

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

4/91

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

lex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT :

GENIE MECANIQUE



PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ELABORATION D'UN LOGICIEL POUR LE CALCUL

DES PROPRIETES THERMODYNAMIQUES DE LA

LA VAPEUR D'EAU

Proposé Par :

M. H. BENNOUR

M. A. BILEK

Etudié par :

M. S. BEKRI

Dirigé par :

M. H. BENNOUR

M. A. BILEK

PROMOTION : 1991

REPUE LIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère aux Universités

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

ELABORATION D'UN LOGICIEL POUR LE CALCUL

DES PROPRIETES THERMODYNAMIQUES DE LA

VAPEUR D'EAU

Proposé par :

M.H.BENNOUR

M.A.BILEK

Etudié par :

M.S.BEKRI

Dirigé par :

M.H.BENNOUR

M.A.BILEK

PROMOTION : 1991

E.N.P 10, Avenue Hacén Badi - El-Harrach - Alger

Dedicates



A Mes Parents

A Mes Freres et
soeurs

A Mes Amis

En Particulier:

Melle A. Sabah

M. I. Rachid

A Tous ceux qui luttent
pour la cause:

N'Zmarith

A Tous les damnés
de la terre

Jemil Bekri

REMERCIEMENTS



Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Messieurs H. BENNOUR et A. BILEK pour leur disponibilité et leur aide précieuse.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur DECHMI , chef de d^{pt} d'Hydraulique ainsi qu'aux enseignants de ce département pour m'avoir autorisé à travailler dans leur centre de calcul lorsque celui de l'Ecole était fermé.

Que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail et à ma formation , trouvent ici ma vive reconnaissance.

RESUME :

Une équation d'état sous forme virielle a été programmée avec quelques équations empiriques pour calculer les caractéristiques de la vapeur d'eau dans un domaine suffisamment étendu pour recouvrir tous les calculs concernant les turbomachines avec une très bonne précision .

Le logiciel élaboré à partir de ces équations permet de déterminer les caractéristiques de la vapeur sans aucune contrainte relative aux paramètres d'entrée.

ملخص :

معادلة الحالة على شكلها الفوريالي تمت برمجتها بواسطة معادلات تجريبية لحساب خواص بخار الماء، في نطاق واسع نوعاً ما. يمكنه احتواء حساب الآلات التربينية، بدقة جيدة، البرنامج المنبثق من هذه المعادلات بإمكانه حساب كل خصائص البخار دون أي مشكل فيها يخص قيم المدخلات.

ABSTRACT :

A virial equation of state for steam and other empirical equations were used to represent steam properties in range of application sufficient for turbomachinery with a high accuracy.

The software elaborated permit to determine steam properties with no constraint relative to the enter parameters.

SOMMAIRE

| | |
|--------------------------------------------------------------------|----|
| CHAPITRE PREMIER . GENERALITES..... | 1 |
| I - 1 Introduction..... | 1 |
| I - 2 Le facteur de compressibilité..... | 2 |
| I - 3 Equations d'état analytiques pour substances réelles..... | 3 |
| I - 4 Equation de VAN-DER-WALLS..... | 4 |
| I - 5 Equation de REDLICH-KWONG(1949)..... | 5 |
| I - 6 Equation du viriel..... | 6 |
| I - 7 Equations d'état pour la vapeur d'eau..... | 8 |
| I - 8 Objectif de l'étude..... | 9 |
| CHAPITRE DEUXIEME . DETERMINATION DES PROPRIETES | |
| THERMODYNAMIQUES DE LA VAPEUR D'EAU..... | 11 |
| II - 1 Equation d'état..... | 11 |
| II - 2 Enthalpie spécifique de la vapeur | 12 |
| II - 3 Entropie spécifique de la vapeur | 14 |
| II - 4 Chaleurs spécifiques de la vapeur | 15 |
| II - 4 - 1 Chaleur spécifique à pression constante..... | 15 |
| II - 4 - 2 Détermination de $h_o(T)$ et $S_o(T)$ | 15 |
| II - 4 - 3 Chaleur spécifique à volume constant..... | 16 |
| II - 5 Exposant isentropique (K) | 16 |
| II - 6 Traitement du domaine de la vapeur saturée..... | 18 |
| II - 6 - 1 Volume | 18 |
| II - 6 - 2 Pression | 18 |
| II - 6 - 3 Enthalpie spécifique..... | 19 |
| II - 6 - 4 Entropie spécifique | 19 |
| II - 7 Traitement du domaine liquide | 20 |
| II - 7 - 1 Chaleur spécifique à pression constante..... | 20 |
| II - 7 - 2 Enthalpie spécifique (h_f) | 21 |
| II - 7 - 3 Entropie spécifique (S_f) | 21 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| CHAPITRE TROISIEME . PRESENTATION DU LOGICIEL | 22 |
| III - 1 Domaine d'application | 23 |
| III - 2 Organigramme du logiciel..... | 24 |
| CHAPITRE QUATRIEME . RESULTATS..... | 25 |
| IV - 1 Exemple d'exécution..... | 38 |
| CONCLUSION..... | 42 |
| APPENDICE 1 . UNE METHODE DE DETERMINATION DU SECOND COEFFICIENT VIRIEL [4] | 43 |
| APPENDICE 2 . RELATIONS DE MAXWELL..... | 44 |
| APPENDICE 3 . ETABLISSEMENT DE LA RELATION $(C_p - C_v) = \frac{\alpha_p^2 \cdot V \cdot T}{\beta_T}$ | 46 |
| APPENDICE 4 . PROGRAMME..... | 48 |

TABLE DES FIGURES

FIGURE 1 . Diagramme illustrant le domaine
 d'application des équations
 empiriques programmées.....23

FIGURE 1(bis) . Domaine d'application de
 l'équation d'état
 $PV = RT (1 + B/V + C/V^2)$ 28

FIGURE 2 . L'erreur sur l'entropie27

FIGURE 3 . Diagramme température - enthalpie.....29

FIGURE 4 . Compressibilité de la vapeur $Z=Z(T,P)$32

FIGURE 5 . Compressibilité de la vapeur $Z=Z(T_r,P_r)$32

FIGURE 6 . Diagramme illustrant la variation
 du second coefficient viriel en
 fonction de T et P.....33

FIGURE 7 . Diagramme illustrant la variation
 du troisième coefficient viriel en
 fonction de T et P.....33

FIGURE 8 . Coefficient de compressibilité isotherme .34

FIGURE 9 . Coefficient de détente isobare34

FIGURE 10 . Chaleur massique à pression constante.....35

FIGURE 11 . Chaleur massique à volume constant.....36

Figure 12 . Coefficient isentropique (K) $K=K(T,P)$37

N O M E N C L A T U R E

- B ■ Deuxième coefficient viriel.
 $B_1 = T_g \cdot dB/dT_g$.
 $B_2 = T_g^2 \cdot d^2B/dT_g^2$.
 C ■ Troisième coefficient viriel.
 $C_1 = T_g \cdot dC/dT_g$.
 $C_2 = T_g^2 \cdot d^2C/dT_g^2$.
 C_p ■ Chaleur spécifique à pression constante.
 C_v ■ Chaleur spécifique à volume constant.
 h ■ Enthalpie spécifique.
 K ■ Exposant isentropique.
 P ■ Pression.
 R ■ 0.46151 [KJ/Kg] ■ Constante caractérisant la vapeur.
 S ■ Entropie spécifique.
 T ■ Température absolue.
 U ■ Energie interne spécifique.
 V ■ Volume spécifique.
 Z ■ Facteur de compressibilité.
 α_p ■ Coefficient de détente isobare.

$$= \frac{1}{V} \left[\frac{\delta V}{\delta T} \right]_p$$

 β_T ■ Coefficient de compressibilité isotherme.

$$= - \frac{1}{V} \left[\frac{\delta V}{\delta P} \right]_T$$

 θ ■ T/T_c .
 ψ ■ Fonction de Helmholtz.

Indices

- c ■ Point critique.
 l ■ Phase liquide (pas nécessairement saturée).
 g ■ Phase vapeur (pas nécessairement saturée).
 r = Variable réduite.
 s ■ Saturation.
 o ■ Pression nul.

C H A P I T R E

P R E M I E R

G E N E R A L I T E S

I - 1 INTRODUCTION

La recherche d'une relation entre les paramètres thermodynamiques des substances, relation nécessaire à toute description du comportement de ces substances, n'a pas cessé d'être un problème constamment réactualisé depuis la renaissance.

Comment pourrions-nous autrement, en effet, pénétrer les secrets de la matière en vue de la maîtriser de mieux en mieux ?

Ce furent tout d'abord les travaux de R.Boyle en 1662, ceux de E.Mariotte en 1676 suivis longtemps après par ceux de Gay-Lussac en 1802, sur le comportement des gaz sous des pressions voisines de la pression atmosphérique normale. Le résultat a été l'établissement empirique de toute une série de lois importantes, qui ont servi de base à la déduction par Clapeyron de l'équation d'état du gaz parfait. Cette équation est une relation entre la pression, le volume et la température.

$$P V = R T \quad (1,1)$$

R, étant une constante caractérisant le gaz parfait.

Des mesures de haute précision ont permis de constater qu'en réalité même sous de basses pressions, le comportement des gaz s'écarte légèrement de ce que donne l'équation de Clapeyron. Cette dernière décrit le comportement du gaz avec une précision d'autant plus élevée que sa densité est plus faible. Un gaz est totalement parfait (idéal) lorsque l'interaction entre

ses molécules, considérées comme des points matériels, se limite aux collisions.

I - 2 LE FACTEUR DE COMPRESSIBILITE

La non idéalité d'un gaz est très bien exprimée par le facteur de compressibilité :

$$Z = \frac{P V}{R T} \quad (1,2)$$

Pour un gaz parfait ; $Z = 1.0$.

Pour les gaz réels, Z est normalement inférieur à l'unité, sauf à des pressions élevées ou à de hautes températures [3].

L'équation (1,2) pourrait aussi être utilisée pour définir le facteur de compressibilité d'un liquide; dans ce cas, Z est en principe très inférieur à l'unité.

Le facteur de compressibilité est souvent corrélé avec la pression réduite (P_r) et la température réduite (T_r) :

$$Z = f(T_r, P_r) \quad (1,3)$$

La fonction $f(T_r, P_r)$ a été obtenue à partir de données expérimentales par Nelson et Obert. Excepté au voisinage du point critique, la détermination de (Z) à partir de (1,3) conduit à des erreurs inférieures à 6% .

Pour de très hautes températures ou des pressions élevées, des diagrammes dus à Breedveld et Prausnitz peuvent être utilisés.

L'équation (1,3) est un exemple de la règle des états correspondants. Cette règle, qui n'est qu'approximative, suggère que les propriétés réduites de tous les fluides sont essentiellement les mêmes si on les compare à des températures réduites et à des pressions réduites égales. Pour les propriétés volumétriques, cette loi donne :

$$V_r = \frac{V}{V_c} = \frac{(Z/Z_c)(T/T_c)}{(P/P_c)} = f_1(T_r, P_r) \quad (1,4)$$

Ou encore :

$$Z = Z_c f_2(T_r, P_r) \quad (1,5)$$

Pour plusieurs substances, on peut admettre que Z_c est constant. Dans ce cas, l'équation (1,5) se réduit à l'équation (1,3). Cette dernière est une équation d'état à deux paramètres (T_c et P_c); en ce sens que, connaissant P_c et T_c pour un fluide donné, il devient possible d'estimer les propriétés volumétriques de ce fluide à différentes pressions et températures. Ceci ne peut pas s'appliquer à certaines substances telles que les fluides fortement polarisés, l'Helium, l'Hydrogène et le Neon. Dans ces cas, Z_c n'est plus constant et l'équation (1,5) devient une équation d'état à trois paramètres.

I - 3 EQUATIONS D'ETAT ANALYTIQUES POUR SUBSTANCES REELLES

Une équation d'état analytique est une relation algébrique entre la pression, la température et le volume.

Toutes les formes d'équations analytiques devraient satisfaire le critère de stabilité thermodynamique au point critique; c'est-à-dire les deux conditions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T_c} = 0 \\ \text{et} \\ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_{T_c} = 0 \end{array} \right\} \quad (1,6)$$

De plus, chaque équation d'état devrait se réduire à l'équation de Clapeyron (1,1) lorsque la pression tend vers zéro.

I - 4 EQUATION DE VAN-DER-WALLS (1873)

C'est la plus célèbre des équations d'état analytiques à deux paramètres. Elle a été déduite essentiellement à partir de conclusions qualitatives spéculatives. Elle est de la forme :

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) \cdot (V - b) = R T \quad (1,7)$$

Où (a) et (b) sont des constantes spécifiques au gaz considéré.

Les conditions (1,6) permettent de déterminer ces constantes à partir de la pression et de la température critiques.

$$a = \frac{27}{64} \frac{R T_c^2}{P_c} \quad (1,8)$$

$$b = \frac{R T_c}{8 P_c} \quad (1,9)$$

Lorsque la pression tend vers zéro, le volume du gaz devient infini, ce qui donne :

$$\lim_{P \rightarrow 0} \frac{a}{V^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{P \rightarrow 0} (V-b) = V$$

et l'équation de Van-Der-Walls se trouve bien réduite à l'équation de Clapeyron lorsque $P \rightarrow 0$.

Lorsque la pression tend vers l'infini ($P \rightarrow + \infty$), le volume ne tend pas vers zéro comme c'est le cas pour un gaz parfait, mais vers une valeur constante (b) qui représente le volume propre des molécules (covolume) et qui ne dépend en aucun cas de la pression extérieure.

Van-Der-walls a montré, sur la base de considérations qualitatives déduites des hypothèses de la théorie cinétique des gaz, que les forces d'attraction entre molécules d'un gaz sont inversement proportionnelles au carré du volume de ce gaz. Ainsi, le terme (a/V^2) peut être vu comme une pression intérieure due aux forces d'attraction entre molécules du gaz.

