

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

VISCOELASTICITE LINEAIRE

COUPLEE

A LA METODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENTS

Proposé par :

Etudié par :

Dirigé par :

M. Y. BELKACEMI

M. S. E. HEROUR

M. Y. BELKACEMI

PROMOTION

JUIN 1991

وزارة الجامعات
Ministère aux Universitaires

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE



PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

VISCOELASTICITE LINEAIRE

COUPLEE

A LA METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENTS

Proposé par :

M. Y. BELKACEMI

Etudié par :

M. S. E. HEROUR

Dirigé par :

M. Y. BELKACEMI

TIRAGE PROVISOIRE

PROMOTION

JUIN 91

^{CES}
DEDICAS

A ma mère

A mon père

A mon frère

A mes deux soeurs

A tous les musulmans

REMERCEMENTS

Je tiens à adresser mes remerciements profonds à mon promoteur Monsieur **BELKACEMI** qui m'a beaucoup aidé, ainsi qu'à tous ceux qui ont collaboré de loin ou de près à l'élaboration de ce modeste travail.

Mes remerciements vont également à tous ceux qui ont contribué à ma formation, je citerai en particulier Monsieur **GAHMOUSSE**.

Je remercie également Messieurs **TAZI**, **BELHANACHE** et **BELBLIDIA** d'être membres du jury ainsi que Monsieur **RECHAK** d'avoir accepté de présider le jury.

Qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

الهدف من هذه الأبرووة يتمثل في استعمال واحد من هرق
المعادلات التكاملية للحدود، الغير مباشرة، هريقة الانقطاعات
الانتقالية، لمعالجة مسائل في ميكانيكا الجاسد، ذات
قانون التصرف، اللزج للمطاطي الخطي، مع الارتكاز على
مبدأ التقابل.

Résumé:

Le but de ce projet consiste en l'utilisation d'une méthode des équations intégrales de frontière indirecte, la méthode des discontinuités de déplacements, dans la résolution des problèmes viscoélastiques linéaires, en se basant sur le principe de correspondance.

Abstract:

This work consists in the study of linear viscoelastic problems using the correspondance principle and one of the indirect boundary integral equations methods, the displacement discontinuity method

S O M M A I R E

Introduction.

I)- Rappels d'élasticité

I.1)- Equation générale de l'élastostatique.

I.2)- Représentation de Newber Papkovitch.

II)- Méthode des équations intégrales de frontières.

Introduction.

II.1)- Historique.

II.2)- Philosophie de la méthode.

II.3)- Problèmes intérieurs et problèmes extérieurs.

II.4)- Méthode directe et méthode indirecte.

III)- Méthode des discontinuités de déplacements. *II-5) Formulation mathématique de la méthode.*

III.1)- Solution analytique.

III.1.1)- Position du problème.

III.1.2)- Solution du problème.

III.2)- Procédure numérique.

III.2.1)- Discontinuité de déplacement arbitrairement orientée.

III.2.2)- Cas de deux D.D arbitrairement orientées.

III.2.3)- Cas de N D.D arbitrairement orientées.

III.2.4)- Coefficients d'influence.

III.2.5)- Application de la procédure numérique.

III.2.6)- Mouvement de corps rigide.

III.2.7)- Convention de signe.

III.2.8)- Utilisation de la symétrie.

III.2.9)- Efforts volumiques.

III.3)- Exemples.

IV)-Viscoélasticité linéaire.

Introduction.

IV.1)- Loi de comportement viscoélastique uniaxial.

IV.1.1)- Expériences fondamentales.

IV.1.1.1)- Expérience de fluage.

IV.1.1.2)- Expérience de relaxation.

IV.1.2)- Linéarité.

IV.1.2.1)- Définition.

IV.1.2.2)- Conséquences de la linéarité.

IV.1.3)- Matériau viscoélastique non vieillissant.

IV.1.4)- Intégrale héréditaire.

IV.2)- Loi de comportement viscoélastique tridimensionnelle.

IV.2.1)- Matrices de retard et de relaxation.

IV.2.2)- Matériau isotrope.

IV.3)- Equations des problèmes viscoélastiques.

IV.4)- Principe fondamentale de correspondance.

IV.5)- Modèles analogiques pour le comportement viscoélastique, linéaire, non vieillissant.

IV.5.1)- Modèles de base.

IV.5.2)- Modèles composés.

IV.5.2.1)- Modèle de Maxwell.

IV.5.2.2)- Modèle de Kelvin.

IV.5.2.3)- Modèle du solide à trois paramètres.

IV.5.2.4)- Modèles généralisés.

IV.6)- Identification.

V)-Application de la méthode des discontinuités de déplacements aux problèmes viscoélastiques.

V.1)- Problèmes de fluage.

V.2)- Problèmes de relaxation.

V.3)- Exemples.

Conclusion.

ANNEXE

- A)- Rappels mathématiques.
- B)- Elasticité.
- C)- Viscoélasticité.

INTRODUCTION

L'étude de problèmes réels en mécanique du solide nous amène parfois à considérer le matériau ayant un comportement viscoélastique.

En effet, l'utilisation des polymères, du bois etc..., nécessite une prévision du comportement des matériaux non seulement au début de l'utilisation mais de nombreuses journées, voire années, après la mise en service.

La théorie de la viscoélasticité permet de rendre compte du comportement différé du matériau du à la viscosité.

L'étude que nous avons entreprise avait précisément comme objectif l'utilisation de la méthode des discontinuités de déplacements pour la résolution des problèmes viscoélastiques. A cet effet, des programmes ont été développés et testés sur des problèmes de fluage et de relaxation.

Cette étude comporte:

Une introduction à la méthode des équations intégrales de frontière et précisément à la méthode des discontinuités de déplacements.

Une étude théorique de la viscoélasticité, qui nous a permis d'introduire le principe de correspondance ainsi qu'une famille de schémas rhéologiques permettant de représenter le comportement de ces matériaux

Vient après l'application de la méthode des discontinuités de déplacements aux problèmes viscoélastiques.

L'interprétation des résultats nous permet de conclure sur l'efficacité de cette méthode.

I RAPPELS D'ELASTICITE:

I.1 EQUATION GENERALE DE L'ELASTOSTATIQUE:

Etant donne un solide élastique, linéaire, homogène, occupant, une région R et ayant comme frontière de domaine C (fig:I.1)

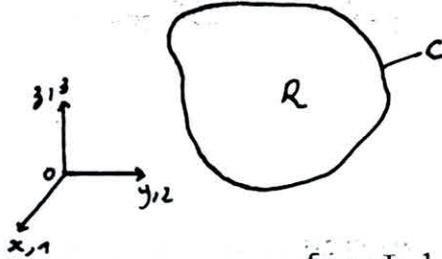


fig:I.1

Les équations nécessaires à la résolution d'un problème d'élastostatique sont en tout point de la région, en notation indicielle:

1-Equations déformations-deplacements: (équations cinématiques)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

2-Equations contraintes-déformations:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (2)$$

coefficients de Lamé

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$$

E: module de Young

$$\nu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ν : coefficient de Poisson

(3)

3-Equations d'équilibre:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (4)$$

on a donc en tout 15 équations à 15 inconnues (3 déplacements- 6 contraintes-6 déformations) Les problèmes d'élastostatique sont classés suivant les conditions aux limites en trois catégories.

1 Problèmes de type 1 ou problèmes de Dirichlet:

On a des conditions aux limites de type déplacements, le champ de déplacement (3 composantes) est donné en chaque point n de la frontière.

$$U = \bar{U} \quad \text{ou} \quad U_i = \bar{U}_i \quad \text{Sur } C \quad (5)$$

Les inconnues sont :

-Le champ de contraintes et de déformations à l'intérieur du domaine et sur la frontière.

-Le champ de déplacements à l'intérieur du domaine

2 Problème de type 2 ou problème de Newman:

Les trois composantes du vecteur contrainte sont données en tout point de la frontière

$$t = \bar{t} \quad \text{ou} \quad t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (6)$$

Les inconnues sont :- ϵ_{ij}, U_i dans R et sur C
- σ_{ij} dans R

3 Problème de type 3 ou problème mixte:

On a deux cas :

1^{er} cas: - problème de type 1 sur C

- problème de type 2 sur C

(7)

avec $C_u \cup C_t = C$ et $C_u \cap C_t = \emptyset$ (fig: I.2)

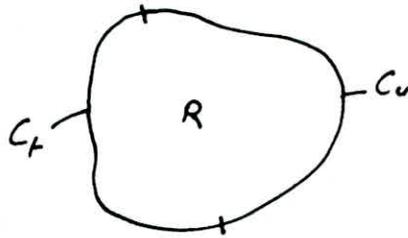


fig:I.2

2^{ème} cas: En chaque point de la frontière on choisit un système de coordonnées (en générale, l'un des axes, le long de la normale à la surface au point donné) et on fixe les éléments suivants:

$$\begin{aligned}
 & - \bar{U}_1 \text{ ou } \bar{t}_1 \\
 & - \bar{U}_2 \text{ ou } \bar{t}_2 \text{ avec } \bar{t}_i = \sigma_{ij} \bar{n}_j \text{ (ou exclusif)} \\
 & - \bar{U}_3 \text{ ou } \bar{t}_3
 \end{aligned} \tag{8}$$

Un problème d'élastostatique comprend donc un système de 15 équations à 15 inconnues, en tenant compte des conditions aux limites.

Il est certainement plus avantageux de recourir à une formulation du même problème en fonction d'un nombre inférieur d'inconnues et d'équations.

On arrive, avec quelques transformations mathématiques, à réduire ce système suivant deux approches.

a/ Approche basé sur les déplacements:

les inconnues principales sont les composantes du champs de déplacement.

En substituant: (I.2) dans (I.4) on obtient:

$$\lambda \epsilon_{pp,j} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij,j} + f_i = 0 \tag{9}$$

$$\lambda \epsilon_{pp,i} + 2\mu \epsilon_{ij,j} + f_i = 0 \tag{10}$$

(I.1) dans (I.10) On obtient:

$$\text{avec } \epsilon_{pp} = U_{p,p} \Rightarrow \epsilon_{pp,i} = U_{p,pi} \quad (11)$$

$$\text{et } \epsilon_{ij,ij} = \frac{1}{2} (U_{i,jj} + U_{j,ij}) = \frac{1}{2} (U_{i,pp} + U_{p,ip}) \quad (12)$$

$$\lambda U_{p,pi} + \mu (U_{i,pp} + U_{p,ip}) + f_i = 0 \quad (13)$$

$$(\lambda + \mu) U_{p,pi} + \mu (U_{i,pp}) + f_i = 0 \quad (14)$$

Ce système s'écrit aussi sous la forme suivante:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U} + \mu \Delta \vec{U} + \vec{f} = \vec{0} \quad (15)$$

Le système (I.15) est connue sous le nom de l'équation de LAME-NANIER. (Par la suite en utilisera cette approche)

b/ Approche basé sur les contraintes:

Les inconnues principales sont les contraintes.

On aboutit au système suivant:

$$\begin{cases} \nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{(1+\nu)} \sigma_{pp,ij} = \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \nabla f - f_{i,j} - f_{j,i} \\ \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \end{cases} \quad (16)$$

L'équation (I.16 a) est connue sous le nom de l'équation de BELTRAMI-MICHEL. Elle représente les équations de compatibilité en terme de contraintes

Dans les deux approches, une fois les inconnues principales calculées, on détermine les autres inconnues en utilisant les équations adéquates découlant du système générale.

I 2 REPRESENTATION DE NEWBER-PAPKOVITCH:

La notion de potentiel élastique bidimensionnelle nous est familière, avec le potentiel de contraintes décrit par la fonction d'AIRY.

La représentation de Papkovitch n'est autre qu'une manière d'écrire le champ de déplacements \vec{U} solution de l'équation de Lamé en fonction de certaines fonctions vérifiant des conditions précises.

En effet cherchant la solution de l'équation de Lamé sous la forme suivante:

$$\vec{U} = \vec{B} + \vec{U}_0 \quad (17)$$

ou \vec{B} est la solution de l'équation de Poisson vectorielle:

$$\Delta \vec{B} + \nu^{-1} \vec{f} = 0 \quad (18)$$

et \vec{U}_0 un vecteur correctif.

En imposant à \vec{U}_0 d'avances certaines propriétés, on obtiendra pour celui-ci différentes équations à vérifier.

Cherchons dans notre cas \vec{U}_0 sous la forme suivante:

$$\vec{U}_0 = \text{grad } F \quad (19)$$

Pour trouver l'équation à laquelle satisfait f , portons:

$$\vec{U} = \vec{B} + \text{grad } F \quad (20)$$

En tenant compte que \vec{B} est solution de (I.18), compte tenu de:

$$\Delta \vec{U} = -\nu^{-1} \vec{f} + \text{grad } \Delta F, \quad \text{div } \vec{U} = \text{div } \vec{B} + \Delta F \quad (21)$$

L'équation (I.15) devient, avec $0 < \nu < 0.5$ (ce qui est le cas pour les matériaux usuels):

$$\text{grad} \left[\Delta F + \frac{1}{2}(1-\nu)^{-1} \text{div } \vec{B} \right] = 0 \quad (22)$$

Puisqu'on ne cherche point la solution générale de (I.22); il suffit qu'on ait :

$$\Delta F = -\frac{1}{2}(1-\gamma)^{-1} \operatorname{div} \vec{B} \quad (23)$$

Commençons par évaluer $\Delta(\vec{O}M \cdot \vec{B})$, on a d'abord:

$$\Delta(\vec{O}M \cdot \vec{B}) = (\delta_{jk} B_k + \alpha_k B_{k,j}),_{j'} = 2 \operatorname{div} \vec{B} + \vec{O}M \cdot \Delta \vec{B}. \quad (24)$$

d'ou en tenant compte de (I.18) on a:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{2} \Delta(\vec{O}M \cdot \vec{B}) + \frac{1}{2} \nu^{-1}(\vec{O}M \cdot \vec{f}) \quad (25)$$

En remplaçant maintenant (I.25) dans (I.23), on obtient:

$$\Delta \left[F + \frac{1}{4}(1-\gamma)^{-1}(\vec{O}M \cdot \vec{B}) \right] = -\frac{1}{4}(1-\gamma)^{-1} \nu^{-1}(\vec{O}M \cdot \vec{f}) \quad (26)$$

d'ou en notant:

$$F + \frac{1}{4}(1-\gamma)^{-1}(\vec{O}M \cdot \vec{B}) = -\frac{1}{4}(1-\gamma)^{-1} B_0 \quad (27)$$

En obtient en fin de compte:

$$\Delta B_0 = \nu^{-1}(\vec{O}M \cdot \vec{f}) \quad (28)$$

et l'on a:

$$F = -\frac{1}{4}(1-\gamma)^{-1}(\vec{O}M \cdot \vec{B} + B_0) \quad (29)$$

Le terme correctif est ainsi trouvé, et la solution \vec{U} admet la représentation suivante:

$$\vec{U} = \vec{B} - \frac{1}{4}(1-\gamma)^{-1} \operatorname{grad}(\vec{O}M \cdot \vec{B} + B_0) \quad (30)$$

$$\text{avec: } \Delta \vec{B} = -\nu^{-1} \vec{f}, \quad \Delta B_0 = \nu^{-1}(\vec{O}M \cdot \vec{f}) \quad (31)$$

On vérifie aisément que tout vecteur \vec{U} de la forme donnée par (I.30) est solution de l'équation de Lamé. Par conséquent, la

La représentation (I.30-31) est une condition suffisante mais non nécessaire pour que U soit une solution des équations de Lamé.

