

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

3/95

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

METHODE PSEUDO-INSTATIONNAIRE
POUR LE CALCUL D'UN
ECOULEMENT TRANSSONIQUE

Proposé par :
Mr.M.BOUDJEMAA

Etudlé par :
F.AZOU
K.BOURABA

Dirigé par :
Mr.M.BOUDJEMAA

PROMOTION
1994-1995

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

GENIE-MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

METHODE PSEUDO-INSTATIONNAIRE
POUR LE CALCUL D'UN
ECOULEMENT TRANSSONIQUE

Proposé par :
Mr. M. BOUDJEMAA

Etudié par :
F. AZOUI
K. BOURABA

Dirigé par :
Mr. M. BOUDJEMAA

PROMOTION
1994-1995

الإهداء

إلى أمي وأخي العزيزين الذين جهدا
في رعايتي وتعليمي، إلى جدتي العزيرة
"عشانة" أمي الثانية،
إلى كل إخوتي وأخواتي وجميع العائلة من قريب
ومن بعيد إلى كل أساتذتي في جميع الأطوار
وأصدقائي الذين عرفتهم إلى كل من أحبهم
قلبي.
أهدي هذا العمل المتواضع.

القائم -

الإهداء

إلى أي الحنون.
إلى أي الكريم
إلى جميع إخواني إلى خالي مسعود
إلى صديقي العزيز جمال.
إلى كافة الأقارب إلى كل أساتذتي
وإلى أصدقائي الذين عرفتهم
أهدي هذا العمل المتواضع.

كمال

REMERCEMENTS

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre promoteur Monsieur M. Bourjemaâ pour l'aide précieuse qu'il nous a apportée et pour les conseils qu'il nous prodigués pour la mise en oeuvre de ce projet de fin d'étude, on le remercie vivement.

Et nous remercions également tous nos collègues, et tous ceux qui nous ont aidés dans notre travail.

D'autre part nous remercions, les Messieurs membres du jury.

الموضوع: طريقة مباشرة (شبه لامستقرة) لحساب أنسياب عبر صوتي

الملخص

الهدف من هذا العمل هو تطبيق طريقة مباشرة (شبه لامستقرة) لتصميم مقطع ريشة عجلة آلة ترمينية في حالة أنسياب عبر صوتي ثنائي البعد لمائع مثالي.

Sujet: Méthode Pseudo-instationnaire Pour le Calcul D'écoulement Transsonique

Résumé:

L'objet de ce travail est l'application d'une Méthode directe (Pseudo-instationnaire) Pour la conception d'un profil d'aube d'une roue de turbomachine en écoulement transsonique bidimensionnel d'un fluide parfait compressible.

Subject: Pseudo-insteady Method For a Transonic Flow Calculation .

Abstract:

This work aims at applying a direct method for the design of turbomachine wheelblade profil in a bidimesionnal transonic flow of a perfect compressible fluid .

ABREVIATIONS :

Dans notre mémoire on a utiliser les notations données ci-dessous et quelques autres seront définis dès leur apparition .

- V : vitesse absolue .
- x,y: coordonnées cartésiennes .
- m,n: coordonnées curviligne .
- h(x): l' espace entre deux parois du canal .
- ρ : densité .
- S : entropie .
- M: nombre de mach .
- R : constante de gaz .
- β : angle d'attaque .
- γ : rapport du chaleur spécifique .
- dt : pas du temps .
- t : temps .
- h : enthalpie spécifique .
- h_0 : enthalpie totale .
- P : pression statique .
- P_0 : pression totale .
- h_v : hauteur de la veine .
- a : vitesse du son .
- ν : viscosité artificielle .
- j : jacobien .
- Δ :opérateur de laplace .

Table des Matiers

Remerciements

Introduction générale.....	2
----------------------------	---

Chapitre I

Principaux Modèles D'écoulement Dans Les Turbomachines.

I.1 Introduction.....	6
I.2 Description physique succincte de L'écoulement dans Une Turbomachine.....	6
I.3 Equation caractérisant l'écoulements à travers une turbomachines	6
I.4 Hypothèses Simplificatrices Fondamentales.....	8
I.4.1 Hypothèse de localisation des effets de la viscosité	8
I.4.2 Hypothèses de l'écoulement instationnaire.....	9
I.4.3 Décomposition de l'écoulement tridimensionnel.....	9
I.5 conclusion.....	10

Chapitre II:

Méthode directe (pseudo-instationnaire)

II.1 Introduction	12
II.2 Formulation du problème	13

conclusion générale..... 46

Références Bibliographiques..... 48

ANNEXES:

Annexe A:

Equation de l'écoulement à travers une
turbomachine (cas d'un repère mobile)..... 51

Annexe B:

Analyse de la stabilité des schémas
aux différences finis..... 57

Annexe C:

Recherche systématique des discontinuités
Relation de (rankine-hugoniot) 61

Annexe D:

Traitement numérique des ondes de choc
(notion de Viscosité artificielle)..... 68

الدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION:

Dans la conception assistée par ordinateur (C.A.O), celui-ci joue souvent le rôle d'un outil, très efficaces, utilisé en tant que simulateur numérique des phénomènes physiques, et permettant l'analyse d'une situation correspondant à une certaine configuration d'un prototype.

Cet usage du calculateur ou celui-ci n'intervient pas dans la conception même du prototype, consiste à résoudre ce que l'on appelle un problème direct.

A l'opposé, lorsque le calculateur intervient dans le dimensionnement du prototype, en réponse à telle ou telle spécification le problème traité est alors inverse [ref: 1]

De nombreuses méthodes numériques ont été développées permettant le calcul d'écoulements non visqueux subsonique ou supersonique. Ce n'est que assez récemment que sont apparues des méthodes réellement satisfaisantes de calcul d'écoulement transsonique, c'est-à-dire un domaine partagé en zones d'écoulement supersonique et subsonique aux quelles correspondent respectivement des équations de types hyperbolique et elliptique, les frontières entre ces deux types de région n'étant pas connue à priori en raison du caractère non linéaire du problème [ref:2].

Les méthodes numériques couramment utilisées pour le calcul d'un écoulement transsonique pour un fluide idéal peuvent être regroupées dans deux catégories :

La première est les méthodes instationnaires, ce type de méthodes, initialement introduites par *MAGNUS et YOSHIARA* [ref: 1], une des méthodes les plus connue en France développée par *MEAUZE*; consiste à utiliser les équations d'EULER sous forme instationnaire, c'est-à-dire de type hyperbolique par rapport au temps dans tous le champs de calcul quelque soit la valeur du nombre de Mach local, et à obtenir asymptotiquement l'état stationnaire comme solution limite de ces équations pour des grandes valeurs du temps. Ces méthodes de calcul été appliquées aux grilles d'aubes par différents auteurs : *S.GOPALAKRISHAN* et *R.BOZZOLA* utilisent des schémas aux différences finis, *W.BOWLEY* et *J.PRINCE* d'une part, et *P.W.MACDONALD* d'autre part, discrétisent des équations mises sous forme intégrale, *R.A.DELANEY* et *P.KAVANAGH* mettant en oeuvre une méthode de caractéristiques instationnaires [ref: 3].

La deuxième c'est pour les méthodes de relaxation, dans les quelles les équations sont indépendantes du temps. D'autres approches existent telle que la méthode des éléments finis et la méthode spectrale qui peuvent donner des solutions satisfaisantes [ref: 4].

Le travail qui fait l'objet du présent mémoire a pour thème principale **"L'APPLICATION DE LA METHODE PSEUDO-INSTATIONNAIRE POUR LE TRACE DE PROFIL D'AUBAGE EN ECOULEMENT TRANSSONIQUE"**

En connaissant la distribution du profil, les caractéristiques peuvent être déterminées selon une modélisation spécifique.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté les modèles couramment utilisés pour la description des écoulements dans les turbomachines.

Le deuxième chapitre concerne la méthode pseudo-instationnaire qui a pour but de présenter les modèles mathématique et numérique de la méthode ainsi que les conditions aux limites choisies.

Les applications de la méthode pseudo-instationnaire pour le tracé du profil d'aubage sont présentées au troisième chapitre.

CHAPITRE I

Principaux Modèles D'écoulement Dans Les Turbomachines

I-1 INTRODUCTION :

I-2 DESCRIPTION PHYSIQUE SUCCINCTE DE L' ECOULEMENT DANS UNE TURBOMACHINES :

A travers une turbomachine un échange d'énergie est effectué entre un fluide en mouvement et un arbre en rotation . Par l'intermédiaire d'un ensemble d'aubage mobiles , au cours de cet échange l'énergie du gaz se transforme d'une énergie potentielle en une énergie cinétique ou inversement .

L'énergie mise en jeu peut être apportée par un organe extérieur , généralement un moteur (compresseur) ou par un fluide (turbine) .

Au cours du processus d'échange d'énergie entre le fluide et les parties tournantes de la machines on impose à l'écoulement des déflections , accélérations et diffusions à travers les passages limités par des parois aubages du moyeu et du carter externe , ces parois ne présentent pas en général une forme simple , ainsi l'écoulement est donc de type interne , tridimensionnel et très complexe .

De plus , l'écoulement est instationnaire (périodique dans le temps) , bien souvent , il est compressible et comporte des domaine limités par des ondes de choc . il est également soumis aux effets de viscosité , qui sont de caractère dissipatif , en raison des forts gradients de vitesse au voisinage des parois .

A fin de pouvoir résoudre un certain nombre de cas , il est nécessaire d'effectuer des hypothèses simplificatrices conduisant à des modèles utilisables en pratique .

I-3: EQUATIONS CARACTERISANT L' ECOULEMENT A TRAVERS UNE TURBOMACHINE :

L'écoulement à travers une turbomachine obéit aux équations de *NAVIER-STOKES* instationnaires qui peuvent être représenter dans le repère relatif comme suit

l'équation de continuité donne:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (\text{I-1 a})$$

l'équation de quantité de mouvement donne :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grād}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V} \wedge \text{rot } \vec{V} + \Gamma_e + \Gamma_c + \frac{1}{\rho} \text{grād} P + \frac{1}{\rho} \vec{F}_f = 0 \quad (\text{I-1 b})$$

l'équation d'énergie donne :

$$T \text{grād} S = \text{grād} h - \frac{1}{\rho} \text{grād} P \quad (\text{I-1 c})$$

Les principaux termes représentés dans ces équations étant :

\vec{V} : vitesse absolue de l'écoulement par rapport au repère choisi .

\vec{F}_f : terme global représentant les forces visqueuses (dissipatif)

(Γ_e), (Γ_c) représentent respectivement les termes d'accélération d'entraînement et de coriolis , intervenant dans le cas d'un repère mobile .

$$\Gamma_e = -\vec{\omega}^2 \cdot r \quad \Gamma_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{V}$$

$\vec{\omega}$: étant le vecteur rotation parallèle à l'axe de rotation .

V, P, T, S représentent respectivement la vitesse, la pression la température et l'entropie .

Ces équation principales peuvent s'écrire sous la forme suivante [ref : 5]
(les calcul correspondantes étant exposés en annexe A)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{V} - \frac{\vec{V}}{a^2} \text{grād} \left(\frac{V^2 + \omega^2 r^2}{2} \right) - \frac{\vec{V}}{R} \text{grād} S = 0 \quad (\text{I-2 a})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \vec{V} \wedge \text{rot } \vec{V} = T \text{grād} S - \text{grād} I + \frac{\vec{F}_f}{\rho} \quad (\text{I-2 b})$$

$$\vec{V} \cdot \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad } I \right) = 0 \quad (I-2 c)$$

tel que $I = H_0 - \omega^2 \cdot r^2 / 2$ (H_0 étant l'enthalpie totale relative)
est la rothalpie qui joue le même rôle que l'enthalpie totale dans le cas du repère fixe

I-4 HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES FONDAMENTALES :

Les hypothèses ayant permis de définir des modèles pratiquement utilisables sont :

- hypothèse de localisation des effets de la viscosité .
- hypothèse de l'écoulement instationnaire.
- décomposition de l'écoulement tridimensionnel en écoulement plus simples bidimensionnels.

I-4-1 HYPOTHESE DE LOCALISATION DES EFFET DE LA VISCOSITE :

L'hypothèses correspondante consiste à supposer que les effets de viscosité et de conductivité ne sont sensibles que dans une couche d'épaisseur limitée le long des parois de la veine et des profils d'où le concept de couche limite [ref: 6].

Le modèle ainsi proposé simplifier énormément l'écoulement qui est alors supposé non visqueux hors du voisinage immédiat des parois . En pratique cela est valable dans la mesure où les gradients des vitesse et des température suivant la direction normale à celle de l'écoulement restent faibles.

Si la validité de ce modèle doit être limitée, il est cependant difficile de s'en affranchir, en l'état actuel des connaissances.

I-4-2 HYPOTHESE DE L'ÉCOULEMENT INSTATIONNAIRE :

Plusieurs méthodes de calcul d'écoulement autour de profil d'aubage reposent sur cette hypothèse, sur le plan expérimentale on peut citer la grille plan par exemple.

