0.74 |
| $C_{p_{base}}$ | 0.675 | 0.739 | 0.742 | 0.742 | 0.742 | 0.742 | 0.74 |

4 Choix de Maillage

Les codes d'éléments finis font partie des outils couramment utilisés lors de l'analyse de problèmes physiques. Une analyse par éléments finis nécessite plusieurs étapes. L'utilisateur désire résoudre un problème par la méthode des éléments finis doit tout d'abord créer un **maillage** figurant le domaine d'étude. Cette étape est souvent **très délicate** car la qualité de l'approximation par éléments finis dépend fortement de la structure de ce maillage. L'utilisateur doit également imposer un certain nombre de conditions aux limites et définir une série de sollicitations. Une fois le problème bien défini, la résolution du problème intervient par l'appel d'un programme spécifique, le solveur. En général, cette étape se déroule sans intervention extérieure. Une fois le résultat obtenu, il va ensuite être nécessaire d'exploiter les résultats en calculant et en représentant graphiquement une série de paramètres dérivés.

L'opération de maillage, qui constitue souvent une des parties les plus délicates de la modélisation, doit tout d'abord être précisée. Les fonctions d'interpolation, véritable point central de l'approximation par éléments finis. Nous, dans ce travail on utilise la fonction de forme d'ordre (1), et l'élément triangulaire à trois nœuds pour occuper tout le domaine de réservoir. Un triangle est dégénéré si ses sommets sont colinéaires ou confondus, et donc si son aire est nulle. Ces indications sont nécessaires à la compréhension de la méthodologie de modélisation directe développée dans notre travail.

Nous avons utilisé plusieurs maillages pour les simulations numériques de manière à nous assurer de l'indépendance des résultats sur la discrétisation. Les maillages sont présentés à figures suivantes 4, 5 et 6 où l'on constate que l'un d'eux est raffiné tandis que les autres ne sont pas. Les caractéristiques de ces maillages sont présentées au tableau 2.