Cette représentation est connue sous le nom de représentation de PAPKOVITCH.

Dans le cas de forces volumiques nulles elle s'écrit:

$$\vec{u} = \vec{B} - \frac{1}{4} (1-\nu)^{-1} \text{grad} (\vec{OM} \cdot \vec{B} + B_0) \quad (32)$$

$$\Delta \vec{B}_0 = 0 \quad ; \quad \Delta B_0 = 0 \quad (33)$$

II METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES DE FRONTIERE: (M.E.I.F)

INTRODUCTION:

La M.E.I.F est une technique de calcul qui accuse un retard de développement par rapport aux méthodes des éléments finis et de différences finies. Pour l'instant elle a un champ d'application plus restreint et le nombre de ses utilisateurs et encore modeste.

Elle traite des problèmes régits par :

- ✓ -Des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants à l'intérieur du domaine.
- et par des conditions aux limites aux frontières du domaine.

II.1 HISTORIQUE:

Du point de vue historique, les fondements mathématiques de la M.E.I.F se trouvent dans les travaux de Fredholm (1903) et dans ceux de l'école russe, Mikhlin (1957), Muskhelishvili (1953) et Kupradze (1964).

Les premières publications sur le traitement numérique de l'équation de Laplace sont celles de Sym (1963) et, Jawson et Ponter (1963). Le contour est approché par des segments de droites et la solution supposée constante par segments, la méthode directe est employée.

C'est à Rizzo (1967) que revient les premières approches numériques de l'élasticité par la méthode directe. Les fonctions sont d'abord constantes par segment de droite. Cruse (1969) étend le procédé aux domaines tridimensionnels. Ricardella (1972) introduit une variation linéaire des déplacements et des tensions entre les extrémités de chaque segment, ce qui améliore la solution et diminue

le nombre de segments nécessaires. Cruse (1974) adapte alors la variation linéaire au tridimensionnel. En fin Lachat et Watson (1975), en utilisant la représentation isoparamétrique courante en éléments finis, ont développé la résolution de l'élasticité bi et tridimensionnelle, apparition du premier programme de calcul utilisable industriellement basé sur la M.E.I.F

Dans le cas de la formulation indirecte, on remarque les noms de Watson (1972) de Butterfield en mécanique des roches et Banerjee (1976). Crouch (1976) développe la méthode des discontinuités de déplacements, Crawford et Curran (1983) l'utilisent en viscoélasticité. Wills et All (1984) développent la méthode des discontinuités de déplacements pour le cas tridimensionnel. Une voie très intéressante s'est dégagée en considérant la formulation de cette méthode en champs complexe. On trouve les travaux de Parton (1984) et de Bouhaddane (1987). Des éléments d'ordre supérieur ont été développés pour la résolution de problèmes de propagation de fissure par Belkacemi et All (1988).

II 2 PHYLOSOPHIE DE LA METHODE:

Le principe de la M.E.I.F consiste à transformer les équations d'évolution des phénomènes considérés (équations aux dérivées partielles dans le volume et conditions aux limites sur la frontière) en relations intégrales liant les fonctions connues et inconnues sur la frontière du domaine exclusivement. On a ainsi une diminution de la dimension de l'espace ou l'on résout des équations, puisqu'on remplace un problème tridimensionnel par

exemple, par un problème posé uniquement sur la frontière. La résolution ou le traitement numérique en sont grandement simplifiés.

II 3 PROBLEMES EXTERIEURS ET PROBLEMES INTERIEURS:

On appelle problème extérieur, un problème dans un milieu s'étendant à l'infini, mais pouvant présenter des régions creuses, des cavités etc... par opposition aux problèmes intérieurs limités dans l'espace (fig:II.1) La technique intégrale est pleinement appropriée aux problèmes extérieurs puisqu'on discrétise seulement la surface limitant la cavité.

Dans d'autres techniques, il y aurait besoin d'étendre le maillage suffisamment loin de la cavité pour que les conditions imposées aux noeuds extérieurs n'influencent pas sur la solution au voisinage de celle-ci.

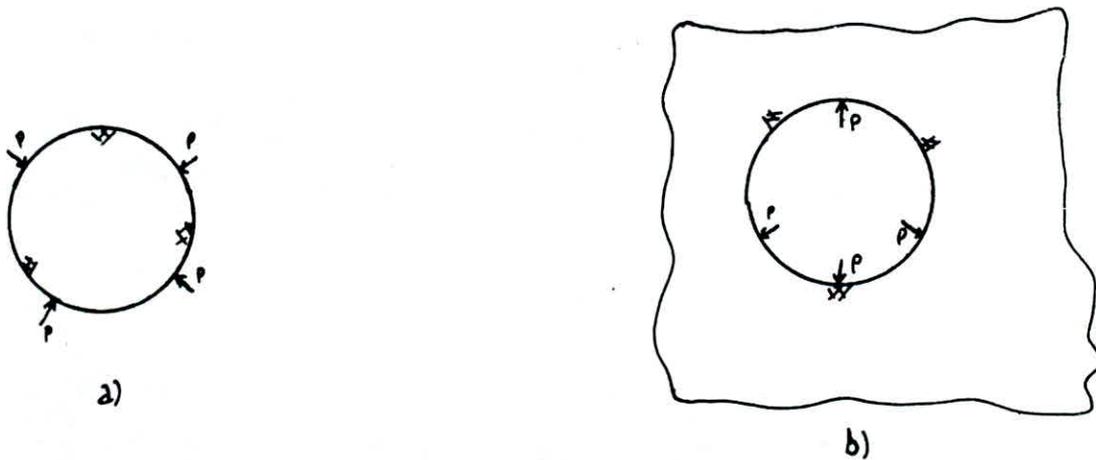


fig II 1:a) problème intérieur
b) problème extérieur

II 4 méthodes directes et méthodes indirectes:

La M.E.I.F a été développée suivant deux approches, donnant lieu à des méthodes directes et des méthodes indirectes.

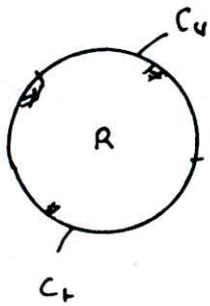
Les méthodes indirectes consistent à imaginer le corps plongé dans un domaine infini (fig:II.2). On distribue en suite dans ce domaine des sources, tels que; forces concentrées, discontinuités de déplacements ...ect

La solution analytique du problème posé par la présence d'une source dans un domaine infini est connue, elle est dite solution fondamentale ou singulière (La connaissance de cette solution est la clé des méthodes indirectes). Elle dépend de la puissance de la source (module de la force, valeur de la discontinuité ...ect.).

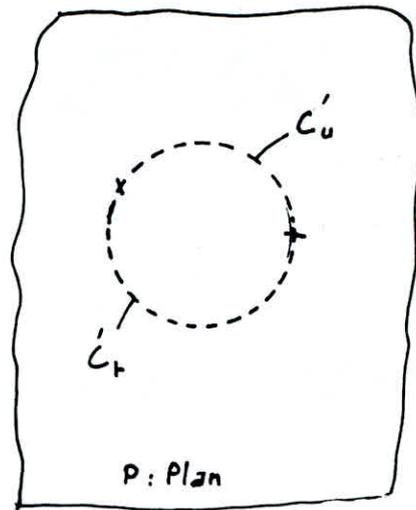
Le problème revient à chercher la puissance de ces sources distribuées de manière que la superposition de leurs effets produise des valeurs sur le contour fictif C' approximativement égales à celles prescrites comme conditions aux limites sur le contour réel C .

Une fois, les puissances des sources déterminées, les solutions fondamentales nous permettent, par le principe de superposition, de trouver les solutions du problème dans R et sur C .

Parce que les valeurs aux limites non spécifiées comme conditions -aux limites- sont calculées indirectement, cette approche est dite méthode intégrale INDIRECTE.



a)



b)

fig:II.2 a)modèle physique

b)modèle de la methode indirecte

Dans la méthode integrale directe, certains théorèmes fondamentaux sont utilisés pour éliminer l'étape intermediaire, en créant un systeme d'équations algébriques reliant les valeurs aux limites connues à celles inconnues, pour cette raison cette approche est dite méthode intégrale INDIRECTE.

le calcul à l'interieur du corps se fait par une relation dite: IDENTITE DE SOMIGLIANA.

Par la suite on 'etudiera une des methodes integrales indirectes: La methode des discontinuites de déplacements.

III METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENTS:

INTRODUCTION:

La methode des discontinuités de déplacements (M.D.D) est une des méthodes des équations intégrales de frontieres indirectes. Elle consiste à introduire comme source, une discontinuité de deplacement (D.D) le long d'un segment de droite. La solution analytique du problème posé par un corps infini contenant cette source est exploitée pour construire un algorithme numérique permettant de résoudre des problèmes complexes en mecanique du solide, tels que les problèmes de fissures, etc...

Bien que la méthode présentée ici ne soit utilisable que pour les problèmes bidimensionnels, elle a été développé, actuellement en tridimensionnel (Wiles et all. 1984).

III.1)- SOLUTION ANALYTIQUE :

III.1.1)- POSITION DU PROBLEME :

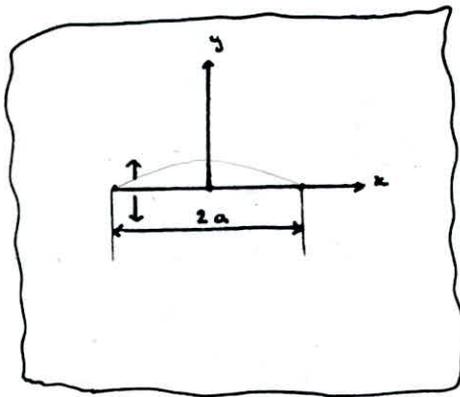
On va chercher une solution (déplacements, contraintes) au problème suivant:

- Un plan infini contenant une D.D le long d'un segment de droite, sous les hypothèses suivantes :
- Corps homogène, élastique, isotrope.
- Forces volumiques nulles ; $f_i = 0$
- Hypothese de déformation plane.

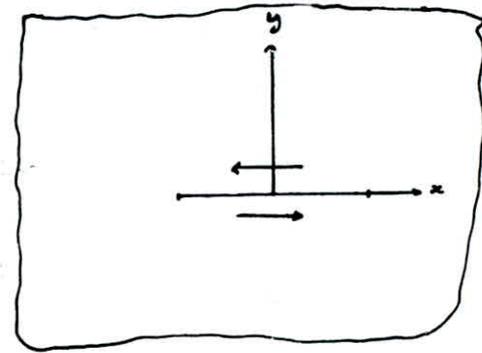
REMARQUE: En presence de forces volumiques, on sera amené à ajouter une solution particulière, plus de détails seront donnés à la fin de ce chapitre.

Une discontinuité de déplacement comme son nom l'indique signifie que le champ de déplacement est discontinu -au niveau du segment-.

On peut schématiser ceci par une fissure ou il y a déplacement relatif d'une lèvres par rapport à l'autre. En déformations planes, ce mouvement peut être décomposé suivant deux directions. La première est normale au plan de la fissure et correspond au mode I d'ouverture en mécanique de la rupture, la deuxième est tangente au plan de la fissure et correspond au mode II. (Fig. 3.1)



Mode I



Mode II

Fig. 3.1 : Schema d'une DD.

En prenant notre repère au milieu de la discontinuité, repère locale, le champ de déplacements sera continu partout, sauf pour $y=0$ $x < a$. Entre $-a$ et a , $y=0$, en passant d'une lèvres ($y=0^-$) à une autre ($y=0^+$), le déplacement présente un saut, qu'on quantifie par:

$$\begin{cases} D_x = U_x(x, 0^-) - U_x(x, 0^+) = U_x^- - U_x^+ \\ D_y = U_y(x, 0^-) - U_y(x, 0^+) = U_y^- - U_y^+ \end{cases} \quad (1)$$

Ces deux expressions définissent la D.D et sont appelées :

D_x : Discontinuité de déplacement tangentielle.

D_y : Discontinuité de déplacement normale.

REMARQUE :

1) En mode I, si D_y est positive, alors les deux lèvres vont se chevaucher, ce qui est impossible physiquement. Aucune restriction mathématique ne prévoit d'objection à cet effet. Pour éviter toute considération conceptuelle, on supposera que notre D.D possède une certaine épaisseur est que D_y lui est toujours inférieur. (Fig. 3.2).

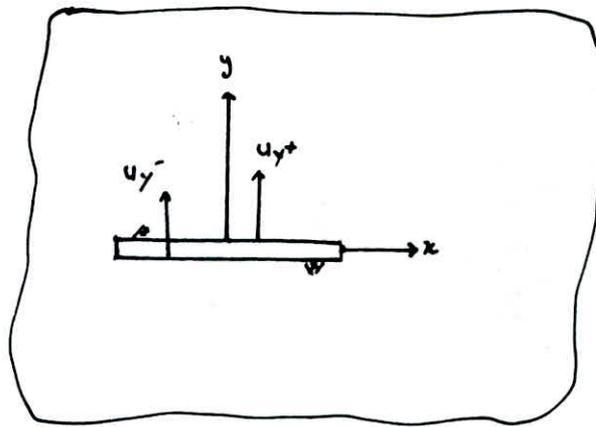


Fig. 3.2 : Schéma d'une DD en mode I.

2) Dans la suite du problème, les D.D introduites comme sources seront prises constantes sur le segment considéré :

$$D_x = \text{Cte.}$$

$$D_y = \text{Cte.}$$

(2)

III.1.2) - SOLUTION DU PROBLEME :

Pour résoudre ce problème, on considère l'effet de chaque discontinuité -normale ou tangentielle- à part, puis, en utilisant le principe de superposition, on retrouve la solution pour une discontinuité de déplacement quelconque.

Dans les deux cas, on utilise une représentation du champs de déplacement de Newber-Papkovitch, qui en déformations planes, et en supposant les forces volumiques nulles, donne : (Cf I.3.2)

$$U_x = B_x - \frac{1}{4} \frac{1}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} (x \cdot B_x + y \cdot B_y + B_0) \quad (a)$$

$$U_y = B_y - \frac{1}{4} \frac{1}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y} (x \cdot B_x + y \cdot B_y + B_0) \quad (b) \quad (3)$$

Avec $\Delta B_0 = 0$; $\Delta \vec{B} = 0$ (c)

1^{er} Cas : Mode I : (Fig. 3.3)

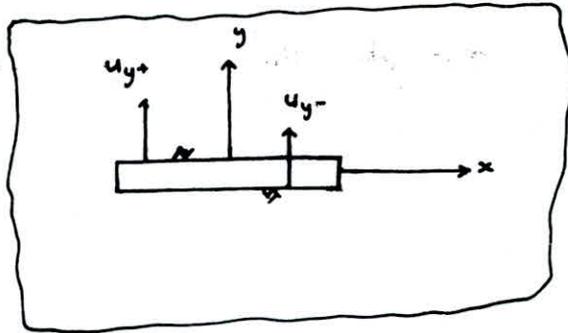


Fig. 3.3 Schéma d'une DD en mode I.