Cependant, ces conclusions se limitent aux interactions doubles et négligent les interactions d'ordre supérieur. Ce qui revient tout simplement à dire que dans le gaz de Van-Der-Walls, les conditions ne sont pas réunies pour la formation d'associations de molécules, résultant des interactions mettant en jeu au moins trois molécules simultanément.

L'équation de Van-Der-Walls n'est donc applicable que dans les domaines de faible densité, soit pour des pressions basses et des températures élevées.

Aussi, les tentatives faites en vue d'utiliser l'équation (1,7) pour la description des régions subcritiques et des régions voisines des lignes de saturation, ont conduit à des résultats qui s'écartent franchement des résultats expérimentaux.

A titre indicatif, signalons que le facteur de compressibilité critique n'est que de 0.224 pour la vapeur d'eau, tandis que la valeur que prédit l'équation de Van-Der-Walls s'élève à 0.375 .

1 - 5 EQUATION DE REDLICH-KWONG (1949)

C'est une équation qui a eu beaucoup de réussite, car elle donne de bons résultats à des densités relativement élevées. Elle est de la forme :

$$P = \frac{R T}{V-b} - \frac{a}{T^{0.5} V(V+b)} \quad (1,10)$$

Les constantes (a) et (b) s'obtiennent de la même façon que pour l'équation de Van-Der-Walls.

$$a = 0.42748 \frac{R^2 T_c^{5/2}}{P_c} \quad (1,11)$$

$$b = 0.08664 \frac{R T_c}{P_c} \quad (1,12)$$

L'équation (1,10) est dite " équation de R-K originale " pour la distinguer de plusieurs formes

modifiées de cette équation, proposées après 1949.

Dans une récente analyse comparative d'un grand nombre d'équations d'état à deux constantes, la forme générale de l'équation de (R-K) , en l'occurrence l'équation (1,10), a été choisie par Bjerre et Bak comme celle qui donne les résultats les plus précis.

Parallèlement, l'avènement du pétrole et l'intérêt qu'il a suscité dans le monde moderne, a conduit au développement d'équations d'état à plus de deux constantes. Ces équations sont plus précises et répondent à des besoins d'utilisation plus larges, mais elles sont complexes. Il en est ainsi, par exemple, de l'équation de Benedict-Webb-Rubin (B W R), proposée en 1940 en extension de l'équation empirique de Bettie-Bridgmann (1928). Pour des densités inférieures de 20% à la densité critique, l'équation de (B-B) donne de bons résultats, tandis que pour des densités supérieures l'équation de (BWR) est appelée à la rescousse. Mais, alors que l'équation de (B-B) est à cinq constantes, celle de (BWR) est une équation à huit constantes dans sa version la plus simple; Strohbridge l'a étendue en 1962 pour comporter seize (16) constantes.

I - 6 EQUATION DU VIRIEL

La plupart des équations dont il a été question précédemment sont explicites en pression et constituent des séries polynomiales entières en (1/V).

Mayer et Bogoliobov ont démontré à l'aide des méthodes de la physique statistique que l'équation d'état des gaz réels sous sa forme la plus générale s'écrit comme suit :

$$P = \frac{R T}{V} \cdot \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K}{K+1} \frac{\beta_k}{V^k} \right] \quad (1,13)$$

Où les β_k sont, pour une substance pure, des coefficients dépendant seulement de la température et

appelés "coefficients viriels".

Il est évident que, plus le volume massique V du gaz est élevé, moins il faudra de termes de la série pour obtenir un résultat suffisamment précis. Lorsque V tend vers l'infini (domaine des faibles densités), l'équation du viriel se réduit à celle du gaz parfait, comme il fallait s'y attendre.

Les coefficients viriels (β_k) ne peuvent être calculés à partir de considérations purement théoriques, ils doivent être déterminés à partir des données expérimentales. La plupart des techniques utilisées à cet effet sont basées sur l'intégration d'une expression reliant l'énergie de cohésion entre molécules à la distance qui sépare ces molécules les unes des autres.

Toutes les équations d'état qu'on vient d'énumérer et bien d'autres encore sont utilisées pour l'estimation des propriétés volumétriques et thermodynamiques des substances pures en phase gazeuse. Chacune d'elles possède son domaine d'application privilégié, mais d'une manière générale, aucune d'elles n'est satisfaisante à l'approche du point critique.

En pratique, l'équation du viriel est généralement limitée au second coefficient viriel; elle est alors dite "équation du viriel tronquée".

Devant la difficulté de déterminer l'énergie potentielle de cohésion entre molécules, il est fréquent de contourner le problème par des techniques simples permettant d'estimer le second coefficient viriel (Appendice II). L'équation du viriel tronquée au second coefficient et l'équation de R-K originale sont moins précises que l'équation de BWR et ses variantes. Mais elles sont beaucoup moins complexes et sont souvent utilisées dans de nombreux schémas itératifs où le temps de calcul est important. La précision de leurs résultats demeure assez bonne; les propriétés volumétriques de la phase gazeuse sont prédites avec une erreur inférieure à

5 % . Cependant, on notera au passage que l'emploi de l'équation du viriel tronquée est limité aux domaines de densités inférieures à la moitié de la densité critique .

I - 7 EQUATIONS D'ETAT POUR LA VAPEUR D'EAU

L'eau, aussi bien en phase liquide qu'en phase vapeur, est la substance la plus utilisée dans le laboratoire et dans l'industrie. Ses propriétés sont mieux connues que celles de n'importe quelle autre substance.

Actuellement, des équations empiriques au nombre de cinq sont utilisées principalement. Toutes les tables modernes de la vapeur d'eau sont basées sur l'une ou l'autre de ces équations maîtresses [1]. Les auteurs de ces équations se sont surtout intéressés à la précision et, dans l'euphorie causée par l'avènement de l'ordinateur, ils ont relégué au second plan le temps de calcul et la facilité de codage.

A cela, nombreux sont les industriels qui préfèrent se suffire d'approximations grossières dans le modelage du comportement de la vapeur d'eau. Les constructeurs de turbines à vapeur, par exemple, se contentent souvent de l'équation de Clapeyron avec une constante de gaz et un exposant isentropique corrigés. Ceci est pratiqué même à des pressions élevées, voire dans le domaine humide où l'approximation est loin d'être acceptable.

Par ailleurs, ces fameuses équations, qui se veulent générales, sont toutes écrites dans la forme dite " caractéristique "; c'est-à-dire qu'elles expriment la fonction de Helmholtz ($\psi = U - T S$) en fonction de la température (T) et du volume spécifique (V).

Cette formulation est généralement préférable, par ce qu'elle permet d'obtenir toutes les propriétés thermodynamiques par différentiation plutôt que par intégration, cette dernière technique nécessitant la

détermination de constantes et de fonctions arbitraires. Or, dans certains cas, le domaine d'application est subdivisé en plusieurs régions, chacune étant associée à une fonction de Helmholtz définie par une équation particulière (I F C Formulation for industrial use [5]). Il s'ensuit qu'aux frontières de ces régions, il y a discontinuité thermodynamique des propriétés.

I - 8 OBJECTIF DE L'ETUDE :

Dans la présente étude, nous voulons établir un logiciel pour le calcul des propriétés volumétriques et thermodynamiques de la vapeur d'eau, utilisable dans les calculs concernant les turbomachines.

Nous tenterons de faire de sorte que le logiciel réponde aux impératifs suivants :

- Précision suffisante aussi bien pour l'industriel que pour le chercheur;
- Facilité d'utilisation;
- Une seule équation pour tout le domaine d'application.

I - 9 CHOIX D'UNE EQUATION D'ETAT

Pour atteindre notre objectif, nous nous proposons d'adopter une équation d'état sous forme virielle.

$$P = \frac{R T}{V} \left(1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + \dots \right) \quad (1,14)$$

L'avantage d'une telle équation réside dans le fait que les coefficients viriels B, C, D, ... ne dépendent que de la température et qu'on peut limiter leur nombre selon la précision recherchée et l'intérêt accordé à l'effort de programmation.

Nous avons déjà dit que l'équation du viriel tronquée au second coefficient conduit à des résultats d'une bonne précision, mais se limite à des densités inférieures à la

moitié de la densité critique.

Afin d'améliorer la précision de l'équation tout en étendant son domaine d'application à des densités plus élevées, il sera tenu compte du troisième coefficient viriel C.

Remarque: On serait tenté de penser que l'emploi d'un quatrième coefficient viriel va améliorer encore plus les résultats, mais il n'en est rien. C'est que l'obtention d'une équation empirique pour le quatrième coefficient induit des incertitudes importantes vue l'insuffisance de notre connaissance des interactions moléculaires d'ordre 4 .

C H A P I T R E

D E U X I E M E

D E T E R M I N A T I O N D E S P R O P R I E T E S T H E R M O D Y N A M I Q U E S D E L A V A P E U R D ' E A U

II - 1 EQUATION D'ETAT

L'équation du viriel sera utilisée sous la forme suivante :

$$P = \frac{R T}{V} \left[1 + \frac{B(T)}{V} + \frac{C(T)}{V^2} + O\left(\frac{1}{V^3}\right) \right] \quad (2,1)$$

Où $O(1/V^3)$ est le reste à négliger, ce qui donne en définitive :

$$P = \frac{R T}{V} \left[1 + \frac{B(T)}{V} + \frac{C(T)}{V^2} \right] \quad (2,2)$$

B et C, deuxième et troisième coefficients viriels, sont représentés chacun par une équation empirique fonction uniquement de la température [2].

.Deuxième coefficient viriel :

$$B(T) = a_1 F_1(T) + a_2 F_2(T) + a_3 F_3(T) \quad (2,3)$$

avec :

$$F_1(T) = \frac{1}{(1 + T/\alpha)} ; \quad F_2(T) = (1 - e^{-\beta/T}) \cdot (T/\beta)^{1/2} \cdot e^{\beta/T}$$

et $F_3(T) = \beta/T$

la température (T) étant en [K], les valeurs des constantes qui donnent (B) en [m³/Kg] sont les suivantes :

$$\alpha = 10000 ; \quad \beta = 1500 ; \quad a_1 = 0.0015 ;$$

$$a_2 = -0.000942 ; \quad a_3 = -0.0004882$$

. Troisième coefficient viriel

$$C(T) = a_4 (T/\delta - T_0) e^{-\frac{\sigma T}{\delta}} + a_5 \quad (2,4)$$

Pour T en [K], les valeurs des constantes qui donnent C en [m⁶/Kg²] sont :

$$\begin{aligned} \delta &= 647.286 ; & T_0 &= 0.8978 ; & \sigma &= 11.16 ; \\ a_4 &= 1.772 ; & \text{et} & & a_5 &= 1.5 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

La détermination des propriétés thermodynamiques nécessite le calcul de la première et de la seconde dérivées des coefficients viriels.

Introduisons à cet effet les notations suivantes :

$$\begin{aligned} B_1 &= T \frac{dB}{dT} ; & B_2 &= T^2 \frac{d^2B}{dT^2} ; \\ C_1 &= T \frac{dC}{dT} ; & C_2 &= T^2 \frac{d^2C}{dT^2} ; \end{aligned}$$

11 - 2 ENTHALPIE SPECIFIQUE DE LA VAPEUR

D'après la première loi de la thermodynamique, on a :

$$T dS = dh - v dP$$

Pour la vapeur d'eau, qui est une substance pure, toutes les caractéristiques s'expriment à l'aide de deux paramètres indépendants, et on a :

$$\begin{aligned} T \left[\left(\frac{\delta S}{\delta T} \right)_v dT + \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right)_T dV \right] &= \left[\left(\frac{\delta h}{\delta T} \right)_v dT + \left(\frac{\delta h}{\delta V} \right)_T dV \right] - \\ &v \left[\left(\frac{\delta P}{\delta T} \right)_v dT + \left(\frac{\delta P}{\delta V} \right)_T dV \right] \end{aligned}$$

D'où on tire :

$$T \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right)_T = \left(\frac{\delta h}{\delta V} \right)_T - v \left(\frac{\delta P}{\delta V} \right)_T \quad (2,5)$$

Ou encore :

$$\left(\frac{\delta h}{\delta V} \right)_T = T \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right)_T + v \left(\frac{\delta P}{\delta V} \right)_T \quad (2,6)$$

D'autre part, on peut écrire :

$$dT = \left[\frac{\delta T}{\delta P} \right]_V dP + \left[\frac{\delta T}{\delta V} \right]_P dV$$

Qui donne à $T = C^{10}$:

$$\left[\frac{\delta T}{\delta P} \right]_V \cdot \left[\frac{\delta P}{\delta V} \right]_T + \left[\frac{\delta T}{\delta V} \right]_P = 0$$

Soit encore :

$$\left[\frac{\delta P}{\delta T} \right]_V = - \left[\frac{\delta P}{\delta V} \right]_T \cdot \left[\frac{\delta V}{\delta T} \right]_P \quad (2,7)$$

Par ailleurs, l'une des relations dues à Maxwell [Appendice 2] est :

$$\left[\frac{\delta S}{\delta V} \right]_T = \left[\frac{\delta P}{\delta T} \right]_V \quad (2,8)$$

Finalement, en portant (2,8) et (2,7) dans (2,6) , on obtient après réarrangement :

$$\left[\frac{\delta h}{\delta V} \right]_T = \frac{1 - \frac{T}{V} \left[\frac{\delta V}{\delta T} \right]_P}{\frac{1}{V} \left[\frac{\delta V}{\delta P} \right]_T} \quad (2,9)$$

Rappelons à présent que le coefficient de détente isobare (α_P) et le coefficient de compressibilité isotherme (β_T) sont définis respectivement par :

$$\alpha_P = \left(\frac{1}{V} \right) \cdot \left[\frac{\delta V}{\delta T} \right]_P \quad \text{et} \quad \beta_T = - \left(\frac{1}{V} \right) \left[\frac{\delta V}{\delta P} \right]_T$$

En utilisant l'équation d'état (2,2) pour le calcul de $\left[\frac{\delta V}{\delta T} \right]_P$ et $\left[\frac{\delta V}{\delta P} \right]_T$, on trouve que :

$$T \alpha_P = \frac{T}{V} \left[\frac{\delta V}{\delta T} \right]_P = \frac{V^2 + V(B+B_1) + (C+C_1)}{V^2 + 2BV + 3C} \quad (2,10)$$

$$P \beta_T = - \frac{P}{V} \left[\frac{\delta V}{\delta P} \right]_T = \frac{V^2 + BV + C}{V^2 + 2BV + 3C} \quad (2,11)$$

En combinant à présent les relations (2,10), (2,11) et (2,2) avec (2,9) on arrive à l'expression :

$$\left[\frac{\delta h}{\delta V} \right]_T = -R T \left[\frac{1}{V^2} (B - B_1) + \frac{1}{V^3} (2C - C_1) \right] \quad (2,12)$$

D'où l'on obtient, par intégration, l'enthalpie spécifique de la vapeur :

$$h(T, V) = h_0(T) + \int \left(\frac{\delta h}{\delta V} \right)_T dV$$

Soit :

$$h(T, V) = h_0(T) + R T \left[\frac{C B - B_1}{V} + \frac{C C - C_1/2}{V^2} \right] \quad (2,13)$$

Où $h_0(T)$ est une fonction de la température seulement.