Bien que l'écoulement à l'entrée d'une turbomachine est généralement uniforme et instationnaire, l'écoulement interne présente des fluctuations dues au mouvement relatif entre les pâles voisines (sillage) et aux instabilités tourbillonnaires (écoulement secondaire) qui se superposent à l'écoulement moyen et diminuent l'efficacité de transfert d'énergie et génèrent des bruits dont le contrôle est très important dans le domaine de la propulsion aéronautique.

D'autres phénomènes apparaissent en s'éloignant des conditions d'adaptation tels que : le décrochage tournant, le pompage et les ondes de choc dans le cas des compresseur transsonique.

Si cette hypothèse paraît, raisonnable, son domaine de validité par contre reste difficile à définir.

I-4-3 DECOMPOSITION DE L'ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL :

C'est l'une des techniques les plus utilisées actuellement pour approcher l'écoulement réel. Ce modèle a été développé par WU. Il consiste à considérer deux types d'écoulement bidimensionnel le long des surfaces de courant qui s'appuient respectivement sur des cercles centrés sur l'axe (surface S1) et sur des rayons perpendiculaires à l'axe (surface S2).

Nous n'allons pas nous attarder dans l'exposé de cette méthode car elle a fait l'objet de plusieurs mémoires de fin d'étude au cours des années précédentes [ref : 7].

I-5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, trois hypothèses principales, généralement obtenues pour décrire et étudier l'écoulement dans les turbomachines ont été rappelées.

La première de ces hypothèses porte sur la localisation des effets de la viscosité dans l'écoulement, autrement dit sur la possibilité d'utiliser les modèles de couches limites pour décrire l'écoulement au voisinage des parois.

L'hypothèse suivante concerne la possibilité de représenter et d'étudier l'écoulement réel à l'aide d'un modèle stationnaire.

Le principe de la décomposition de l'écoulement tridimensionnel plus simple, un modèle toujours largement utilisé à l'heure actuelle.

Nous avons noté au début de l'introduction que le but de ce travail était le calcul direct appliqué à une géométrie réaliste et de considérer la méthode inverse comme méthode correctrice, la comparaison des résultats directs et inverses aurait été plus significative.

La présentation de la méthode directe sera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE II

*Méthode directe
(pseudo-instationnaire)*

II-1 INTRODUCTION :

Au cours du chapitre précédant on a exposé quelques notions de la turbomachinerie ainsi que leur domaine d'application.

Il est en effet rendu difficile de tenir compte des conditions de périodicité de l'écoulement en amont et en aval des aubages . Pour cette raison , il est indispensables d'utiliser le calcul semi-inverse : l'une des études déjà élaborée [ref:8] , d'où la nécessité de l'associer avec le calcul directe dans un processus itératif j'usqu'a atteindre une forme satisfaisante du profil .

Pour cela il existe plusieurs approches , les seulsméthodes largement utilisés sont les méthodes instationnaires [ref:9].

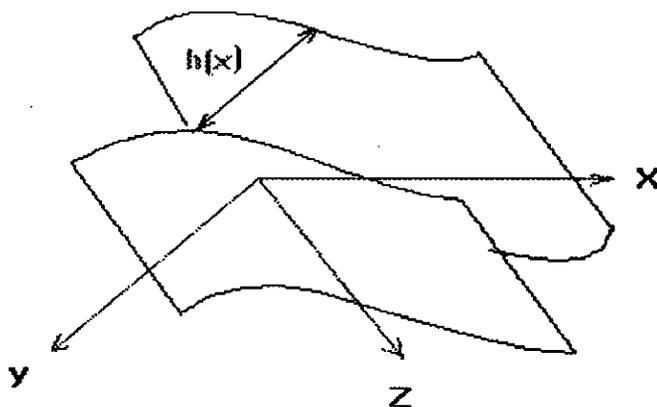
Dans ce chapitre , nous allons nous intéresser à la méthode de calcul pseudo-instationnaire pour les écoulements transsoniques , la difficulté du problème du point de vue mathématique consiste à résoudre un problème de type mixte (hyperbolique-elliptique).

Le schéma aux différences finis retenu est de type prédicteur-correcteur ; il permet le calcul des ondes de choc par une méthode de viscosité artificielle [ANNEXE :D].

II-2- FORMULATION DU PROBLEME :

II-2-1- EQUATION DE MOUVEMENT :

On supposera ici que l'écoulement s'effectue dans un plan contenant les axe OX et OY disposées symétriquement entre deux parois espacées d'un intervalle $h(x)$ (fig. II-1)



(fig .II-1)

posant $\omega(x)=\log(h(x)/h(0))$ définissant le coefficient de contraction de la veine , les équations de l'écoulement supposé isoénergétique ; stationnaire ; non visqueux s'écrivent sous les formes suivantes :

$$\operatorname{div} (\rho \vec{V}) + \rho \cdot u \cdot \frac{d \omega}{d x} = 0 \quad (\text{II-1a})$$

$$\vec{V} \wedge \operatorname{rot} \vec{V} + T \operatorname{grad} S = 0 \quad (\text{II-1b})$$

$$\operatorname{grad} . S \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{II-1c})$$

$$H_{01} = \frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{V_0^2}{\gamma - 1} \quad (\text{II-1d})$$

$$a^2 = \frac{\gamma \cdot P}{\rho} \quad (\text{II-1e})$$

$$\frac{S}{r} = \frac{\ln\left(\frac{P}{\rho \cdot \gamma}\right)}{\gamma - 1} \quad (\text{II-1f})$$

V: vecteur vitesse .

u: composante de V suivant OX .

a: célérité du son .

T, ρ , S, P sont respectivement température ; densité ; entropie ; et pression .

D'autres auteurs [ref:2] ont mis une corrélation entre le coefficient de contraction de l'écoulement et les performances maximale de la grille $\rho_1 U_{x1}$ et $\rho_2 U_{x2}$ désignant respectivement les composantes du débit de l'écoulement en amont et aval, mesurés à mi-hauteur d'aube.

$$\bar{\omega} = \frac{\rho_1 U_{x1}}{\rho_2 U_{x2}} < 1 \quad (\text{II-2})$$

Ce coefficient mesure la convergence de l'écoulement à travers les aubages, soit en raison de la convergence des parois latérales (cas d'un rotor par exemple) ou du développement des couches limites le long de ces parois .

Les expériences ont montré, que ce coefficient est généralement, supérieur dans le cas de la grille plane à celui obtenue en rotor ; mais on constate que si l'on peut rendre ces valeurs identiques dans les deux types d'écoulement, les performances coïncident.

Il paraît donc absolument nécessaire de se donner un moyen d'agir sur le coefficient de contraction .

On constate aussi que ce coefficient permet de rendre compte des phénomènes tridimensionnels dans le modèle bidimensionnel.

L'écoulement dans une grille de turbomachine (fig. II-2) est décrit par les équations d'EULER en tenant compte des termes instationnaires qui s'écrivent sous la forme suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + f \cdot \frac{u}{h} \cdot \frac{dh}{dx} = 0 \quad (\text{II-3a})$$

où on désigne :

$$f = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \cdot u \\ \rho \cdot v \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho \cdot u \\ P + \rho \cdot u^2 \\ \rho \cdot u \cdot v \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho \cdot v \\ \rho \cdot u \cdot v \\ P + \rho \cdot v^2 \end{pmatrix} \quad (\text{II-3 b})$$

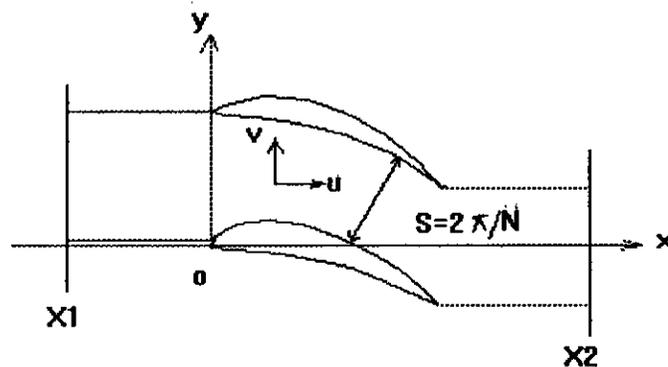
où ρ étant la densité du fluide, u et v les composantes de la vitesse suivant x et y ; P sa pression statique et H_0 son enthalpie totale liée aux précédentes quantités par l'équation de BERNOULLI.

$$H_{01} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \quad (\text{II-3 c})$$

L'enthalpie spécifique h est en fonction de la pression P et la densité ρ :

$$h = h(p, \rho) \quad (\text{II-3d})$$

Ces quatre équations (II-3) où n'interviennent que les variables t, x, y pour les inconnues ρ, u, v et P régissent l'écoulement bidimensionnels de grille sur chaque ligne de courant.



(fig. II-2)

Il est nécessaire de souligner que le caractère instationnaire des équations (II-3a) est introduit comme un artifice de calcul dans le but est rendre ces équations de type hyperbolique dans tout le champ de l'écoulement et en conséquence de ne pas avoir à utiliser qu'un seul schéma de discrétisation dans tout le domaine de calcul .

Pour diminuer le temps de calcul dont l'importance constitue l'inconvénient majeur des méthodes instationnaires . il est donc possible comme l'a fait H.VIVAND [ref:10] d'avancer que l'enthalpie totale est uniforme et indépendante du temps .

Cette simplification est en fait consistante avec l'écoulement stationnaire recherché dans le cas d'un fluide parfait dont l'enthalpie totale est uniforme à l'amont .

II-2-2 TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES :

La formulation des conditions initiales et des conditions aux limites permettent, d'assurer l'existence, l'unicité et la continuité, par rapport aux données initiales et aux limites de la solution des équations (II-3a) ; est constitué un problème mathématique d'une grande difficulté qui n'a pas encore été résolu dans toute sa généralité.

Certains résultats peuvent toute fois être énoncés en considérant le caractère hyperbolique du système d'équations (II-3a) qui se traduit par l'existence d'un domaine de dépendance pour chaque point du domaine de calcul .

II-2-2-1 Condition initiales :

A l'instant $t=0$, les composantes du vecteur \vec{f} sont données arbitrairement, en considérant, toutefois une attribution des valeurs vérifiant les conditions aux limites décrites au paragraphe suivant, et suffisamment continue pour éviter l'apparitions, aux instants ultérieurs, de ligne de discontinuité non significatives.

II-2-2-2 Conditions Aux Limites :

A)- CONDITION DE GLISSEMENT :

On applique cette condition de glissement sur l'extrados et l'intrados des aubes . Si $y=Y(x)$ représente l'équation de l'intersection d'une aube avec la ligne de courant $\Psi = cte$ de l'écoulement cette condition s'écrit sous la forme:

$$V = U \cdot \frac{dY(x)}{dx} \Big|_{y=Y(x)} \quad (II-4)$$

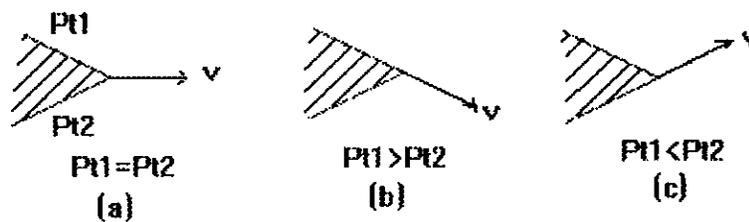
B)- CONDITION DE PERIODICITE :

Elle est imposée à l'amont et l'aval du canal inter-aubes la solution stationnaire recherchée étant périodique par rapport à la variable y de période : $S=2\pi/N$ où : S est le pitch et N le nombre d'aubes de la grille considérée . cette condition sera imposé en régime transitoire , soit :

$$f(x,y,t) = f(x,y+S,t) \quad (\text{II-5})$$

C)- CONDITION DE KUTTA-JOUKOWSKY :

Dans le cas où l'écoulement sur l'extrados et l'intrados d'une même aube ont des pressions totales identiques on imposera à l'écoulement confluent au bord de fuite, d'avoir la direction de la bissectrice du dièdre formé par le bord de fuite de l'aube (fig. II-3a) ; dans le cas contraire, par exemple, dans le cas où un choc d'intensité variable se développe dans le canal inter-aube, l'écoulement confluent sera tangent au côté du dièdre où la pression totale est la plus élevée (fig. II-3b et 3c) .



(FIG.II.3)

D) -CONDITIONS A L'INFINI AMONT ET AVAL :

Le domaine de calcul s'étant théoriquement de l'infini amont à l'infini aval, est pratiquement limité par deux plans perpendiculaires à l'axe de la machine et des cotes : $x = X_1$ et $x = X_2$ (fig. II-2 -) .

Dans le cas où les chocs intenses existent dans le canal inter-aube . La théorie des caractéristiques pour les équations hyperboliques montre que le nombre et la nature des conditions aux limites sur les frontières amont et aval ne sont pas arbitraire .

Cette analyse a montrée que pour un nombre de Mach axial ($M_1 \cos \alpha_1$) supérieur à l'unité le domaine de dépendance d'un point P'_1 de la frontière amont par exemple, à l'instant $t = t_0 + \Delta t$; étant entièrement à l'extérieur du domaine de calcul (fig. II-4b).