Les conditions à respecter pour avoir un mode d'ouverture de ce type sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xy}(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < +\infty \quad (a) \\ U_y(x, 0) = 0 \quad |x| > a \quad (b) \quad (4) \\ D_y = \lim_{y \rightarrow 0^-} U_y(x, y) - \lim_{y \rightarrow 0^+} U_y(x, y) \quad |x| < a \quad (c) \end{array} \right.$$

Les fonctions de Papkovitch sont choisi comme suit :

(Crouch 1976)

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = 0 \quad (a) \\ B_y = 4(1-\nu) \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (b) \\ B_0 = 4(1-\nu)(1-2\nu) \quad (c) \end{array} \right. \quad (5)$$

Avec $\Delta \phi = 0$ (car $\Delta B_0 = 0$) (d)

Cherchons la fonction ϕ verifiant les conditions (III.4) et (III.5.d).

Les expression des composantes du vecteur déplacement en fonction de ϕ , compte tenu de (II.3) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x = -(1-2\nu) \frac{\partial \phi}{\partial x} - \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y^2} \\ U_y = 2(1-\nu) \frac{\partial \phi}{\partial y} - \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (6)$$

Les expressions des contraintes en fonction de ϕ , compte tenu des relations (I.1), (I.2) ecrites en deformations planes sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = 2G \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) \\ \sigma_{yy} = 2G \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \gamma \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) \\ \sigma_{xy} = -2G \gamma \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \end{array} \right. \quad (7)$$

avec $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (8)

Pour que la condition $\sigma_{xy} = 0$ sur l'axe x soit vérifiée ; il faut que :

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \Big|_{y=0} \text{ soit finie} \quad (9)$$

La fonction ϕ est obtenue à l'aide de U_y , de la D.D D_y et en introduisant la fonction harmonique :

$$\text{Arctg} \frac{y}{x}$$

On a ; de (III.4) et (III.6) :

$$U_y = 2(1-\nu) \frac{\partial \phi}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (10)$$

et

$$D_y = \lim_{y \rightarrow 0^-} U_y - \lim_{y \rightarrow 0^+} U_y \quad |x| < a \quad (11)$$

c.à.d

$$D_y = \begin{cases} 2(1-\nu) \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} (x, y) \Big|_{y=0^-} - \frac{\partial \phi}{\partial y} (x, y) \Big|_{y=0^+} \right] ; |x| < a \\ 0 ; |x| > a \end{cases} \quad (12)$$

alors :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0^-} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0^+} = \begin{cases} \frac{\sigma_y}{2(1-\nu)} ; |x| < a \\ 0 ; |x| > a \end{cases} \quad (13)$$

On cherchera alors une fonction ϕ harmonique vérifiant cette relation.

Soit la fonction : $\text{Arctg} Y/X$ définie par :

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} + k\pi \quad (14)$$

avec $-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \leq +\frac{\pi}{2}$ Argument de $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ (15)

et ; $k = \begin{cases} +1 & \text{si } x < 0 & y > 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 & \\ -1 & \text{si } x < 0 & y < 0 \end{cases}$ (16)

alors $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \begin{cases} 0 & ; x > 0 & ; y = 0^+ \\ 0 & ; x > 0 & ; y = 0^- \\ +\pi & ; x < 0 & ; y = 0^+ \\ -\pi & ; x < 0 & ; y = 0^- \end{cases}$ (17)

On voit qu'il y a présence d'une discontinuité en passant de $y = 0^-$ à $y = 0^+$, pour $x < 0$.

On construit à partir de cette fonction, une fonction $h(x,y)$ définie par :

$$h(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} \quad (18)$$

En remarquant que :

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} = \begin{cases} -\pi & \text{si } x < -a & ; y = 0^- \quad (a) \\ +\pi & \text{si } x < -a & ; y = 0^+ \quad (b) \\ 0 & \text{si } x > -a & ; y = 0^\pm \quad (c) \end{cases} \quad (19)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{x-a} = \begin{cases} -\pi & \text{si } x < a & ; y = 0^- \text{ (d)} \\ +\pi & \text{si } x < a & ; y = 0^+ \text{ (e)} \\ 0 & \text{si } x > a & ; y = 0^\pm \text{ (f)} \end{cases} \quad (20)$$

on a:

$$h(x, y) = \begin{cases} 0; x > a & y = 0^\pm \text{ (a)-(d)} \\ 0; x < -a & y = 0^+ \text{ (b)-(e)} \\ 0; x < -a & y = 0^- \text{ (c)-(f)} \\ +\pi; -a < x < a & y = 0^- \text{ (c)-(d)} \\ -\pi; -a < x < a & y = 0^+ \text{ (c)-(e)} \end{cases} \quad (21); \quad h(x, y) = \begin{cases} 0; |x| > a & y = 0^\pm \\ +\pi; |x| < a & y = 0^- \\ -\pi; |x| < a & y = 0^+ \end{cases} \quad (22)$$

On forme alors la difference suivante :

$$h(x, y)|_{y=0^-} - h(x, y)|_{y=0^+} = \begin{cases} 0; |x| > a \\ -2\pi; |x| < a \end{cases} \quad (23)$$

En l'identifiant à l'expression (III.13), on obtient l'égalité suivante

$$\frac{1}{2\pi} \left[h(x, y)|_{y=0^-} - h(x, y)|_{y=0^+} \right] = \frac{2(1-\nu)}{D_y} \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0^-} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0^+} \right] \quad (24)$$

On en tire alors notre fonction ϕ : tel que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{4\pi} \frac{D_y}{(1-\nu)} h(x, y) \quad (25)$$

En remarquant que :

$$\int \operatorname{arctg} \frac{y}{\alpha} dy = y \operatorname{arctg} \frac{y}{\alpha} - \alpha \operatorname{Ln} \left[(\alpha^2 + y^2)^{1/2} \right] \quad (26)$$

La fonction ϕ est donnée par :

$$\phi(x, y) = \frac{-1}{4\pi} \frac{Dy}{(1-\nu)} \left\{ y \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \operatorname{Ln} \left(\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \right) + (x+a) \operatorname{Ln} \left(\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right) \right\} \quad (27)$$

Verifions que ϕ respecte les conditions imposées :

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-a)^2 - y^2}{((x-a)^2 + y^2)^2} - \frac{(x+a)^2 - y^2}{((x+a)^2 + y^2)^2} \right] \quad (28)$$

pour $y=0$; $\frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} = 0$
 qui est bien finie : la condition (III.9) est vérifiée.

On a aussi $\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (29)$

En effet : $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{D_x}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{(x+a)}{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (30)$

L'harmonicité est donc vérifiée.

Ayant trouvé la fonction ϕ , le problème est résolu, la solution trouvée est exacte, elle vérifie l'équation homogène de Lamé et elle respecte les conditions imposées en mode I.

En prenant la fonction f comme suit :

$$f(x, y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[y \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \operatorname{Ln} \left((x-a)^2 + y^2 \right)^{1/2} + (x+a) \operatorname{Ln} \left((x+a)^2 + y^2 \right)^{1/2} \right] \quad (31)$$

ϕ s'écrit

$$\phi(x, y) = Dy \cdot f(x, y) \quad (32)$$

Les déplacements et les contraintes en mode I s'écrivent :

$$\begin{cases} u_x = D_y [-(1-2\nu) f, x - y f, xy] \\ u_y = D_y [2(1-\nu) f, y - y f, yy] \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2G D_y [f, yy + y f, yyy] \\ \sigma_{yy} = 2G D_y [f, yy - y f, yyy] \\ \sigma_{xy} = 2G D_y [-y \cdot f, xyy] \end{cases} \quad (34)$$

2^{ème} cas : Mode II : (Fig. 3.4) :

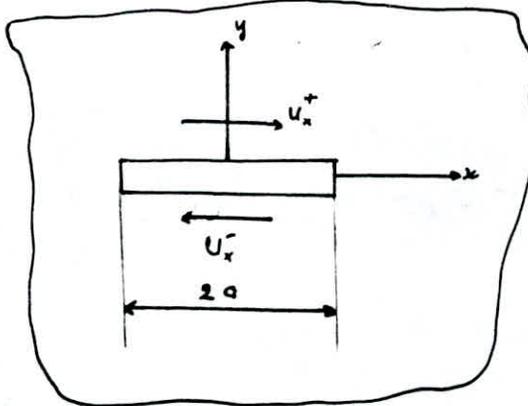


Fig. 3.4 : Schéma d'une DD en mode II

Les conditions à respecter pour avoir un mode de déplacement de ce genre sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0) &= 0 & -\infty < x < +\infty & \quad (a) \\ u_x(x, 0) &= 0 & |x| > a & \quad (b) \\ D_x &= \lim_{y \rightarrow 0^-} u_x - \lim_{y \rightarrow 0^+} u_x & |x| < a & \quad (c) \end{aligned} \quad (35)$$

Les fonctions de Papkovitch sont choisies comme suit :

(CROUCH.1976)

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = 0 \quad (a) \\ B_y = 4(1-\nu) \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad (b) \\ B_0 = 8(1-\nu)^2 \int \frac{\partial \chi}{\partial x} dy \quad (c) \end{array} \right. \quad (36)$$

Avec : $\Delta \chi = 0$ (car $\Delta B_0 = 0$) (d)

D'après (III.3), les composantes du vecteur déplacement sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x = 2(1-\nu) \frac{\partial \chi}{\partial y} + y \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \\ U_y = (1-2\nu) \frac{\partial \chi}{\partial x} - y \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (37)$$

En utilisant les relations (I.1) et (I.2) en deformation plane, on obtient les contraintes en fonction de χ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = 2G \left(2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial y^2} \right) \\ \sigma_{yy} = -2G \cdot y \frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial y^2} \\ \sigma_{xy} = 2G \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + y \frac{\partial^3 \chi}{\partial y^3} \right) \end{array} \right. \quad (38)$$

En reprenant la meme procedure que pour le mode I, on arrive a construire la fonction χ qui nous permet de respecter les conditions d'harmonicite et celles imposees en mode II.

On trouve :

$$\chi(x,y) = \frac{-1}{4\pi} \frac{D_x}{1-\nu} \left\{ y \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} \right) + (x+a) \operatorname{Ln} \left[(x+a)^2 + y^2 \right]^{1/2} - (x-a) \operatorname{Ln} \left[(x-a)^2 + y^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (39)$$

qui s'écrit simplement en fonction de $f(x,y)$ de (II.31).

$$\chi(x,y) = D_x \cdot f(x,y) \quad (40)$$

On a alors immédiatement, puisque D_x est constante.

$$\Delta \chi = 0 \quad (\text{car } \Delta f = 0) : \chi \text{ est harmonique.} \quad (41)$$

$$\left. \frac{\partial^3 \chi}{\partial x \partial y^2} \right|_{y=0} = 0 \quad \text{est fini : la condition (III.35a) est vérifiée.} \quad (42)$$

Les déplacements ainsi que les contraintes s'écrivent en fonction de $f(x,y)$ par :

$$\begin{cases} u_x = D_x [2(1-\nu) f, y + \nu f, yy] \\ u_y = D_x [(1-2\nu) f, x - \nu f, xy] \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2G D_x [2 f, xy + \nu f, xyy] \\ \sigma_{yy} = 2G D_x [-\nu \cdot f, xyy] \\ \sigma_{xy} = 2G D_x [f, yy + \nu f, yyy] \end{cases} \quad (44)$$

3^{ème} cas : Mode mixte :

Le mode mixte est la coexistence des deux modes I et II, en utilisant le principe de superposition (voir Annexe B), on obtient directement la solution pour une discontinuité de déplacement D de composantes D_x, D_y dans le repère (O,x,y) . (Fig. 3.5).

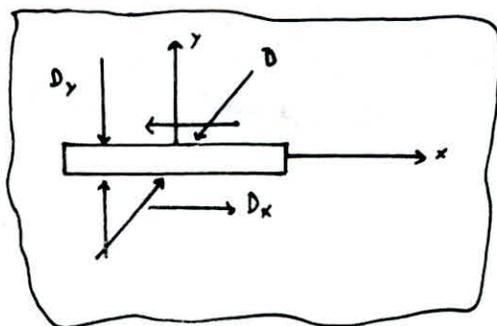


Fig. 3.5 : Schéma d'une DD en mode mixte.

De (III.33) et (III.43) on a :

$$\begin{cases} u_x = D_x [2(1-\nu) f, y + \eta \cdot f, y \eta] + D_y [-(1-2\nu) f, x - \eta f, xy] \\ u_y = D_x [(1-2\nu) f, x - \eta f, xy] + D_y [2(1-\nu) f, y - \eta f, y \eta] \end{cases} \quad (45)$$

De (III.34) et (III.44) on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G D_x [2 f, xy + \eta f, xy \eta] + 2G D_y [f, yy + \eta f, yy \eta] \\ \sigma_{yy} &= 2G D_x [-\eta f, xyy] + 2G D_y [f, yy - \eta f, yy \eta] \\ \sigma_{xy} &= 2G D_x [f, yy + \eta f, yy \eta] + 2G D_y [-\eta \cdot f, xyy] \end{aligned} \quad (46)$$

Les dérivées de la fonction f utilisées dans les expressions des déplacements et des contraintes sont :

$$f(x, y) = F_1(x, y) \quad (a)$$

$$f, x = \frac{\partial f}{\partial x} = F_2(x, y) = + \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\text{Ln} [(x-a)^2 + y^2]^{1/2} - \text{Ln} [(x+a)^2 + y^2]^{1/2} \right] \quad (b)$$

$$f, y = \frac{\partial f}{\partial y} = F_3(x, y) = - \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\text{arctg} \frac{y}{x-a} - \text{arctg} \frac{y}{x+a} \right] \quad (c)$$

$$f, xy = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = F_4(x, y) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (d)$$

$$f, xx = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = F_5(x, y) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right] = -f, yy \quad (e)$$

$$f, xyy = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = F_6(x, y) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-a)^2 - y^2}{((x-a)^2 + y^2)^2} - \frac{(x-a)^2 - y^2}{((x+a)^2 + y^2)^2} \right] \quad (f)$$

$$f, yyy = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = F_7(x, y) = \frac{2y}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-a)}{((x-a)^2 + y^2)^2} - \frac{(x+a)}{((x+a)^2 + y^2)^2} \right] \quad (g)$$

On peut vérifier que les déplacements sont continus dans le domaine sauf pour $|x| < a$, $y=0$, où il y a présence des discontinuités D_x et D_y .

En effet, en utilisant la fonction \arctg défini par (III.14,15,16), les expressions des déplacements pour $y=0$ sont :

$$1/ \quad |x| > a \quad y = 0^\pm$$

$$u_x(x, 0) = - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \operatorname{Ln} \frac{|x-a|}{|x+a|} \quad (a)$$

$$u_y(x, 0) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \operatorname{Ln} \frac{|x-a|}{|x+a|} \quad (b)$$

$$2/ \quad |x| < a \quad y = 0^+$$

$$u_x(x, 0^+) = -\frac{1}{2} D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \operatorname{Ln} \frac{|x-a|}{|x+a|} \quad (c) \quad (48)$$

$$u_y(x, 0^+) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \operatorname{Ln} \frac{|x-a|}{|x+a|} - \frac{1}{2} D_y \quad (d)$$

$$3/ \quad |x| < a \quad y = 0^-$$

$$u_x(x, 0^-) = +\frac{1}{2} D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \operatorname{Ln} \frac{|x-a|}{|x+a|} \quad (e)$$

On a bien

$$u_x^- - u_x^+ = D_x \quad |x| < a \quad (49)$$

$$u_y^- - u_y^+ = D_y \quad |x| < a$$

Pour ce qui est des contraintes le long de l'axe x, elles ont pour expression :

$$\sigma_{xx}(x,0) = -\frac{G}{2\pi(1-\nu)} D_y \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2-a^2} \quad y=0^\pm$$

$$\sigma_{yy}(x,0) = -\frac{aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2-a^2} \quad y=0^\pm \quad (50)$$

$$\sigma_{xy}(x,0) = \frac{-aG}{\pi(1-\nu)} D_x \frac{1}{x^2-a^2} \quad y=0^\pm$$

REMARQUE :

-Les contraintes ne présentent pas de discontinuités, même au niveau du segment.