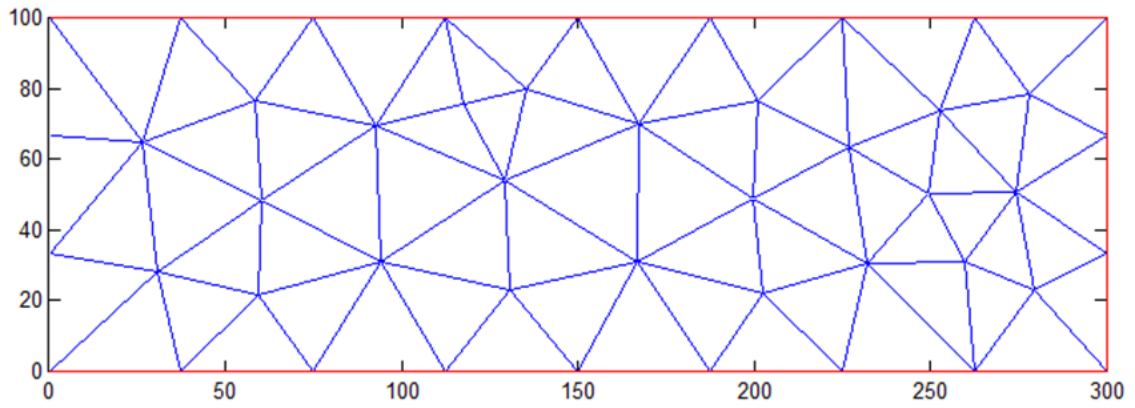


Figure 4-1 Maillage grossier du fluide dans le réservoir

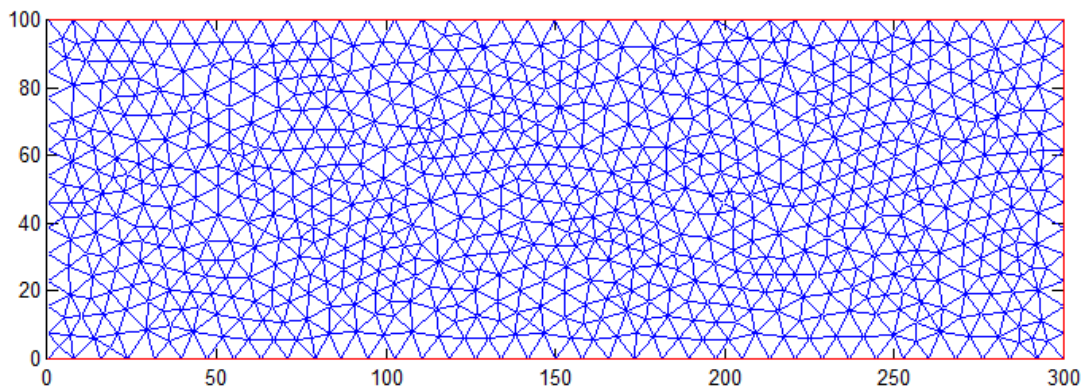


Figure 4-2 Maillage moyen du fluide dans le réservoir

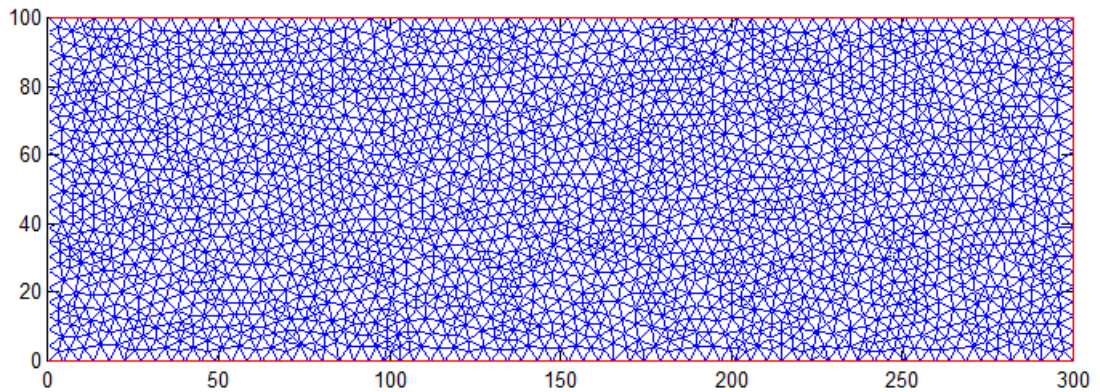


Figure 4-3 Maillage fin du fluide dans le réservoir

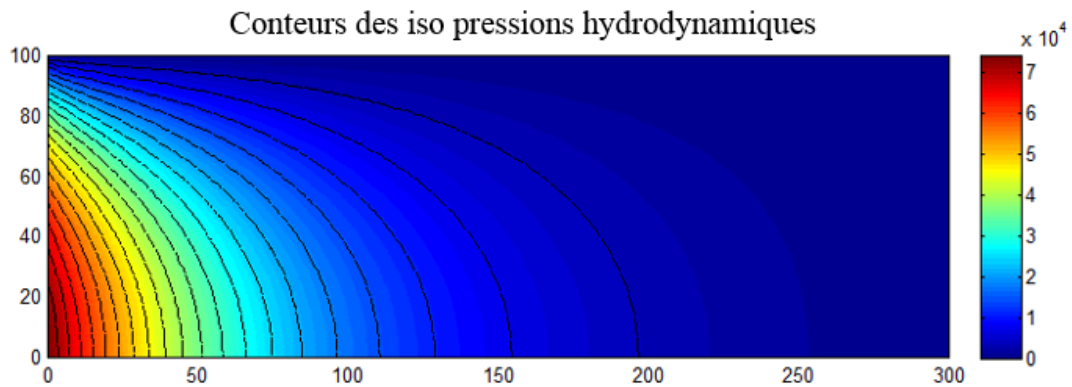


Figure 4-4 les Conteurs des iso pressions hydrodynamiques

Le maillage ne doit pas être inutilement fin et nous devons faire un compromis entre la finesse de la représentation géométrique et le cout en temps de calcul.

Les résultats obtenus se résument dans le tableau 2 ci-dessous :

Tableau 5: Influence de nombre des nœuds de maillage dans le parement amont du barrage sur le coefficient des pressions hydrodynamiques C_p

| Nombre de nœuds parement amont | Nombre de nœuds | Nombre d'éléments | $C_{P_{max}}$ | $C_{P_{base}}$ |
|-----------------------------------|--------------------|----------------------|---------------|----------------|
| 24 | 2588 | 4994 | 0.742 | 0.742 |
| 20 | 1727 | 3304 | 0.742 | 0.742 |
| 12 | 541 | 999 | 0.741 | 0.741 |
| 8 | 254 | 452 | 0.740 | 0.740 |
| 7 | 145 | 247 | 0.738 | 0.738 |
| 4 | 46 | 68 | 0.728 | 0.728 |

Le Tableau 5 montre l'influence de nombre des nœuds de maillage dans le parement amont du barrage sur le coefficient des pressions hydrodynamiques C_p , un nombre de 8 nœuds sur le parement amont de barrage le résultat de C_p est suffisant pour une erreur de 0.1%, Dans la figure (4.4) on a observé que l'allure de coefficient des pressions hydrodynamiques C_p en fonction du nombre des nœuds de maillage sur le parement amont du barrage sont confondu à partir de nœuds huit.

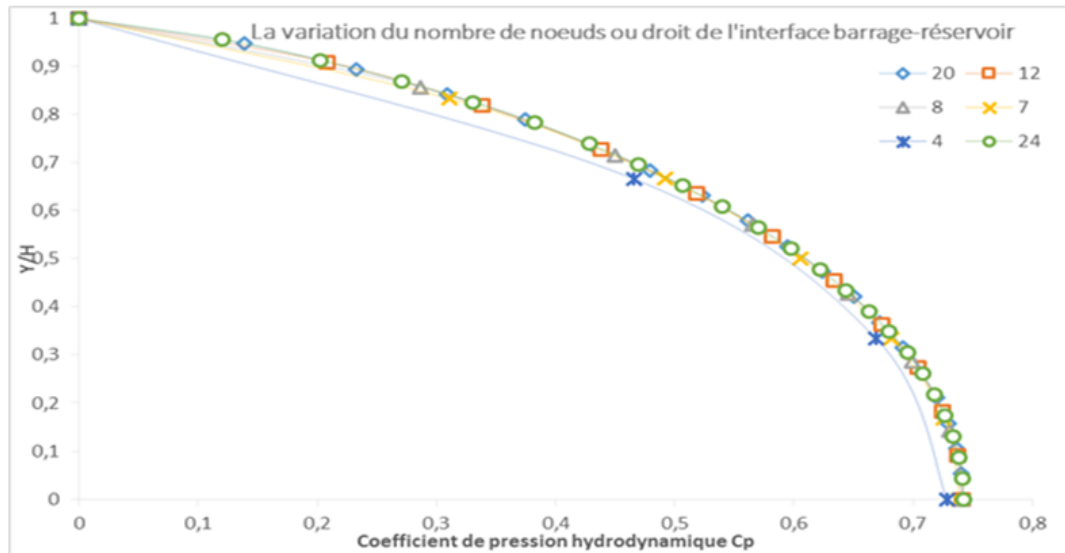


Figure 4-5 Variation du coefficient des pressions hydrodynamiques C_p en fonction du nombre des nœuds de maillage

On note que la valeur du coefficient des pressions hydrodynamiques C_p n'est pratiquement pas sensible au raffinement du maillage. Pour cette raison on a utilisé le maillage suivant par la suite de l'étude.