Les différentes variables n'y sont donc pas connues, il est clair que toutes les caractéristiques de l'écoulement doivent être imposées; en revanche, dans le cas où ($M_1 \cos \alpha_1 < 1$); ce domaine de dépendance étant partiellement à l'intérieur du domaine de calcul (fig. II-4a) et quelques caractéristiques de l'écoulement peuvent être déterminées par les grandeurs calculées à l'instant $t_1 = t_0$.

En ce qui concerne la frontière aval ($x=x_2$), les considérations analogues permettent de parvenir aux conclusions suivantes :

Dans le cas où ($M_2 \cos \alpha_2 > 1$), le domaine de dépendance d'un point p'_2 à l'instant $t = t_2 + \Delta t$, est entièrement à l'intérieur du domaine de calcul, toutes les grandeurs doivent donc être calculées dans le cas contraire le domaine de dépendance du point p'_2 coupe la frontière $x = x_2$, il n'est pas donc possible de calculer toutes les grandeurs et certaines d'entre elles doivent être imposées.

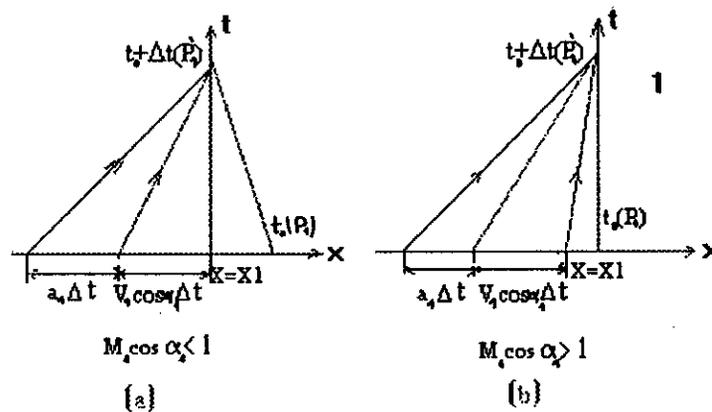
Dans le cas pratique, le Mach axiale est le plus souvent inférieur à l'unité à l'amont comme à l'aval [ref:3].

Nous avons donc retenu que les résultats qualitatifs suivantes :

i) - sur la frontière ($x = x_1$), On fixe la pression totale P_{01} , la température totale T_{01} (imposée puisque $H_0 = Cte$).

Une autre caractéristique de l'écoulement qui peut être soit la direction de la vitesse (α_1) soit le nombre de Mach (M_1), le débit résulte alors du calcul.

ii) - sur la frontière aval ($x = x_2$) la pression statique (p_2) est imposée.



(FIG. II.4)

II-3- METHODE NUMERIQUE :

L'intégrations numérique des équation (II-3) est effectuée par une méthode aux différences finis utilisant un schéma explicite de type prédicteur - correcteur , la procédure générale pour résoudre le problème du calcul de l'écoulement transsonique est donnée de la façon suivante :

II-3-1- CHANGEMENT DE COORDONNEES :

La formulation des schémas au différences finis se trouve notablement simplifiée notamment en ce qui concerne le traitement des conditions aux limites lorsque ' on dispose d'un maillage rectangulaire et des frontières parallèles aux axes de coordonnées du plan physique(x,y) (fig. II-4 a), en un plan de calcul (X, Y) (fig II -4 b) à l'aide d'une transformation ponctuelle définie par :

$$\begin{cases} x = x(X, Y) \\ y = y(X, Y) \end{cases} \quad (II-6-a)$$

Les relation entre les dérivées partielles des deux systèmes de coordonnées sont :

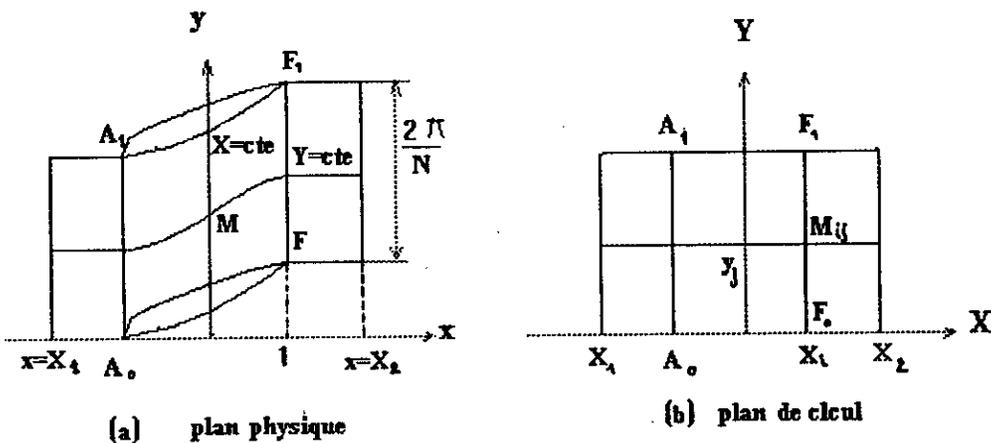
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (II-6-b)$$

La transformée inverse est :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{j} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial Y} & -\frac{\partial y}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{bmatrix} \quad (\text{II-6c})$$

avec j le jacobien de la transformation (II.6-a)

$$j = \frac{\partial x}{\partial X} \cdot \frac{\partial y}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \cdot \frac{\partial y}{\partial X}$$



(fig-II-5)

D'après la relation (II-6-c) , on peut exprimer les dérivées partielles de (II-3-a) dans le plan de calcul (X, Y) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial X} - \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial F}{\partial Y} \right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{j} \left(-\frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial G}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial Y} \right)$$

D'où l'équation (II-3-a) devient :

$$J \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial y}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial X} - \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial F}{\partial Y} \right) + \left(\frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial G}{\partial X} \right) = J \cdot H(u) \quad (\text{II-7})$$

avec $H(u)$ est le seconde membre de l'équation (II-3 a)

$$H(u) = -f \cdot \frac{u}{h} \cdot \frac{dh}{dx}$$

II-3-2- DISCRETISATION DES EQUATIONS (II-7) :

On définit dans le domaine de calcul du plan (X, Y) un maillage carré dont les noeuds M_{ij} ont pour coordonnées X_i, Y_j . L'approximation de $f(x, y, t)$ à l'instant $t = n \cdot \Delta t$ et au point de discrétisation M_{ij} sera notée : \bar{f}_{ij}^n

II-3-2-1-Discretisation Au Point M_{ij} Interieur Au Domaine De Calcul

Le schéma utilisé comporte les trois étapes suivantes :

A)- CALCUL DU PREDICTEUR : \bar{f}_{ij}^{*n+1}

Connaissant f_{ij}^n on calcule une première approximation de $\bar{f}_{ij}^{n+1} : \bar{f}_{ij}^{*n+1}$

en utilisant les différences avancées pour approcher les dérivées d'espace :

$$\bar{f}_{ij}^{*n+1} = \bar{f}_{ij}^n + \Delta t \cdot \bar{H}_{ij}^n + A_{ij}^n \left[\left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial Y} \right)_{ij} (\bar{F}_{i+1,j}^n - \bar{F}_{ij}^n) - \left(\frac{\partial y}{\partial X} \right)_{ij} (\bar{F}_{i,j+1}^n - \bar{F}_{ij}^n) \right\} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial x}{\partial X} \right)_{ij} (\bar{G}_{i,j+1} - \bar{G}_{ij}) \right]$$

(II-8a)

Où les coefficients A_{ij}^n sont définis par : $A_{ij}^n = - \frac{\Delta t}{\Delta} \cdot \frac{1}{J_{ij}}$

(l'indice supérieur n, rappelant que le pas de temps est susceptible de varier au cours des itérations) et où la notation \bar{H}_{ij}^n désigne $\bar{H}(\bar{f}_{ij})$

B)- CALCUL DU CORRECTEUR : \bar{f}_{ij}^{*n+1}

La valeur \bar{f}_{ij}^{*n+1} est en suite corrigée en utilisant, cette fois des différences retardées pour approcher les dérivées d'espace :

$$\bar{f}_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\bar{f}_{ij}^n + \bar{f}_{ij}^{*n+1} + \Delta t \cdot \bar{H}_{ij}^{*n+1} + A_{ij}^n \left\{ \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial Y} \right)_{ij} (\bar{F}_{ij}^{*n+1} - \bar{F}_{i-1j}^{*n+1}) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\partial y}{\partial X} \right)_{ij} (\bar{F}_{ij}^{*n+1} - \bar{F}_{ij-1}^{*n+1}) \right\} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial x}{\partial X} \right)_{ij} (\bar{G}_{ij}^{*n+1} - \bar{G}_{ij-1}^{*n+1}) \right]$$

(II-8-b)

Le schéma ainsi limité à ces deux premières étapes est précis au second ordre et conditionnellement stable, c'est-à-dire que le pas d'espace Δt étant fixé, il existe une valeur maximum du pas de temps Δt au-delà de laquelle les calculs divergent rapidement (voir annexe A).

La détermination de cette condition de stabilité est abordée au paragraphe § (II-3-3) L'expérience montre toute fois que cette condition est bien souvent insuffisante pour assurer le bon déroulement des calculs, les oscillations apparaissent notamment dans les régions à fort gradients.

Il est alors nécessaire d'amortir ces oscillations par exemple par un procédé de lissage effectué à chaque itération.

C)- CALCUL D'UNE VALEUR LISSEE DU CORRECTEUR :

La valeur lissée du correcteur est obtenue par l'expression suivante :

$$(\bar{f}_y^{n+1})_{liss} = \bar{f}_y^{n+1} + \varepsilon(\bar{f}_{i+1,j}^{n+1} + \bar{f}_{i-1,j}^{n+1} + \bar{f}_{y+1}^{n+1} + \bar{f}_{y-1}^{n+1} - 4\bar{f}_y^{n+1}) \quad (\text{II-8 c})$$

Où ε : est un coefficient déterminé empiriquement de façon à obtenir un bon amortissement des oscillations sans détériorer excessivement la précision du calcul qui du seconde ordre, passe à l'ordre $0(\varepsilon \Delta)$, l'expression (II-8 c) peut être interprétée comme l'adjonction à l'équation (II-7) du terme dissipatif : $\varepsilon(\Delta^2 / \Delta t) \cdot \Delta \bar{f}$ où (Δ est l'opérateur de laplace dans le plan (X, Y)) et le coefficient $\nu = \varepsilon \Delta^2 / \Delta t$ comme un coefficient de viscosité artificielle.

II-3-2-2 Traitement particulier des points situé sur la frontière

du domaine de calcul :

Les points du maillage situés sur la frontière du domaine de calcul présentent les particularités suivantes :

1°) Le schéma numérique défini par les équations algébriques (II-8) ne peut y être appliqué strictement car il n'est pas possible d'utiliser des différences finis décentrées vers l'extérieur du domaine de calcul.

2°) - Les valeurs de \bar{f} en ces points doivent vérifier outre les équations (II-3) les conditions aux limites du paragraphe § (II-1-2-2) : c'est - à - dire que l'on dispose pour le calcul de \bar{f} , d'un nombre d'informations surabondant.

La technique utilisées pour remédier à ces difficultés est la suivante :

i)- Aux points du maillage situés sur la frontière, les équations (II-8-a) et (II-8-b) sont modifiées par l'emploi de différences finis systématiquement décentrées vers l'intérieur du domaine de calcul ; par exemple la dérivée $\partial F / \partial \bar{Y}$ sur la frontière $Y = 0$ ($i = j_0$) (fig. 4 - b) est approximée de la manière suivante :

* A l'étape du prédicteur (formule inchangée) :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{Y}} \right)_{j_0} = \frac{F_{j_0+1} - F_{j_0}}{\Delta Y}$$

* A l'étape du correcteur (formule modifiée) :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{Y}} \right)_{j_0} = \frac{-F_{j_0+2} + 3F_{j_0+1} - 2F_{j_0}}{\Delta Y}$$

Cette méthode utilisée par veuillot [ref :3] permet de conserver une précision du seconde ordre .

Pour les frontières amont $X = X1$ et aval $X = X2$, les formules de différences finis décentrées ont toute fois été conservées ; en effet , la précision bien que théoriquement du premier ordre seulement est en fait meilleure .

ii) - Les trois composantes du vecteur \bar{f} sont ainsi calculée par application du schéma, avec les modifications indiquées ; puis les valeurs obtenues sont lissées par une formule analogue à (II-8 c) mais unidimensionnelle (sur la frontière amont $X = X1$, toute fois les grandeurs sont supposées uniformes et égales aux moyennes arithmétiques des valeurs obtenues à l'étape du correcteur) .

