

19/95
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

الخدمة الوطنية المتعددة التفتيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique
GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE D'UN ECOULEMENT QUASI-TRIDIMENSIONNEL

DANS UNE ROUE DE TURBOMACHINE

PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Proposé par :

Mr.M.BOUDJEMA

Etudié par :

S.C.ZERARKA
S.DJOUDI

Dirigé par :

Mr.M.BOUDJEMA

PROMOTION

1994-1995

E. N. P 10, Avenue Hassen Badi - EL-HARRACH - ALGER

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

الدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE D'UN ECOULEMENT QUASI-TRIDIMENSIONNEL

DANS UNE ROUE DE TURBOMACHINE

PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Proposé par :

Mr.M.BOUDJEMA

Etudié par :

S.C.ZERARKA
S.DJOUDI

Dirigé par :

Mr.M.BOUDJEMA

PROMOTION

1994-1995

الإهداء

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

إلى والدي العزيزين

إلى إخوتي الأحباء

إلى كل الأصدقاء

إلى كل من أسبه قلبي

أهدي هذا العمل المتواضع

ص. صودي

إلى أخي وأبي العزيزين

إلى كل أفراد العائلة

إلى روح ابن الأخت "علاء الدين" - رحمه الله

أهدي هذا العمل المتواضع

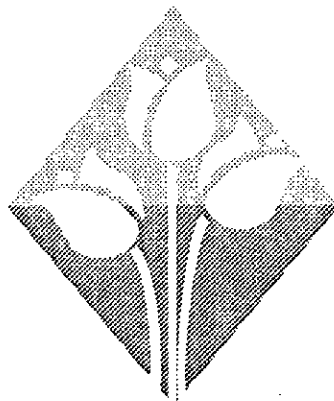
من شمس زوارقة

REMERCIEMENTS

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre promoteur Mr.M. BOUDJEMAA, pour l'intérêt qu'il a su susciter en nous pour la mécanique des fluides . Nous le remercions très amicalement de sa disponibilité et de son aide constante sur tous les plans .

Nous remercions également tous les enseignants qui ont contribué de près ou de loin à notre formation et à cette thèse , en particulier Mr.BELBLIDIA et Mr.AMMICHE.

Nous voudrions associer nos remerciements à toute l'équipe de la bibliothèque ainsi qu'à tous le personnel de la salle des périodiques de l'E.N.P pour leur aide et leur entière disponibilité.



ملخص

يهدف هذا العمل الى دراسة انسياب سائل في آلة توربينية مركزية بطريقة العناصر المنتهية، مع اعتبار هذا السائل انضغاطي، تحت صوتي ومستقر بالنسبة الى محام مرتبط بجنيحات العجلة.

RESUME

Le calcul de l'écoulement méridien d'une turbomachine radiale par la méthode des éléments finis est présenté .

L'écoulement est supposé parfait, compressible, subsonique et stationnaire par rapport à un repère lié aux aubages .

ABSTRACT

The use of a finite element method , for calculating flow characteristics on the meridian plane of a radial turbomachine , is presented .

The flow is supposed to be perfect , compressible , subsonic and steady relative to the blade row .

TABLE DES MATIERES :

INTRODUCTION GENERALE	2
 CHAPITRE I :	
FORMULATION DU PROBLEME ET MISE EN EQUATIONS	
I.1 INTRODUCTION	5
I.2 FORMULATION DU PROBLEME	7
I.2.1 HYPOTHESES	7
I.2.2 EQUATIONS DE BASE	7
I.2.2.1 conservation de la masse (continuité).....	8
I.2.2.2 conservation de la quantité de mouvement.....	9
I.2.2.3 conservation d'énergie	10
I.2.3 INTRODUCTION DE LA FONCTION DE COURANT	11
I.3 CONDITIONS AUX LIMITES	13
 CHAPITRE II:	
FORMULATION DU PROBLEME PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	
II.1 INTRODUCTION.....	16
II.2 TECHNIQUE DES RESIDUS PONDERES.....	17
II.2.1 Résidus.....	17
II.2.2 Formulation intégrale	18
II.2.3 Forme intégrale faible	18
II.2.4 Choix des fonctions de pondération.....	19
II.3 FORMULATION TYPE GALERKINE DU PROBLEME.....	20
II.4 FORMULATION DU PROBLEME PAR LA TECHNIQUE DES RESIDUS PONDERES.....	21
II.4.1 calcul de la première integrale de l'équation (II.10).....	22
II.4.2 calcul de la deuxième integrale de l'équation (II.10).....	23
II.5 DISCRETISATION	24
II.6 LINEARISATION DU PROBLEME.....	26
II.7 CHOIX DE L'ELEMENT.....	27
II.7.1 propriétés mathématiques de l'élément.....	28
II.7.2 singularité de la matrice jacobienne.....	28
II.7.3 maillage.....	29
II.8 APPLICATION DE L'APPROXIMATION CHOISIE AU PROBLEME POSE.....	31

II.9 CALCUL EXPLICITE DE LA MATRICE DE RIGIDITE [K].....	32
II.10 CALCUL EXPLICITE DU VECTEUR FORCE [F].....	33
II.10.1 calcul des vitesses.....	33
II.10.2 réécriture des différents termes de [F].....	33
II.11 INTEGRATION NUMERIQUE.....	35
II.11.1 méthode produit de GAUSS.....	35
II.11.2 précision de l'intégration.....	36

CHAPITRE III

RESULTATS NUMERIQUES

III.1 SCHEMA DU CALCUL	39
III.2 PRESENTATION DES RESULTATS OBTENUS.....	42

CONCLUSION GENERALE	61
---------------------------	----

ANNEXES

ANNEXE A
ANNEXE B
ANNEXE C

BIBLIOGRAPHIE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

L'écoulement réel dans une turbomachine a un caractère tridimensionnel, instationnaire et visqueux.

Devant la complexité de cet écoulement, les ingénieurs chargés d'appliquer les connaissances de la mécanique des fluides à l'étude de ces machines se voient contraints d'effectuer des modélisations très poussées. Ceci conduit à introduire des approximations et à négliger certains phénomènes.

Les travaux publiés dans la littérature ont porté essentiellement sur la modélisation proposée par WU [2]. Celui-ci sépare le problème tridimensionnel en deux problèmes bidimensionnels couplés appelés :

- *ECOULEMENT MOYEN OU MERIDIONAL*.

- *ECOULEMENT AUBE A AUBE OU EQUILIBRE RADIALE*.

cette modélisation est connue sous le nom de(*MODELE DES SURFACES S1 - S2*).

Dans cette optique, un calcul en fluide parfait, pour un écoulement de base supposé isentropique, subsonique et stationnaire fournira de très bons résultats. Une telle approche consiste à résoudre les équations d'*EULER*.

L'introduction de la méthode des éléments finis est particulièrement bien adaptée aux géométries complexes et variées rencontrées dans le domaine des turbomachines, et présente aussi un intérêt certain pour le cas tridimensionnel.

Cette méthode numérique est maintenant très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire. Elle se développe en ce moment, d'une façon considérable, dans les applications de la mécanique des fluides : étude des marées, étude des phénomènes de pollution thermique ou chimique, les interactions fluide-structure et la turbomachinerie.[7]

Le but de cette présente étude est de proposer une formulation en éléments finis qui permet de modéliser l'écoulement d'un fluide dans une turbomachine centrifuge .

Ce travail se décompose en trois chapitres :

Dans le premier chapitre , on établira le modèle mathématique qui régit un écoulement "sain" (non visqueux) dans une roue de turbomachine et cela en se basant sur la méthode S1-S2 proposée par Wu .

Le second chapitre est consacré à l'utilisation d'une formulation du type éléments finis .L'approche résiduelle de *GALERKINE* sera présentée sous la forme générale des résidus pondérés, suivi par son application à l'équation aux dérivées partielles qui gouverne le problème posé.

Enfin , dans le troisième chapitre, on mettra en oeuvre l'infrastructure d'un programme élément fini , en abordant le cas de l'écoulement méridien. On présentera les différents cas testés et les résultats numériques.

CHAPITRE 1

FORMULATION DU PROBLEME ET MISE EN EQUATIONS

FORMULATION DU PROBLEME ET MISE EN EQUATIONS

I.1. INTRODUCTION :

La modélisation de C.H.Wu consiste à décomposer l'écoulement réel dans une roue de turbomachine en deux écoulements :

- Ecoulement moyen (through flow) dont la principale caractéristique est d'être à symétrie axiale c'est-à-dire qu'il admet une famille de surfaces de courant de révolution (S2).

- Ecoulement de grille (blade to blade), dont la surface de courant (S1) est décrite dans la roue par l'ensemble de particules de fluides qui se trouve sur un cercle concentrique à l'axe de la machine (voir fig .1).

Dans ce présent travail , on étudiera l'écoulement moyen qui est caractérisé par une géométrie complexe.

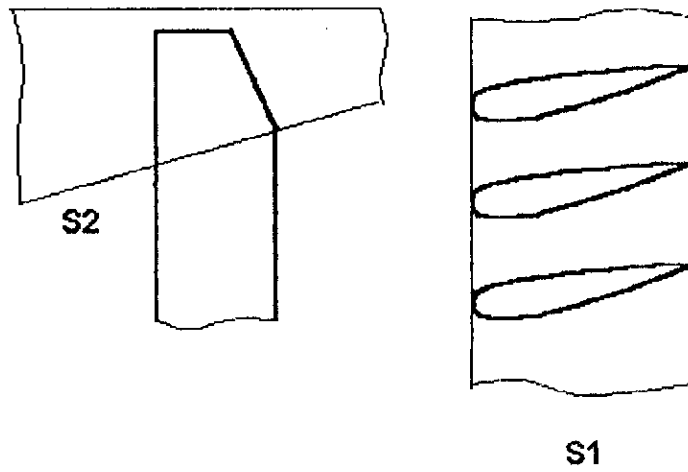
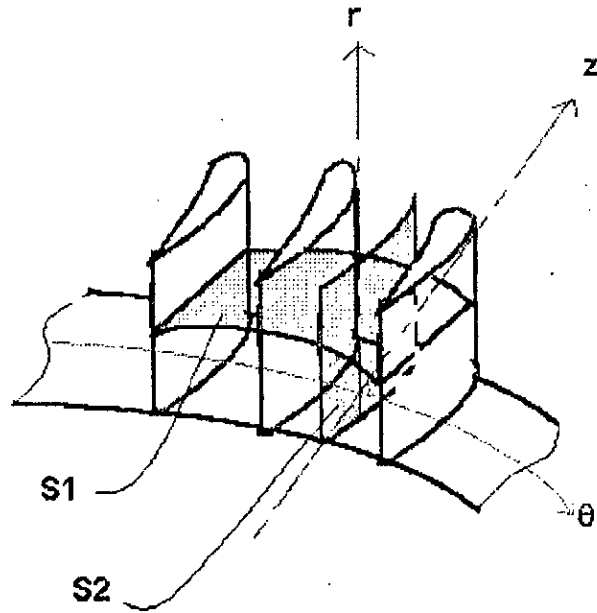


fig.1 : Modèle des surfaces S1 et S2.

I.2. FORMULATION DU PROBLEME :

I.2.1. HYPOTHESES :

Pour un écoulement isentropique , subsonique et stationnaire d'un fluide parfait par rapport à un repère lié aux aubages , les équations de départ sont les équations de conservation de la masse et de l'énergie , l'équation d'état de gaz et l'équation d'évolution de l'entropie , elles seront traduites sur une surface moyenne de courant (S2) .

Cette surface est définie par : $S(r,\theta ,z)= 0$.

Pour simplifier les choses, on assume que la surface a une seule valeur en θ : $\theta = \theta(r,z)$.

Afin de prendre en considération l'effet géométrique tridimensionnel , on introduit des dérivées spéciales le long de la surface de courant : [voir annexe A]

$$\frac{\bar{\partial} q}{\partial r} = \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\partial q}{\partial \theta}$$

$$\frac{\bar{\partial} q}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{n_z}{r n_\theta} \frac{\partial q}{\partial \theta}$$

Dans le cas de la symétrie axiale , les dérivées spéciales deviennent des dérivées partielles.

I.2.2 . EQUATIONS DE BASES :

Dans les développements qui suivent , nous présentons les équations de bases dans un référentiel relatif animé d'un mouvement de rotation uniforme $\bar{\omega}$ autour de l'axe oz. Les vitesses absolue \vec{V} et relative \vec{W} sont alors liées par la relation :

$$\vec{V} = \vec{W} + \bar{\omega} \times \vec{r}$$

I.2.2.1 Conservation de la masse (continuité) :

L'équation de continuité en coordonnées cylindriques est donnée par :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r W_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho W_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho W_z) = 0 \quad (I.1)$$

avec W_r, W_θ et W_z représentant les composantes de \vec{W} . (fig. 2)

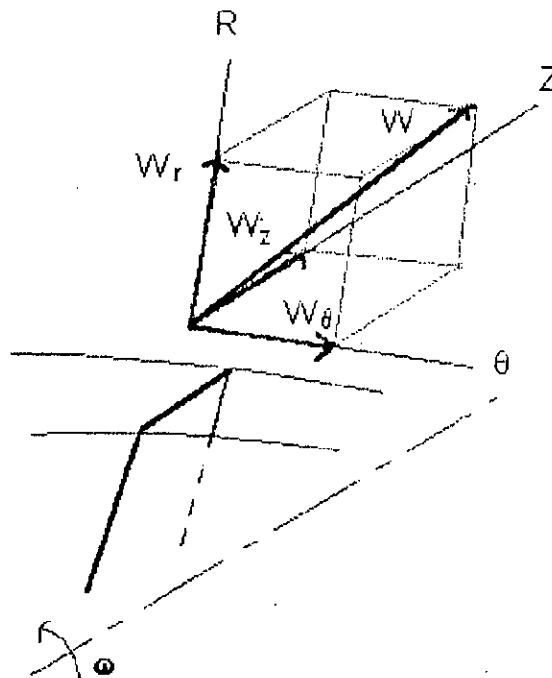


fig.2. Diagramme des vitesses .

En Introduisant les dérivées spéciales dans (I.1), on obtient [1] :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r W_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho W_z) = \rho \cdot C(r, z) \quad (I.2)$$

où $C(r, z) = -\frac{1}{r n \theta} \left[n_r \frac{\partial}{\partial \theta} (W_r) + n_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (W_\theta) + n_z \frac{\partial}{\partial \theta} (W_z) \right]$

I.2.2.2. Conservation de la quantité de mouvement :

L'équation de mouvement s'écrit :

$$2. \bar{\omega} \times \bar{W} - \bar{W} \times (\nabla \times \bar{W}) = -\nabla I + T. \nabla S$$

avec :

\bar{W} : la vitesse de l'écoulement dans le repère relatif .

ω : la vitesse angulaire de la roue .

T : la température moyenne .

S : l'entropie.

H : l'enthalpie totale : $H = h + \frac{V^2}{2} + g.z$.

I : la rothalpie : $I = H - \omega r V_\theta$.