II - 3 ENTROPIE SPECIFIQUE DE LA VAPEUR

Reprenons la relation (2,5) et transformons son second membre de la façon suivante :

$$T \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right)_T = \left(\frac{\delta h}{\delta V} \right)_T - v \left(\frac{\delta P}{\delta V} \right)_T = \frac{T \alpha_P - 1}{\beta_T} + \frac{1}{\beta_T} = T \frac{\alpha_P}{\beta_T}$$

D'où

$$\left(\frac{\delta S}{\delta V} \right)_T = \frac{\alpha_P}{\beta_T} \quad (2,14)$$

Avec (2,10) et (2,11) cette expression devient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right)_T &= \frac{V^2 + V(B+B_1) + (C+C_1)}{V^2 + 2BV + 3C} \cdot \frac{V^2 + 2BV + 3C}{V^2 + BV + C} \cdot \frac{P}{T} \\ &= \frac{V^2 + V(B+B_1) + (C+C_1)}{V^2 + BV + C} \cdot \frac{R}{V} \left[1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} \right] \\ \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right)_T &= \frac{R}{V} \left[1 + \frac{B + B_1}{V} + \frac{C + C_1}{V^2} \right] \quad (2,15) \end{aligned}$$

D'où l'on obtient l'entropie spécifique par intégration :

$$S = S_0(T) + \int \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right)_T dV$$

Soit :

$$S(T, V) = S_0(T) + R \left[\ln V - \frac{B + B_1}{V} - \frac{C + C_1}{2V^2} \right] \quad (2,16)$$

Où $S_0(T)$ est une fonction de la température seulement.

II - 4 CHALEURS SPECIFIQUES DE LA VAPEUR

II - 4 - 1 CHALEUR SPECIFIQUE A PRESSION CONSTANTE C_p

Le premier principe de la thermodynamique donne :

$$dq = dh - vdp$$

D'où pour une évolution à pression constante :

$$C_p = \left[\frac{\delta h}{\delta T} \right]_p \quad (2,17)$$

Avec l'équation (2,13), on a :

$$C_p = \left[\frac{\delta h_0(T)}{\delta T} \right]_p + R \left\{ \frac{1}{V} \left[(1-\alpha_p)(B-B_1) - B_2 \right] + \frac{1}{V^2} \left[(1-2\alpha_p T)C + \alpha_p TC_1 - \frac{C_2}{2} \right] \right\}$$

Soit encore :

$$C_p = C_{p0}(T) + R \left\{ \frac{1}{V} \left[(1-\alpha_p T)(B-B_1) - B_2 \right] + \frac{1}{V^2} \left[(1-2\alpha_p T)C + \alpha_p TC_1 - \frac{C_2}{2} \right] \right\} \quad (2,18)$$

Où $C_{p0}(T)$ est la chaleur spécifique à pression nulle.

Elle est donnée par la relation empirique [1] suivante :

$$C_{p0}(T) = \sum_{i=1}^6 a_i T^{(i-2)} \quad (2,19)$$

Où, pour obtenir C_{p0} en [KJ/Kg.K], T étant donnée en [K], les constantes a_i ont pour valeurs :

$$a_1 = 46.0 \quad ; \quad a_2 = 1.47276 \quad ; \quad a_3 = 8.3893 \times 10^{-4} \quad ;$$

$$a_4 = 2.19989 \times 10^{-7} \quad ; \quad a_5 = 2.46619 \times 10^{-10} \quad ;$$

$$a_6 = -9.70466 \times 10^{-14} \quad .$$

II - 4 - 2 DETERMINATION DE $h_0(T)$ et $S_0(T)$

Notons qu'à présent que C_{p0} est déterminé, les

fonctions de la température $h_o(T)$ et $S_o(T)$ figurant dans les expressions (2,13) et (2,16) respectivement se calculent aisément comme suit :

$$h_o(T) = h_{o0} + \int C_{po}(T) dT \quad (2,20)$$

et

$$S_o(T) = S_{o0} + \int \frac{C_{po}(T)}{T} dT \quad (2,21)$$

Où h_{o0} et S_{o0} sont des constantes choisies de sorte à satisfaire la condition de référence :

$$h = 0 \quad \text{et} \quad S = 0 \quad \text{au point triple.}$$

Leurs valeurs respectives sont :

$$h_{o0} = 1811.06 \text{ [KJ/Kg]} \quad \text{et} \quad S_{o0} = 0.97012 \text{ [KJ/Kg.K]}$$

II - 4 - 3 CHALEUR SPECIFIQUE A VOLUME CONSTANT C_v

La chaleur spécifique à volume constant (C_v) s'obtient à partir de la chaleur spécifique à pression constante (C_p) à l'aide de la relation :

$$C_v = C_p - \frac{\alpha_p^2 V T}{\beta_T} \quad (2,22)$$

Pour l'établissement de cette relation, voir appendice 3 .

En substituant dans (2,22) α_p , β_T , et C_p par leurs expressions tirées à partir de (2,10), (2,11) et (2,18) respectivement, on trouve :

$$C_v = C_{po}(T) - R \left[1 + \frac{1}{V} (2B_1 + B_2) + \frac{1}{V^2} (C_1 + C_2/2) \right] \quad (2,23)$$

II - 5 EXPOSANT ISENTROPIQUE (K)

Pour une transformation isentropique ($dS=0$), on a :

$$P V^K = C^{te}$$

En opérant une dérivation logarithmique de cette expression, on a :

$$\frac{dP}{P} + K \frac{dV}{V} = 0$$

D'où, l'expression de l'exposant isentropique :

$$\kappa = - \frac{V}{P} \left(\frac{\delta P}{\delta V} \right)_S \quad (2,24)$$

mais, on a les relations mathématiques suivantes [Appendice 2] :

$$\left(\frac{\delta V}{\delta T} \right)_S \cdot \left(\frac{\delta T}{\delta S} \right)_V \cdot \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right) = -1$$

et

$$\left(\frac{\delta P}{\delta V} \right)_S = \left(\frac{\delta P}{\delta T} \right)_S \cdot \left(\frac{\delta T}{\delta V} \right)_S$$

qui, portées dans (2,4) permettent d'écrire que :

$$\kappa = \frac{V}{P} \left(\frac{\delta P}{\delta T} \right)_S \left(\frac{\delta T}{\delta S} \right)_V \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right)_T$$

soit encore :

$$\kappa = \frac{V}{P} \left(\frac{\delta P}{\delta T} \right)_S \left(\frac{\delta T}{\delta S} \right)_V - \left(\frac{\delta S}{\delta P} \right)_T \left(\frac{\delta P}{\delta V} \right)_T$$

De plus, on a la relation mathématique [Appendice 2] :

$$\left(\frac{\delta P}{\delta T} \right)_S \left(\frac{\delta T}{\delta S} \right)_P \left(\frac{\delta S}{\delta P} \right)_T = -1$$

qui ramène l'expression donnant (κ) à :

$$\begin{aligned} \kappa &= - \frac{V}{P} \left(\frac{\delta S}{\delta T} \right)_P \left(\frac{\delta T}{\delta S} \right)_V \left(\frac{\delta P}{\delta V} \right)_T \\ &\quad - \left(\frac{\delta S}{\delta T} \right)_P \\ &= \frac{P}{V} \left(\frac{\delta V}{\delta P} \right)_T \left(\frac{\delta S}{\delta T} \right)_V \end{aligned}$$

Enfin, en remarquant que :

$$C_V = T \left(\frac{\delta S}{\delta T} \right)_V ; \quad C_P = T \left(\frac{\delta S}{\delta T} \right)_P \quad \text{et} \quad \beta_T = - \left(\frac{\delta V}{\delta P} \right)_T$$

on aura :

$$\kappa = \frac{C_P}{P \cdot \beta_T \cdot C_V} \quad (2,25)$$

II - 6 TRAITEMENT DU DOMAINE DE LA VAPEUR SATURÉE

II - 6 - 1 VOLUME

Dans les problèmes de calcul des écoulements biphasiques hors d'équilibre, où la température du liquide ne diffère que de quelques degrés de la température de saturation, il est admis de négliger l'effet de la pression sur la masse volumique du liquide; on a par conséquent pour le liquide :

$$V_f = V_f(T_f) \quad (2,26)$$

Le volume spécifique du liquide est obtenu en fonction de la température à partir de la relation empirique suivante [1] :

$$\frac{1}{V} = \sum_{i=0}^3 a_i \left(\frac{T}{T_c} \right)^i \quad (2,27)$$

T étant exprimée en [K], pour avoir V en [m³ / Kg] les constantes (a_i) ont pour valeurs :

$$a_0 = 928.08 ; \quad a_1 = 464.63 ; \quad a_2 = - 568.46$$

$$a_3 = - 255.17 .$$

Rappelons que T_c = 647.286 K

II - 6 - 2 PRESSION

La pression de saturation est, elle aussi, donnée par une relation empirique fonction de la température [5].

$$P = P_c \text{ Exp} \left[\frac{1}{\vartheta} \cdot \frac{f_1(\vartheta)}{f_2(\vartheta)} - \frac{f_3(\vartheta)}{f_4(\vartheta)} \right] \quad (2,28)$$

où : $\vartheta = T / T_c$.

$$f_1(\vartheta) = K_1(1-\vartheta) + K_2(1-\vartheta)^2 + K_3(1-\vartheta)^3 + K_4(1-\vartheta)^4 + K_5(1-\vartheta)^5$$

$$f_2(\vartheta) = 1 + K_6(1-\vartheta) + K_7(1-\vartheta)^2$$

$$f_3(\vartheta) = (1-\vartheta)$$

$$f_4(\vartheta) = K_8(1-\vartheta)^2 + K_9$$

avec :

$$\begin{aligned} K_1 &= -7.691234564 & ; & & K_2 &= -26.0802369 & ; \\ K_3 &= -168.1706546 & ; & & K_4 &= 64.23285504 & ; \\ K_5 &= -118.9646225 & ; & & K_6 &= 4.1674732 & ; \\ K_7 &= 20.9750676 & ; & & K_8 &= 10^9 & ; & K_9 &= 6 . \end{aligned}$$

II - 6 - 3 ENTHALPIE SPECIFIQUE

l'enthalpie spécifique du liquide saturé se calcule à partir de l'équation de Clausius-Clapeyron.

$$h_{fg} = h_{gs} - V_{fg} \cdot T_a \frac{dP_a}{dT_a} \quad (2,29)$$

avec

$$V_{fg} = V_{gs}(T_a) - V_f(T_a)$$

$V_{gs}(T_a)$ étant le volume de la vapeur saturée sèche à la température T_a . Le calcul de ce volume fera l'objet d'un paragraphe ultérieur.

$$h_{gs} = h \left[T_a, V_{gs}(T_a) \right], \text{ se calcule à partir de l'équation (2,13)}$$

$$\frac{\delta P_a}{\delta T_a}, \text{ s'obtient à partir de l'équation empirique (2.28)}$$

$$\frac{\delta P_a}{\delta T_a} = \frac{P_a}{T_a} \left[\frac{\vartheta \cdot f_1'(\vartheta) \cdot f_2(\vartheta) - f_1(\vartheta) \cdot f_2'(\vartheta) - \vartheta \cdot f_1(\vartheta) \cdot f_2'(\vartheta)}{\vartheta^2 \cdot f_2^2(\vartheta)} - \frac{f_3'(\vartheta) \cdot f_4(\vartheta) - f_3(\vartheta) \cdot f_4'(\vartheta)}{f_4^2(\vartheta)} \right] \quad (2,30)$$

II - 6 - 4 ENTROPIE SPECIFIQUE

L'entropie spécifique du liquide saturé est calculée à partir de la relation exprimant la chaleur latente de vaporisation :

$$(h_{g2} - h_{f2}) = T_2 (S_{g2} - S_{f2}) \quad (2,31)$$

relation qui donne :

$$S_{f2} = S_{g2} - \frac{h_{g2} - h_{f2}}{T_2} \quad (2,32)$$

où

$S_{g2} = S[T_2, V_{g2}(T_2)]$ se calcule à partir de l'équation (2,16).

II - 7 TRAITEMENT DU DOMAINE LIQUIDE

II - 7 - 1 CHALEUR SPECIFIQUE A PRESSION CONSTANTE (C_{pf})

Les caractéristiques du liquide sont déterminées de telle sorte à assurer leur compatibilité avec les équations utilisées pour le domaine vapeur ainsi que celle donnant la pression de saturation en fonction de la température. De ce fait, la chaleur spécifique s'obtient par différentiation de l'équation de Clausius-Clapeyron (2,31) :

$$C_{pf} = C_{pg2} - V_{fg} T_2 \frac{d^2 P_2}{dT_2^2} - 2T_2 \left[\frac{dP_2}{dT_2} \right] (\alpha_{pg} V_{g2} - \alpha_{pf} V_f) \\ + T_2 \left[\frac{dP_2}{dT_2} \right]^2 (\beta_{Tg2} V_{g2} - \beta_{Tf} V_f) \quad (2,33)$$

avec :

$$\alpha_{fg} = \frac{1}{V_f} \left[\frac{\delta V_f}{\delta T} \right]_P \quad \text{et} \quad \beta_{Tf} = - \frac{1}{V_f} \left[\frac{\delta V_f}{\delta P} \right]_T$$

Etant donné qu'on peut négliger la compressibilité du liquide, on a $\frac{\delta V_f}{\delta P} = 0$ et par suite $\beta_{Tf} = 0$.