Pour tenir compte des différentes conditions aux limites, les valeurs lissées sont alors modifiées comme suit :

A) - CONDITION DE GLISSEMENT :

La vitesse calculée par application du schéma en un point du profil de l'aubage n'est pas en général, tangente à celui-ci ; le procédé utilisé pour tenir compte de la condition de glissement consiste alors à annuler la composante de la vitesse normale au profil et à ne retenir que la composante tangentielle pour le calcul du pas de temps suivant ; si $u^{(1)}$ et $v^{(1)}$ et θ_p désignent respectivement les composantes méridienne et azimutale de la vitesse et la pente du profil, les composantes $u^{(2)}$ et $v^{(2)}$ retenues pour le calcul du pas de temps suivant ont pour expression :

$$\begin{cases} u^{(2)} = \frac{u^{(1)} + \operatorname{tg} \theta_p \cdot v^{(1)}}{\operatorname{tg}^2 \theta_p} \\ v^{(2)} = \operatorname{tg} \theta_p \cdot u^{(2)} \end{cases}$$

B) - CONDITION DE PERIODICITE :

Les composantes du vecteur \bar{f} sont calculées par le schéma sur les parties des frontières $Y = 0$ et $Y = 1$ situées en amont et en aval de l'aubage (fig II -5b) ; la condition de périodicité est alors appliquée en prenant comme valeur commune pour le calcul du pas de temps suivant, l'expression :

$$\bar{f}^{(2)}(X, Y = 0 \text{ ou } 1) = \frac{\bar{f}^{(1)}(X, 0) + \bar{f}^{(1)}(X, 1)}{2}$$

C) - CONDITION AMONT :

Dans le cas d'un nombre de Mach axial $M_1 \cos \alpha_1 < 1$ on se donne sur la frontière amont $X = X_1$ la pression totale P_{01} , la température totale (implicitement donnée) et une autre caractéristique de l'écoulement qui peut être soit la direction de la vitesse (α_1) soit la nombre de Mach (M_1).

Le débit qui n'est pas fixé par la données de ces quantités est alors déterminé de la façon suivante :

La valeur du débit à travers la section amont $X = X_1$ à la $(n+1)^{\text{ème}}$ itération est prise égale à celle du débit à travers une section $X = \text{cte}$ intérieur à l'aubage calculée à la $n^{\text{ème}}$ itération. Les composantes du \vec{f} sont entièrement déterminées.

D) - CONDITION AVAL :

Toujours dans le cas d'un écoulement axial subsonique, les composantes f_2 , f_3 du vecteur \vec{f} sont calculées par le schéma numérique; connaissant la pression statique aval (P_2) imposée comme condition aux limites sur la frontière aval $X = X_2$, on déduit f_1 de l'équation de l'énergie par la relation :

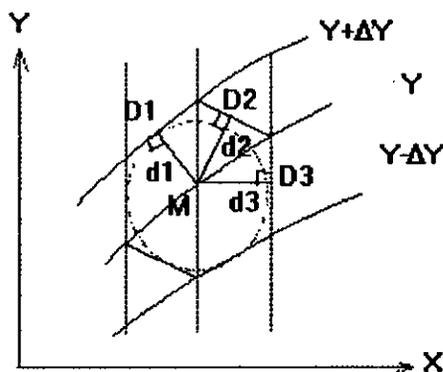
$$H_{01} \cdot f_1^2 - \frac{\gamma \cdot P_2}{\gamma - 1} f_1 - \frac{1}{2} (f_2^2 + f_3^2) = 0$$

On notera que cette équation du second degré admet toujours une et une seule racine positive.

II-3-3 - CRITERE DE STABILITE :

La condition de stabilité a été déterminée par application de la règle de Courant-Friedricks-Lewey (C.F.L) qui consiste à écrire que le domaine de dépendance physique d'un point M_{ij} du domaine de calcul est intérieur au domaine de dépendance numérique de ce point.

Le domaine de dépendance numérique d'un point M_{ij} peut être assimilé à un hexagone en approchant au voisinage du point M_{ij} les courbes coordonnées $X = \text{cte}$ et $Y = \text{cte}$ par des droites D_1, D_2, D_3 , etc. (fig. II-6a), en fait, pour simplifier, on remplace cet hexagone par le plus grand cercle inscrit de centre M_{ij} .



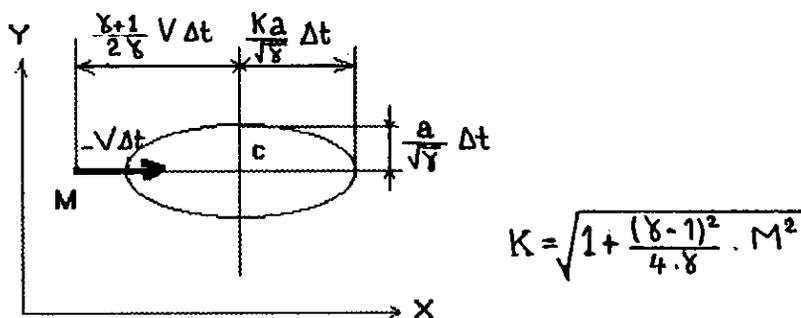
(fig. II-6a)

domaine de dépendance numérique

Si d_1, d_2, d_3 sont les distances des droites D_1, D_2, D_3 au point M_{ij} (fig. -II-6a) et d_{min} la plus petite de ces distances, la conditions de C.F.L s'écrit pour le point M_{ij} :

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma} |V_{ij}| + \sqrt{\frac{a^2_{ij}}{\gamma} + \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} |V_{ij}|\right)^2} \cdot \Delta t \leq d_{min\ ij}$$

Le domaine de dépendance physique de M_{ij} est une ellipse [ref.11] dont les caractéristiques sont données à la figure (II-6 b)



(fig. II -6 b)

domaine de dépendance physique

II-4-CONCLUSION:

Dans ce chapitre nous avons présenter les modèles mathématique et numérique de la méthode directe ainsi que les conditions initiales et les conditions aux limites choisies .

L'application de la méthode directe au calcul d'écoulements transsoniques sera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE III

Applications
(Resultats Et Commentaire)

APPLICATIONS (RESULTATS ET COMMENTAIRES)

III-1-INTRODUCTION :

Les méthodes de type pseudo-instationnaire doivent s'appliquer pour tout les problèmes d'écoulement stable pour un fluide idéal , mais leur utilisation est seulement justifiée pour les écoulements mixtes c'est -à-dire les écoulements dont le quel la vitesse est adopter aux valeurs subsonique et supersonique , alors que d'autres méthodes performantes existent pour les écoulements qui sont complètement subsoniques ou supersoniques .

Afin de tester l'application du modèle , un programme numérique à été développé et expérimenté sur des profils aérodynamiques .

Enfin, et pour plus de détails, l'organigramme de résolution numérique est donné en fin de ce chapitre.

III -2 RESULTATS ET COMMENTAIRES :

III-2-1 PROFIL D'ARC-CIRCULAIRE LOCALISE DANS UN CANAL:

La méthode pseudo-instationnaire à enthalpie totale constante est appliquée pour le calcul d'un écoulement autour d'un arc de cercle (Fig. III.1a), placé entre deux canaux cylindriques . Le maillage comprend 20x20 points . Les conditions aux limites amont et aval sont comme suit :

- à la limite amont la direction de l'écoulement est considérée parallèle aux parois du canal (caractérisé par un nombre de Mach égale 0.2)

- à la limite aval la pression statique est supposée uniforme , tel que $P_2 / P_{i\infty} = 0.562$.

Dans la figure (III.1.b), nous avons donnés la répartition des vitesses relatives . On remarque la condition de périodicité de l'écoulement en amont et on aval est bien vérifié .

Et pour la répartition des ISOMACHS, elle est présentée dans la figure (III.1.c)

III-2-2 TUYERE AXISYMETRIQUE :

Une étude numérique a été effectuée à l'aide d'un modèle d'écoulement à travers une tuyère axisymétrique (fig.III.2. a) caractérisée par les conditions aux limites suivantes :

- condition de périodicité de l'écoulement en amont et en aval .
- pression statique à l'aval est de $P_2 / P_{i\infty} = 0.625$.

La figure (fig.III.2.b) donne la répartition du nombre de Mach et sur la figure (III.2.c) nous avons présenté les lignes ISOMACHS .

III-2-3 GRILLE D'AUBE (cas d'une turbine):

Dans cette partie on présente les résultats obtenus par l'application de la méthode pseudo-instationnaire pour le calcul de l'écoulement dans une grille d'aube de turbine .(fig.III.3 a et III.3 b)

Le domaine de calcul consiste à un seul passage inter-aube limité par l'extrados et par l'intrados de deux aubes consécutives , le maillage comprend 41x41 points.

Les conditions aux limites sont traitées comme suit :

- condition de tangence sur les surfaces d'aubes.
- nombre de Mach (dont la pression statique à l'aval est de $P_2 / P_{i\infty} = 0.721$).

- l'angle d'attaque $\beta = -35^\circ$.
- condition de périodicité de l'écoulement en amont et en aval du passage inter-aube.

La répartition du nombre de Mach est représenté dans la figure (FIG.III.3c), et sur la figure (FIG.III.3.d) on a configuré la répartition des ISOMACHS.

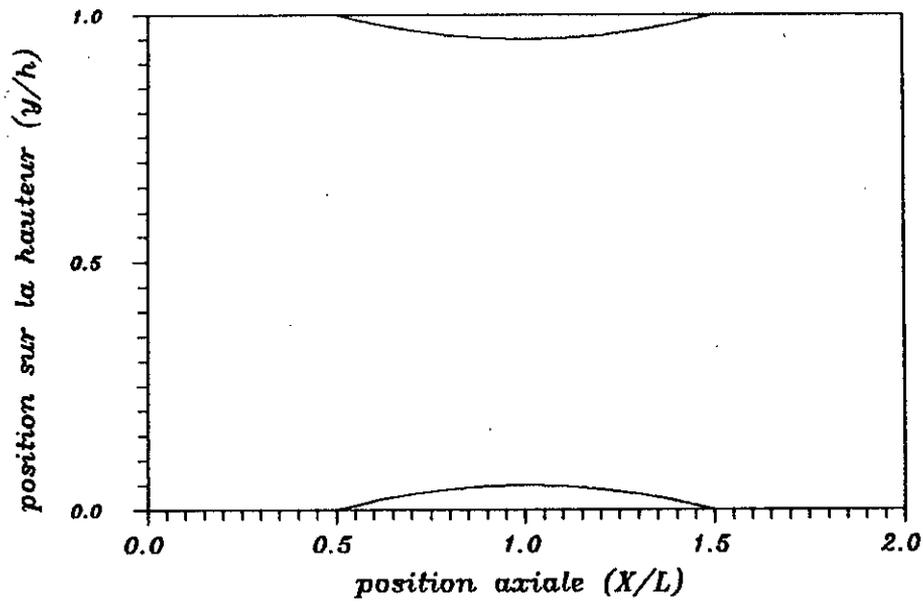
III-3 CONCLUSION :

Ce chapitre à été consacré aux applications de la méthode, pour le calcul des caractéristiques de l'écoulement dans les turbomachineries.

Les resultats obtenus sont representées généralement sous forme de tracés décrivant le maillage, les courbes isomachs et la distributions des vitesses.

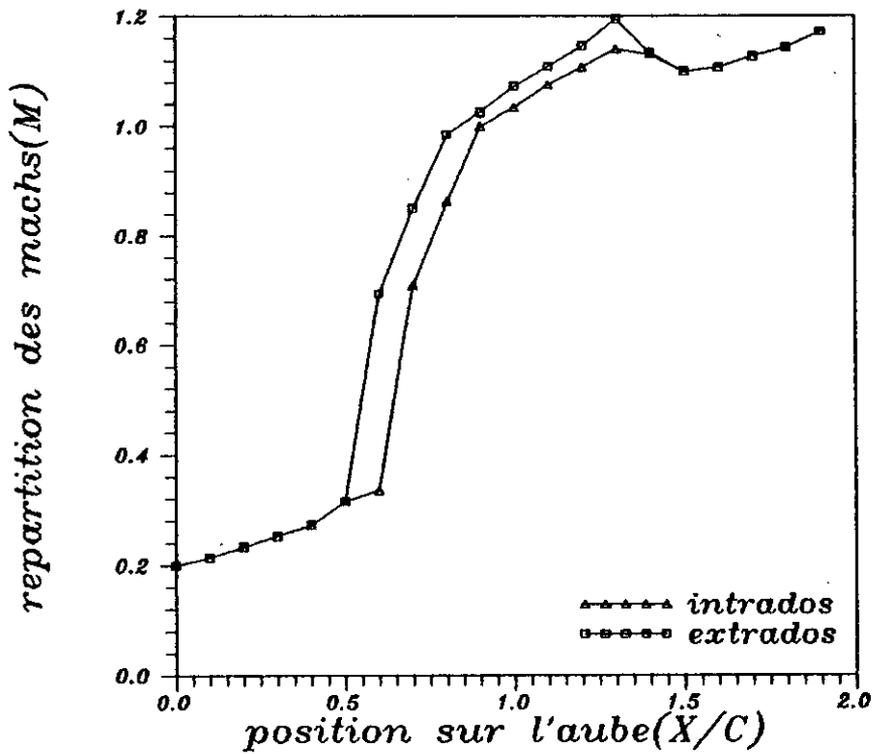
Les resultats obtenus sont tres cohérents, et verifier, la condition de périodicité de l'écoulement en amont et en aval et au bord de fuite.

Ils permettent aussi, de mettre en evidence l'importance de la viscosité artificielle sur le comportement de la solution.