V : la vitesse de l'écoulement dans le repère absolue .

la projection de l'équation vectorielle sur les différents axes donne:

$$-\frac{W_\theta}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r W_\theta) - \frac{\partial W_r}{\partial \theta} + 2 \omega r \right] + W_z \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] = -\frac{\partial I}{\partial r} + T. \frac{\partial S}{\partial r}$$

$$\frac{W_r}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r W_\theta) - \frac{\partial W_r}{\partial \theta} + 2 \omega r \right] - W_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} - \frac{\partial W_\theta}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} + \frac{T}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta}$$

$$-W_r \left[\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right] + W_\theta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} - \frac{\partial W_\theta}{\partial z} \right] = -\frac{\partial I}{\partial z} + T. \frac{\partial S}{\partial z}$$

l'introduction des dérivées spéciales donne :

$$-\frac{W_\theta}{r} \left[\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} r} (r V_\theta) \right] + W_z \left[\frac{\bar{\partial} W_r}{\bar{\partial} z} - \frac{\bar{\partial} W_z}{\bar{\partial} r} \right] = -\frac{\bar{\partial} I}{\bar{\partial} r} + T \frac{\bar{\partial} S}{\bar{\partial} r} + F_r \quad (1.3)$$

$$+\frac{W_r}{r} \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} r} (r V_\theta) + \frac{W_z}{r} \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} z} (r V_\theta) = F_\theta \quad (1.4)$$

$$-W_r \left[\frac{\bar{\partial} W_z}{\bar{\partial} z} - \frac{\bar{\partial} W_z}{\bar{\partial} r} \right] - \frac{W_\theta}{r} \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} z} (r V_\theta) = -\frac{\bar{\partial} I}{\bar{\partial} z} + T \frac{\bar{\partial} S}{\bar{\partial} z} + F_z \quad (1.5)$$

avec

$$\vec{F} = -\frac{1}{r \rho n_\theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} \vec{n}$$

I.2.2.3 Conservation de l'énergie :

L'équation d'énergie s'écrit :

$$W_r \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{W_\theta}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} + W_z \frac{\partial I}{\partial z} = 0$$

En introduisant les dérivées spéciales , on obtient :

$$W_r \frac{\bar{\partial} I}{\partial r} + W_z \frac{\bar{\partial} I}{\partial z} = 0 \quad (I.6)$$

les deux équations (I.3) et (I.6) nous donnent la variation d'entropie :

$$T (W_r \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} + W_z \frac{\bar{\partial} S}{\partial z}) = 0 \quad (I.7)$$

Pour un fluide non visqueux ,le vecteur de force \vec{F} est normal à la surface de courant S, donc il est normal à la vitesse relative \vec{W} :

$$\text{tel que: } \vec{W} \cdot \vec{n} = 0 \text{ alors } W_r \cdot n_r + W_\theta \cdot n_\theta + W_z \cdot n_z = 0.$$

$$\vec{W} \cdot \vec{F} = 0 \text{ alors } W_r \cdot F_r + W_\theta \cdot F_\theta + W_z \cdot F_z = 0.$$

De ces deux équations précédentes , on obtient :

$$W_\theta = - W_r \frac{n_r}{n_\theta} - W_z \frac{n_z}{n_\theta}$$

$$W_\theta = - W_r \frac{F_r}{F_\theta} - W_z \frac{F_z}{F_\theta}$$

Il est donc convenable d'introduire deux angles λ et μ qui définissent la forme locale de la surface de courant (voir fig.3).

$$\text{tg} \lambda = \frac{n_r}{n_\theta} = \frac{F_r}{F_\theta} \quad (I.8)$$

$$\text{tg} \mu = \frac{n_z}{n_\theta} = \frac{F_z}{F_\theta} \quad (I.9)$$

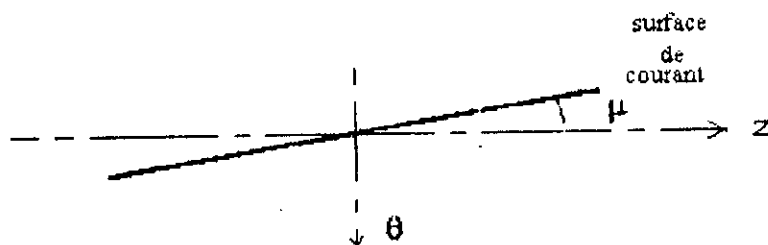
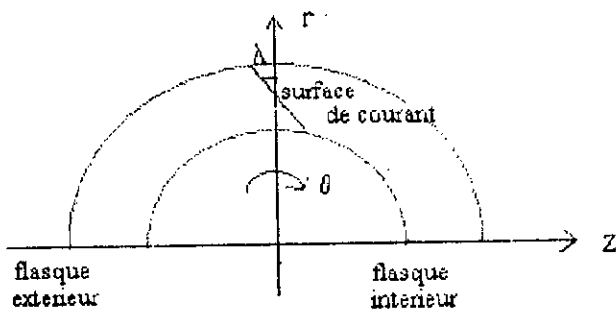


fig.3: Définition de la surface S2.

Les composantes de la vitesse relatif sont donc reliées par l'équation :

$$W_{\theta} = -W_r \cdot \text{tg} \lambda - W_z \cdot \text{tg} \mu \quad (\text{I.10})$$

Cette équation représente la condition géométrique, qui permet au fluide de rester sur la surface moyenne de courant.

I.2.3: INTRODUCTION DE LA FONCTION DE COURANT :

Afin d'obtenir une équation pour la fonction de courant, Wu [18] a introduit un facteur d'intégration b qui ramène l'équation de continuité à :

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho r b W_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho r b W_z) = 0 \quad (\text{I.11})$$

l'équation (I.11) devient après simplification :

$$\frac{1}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (\rho r W_r) + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} (\rho W_z) = \rho C(r, z) \quad (I.12)$$

avec

$$C(r, z) = - \left[\frac{W_r}{b} \frac{\bar{\partial} b}{\partial r} + \frac{W_z}{b} \frac{\bar{\partial} b}{\partial z} \right] \quad (I.13)$$

Le facteur b est proportionnel à l'épaisseur angulaire locale de la surface de courant . Dans l'analyse de l'écoulement moyen , on suppose que l'épaisseur de la surface de courant moyenne est proportionnelle à largeur du canal entre aubes .

Ainsi le facteur b sera défini comme :

$$b = \frac{\text{largeur circonférentielle du canal entre aubes}}{\text{pas d'aube}}$$

la fonction de courant ψ peut être introduite dans l'ordre de satisfaire l'équation de continuité (I.11) d'où :

$$\frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} = \rho . r . b . W_z \quad (I.14)$$

$$\frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} = - \rho . r . b . W_r \quad (I.15)$$

D'après (I.14) et (I.15) les composantes de vitesses W_r et W_z s'écrivent :

$$W_z = \frac{1}{\rho . r . b} \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} \quad (I.16)$$

$$W_r = - \frac{1}{\rho . r . b} \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} \quad (I.17)$$

substituons (I.16) et (I.17) dans (I.3) et (I.5) , nous obtenons :

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho.r.b} \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} \right) + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho.r.b} \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} \right) = \frac{1}{W_z} \left[\frac{\bar{\partial} I}{\partial r} - T \frac{\bar{\partial} S}{\partial r} - \frac{W_\theta}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial r} (rV_\theta) - F_r \right] \quad (1.18)$$

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho.r.b} \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial r} \right) + \frac{\bar{\partial}}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho.r.b} \frac{\bar{\partial} \psi}{\partial z} \right) = -\frac{1}{W_r} \left[\frac{\bar{\partial} I}{\partial z} - T \frac{\bar{\partial} S}{\partial z} - \frac{W_\theta}{r} \frac{\bar{\partial}}{\partial z} (rV_\theta) - F_z \right] \quad (1.19)$$

ou F_r et F_z sont des forces agissantes sur les aubes , elles sont définies par :

$$F_r = F_\theta . \text{tg} \lambda \quad (1.20)$$

$$F_z = F_\theta . \text{tg} \mu \quad (1.21)$$

la composante F_θ est donnée par la deuxième équation de mouvement.

Les équations (1.18) et (1.19) sont identiques. D'après Hirsch [2] , l'équation (1.19) est particulièrement adapter quand la vitesse radiale W_r est plus large , c'est le cas des turbomachines radiales .

I.3 CONDITIONS AUX LIMITES :

Les conditions aux limites (fig.4) de ce problème sont physiquement les suivantes :

- ♦ sur AD : des conditions aérodynamiques (V_0, ρ_0, M_0) pas trop loin de la réalité physique .

- ♦ AB et CD seront des lignes de courant .

- ♦ sur BC : nous avons adopté une condition simplificatrice qui exprime que l'écoulement est bien " guidé à la sortie du domaine d'étude " .

Ces conditions seront traduites mathématiquement dans le chapitre suivant pour le calcul de la fonction de courant



fig. 4 : canal méridional.

CHAPITRE 2

FORMULATION DU PROBLEME PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

FORMULATION DU PROBLEME PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

II.1. INTRODUCTION :

Pour la résolution numérique de nombreux phénomènes physiques, deux types de méthodes numériques sont généralement utilisées : les Différences Finies et les Eléments Finis. Ces deux méthodes diffèrent par la nature du maillage et la technique d'interpolation, ce qui s'avère cruciale pour l'efficacité de la mise en oeuvre et la vitesse d'exécution.

Les grilles de Différences finies sont très structurées, avec une numérotation régulière des points et une structure locale identique en chaque point. Par contre, les maillages pour les éléments finis sont plus généraux et la structure n'est pas uniforme. Cette difficulté est compensée par une plus grande flexibilité pour discrétiser des géométries complexes et pour raffiner le maillage localement. Cette souplesse autorise une même précision de l'approximation qu'en différences finies, avec moins de points dans le maillage. [12]

Dans cette optique, la méthode des éléments finis est donc bien adaptée à la résolution numérique des écoulements compressibles dans les turbomachines radiales.

Cette méthode consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

Différentes approches sont utilisées pour avoir ces équations algébriques. Nous ne citerons ici que les trois plus connues :

1-Approche directe : à l'origine cette approche a été utilisée pour développer la M.E.F dans la construction aéronautique. Elle utilise les éléments connus dans l'analyse structurale.

2-Approche variationnelle: la M.E.F a été reformulée à partir de considérations énergétiques et variationnelles. Cette méthode utilise le principe de stationnarité d'une quantité appelée la *FONCTIONNELLE*.

3- Approche résiduelle (de *GALERKINE*): c'est l'approche la plus générale de la M.E.F. Elle s'applique directement aux équations aux dérivées partielles qui gouvernent le problème physique. Cette méthode utilise la *Technique des résidus pondérés*.

Dans notre travail, nous adopterons cette dernière méthode.

II.2. TECHNIQUE DES RESIDUS PONDERES : [7]

La technique des résidus pondérés permet de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à une formulation intégrale, en utilisant des fonctions de pondération.

II.2.1 RESIDUS :

Toute équation aux dérivées partielles, peut être écrite sous la forme :

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) + f_v = 0 \quad (\text{II.1})$$

sur le domaine V_c .

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = f_s \quad (\text{II.2})$$

sur la surface S .

Nous appelons résidu la quantité $R(\mathbf{u})$ défini par :

$$R(\mathbf{u}) = \mathbf{L}(\mathbf{u}) + f_v \quad (\text{II.3})$$

avec :

$$R(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{quand } \mathbf{u} \text{ est solution du problème.}$$

II.2.2 FORMULATION INTEGRALE :

La technique des résidus pondérés consiste à rechercher des fonction u qui annulent la forme intégrale :

$$W(u) = \int_V \langle \phi \rangle \{R(u)\} dv = 0 \quad (\text{II.4})$$

$$W(u) = \int_V \langle \phi \rangle \{L(u) + f_v\} dv = 0 \quad (\text{II.5})$$

avec

ϕ : fonction de pondération

Toute solution u qui vérifie l'équation (II.1), vérifie nécessairement l'équation (II.5); par contre si u est solution de l'équation (II.5), elle est une solution approchée du problème.

II.2.3 FORME INTEGRALE FAIBLE :

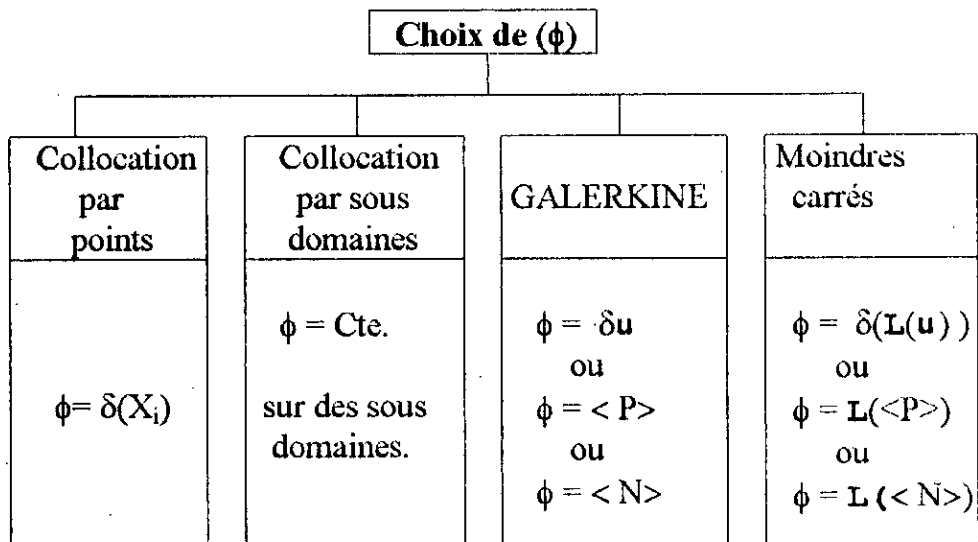
L'intégration par partie de l'équation (II.5) fournit des formes intégrales dites *faibles* qui présentent les avantages suivants :

- l'ordre maximum des dérivées de u dans la forme intégrale diminue .
- certaines des conditions aux limites qui apparaissent dans la forme intégrale faible peuvent être prises en compte dans la formulation intégrale, au lieu d'être satisfaites identiquement par u .

Par contre l'intégration par partie fait apparaître des dérivées de ϕ . Donc les conditions de dérivabilité de ϕ augmentent .

II.2.4 CHOIX DES FONCTIONS DE PONDERATION :

Pour choisir la fonction de pondération ϕ , on a différentes méthodes, qui se résument sur le tableau suivant :



Dans ce travail on choisira la méthode de *GALERKINE* qui est d'ailleurs la plus utilisée, on prendra donc $\phi = \langle N \rangle$ comme fonction de pondération.

II.3 FORMULATION TYPE GALERKINE DU PROBLEME :

D'après le chapitre précédent l'équation (I.19) qui gouverne notre problème physique s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho.r.b} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho.r.b} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = - \frac{1}{W_r} \left[\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{W_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r V_\theta) - F_z \right]$$

Cette équation à résoudre est de la forme:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] = -f \quad \text{dans le volume V} \quad (\text{II.6})$$

$$\text{avec } k = k(\psi, r, z) \quad , \quad f = f(\psi, r, z)$$

et les conditions aux limites sont :

$$k \frac{\partial \psi}{\partial n} + \alpha (\psi - \psi_0) = 0 \quad \text{sur la surface S} \quad (\text{II.7})$$

Pour notre problème elles seront:

- sur AB, $\psi = 0$.
- sur CD, $\psi = Q$. (Q étant le débit massique).
- sur AD, distribution de ψ donnée.
- sur BC, $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$, ou \mathbf{n} est la direction moyenne des lignes de courant.

Ce sont donc des conditions aux limites du type *DIRICHLET* sur une partie de la frontière et du type *NEUMANN* sur l'autre partie.

le domaine type est donné sur la fig.5. qui représente un canal d'une turbomachine radiale.

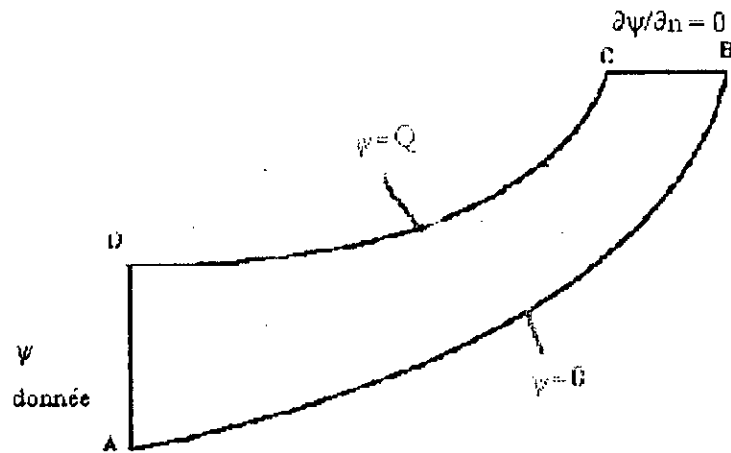


fig.5 :Les conditions aux limites

II.4. FORMULATION DU PROBLEME PAR LA TECHNIQUE DES RESIDUS PONDERES :

L'équation (II.6) peut s'écrire :

$$R_v = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left[k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] + f \right] = 0 \quad (\text{II.8})$$

et les conditions aux limites s'expriment :

$$R_s = \frac{1}{r} \left[k \frac{\partial \psi}{\partial n} + \alpha (\psi - \psi_0) \right] = 0 \quad (\text{II.9})$$

avec $\alpha = \infty$ sur $C1 = (AB) \cup (CD) \cup (AD)$.