D'autre part, en utilisant l'équation (2,27), pour calculer $\left[\frac{\delta V_f}{\delta T} \right]_P$, on obtient :

$$\alpha_{pf} = - \frac{V_f}{T_c} (a_1 + 2a_2 \theta + 3a_3 \theta^2) \quad (2,34)$$

Les autres termes de l'équation (2,33) se calculent comme suit :

- α_{pg2} : à partir de (2,10) pour $T = T_f$ et $V = V_{g2}(T_f)$

- β_{pgs} : à partir de (2,11) pour les mêmes paramètres
- C_{pgs} : à partir de (2,18) pour $T = T_f$ et $V = V_{gs}(CT)$

II - 7 - 2 ENTHALPIE SPECIFIQUE (h_f)

$$h_f = h_{fa} + \int_{T_s}^{T_f} C_{pf} dT \quad (2,35)$$

où :

h_{fa} est calculé à partir de (2,29) pour une pression donnée.

II - 7 - 3 ENTROPIE SPECIFIQUE (S_f)

$$S_f = S_{fa} + \int_{T_a}^{T_f} C_{pf} \frac{dT}{T} \quad (2,36)$$

où :

S_{fa} est calculé à partir de (2,32) pour une pression donnée .

CHAPITRE

TROISIEME

PRESENTATION DU LOGICIEL

Dans les calculs concernant les turbomachines, on a le plus souvent affaire à des problèmes nécessitant la détermination des caractéristiques de la vapeur à partir de la connaissance d'une paire de paramètres indépendants parmi les quatre suivantes :

(P,T) ; (P,V) ; (P,h) et (P,S) .

Il est , pour ainsi dire, pratiquement impossible de rencontrer une situation où (h) et (S) sont connus a priori et où il est demandé de déterminer les autres caractéristiques de la vapeur.

Cependant, avec le présent logiciel, on se propose de résoudre le problème général de la détermination des caractéristiques thermodynamiques de la vapeur en fonction de deux variables thermodynamiques indépendantes quelconques.

Rappelons que l'équation du viriel utilisée donne la pression en fonction du volume et de la température. Par conséquent, lorsque la température et le volume sont utilisés comme variables, la détermination des caractéristiques de la vapeur se fait aisément à l'aide des relations développées au chapitre 2.

Maintenant, lorsque l'une ou les deux variables utilisées ne correspondent ni à la température ni au volume spécifique, le calcul de toute caractéristique de la vapeur doit passer par un processus itératif. Par exemple, pour déterminer le volume spécifique connaissant

la pression et la température, la méthode dite "par interpolation" nous assure la convergence au bout de quatre à cinq itérations. D'ailleurs, cette méthode qui converge donc rapidement sera avantageusement utilisée à chaque fois qu'un processus itératif s'impose. Toutefois, lorsqu'il s'agit de déterminer le volume de la vapeur saturée sèche en fonction de la température, cette méthode ne convient pas. En effet, l'interpolation linéaire commençant entre deux points appartenant à la ligne de saturation, la première itération donne un point situé à l'intérieur de la cloche, point dont les caractéristiques ne peuvent être déterminées. Pour contourner cette difficulté, on utilise la méthode dite "du point fixe" qui permet d'approcher la solution du seul côté de la vapeur surchauffée.

III - 1 DOMAINE D'APPLICATION :

L'équation d'état (2,2) et les équations empiriques utilisées s'appliquent au domaine délimité dans un diagramme (T-S) par la ligne de saturation, l'isentropique $S = 5.7$ [KJ/Kg.K], l'isochore $V = 18$ [Cm³/g] et l'isotherme $T = 800$ [°c] (figure 1).

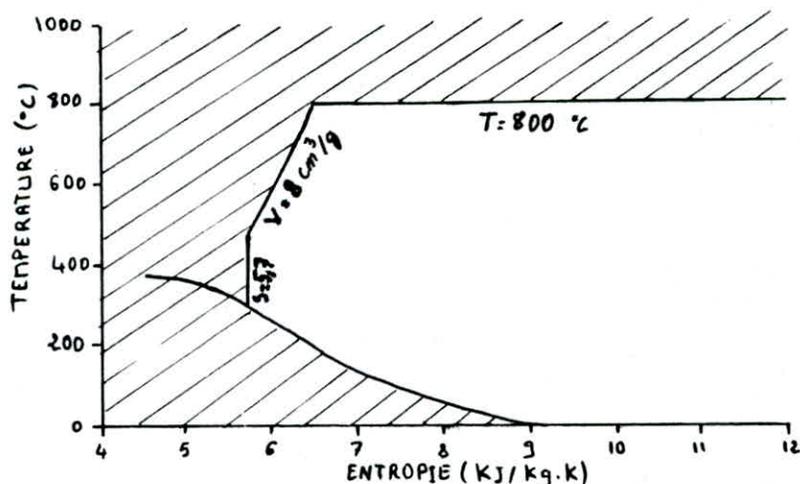
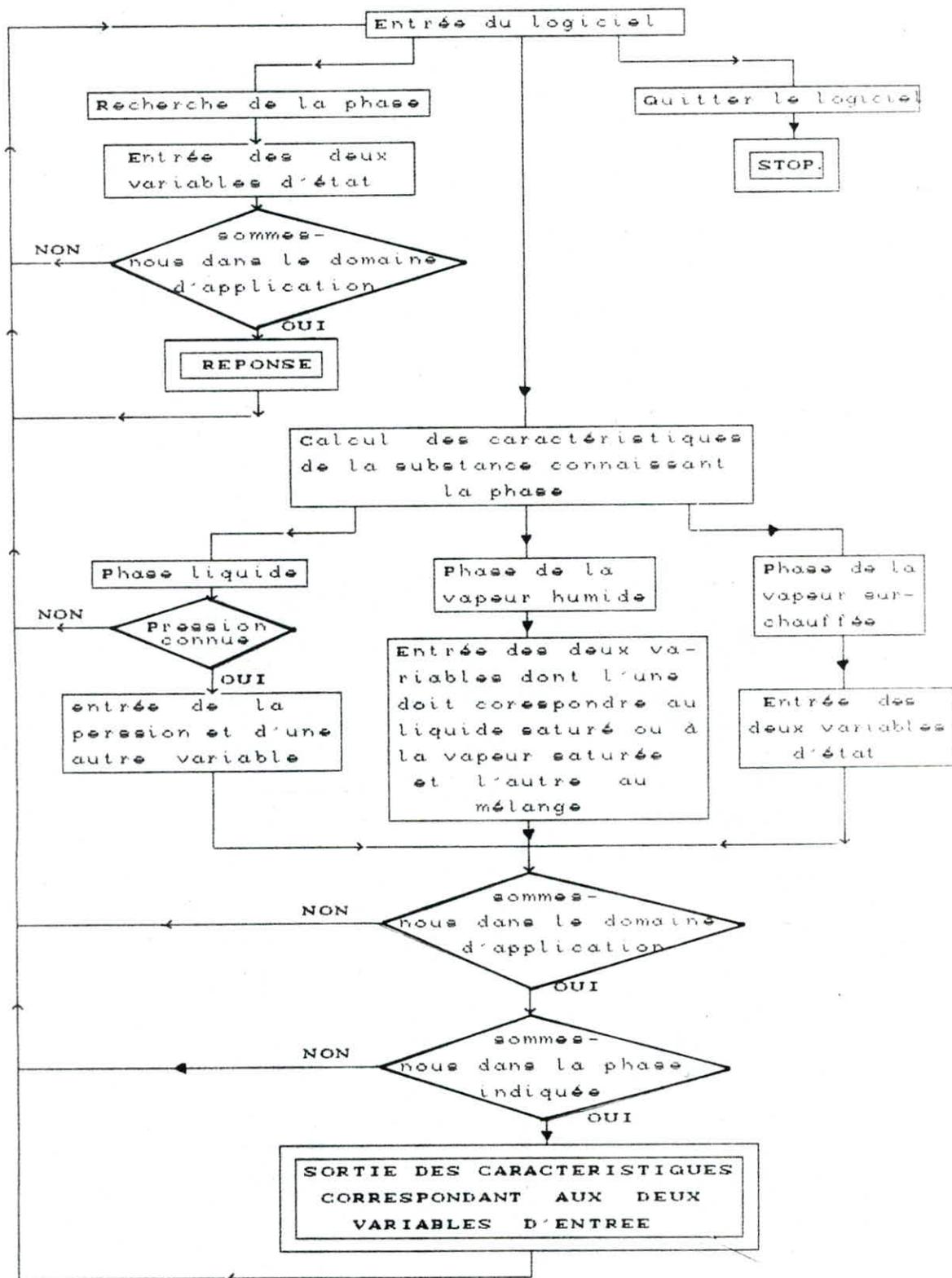


FIGURE 1 Diagramme illustrant le domaine d'application des équations empiriques programmées

III - 2 ORGANIGRAMME DU LOGICIEL



CHAPITRE QUATRIEME

R E S U L T A T S

L'équation d'état (2,2) programmée, nous a permis de visualiser les caractéristiques de la vapeur d'eau sur les figures 1 (bis) à 12 . les astérisques représentent des points tirés à partir de la table de SKELETON la figure 1(bis) représente le domaine d'application de l'équation d'état utilisée. Ce domaine rappelons-le est délimité par la ligne de saturation, l'isentropique $S=5.7$ (KJ/Kg.k), l'isochore $V = 8$ (Cm³/g) et l'isotherme 800 °C. On voit bien d'après cette figure que nos résultats sont en parfaite concordance avec les tables de SKELETON.

Pour mettre plus en évidence cette concordance, quelques valeurs numériques sont portées dans le tableau (4,1) et sont comparées aux valeurs correspondantes de la table de SKELETON . Ce tableau suggère les observations suivantes :

L'erreur relative sur le volume ne dépasse pas 3% aux frontières du domaine d'application, alors qu'elle n'atteint pas 0.1 % à l'intérieur de ce domaine. Pour l'enthalpie cette erreur est inférieure à 0.3 % aux frontières et 0.05 % à l'intérieur. Pour l'entropie l'erreur est inférieure à 0.2 % .

En ce qui concerne la chaleur spécifique, il est évident d'après la figure 10, que l'erreur devient importante au voisinage de la ligne de saturation . Le tableau (4,1) nous montre qu'elle peut atteindre jusqu'à

5 % ; toutefois, pour des points situés à l'intérieur du domaine d'application l'erreur ne dépasse pas 1.5 % .

Ceci pourrait s'expliquer par le fait qu'au voisinage de la ligne de saturation, l'influence du quatrième coefficient du viriel dont on n'a pas tenu compte, devient importante .

Pour le même domaine d'application , J.B.Young [1] fait état d'un écart maximum par rapport aux tables de SKELETON de 4% pour le volume spécifique, 1% pour l'enthalpie et 10% pour la chaleur spécifique. Ce même auteur ne parle pas de l'erreur commise sur l'entropie.

Cependant, lorsqu'on calcule cette dernière en utilisant ses données, les valeurs trouvées s'écartent franchement de celles qui figurent sur les tables de SKELETON . L'erreur pouvant atteindre jusqu'à 40% .

Nous avons constaté que cette erreur ne dépend que de la température et nous l'avons représentée sur la figure 2 . Cette figure révèle que l'erreur est une fonction logarithmique de la température. Ce qui nous a amené à corriger le coefficient (a_2) dans l'équation (2,11). Cette correction nous a conduit à des résultats d'une très grande précision, comme il a été dit ci dessus.