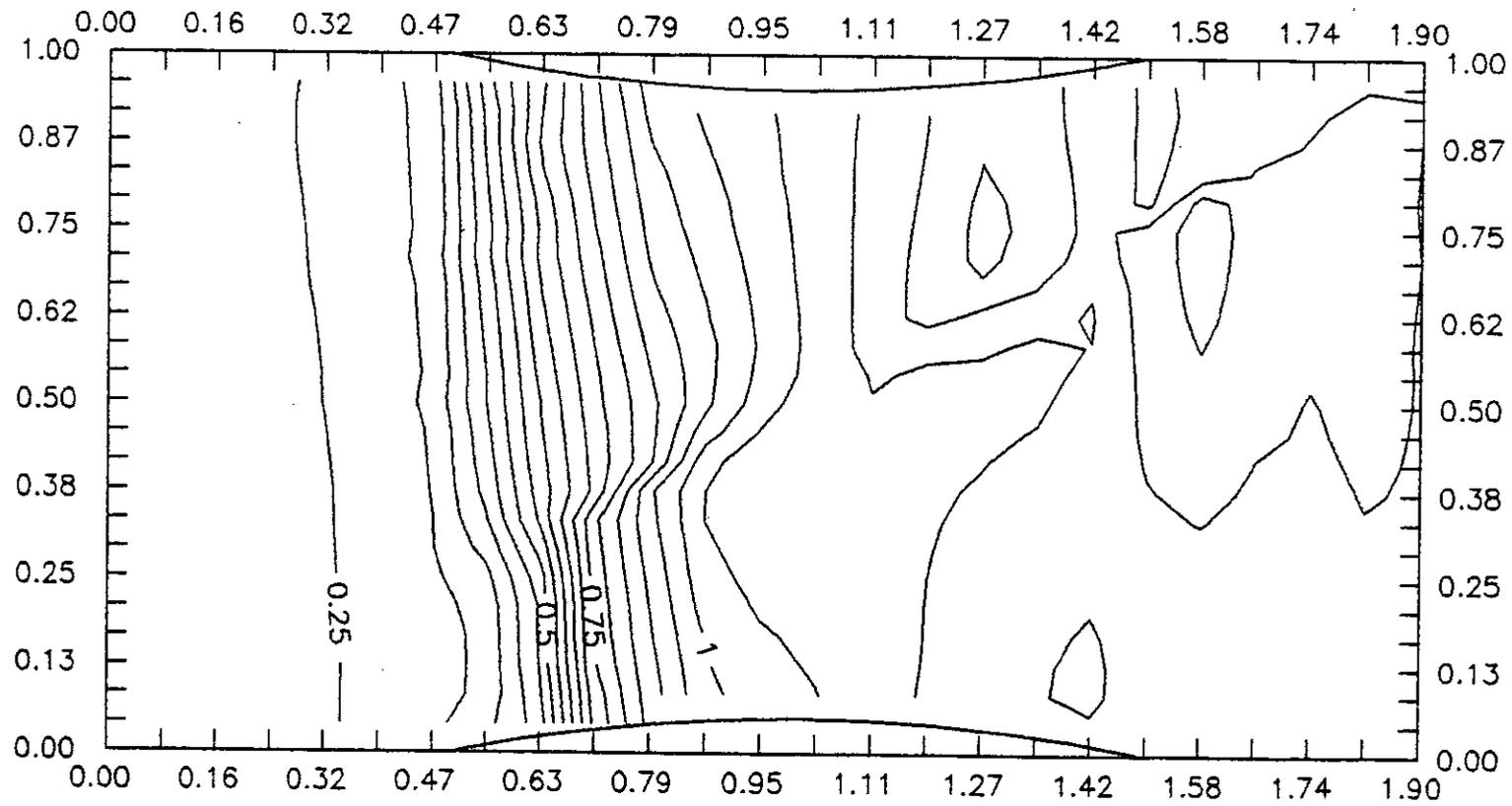


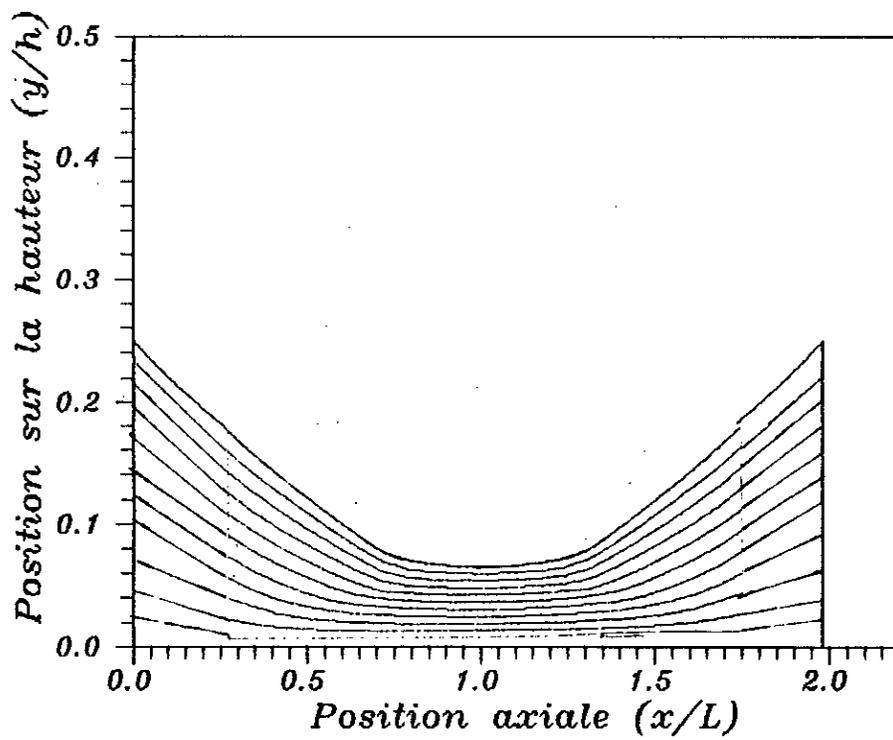
(Fig.III.1 a) Dessin d'arc circulaire place entre deux canaux cylindriques (avec une grille de description de 20 X 20)

(Fig.III.1 b) distribution du nombre de mach sur le profil d'arc-circulaire obtenue par le calcul direct.

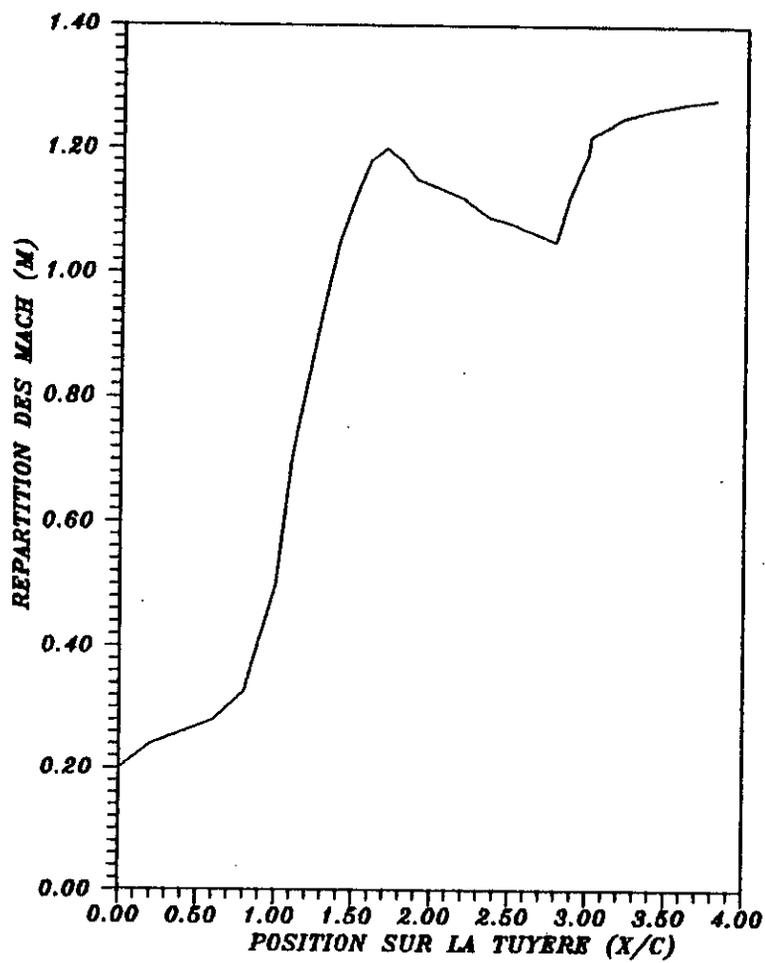


(figIII.1'c) schematisation des lignes isomachs
D'UN ARC-CIRCULAIRE
obtenu par le calcul direct.



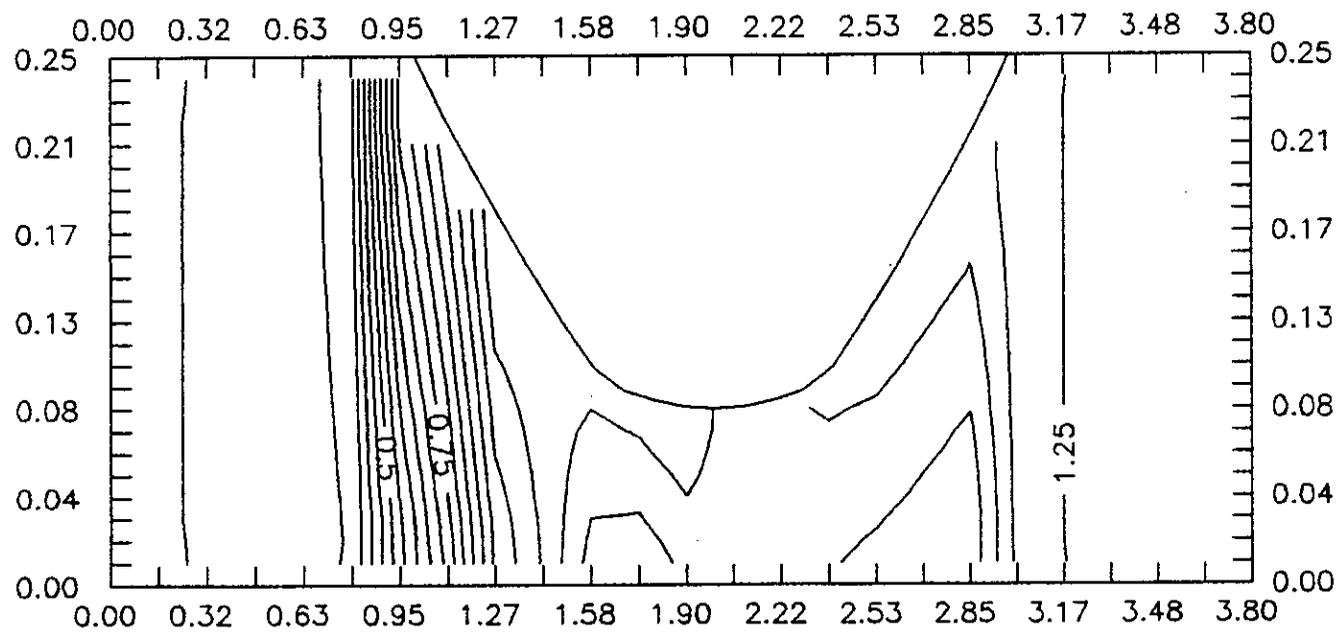


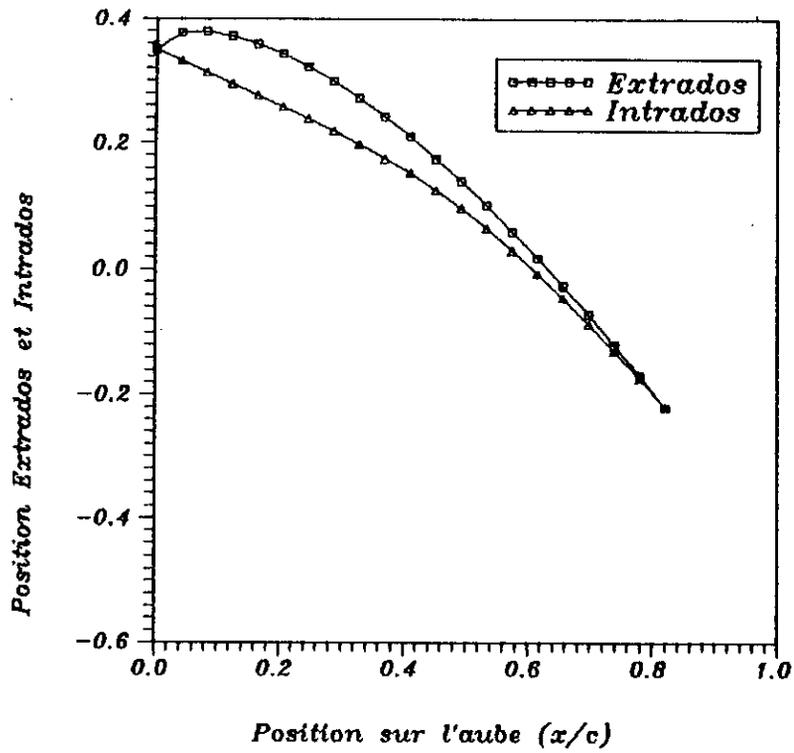
(Fig.III.2 a) Dessin d'une tuyere axisymetrie (convergent -divergent) avec quelques lignes de courant