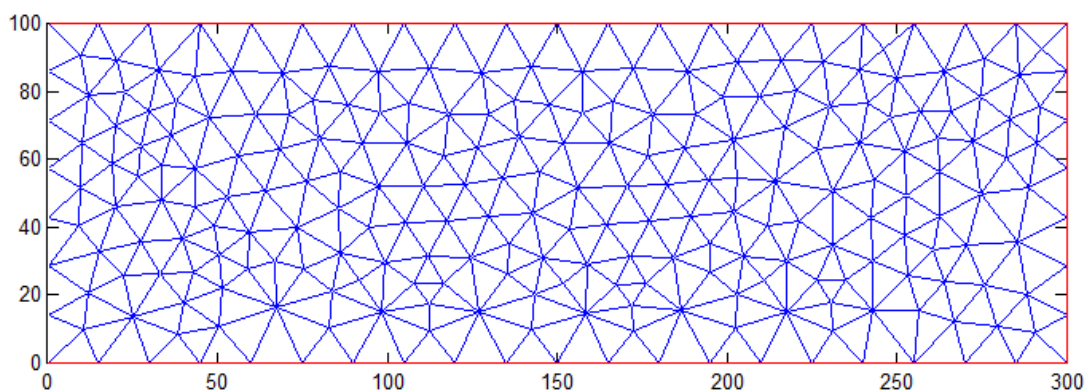


Figure 4-6 Maillage optimal du fluide dans le réservoir

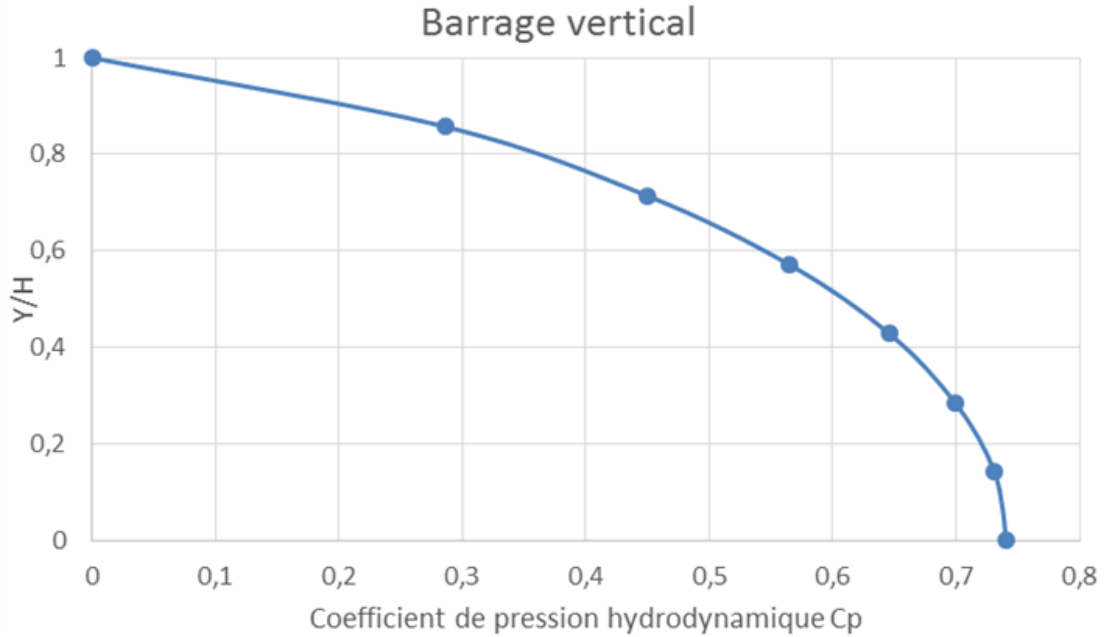


Figure 4-7 Distribution de coefficient de pression C_p pour le maillage optimal

5 L'évolution de pression hydrodynamique dans le temps

Une expérience est faite en variant la fréquence d'excitation d'un signal harmonique appliqué au barrage Oued-Fodda pour déterminer l'évolution des pressions hydrodynamiques correspondantes. Les résultats sont reportés dans la figure 6 dans laquelle le pique maximum de pression au pied de parement amont de barrage est confondu sur le pique maximum de l'accélération de sol. Les autres piques sont inférieurs à celui qui correspond le fondamental.

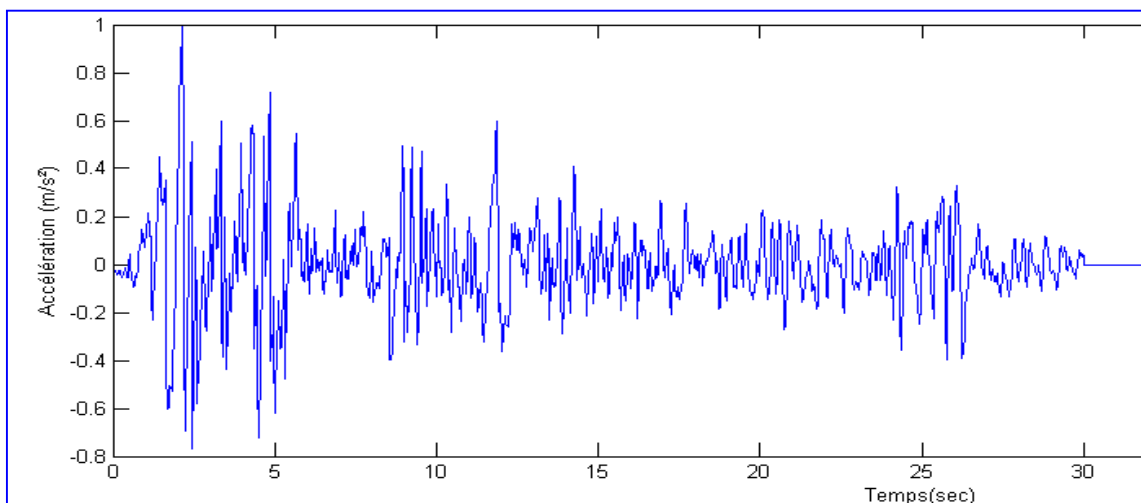


Figure 5-1 Accélération d'El-Centro 18 mai 1940 en fonction de temps normalisé par (0.349g)

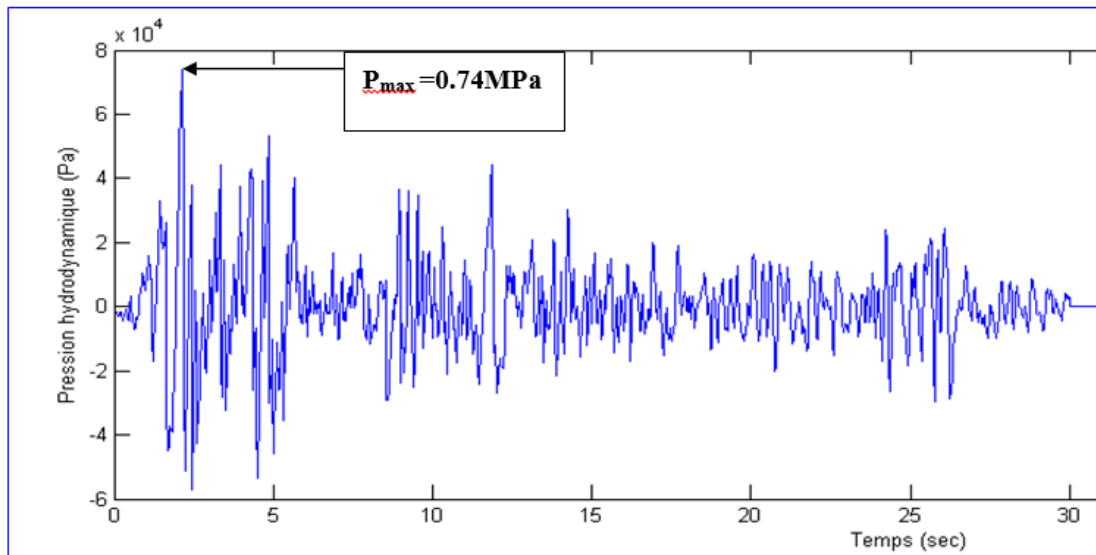


Figure 5-2 L'évolution de pression hydrodynamique dans le temps

6 Caractéristique de vibration libre du barrage

Effet de l'interaction fluide structure

Le réservoir affecte considérablement la réponse sismique du barrage, par conséquent, le réservoir doit être considéré dans les analyses dynamiques des barrages, pour notre modèle, l'effet dynamique du réservoir est considéré avec une formule simple comme masses ajoutées dans l'approche Westergaard. Pour cette raison, la compatibilité et l'équilibre sont satisfaits automatiquement aux nœuds le long des interfaces entre le fluide et structure.