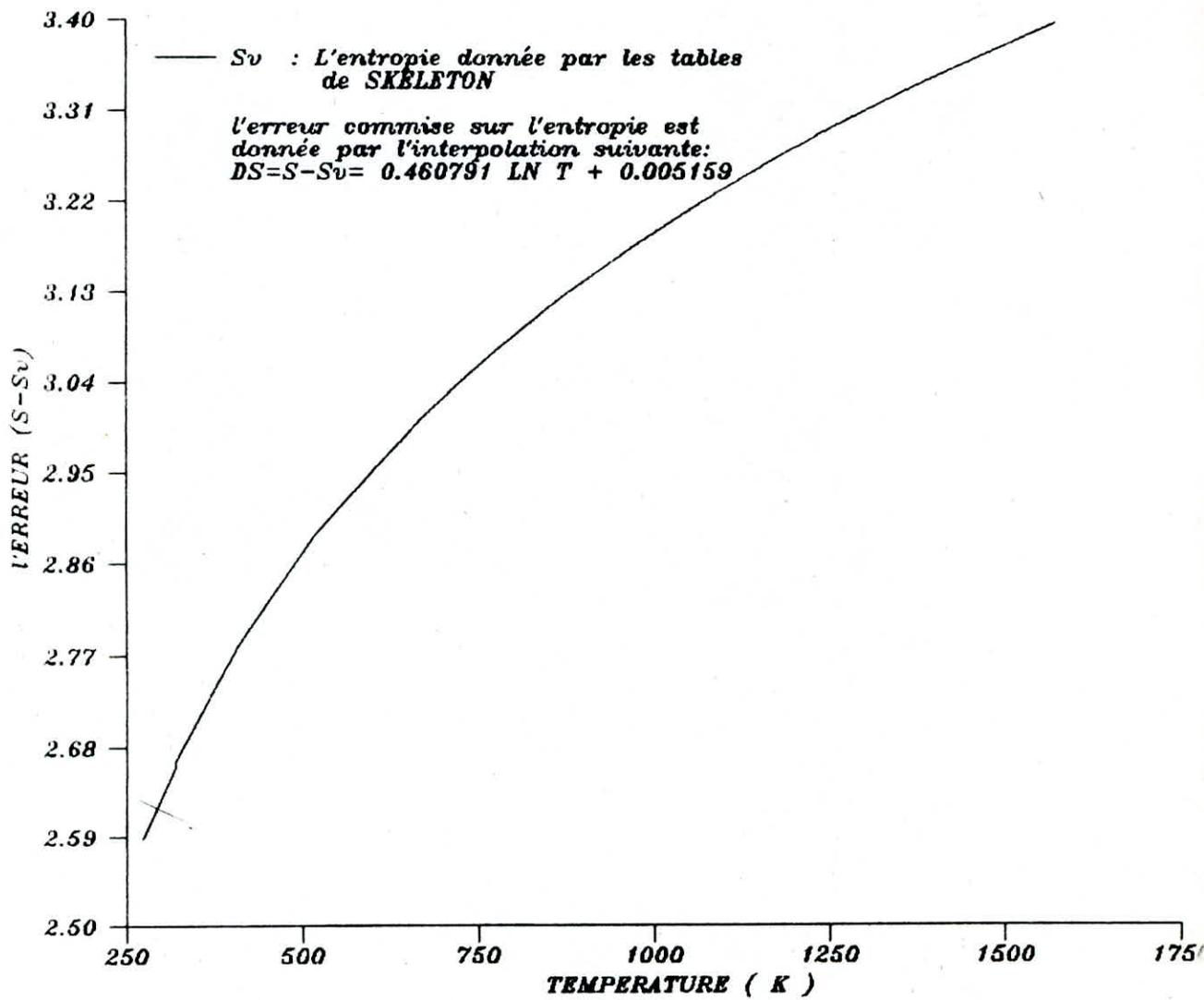


FIGURE 2 L'erreur sur l'entropie

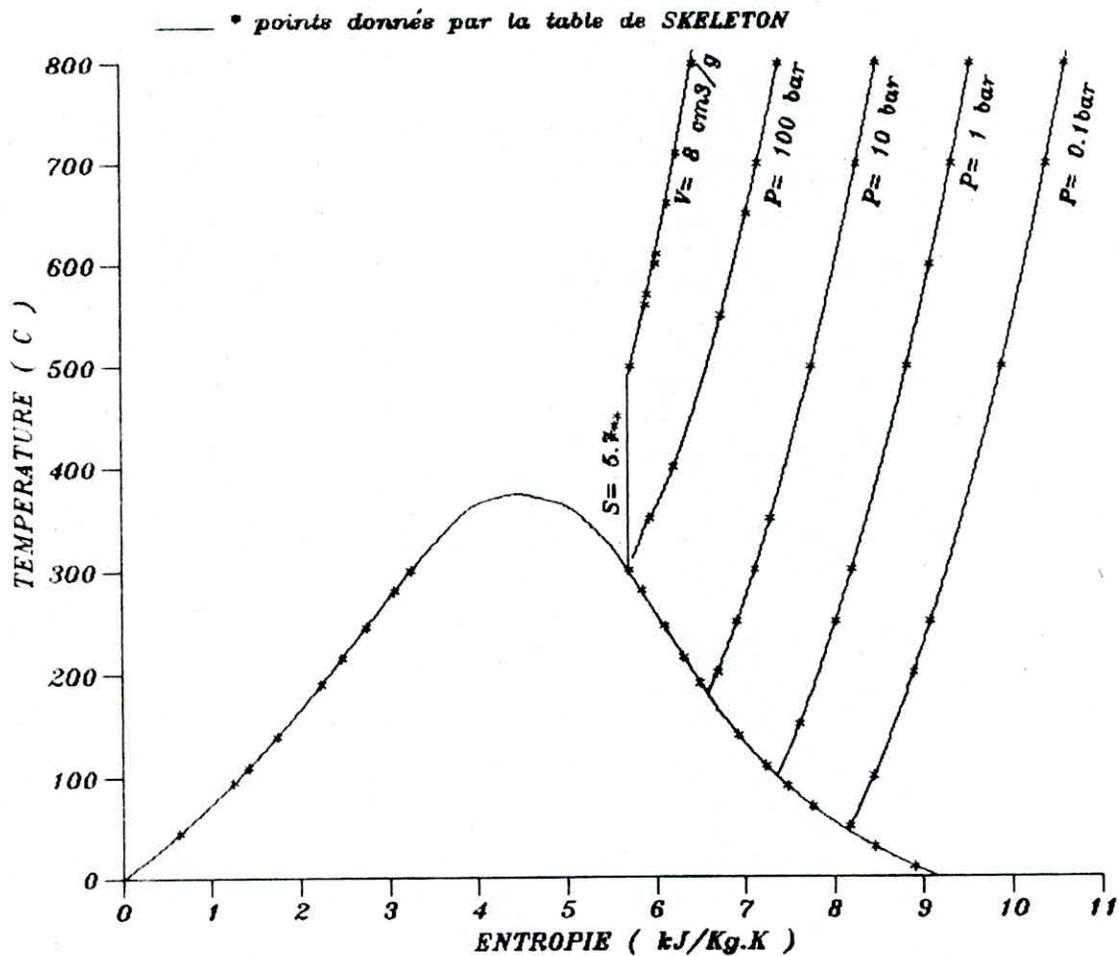


FIGURE 1bis Domaine d'application de l'équation d'état
 $PV = RT (1 + B/V + C/V^2)$

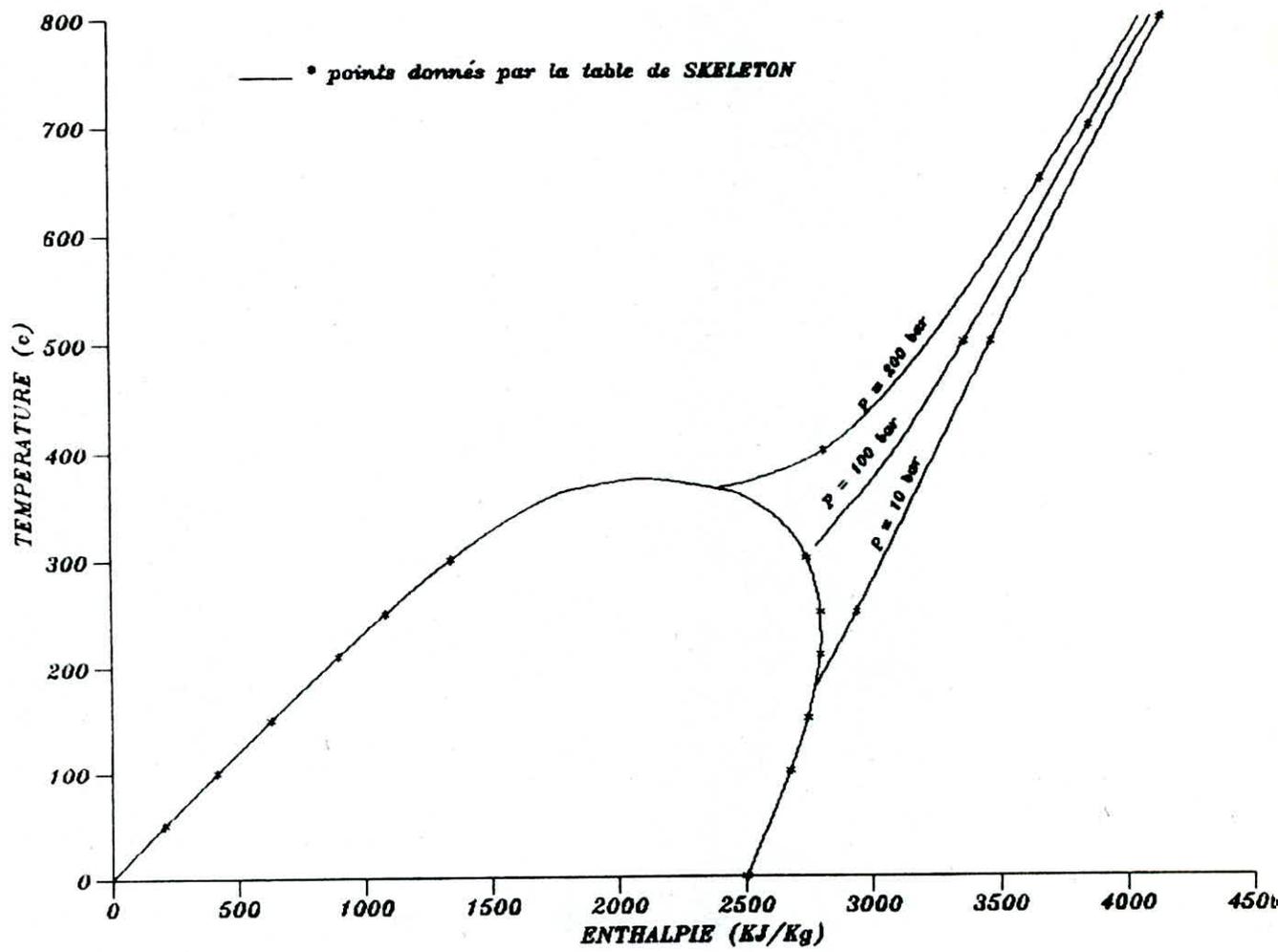


FIGURE 3 Diagramme température -enthalpie

| | | | | | | | |
|----------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| T^* ($^{\circ}\text{C}$) | 500 | 500 | 600 | 750 | 800 | 500 | 600 |
| P^* (bar) | 290 | 260 | 290 | 350 | 370 | 100 | 100 |
| V (cm^3/g) | 8.853 | 10.39 | 11.83 | 12.42 | 12.53 | 32.76 | 38.34 |
| V^* (cm^3/g) | 9.104 | 10.56 | 11.90 | 12.42 | 12.52 | 32.79 | 38.37 |
| $\Delta V/V^*$ | 2.75 | 1.57 | 0.55 | 2.30 | 0.15 | 0.07 | 0.06 |
| H (KJ/Kg) | 3093.3 | 3144.7 | 3446.9 | 3846.7 | 3978.1 | 3373.8 | 3623.4 |
| H^* (KJ/Kg) | 3101.6 | 3150.2 | 3452.5 | 3854.9 | 3985.7 | 3374.6 | 3612.7 |
| $\Delta H/H^*$ | 0.27 | 0.18 | 0.16 | 0.21 | 0.19 | 0.02 | 0.02 |
| S (KJ/Kg. K) | 5.8261 | 5.9276 | 6.2526 | 6.5961 | 6.6973 | 6.5971 | 6.9009 |
| S^* (KJ/Kg. K) | 5.8302 | 5.9311 | 6.2582 | 6.6043 | 6.7072 | 6.5994 | 6.9013 |
| $\Delta S/S^*$ | 0.07 | 0.01 | 0.09 | 0.12 | 0.15 | 0.03 | 0.006 |
| C_P (KJ/Kg. K) | 4.357 | 3.897 | 3.154 | 2.872 | 2.832 | 2.564 | 2.453 |
| C_P^* (KJ/Kg. K) | 4.158 | 3.813 | 3.105 | 2.873 | 2.848 | 2.577 | 2.445 |
| $\Delta C_P/C_P^*$ | 4.79 | 2.19 | 1.57 | 0.04 | 0.55 | 0.006 | 0.31 |

SUITE DU TABLEAU

| | | | | | | | |
|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| T* (°C) | 800 | 300 | 450 | 100 | 500 | 50 | 300 |
| P* (bar) | 100 | 10 | 10 | 1 | 1 | 0.1 | 0.1 |
| V (cm ³ /g) | 48.63 | 257.89 | 330.3 | 1695 | 3565 | 14868 | 26445 |
| V* (cm ³ /g) | 48.59 | 257.9 | 330.3 | 1696 | 3565 | 14870 | 26450 |
| $\Delta V/V^*$ | 0.07 | 0.00 | 0.00 | 0.05 | 0.01 | 0.01 | 0.02 |
| H (KJ/Kg) | 4111.5 | 3050.9 | 3370.6 | 2676.2 | 3488.1 | 2592.3 | 3076.5 |
| H* (KJ/Kg) | 4112.0 | 3052.1 | 3370.8 | 2676.2 | 3488.1 | 2592.7 | 3076.6 |
| $\Delta H/H^*$ | 0.00 | 0.04 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
| S (KJ/Kg. K) | 7.4038 | 7.1220 | 7.6175 | 7.3608 | 8.8337 | 8.1735 | 9.2808 |
| S* (KJ/Kg. K) | 7.4058 | 7.1251 | 7.6190 | 7.3618 | 8.8348 | 8.1757 | 9.2820 |
| $\Delta S/S^*$ | 0.03 | 0.04 | 0.02 | 0.016 | 0.01 | 0.03 | 0.00 |
| C _P (KJ/Kg. K) | 2.455 | 2.146 | 2.143 | 2.041 | 2.132 | 1.907 | 1.998 |
| C _P * (KJ/Kg. K) | 2.464 | 2.145 | 2.138 | 2.026 | 2.162 | 1.893 | 1.993 |
| $\Delta C_P/C_P^*$ | 0.36 | 0.04 | 0.26 | 0.75 | 1.37 | 0.76 | 0.29 |

— *-valeurs données par la table de SKELETON

Tableau (4,1)

Comparaison des caractéristiques de la vapeur calculées pour quelques points pertinents avec celles que donne la table de SKELETON pour les mêmes points.