$\alpha = 0$ sur $C2 = (BC)$.

Nous pouvons écrire :

$$\int_V \phi R_v dv + \int_S \phi R_s ds = 0 \quad (\text{II.10})$$

avec $V =$ volume de fluide $dv = 2\pi r d\Omega$.
 $S =$ frontière du volume $ds = 2\pi r dC$.

ou $\Omega =$ intersection entre le volume de fluide et le plan méridional .
 $C =$ intersection entre la frontière du volume et le plan méridional .

II.4.1 Calcul de la première intégrale de l'équation (II.10):

$$I_1 = \int_V \phi R_v dv \quad (\text{II.11})$$

$$I_1 = - \int_V \frac{\phi}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\} dv - \int_V \frac{\phi}{r} f dv$$

$$I_1 = -2\pi \left(\int_{\Omega} \phi \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \phi f d\Omega \right) \quad (\text{II.12})$$

or

$$\phi \frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\phi k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - k \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{II.13})$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - k \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] d\Omega &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\phi k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] d\Omega \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

L'équation (II.12) devient :

$$I_1 = -2\pi \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\phi k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] d\Omega - 2\pi \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] d\Omega - 2\pi \int_{\Omega} \phi f d\Omega \quad (\text{II.15})$$

II.4.2 Calcul de la deuxième intégrale de l'équation (II.10):

$$I_2 = \int_s \phi R_s ds \quad (\text{II.16})$$

$$I_2 = 2\pi \int_{c1} \phi R_s r dC + 2\pi \int_{c2} \phi R_s r dC \quad (\text{II.17})$$

sur C1 :

$$C1 = (AB) \cup (CD) \cup (AD) \quad \text{voir fig.5.}$$

Nous vérifions exactement les conditions aux limites, donc :

$$R_s = 0$$

ce qui entraîne :

$$\int_{c1} \phi R_s r dc = 0 \quad (\text{II.18})$$

sur C2 :

$$C2 = (BC) \quad \text{voir fig.5.}$$

$$\alpha = 0 \quad \text{donc} \quad R_s = \frac{1}{r} \left[k \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] = 0$$

alors

$$\int_{c2} \phi R_s r dc = \int_{c2} \phi k \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

d'où

$$\int_{c2} \phi R_s r dc = \int_{c2} \phi \cdot k \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} n_r + \frac{\partial \psi}{\partial z} n_z \right] dc \quad (\text{II.19})$$

$$\text{avec} \quad n_r = \frac{\partial r}{\partial n}$$

(II.20)

$$n_z = \frac{\partial z}{\partial n}$$

L'équation (II.19) devient par le théorème de divergence [21] :

$$\int_{C_2} \phi k \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} n_r + \frac{\partial \psi}{\partial z} n_z \right] dC = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\phi k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] d\Omega \quad (\text{II.21})$$

De l'équation (II.18) et (II.21), I_2 s'écrit :

$$I_2 = 2\pi \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\phi k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] d\Omega \quad (\text{II.22})$$

Alors, l'équation (II.10) devient, en introduisant les équations (II.15) et (II.22):

$$\int_{\Omega} k \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \phi f d\Omega = 0 \quad (\text{II.23})$$

c'est la forme intégrale faible de l'équation (I.19).

II-5 DISCRETISATION :

On propose une approximation type éléments finis de la variable ψ , ainsi :

$$\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i N_i \quad \forall i \in [1, n] \quad (\text{II.24})$$

où n = nombre total des noeuds par élément .

ψ_i = valeur nodale (inconnue)

N_i = fonction d'interpolation (connue)

Les dérivées de la variable ψ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

La fonction de pondération choisie est celle de *GALERKINE* :

$$\phi(z,r) = N(z,r) \quad (\text{II.26})$$

Substituons les équations (II.24), (II.25) et (II.26) dans l'équation (II.23), on obtient :

$$\int_{\Omega} \left\{ k \left[\frac{\partial N_i}{\partial z} \left(\sum_{j=1}^n \psi_j \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial r} \left(\sum_{j=1}^n \psi_j \frac{\partial N_j}{\partial r} \right) \right] - f N_i \right\} d\Omega = 0. \quad (\text{II.27})$$

Nous avons ainsi obtenu un système de n équations à n inconnues à résoudre qui peut être représenté sous la forme :

$$[K]^e [\psi]^e = [F]^e \quad (\text{II.28})$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} k_{ij}^e = \int_{\Omega} k \left[\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] d\Omega \\ F_i^e = \int_{\Omega} f N_i d\Omega \end{cases} \quad \forall i=1,n; j=1,n$$

Une équation similaire est obtenue pour le volume entier de l'écoulement, en assemblant le système (II.28).

$$[K][\psi]=[F] \quad (\text{II.29})$$

II.6 LINEARISATION DU PROBLEME :

Nous avons obtenu la forme suivante :

$$\int_{\Omega} k \nabla \psi \nabla \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} \phi f \, d\Omega \quad k = k(\psi, r, z) \quad (\text{II.30})$$

L'une des méthodes de linéarisation est la méthode dite de la *SECANTE*. La procédure du calcul itératif est la suivante :

❶ on se donne une valeur approchée de ψ sur le domaine notée $\psi^{(0)}$ ainsi que toutes les quantités nécessaires pour calculer le second membre ;

❷ cela permet de calculer les matrices $K^{(0)}$ et $F^{(0)}$; le système (II.29) est alors fermé et sa résolution donne la valeur de $\psi^{(1)}$.

❸ on calcule alors $K^{(1)}$ et $F^{(1)}$ qui donnent alors $\psi^{(2)}$ et ainsi de suite.

A l'itération n on aura à résoudre le système :

$$[K^{(n-1)}] [\psi^{(n)}] = [F^{(n-1)}] \quad (\text{II.31})$$

Le paramètre de convergence adopté est :

$$\varepsilon = \max \left| \frac{\psi_i^{(n)} - \psi_i^{(n-1)}}{\psi_i^{(n)}} \right| \quad i=1, N \quad (\text{II.32})$$

L'expérience des calculs en turbomachines avec la méthode des différences finies a montré que la linéarisation précédente était très instable numériquement, c'est-à-dire que la procédure divergeait à cause de la forte non-linéarité du problème. Nous sommes donc amenés à effectuer une sous-relaxation par l'intermédiaire d'un facteur ω lors du passage d'une itération à la suivante. si $\bar{\psi}_i^{(n)}$ est la solution obtenue à l'itération n , la valeur de $\psi_i^{(n)}$ à considérer à l'itération $n+1$ sera :

$$\psi_i^{(n)} = \psi_i^{(n-1)} + \omega(\bar{\psi}_i^{(n)} - \psi_i^{(n-1)}), \quad \forall i=1, N \quad (\text{II.33})$$

Lors de chaque itération le problème linéarisé est un problème elliptique linéaire.

II.7 CHOIX DE L'ELEMENT:

L'élément choisi dans le cadre de ce travail est l'élément isoparamétrique quadratique à huit noeuds.

L'élément de référence et l'élément réel sont représentés avec la numérotation des noeuds.

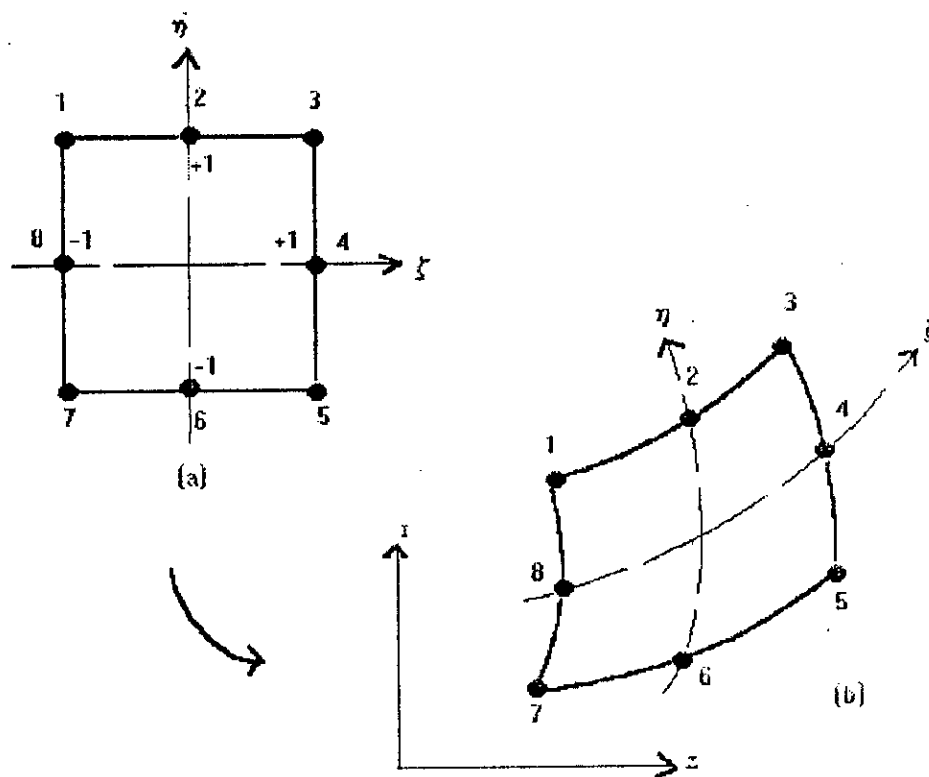


fig.6 : Élément isoparamétrique quadratique à huit noeuds.
a- élément de référence
b- élément réel.

Cet élément assure une interpolation de la valeur de ψ par un polynôme qui prend les mêmes valeurs que ψ aux points géométriques : c'est donc un élément Lagrangien.

Sa base polynômiale est :

$$P = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \rangle$$

L'utilisation des éléments courbes comme notre élément permet d'approximer géométriquement les frontières par des segments de parabole.

II.7.1 PROPRIETES MATHEMATQUES DE L'ELEMENT :

❶ L'élément choisi est de classe C^0 (fonction continue) et non de classe C^1 (fonction continue et dérivable).

❷ L'élément choisi est conforme, c'est à dire qu'il assure la convergence de l'approximation élément fini vers la solution réelle pour le problème linéarisé associé.

❸ L'élément est qualifié isoparamétrique, parceque les fonctions de transformation géométrique $\bar{N}(\xi, \eta)$ sont identiques aux fonctions d'interpolation $N(\xi, \eta)$. Ceci implique que les noeuds géométriques sont confondus avec les noeuds d'interpolations.

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^8 z_i \bar{N}_i(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 z_i N_i(\xi, \eta) \\ r &= \sum_{i=1}^8 r_i \bar{N}_i(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 r_i N_i(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (II.34)$$

II.7.2 SINGULARITE DE LA MATRICE JACOBIENNE:

La singularité de $[J]$ en un point de l'élément de référence implique que la transformation isoparamétrique n'est pas bijective.

Cette singularité apparaît lorsque l'on déforme beaucoup l'élément de référence. Il est prudent de vérifier que le déterminant de $[J]$ garde un signe constant en tout les points ξ de l'élément de référence.

Pour éviter la singularité dans un élément à huit noeuds, ZIENKIEWICZ [11] propose les conditions suivantes (fig.7) :

- ♦ Les 4 angles α sont inférieurs à 180° .
- ♦ Les noeuds milieux sont situés dans le tiers central de chaque côté.

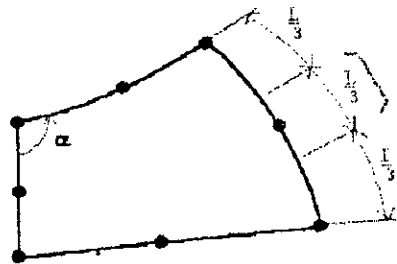


fig.7

II.7.3 MAILLAGE :

La partition du domaine du V en éléments V^e (rectangulaires) doit respecter les deux règles suivantes :

1. Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leur frontière commune, si elle existe. Cette condition exclut le recouvrement de deux éléments.

2. L'ensemble de tous les éléments V^e doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné V . Nous excluons en particulier les trous entre éléments.

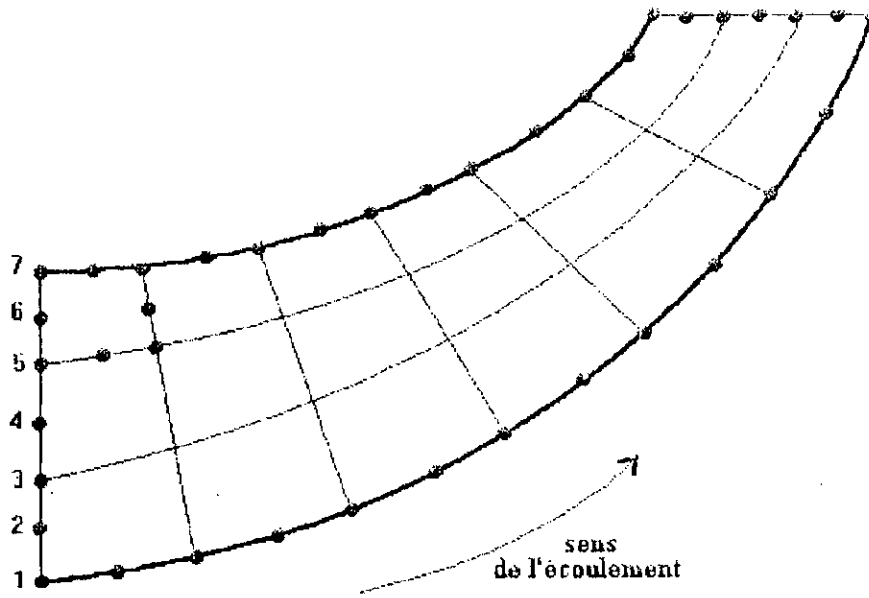


fig.8 : Exemple de maillage .

Notons que nous avons relevé un désavantage vis-à-vis les éléments triangulaires. Dans le cas de ces derniers ,il est possible de raffiner le maillage dans certaines zones ce qui n'est pas possible avec l'élément choisi.

II.8 APPLICATION DE L'APPROXIMATION CHOISIE AU PROBLEME POSE:

Pour le volume entier de l'écoulement le système d'équation s'écrit :

$$\begin{cases} [K] [\psi] = [F] \\ k_{ij} = \int_{\Omega} k \left[\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right] d\Omega & \forall i=1,n ; j=1,n \\ F_i = \int_{\Omega} f N_i d\Omega \end{cases}$$

Nous allons calculer la matrice de rigidité K et le vecteur force F.