Tableau 6: Etude de comportement libre du barrage de Oued-Fodda

| Modes | Barrage rigide (vide) | Barrage rigide (plein) |
|-------|-----------------------|------------------------|
| 1 | 0,287134 | 0,370544 |
| 2 | 0,121015 | 0,158091 |
| 3 | 0,096184 | 0,143968 |
| 4 | 0,070956 | 0,104138 |
| 5 | 0,048292 | 0,086063 |
| 6 | 0,042961 | 0,075900 |
| 7 | 0,036103 | 0,071694 |
| 8 | 0,033027 | 0,063314 |
| 9 | 0,031308 | 0,058231 |
| 10 | 0,029955 | 0,054278 |
| 11 | 0,027027 | 0,051862 |
| 12 | 0,026912 | 0,050141 |

Les douze premiers modes de vibrations du barrage de l'Oued-Fodda sont calculés et récapitulés dans le tableau 6, en considérant pour cela un barrage vide encastré à sa base, avec un autre plein, où l'interaction hydrodynamique est prise en considération en se basant sur le concept de la masse ajoutée d'après ce tableau on peut conclure que :

- La fréquence fondamentale d'un barrage plein peut atteindre une amplification de 30% par rapport à un barrage d'une retenue vide.

Les déformées de différents modes sera présentée de manière, barrage vide sur la gauche et sur le droit barrage à retenue pleine.