-Les déplacements et les contraintes présentent une singularité pour $x=\pm a$, $y=0$; nous avons donc obtenu une solution singulière (cf II.4) qui se comporte bien dans tout le domaine sauf pour $x=\pm a$, $y=0$ où elle n'est pas définie.

L'algorithme numérique développé à partir de cette solution sera exploité hors de ces points.

III 2 PROCEDURE NUMERIQUE :

On va maintenant utiliser la solution analytique développée au para graphe précédent pour construire un algorithme numérique qui puisse résoudre des problèmes de mécanique du solide.

III.2.1 DISCONTINUITTE DE DEPLACEMENT ARBITRAIREMENT ORIENTEE :

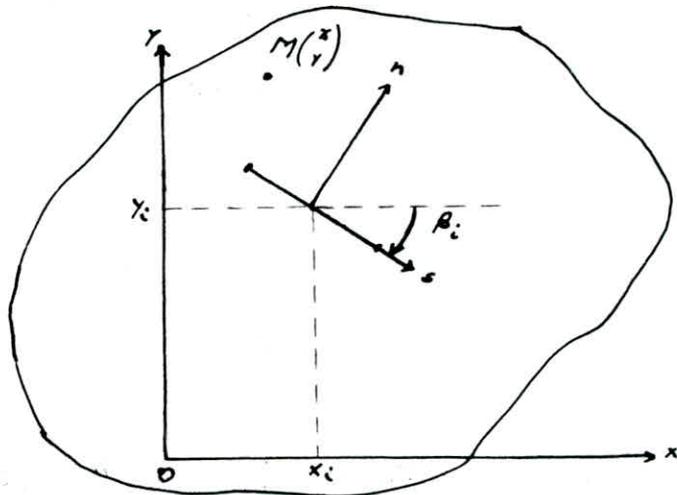


Fig. 3.6 : DD arbitrairement orientee

Un point M du domaine ayant les coordonnees \$(x, y)\$ dans le repere globale \$(O, X, Y)\$ aura pour coordonnees dans le repere locale de la DD-i- \$(i, s, n)\$; \$(\bar{x}^i, \bar{y}^i)\$ tel que :

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= \cos \beta_i (x - x_i) - \sin \beta_i (y - y_i) \\ \bar{y}^i &= \sin \beta_i (x - x_i) + \cos \beta_i (y - y_i) \end{aligned} \quad (51)$$

Ou \$x_i, y_i\$ represente les coordonnees du milieu de la DD-i- dans le repere globale.

Les deplacements et les contraintes sont donnees dans le repere locale par les relations (III.45) et (III.46), on a :

$$\begin{cases} u_{\bar{x}} = D_s^i [2(1-\nu)\bar{F}_3 - \bar{y}^i \bar{F}_5] + D_n^i [-(1-2\nu)\bar{F}_2 - \bar{y}^i \bar{F}_4] \\ u_{\bar{y}} = D_s^i [(1-2\nu)\bar{F}_2 - \bar{y}^i \bar{F}_4] + D_n^i [2(1-\nu)\bar{F}_3 + \bar{y}^i \bar{F}_5] \end{cases} \quad (52)$$

$$\begin{cases} \sigma_{\bar{x}\bar{x}} = 2G D_s^i [2\bar{F}_4 + \bar{y}^i \bar{F}_6] + 2G D_n^i [-\bar{F}_5 + \bar{y}^i \bar{F}_7] \\ \sigma_{\bar{y}\bar{y}} = 2G D_s^i [-\bar{y}^i \bar{F}_6] + 2G D_n^i [-\bar{F}_5 - \bar{y}^i \bar{F}_7] \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} = 2G D_s^i [-\bar{F}_6 + \bar{y}^i \bar{F}_7] + 2G D_n^i [-\bar{y}^i \bar{F}_6] \end{cases} \quad (53)$$

avec : $\bar{F}_k = F_k(\bar{x}^i, \bar{y}^i) \quad k=1,7$.

D_n : DD normale ; D_s : DD tangentielle.

Les déplacements et les contraintes, dans le repère globale sont obtenues en utilisant les relations (1.6, 2.2; Annexe B) ; on trouve :

$$\begin{cases} u_x = D_s^i \left[-(1-2\nu) \sin \beta_i \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \beta_i \bar{F}_3 + \bar{y}^i (\sin \beta_i \bar{F}_4 - \cos \beta_i \bar{F}_5) \right] + \\ \quad + D_n^i \left[-(1-2\nu) \cos \beta_i \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \beta_i \bar{F}_3 - \bar{y}^i (\cos \beta_i \bar{F}_4 + \sin \beta_i \bar{F}_5) \right] \\ u_y = D_s^i \left[(1-2\nu) \cos \beta_i \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \beta_i \bar{F}_3 - \bar{y}^i (\cos \beta_i \bar{F}_4 + \sin \beta_i \bar{F}_5) \right] + \\ \quad + D_n^i \left[-(1-2\nu) \sin \beta_i \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \beta_i \bar{F}_3 - \bar{y}^i (\sin \beta_i \bar{F}_4 - \cos \beta_i \bar{F}_5) \right] \end{cases} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = 2G D_s^i \left[2 \cos^2 \beta_i \bar{F}_4 + \sin 2\beta_i \bar{F}_5 + \bar{y}^i (\cos 2\beta_i \bar{F}_6 - \sin 2\beta_i \bar{F}_7) \right] + \\ + 2G D_n^i \left[-\bar{F}_5 + \bar{y}^i (\sin 2\beta_i \bar{F}_6 + \cos 2\beta_i \bar{F}_7) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = 2G D_s^i \left[2 \sin^2 \beta_i \bar{F}_4 - \sin 2\beta_i \bar{F}_5 - \bar{y}^i (\cos 2\beta_i \bar{F}_6 - \sin 2\beta_i \bar{F}_7) \right] + \\ + 2G D_n^i \left[-\bar{F}_5 - \bar{y}^i (\sin 2\beta_i \bar{F}_6 + \cos 2\beta_i \bar{F}_7) \right] \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = 2G D_s^i \left[\sin 2\beta_i \cdot \bar{F}_4 - \cos 2\beta_i \bar{F}_5 + \bar{y}^i (\sin 2\beta_i \cdot \bar{F}_6 + \cos 2\beta_i \bar{F}_7) \right] + \\ + 2G D_n^i \left[-\bar{y}^i (\cos 2\beta_i \bar{F}_6 - \sin 2\beta_i \cdot \bar{F}_7) \right] \end{aligned}$$

Ces expressions peuvent étre mises sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_x = D_s^i (B_{x\beta}^i) + D_n^i (B_{xn}^i) \\ u_y = D_s^i (B_{y\beta}^i) + D_n^i (B_{yn}^i) \end{cases} \quad (a)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = D_s^i (A_{x\beta}^i) + D_n^i (A_{xn}^i) \\ \sigma_{yy} = D_s^i (A_{y\beta}^i) + D_n^i (A_{yn}^i) \\ \sigma_{xy} = D_s^i (A_{xy\beta}^i) + D_n^i (A_{xyn}^i) \end{cases} \quad (b) \quad (56)$$

Le passage du repère locale au repère globale nous permettra d'utiliser facilement le principe de superposition .

III. 3.2 CAS DE 2 DISCONTINUITÉES DE DEPLACEMENTS ARBITRAIREMENT ORIENTÉES :

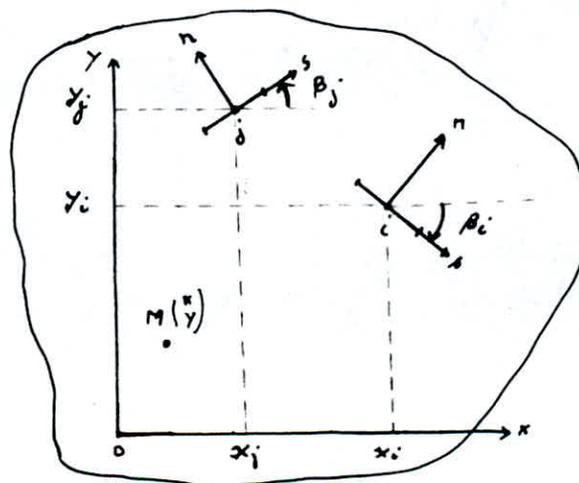


Fig. 3.7 plan infini contenant 2 DD.

En appliquant la DD-i-toute seule, on obtient les solutions données par (III.56).

En appliquant la DD-j-toute seule, on obtient des solutions données par les mêmes relations en ajustant les paramètres relatifs à j dans ces relations.

Si maintenant on applique les deux DD simultanément, la solution sera obtenue en superposant les deux solutions précédentes. Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = D_s^i (B_{x\beta}^i) + D_n^i (B_{xn}^i) + D_s^j (B_{x\beta}^j) + D_n^j (B_{xn}^j) \\ u_y = D_s^i (B_{y\beta}^i) + D_n^i (B_{yn}^i) + D_s^j (B_{y\beta}^j) + D_n^j (B_{yn}^j) \\ \sigma_{xx} = D_s^i (A_{x\beta}^i) + D_n^i (A_{xn}^i) + D_s^j (A_{x\beta}^j) + D_n^j (A_{xn}^j) \\ \sigma_{yy} = D_s^i (A_{y\beta}^i) + D_n^i (A_{yn}^i) + D_s^j (A_{y\beta}^j) + D_n^j (A_{yn}^j) \\ \sigma_{xy} = D_s^i (A_{xy\beta}^i) + D_n^i (A_{xyn}^i) + D_s^j (A_{xy\beta}^j) + D_n^j (A_{xyn}^j) \end{array} \right. \quad (57)$$

III.3.3 CAS DE N DD ARBITRAIREMENT ORIENTÉES :

Le résultat obtenu pour deux DD peut être généralisé à N DD .

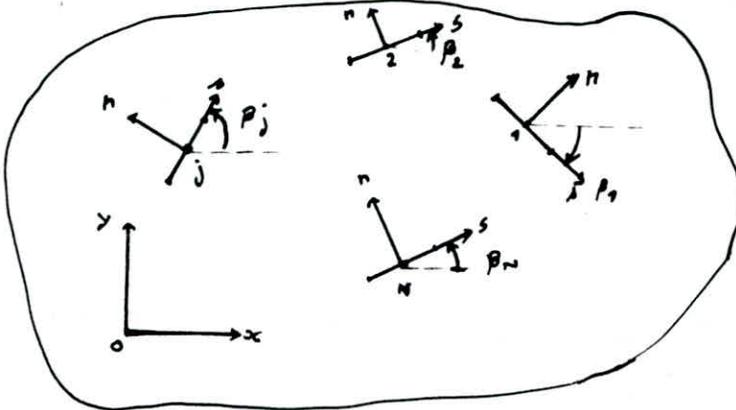


Fig. 3.8 : Plan infini contenant N DD

La solution s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \sum_{j=1}^N D_s^j (B_{x\beta}^j) + \sum_{j=1}^N D_n^j (B_{xn}^j) \\ u_y = \sum_{j=1}^N D_s^j (B_{y\beta}^j) + \sum_{j=1}^N D_n^j (B_{yn}^j) \\ \sigma_{xx} = \sum_{j=1}^N D_s^j (A_{x\beta}^j) + \sum_{j=1}^N D_n^j (A_{xn}^j) \end{array} \right. \quad (a) \quad (58)$$

$$\begin{cases} \sigma_{yy} = \sum_{j=1}^N D_s^j (A_{yA}^j) + \sum_{j=1}^N D_n^j (A_{yn}^j) \\ \sigma_{xy} = \sum_{j=1}^N D_s^j (A_{xyA}^j) + \sum_{j=1}^N D_n^j (A_{xyn}^j) \end{cases} \quad (b)$$

Ces relations nous permettent de calculer les déplacements en n'importe quel point du corps.

III.2.4 COEFFICIENTS D'INFLUENCES :

A partir des relations (III.58) on peut calculer les déplacements et les contraintes au milieu de chaque DD dans le repère globale.

En utilisant les relations de changement de repère (Annexe B), on peut les écrire dans le repère locale de la DD ou on les calcul. On obtient:

$$u_s^i = \sum_{j=1}^N D_s^j \left[(1-2\nu) \sin \delta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \delta \bar{F}_3 - \bar{\eta}^i (\sin \delta \bar{F}_4 + \cos \delta \bar{F}_5) \right] + \sum_{j=1}^N D_n^j \left[-(1-2\nu) \cos \delta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \delta \bar{F}_3 - \bar{\eta}^i (\cos \delta \bar{F}_4 - \sin \delta \bar{F}_5) \right] \quad i=1, N \quad (59)$$

$$u_n^i = \sum_{j=1}^N D_s^j \left[(1-2\nu) \cos \delta \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \delta \bar{F}_3 - \bar{\eta}^i (\cos \delta \bar{F}_4 - \sin \delta \bar{F}_5) \right] + \sum_{j=1}^N D_n^j \left[(1-2\nu) \sin \delta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \delta \bar{F}_3 + \bar{\eta}^i (\sin \delta \bar{F}_4 + \cos \delta \bar{F}_5) \right]$$

$$\sigma_s^i = 2G D_s^j \left[-2 \sin 2\delta \bar{F}_4 - \cos 2\delta \bar{F}_5 - \bar{\eta}^i (\sin 2\delta \bar{F}_6 - \cos 2\delta \bar{F}_7) \right] + 2G D_n^j \left[-\bar{\eta}^i (\cos 2\delta \bar{F}_6 + \sin 2\delta \bar{F}_7) \right] \quad i=1, N \quad (60)$$

$$\sigma_n^i = 2G D_s^j \left[2 \sin^2 \delta \bar{F}_4 + \sin 2\delta \bar{F}_5 - \bar{\eta}^i (\cos 2\delta \bar{F}_6 + \sin 2\delta \bar{F}_7) \right] + 2G D_n^j \left[-\bar{F}_5 + \bar{\eta} (\sin 2\delta \bar{F}_6 - \cos 2\delta \bar{F}_7) \right]$$

Avec $\gamma = \beta_i - \beta_j$ Donne l'inclinaison de l'élément i par rapport à l'élément j

Ces deux systèmes sont mis sous la forme suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_s^i = \sum_{j=1}^N D_s^j B_{ss}^{ij} + \sum_{j=1}^N D_n^j B_{sn}^{ij} \\ U_n^i = \sum_{j=1}^N D_s^j B_{ns}^{ij} + \sum_{j=1}^N D_n^j B_{nn}^{ij} \end{array} \right. \quad i=1, N \quad (61)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_s^i = \sum_{j=1}^N D_s^j A_{ss}^{ij} + \sum_{j=1}^N D_n^j A_{sn}^{ij} \\ \sigma_n^i = \sum_{j=1}^N D_s^j A_{ns}^{ij} + \sum_{j=1}^N D_n^j A_{nn}^{ij} \end{array} \right. \quad i=1, N \quad (62)$$

Les coefficients A_{ss}^{ij} ...etc, sont appelés coefficients d'influences -relatifs aux contraintes sur la frontière-. A_{sn}^{ij} donne par exemple la contrainte de cisaillement au milieu de la DD i due à une DD normale j unitaire.