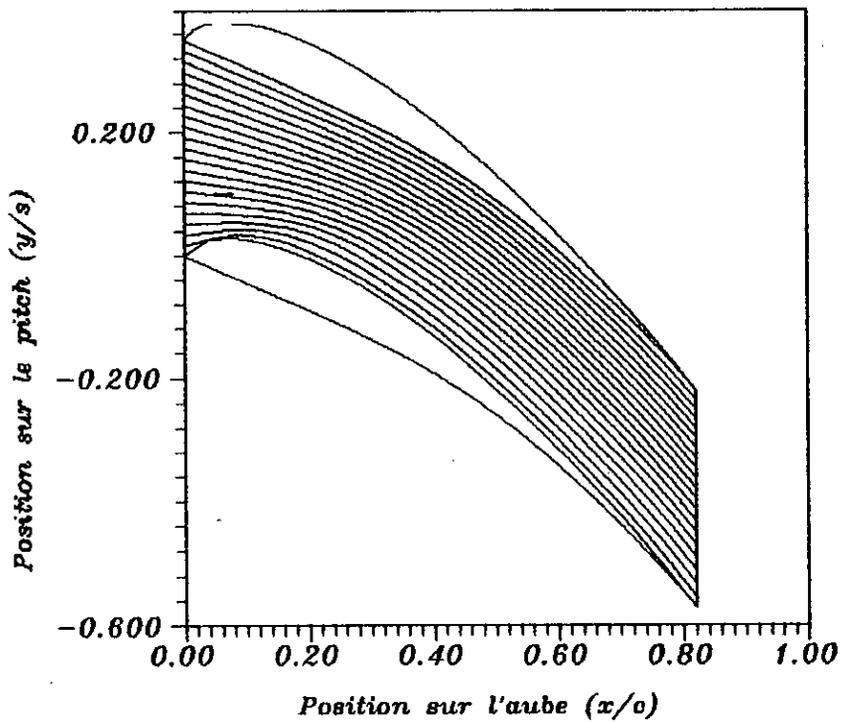
(FigIII.2.b) distribution du nombre de mach sur l'extrados du canal de la tuyere obtenu par le calcul direct

(fig III.2c) schématisation des lignes isomachs
de la tuyère (convergent-divergent)
obtenu par le calcul direct.

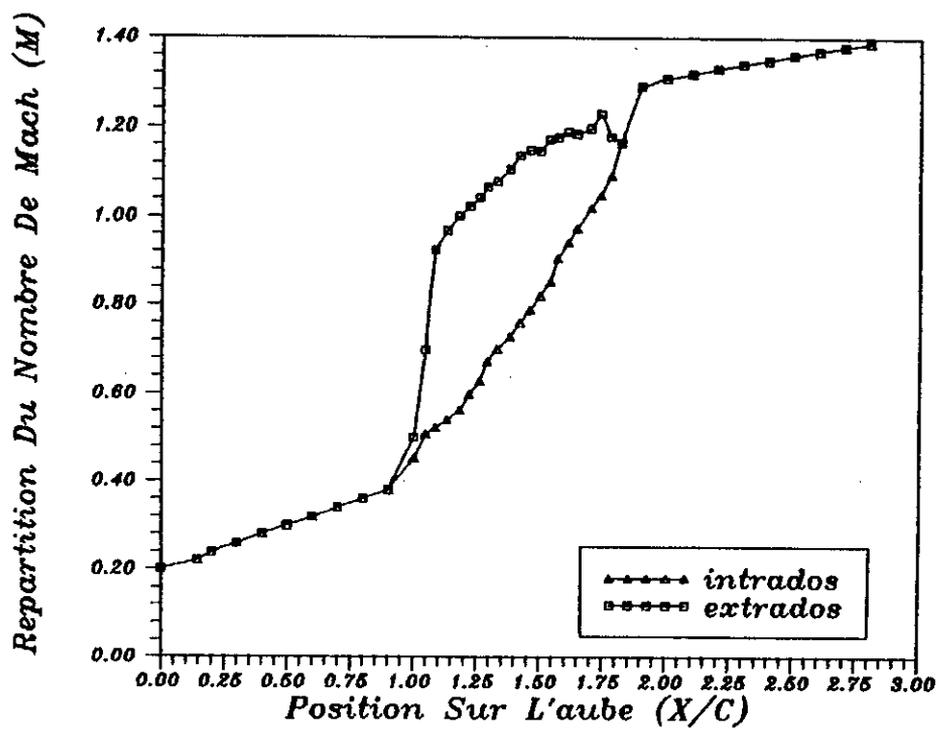




(fig III.3a) Profil D'aube de turbine obtenu par le calcul par le calcul semi-inverse pour une incidence $\text{Beta} = -35^\circ$

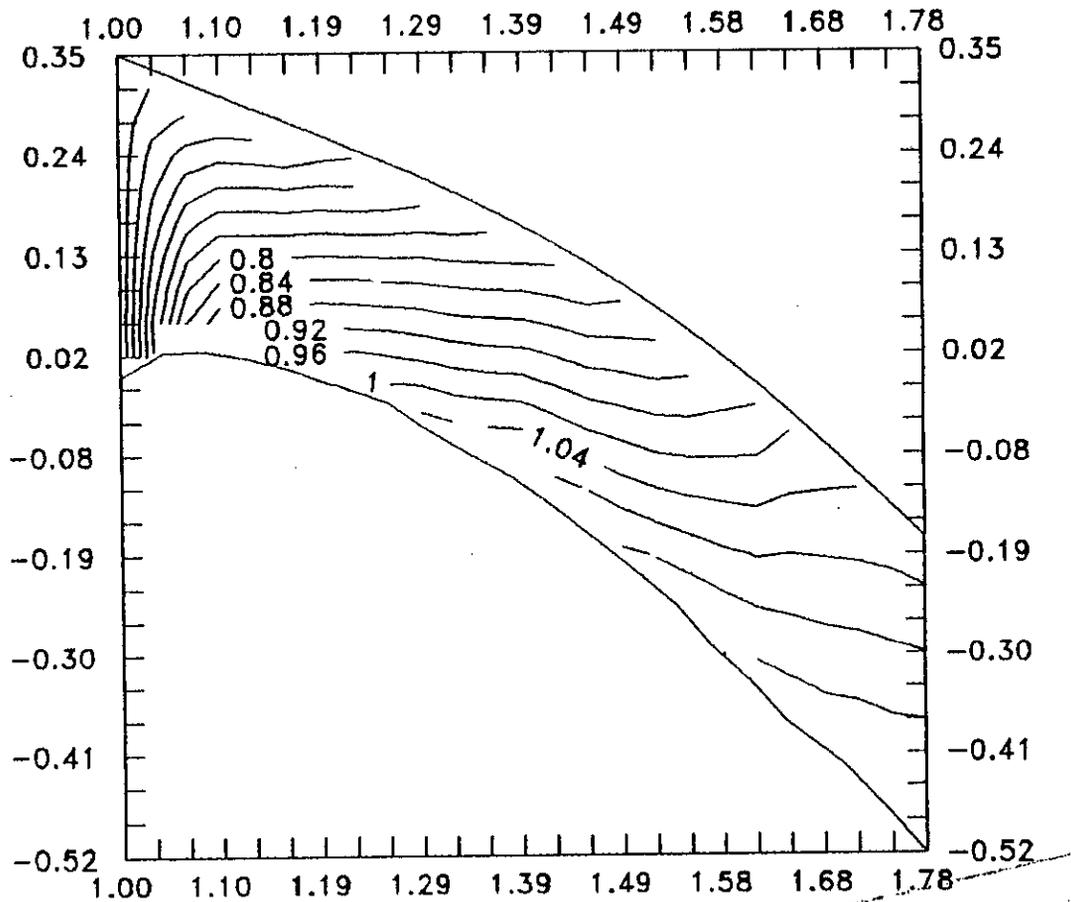


(Fig. III.3b) Dessin d'un profil d'une aube de turbine avec les lignes de courant (la taille de la grille de discretisation est de 100×200)

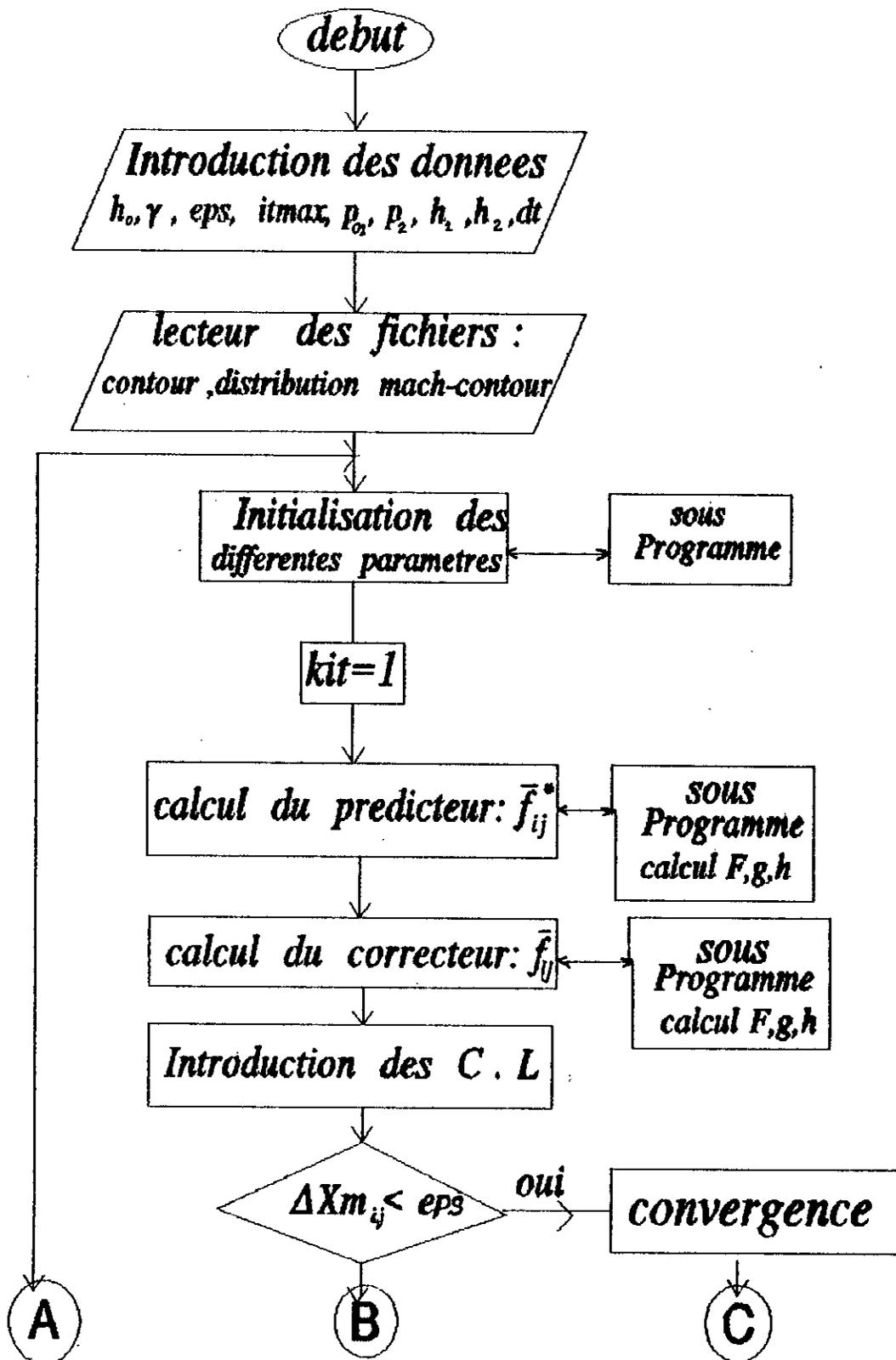


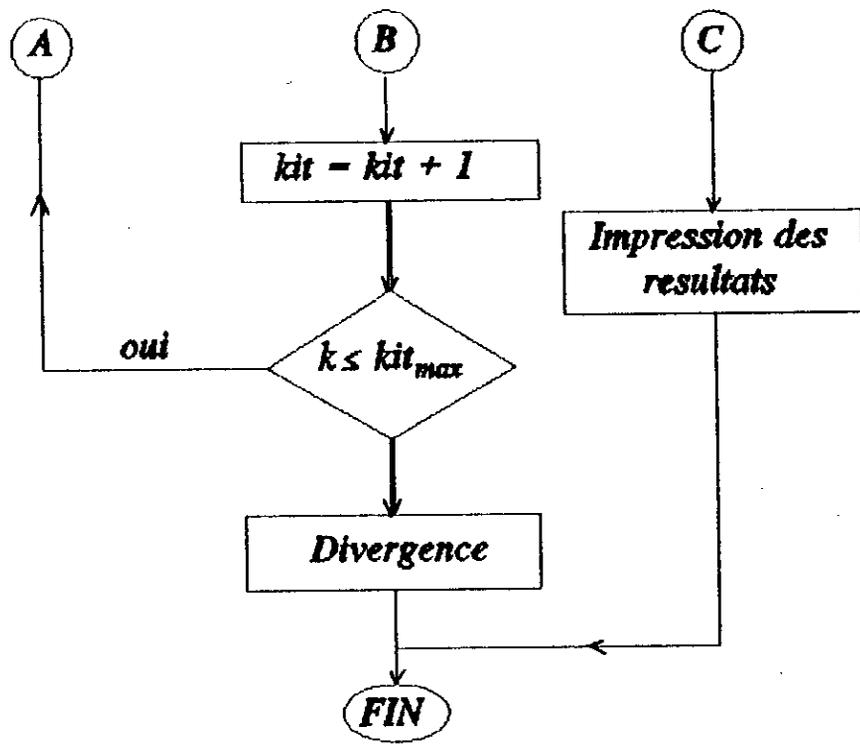
(figIII.3 C) distribution du nombre de Mach sur le profil d'aube de turbine obtenu par le calcul direct.