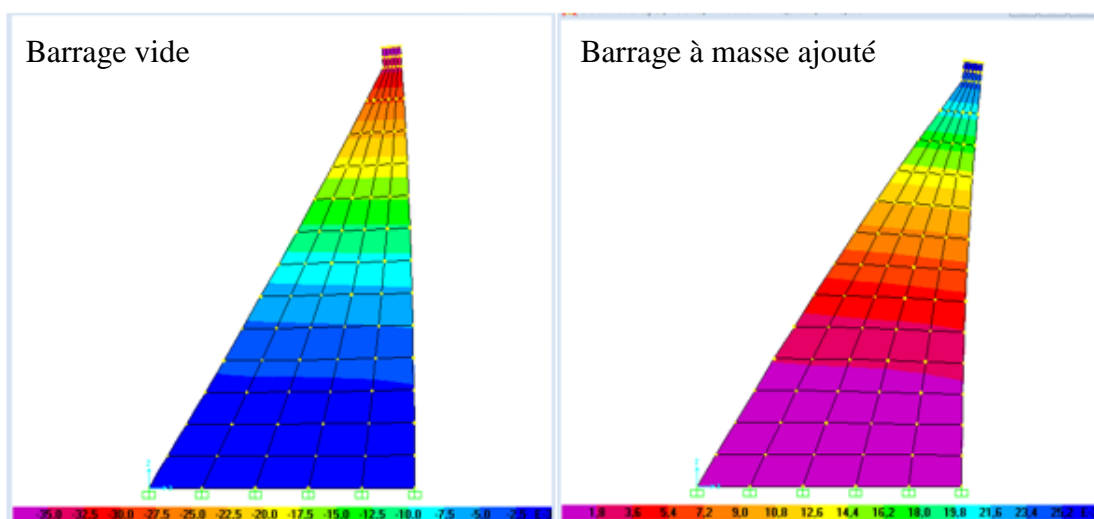


Figure 6-1 L'allure de la déformée de la première mode

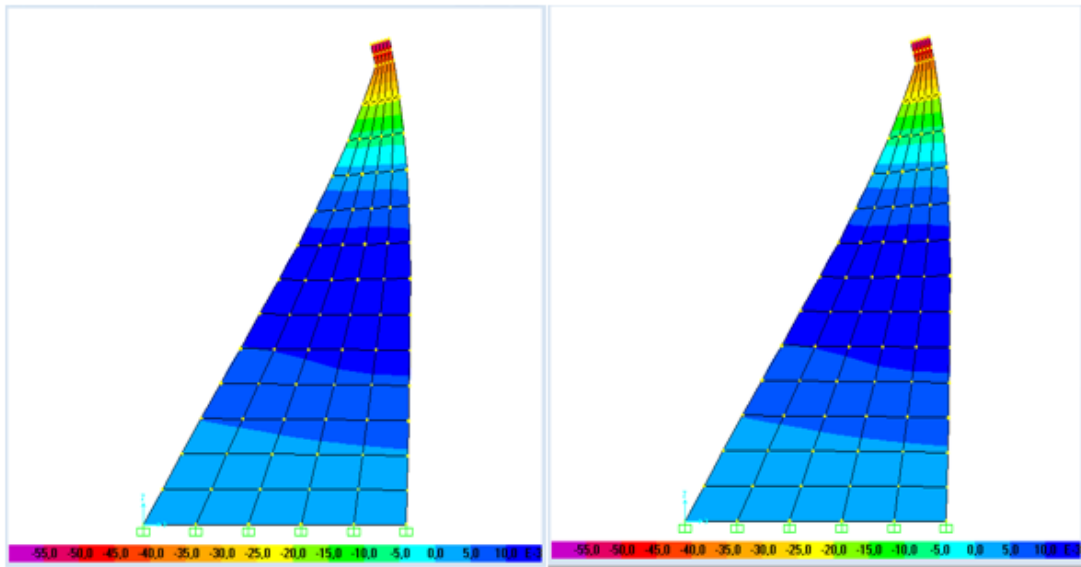


Figure 6-2 L'allure de la déformée de la deuxième mode

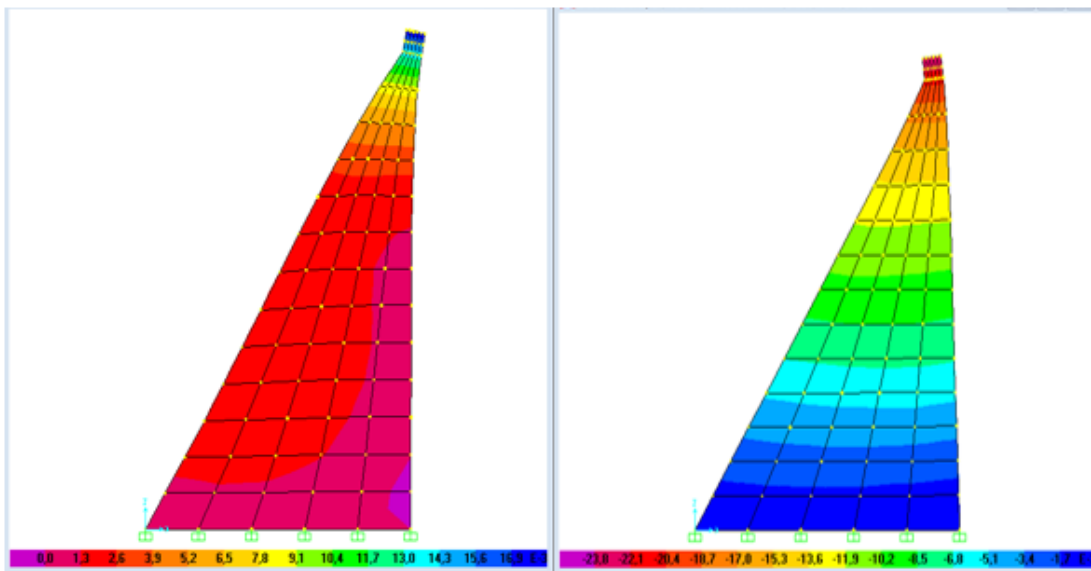


Figure 6-3 L'allure de la déformée de la troisième mode

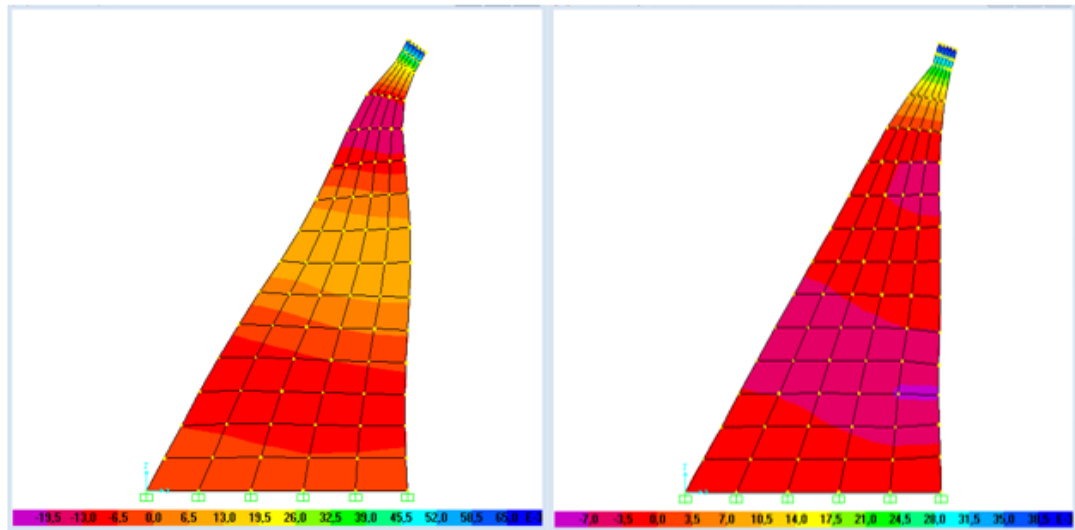


Figure 6-4 L'allure de la déformée de la quatrième mode

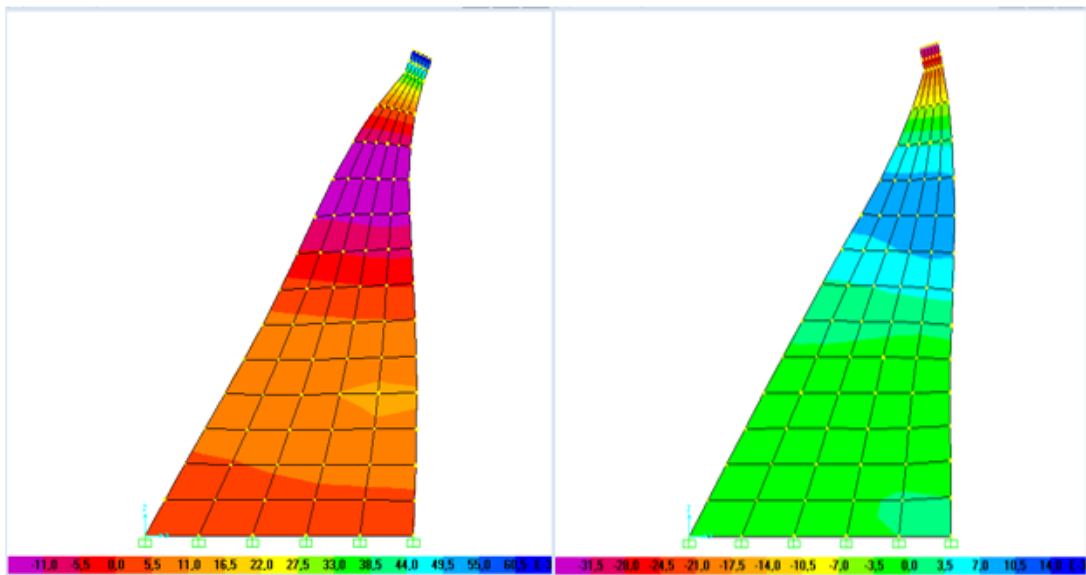


Figure 6-5 L'allure de la déformée de la cinquième mode

Dans ce présent travail, nous avons fait une investigation des pressions hydrodynamiques sous chargements sismiques dans le cas particulier d'un fluide incompressible, non visqueux et irrotationnel, des effets de l'interaction fluide-structure, sur le comportement dynamique d'un barrage poids en béton ancré dans le sol, avec un modèle d'éléments finis. Ce modèle, implique la discrétisation en éléments finis du système fluide-structure. Les résultats obtenus permettent de conclure entre autres que :

Les méthodes numériques sont très pratiques de point de vue utilisation mais la précision des résultats est subordonnée au bon choix du modèle numérique.

L'utilisation de la M.E.F pour le calcul des pressions hydrodynamiques dans le réservoir nous a permis d'aboutir à des résultats relativement proches de ceux obtenus par Westergaard.

Les différentes applications numériques effectuées montrent nettement cette convergence de la méthode, ce qui confirme que l'utilisation d'un élément de référence triangulaire linéaire convient pour notre cas de figure.