Les coefficients B_{ss}^{ij} ...etc, sont appelés coefficients d'influences -relatifs aux déplacements sur la frontière-. B_{sn}^{ij} donne le déplacement tangentiel au milieu de la DD i due à une DD normale unitaire j.

III.2.4.1 TERMES DIAGONAUX DES COEFFICIENTS D'INFLUENCES:

L'influence d'une DD i sur les déplacements et les contraintes au milieu du segment i de la même DD est donnée par les éléments -self-effects- ou les termes diagonaux des coefficients d'influences.

Ces elements sont obtenus en évaluant (III.61) et (III.62) pour ;
 $N=1$, $x_i = x_j$, $y_i = y_j$, on a:

$$\begin{cases} u_s^i = D_s^i \left[2(1-\nu) \bar{F}_3(0,0) \right] + D_n^i \left[-(1-2\nu) \bar{F}_2(0,0) \right] \\ u_n^i = D_s^i \left[(1-2\nu) \bar{F}_2(0,0) \right] + D_n^i \left[2(1-\nu) \bar{F}_3(0,0) \right] \end{cases} \quad (63)$$

$$\begin{cases} \sigma_s^i = 2G D_s^i \left[-\bar{F}_5(0,0) \right] + 2G D_n^i \left[0 \right] \\ \sigma_n^i = 2G D_s^i \left[0 \right] + 2G D_n^i \left[-\bar{F}_5(0,0) \right] \end{cases} \quad (64)$$

Sachant que : $F_2(0,0) = 0$ (65)

$$F_3(0,0^+) = -\frac{1}{4(1-\nu)} \quad (66)$$

$$F_3(0,0^-) = \frac{1}{4(1-\nu)} \quad (67)$$

$$F_5(0,0^+) = \frac{-1}{2\pi(1-\nu) a^i} \quad (68)$$

On a:

$$\begin{cases} u_s^{i+} = -\frac{1}{2} D_s^i & , & u_s^{i-} = +\frac{1}{2} D_s^i \\ u_n^{i+} = -\frac{1}{2} D_n^i & , & u_n^{i-} = +\frac{1}{2} D_n^i \\ \sigma_s^i = \frac{G D_s^i}{\pi(1-\nu) a^i} \\ \sigma_n^i = \frac{G D_n^i}{\pi(1-\nu) a^i} \end{cases} \quad (69)$$

On voit alors que les termes self-effects sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{sn}^{ii} = B_{ns}^{ii} = A_{sn}^{ii} = A_{ns}^{ii} = 0 \\ A_{ss}^{ii} = A_{nn}^{ii} = \frac{G}{\pi(1-\nu)a^i} \\ B_{ss}^{ii} = +\frac{1}{2} \quad \text{pour } \nu = 0^- \\ B_{ss}^{ii} = -\frac{1}{2} \quad \text{pour } \nu = 0^+ \end{array} \right. \quad (70)$$

REMARQUE :

D'un point de vu numerique, la caractéristique critique de n'importe quelle M.E.I.F est la determination des 'éléments self-effect.

III.2.5 APPLICATION DE LA PROCEDURE NUMERIQUE :

On va appliquee la procédure numérique à un problème de cavité soumise à une pression uniforme p_0 (Fig. 3.9a).

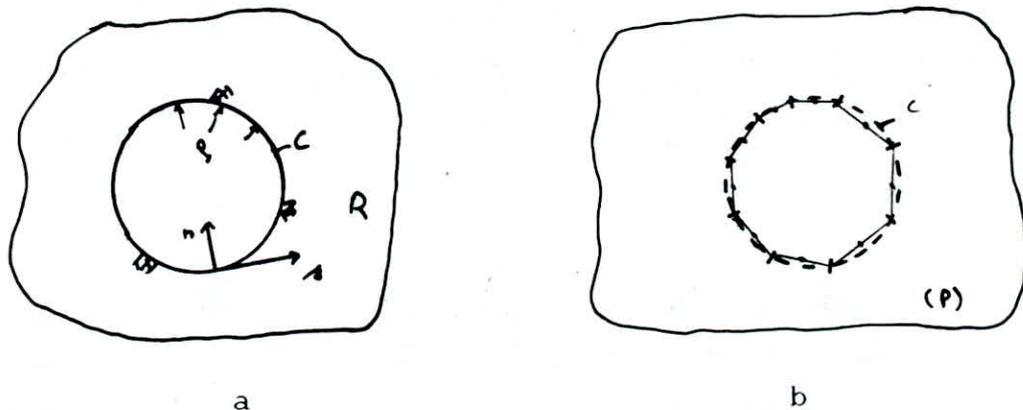


Fig. 3.9 : probleme de cavite
 a):modèle physique
 b):modèle numerique

On a les hypotheses suivantes :-Forces volumiques nulles
 -Hypothese de déformations planes

En un point du contour C , on définit les vecteurs \vec{s} et \vec{n} , tangent et normale au contour (Fig. 3.9a)

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \sigma_n = -P \\ \sigma_s = 0 \end{cases} \quad (71)$$

En tout point de la frontière C .

Pour résoudre ce problème par la M.D.D on procède comme suit :

1- On approxime la frontière C par N segments de droites, adjacents. Ce sont les éléments de frontière.

2- On considère que chaque segment est soumis à une contrainte normale constante $\bar{\sigma}_n = -P$ et une contrainte tangentielle constante $\bar{\sigma}_s = 0$.

Les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \sigma_n^i = -P \\ \sigma_s^i = 0 \end{cases} \quad i = 1, N \quad (72)$$

REMARQUE :

Même si la pression n'est pas uniforme on supposera que chaque élément est soumis à des contraintes constantes.

3- On considère alors une COURBE C' (Fig. 3.9b) identique à C , dans un plan infini. Il faut remarquer que C' n'est pas une frontière, mais elle nous permet seulement de localiser dans un domaine infini, des segments de droites *coïncidant* avec les éléments de frontières du problème réel.

4- Appliquons sur chaque segment de C' une discontinuite de déplacement constante telle que pour chaque segment j on ait :

$$\begin{cases} D_n^j = \hat{U}_n^j - \hat{U}_{n+}^j \\ D_s^j = \hat{U}_s^j - \hat{U}_{s+}^j \end{cases} \quad (73)$$

5- On va maintenant faire une remarque critique, c'est que-dans ce cas;contoure fermé-les déplacements U_n^j , U_n^- , U_s^j , U_s^- pour chaque DD de C' ne sont pas les memes que \hat{U}_n^j , \hat{U}_n^- , \hat{U}_s^j , \hat{U}_s^- respectivement. Il faut distinguer entre deux differentes sortes de déplacements pour chaque DD de C'. Sur le segment j par exemple, nous avons les déplacements APPLIQUES sous forme de DD et les déplacements ACTUELS qui sont induit par l'application de N,DD.

REMARQUE :

Dans cet exemple les DD sont FICTIVES d'ou la nuance entre les deux déplacements. Dans le cas d'un contoure ouvert (fissure courbe) les discontinuites de déplacements representes le déplacement REEL d'une levre par rapport l'autre, ainsi les déplacements actuels et appliqués sont les memes.

6- En utilisant les relations (III.62), on peut exprimer les contraintes ACTUELLES σ_s^i et σ_n^i au milieu de chaque DD, induites par les N.DD.

7 Si maintenant on arrive à trouver les DD appliquées de façon que les contraintes actuelles σ_s^i et σ_n^i soient les memes que celles spécifiées comme conditions aux limites par (III.72), on aura résolu le problème NUMERIQUEMENT, puisque les contraintes et les déplacements en n'importe quel point du corps peuvent être calculé à partir de (III.58), une fois les DD calculées.

Pour cela on aura à résoudre le système d'équations algébriques

suisant :

$$\begin{cases} 0 = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\ -p = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j \end{cases} \quad (74)$$

Qu'on met sous la forme suivante:

$$\{\sigma\} = [A] \{D\} \quad (75)$$

Ou [A] est la matrice des coefficients d'influences-relatifs aux contraintes sur la frontière-

REMARQUE :

- Dans le cas ou l'on prescrit sur la frontière des déplacements,

tels que :

$$\begin{cases} U_s = U_s^0 \\ U_n = U_n^0 \end{cases} \quad \text{sur } C \quad (76)$$

U_s^0 , U_n^0 peuvent ne pas être constants sur C.

Ce qui se traduit dans le modèle numérique par:

$$\begin{cases} U_s^i = U_s^{0i} \\ U_n^i = U_n^{0i} \end{cases} \quad i = 1, N \quad \text{sur } C \quad (77)$$

(les déplacements sont constants sur chaque segment de C)

Pour toutes les DD on aura à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} U_s^{oi} = \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \\ U_n^{oi} = \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j \end{cases} \quad i=1, N \quad (78)$$

Qu'on met sous la forme suivante:

$$\{u\} = [B] \{D\} \quad (79)$$

-dans le cas d'un problème mixte, les DD seront déterminées à partir des équations de (III.61) et (III.62) appropriées.

On obtient un système de $2N$ équations à $2N$ inconnues qu'on met sous la forme suivante:

$$\begin{cases} b_s^i = \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} D_n^j \\ b_n^i = \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} D_n^j \end{cases} \quad i=1, N \quad (80)$$

Où b_s^i et b_n^i sont les conditions aux limites (σ_s^i et u_n^i ou σ_n^i et u_s^i) et C_{ss}^{ij} ...etc, les coefficients d'influences correspondants.

III.2.6 MOUVEMENT DE CORPS RIGIDE :

On entend par mouvement de corps rigide, le déplacement d'ensemble de toute la structure dans l'espace. Prenons l'exemple de la Fig. 3.10.



Fig. 3.10: Cavité assymétrique.

a) Modèle physique.

b) Modèle numérique.

On voit que la pression P oblige le corps à se déplacer dans un mouvement d'ensemble vers le bas, ni les contraintes ni les déplacements ne vont apparaître dans R .

En réalité, ce mouvement est impossible, parcequ'à des distances considérables de la cavité se trouvent des obstacles naturels qui empêchent ce mouvement. Il se trouve que ceux-ci sont tellement éloignés par rapport aux dimensions de la cavité qu'ils n'influent pas sur la solution du problème d'une façon considérable, ce pourquoi, on n'en tient pas compte.

Neanmoins, il faudrait empêcher ce mouvement qui risquerait de se traduire par une singularité de la matrice [C] comme s'est le cas de la M.E.F.

Pour les problèmes intérieurs l'application des conditions aux limites bien posées suffit à éliminer ce mouvement.

Pour les problèmes extérieurs, il faudrait ajouter des éléments (DD) à l'intérieur du contour C', et leur imposer des déplacements nuls au niveau de l'une de leur faces. (Fig. 3.10b).

Un minimum de 2 éléments orientés différemment doit être pris pour éviter la rotation et la translation de la région extérieure.

Après résolution du problème, on va trouver que les éléments additionnels sont soumis à des contraintes, il se trouve que ces contraintes n'influent pas sur la qualité des solutions. (CROUCH. 1963).

REMARQUE : Pour un problème présentant une double symétrie, celle-ci empêche le mouvement de corps rigide.

III.2.7 CONVENTION DE SIGNE :

On a vu que les éléments SELF-EFFETS dépendaient du fait que $y=0$ soit approchée par valeurs supérieures ou inférieures.

Dans le cas d'un problème extérieur (respectivement intérieur), si le contour est traversé dans le sens trigonométrique (respectivement horaire) \vec{n} sera une normale extérieure (pour les deux

problèmes) et le contour réel C correspondra au contour fictif C'.
fig(3.11)

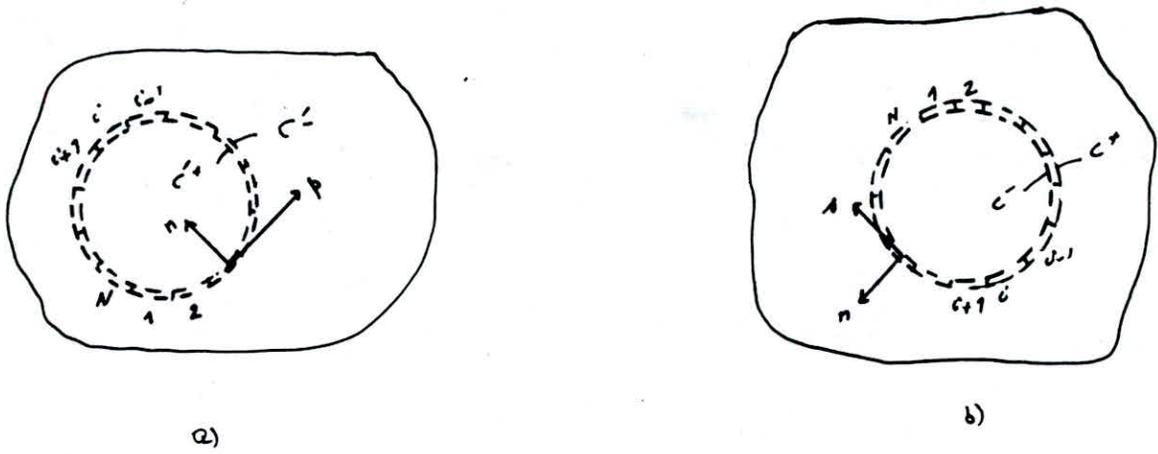


Fig. 3.11 :a) problème extérieur, sens de traversée trigonometrique.
b) problème intérieur, sens de traversée horaire.

Dans les deux cas, $y=0$ sera approchée par valeurs négatives, et :

$$B_{ss}^{ij} = B_{nn}^{ij} = A_{ss}^{ij} = A_{nn}^{ij} = +0.5 \quad (81)$$

On prendra alors comme convention de traverser le contour d'une cavité (problème extérieur) dans le sens trigonométrique et celui d'un problème intérieur dans le sens horaire.

Les déplacements devront être prescrit sur la lèvres négative de la DD .

III.2.8 UTILISATION DE LA SYMETRIE :

On dit qu'un problème présente un axe de symetrie si les propriétés élastique du matériau, la configuration géométrique et les conditions aux limites sont symétriques par rapport à cet axe.

Considerons un problème presentant une symetrie par rapport à un axe d'equation $x=\hat{x}$.(Fig. 3.14)

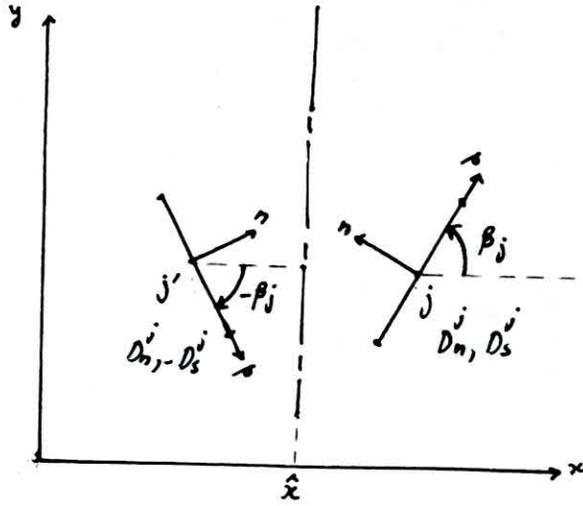


Fig. 3.14 : probleme symetrique par rapport a l'axe $x = \bar{x}$.