Soit un élément dont les huit points géométriques ont pour coordonnées : $\{ (z_i, r_i)_{i=1,8} \}$

Nous avons alors pour tout point M(z,r) intérieur à l'élément :

$$z = \sum_{i=1}^8 z_i N_i(\xi, \eta) \quad , \quad r = \sum_{i=1}^8 r_i N_i(\xi, \eta) \quad (II.35)$$

d'où

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (II.36)$$

donc :

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{L=1}^8 z_L \frac{\partial N_L}{\partial \xi} & \sum_{L=1}^8 r_L \frac{\partial N_L}{\partial \xi} \\ \sum_{L=1}^8 z_L \frac{\partial N_L}{\partial \eta} & \sum_{L=1}^8 r_L \frac{\partial N_L}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (II.37)$$

par ailleurs :

$$d\Omega = |J| d\xi d\eta \quad (\text{II.38})$$

d'où :

$$k_{ij} = \int_{\Omega} k \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial z} \\ \frac{\partial N_j}{\partial r} \end{bmatrix} dr dz \quad (\text{II.39})$$

$$k_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} k \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} [J^{-1}] [J^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta \quad (\text{II.40})$$

Pour le second membre :

$$f = \sum_{i=1}^8 f_i N_i$$

donc

$$F_i = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\sum_{i=1}^8 f_i N_i \right) N_i |J| d\xi d\eta \quad (\text{II.41})$$

II.9 CALCUL EXPLICITE DE LA MATRICE DE RIGIDITE [K]

L'équation (II.40) prend sa forme explicite, en effectuant tous les produits matriciels que contient cette équation et en se servant de l'annexe [B].

$$K_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} k(L) \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial N(i)}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial N(i)}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \left(\frac{\partial N(j)}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial N(j)}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) * \\ \left(\frac{\partial N(i)}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial N(i)}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial N(j)}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial N(j)}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \end{pmatrix} \right] \frac{1}{|J|} d\xi d\eta \quad (\text{II.42})$$

$$\text{avec : } k = \frac{1}{\rho r b}$$

II.10 CALCUL EXPLICITE DU VECTEUR FORCE [F] :

D'après l'équation (I.19), on a

$$F = -\frac{1}{W_r} \left[\frac{\partial I}{\partial z} - \frac{W_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r V_\theta) - F_z \right] \quad (\text{II.43})$$

le vecteur force F depend des vitesses relatives W_r , W_z .

II.10.1 CALCUL DES VITESSES W_r , W_z :

On calcule les composantes W_r , W_z à partir de la fonction de courant ψ en utilisant :

$$W_z = + \frac{1}{\rho \cdot r \cdot b} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{II.44})$$

$$W_r = - \frac{1}{\rho \cdot r \cdot b} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

La discretisation du systeme (II.43) se fait ,en introduisant l'approximation par éléments finis choisi , on obtient alors :

$$W_z^i = + \frac{1}{\rho_i r_i b_i} \sum_{j=1}^n \psi_j \frac{\partial N_j}{\partial r} \quad i = 1, \text{NTN} \quad (\text{II.45})$$

$$W_r^i = - \frac{1}{\rho_i r_i b_i} \sum_{j=1}^n \psi_j \frac{\partial N_j}{\partial z}$$

où NTN: le nombre total des noeuds .

II.10.2 REECRITURE DES DIFFERENTS TERMES DE F :

Une fois les vitesses W_r , W_z sont obtenues , on va réécrire les différentes termes de F en fonction de ces deux vitesses .

- ♦ La dérivée de la circularité par rapport à z donne :

$$\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial z} = r \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \quad (\text{II.46})$$

avec

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial z} = -\text{tg}\lambda \frac{\partial W_r}{\partial z} - \text{tg}\mu \frac{\partial W_z}{\partial z} \quad (\text{II.47})$$

- ♦ La rothalpie I est donnée par :

$$I = h + \frac{V^2}{2} - \omega r V_\theta$$

où

$$h = \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{V^2}{M^2(\gamma - 1)}$$

alors,

$$h + \frac{V^2}{2} = V^2 \left(\frac{1}{M^2(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \right)$$

d'autre part ,

$$V^2 = (W_r^2 + W_z^2 + V_\theta^2) \quad \text{car} \quad W_r = V_r \quad \text{et} \quad W_z = V_z$$

ce qui donne

$$\frac{\partial(V^2)}{\partial z} = 2W_r \frac{\partial W_r}{\partial z} + 2W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} + 2V_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \quad (\text{II.48})$$

donc

$$\frac{\partial I}{\partial z} = \left[\frac{1}{M^2(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} \right] \frac{\partial(V^2)}{\partial z} - \omega r \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \quad (\text{II.49})$$

• Enfin, la force F_z s'écrit :

$$F_z = \text{tg } \mu \left[-\frac{W_r}{r} \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} + \frac{W_z}{r} \frac{\partial(rV_\theta)}{\partial z} \right] \quad (\text{II.50})$$

avec

$$\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} = \frac{1}{\rho b} \left[\text{tg } \lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} - \text{tg } \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right] + 2\omega r \quad (\text{II.51})$$

En remplaçant les équations (II.46), (II.49) et (II.50) dans (II.43) on trouve l'expression explicite de F.

II.11 INTEGRATION NUMERIQUE :

Les calculs de la matrice de rigidité K et du vecteur force F reviennent à effectuer des intégrales doubles sur le carré $(-1,+1) \times (-1,+1)$ bien que les intégrales soient celles de polynômes à deux variables de degré ≤ 6 , l'intégration formelle n'est pas aisée à cause du calcul des coefficients de ces polynômes. Les méthodes d'intégration numérique seront donc employées.

II.11.1 METHODE PRODUIT DE GAUSS :

Pour l'élément de référence carré, la méthode *produit* est souvent la plus utilisée. Elle peut s'exprimer :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} Y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n'} w_i w_j Y(\xi_i, \eta_j) \quad (\text{II.52})$$

où:

r_1, r_2 sont les points d'intégration .

w_i, w_j sont les coefficients de pondération correspondants .

ξ_i, η_i sont les coordonnées des points d'intégration correspondants .

II.11.2 PRECISION DE L'INTEGRATION :

Par la méthode d'intégration de Gauss il faut 3×3 points pour intégrer exactement la matrice de rigidité K . Cependant, cette méthode est un peu trop précise puisqu'elle intègre des termes $\xi_i, \eta_i; i \leq 5; j \leq 5$.

Très souvent on utilise une intégration à 2×2 points pour l'élément quadratique à huit noeuds ; celle-ci donne d'excellents résultats . L'intégration est dite *Réduite* .

Pour le vecteur force F , il faut utiliser 2×2 points de Gauss ou une méthode directe du 3^{ème} ordre pour intégrer exactement .

On résume les coordonnées et les poids des points d'intégrations adoptés dans notre travail dans le tableau et la figure suivants :

points	coordonnées		poids
	ξ_i	η_i	w_i
a	$+1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	1
b	$-1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	1
c	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
d	$+1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1

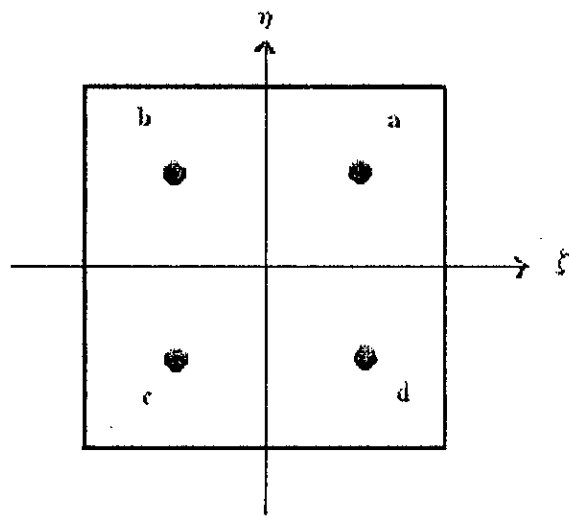


Fig.9 : Méthode Produit à 2×2 points .

CHAPITRE 3

RESULTATS NUMERIQUES

RESULTATS NUMERIQUES

Avec l'ensemble des formulations qui ont été définies aux chapitres précédents, nous avons mis en place un programme élément fini pour aboutir à la résolution numérique du problème fixé.

L'algorithme générale de ce programme est fondé sur un schéma itératif a deux niveaux :

A- PREMIERE SERIE D'ITERATIONS:

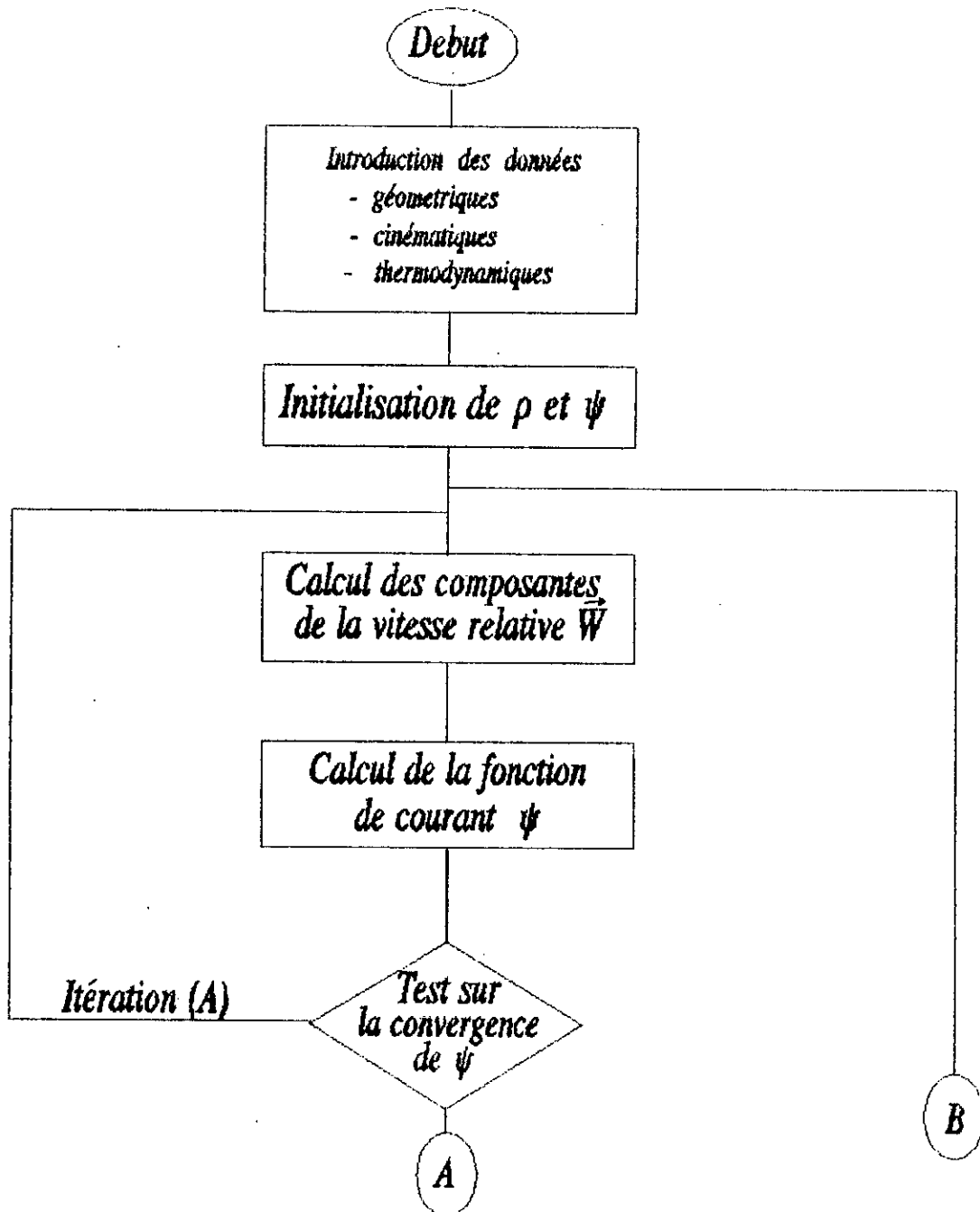
Au cours de ces itérations , la masse volumique $\rho (\psi, r, z)$ est supposée connue dans tout le champ de l'écoulement méridional , et la seule variable à déterminer est la fonction de courant ψ .

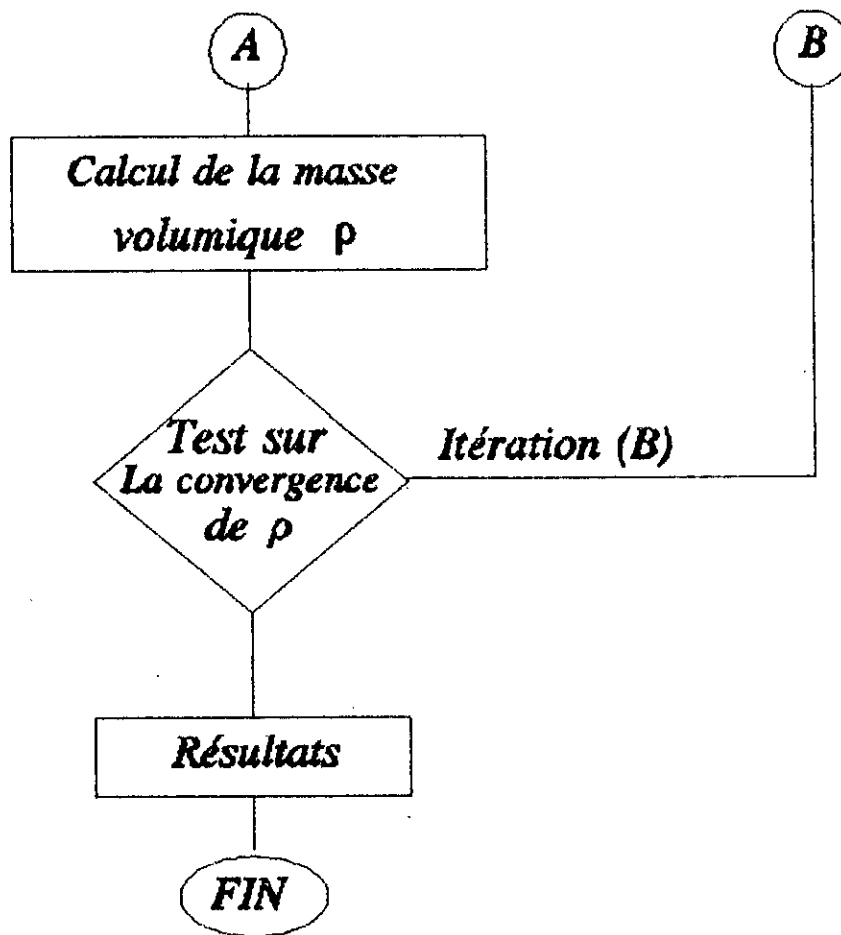
B- SECONDE SERIE D'ITERATIONS :

Ayant obtenue à l'aide des itérations précédentes une fonction de courant ψ et donc un champ de vitesses \vec{V} , on calcule la masse volumique et on réinjecte ensuite cette nouvelle valeur de ρ dans la première série d'itération , et on procède ainsi jusqu'à convergence.

III.1 SCHEMA DU CALCUL :

L'organigramme du calcul est donné comme suit :





III.2 PRESENTATION DES RESULTATS OBTENUS :

Nous allons maintenant passer en revue quelques résultats obtenus avec la présente version du programme qui a été écrit en FORTRAN 77.

Dans cette partie , nous avons traité principalement deux types d'essais , qui sont réalisés sur la roue mobile d'un compresseur centrifuge pour un fluide parfait , compressible et subsonique .

1^{ère} cas : Ecoulement à grande vitesse d'entrée :

Nous avons à l'entrée du canal un écoulement uniforme ; les conditions initiales sont:

$$M_0 = 0.6 \qquad \omega = 500 \text{ rd/s} \qquad \text{avec} \qquad Q = 1 \text{ kg/s}$$

Les calculs sont faits suivant les données précédentes avec en plus une sous relaxation sur la grandeur ψ , de coefficient $\omega = 0.01$.

Avec un maillage de 70 éléments , une solution satisfaisante est obtenue après 10 itérations sur ρ et un temps d'exécution de 1 min et 37sec . Il faut noter qu'évidemment le temps de calcul dépend beaucoup de l'occupation mémoire et du maillage .

Dans la figure (III.2) , nous avons tracé les lignes de courant dans le canal méridional et on voit bien que ces lignes sont bien réparties et sans perturbation ce qui est justifiée par l'hypothèse d'écoulement sain (non visqueux) .

A la sortie , on voit aussi que l'écoulement est bien guidé , c'est le résultat logique de la condition imposée sur cette partie du canal .

La figure (III.3) donne la répartition des lignes ISO-DENSITE obtenue à partir de l'équation (c.6) de l'annexe [C] , où nous avons pris en compte la conservation de la rothalpie I le long d'une ligne de courant . La figure montre l'augmentation de la densité le long du canal .

L'équation (c.9) de l'annexe [C] nous donne le rapport de pression .L'évolution de ce rapport est illustrée sur la figure (III.4).On voit que le rapport augmente de l'entrée à la sortie.