La limite de troncature de réservoir ne présente pas une incidence importante sur la réponse dynamique du système au-delà d'une distance supérieure à trois fois la hauteur du barrage.

Dans le cas d'un barrage vertical infiniment rigide, la limite de du réservoir est possible par le biais d'une surface de radiation.

La valeur maximale du coefficient des pressions hydrodynamiques C_p est obtenu au fond du réservoir pour le cas d'un barrage à parement amont vertical, elle est de $C_{P_{max}} = 0.74$.

La pression hydrodynamique n'est ni négligeable ni très grands, reste souvent un pourcentage de la pression hydrostatique. Toutefois, elle modifie clairement le comportement dynamique du barrage.

Bibliographie

- AVILES, J. & SANCHEZ-SESMA, F. J.**, « Hydrodynamic pressures on dams with non vertical upstream face », November, 1983, pp. 291-299.
- CARLIER, M.**, « Hydraulique générale et appliquée », Paris, 1980, Edition Eyrolles.
- Chopra A. K.** and Chakrabarti P., Earthquake Analysis of Gravity Dams Including
- Chopra A. K.**, Earthquake Analysis, Design and Safety Evolution of Concrete Dams. Fifth Canadian Conf. Earthquake Eng., Ottawa; 1987
- Chopra A.K.** et K. Fok, Water Compressibility in Earthquake Response of Arch Dams. J. of Struct. Eng. Vol. 113, N°5, pp 958-975, May, 1987
- Clough R.W.** and **Penzien J.**, Dynamique des Structures (tome 1). Pluralis ; 1980
- DHATT, G.**, « Modélisation des fluides par éléments finis », Polycopie de cours, Université de Technologie de Compiègne, Mai, 1992.
- Hydrodynamic Interaction. Earthquake Eng. and Structural Dynamics, Vol. 2, 143-160; 1973
- Iwanami Applied Math., 1994
- M. Tabata:** Numerical solutions of partial differential equations II (in Japanese),
- P.A. Raviart, J.M. Thomas**, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, 1983.
- PRISCU, R., POPOVICI, A., STEMATIU, D. & STERE, C.**, « Earthquake Engineering for large dams », Editura Academies and John Wiley & Sons, Ltd, 1985.
- Sharan S.K.**, A Non-Reflecting Boundary in Fluid-Structure Interaction. Computers and Structures Vol. 26, No 5, 1987
- Sharan S.K.**, Dam-Reservoir Interaction During Earthquake. Conf. Earthquake Eng., Toronto, Canada, 1991
- TILIOUINE, B., SEGHIR, A.**, « Fluid-structure models for dynamic studies of dam-water systems », Eleventh European Conference on Earthquake Engineering, Paris, France, 6 th -11 th September, 1998.
- TILIOUINE, B., SEGHIR, A.**, « A numerical model for time domain analysis of dams including fluid-structure interaction », CST 98 International conference, Edinburgh Scotland, 18 th-20 th August, 1998.

TILIOUINE, B., SEGHIR, A., « Influence de l'interaction fluide-structure sur le comportement sismique du barrage de Oued-Foda (Nord-Ouest Algérien)», Actes du 1er congrès Arabe de mécanique, Damas, Syrie, 1-5 juin, 1997.

Von-Karman T., Water Pressures on Dams During Earthquakes. Transactions A.S.C.E., 1933

Westergaard H.M., Water Pressures on Dams During Earthquakes. Paper n_ 1835, 418-433, A.S.C.E.; Nov. 1933

Zangar C.N., Hydrodynamic Pressure on Dams due to Horizontal Earthquake Effects. Bureau of Reclamation, Denver, Colorado; Vol. 10, No. 2, 1953

Zienkiewicz, O.C. and Newton, R.E., Coupled Vibration of Structures Submerged in Compressible Fluid. Int. Symposium on Finite Element Techniques, Stuttgart, Germany; 1969

Zienkiewicz, O. C & Taylor, R. L., « La méthode des éléments finis. Formulation de base et problèmes linéaires », volume 1, Afnor technique, 1991.

Annexe 1 : Modélisation

Equation de base :

$$\text{Solide : } \sigma_{ij,j} + f_i - \rho \gamma_i = \mathbf{0}$$

$$\text{Fluide : } \nabla^2 P = 0$$

Formes faibles :

$$\text{Solide : } \int_{\Omega} \delta \varepsilon \sigma d\Omega + \int_{\Gamma} \delta U \sigma \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta U f d\Omega - \int_{\Omega} \delta U \rho \ddot{U} d\Omega = 0$$

$$\text{Fluide : } \int_{\Omega} \delta \nabla P \cdot \nabla P d\Omega + \int_{\Gamma_1} \delta P \rho \ddot{U} \vec{n} d\Gamma$$

Systèmes discrets :

$$\text{Solide : } M \ddot{U} + C \dot{U} + KU - QP = F_1$$

$$\text{Fluide : } HP + Q_p \ddot{U} = F_1$$

Expression de matrices :

$$M = \int_{\Omega} N_u^T \rho N_u d\Omega$$

$$C = \int_{\Omega} N_u^T \mu N_u d\Omega \quad \text{ou : } C = \alpha M + \beta K$$

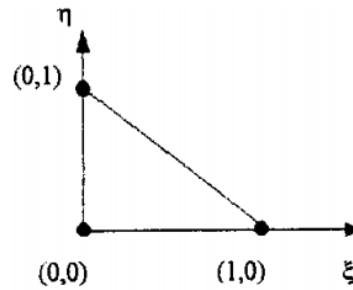
$$K = \int_{\Omega} \nabla N_u^T D \nabla N_u d\Omega \quad \text{avec : } D \text{ matrice d'élasticité}$$

$$H = \int_{\Omega} \nabla N_p^T \nabla N_p d\Omega$$

$$Q = \int_{\Gamma_1} N_u \vec{n} N_p d\Gamma$$

Annexe 2 : Les éléments utilisés

Élément triangulaire à trois nœuds :

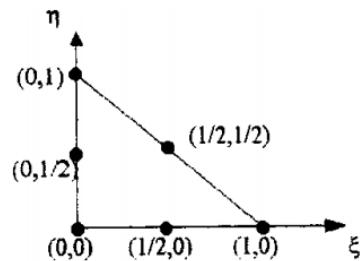


$$\langle N \rangle = \langle 1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta \rangle$$

$$\langle \partial N / \partial \xi \rangle = \langle -1 \quad 1 \quad 0 \rangle$$

$$\langle \partial N / \partial \eta \rangle = \langle -1 \quad 0 \quad 1 \rangle$$