L'élément j a pour image par rapport à l'axe de symetrie l'élément j' . La principale conséquence de la symétrie pour la M.D.D est:

$$\begin{aligned}
 D_n^j &= D_n^{j'} & (a) & & \sigma_n^j &= \sigma_n^{j'} & (c) & & U_n^j &= U_n^{j'} & (g) \\
 D_s^j &= -D_s^{j'} & (b) & & \sigma_s^j &= -\sigma_s^{j'} & (d) & & U_s^j &= -U_s^{j'} & (f)
 \end{aligned}
 \tag{82}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 \beta^{j'} &= -\beta^j & (a) \\
 \gamma^{j'} &= \gamma^j & (b)
 \end{aligned}
 \tag{83}$$

$$x^{j'} = \hat{x} - (x^j - \hat{x}) = 2\hat{x} - x^j \tag{c}$$

Ces relations peuvent être exploitée pour réduire le système d'équations de moitier, en formulant de nouveaux coefficients d'influences faisant intervenir *automatiquement* les effets des éléments images.

Le systeme peut encore etre reduit de moitier si le problème presentait deux axes de symétrie. (Fig. 3.15).

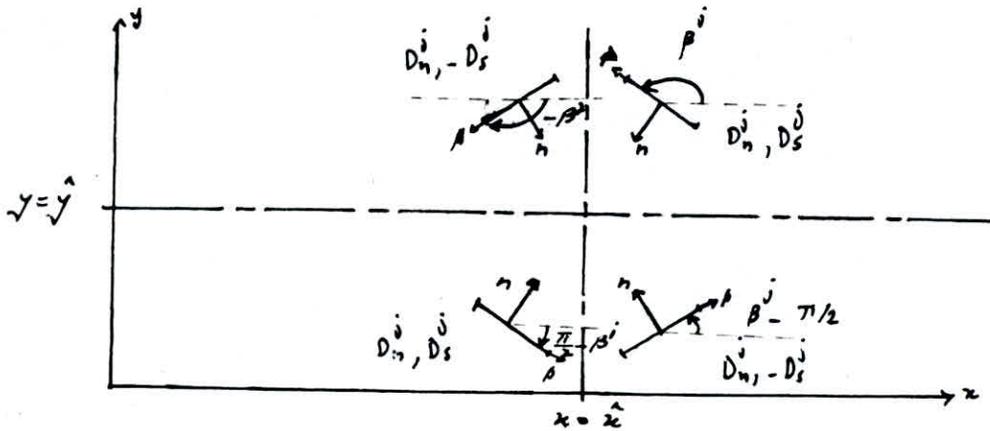


Fig. 3.15 : probleme doublement symetrique.

REMARQUE:

On ne discretise que la moitier ou le quart de la structure selon qu'on ait un ou deux axes de symetrie, sans avoir besoin de mettre des éléments sur ces axes.

III.2.9 EFFORTS VOLUMIQUES :

Les developpements qui precedes ont suppose les forces volumiques nulles. En presence d'efforts volumiques on decompose en solution *homogene* et solution *particuliere*.

Le probleme à resoudre est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^* u = -f \quad \text{équations de Lamé-Navier avec terme volumique} \\ u = \bar{u} \text{ sur } C_u \\ t = \bar{E} \text{ sur } C_t \end{array} \right. \quad \text{conditions aux limites.} \quad (84)$$

On sait calculer les solutions u_0 et σ_0 du problème homogène :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^* u = 0 \\ u_0 = \bar{u} \text{ sur } C_u \\ \sigma_0 = \bar{\sigma} \text{ sur } C_t \end{array} \right. \quad (85)$$

Supposons que l'on connaisse une solution polynomiale (U_1, σ_1) de l'équation de Lamé.

$$\Delta^* u_0 = -f \quad (86)$$

$$\text{Cependant : } u_1 \neq \bar{u}_1 \text{ sur } C_u \quad \text{et} \quad t_1 \neq \bar{t}_1 \text{ sur } C_t \quad (87)$$

Car généralement, les conditions aux limites ne sont pas respectées par les solutions polynomiales.

Resolvons alors le problème homogène en injectant pour conditions aux limites fictives.

$$\begin{aligned} u_0 &= \bar{u} - u_1 \text{ sur } C \\ t_0 &= \bar{t} - t_1 \text{ sur } C \end{aligned} \quad (88)$$

Soit U_0, σ_0 le résultat obtenu

La solution du problème avec forces volumiques est alors en tout point :

$$\begin{aligned} U &= U_0 + U_1 \\ \sigma &= \sigma_0 + \sigma_1 \end{aligned} \quad (89)$$

En effet :

$$\Delta^* U = \Delta^* U_0 + \Delta^* U_1 = 0 - f = -f \quad (90)$$

Au frontières:

$$U = U_0 + U_1 = \bar{U} - \bar{U}_1 + \bar{U}_1 = \bar{U} \quad \text{sur } C_u \quad (91)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma} \quad \text{sur } C_\sigma$$

CONCLUSION: pour traiter des problèmes avec chargement volumique ou des contraintes, il suffit de corriger les conditions aux limites et d'ajouter la solution particulière à la solution du problème corrigé.

III.3 EXEMPLES :

L'organigramme suivant résume le programme MDD utilisant la M.D.D en élasticité.

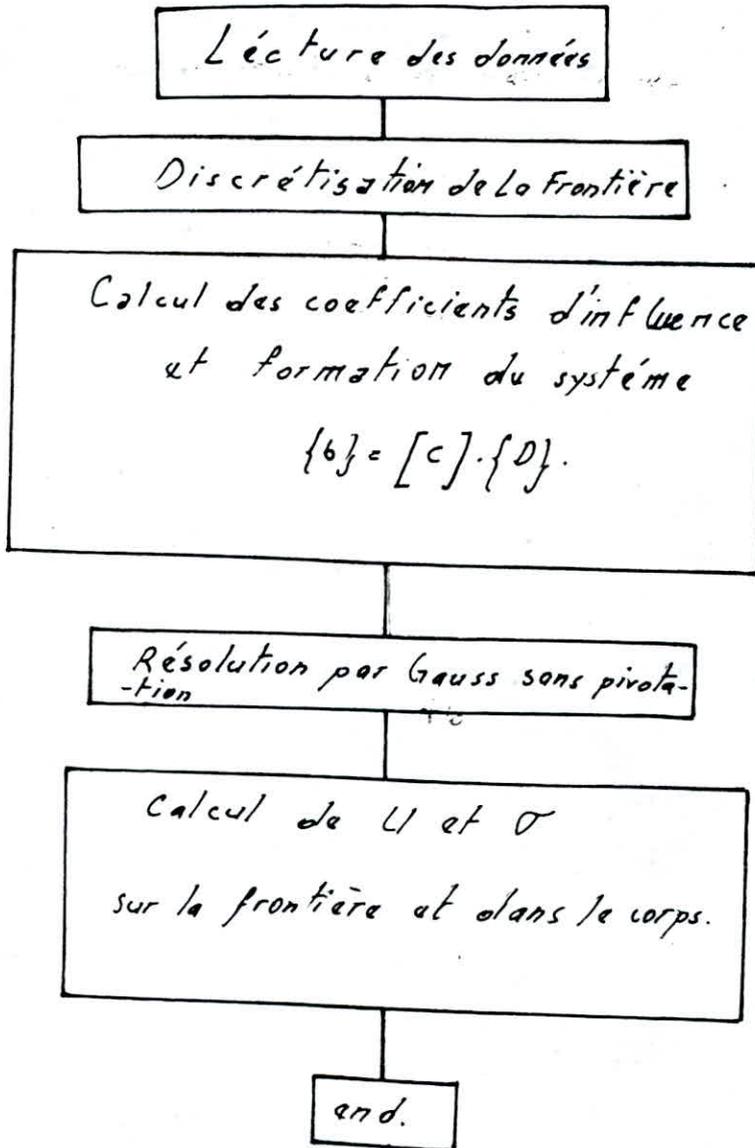


Fig. 3.16 : Organigramme MDD.

Les exemples suivants permettent de tester le programme.

EXEMPLE 1 : Fissure droite dans un domaine infini soumise à une pression uniforme. (Fig. 3.17)

La solution analytique donnant la DD normale est (Sneddon 1951) :

$$U_y(x, 0^-) - U_y(x, 0^+) = D_y = - \frac{2(1-\nu)}{G} P \cdot b \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)^{1/2} \quad (92)$$

Les courbes de la figure (3.18) représentent les solutions analytiques et numériques.

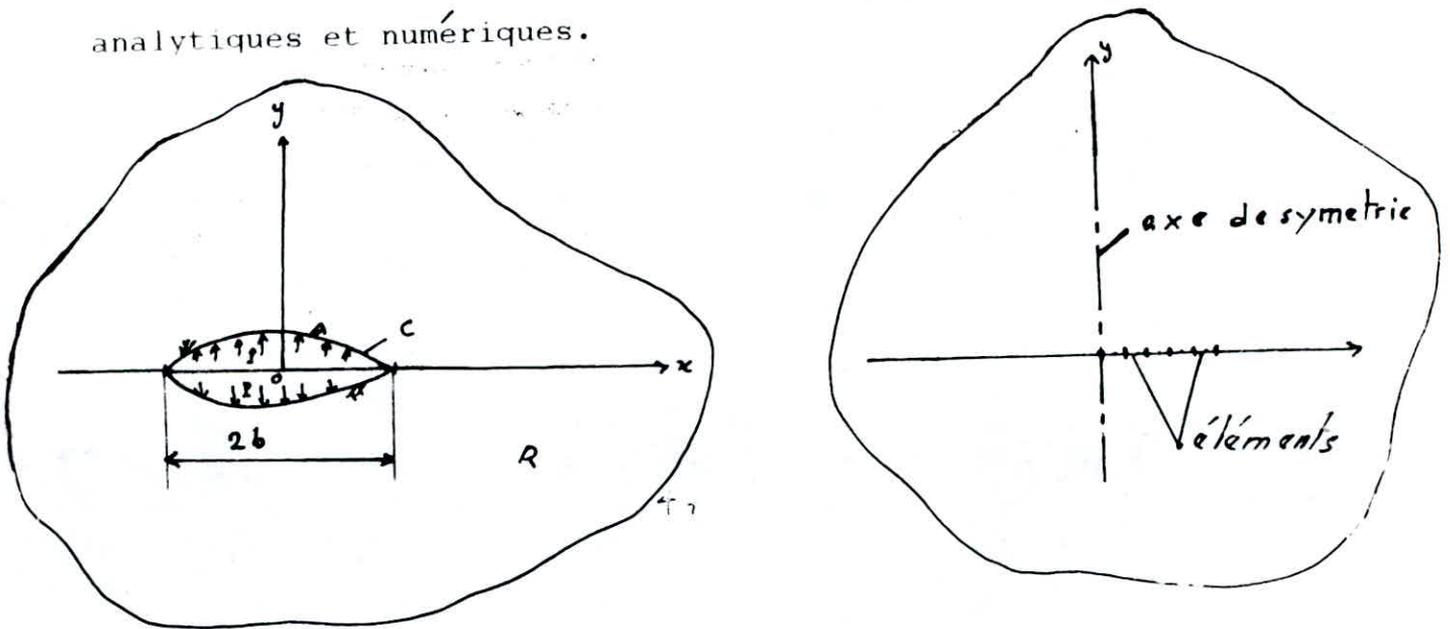
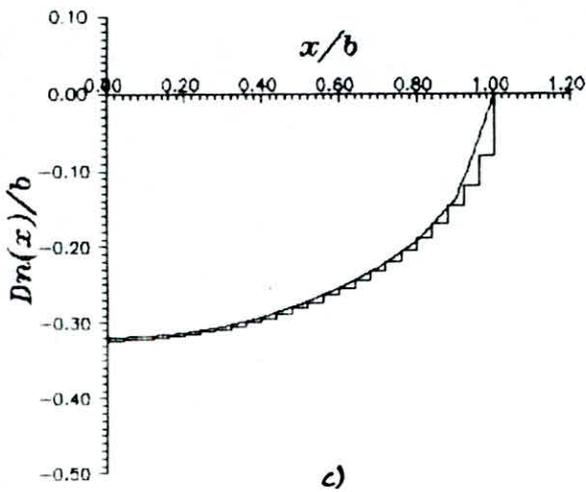
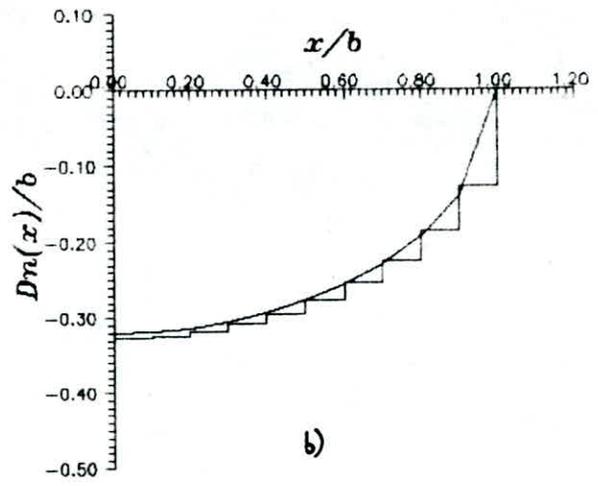
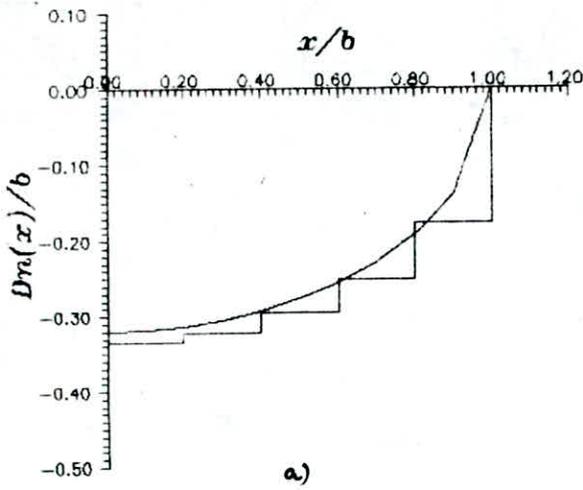


Fig. 3.17: Fissure droite dans un domaine infini

- a) Modèle physique.
- b) Modèle numérique.



- Fig. 3.18: Fissure droite sous pression. a) - 5 éléments
 b) - 10 éléments
 c) - 20 éléments
 — solution analytique
 ┌ solution numérique.

$$P = 100 ,$$

$$E = 1800 , \nu = 0.2$$

On remarque que Les valeurs numériques convergent vers la solution exacte quand on augmente le nombre d'éléments.

EXEMPLE 2 : Tunnel sous pression. (Fig. 3.19).

La solution analytique du déplacement radiales est :

$$u_r = \frac{Pb^2}{r} \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \quad (93)$$

(94)

Les courbes de la Fig. (3.20) représentent les solutions analytiques et numériques.