(figIII.3d) schematisation des lignes isomachs le long du canal inter-aube d'une turbine transsonique obtenus par le calcul directe



L'ORGANIGRAMME





***CONCLUSION
GENERALE***

CONCLUSION GENERALE :

Le travail présenté dans ce mémoire est une tentative de développement d'un modèle mathématique pour le calcul des caractéristiques d'un écoulement transsonique.

La méthode de calcul utilise l'approche pseudo-instationnaire avec un seul schéma de discrétisation, dans tout le domaine de calcul. Ce qui présente un avantage pour l'utilisation de la méthode des éléments finis.

Par contre cette approche présente des inconvénients dans sa formulation. Pour palier à ce problème, nous proposons comme solution numérique à introduire les facteurs suivants :

- Traitements des ondes de chocs.
- Viscosité artificielle.
- Traitements des conditions aux limites.

Enfin, il est possible de coupler cette méthode avec un calcul de couche-limite, qui nous permettra d'approcher au mieux le dimensionnement de notre aubage.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE :

[1] - MITON H., SANKALE H.

-Méthode Inverse De Calcul De Profils D' aubage .
Ecole Centrale De Lyon .(Nov 1984)

[2] - MITON H.

*-Etude Théorique Et Expérimentale De Problème Aérodynamique
Concernant Les Compresseurs Transonique .*
Université d'Aix Marseille II , 1978

[3] - VEUILLOT J. P.

*- Calcul Numérique De L' Ecoulement Transonique D'un Fluide
Parfait Dans Une Grille D' Aubes .*
Recherche Aérospaciale N° 6 (Nov 1975)

[4] - PEYRET R., TAYLOR T. D.

-Computational Methods For Fluide Flow .
Spring- verlag , Edition 1990

[5] - VAVRA M.H.

-Aérodynamics and flow. in turbomachines .
John Willy And Sons Inc (1960)

[6] - ROSHKO A., LIEPMANN H.W.

-Elements Of Gasodynamics
John Willy And Sons. Inc(1957)

[7] - **CHIKHI N.**

*Elements D'un Code Pour Le Calcul D'un Ecoulement Dans
Une Roue De Turbomachine*
Projet De Fin D'étude , 1993

[8] - **TOUFOUTI K.**

Application Du Mode Inverse Aux Ecoulement Transsonique
Projet De Fin D'étude , 1994

[9] - **MEAUZE G.**

*Methode de Calcul Aérodynamique inverse
Pseudo - Instationnaire . La Recherche Aerosp.*
N° 1980-1

[10] - **VIVIAND H , VEUILLOT J.P.**

*-Methode Pseudo - Instationnaire pour le calcul
D'Ecoulement Transsoniques .*
Publication ONERA (France) N° 1978-4

[11] - **EUVRARD D.**

*Resolution Numérique Des Equation Aux Dérivées Partielles
Méthode éléments finis, Différences Finies et Singularités.*
Edition Masson , 1990.

[12]- **RYHMING I.**

Dynamique des fluides
presse polytechnique Romandes , Lausanne

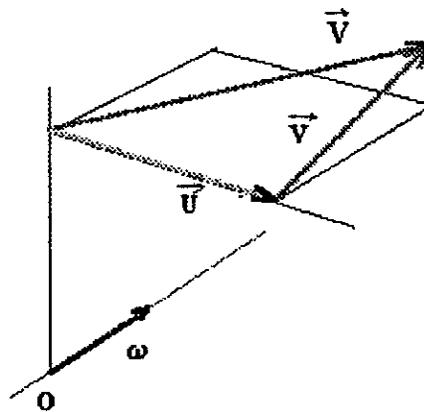
ANNEXE A

***EQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT
A TRAVERS
UNE TURBOMACHINE
(cas d'un repère mobile)***

ANNEXE(A)

EQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT A TRAVERS UNE
TURBOMACHINE CAS D'UN REPERE MOBILE

On considère l'écoulement dans un repère entraîné à la vitesse de rotation ω autour de l'axe OZ de la machine. dans ce repère, l'écoulement peut être représenté par les trois équations de conservations(voir fig. -1-)



(fig -1-)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (\text{equation de continuité}) \quad (\text{A-1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\vec{V}^2}{2} - \vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V} + \\ + \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_c + \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad} p - \frac{1}{\rho} \vec{F}_f = 0 \quad (\text{quantité de mouvement}) \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

$$T \cdot \text{grad} S = \text{grad} h + \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad} p = 0 \quad (\text{équation d'énergie}) \quad (\text{A-3})$$

tq:

\vec{V} : vitesse relative de l'écoulement dans le repère mobile.

$\vec{\Gamma}_e$: accélération d'entraînement.

$\vec{\Gamma}_c$: accélération de coriolis .

\vec{F}_f : représente les forces visqueuses (dissipatives)

V,P,T,S représente respectivement la vitesse ,la pression ,la température,et l'entropie.

Dans le cas du mouvement d'entraînement considéré ici ,les accélérations s'écrivent

$$\vec{\Gamma}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{V} \quad (\text{A-4})$$

$$\vec{\Gamma}_e = -\vec{\omega}^2 \cdot r \quad (\text{A-5})$$

$\vec{\omega}$: étant le vecteur rotation uniforme parallèle à l'axe OZ.

Ces équations peuvent également représenter l'écoulement dans un repère fixe ; il suffit de faire $\vec{\omega} = 0$ et d'annuler dans les termes correspondants :

Posant :

$$a) \quad H_o = \frac{V^2}{2} + h \quad (\text{enthalpie totale relative})$$

$$b) \quad I = H_o - \frac{\omega^2 r^2}{2} \quad (\text{rothalpie})$$

On peut écrire par combinaison des relations (A-2) et (A-3)

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} I - T \cdot \text{grad} S - \vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V} + 2 \vec{\omega} \wedge \vec{V} = \frac{1}{\rho} \vec{F}_f$$

\vec{V} : étant la vitesse absolue .

On obtient finalement

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V} = T \text{grad} S - \text{grad} I + \frac{\vec{F}_f}{\rho} \quad (\text{A-6})$$

La relation qui multipliée scalairement par \vec{V} donne :

$$\vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \text{grad} I = T \cdot \vec{V} \text{grad} S + \frac{F_f}{\rho}$$

l'écoulement étant supposé adiabatique, l'accroissement d'entropie associé à un volume se déplaçant le long d'une ligne de courant est nécessairement égal au travail des forces de frottement donc :

$$T \vec{V} \operatorname{grad} S + \frac{F_f}{\rho} = 0$$

On obtient dans ces conditions :

$$\vec{V} \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \operatorname{grad} I \right) = 0 \quad (\text{A-7})$$

On obtient le système suivant:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{V} - \frac{\vec{V}}{a^2} \operatorname{grad} \left(\frac{V^2 + \omega^2 r^2}{2} \right) - \frac{\vec{V}}{R} \operatorname{grad} S = 0 \quad (\text{a})$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \wedge \operatorname{rot} \vec{V} = T \operatorname{grad} S - \operatorname{grad} I + \frac{\vec{F}_f}{\rho} \quad (\text{b})$$

$$\vec{V} \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \operatorname{grad} I \right) = 0 \quad (\text{c})$$

Représentant les équations de *NAVIER-STOKES* pour un écoulement tridimensionnel instationnaire ; par rapport à un repère animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe .

On remarque que la rothalpie I qui vient d'être définie , joue un rôle analogue à l'enthalpie de l'écoulement dans un repère fixe . Elle s'y réduit d'ailleurs lorsque on fait $\vec{\omega} = 0$.

ANNEXE: B

***ANALYSE DE LA STABILITE DES
SCHEMAS AUX
DIFFERENCES FINIS***

ANNEXE (B)

ANALYSE DE LA STABILITE DES SCHEMAS
AUX DIFFERENCES FINIS

Pour un schéma donné, il existe des valeurs du pas de calculé, pour les quelles, les résultats numérique donnent des oscillations qui croient rapidement et après un certain temps leur amplitude devient infinie telque le calculateur passe en "over-flow" et s'arrête.

Ce phénomène est caractéristique de l'instabilité numérique, en plus, l'instabilité peut se produire par d'autres sources, par exemple, dans un cas non linéaire pour des nombres de *REYNOLDS* importants, les causes d'instabilités sont :

- 1) Les effets non linéaire .
- 2) Le changement rapide de la direction dans la région de décollement de l'écoulement.
- 3) Un fort gradient de pression .
- 4) Présence de parois ou de frontières au domaine de calcule .

L'effet de telles instabilités qualifiées de « faible »; n'est pas nécessairement une divergence rapide du calcul, mais souvent, il provoque des oscillations qui reste d'amplitude bornée [ref : 4]

Ce phénomène est corrigé soit en diminuant de rapport des pas de calcul ; en le choisissant inférieur à la valeur donnée par la condition de *COURANT-FRIEDERICHS-LEWY*(C-F-L) voir [chap II], soit on introduisant un terme dissipatif ou de viscosité artificielle.

Ce la nous amène à introduire la notion de stabilité, nous dirons qu'un schéma est stable si la solution du problème discrétisé reste bornée [ref : 11].

Examinons ,maintenant par l'analyse de fourrier; la stabilité du schéma suivant

$$C_{-1} \cdot U_h^{n+1} + C_0 \cdot U_h^n + C_{-1} \cdot U_h^{n-1} = 0 \quad (B-1)$$

Où C_1 , C_0 et C_{-1} sont des opérateurs de différences finies, $U_h^n \approx (X_h, n\Delta t)$ avec $U = (U_1, \dots, U_m)$ et $X = (X_1, \dots, X_d)$ telque X_h désignent la discrétisation en espace $X_h = (\gamma_1 \cdot \Delta X_1, \dots, \gamma_d \cdot \Delta X_d)$, où $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ étant des entiers, l'indice n désigne la discrétisation en temps $tn = n \cdot \Delta t$, n un entier

On suppose que la solution est de la forme :

$$U_h^n = U^h(K) \exp(i \cdot K \cdot X_h) \quad (B-2)$$

ou $i = \sqrt{-1}$, et K le vecteur nombre d'onde, $K = (K_1, \dots, K_d)$ substituant (B-2) dans (B-1) et en divisant par un facteur commun $\exp(iKX_h)$, on obtient l'équation vectorielle:

$$G_0 \cdot U^{n+1} + G_0 \cdot U^n + G_{-1} \cdot U^{n-1} = 0 \quad (B-3)$$

Cette équation à trois niveaux est transformé en une équation à deux niveaux en introduisant une variable auxiliaire $V_n = U_{n-1}$ l'équation (B-3) devient donc :

$$G_1 \cdot V^{n+1} + G_0 \cdot U^n + G_{-1} \cdot V^{n-1} = 0 \quad (B-4)$$

$$V^{n+1} - U^n = 0$$

qui peut être écrire sous la forme :

$$\phi_{n+1} = G \cdot \phi_n \quad (B-5)$$

Où $\phi = (u, v)$ est un vecteur à $2m$ composant, G une matrice $2m \times 2n$ déduite de (B-4) appelée matrice d'amplification .

la stabilité du schéma (au sens de *Von Neumann*) exige que le rayon spectrale de la matrice d'amplification G est inférieur a l'unité i.e :

$$\rho(G) = \text{Max } |\lambda| \leq 1, \quad 0 \leq K \Delta X \leq 2\pi, \quad j=1, \dots, d \quad (\text{B-6})$$

Où λ_j sont les valeurs propres de G racines de l'équation caractéristique

$$\det (G - \lambda I) = f(\lambda) \quad (\text{B-7})$$

Dont les valeurs des λ résultent de l'étude des zéros de $F(\lambda)$, une autre possibilité consiste à calculer directement les valeurs propres de G par des méthodes numériques.

Les calculs sont effectués en faisant varier les paramètres (physique et numérique) du problème et en construisant les graphes des résultats. Pour une telle approche, il est recommandé de procéder à l'étude analytique préliminaire de la stabilité pour des cas simples, pour l'instant en :

1) considérant le problème en dimension d'espace inférieur.

2) annulant quelques paramètres physiques.

3) considérant quelques relations entre les composants du vecteur nombre d'onde ou éventuellement quelques valeurs d'entre eux. Une telle analyse préliminaire permet souvent la détermination d'une forme grossière du critère de stabilité qui peut être raffiné par le calcul numérique des valeurs propres.

ANNEXE:C

**RECHERCHE SYSTEMATIQUE DES
DISCONTINUITES RELATIONS DE
(RANKINE- HUGONIOT)**

ANNEXE (C)

RECHERCHE SYSTEMATIQUE DES DISCONTINUITES
RELATIONS DE RANKINE-HUGONIOT

Les équations de *NAVIER-STOKES* sont des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre qui nécessitent pour être résolues un nombre N de conditions aux limites réelles.