Élément triangulaire à six nœuds :



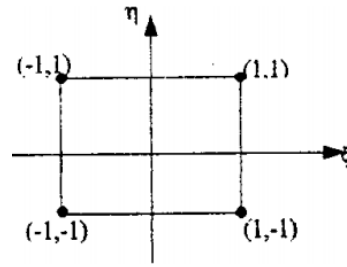
$$\langle N \rangle = \langle -\lambda(1 - 2\lambda) \quad 4\xi\lambda \quad -\xi(1 - 2\xi) \quad 4\xi\eta \quad -\eta(1 - 2\eta) \quad 4\eta\lambda \rangle$$

$$\langle \partial N / \partial \xi \rangle = \langle 1 - 4\lambda \quad 4(\lambda - \xi) \quad -1 + 4\xi \quad 4\eta \quad 0 \quad -4\eta \rangle$$

$$\langle \partial N / \partial \eta \rangle = \langle 1 - 4\lambda \quad 4\xi \quad 0 \quad 4\xi \quad -1 + 4\eta \quad 4(\lambda - \eta) \rangle$$

$$\text{Avec : } \lambda = 1 - \xi - \eta$$

Elément quadrilatéral à 4 nœuds :



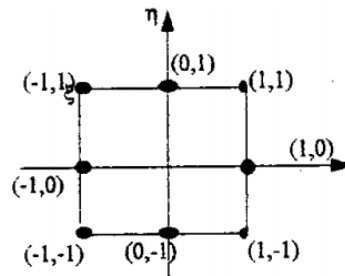
$$\langle N \rangle =$$

$$\frac{1}{4} \langle (1 - \xi)(1 - \eta) \quad (1 + \xi)(1 - \eta) \quad (1 + \xi)(1 + \eta) \quad (1 - \xi)(1 + \eta) \rangle$$

$$\langle \partial N / \partial \xi \rangle = \frac{1}{4} \langle -1 + \eta \quad 1 - \eta \quad 1 + \eta \quad -1 - \eta \rangle$$

$$\langle \partial N / \partial \eta \rangle = \frac{1}{4} \langle -1 + \xi \quad -1 - \xi \quad 1 + \xi \quad 1 - \xi \rangle$$

Elément quadrilatéral à 8 nœuds :



$$\langle N \rangle = \begin{pmatrix} -1/4 (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta) & 1/2 (1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ -1/4 (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta) & 1/2 (1 + \xi)(1 - \eta^2) \\ -1/4 (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta) & 1/2 (1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ -1/4 (1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta) & 1/2 (1 - \xi)(1 + \eta^2) \end{pmatrix}$$

$$\langle \partial N / \partial \xi \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 (1 - \eta)(2\xi + \eta) & -(1 - \eta)\xi & 1/4 (1 - \eta)(2\xi - \eta) & 1/2 (1 - \eta^2) \\ 1/4 (1 + \eta)(2\xi + \eta) & -(1 + \eta)\xi & 1/4 (1 + \eta)(2\xi - \eta) & -1/2 (1 - \eta^2) \end{pmatrix}$$

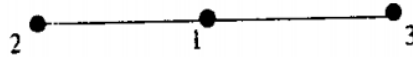
$$\langle \partial N / \partial \eta \rangle =$$

$$\begin{pmatrix} 1/4 (1 - \xi)(\xi + 2\eta) & -1/2 (1 - \xi^2) & -1/4 (1 + \xi)(\xi - 2\eta) & -(1 + \xi)\eta \\ 1/4 (1 + \xi)(\xi + 2\eta) & 1/2 (1 - \xi^2) & -1/4 (1 - \xi)(\xi - 2\eta) & -(1 - \xi)\eta \end{pmatrix}$$

Annexe 3 : Points de quadrature de Gauss

Une dimension :

- 3 points :



| | | | |
|---------|-----|--------------|---------------|
| ξ_i | 0 | $\sqrt{3/5}$ | $-\sqrt{3/5}$ |
| w_i | 8/9 | 5/9 | 5/9 |

- 2 points :

-

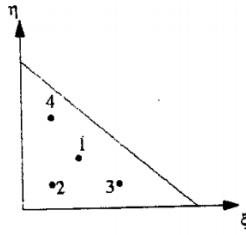


| | | |
|---------|--------------|---------------|
| ξ_i | $1/\sqrt{3}$ | $-1/\sqrt{3}$ |
| w_i | 1 | 1 |

Deux dimensions :

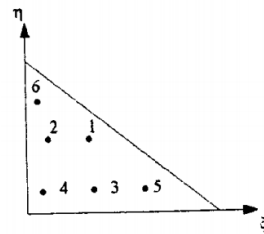
- Triangulaire :

- 4 points :



| | | | | |
|----------|--------|-------|-------|-------|
| ξ_i | 1/3 | 1/5 | 3/5 | 1/5 |
| η_i | 1/3 | 1/5 | 1/5 | 3/5 |
| w_i | -27/96 | 25/96 | 25/96 | 25/96 |

- 6 points :



| | | | | | | |
|----------|-----|----------|----------|-----|----------|----------|
| ξ_i | a | $1 - 2a$ | a | b | $1 - 2b$ | b |
| η_i | a | a | $1 - 2a$ | b | b | $1 - 2b$ |
| w_i | c | c | c | d | d | d |

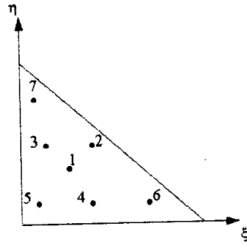
$$d = 0,05497587$$

$$c = 0,11169079$$

$$b = 0,09157621$$

$$a = 0,44594849$$

- 7 points :



| | | | | | | | |
|----------|--------|-----|----------|----------|-----|----------|----------|
| ξ_i | $1/3$ | a | $1 - 2a$ | a | b | $1 - 2b$ | b |
| η_i | $1/3$ | a | a | $1 - 2a$ | b | b | $1 - 2b$ |
| w_i | $9/80$ | A | A | A | B | B | B |

$$a = (6 + \sqrt{15})/21$$

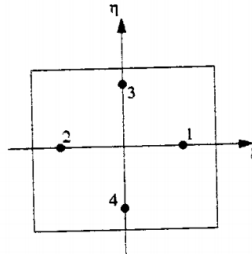
$$b = (4/7) - a$$

$$A = (155 + \sqrt{15})/2400$$

$$B = (31/240) - A$$

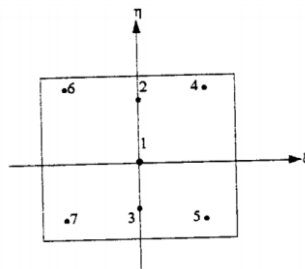
b) Rectangle :