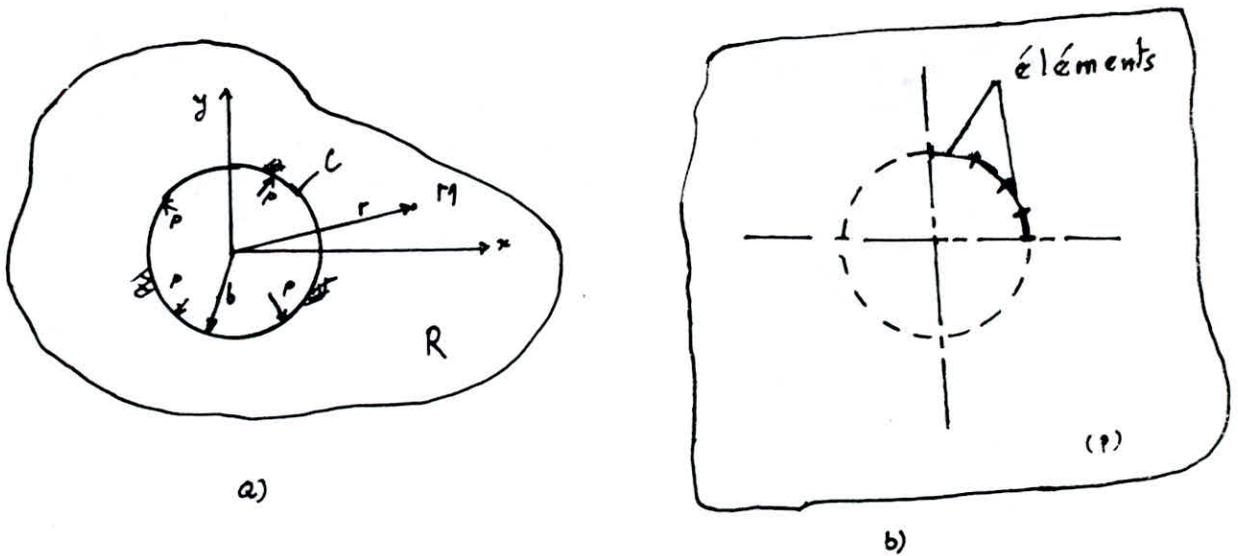


Fig. 3.19 : Tunnel sous pression

a) Modèle physique

b) Modèle numérique

On ne discretise que le quart du contour.

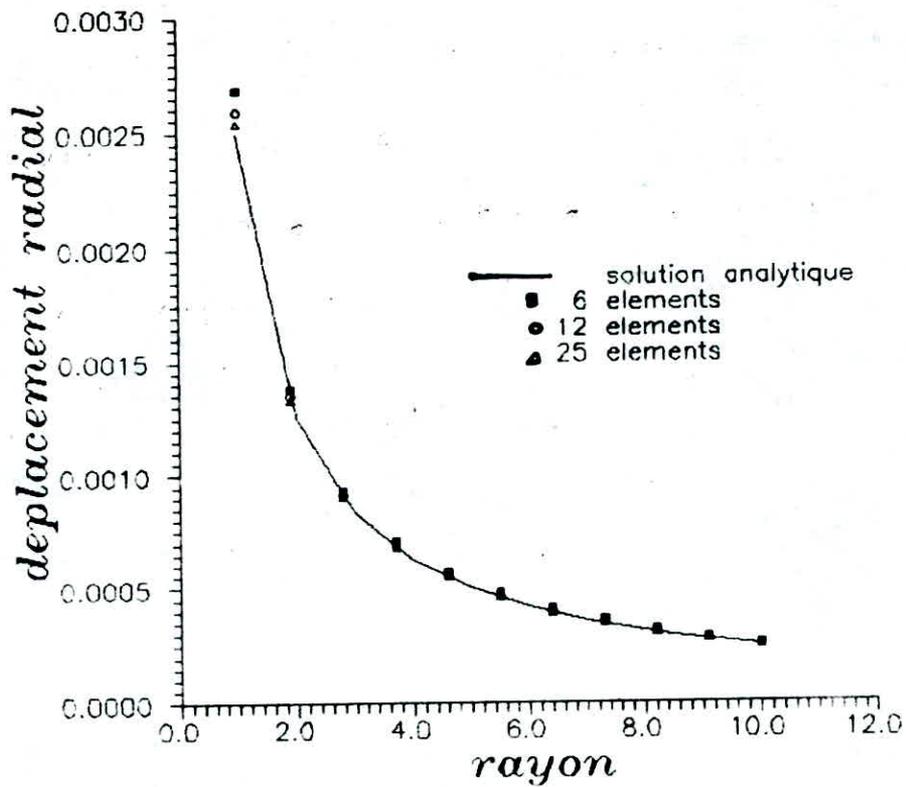


Fig. 3.20 : Tunnel sous pression.

avec : $P = 100$. $E = 48000$. $b = 1$

On remarque la correspondance entre les valeurs numériques et exactes pour un nombre réduit d'éléments.

EXEMPLE 3 : Epreuve en traction simple. (Fig. 3.24)

la solution analytique du déplacement suivant Y est :

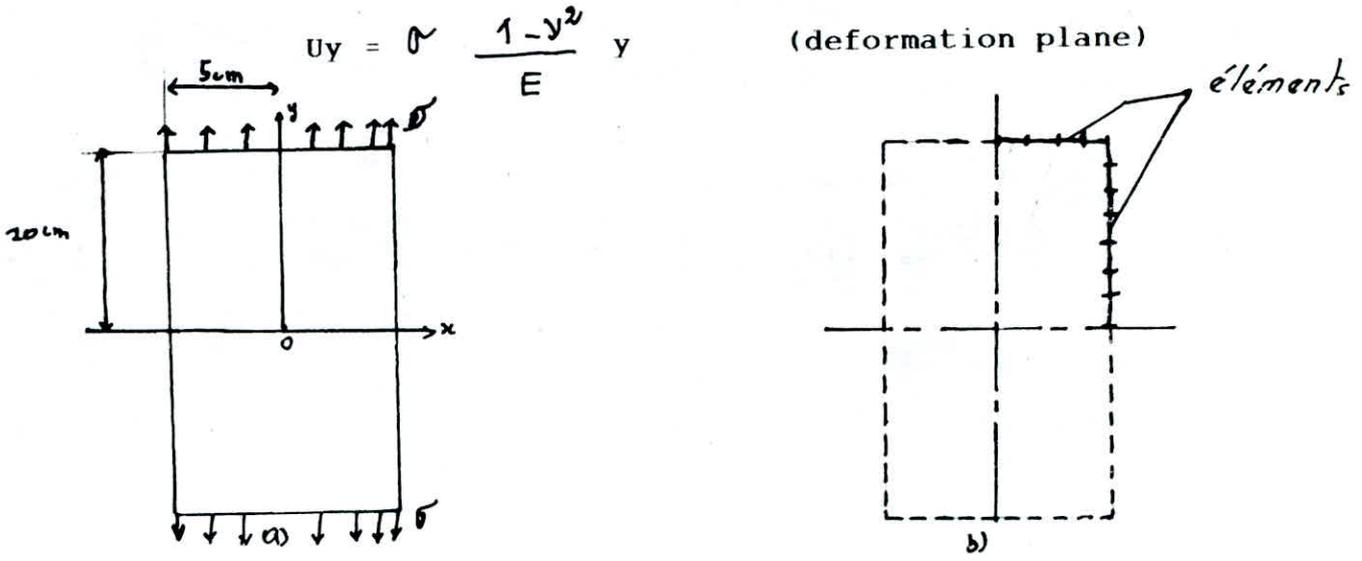
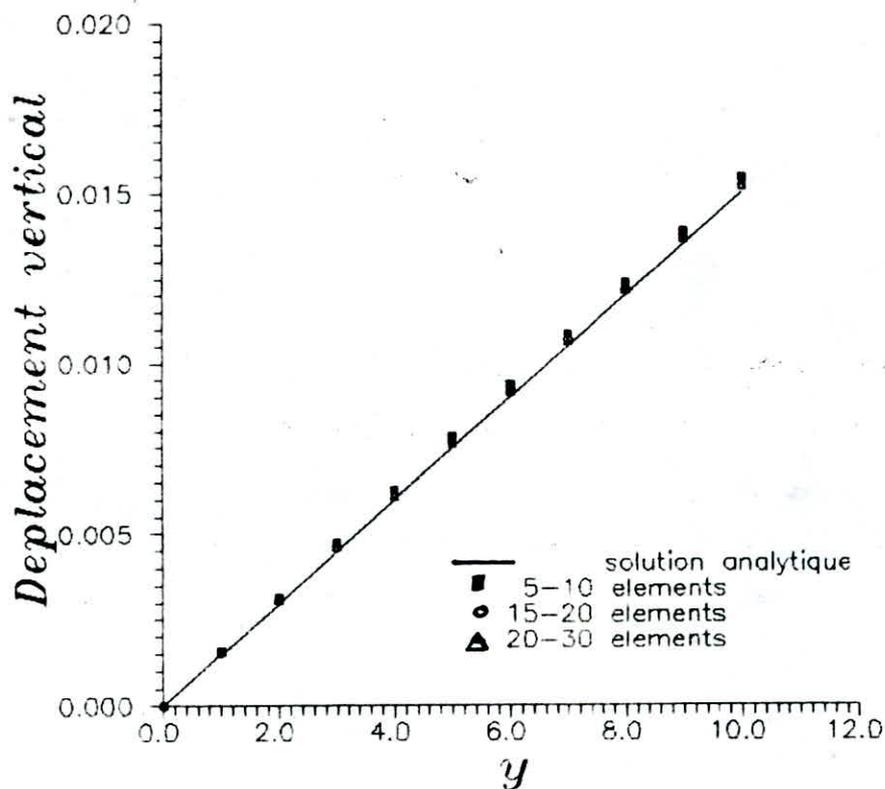


Fig. 3.24 : Epreuve en traction simple.

a) Modèle physique

b) Modèle numérique.

Les courbes de la Fig. 3.22 donnent le graph des solutions analytiques et numériques.



Eprouvette en traction

avec: $\sigma = 100$ $E = 48000$ $\nu = 0.2$.

On discrétise le contour par 5 éléments sur la face supérieure et 10 éléments sur le côté latérale, puis par 15-20, puis par 20-30 éléments.

On remarque que la solution numérique converge bien vers la solution exacte.

IV VISCOELASTICITE LINEAIRE :

La théorie de la viscoélasticité permet de rendre compte des phénomènes de déformation différés et de relaxation liés à des phénomènes dissipatifs que l'on traduit globalement par une viscosité.

On distingue généralement trois grandes méthodes de formulation des lois de comportement, l'approche microscopique, l'approche thermodynamique et l'approche fonctionnelle. Cette dernière est complètement appropriée aux matériaux viscoélastiques, elle sera utilisée par la suite.

IV.1 LOI DE COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE UNIAXIALE :

IV.1.1 EXPERIENCES FONDAMENTALES :

En pratique les lois de comportement représentent la mise en équation de résultats et interprétations découlant des expériences fondamentales telle que l'expérience de traction. Les expériences fondamentales qui mettent en évidence le comportement viscoélastique sont :

IV.1.1.1 EXPERIENCE DE FLUAGE :

Elle consiste à soumettre une éprouvette à une histoire de charge :

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t-t_0) \quad (1) \quad (\text{Fig. IV.1a})$$

Où H désigne la fonction de Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

et à observer l'évolution de la déformation ϵ en fonction du temps: (Fig. IV.2b).

Nulle pour $t < t_0$, elle subit un saut correspondant à l'élasticité instantanée du matériau et croît en du temps pour $t > t_0$.

fonction

(1).Certains matériaux ne présentent pas d'élasticité instantanée.

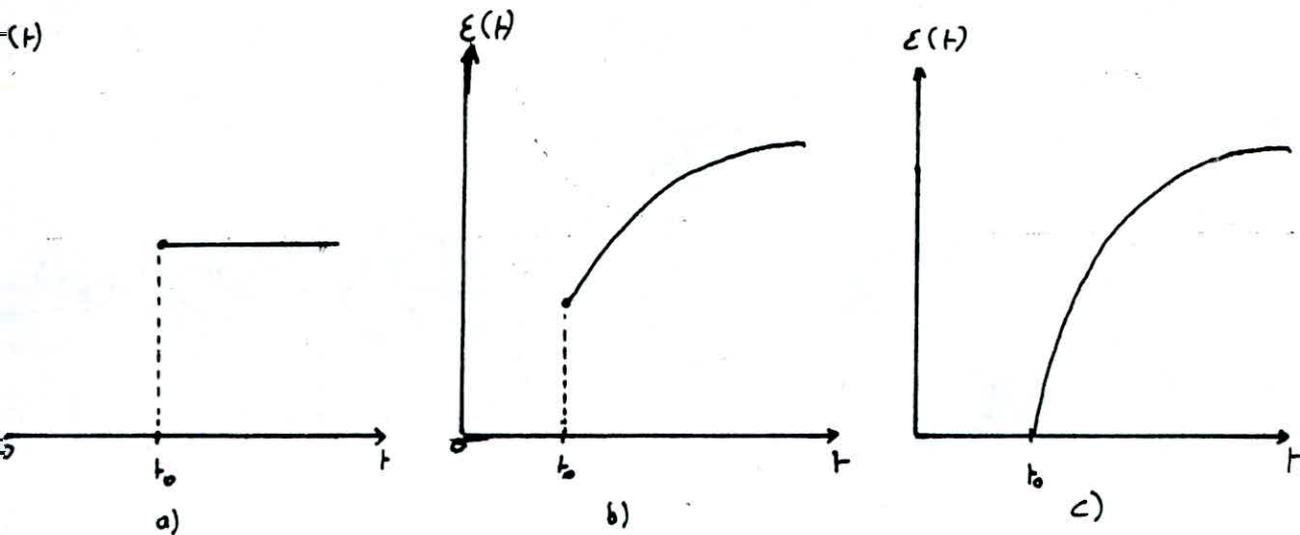


Fig. IV.1: Expérience de fluage

- a) Echelon de contrainte
- b) Réponse en déformation, avec élasticité instantané
- c) Réponse en déformation, sans élasticité instantané

L'évolution de ϵ en fonction du temps peut être décrite par :

$$\epsilon(t) = J(\sigma_0, t, t_0) \quad (3)$$

J est appelée fonction de fluage.

IV.1.1.2 EXPERIENCE DE RELAXATION :

C'est l'expérience duale de la précédente.

On impose à $t=t_0$ un échelon de déformation d'amplitude ϵ_0 : (Fig. IV.2a)

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 H(t, t_0) \quad (4)$$

On observe la réponse en contrainte. (Fig. IV.2b,c).

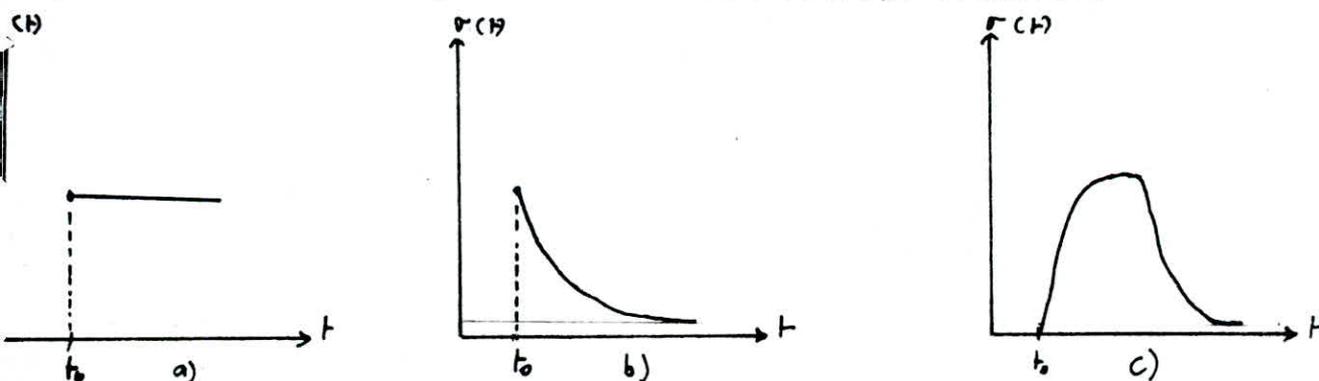


Fig. IV.2 : Experience de relaxation.