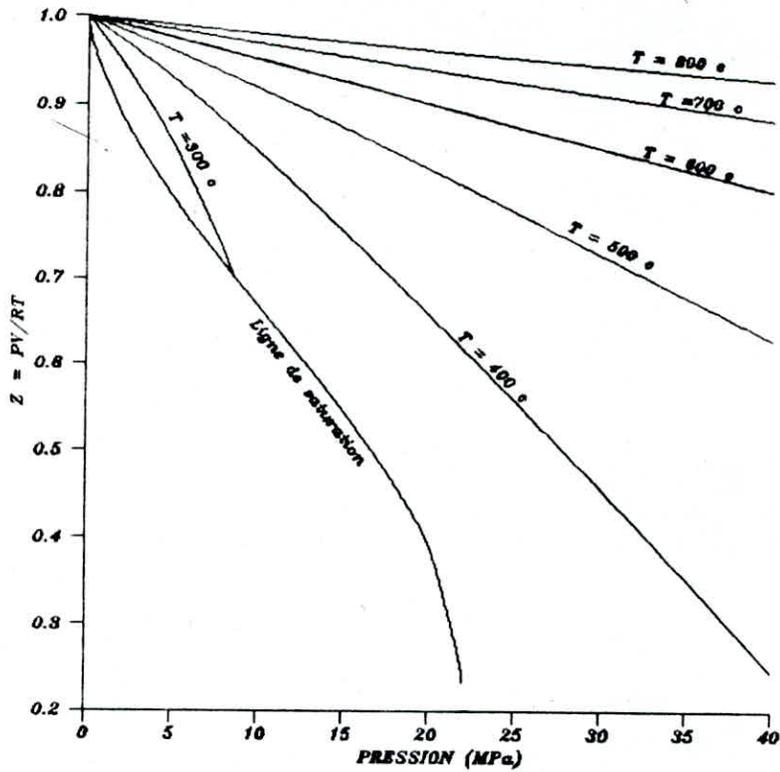


FIGURE 4 Compressibilité de la vapeur $Z=Z(T,P)$

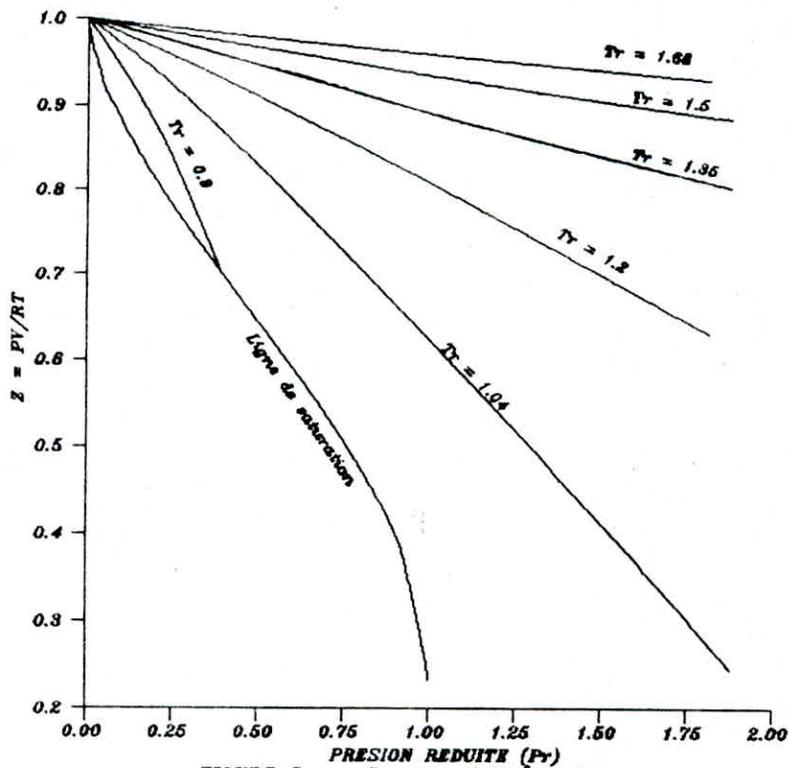


FIGURE 5 Compressibilité de la vapeur $Z=Z(T_r,P_r)$

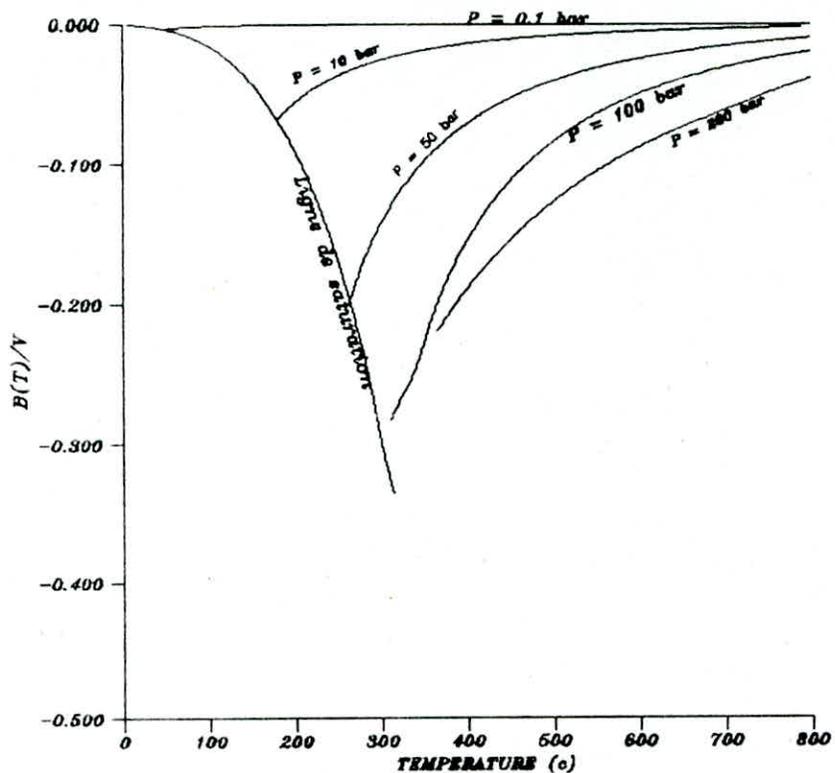


FIGURE 6 Diagramme illustrant la variation du second coefficient viriel en fonction de T et P

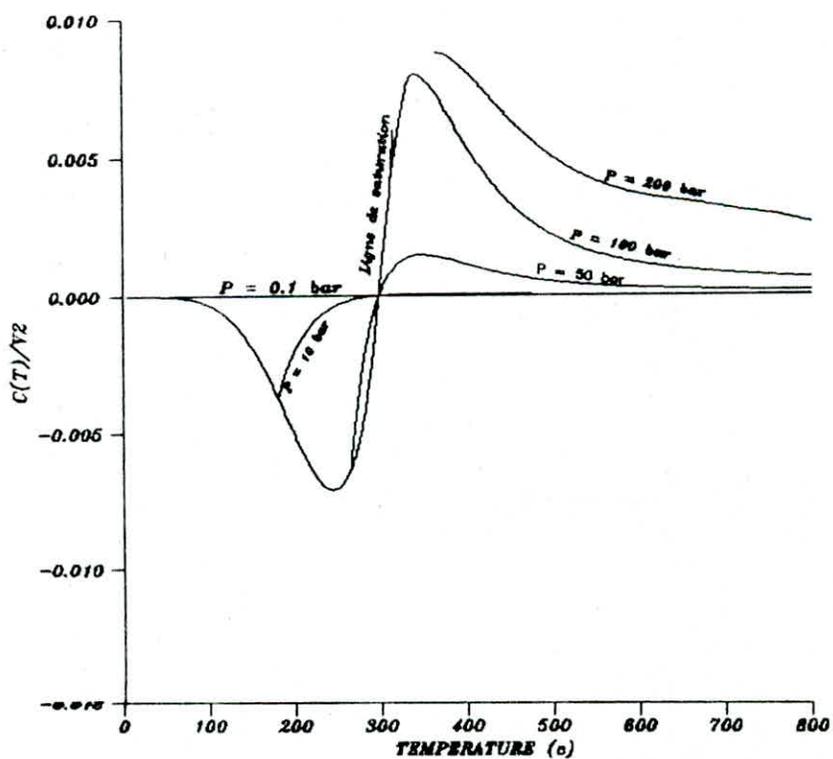


FIGURE 7 Diagramme illustrant la variation du troisième coefficient viriel en fonction de T et P

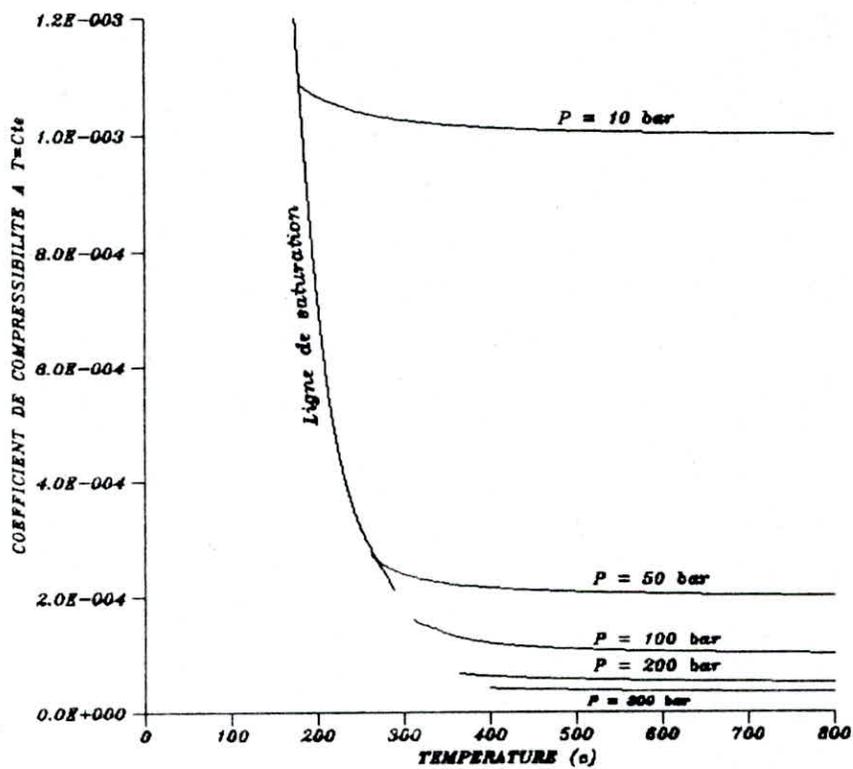


FIGURE 8 Coefficient de compressibilité isotherme (β_T)

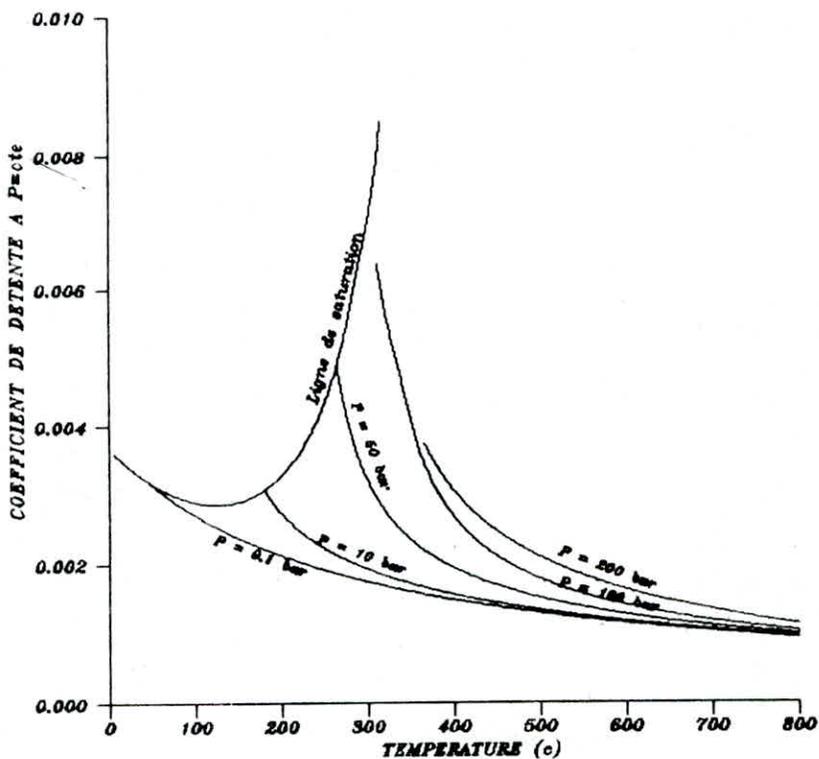


FIGURE 9 Coefficient de détente isobare (α_p)