Sur la figure(III.5), nous avons présenté la distribution des lignes ISO-MACH .Le nombre de Mach relative est donné par l'équation (c.1) de l'annexe [C].

nous avons remarqué globalement une diminution du nombre de mach dûe au transfert d'énergie .

2^{ème} cas : Ecoulement à petite vitesse d'entrée :

Les conditions à l'entrée sont :

$$M_0 = 0.1 \quad \omega = 500 \text{ rd/s} \quad \text{avec} \quad Q = 1 \text{ kg/s} :$$

D'après les figures (III.6) , (III,7), (III,8) et (III,9) , nous avons remarqué une bonne distribution des variables de façons identique a l'expérimentation du premier type d'écoulement tout en gardant la spécificité et la proportionnalité de chaque étapes physiques .

Certains paramètres qui agissent sur le comportement numérique des programme sont ensuite examinés :

A/ Examen de l'influence du nombre d'éléments dans le sens transversal:

Nous avons réduit ce nombre de 7 (initial) à 4 , tout étant égal par ailleurs . D'après le tableau(1) , nous constatons une augmentation du nombre d'itérations pour une même précision. Ceci s'explique d'ailleurs aisément car dans ce cas le maillage est forcément assez lâche(élément de taille importante).

Nombre d' éléments	nombre d'itérations sur ψ	temps
7	2	1' 37''
4	7	5' 52''

Tableau 1.

B/ Examen de l'influence du nombre d'éléments dans le sens longitudinal :

Deux calculs ont été effectués pour un nombre d'éléments dans le sens longitudinal égal à 7 et 4 au lieu de 10 .

D'après les résultats présentés sur le tableau (2) ,le calcul avec 7 éléments n'apporte pratiquement aucune modifications. Pour le cas avec 4 éléments, des modifications sont remarquées car la diminution du nombre d'éléments est importante.

nombre d'éléments	nombre d'itérations sur ψ	temps
10	2	1' 37''
7	3	1' 10''
4	5	2' 45''

Tableau 2.

De ces deux derniers tests , nous constatons évidemment que le maillage optimal doit être relativement fin dans le sens transversal par rapport à l'écoulement . Dans le sens longitudinal, il ne doit être fin que dans les zones à fort gradient .

Les deux calculs précédents nous ont permis d'avoir une idée du maillage à réaliser lors de calculs plus complexe, dans le but d'obtenir des résultats acceptables avec un temps de calcul minimal .

Il est bien entendu que, pour une comparaison significative du temps calcul, nous devons tenir compte de la croissance de ce temps quand le nombre de mach augmente, ceci pour un calcul et un même nombre de noeuds de résolution données;

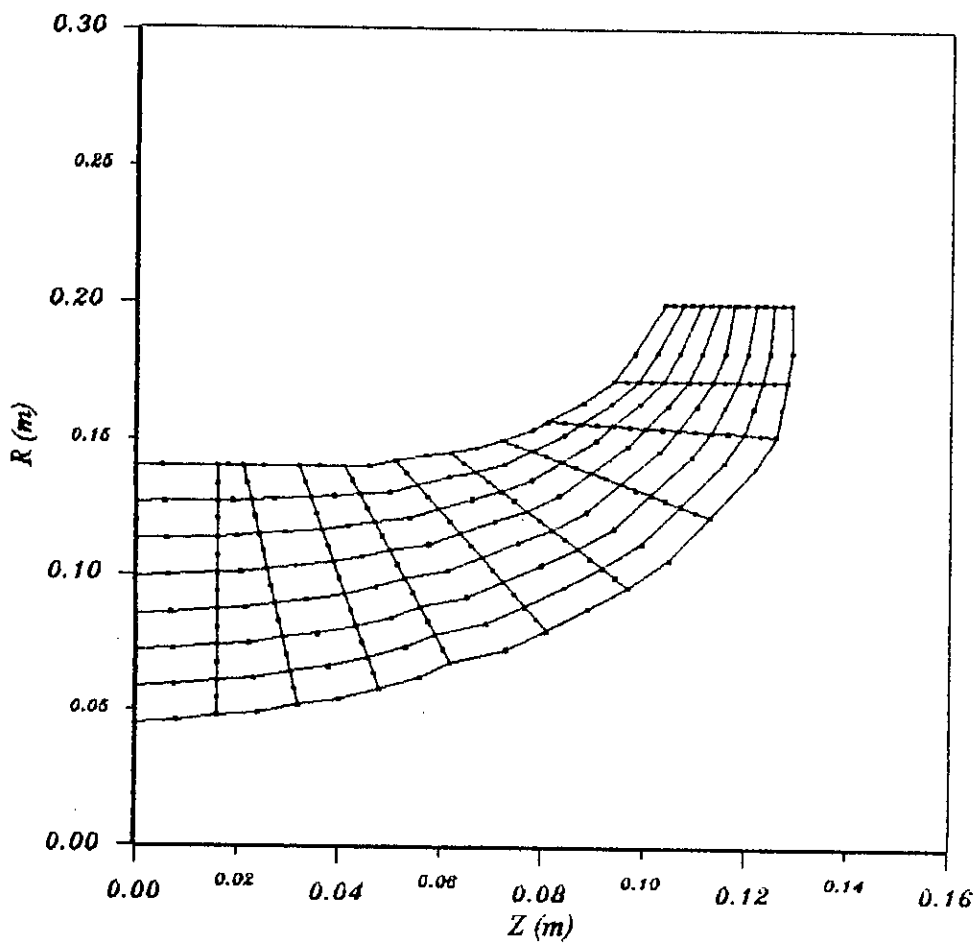
C/ Influence du facteur de relaxation sur la convergence :

Dans le paragraphe (II.6) du deuxième chapitre, nous avons vu que la procédure de linéarisation était très instable numériquement à cause de la forte non-linéarité du problème. Nous étions donc amenés à effectuer une sous-relaxation par l'intermédiaire d'un facteur ω .

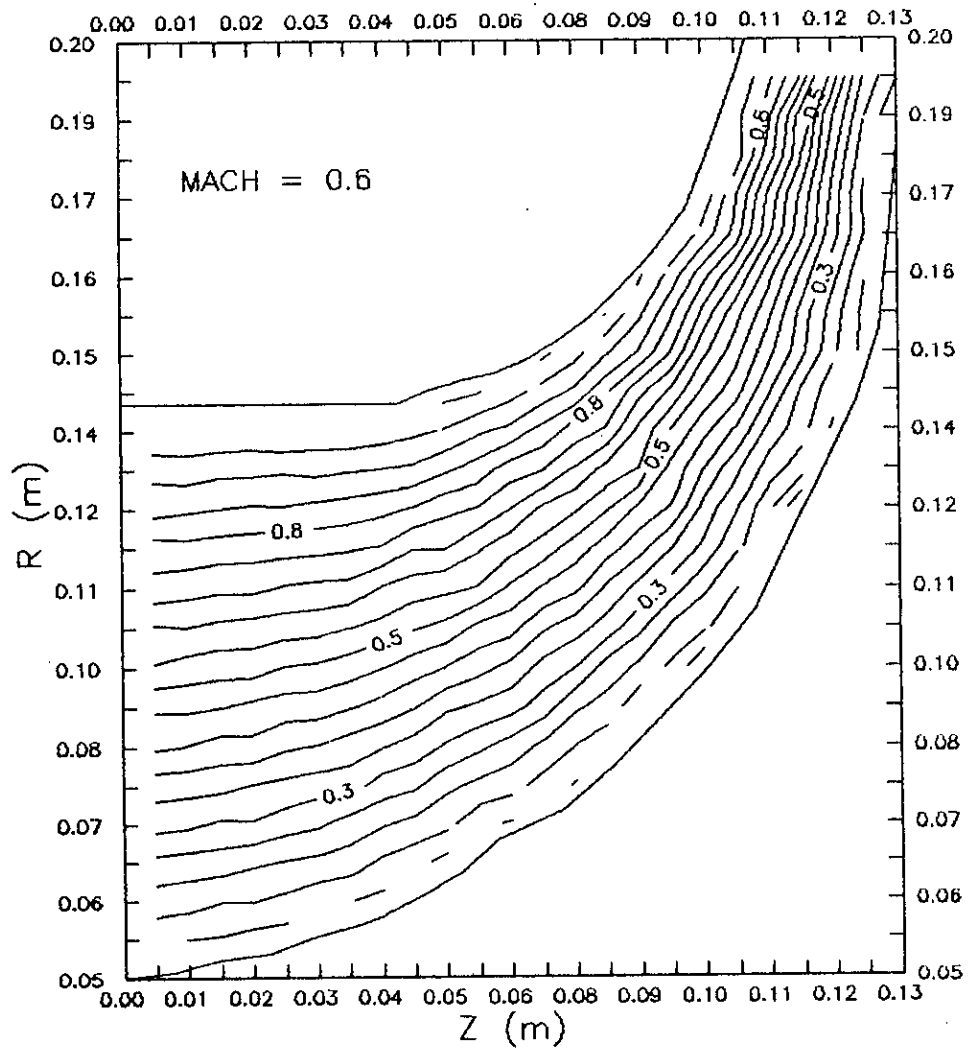
Sur la figure (III.10), nous avons présenté l'influence de ce facteur sur la convergence. En effet, la figure montre bien que pour $\omega = 0.01$ le calcul est stable, par contre l'instabilité est très sensible pour $\omega = 0.05$.

D/ Etude de la stabilité du calcul numérique vis-à-vis d'un nombre de Mach supérieur à 1

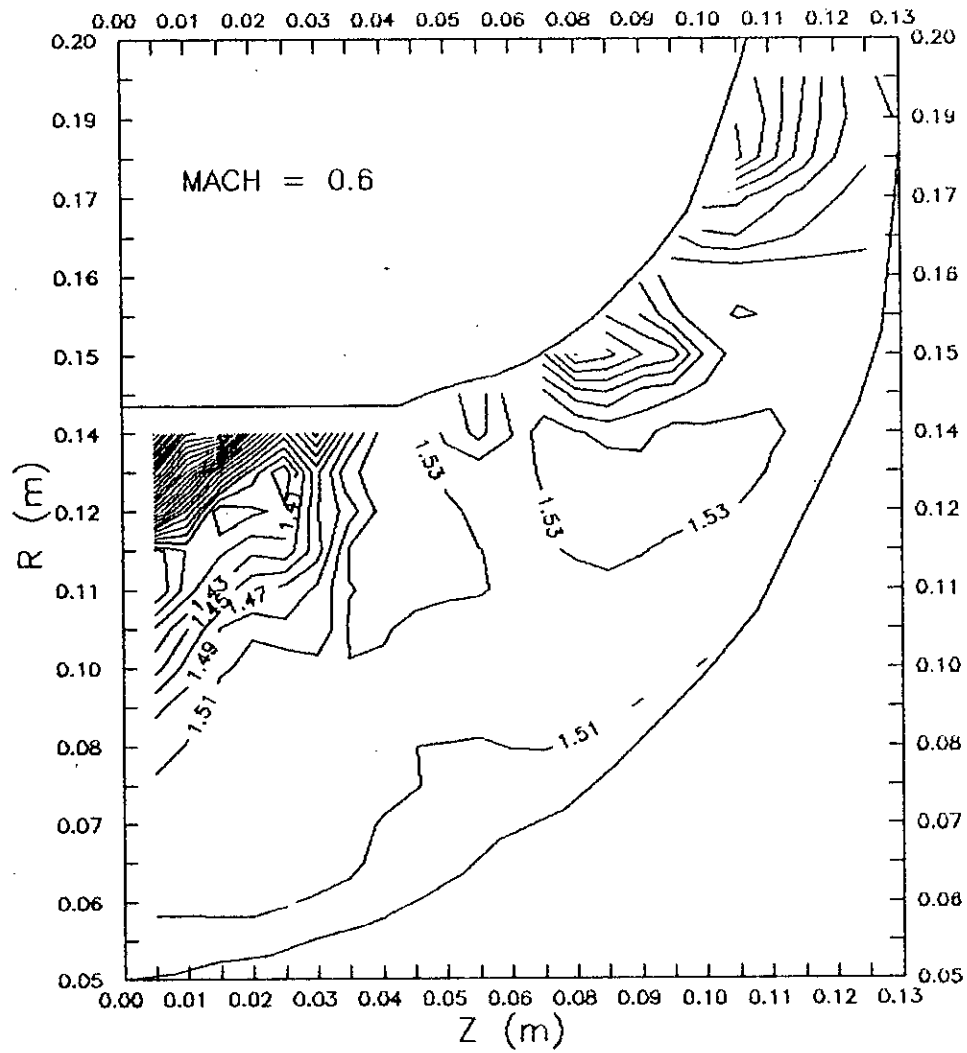
Nous avons voulu regardé si notre programme supportait bien un nombre de Mach supérieur à l'unité. Pour un Mach à l'entrée de 1.2, le calcul a convergé et on a constaté, d'après la figure (III.14) une répartition du nombre de mach quasi-constante de l'ordre de 0.4, caractérisant une saturation de l'écoulement dans le canal. De même on a remarqué que pour la figure (III.13) donnant la distribution des taux de compression, l'ordre de grandeur de cette caractéristique reste constant.



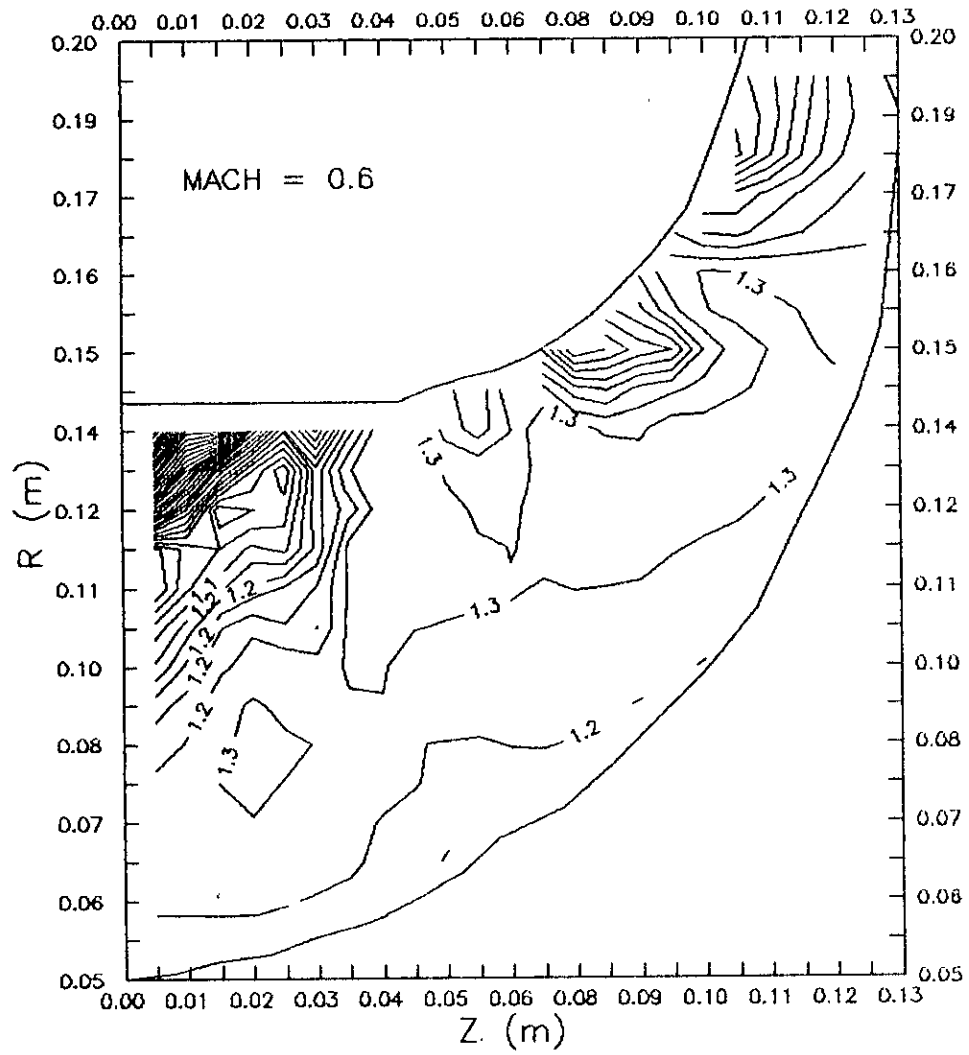
Fig(III.1) Géométrie du canal et maillage.