- 4 points :



| | | | | |
|----------|--------------|---------------|--------------|---------------|
| ξ_i | $\sqrt{2/3}$ | $-\sqrt{2/3}$ | 0 | 0 |
| η_i | 0 | 0 | $\sqrt{2/3}$ | $-\sqrt{2/3}$ |
| w_i | 1 | 1 | 1 | 1 |

- 7 points :



| | | | | | | | |
|----------|-----|----------------|-----------------|--------------|---------------|---------------|---------------|
| ξ_i | 0 | 0 | 0 | $\sqrt{3/5}$ | $\sqrt{3/5}$ | $-\sqrt{3/5}$ | $-\sqrt{3/5}$ |
| η_i | 0 | $\sqrt{14/15}$ | $-\sqrt{14/15}$ | $\sqrt{3/5}$ | $-\sqrt{3/5}$ | $\sqrt{3/5}$ | $-\sqrt{3/5}$ |
| w_i | 8/7 | 20/63 | 20/63 | 20/36 | 20/36 | 20/36 | 20/36 |

Annexe 4 : Les conteurs des iso pressions

Les pressions hydrodynamiques suivantes sont présentées en MPa

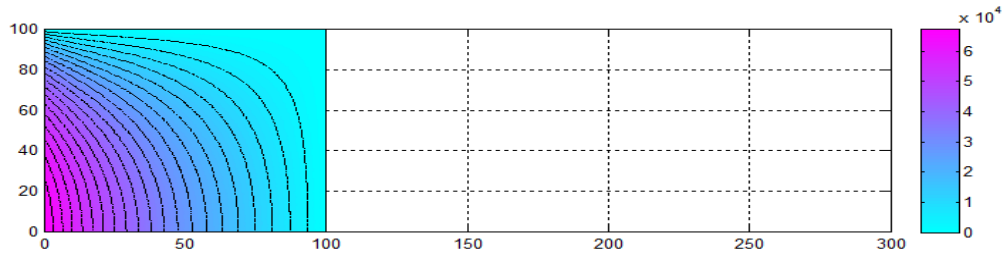


Figure 1 cas réservoir $L=H$

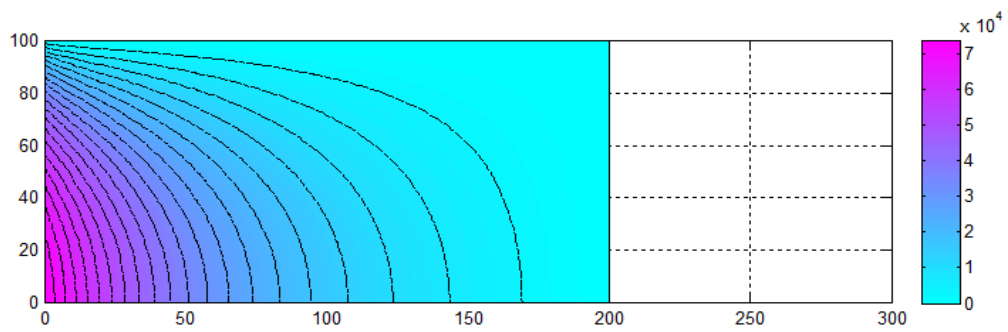


Figure 2 Figure 1 cas réservoir $L=2H$

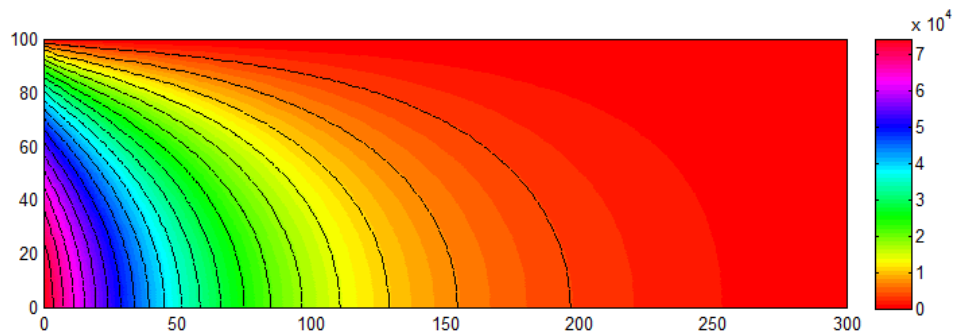


Figure 3 Figure 1 cas réservoir $L=3H$

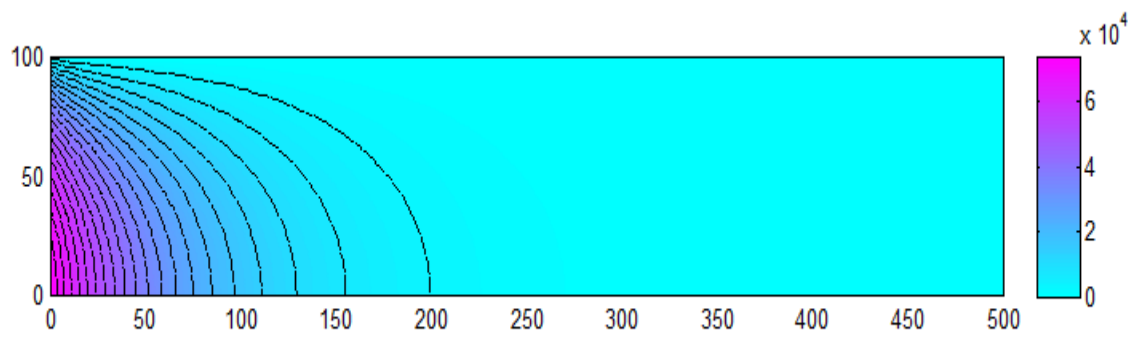


Figure 4 Figure 1 cas réservoir $L=5H$

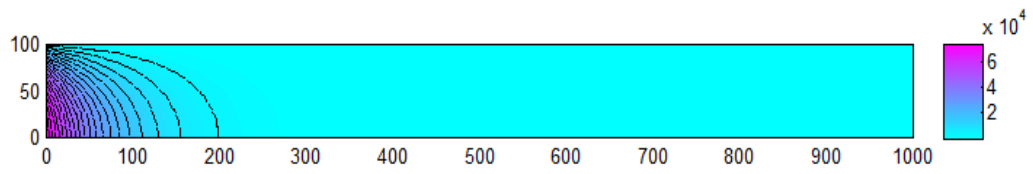


Figure 5 Figure 1 cas réservoir $L=10H$