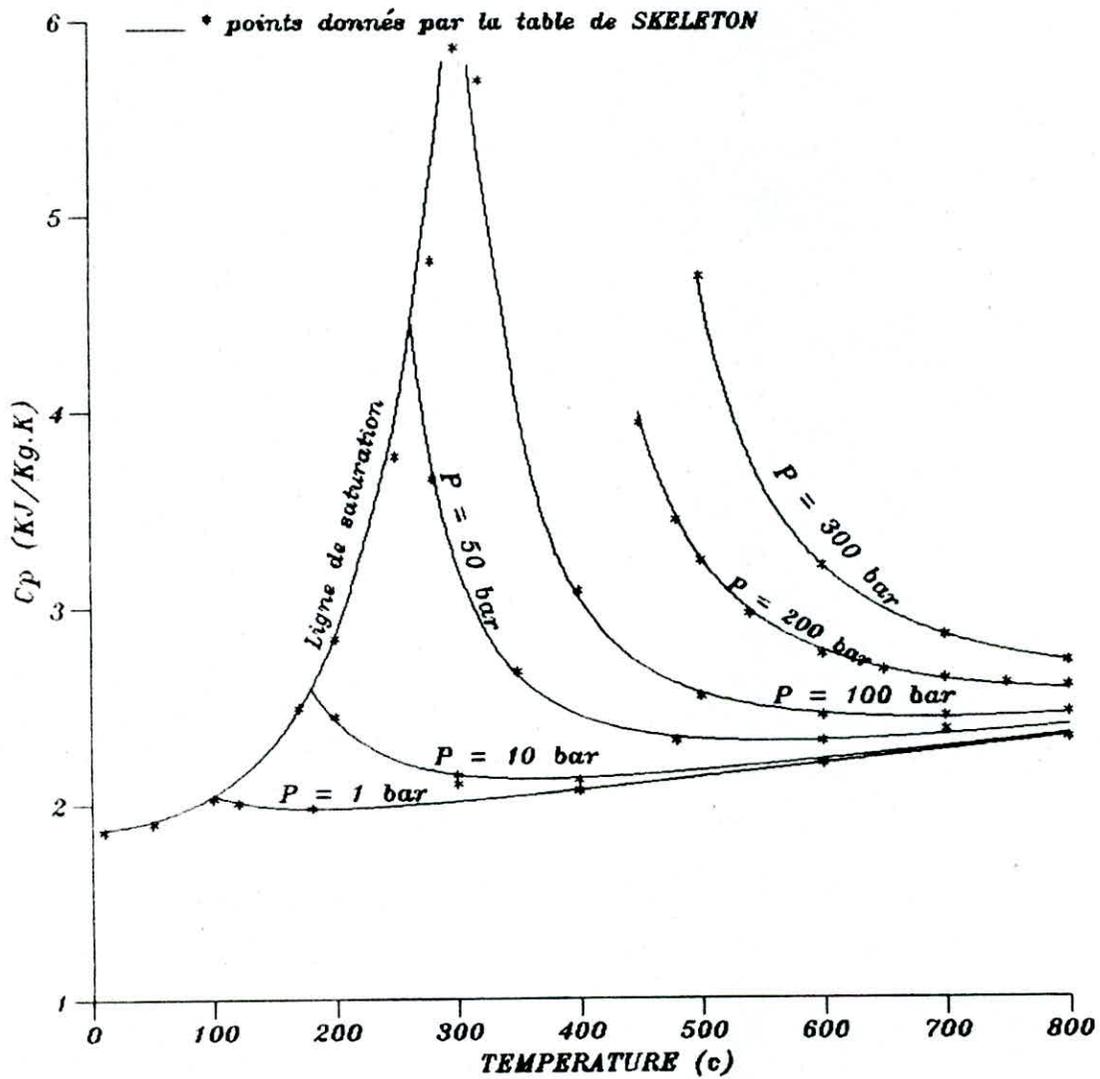


FIGURE 10 Chaleur massique à pression constante

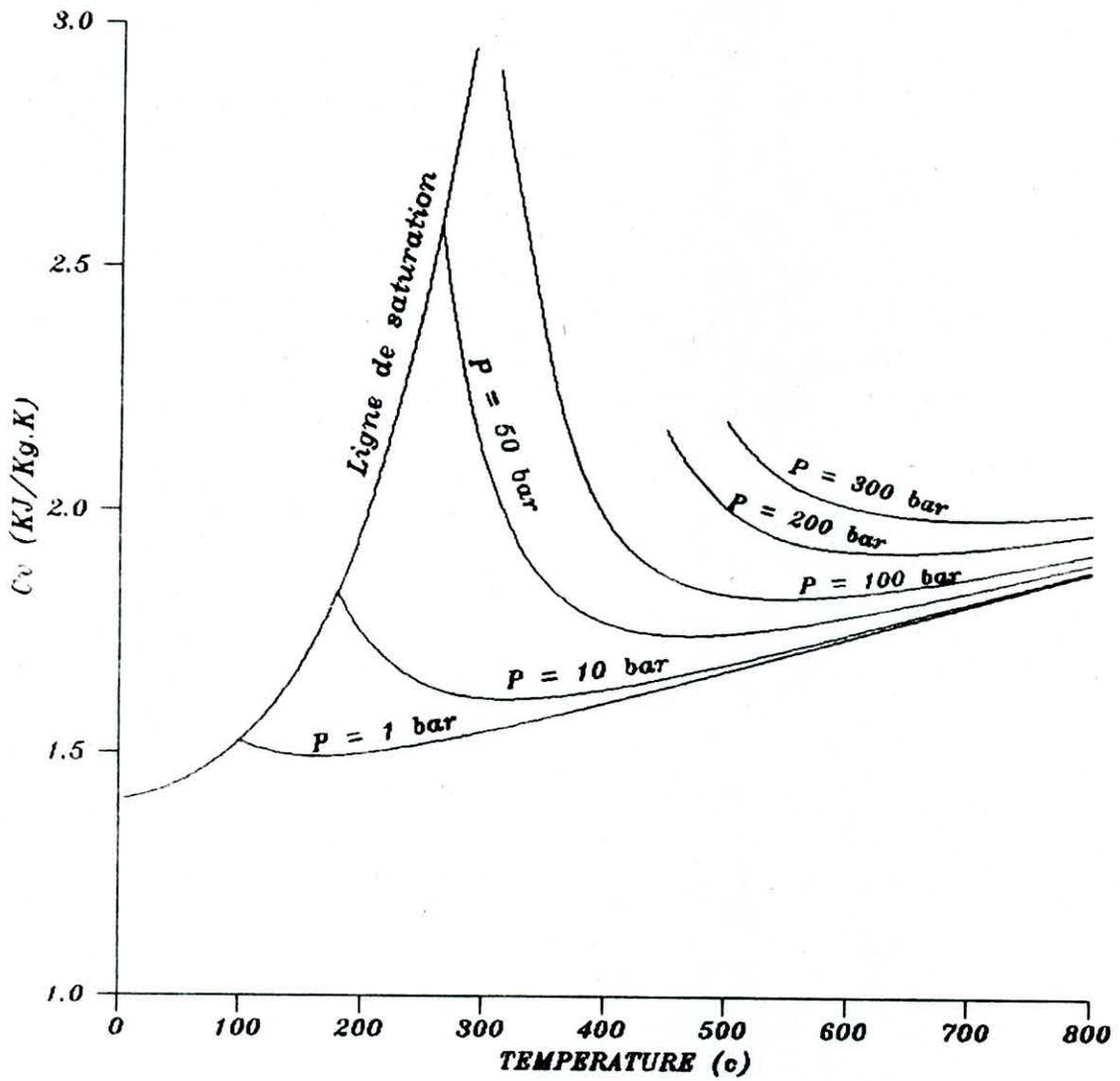


FIGURE 11 Chaleur massique à volume constant

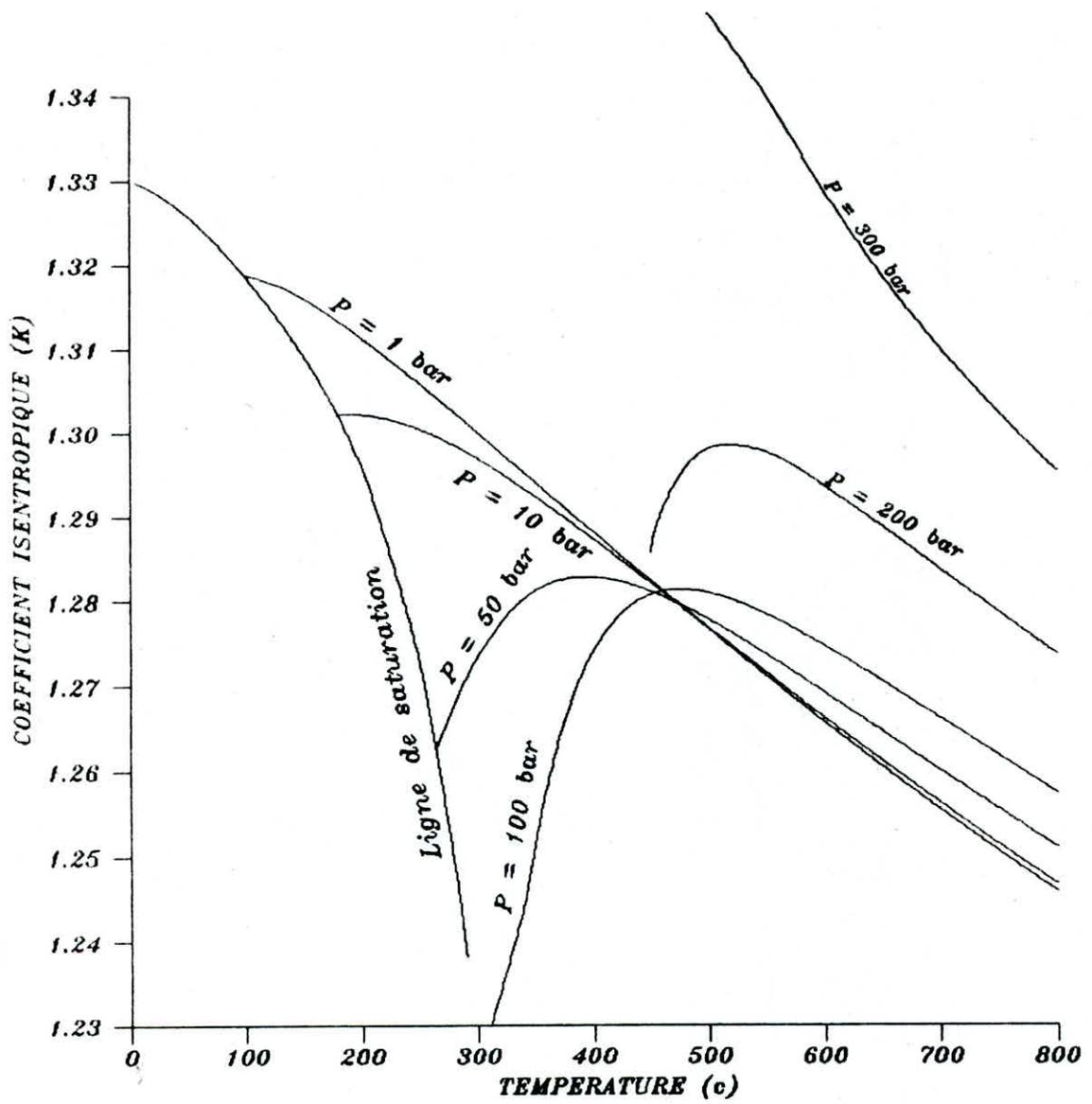


FIGURE 12 Coefficient isentropique (K)
 $K=K(T,P)$

IV - 1 EXEMPLE D'EXECUTION

| | | |
|-------------------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------------|
| Si vous ne connaissez pas la phase où vous êtes | Si vous connaissez la phase où vous êtes | Si vous voulez quitter le logiciel |
| <input type="text" value="TAPEZ 'R'"/> | <input type="text" value="TAPEZ 'C'"/> | <input type="text" value="TAPEZ 'Q'"/> |

VOTRE CHOIX EST : ↵

| | | |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| <input type="text" value="'T'"/> TEMPERATURE | <input type="text" value="'P'"/> PRESSION | <input type="text" value="'V'"/> VOLUME |
| <input type="text" value="'H'"/> ENTHALPIE | <input type="text" value="'S'"/> ENTROPIE | <input type="text" value="'Q'"/> QUITTER LE LOGICIEL |

TAPEZ LA LETTRE CORRESPONDANTE A VOTRE PREMIERE VARIABLE : ↵

TAPEZ LA LETTRE CORRESPONDANTE A VOTRE DEUXIEME VARIABLE : ↵

DONNER LA VALEUR DE LA TEMPERATURE EN (°C) : ↵

DONNER LA VALEUR DU VOLUME EN (m³ / Kg) : ↵

VOUS ETES DANS LA PHASE DE

S A T U R A T I O N

TAPEZ SUR RETURN : ↵

| | | |
|-------------------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------------|
| Si vous ne connaissez pas la phase ou vous êtes | Si vous connaissez la phase ou vous êtes | Si vous voulez quitter le logiciel |
| <input type="text" value="TAPEZ 'R'"/> | <input type="text" value="TAPEZ 'C'"/> | <input type="text" value="TAPEZ 'Q'"/> |

VOTRE CHOIX EST : ↵

| | | | |
|-----|--------------------|-----|---------------------|
| "S" | SATURATION | "L" | LIQUIDE |
| "V" | VAPEUR SURCHAUFFEE | "Q" | QUITTER LE LOGICIEL |

TAPEZ LA LETTRE CORRESPONDANTE A VOTRE DONNEE : S 7

| | | | |
|-------|------------------------------------------------|-----|------------------------|
| "T" | TEMPERATURE DE SATURATION | "P" | PRESSION DE SATURATION |
| "VG" | VOLUME SPECIFIQUE DE LA VAPEUR SATUREE | | |
| "VF" | VOLUME SPECIFIQUE DU LIQUIDE SATUREE | | |
| "VFG" | VOLUME SPECIFIQUE DE SATURATION GAZ-LIQUIDE | | |
| "HG" | ENTHALPIE SPECIFIQUE DE LA VAPEUR SATUREE | | |
| "HF" | ENTHALPIE SPECIFIQUE DU LIQUIDE SATUREE | | |
| "HFG" | ENTHALPIE SPECIFIQUE DE SATURATION GAZ-LIQUIDE | | |
| "SG" | ENTROPIE SPECIFIQUE DE LA VAPEUR SATUREE | | |
| "SF" | ENTROPIE SPECIFIQUE DU LIQUIDE SATUREE | | |
| "SFG" | ENTROPIE SPECIFIQUE DE SATURATION GAZ-LIQUIDE | | |
| "Q" | QUITTER LE LOGICIEL | | |

TAPEZ LA LETTRE CORRESPONDANTE A VOTRE PREMIERE DONNEE: T 7
DONNER LA TEMPERATURE DE SATURATION EN (°C) : 90 7

| | |
|-----|-------------------------------------------|
| "V" | VOLUME SPECIFIQUE DE LA VAPEUR HUMIDE. |
| "H" | ENTHALPIE SPECIFIQUE DE LA VAPEUR HUMIDE. |
| "S" | ENTROPIE SPECIFIQUE DE LA VAPEUR HUMIDE. |
| "X" | LE TITRE DE LA VAPEUR HUMIDE. |
| "Q" | QUITTER LE LOGICIEL. |

TAPEZ LA LETTRE CORRESPONDANTE A VOTRE DEUXIEME DONNEE: V 7
DONNER LA VALEUR DU VOLUME DE LA VAPEUR HUMIDE EN (m³/Kg): 2 7