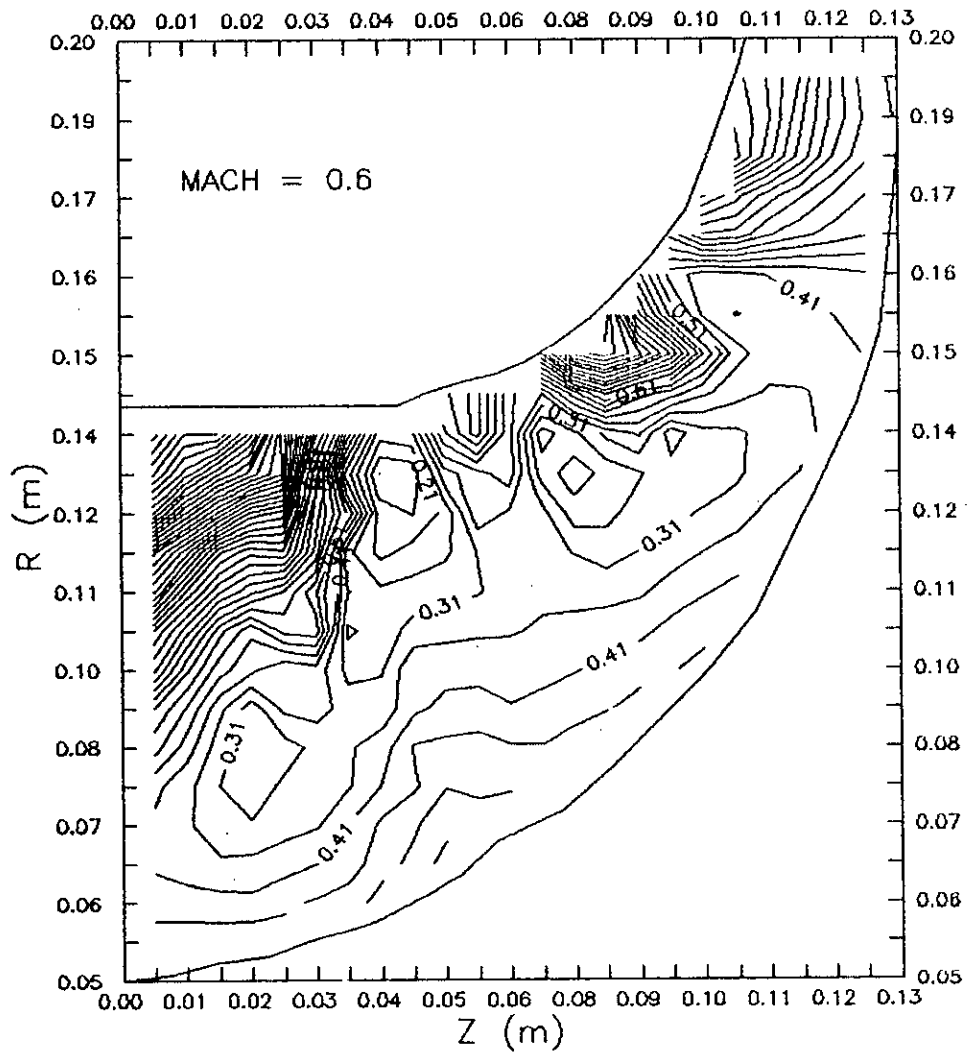
Fig(III.2) LA DISTRIBUTION DES LIGNES DE COURANT



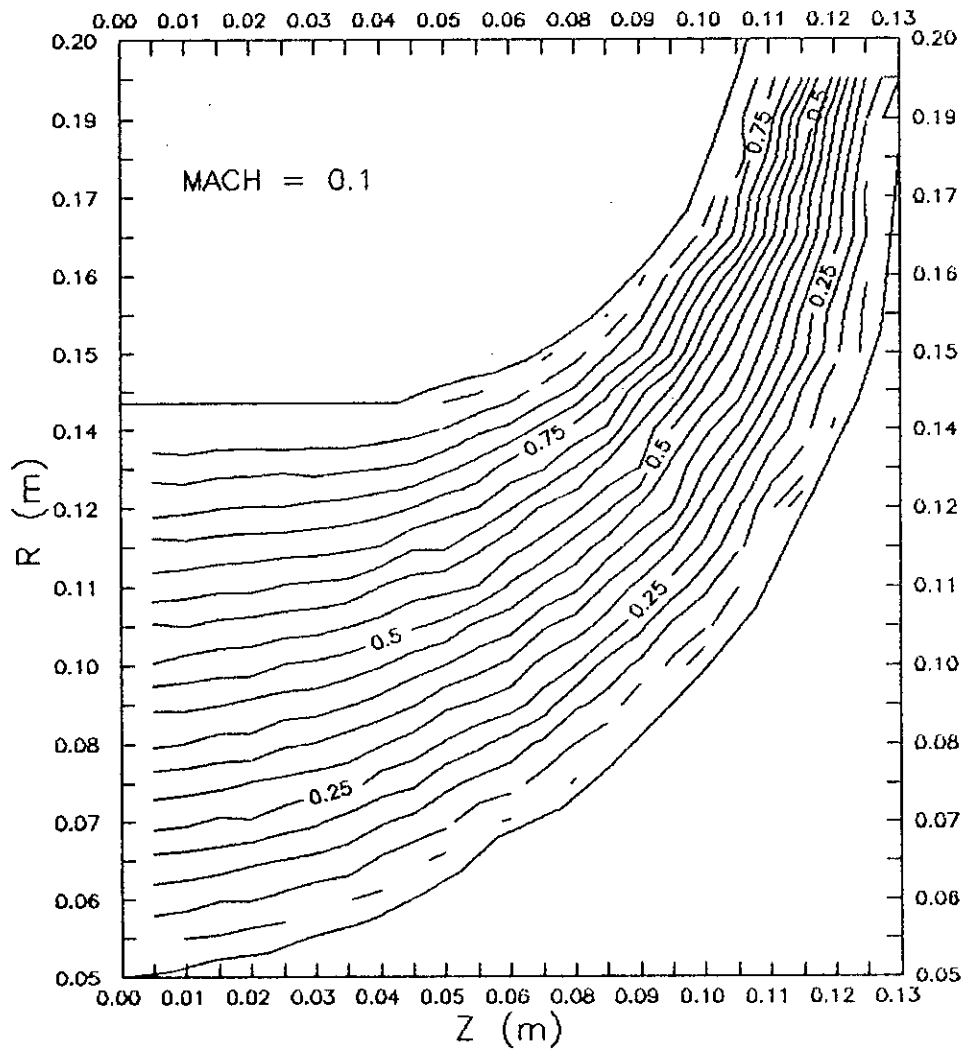
Fig(III.3) LA DISTRIBUTION DES LIGNES ISO-DENSITE



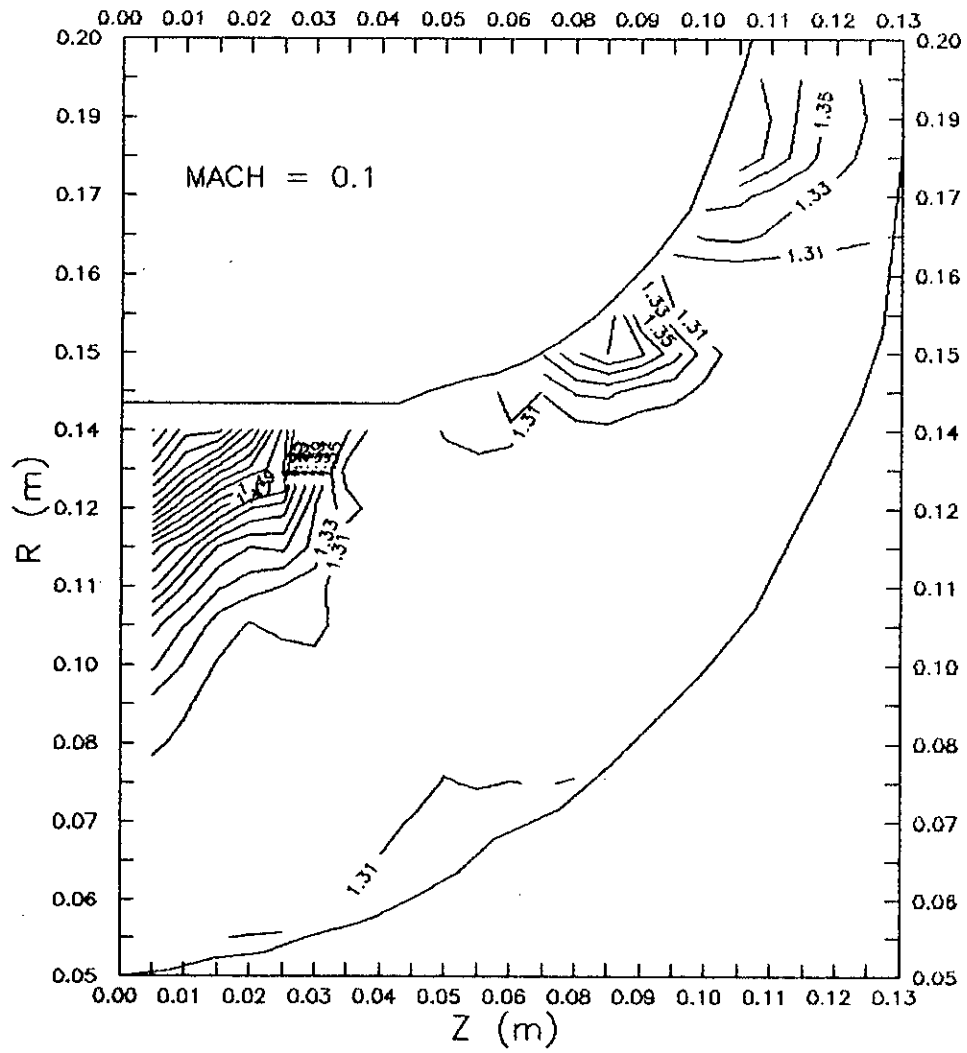
Fig(III.4) LA DISTRIBUTION DU RAPPORT DE PRESSION



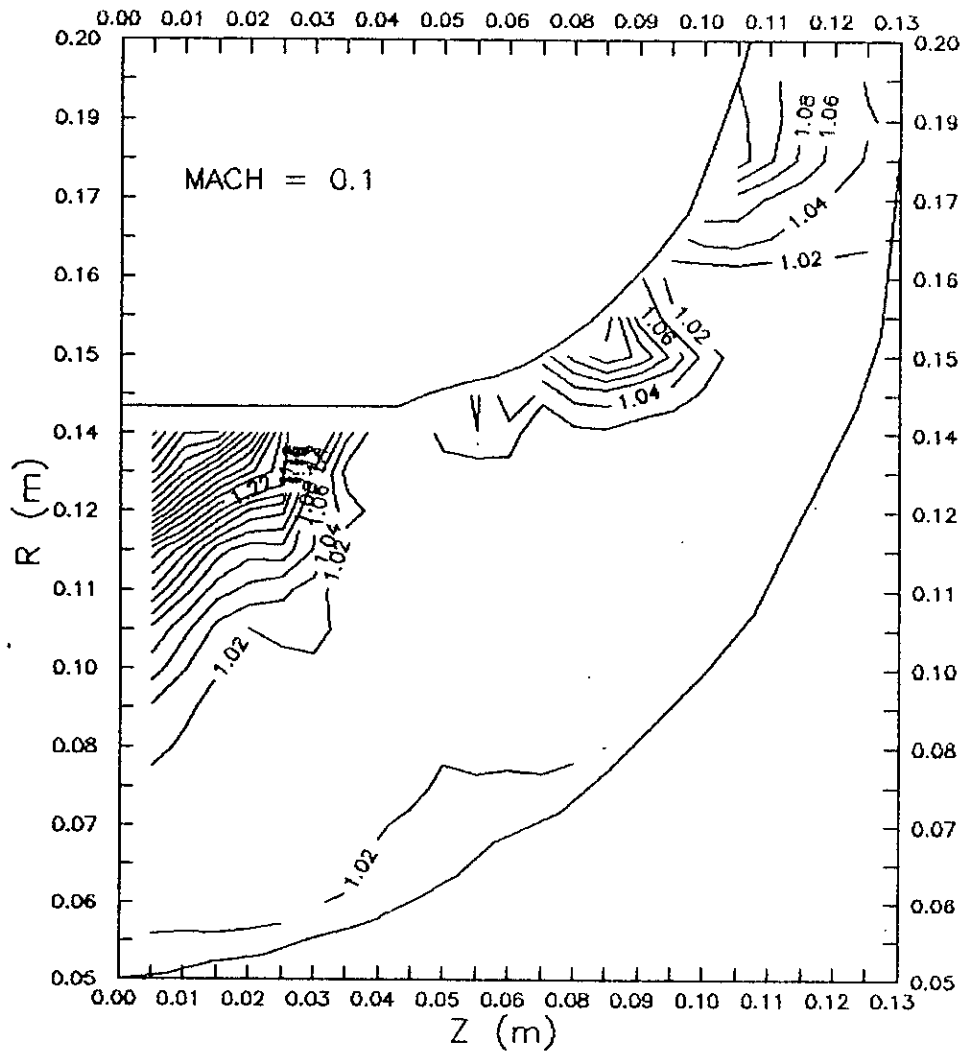
Fig(III.5) LA DISTRIBUTION DES LIGNES ISO-MACH



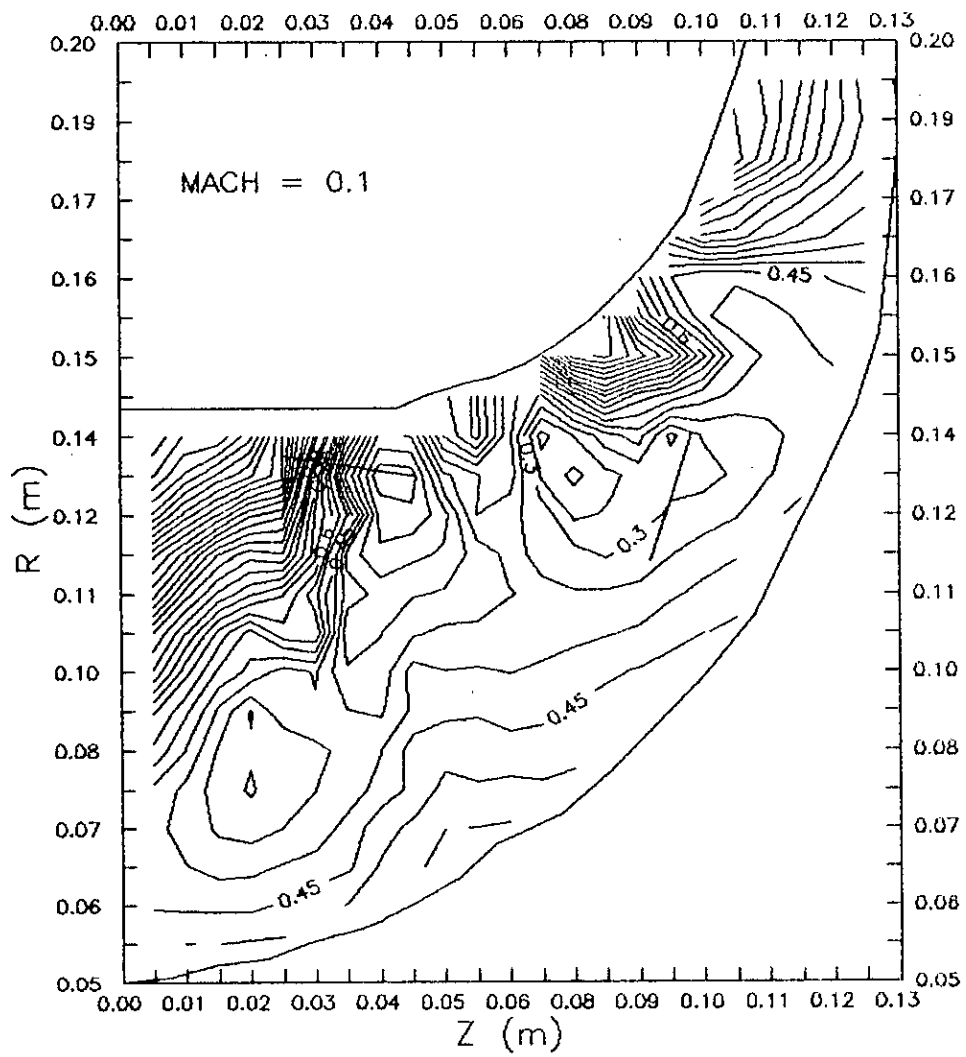
Fig(III.6) LA DISTRIBUTION DES LIGNES DE COURANT