Par contre les équations d'Euler sont du premier ordre .elles nécessite un nombre E de conditons aux limites inférieur à N.

IL est paradoxal de constater que P=N-E conditons réelles, deviennent des inconnues dans le problème d'Euler.la seule façon de solver ce paradoxe est de supposer l'existence d'une surface de discontinuité.

Le calcul de ces discontinuités est effectuée par les relations dites de *RANKINE-HUGONIOT*, associées aux équations d'Euler, permettent le calcul de l'écoulement autour d'un obstacle de géométrie connue .

C-1 EQUATIONS DE RANKINE-HUGONIOT :

Ces équations désignent les relations de compatibilité entre les principes de conservation et l'existence des discontinuités.

Elles sont obtenue rapidement en posant :

$$\vec{V}_n = \vec{V} \cdot \vec{n}_s$$

n_s : la normale à la surface de discontinuité (fig.C.1).

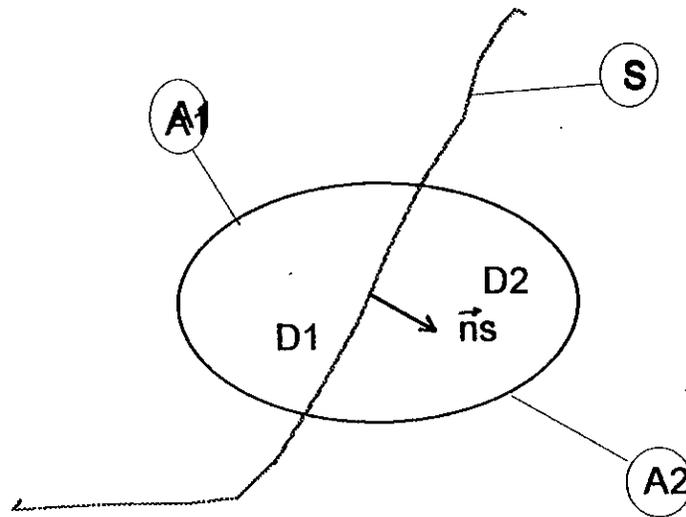


fig c.1

L'équation de continuité prend la forme :

$$\rho_1.V_{n1} = \rho_2.V_{n2} \quad (\text{C.1a})$$

L'équation de quantité de mouvement, s'écrit :

$$\rho_1.\vec{V}_1.V_{n1} - \rho_2.\vec{V}_2.V_{n2} + (P_1 - P_2).\vec{n}_s = 0$$

D'où en projetant cette relation respectivement sur le normale et le plan tangent à la surface S , on obtient :

$$P_1 + \rho_1.V_{n1}^2 = P_2 + \rho_2.V_{n2}^2 \quad (\text{C.1b})$$

$$\rho_1.\vec{V}_{t1}.V_{n1} = \rho_2.\vec{V}_{t2}.V_{n2} \quad (\text{C.1c})$$

L'équation de l'énergie s'écrit :

$$\rho_1.\left(h_1 + \frac{V_1^2}{2}\right).V_{n1} + p_1.V_{n1} = \rho_2.\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2}\right)V_{n2} + p_2.V_{n2} \quad (\text{C.1d})$$

C.2 LIGNE OU SURFACE DE GLISSEMENT :

Ces lignes ou surfaces sont définies en écrivant que le fluide ne traverse pas la discontinuité soit

$$V_{n1} = 0 \quad (\text{C.2a})$$

d'où, en l'injectant dans le système (C.1), on obtient :

$$P1 = P2 \quad (\text{C.2b}) \quad \text{continuité de la pression}$$

$$V_{n1} = V_{n2} \quad (\text{C.2c}) \quad \text{continuité de la vitesse normale}$$

$$\rho, V_t, h \quad \text{quantités éventuellement discontinues}$$

Ce type de discontinuité apparaît généralement dans deux cas. Le premier, est le cas d'un contour extérieur d'un corps placé dans un fluide parfait. Il existe une zone d'épaisseur nulle au voisinage de la paroi qui est de type « surface de glissement » (Fig.C.2a). Par conséquent la condition au limite qui est appliquée sur la paroi, pour résoudre les équations d'Euler est la nullité de la composante normale de la vitesse, c'est la condition dite de glissement, l'autre cas, est celui d'un jet débouchant dans l'atmosphère au repos. Il se forme, après un certain temps une discontinuité qui sépare le fluide contenu dans le jet et l'air ambiant (Fig.C.2b) :

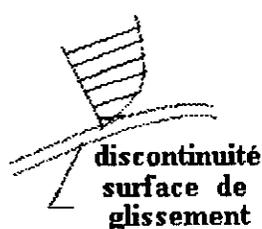


fig C.2.a

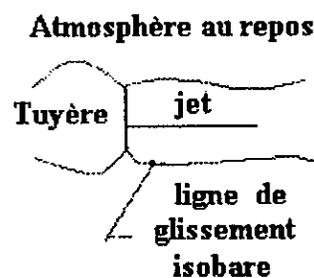


fig C.2.b

Compte tenu de l'identité des composantes normales V_{n1} et V_{n2} . Les deux côtés de la ligne de glissement sont respectivement constitués des mêmes particules qui glissent les uns par rapport aux autres du fait de la discontinuité de la vitesse tangentielle.

C.3 LES ONDES DE CHOCS :

Les équations des ondes de choc sont obtenues en écrivant $V_{n1} \neq 0$ dans les relations de Rankine-Hugoniot (C.1) ceci implique, contrairement au cas précédent, une traversée de la discontinuité par la particules fluides.

Le système (C.1) est alors réécrit sous une forme plus simple, soit :

$$m = \rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2} \quad (\text{C.3a})$$

$$P_1 + m V_{n1} = P_2 + m V_{n2} \quad (\text{C.3b})$$

$$h_1 + \frac{1}{2} V_{n1}^2 = h_2 + \frac{1}{2} V_{n2}^2 \quad (\text{C.3c})$$

$$V_{t1} = V_{t2} \quad (\text{C.3d})$$

Le cas particulier des ondes de choc droites est obtenue en posant $V_{t1} = V_{t2} = 0$

En manipulant, les équations (C.3) on obtient les relations dites d'*Hugoniot* :

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_{n1}^2 - 1) \quad (\text{C.4.a})$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{1}{M_{n1}^2} - 1 \right) + 1 \right)^{-1} \quad (\text{C.4b})$$

Les autres quantités telles que h_1 , T_1 et M_{n1} peuvent être déduites sans difficultés.

Dans la pratique, il est commode d'introduire aussi les pentes locales β et celles de la ligne de courant aval θ , par rapport à la direction de la vitesse initiales V_1 (Fig.C.3).

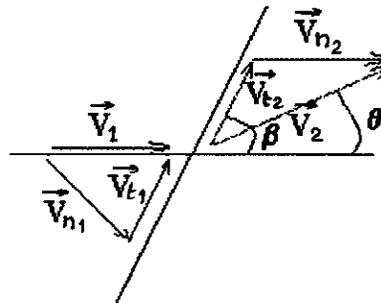


Fig.C.3

Les équations de continuité et de conservation des vitesse tangentielle s'écrivent alors :

$$\rho_2 V_2 \sin(\beta - \theta) = \rho_1 V_1 \sin \beta$$

$$V_2 \cos(\beta - \theta) = V_1 \cos \beta$$

Il en résulte une relation fondamentale :

$$\frac{\operatorname{tg}(\beta - \theta)}{\operatorname{tg}(\beta)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (\text{C.5})$$

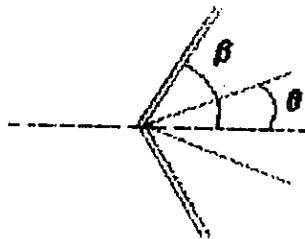
Cette relation peut être écrite sous la forme [ref: 12]

$$\operatorname{tg} \theta = 2 \operatorname{ctg} \beta \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \quad (\text{C.5'})$$

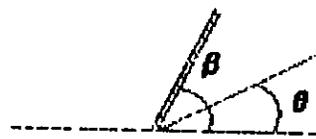
Cette expression s'annule pour $\beta = \pi/2$ et $\beta = \arcsin(1/M_1)$ appelé angle du Mach. Cette relation (C.5') traduit dans le plan (θ, β) qu'il existe deux solutions β_1 et β_2 pour chaque valeur $\theta \leq \theta_{\max}(M_1)$. La valeur $\sup(\beta_1, \beta_2)$ est appelée solution choc fort tandis que la (β_1, β_2) est appelée solution choc faible.

Pour $\theta > \theta_{\max}(M_1)$, aucune solution locale n'est compatible avec la valeur M_1 fixée. Le choc ne peut être détaché.

Ce type de discontinuité se produit, soit à l'amont d'obstacles placés dans un courant supersonique (Fig.C.5a) soit lors d'un changement brusque de la pente d'une paroi (Fig.C.5b)



(Fig.C.5a)



(Fig.C.5b)

ANNEXE:D

**TRAITEMENT NUMERIQUE DES
ONDES DE CHOC NOTION DE
VISCOSITE ARTIFICIELLE**

ANNEXE (D)

TRAITEMENT NUMERIQUE DES ONDES DE CHOC NOTION DE VISCOSITE ARTIFICIELLE.

Durant toute cette annexe, nous nous baserons sur l'équation de *Bûrgeres* sous la forme (d.1) et (d.2).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (d.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (d.2)$$

$\nu = cte > 0$

Lorsqu'une solution $u(x,t)$ de l'équation de *Bûrgeres* (d.1) présente un choc et qu'on discrétise le problème correspondant il subsiste nécessairement, entre les points du maillage les plus proches du choc et situées de part et d'autre de celui-ci, une variation de u qui ne tend pas vers zéro, de sorte qu'un schéma aux différences finies, constant n'a plus de sens.

D.1 METHODE DU « SHOCK-FITTING » :

Elle consiste à considérer explicitement la position X_c du choc à chaque instant t comme une inconnue du problème, et à discrétiser l'équation (d.1) en différences finies de part et d'autre X_c , et à imposer les conditions de choc (relation de Rankine-Hugoniot annexe B) une telle méthode appelée « *Shock fitting* » est parfois utilisée, mais elle se heurte à trois difficultés principales [ref: 3]

- 1)- La difficultés informatique à suivre les chocs, qui sont parfois nombreux, et qui peuvent apparaître ou disparaître.
- 2)- La difficulté d'exprimer numériquement les relations de choc.
- 3)- La difficulté d'obtenir des schémas stables.

De sorte que cette méthode est assez peu utilisée, sauf si on ne peut pas écrire l'équation traitée sous forme conservative.

D.2 METHODE DU « SHOCK-CAPTURING » :

Cette méthode à perturber l'équation (d.1) selon le modèle (d.2), en lui adjoignant un terme de viscosité artificielle du type $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, l'équation résultant est, à la

convergence :

a)- du seconde ordre,

et b)- suffisamment dissipative pour amortir les oscillations éventuelles, ν' est un coefficient positif petit.

Ce terme permet d'étaler le choc, bien que la structure du choc est faussée (car beaucoup plus épaisse qu'en réalité), mais à l'usage on constate heureusement que la position et l'intensité du choc sont correctement obtenues.

Dans la pratique, on peut :

- Soit introduire explicitement un terme $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ au seconde membre de l'équation (d.1) ; qui s'écrit alors sous la forme (d.2), avec ν' au lieu de ν ($\nu > 0$).

- Soit discrétiser (d.1) à l'aide d'un schéma dit dissipatif i.e : un schéma contenant implicitement du terme de viscosité artificielle, comme dans le procédé de lissage appliqué aux chapitres II

D.3 RESOLUTION D'UN CAS PARTICULIER:

Nous allons appliqué la seconde méthode à l'équation (d.2) dans le cas stationnaires . puisque $(\partial / \partial t = 0)$ cette équation permet d'avoir une équation différentielle ordinaire .

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \nu \frac{d^2}{dx^2} \quad (d.3)$$

Dont la solution est de la forme :

$$u = u_* \frac{1 + K \exp\left(\frac{u_* X}{\nu}\right)}{1 - K \exp\left(\frac{u_* X}{\nu}\right)} \quad K = \pm \exp\left(\frac{u_* X}{\nu}\right) = Cte \quad (d.4)$$

$U_* = U(X_*) = Cte$ qu'on peut toujours supposée positive .

ν et U_* étant positif, lorsque X varie de $-\infty$ à $+\infty$ $\exp\left(\frac{u_* X}{\nu}\right)$ varie de 0 à $+\infty$.

Nous supposons $K > 0$ si non le dénominateur peut s'annuler et u devient infini.

On peut aussi , sans perte de généralité , se ramener au cas où $X_* = 0$ i.e $K=1$ d'où :

$$u = u_* \operatorname{th} \left(\frac{u_* X}{2\nu} \right) \quad (\text{d.5})$$

Lorsque X croît de $-\infty$ à $+\infty$, u décroît de $+U_*(>0)$ à $-U_*$, d'abord lentement puis rapidement ; au voisinage de $X=0$, et de nouveau lentement (figure ci-dessus)