TEMPERATURE DE SATURATION.....T = 90.00 (°C)
 PRESSION DE SATURATION.....P = 70.0600(KPa)
 TITRE DU MELANGE.....X = 84.63 (%)
 VOLUME SPECIFIQUE DE LA VAPEUR SATUREE.....V''=2.36310(m³/Kg)
 VOLUME SPECIFIQUE DU LIQUIDE SATUREE.....V'=0.00104(m³/Kg)
 VOLUME SPECIFIQUE DE LA VAPEUR HUMIDE.....V =2.00000(m³/Kg)
 ENTHALPIE SPECIFIQUE DE LA VAPEUR SATUREE...H''=2660.0(KJ/Kg)
 ENTHALPIE SPECIFIQUE DU LIQUIDE SATUREE...H'=376.9 (KJ/Kg)
 ENTHALPIE SPECIFIQUE DE LA VAPEUR HUMIDE...H =2309.1(KG/Kg)
 ENTROPIE SPECIFIQUE DE LA VAPEUR SATUREE...S''=7.4785(KG/KgK)
 ENTROPIE SPECIFIQUE DU LIQUIDE SATUREE.....S'=1.1915(KG/KgK)
 ENTROPIE SPECIFIQUE DE LA VAPEUR HUMIDE....S =6.5120(KJ/KgK)
 ENERGIE INTERNE DE LA VAPEUR SATUREE.....U''=2494.5(KJ/Kg)
 ENERGIE INTERNE DU LIQUIDE SATUREE.....U'=376.9 (KJ/Kg)
 ENERGIE INTERNE DE LA VAPEUR HUMIDE.....U =216.9 (KJ/Kg)
 COEFFICIENT ISENTRO DE LA VAPEUR SATUREE...K =1.3204
 CHALEUR SPECI A P=C^{TE} DE LA VAPEUR SATUREE. C_p''=2.1093(KJ/Kg)
 CHALEUR SPECI A P=C^{TE} DU LIQUIDE SATUREE..C_p'=4.1936(KJ/Kg)
 CHALEUR SPECI A V=C^{TE} DE LA VAPEUR SATUREE. C_v''=2.0093(KJ/Kg)

TAPEZ SUR RETURN : 7

| | | |
|-------------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------|
| Si vous ne connaissez pas la phase où vous êtes | Si vous connaissez la phase où vous êtes | Si vous voulez quitter le logiciel |
| TAPEZ "R" | TAPEZ "C" | TAPEZ "Q" |

VOTRE CHOIX EST : C 7

| | |
|------------------------|-------------------------|
| "S" SATURATION | "L" LIQUIDE |
| "V" VAPEUR SURCHAUFFEE | "Q" QUITTER LE LOGICIEL |

TAPEZ LA LETTRE CORRESPONDANTE A VOTRE DONNEE : V 7

" T " TEMPERATURE " P " PRESSION " V " VOLUME

" H " ENTHALPIE " S " ENTROPIE " Q " QUITTER LE LOGICIEL

TAPEZ LA LETTRE CORRESPONDANTE A LA PREMIER DONNEE : T 7

TAPEZ LA LETTRE CORRESPONDANTE A LA DEUXIEME DONNEE : P 7

DONNER LA VALEUR DE LA TEMPERATURE EN (°C) : 400 7

DONNER LA VALEUR DE LA PRESSION EN (KPa) : 9000 7

TEMPERATURE T = 400 (°C)

PRESSION P = 9000.00(KPa)

VOLUME SPECIFIQUE V = 0.02995 (m³/Kg)

ENTHALPIE SPECIFIQUE H = 3120.2 (KJ/Kg)

ENTROPIE SPECIFIQUE S = 6.2886 (KJ/KgK)

ENERGIE INTERNE U = 2850.6 (KJ/Kg)

COEFFICIENT ISENTROPIQUE..... K = 1.2763

CHALEUR SPECIFIQUE A P=C^{TE} Cp=2.9040 (KJ/Kg)

CHALEUR SPECIFIQUE A V=C^{TE} Cv=1.9395 (KJ/Kg)

TAPEZ SUR RETURN : 7

C O N C L U S I O N

Nous pensons que l'objectif qu'on s'était fixé dans le cadre de ce travail, à savoir réaliser un logiciel précis pour le calcul des caractéristiques de la vapeur d'eau, a été atteint d'une façon très satisfaisante.

Dans un très grand nombre de cas l'ordre de précision demandé n'est pas aussi élevé que celui réalisé dans le présent travail. Dans de tels cas le domaine d'application de notre logiciel pourrait donc être étendu pour recouvrir un champs plus vaste. Toutefois, une telle extension du domaine d'application devrait se faire avec beaucoup de précaution, notamment à l'approche de la saturation et des volumes inférieurs à $8 \text{ cm}^3/\text{g}$.

B I B L I O G R A P H I E

- 1 - Young .J .B, "An equation of state for steam for turbomachinery and other flow calculations", J.Eng.Gas Turbines and Power, January 1988, Vol. 110.
- 2 - Le Fevre, E.J, Nightingale, M.R., and Rose, J.W., "The second virial coefficient of ordinary water substance ; a new correlation ", J.Mech.Eng.Sci., Vol. 17, 1975.
- 3 - J.Van.Wylen, "Thermodynamique appliquée", Editions du renouveau pédagogique, Inc. Québec.
- 4 - V.Kirillin , U.Sytchev , A.sheindlin, "Thermodynamique technique", Edition Mir Moscou.
- 5 - Ernst, Schmidt, "Properties of water and steam in SI-Units", Edited by Ulrich Grigull, 1979.
- 6 - Robert C.Reid, John M.prausnitz, Thomas K.Sherwood, "The properties of gases and liquids", Mc Grow-Hill Book Company, 1977.
- 7 - Heitor L.G.Pina, "A comptuter program for the calculation of the thermodynamic properties of water", Rev. Gén. Therm., Fr. N°215, Novembre 1979.

UNE METHODE DE DETERMINATION DU SECOND
COEFFICIENT VIRIEL [4]

Pour mettre en évidence l'écart qu'il y a entre le comportement d'un gaz réel et celui du gaz parfait, il est commode de représenter les paramètres P, V et T de ce gaz dans un diagramme (PV-P). De l'équation de Clapeyron, il découle que les isothermes d'un gaz parfait dans un tel diagramme sont des droites horizontales; alors que, pour un gaz réel le tracé expérimental des isothermes donne lieu à des paraboles possédant chacune un minimum (fig 13).

Pour analyser ce diagramme, écrivons l'équation du viriel sous la forme suivante :

$$PV = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \dots$$

Rappelons que dans cette équation les coefficients viriels ne dépendent que de la température et que le premier coefficient (A) est égal à (RT).

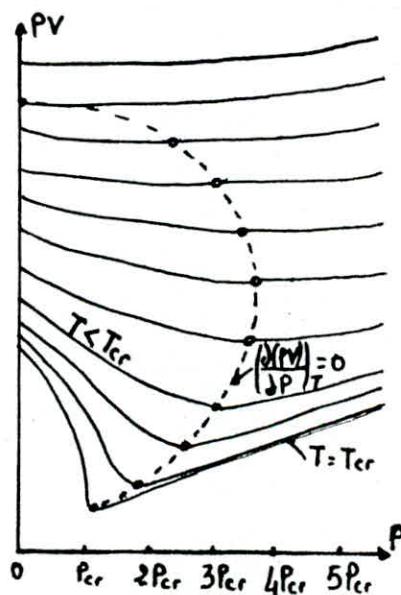


Figure 13

De l'équation ci-dessus, il découle que :

$$\left(\frac{\delta PV}{\delta P} \right)_{T, P=0} = B$$

Autrement-dit, dans le système des coordonnées considéré, la pente de l'isotherme à l'intersection de celle-ci avec l'axe des ordonnées, représente la valeur du second coefficient du viriel.

RELATIONS DE MAXWELL

Soit une fonction d'état Z de deux variables X et Y .
 Pour $Z = c^{te}$, on peut écrire que :

$$dZ = \left[\frac{\delta Z}{\delta X} \right]_Y dX + \left[\frac{\delta Z}{\delta Y} \right]_X dY = 0$$

D'où,

$$\left[\frac{\delta Z}{\delta X} \right]_Y + \left[\frac{\delta Z}{\delta Y} \right]_X \left[\frac{\delta Y}{\delta X} \right]_Z = 0$$

Ce qui donne enfin la relation mathématique suivante :

$$\left[\frac{\delta Z}{\delta Y} \right]_X \left[\frac{\delta Y}{\delta X} \right]_Z \left[\frac{\delta X}{\delta Z} \right]_Y = - 1 \quad (\text{A2,1})$$

D'après la première loi de la thermodynamique, on a :

$$dU = TdS - pdV \quad (\text{A2,2})$$

Soient X , Y deux paramètres d'état quelconques. En exprimant les différentielles totales dU , dS et dV en fonction de ces deux variables, l'équation (A2,2) devient :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta U}{\delta X} \right]_Y dX + \left[\frac{\delta U}{\delta Y} \right]_X dY &= \left[T \left[\frac{\delta S}{\delta X} \right]_Y - p \left[\frac{\delta V}{\delta X} \right]_Y \right] dX \\ &+ \left[T \left[\frac{\delta S}{\delta Y} \right]_X - p \left[\frac{\delta V}{\delta Y} \right]_X \right] dY \end{aligned}$$

D'où, on a :

$$\left[\frac{\delta U}{\delta X} \right]_Y = T \left[\frac{\delta S}{\delta X} \right]_Y - p \left[\frac{\delta V}{\delta X} \right]_Y \quad (\text{A2,3})$$

et

$$\left[\frac{\delta U}{\delta Y} \right]_X = T \left[\frac{\delta S}{\delta Y} \right]_X - p \left[\frac{\delta V}{\delta Y} \right]_X \quad (\text{A2,4})$$

En dérivant la première équation par rapport à Y et la seconde par rapport à X , puis en exprimant que l'énergie interne est une fonction d'état (donc une

différentielle totale), on trouve :

$$\left(\frac{\delta T}{\delta Y}\right)_X \left(\frac{\delta S}{\delta X}\right)_Y - \left(\frac{\delta P}{\delta Y}\right)_X \left(\frac{\delta V}{\delta X}\right)_Y = \left(\frac{\delta T}{\delta X}\right)_Y \left(\frac{\delta S}{\delta Y}\right)_X - \left(\frac{\delta P}{\delta X}\right)_Y \left(\frac{\delta V}{\delta Y}\right)_X \quad (\text{A2,5})$$

En remplaçant dans cette relation (X,Y) respectivement par (P,S); (S,V); (P,T) et (T,V) ; on obtient les quatre relations suivantes, dites relations de Maxwell :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\delta T}{\delta P}\right)_S &= \left(\frac{\delta V}{\delta S}\right)_P & (\text{a}) \\ \left(\frac{\delta T}{\delta V}\right)_S &= -\left(\frac{\delta P}{\delta S}\right)_V & (\text{b}) \\ \left(\frac{\delta V}{\delta T}\right)_P &= -\left(\frac{\delta S}{\delta P}\right)_T & (\text{c}) \\ \left(\frac{\delta V}{\delta S}\right)_T &= \left(\frac{\delta T}{\delta P}\right)_V & (\text{d}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2,6})$$

ETABLISSEMENT DE LA RELATION :

$$(C_p - C_v) = \frac{\alpha_p^2 \cdot V \cdot T}{\beta_T}$$

$$\delta q = T dS \quad (A3,1)$$

$$C_p = \left[\frac{\delta q}{\delta T} \right]_p = T \left[\frac{\delta S}{\delta T} \right]_p \quad (A3,2)$$

$$C_v = \left[\frac{\delta q}{\delta T} \right]_v = T \left[\frac{\delta S}{\delta T} \right]_v \quad (A3,3)$$

Pour les deux paramètres d'état (T,V) on a :

$$dS = \left[\frac{\delta S}{\delta T} \right]_v dT + \left[\frac{\delta S}{\delta V} \right]_T dV \quad (A3,4)$$

En portant la relation (A3,3) et la relation de Maxwell (A2,6,d) dans (A3,4), on aura :

$$dS = \frac{C_v}{T} dT + \left[\frac{\delta P}{\delta T} \right]_v dV \quad (A3,5)$$

Pour les deux paramètres d'état (T,P) on a :

$$dS = \left[\frac{\delta S}{\delta T} \right]_p dT + \left[\frac{\delta S}{\delta P} \right]_T dP \quad (A3,6)$$

En portant la relation (A3,2) et la relation de Maxwell (A2,6,C) dans (A3,6), on aura :

$$dS = \frac{C_p}{T} dT - \left[\frac{\delta V}{\delta T} \right] dP \quad (A3,7)$$

En identifiant (A3,5) et (A3,7) et en réarrangeant, on trouve :

$$dT = \frac{T \left[\frac{\delta P}{\delta T} \right]_v}{C_p - C_v} dV + \frac{T \left[\frac{\delta V}{\delta T} \right]_P}{C_p - C_v} dP \quad (A3,8)$$

Pour les deux paramètres d'état (P,V) on peut écrire pour la température :

$$dT = \left[\frac{\delta T}{\delta P} \right]_V dP + \left[\frac{\delta T}{\delta V} \right]_P dV \quad (A3,9)$$

En identifiant, cette dernière équation avec (A3,8), puis réarrangant, on aboutit à la relation suivante :

$$C_p - C_v = T \left[\frac{\delta V}{\delta T} \right]_P \left[\frac{\delta P}{\delta T} \right]_V \quad (A3,10)$$

En utilisant la relation mathématique (A2,1) pour les variables (T,P,V); la relation (A3,10) devient :

$$C_p - C_v = - T \left[\frac{\delta V}{\delta T} \right]_P^2 \left[\frac{\delta P}{\delta V} \right]_T \quad (A3,11)$$

Cette relation peut être transformée de la manière suivante :

$$C_p - C_v = T \left[\frac{1}{V} \left[\frac{\delta V}{\delta T} \right]_P \right]^2 \cdot V^2 \cdot \frac{1}{- \frac{1}{V} \left[\frac{\delta V}{\delta P} \right]_T \cdot V}$$

Finalement :

$$C_p - C_v = \frac{T \cdot V \cdot \alpha_p^2}{\beta_T} \quad (A3,12)$$