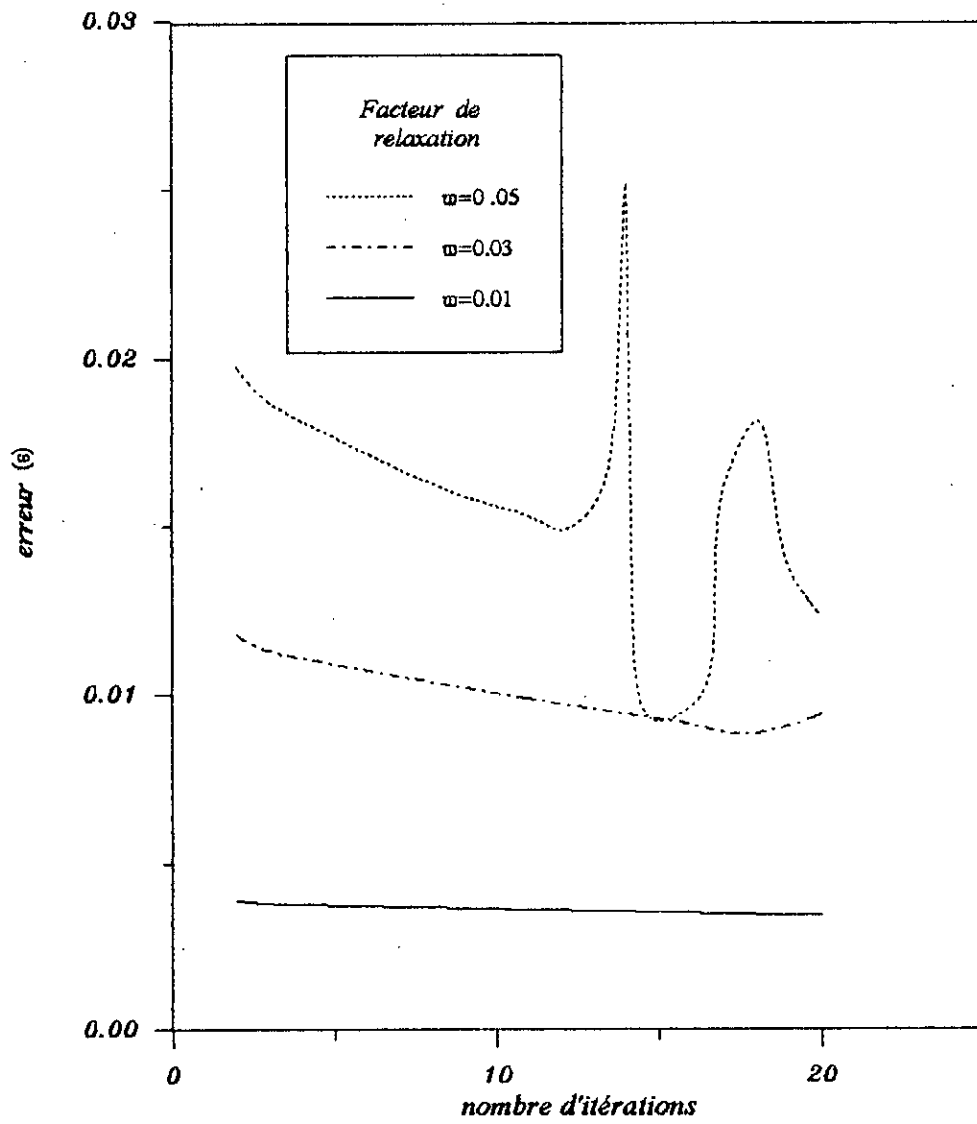
Fig(III.7) LA DISTRIBUTION DES LIGNES ISO-DENSITE



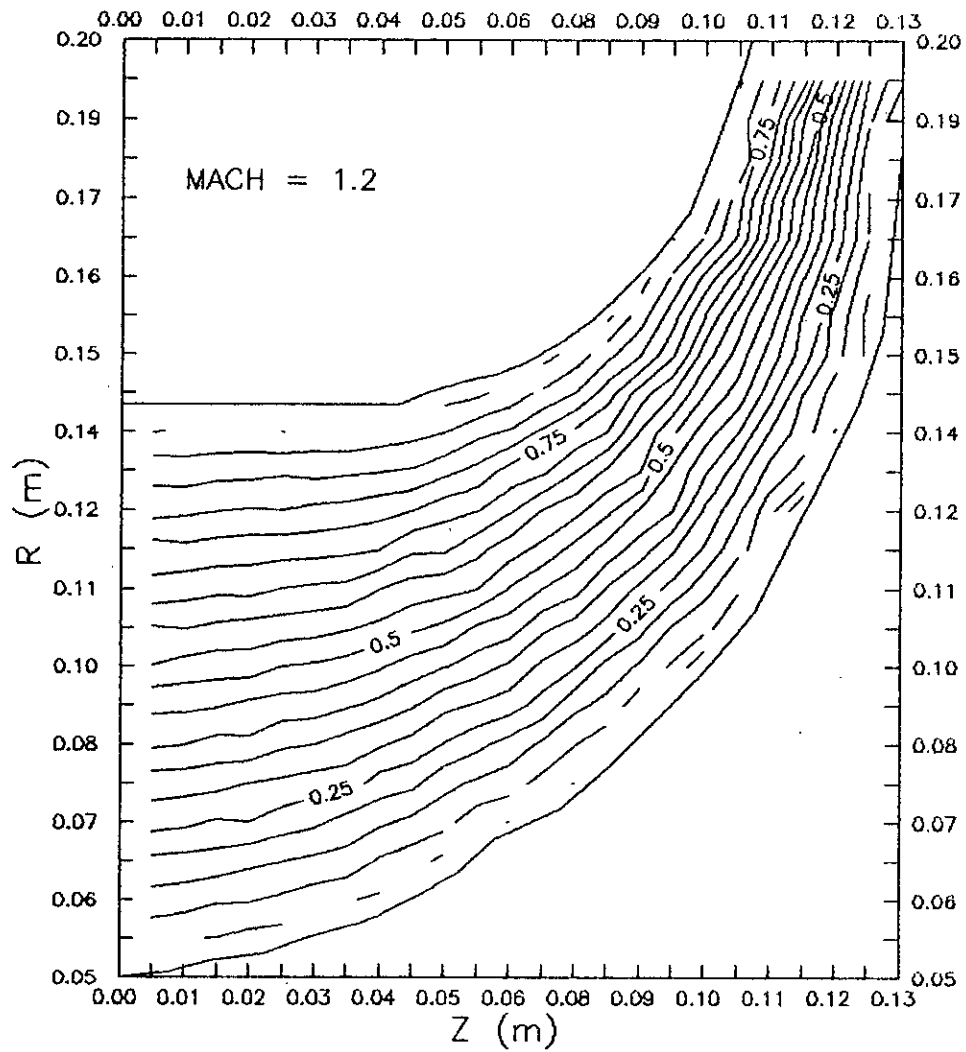
Fig(III.8) LA DISTRIBUTION DU RAPPORT DE PRESSION



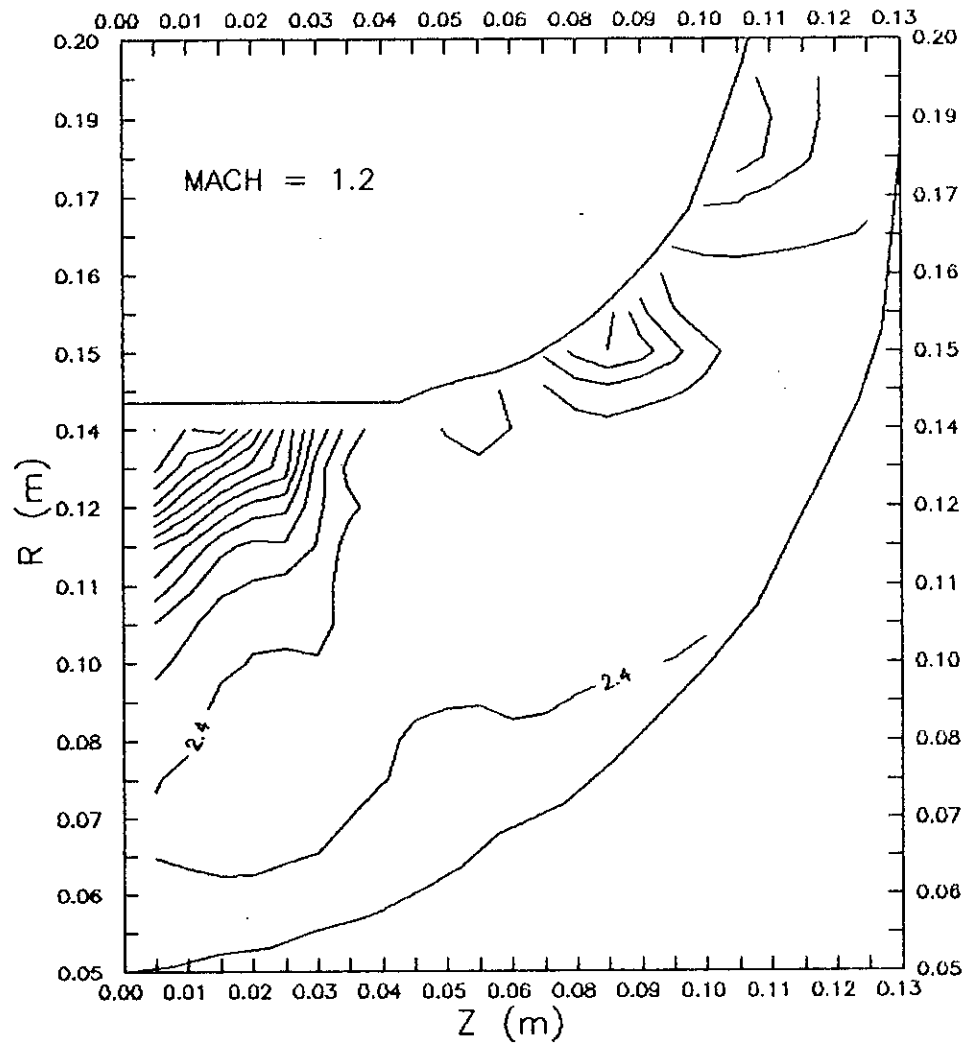
Fig(III.9) LA DISTRIBUTION DES LIGNES ISO-MACH



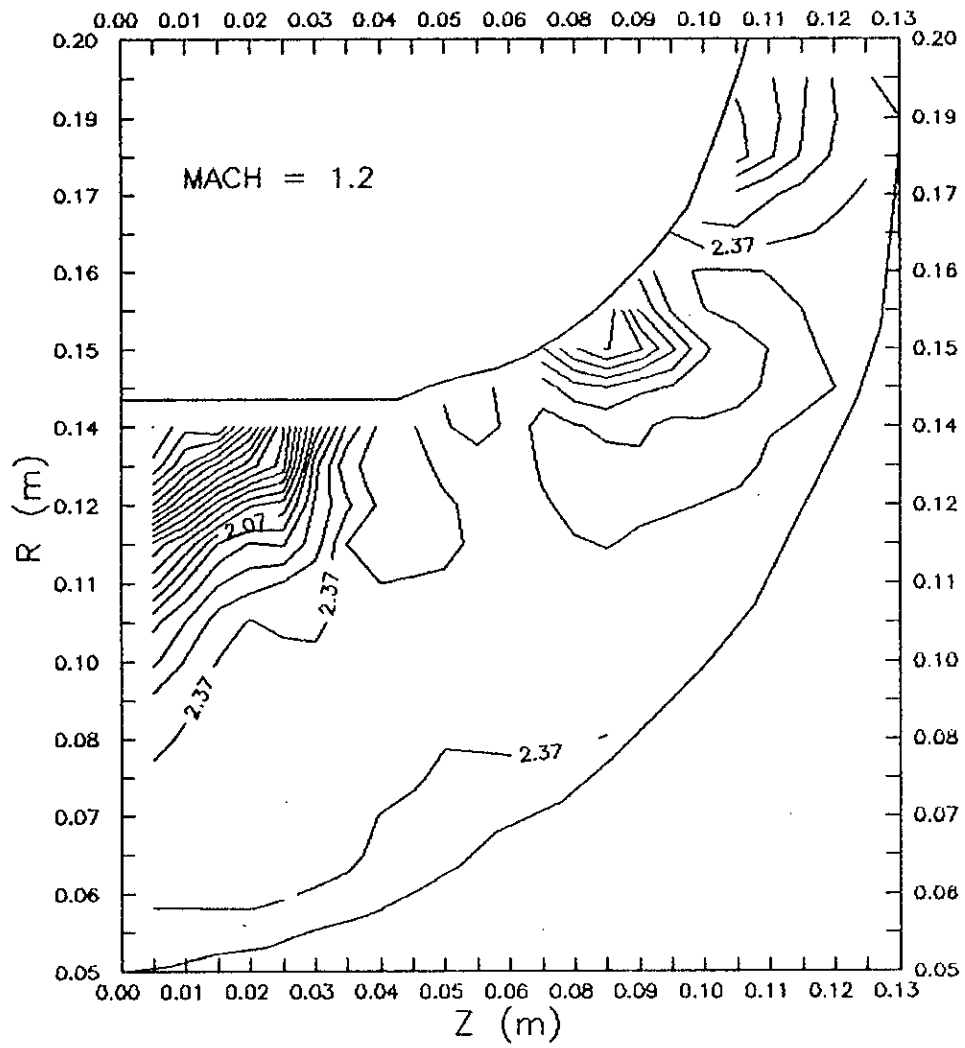
Fig(III.10): Influence du facteur de relaxation sur la convergence



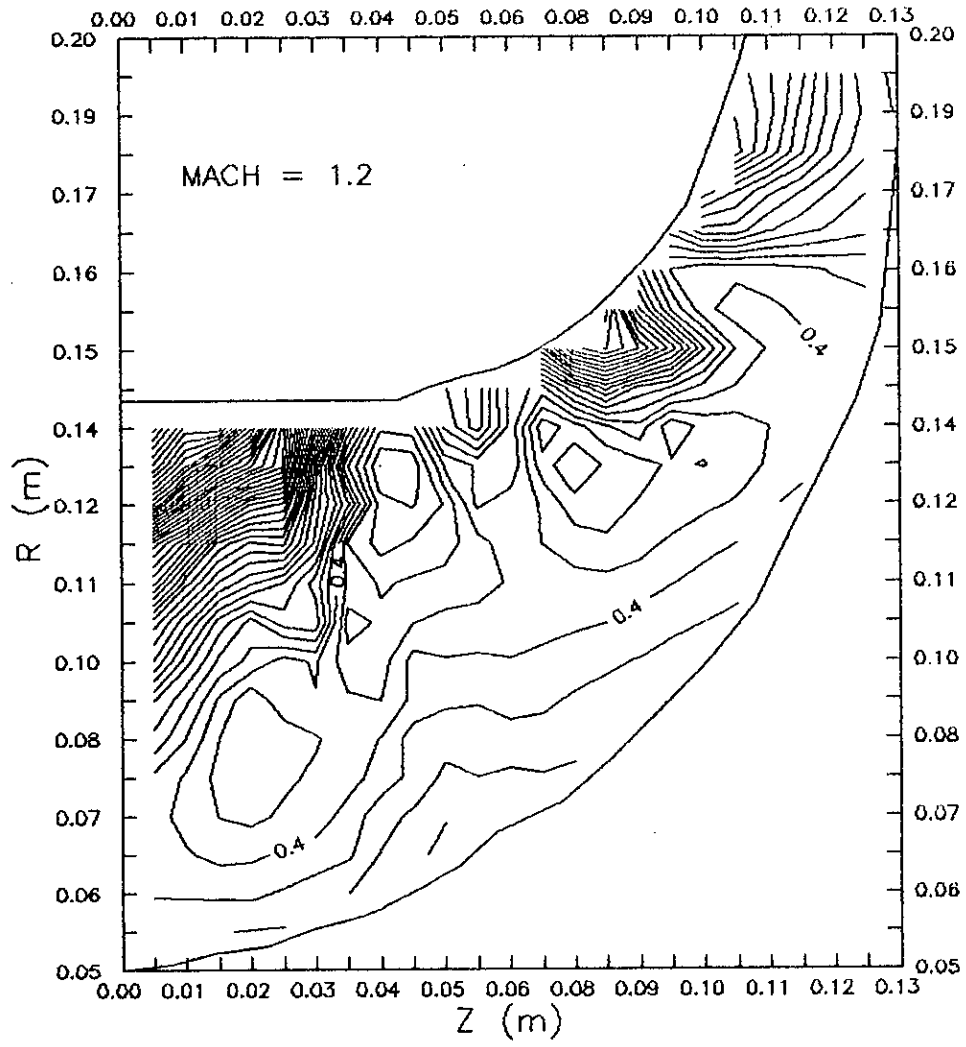
Fig(III.11) LA DISTRIBUTION DES LIGNES DE COURANT



Fig(III.12) LA DISTRIBUTION DES LIGNES ISO-DENSITE



Fig(III.13) LA DISTRIBUTION DU RAPPORT DE PRESSION



Fig(III.14) LA DISTRIBUTION DES LIGNES ISO-MACH

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Dans cette présente étude , nous avons exposé l'élaboration d'un calcul d'un écoulement parfait, compressible, subsonique et stationnaire dans un plan méridien d'une machine radiale par la méthode des éléments finis.

Nous avons mis au point un programme en éléments finis basé sur l'approche résiduelle de Galerkin et permettant la détermination de l'écoulement moyen. L'équation principale de WU qui régit notre problème a été résolue sous sa forme quasi-harmonique. Avec une convergence assez rapide , de très bon résultats ont été obtenues.

Au terme de ce travail, nous avons remarqué la simplicité et l'efficacité de la méthode de WU pour la résolution des écoulements dans les turbomachines. Pour la résolution numérique, la méthode des éléments finis s'est avérée un outil précieux grâce aux possibilités qu'elle offre de traiter les géométries complexes tout en offrant un traitement intégré des différentes conditions aux limites.

dans une étude ultérieure, nous proposons:

- ♦ Un calcul en couche limite sur les parois pour corriger les calculs obtenus par notre programme.
- ♦ Une extension facile au cas quasi-tridimensionnel.(plan Aube-à-Aube puis le couplage).
- ♦ Une extension du programme de calcul pour traiter, avec une formulation similaire, les écoulements transsoniques et tridimensionnels .
- ♦ L'adaptation du programme aux machines axiales et mixtes.

ANNEXES

ANNEXE A

DEFINITION DES DERIVEES SPECIALES :

(ou dérivées selon une surface de courant)

Si l'on désigne par $S(r, \theta, z) = 0$ l'équation de la surface de courant, nous avons :

$$dS = \frac{\partial S}{\partial r} dr + \frac{\partial S}{\partial z} dz + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} (r d\theta).$$

\mathbf{n} étant un vecteur normal à S , la propriété suivante est vérifiée :

$$\frac{n_r}{(\partial S / \partial r)} = \frac{n_z}{(\partial S / \partial z)} = \frac{n_\theta}{(1/2)(\partial S / \partial \theta)} = \frac{1}{\sqrt{(\partial S / \partial r)^2 + (\partial S / \partial z)^2 + ((1/r)(\partial S / \partial \theta))^2}}$$

Nous définissons les dérivées spéciale d'une fonction scalaire $q(r, \theta, z)$ comme suit :

$$dq = \frac{\partial q}{\partial r} dr + \frac{\partial q}{\partial z} dz + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \theta} (r d\theta) = \frac{\bar{\partial} q}{\partial r} dr + \frac{\bar{\partial} q}{\partial z} dz.$$

or

$$rd\theta = -\frac{(\partial S / \partial r) dr}{(1/r)(\partial S / \partial \theta)} - \frac{(\partial S / \partial z) dz}{(1/2)(\partial S / \partial \theta)} = -\frac{n_r}{n_\theta} dr - \frac{n_z}{n_\theta} dz.$$

En remplaçant et en identifiant terme à terme, dans la relation précédente nous obtenons :

$$\frac{\bar{\partial} q}{\partial r} = \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{n_r}{r n_\theta} \frac{\partial q}{\partial \theta}$$

$$\frac{\bar{\partial} q}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{n_z}{r n_\theta} \frac{\partial q}{\partial \theta}$$

ANNEXE B

TRANSFORMATION DES OPERATEURS DE DERIVATION

Les équations du problème physique étudié sont écrites sur le domaine réel. Cependant, l'approximation sur l'élément réel est souvent compliquée, nous utilisons systématiquement l'approximation sur l'élément de référence.

Toutes les expressions qui impliquent des dérivées en z, r sont transformées en dérivées en ξ, η grâce à la matrice de transformation dite *matrice jacobienne* $[J]$.

EXPRESSION DE LA MATRICE JACOBIENNE :

La matrice de jacobienne $[J]$ de la transformation isoparamétrique $(z, r) \rightarrow (\xi, \eta)$ est donnée par :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Pour l'élément quadratique à huit noeuds, les termes de $[J]$ sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \xi} = J_{11} &= 0.25(1-\eta)(2\xi+\eta)z_1 + \xi(1-\eta)z_2 + 0.25(1-\eta)(2\xi\eta)z_3 \\ &+ 0.5(1-\eta^2)z_4 + 0.25(1+\eta)(2\xi+\eta)z_5 + \xi(1+\eta)z_6 + 0.25(1+\eta)(2\xi-\eta)z_7 + 0.5(1-\xi^2)z_8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \xi} = J_{12} &= 0.25(1-\eta)(2\xi+\eta)r_1 + \xi(1-\eta)r_2 + 0.25(1-\eta)(2\xi-\eta)r_3 \\ &+ 0.5(1-\eta^2)r_4 + 0.25(1+\eta)(2\xi+\eta)r_5 + \xi(1+\eta)r_6 + 0.25(1+\eta)(2\xi-\eta)r_7 + 0.5(1-\xi^2)r_8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \eta} = J_{21} &= 0.25(1-\xi)(2\xi+\eta)z_1 + 0.5(\xi^2-1)z_2 - 0.25(1+\xi)(\xi-2\eta)z_3 \\ &- \eta(1+\xi)z_4 + 0.25(1+\xi)(\xi+2\eta)z_5 + 0.5(1-\xi^2)z_6 - 0.25(1-\xi)(\xi-2\eta)z_7 + \eta(\xi-1)z_8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \eta} = J_{22} &= 0.25(1-\xi)(2\xi+\eta)r_1 + 0.5(\xi^2-1)r_2 - 0.25(1+\xi)(\xi-2\eta)r_3 \\ &- \eta(1+\xi)r_4 + 0.25(1+\xi)(\xi+2\eta)r_5 + 0.5(1-\xi^2)r_6 - 0.25(1-\xi)(\xi-2\eta)r_7 + \eta(\xi-1)r_8 \end{aligned}$$

EXPRESSION DE LA MATRICE JACOBIENNE INVERSE :

la matrice de jacobienne inverse $[j]$ de la transformation isoparamétrique $(\xi, \eta) \rightarrow (z, r)$ est donnée par :

$$[j] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \xi}{\partial r} \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \end{bmatrix}$$

avec :

$$[j] = [J^{-1}] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

ou $\det [J] = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21}$

EXPRESSION DES DERIVEES PREMIERES :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix}$$

EXPRESSION DES DERIVEES SECONDES :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} \end{Bmatrix} = [T_1] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial r} \end{Bmatrix} + [T_2] \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix}$$

La matrice $[T_2]$ est une matrice (3×2) dont les éléments sont construits à partir des éléments de la matrice $[j]$.

$$[T_2] = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & 2j_{11}j_{12} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & 2j_{12}j_{21} \\ j_{11}j_{21} & j_{12}j_{22} & (j_{11}j_{22} + j_{12}j_{21}) \end{bmatrix}$$

La matrice $[T_1]$ est définie par :

$$[T_1] = -[T_2][C_1][j]$$

où

$$[C_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{11}}{\partial \xi} & \frac{\partial J_{12}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial J_{21}}{\partial \eta} & \frac{\partial J_{22}}{\partial \eta} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial J_{11}}{\partial \eta} + \frac{\partial J_{21}}{\partial \xi} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial J_{12}}{\partial \eta} + \frac{\partial J_{22}}{\partial \xi} \right) \end{bmatrix}$$

Noeud	N	$\partial N / \partial \xi$	$\partial N / \partial \eta$	$\partial^2 N / \partial \xi^2$	$\partial^2 N / \partial \eta^2$	$\partial^2 N / \partial \xi \partial \eta$
1	$-0.25 (1-\xi) (1+\eta) (1+\xi -\eta)$	$0.25 (2\xi-\eta) (1+\eta)$	$-0.25 (1-\xi) (\xi-2\eta)$	$0.5(1+\eta)$	$0.5(1-\xi)$	$-0.25 (1-2\xi+2\eta)$
2	$0.5 (1-\xi^2) (1+\eta)$	$-\xi (1+\eta)$	$0.5 (1-\xi^2)$	$-(1+\eta)$	0	$-\xi$
3	$-0.25 (1+\xi) (1+\eta) (1-\xi -\eta)$	$0.25 (2\xi+\eta) (1+\eta)$	$0.25 (1+\xi) (\xi+2\eta)$	$0.5(1+\eta)$	$0.5(1+\xi)$	$+0.25 (1+2\xi+2\eta)$
4	$0.5 (1+\xi) (1-\eta^2)$	$0.5 (1-\eta^2)$	$-(1+\xi) \eta$	0	$-(1+\xi)$	$-\eta$
5	$-0.25 (1+\xi) (1-\eta) (1-\xi +\eta)$	$0.25 (2\xi-\eta) (1-\eta)$	$-0.25 (1+\xi) (\xi-2\eta)$	$0.5 (1-\eta)$	$0.5(1+\xi)$	$-0.25(1+2\xi-2\eta)$
6	$0.5 (1-\xi^2) (1-\eta)$	$-\xi (1-\eta)$	$-0.5 (1-\xi^2)$	$-(1-\eta)$	0	ξ
7	$-0.25 (1-\xi) (1-\eta) (1+\xi +\eta)$	$0.25 (2\xi+\eta) (1-\eta)$	$0.25 (1-\xi) (\xi+2\eta)$	$0.5(1-\eta)$	$0.5(1-\xi)$	$0.25 (1-2\eta)$
8	$0.5 (1-\xi) (1-\eta^2)$	$-0.5 (1-\eta^2)$	$-(1-\xi) \eta$	0	$-(1-\xi)$	$+\eta$

Les fonctions de formes et leurs dérivées .

ANNEXE C

CALCUL DES CARACTERISTIQUES DU FLUIDE

C.1 NOMBRE DE MACH RELATIF :

Le nombre de Mach relatif est donné par la relation suivante :

$$M = \frac{W}{a} \quad (c.1)$$

avec W la vitesse relative .

C.2 VITESSE DU SON :

La vitesse du son est défini par :

$$a = \sqrt{\gamma R T}$$

$$a = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad (c.2)$$

C.3 CALCUL DE LA DENSITE :

La masse volumique se déduit à partir de la conservation de la rothalpie (I) (pour un écoulement stationnaire) le long d'une ligne de courant dans le canal . Ceci implique qu'entre un point "0" qui caractérise l'état du fluide en amont (I_0) et un point où on veut calculer la masse volumique ρ , on a :

$$I = I_0 \quad (c.3)$$

$$\text{avec } I = h + \frac{V^2}{2} - \omega r V_\theta \quad (c.4)$$

$$\text{et } h = \frac{a^2}{\gamma - 1}$$

Après substitution de (c.4) dans (c.3), on aura :

$$h + \frac{V^2}{2} - \omega r V_\theta = h_0 + \frac{V_0^2}{2} - \omega r_0 V_\theta^0$$

ce qui donne

$$h = h_0 + \omega (r V_\theta - r_0 V_\theta^0) + \frac{1}{2} (V_0^2 - V^2) \quad (\text{c.5})$$

et d'après l'équation d'état, on a :

$$\frac{h}{h_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}$$

et
$$h = h_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}$$

on remplace l'expression de h dans (c.5), on obtient :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2a_0^2} \left\{ V_\theta^0 - V_\theta + 2\omega (r_0 V_\theta^0 - r V_\theta) \right\}$$

la condition en amont font que V_θ^0 , ainsi on a :

$$M_0^2 = \frac{V_0^2}{a_0^2}$$

avec : M_0 : le nombre de Mach en amont .

a_0 : la vitesse du son à l'arrêt .

$V_0 = W_{z0}$.

on obtient l'expression qui donne la densité ρ en tout point du canal :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \left\{ 1 - \frac{V^2 - 2\omega r V_\theta}{V_0^2} \right\} \quad (\text{c.6})$$

C.4 RAPPORT DE PRESSION :

d'après l'équation d'état on a :

$$\frac{P}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma} \quad , \quad \frac{P_0}{\rho_0} = \frac{a_0^2}{\gamma} \quad (c.7)$$

ce qui donne:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{a^2}{a_0^2} \frac{\rho_0}{\rho} \quad (c.8)$$

on déduit le rapport de pression :

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (c.9)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [8]- **P.E. ALLAIRE**
Basics of the Finite Element Method. Solid Mechanics, heat transfer and fluid mechanics..
Wm,C,Brown Publishers, IOWA 1985
- [9]- **C.A.J. FLETCHER**
Computational Techniques for Fluid Dynamics.
Spring-Versag-Berlin. Second Edition . VOL I,II . 1991
- [10]- **O.C. ZIENKIEWICZ**
The Finite Element Method,
Mc GRAW- HILL , New York , 4th édition , 1991
- [11]- **O.C. ZIENKIEWICZ**
The Finite Element Method in Engineering Science.
Graw - Hill , New York , 3rd édition, 1977
- [12]- **F. ANGRAND et J. ERHEL**
Simulation par Eléments Finis d'Écoulements Compressibles sur Calculateurs Vectoriels.
INRIA. Rapport de Recherche N° 622 Février 1987
- [13]- **H. STEVE**
Méthodes Implicites Efficaces pour la résolution des équations d'EULER en éléments finis.
INRIA, Rapport de Recherche N° 779, Décembre 1987
- [14] **F. EL-DABAGHI**
Vecteur de Courant et Fluides Parfaits en Aerodynamique Numérique tridimensionnelle.
Thèse de 3ème cycle , Univ. PARIS-NORD 1984
- [15]- **W. D. Mc NALLY et P. M. SOCKOL**
REVIEW. Computational Methods For Internal Flows With Emphasis on Turbomachinery.
A.S.M.E. journal of Fluids Engineering . vol. 107 , march 1985, p 6-22
- [16]- **H.U. AKAY et A. ECER**
Transonic Flow Computations in Cascades Using Finite Element Method.
A.S.M.E. ,paper N° 81-GT-4, December 1980