- a) Echelon de deformation
- b) Réponse en contrainte, avec élasticité instantané
- c) Réponse en contrainte, sans élasticité instantané

De manière analogue l'évolution de σ en fonction de t est décrite par :

$$\sigma(t) = R(\epsilon_0, t, t_0) \quad (5)$$

R est appelée fonction de relaxation.

REMARQUE :

1- Le niveau de charge appliqué est quelconque-inferieur à la limite de rupture-contrairement aux matériaux viscoplastiques ou le fluage n'apparaît qu'à partir d'une certaine charge .

2- L'existence de déformations différées ne dépend pas de l'histoire de charge (charge, décharge, vitesse de charge etc...) précédent la charge actuelle.

CONCLUSION :

Un matériau est viscoélastique si sous l'action d'une charge constante il manifeste l'existence de déformations différées et ceci quelque soit le niveau de charge-inferieur à la limite de rupture- et quelque soit l'histoire de charge précédent le palier actuel.

IV.1.2 LINEARITE :

IV.1.2.1 DEFINITION :

En générale, la loi de comportement d'un matériau exprime la correspondance fonctionnelle entre l'histoire des contraintes et l'histoire des déformations.

A chaque instant t , la déformation $\epsilon(t)$ dépend de l'histoire de contraintes jusqu'à cet instant.

$$\epsilon(t) = F_t \left[\sigma(\tau) \right]_{\tau_0}^t \quad (6).$$

F est une fonctionnelle (voir annexe A).

Alors; le comportement d'un matériau est linéaire si la correspondance fonctionnelle entre l'histoire de σ et celle de ϵ , de la forme (IV.6) est linéaire. c.a.d:

$$\forall \lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{R}$$

$$F_t \left[\lambda^1 \sigma^1(\tau) + \lambda^2 \sigma^2(\tau) \right] = \lambda^1 F_t \left[\sigma^1(\tau) \right] + \lambda^2 F_t \left[\sigma^2(\tau) \right] \quad (7)$$

IV.1.2.2 CONSEQUENCES DE LA LINEARITE :

a) La fonction de fluage doit être proportionnelle à σ_0 .

$$J(\sigma_0, t, t_0) = \sigma_0 J(t, t_0) \quad (8)$$

La fonction de relaxation doit être proportionnelle à ϵ_0 .

$$R(\epsilon_0, t, t_0) = \epsilon_0 R(t, t_0) \quad (9)$$

On appellera aussi $J(t, t_0)$ et $R(t, t_0)$ fonction de fluage et fonction de relaxation

b) Principe de superposition :

Si on prend dans (IV.7) $\lambda' = \lambda'' = 1$, on obtient directement le principe de superposition qui stipule que :

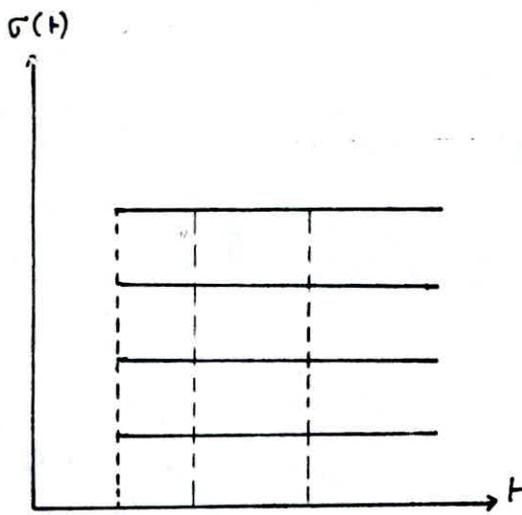
' Si l'on superpose deux histoires de sollicitation, la réponse est la superposition des réponses '.

REMARQUES :

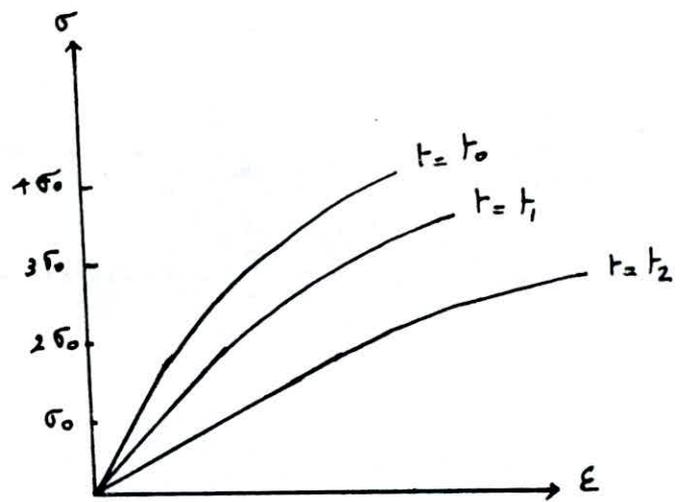
a) La plus part des matériaux montrent un comportement linéaire pour de petites sollicitations et un comportement non linéaire pour de grandes sollicitations.

On peut voir ceci en appliquant le test de superposition avec des histoires de charge de type (IV.1) avec différentes valeurs de σ_0 (Fig. IV. 5a).

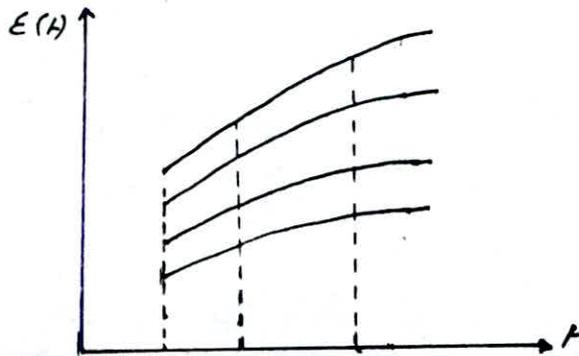
En utilisant les réponses obtenues pour chaque test, on peut construire des courbes isochroniques (iso=égale;chronique=temps) qui peuvent être considéré comme pseudo-relations contraintes déformations, correspondant à l'équation (IV.2) pour $t=0$, $t_0 = \text{cte}$.



a)



(c)



(b)

Fig. IV.3 : Test de superposition.

a) Echelon de contraintes.

b) Réponse en déformation

c) Courbes isochroniques.

Dans le cas de la Fig. IV.3c, le comportement linéaire est envisageable jusqu'à $2\sigma_0$.

b) Quand $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t, t_0) = M$ est finie (10)

le matériau est dit asymptotiquement stable, ces matériaux sont dit *solides*, ceux qui ont une fonction de fluage qui augmente indéfiniment avec t sont dit *fluides*.

IV.1.3 MATERIAUX VISCOELASTIQUES NON VIEILLISSANTS :

Un matériau est non vieillissant si ses propriétés mécaniques n'évoluent pas avec le temps. Ceci se traduit par la propriété d'invariance par translation dans le temps:

La réponse à l'instant t à une sollicitation appliquée à t_0 est la même que la réponse à l'instant $t + \Delta t$ à la même sollicitation appliquée à l'instant $t_0 + \Delta t$.

Dans ce cas, les fonctions de fluage et de relaxation ne dépendent pas de t , elle ne sont fonction que d'une seule variable.

$$J(t, t_0) = J(0, t - t_0) = J(t - t_0) \quad (11)$$

$$R(t, t_0) = R(0, t - t_0) = R(t - t_0) \quad (12)$$

IV.1.4 INTEGRALE HEREDITAIRE :

La linéarité du comportement nous permet d'écrire la réponse à toute sollicitation à partir de la connaissance des fonctions de fluage ou de relaxation.

Considérons un matériau viscoélastique, linéaire, non vieillissant soumis à la sollicitation étagée représenté par la Fig. IV.4a.

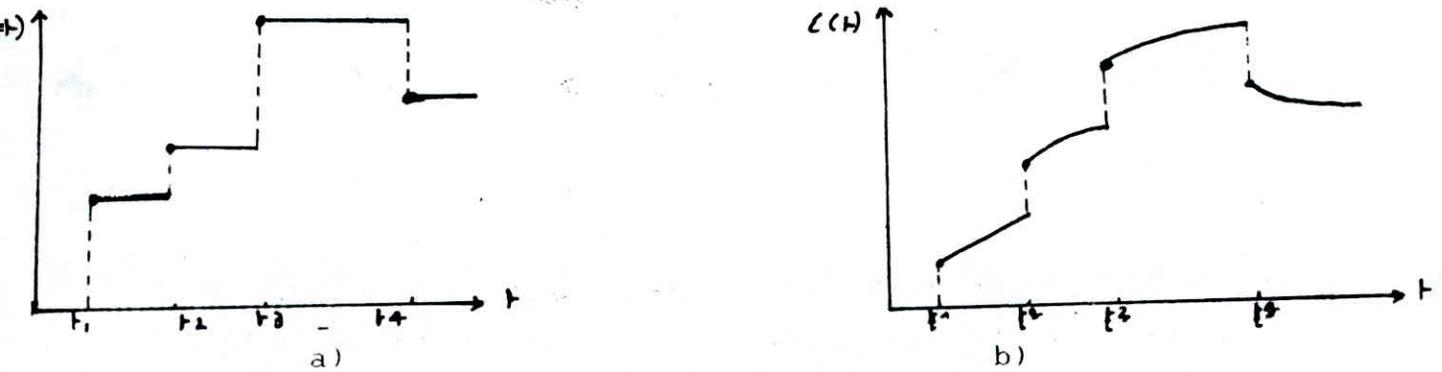


Fig. IV.4 : a) Sollicitation en contraintes.
b) Réponse en déformation

A $t = t_1$ on applique un échelon de contrainte :

$$\Delta \sigma_1(t) = \Delta \sigma_1 H(t-t_1) \quad (13)$$

La réponse est :

$$\forall t > t_1, \quad \epsilon(t) = \Delta \sigma_1 J(t-t_1) \quad (14)$$

A $t = t_2$ on ajoute un échelon de contrainte :

$$\Delta \sigma_2(t) = \Delta \sigma_2 H(t-t_2) \quad (15)$$

La déformation ajoutée est :

$$\Delta \epsilon(t) = \Delta \sigma_2 H(t-t_2) \quad (16)$$

ect...

Le principe de superposition nous permet d'écrire la réponse en déformation, on trouve :

$$\epsilon(t) = \sum_{j=1}^n \Delta \sigma_j J(t-t_j) \quad t > t_j \quad (17)$$

Pour une sollicitation, quelconque, elle peut être représenté par une fonction continue par morceaux, présentant des sauts. (Fig. IV.5)

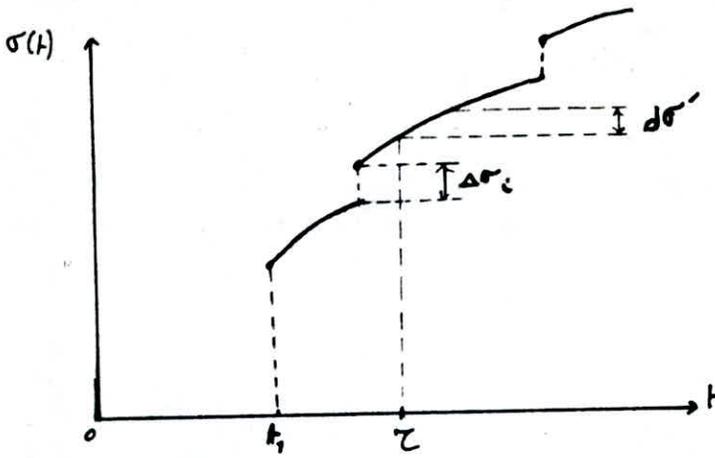


Fig. IV.5 : Sollicitation quelconque

Une telle fonction peut être considérée comme la superposition d'échellons infinitésimaux :

$$d\sigma \cdot H(t-\tau) = \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} dt \cdot H(t-\tau) = \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau H(t-\tau). \quad (18)$$

et d'échellons finis : $\Delta\sigma_i$ (19).

La réponse $\varepsilon(t)$ s'exprime sous la forme d'une intégrale de Riemann à laquelle il faut ajouter les termes de sauts.

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \cdot d\tau + \sum_{j=1}^n J(t-t_j) \Delta\sigma_j \quad (20)$$

REMARQUE :

-Même si on applique la contrainte à $t > 0$, on peut toujours écrire $\varepsilon(t)$ sous cette forme.

-L'intégrale dans (IV.20) est appelée intégrale *héréditaire*.

L'expression (IV.20) peut être écrite avec la notation du produit de convolution avec la dérivée $\frac{D}{Dt}$ prise au sens des distributions pour tenir compte des termes de sauts. (voir annexe A).

$$\varepsilon(\tau) = J(\tau) * \frac{D\sigma(\tau)}{D\tau} \quad (21)$$

Ou bien : $\varepsilon(t) = \frac{D J(t)}{Dt} * \sigma(t)$ (22)

De la même manière, la réponse à une sollicitation $\varepsilon(t)$ quelconque s'écrit :

$$\sigma(t) = \frac{D R(t)}{Dt} * \varepsilon(t) \quad (23)$$

Les relations (IV.22) ou (IV.23) constituent les expressions mathématiques de la loi de comportement pour un matériau viscoélastique dans le cas uniaxial.

IV.2 LOI DE COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE TRIDIMENTIONNELLE :

IV.2.1 MATRICE DE FLUAGE ET MATRICE DE RELAXATION :

On se place dans le cas d'un matériau viscoélastique, linéaire, non vieillissant.

L'expérience de fluage ou de relaxation appliquées à un cas de sollicitations tridimensionnelles amène à définir :

-Une matrice de fonctions de fluage [J] tel que :

pour une sollicitation tridimensionnelle définie par :

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^0 H(t - \xi) \quad (24)$$

La réponse est :

$$\epsilon_{ij}(t) = J_{ijkl}(t - \xi) \sigma_{kl}^0 \quad (25)$$

(avec sommation sur les indices répétés)

-Une matrice de fonctions de relaxation [R] tel que :

pour une sollicitation tridimensionnelle définie par :

$$\epsilon_{ij}(t) = \epsilon_{ij}^0 H(t - \xi) \quad (26)$$

La réponse est :

$$\sigma_{ij}(t) = R_{ijkl}(t - \xi) \epsilon_{kl}^0 \quad (27)$$

(avec sommation sur les indices répétés)

De même que pour le cas uniaxial, la réponse à une sollicitation quelconque s'écrit :

$$\epsilon_{ij}(t) = \frac{D J_{ijkl}(t)}{Dt} * \sigma_{kl}(t) \text{ pour une sollicitation contrainte (28)}$$

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{D R_{ijkl}(t)}{Dt} * \epsilon_{kl}(t) \text{ pour une sollicitation déformation (29)}$$

IV.2.2 MATERIAU ISOTROPE :

Si on fait l'hypothèse d'isotropie, un raisonnement analogue à celui de l'élasticité permet de ramener à 2 le nombre de fonctions indépendantes définissant les composantes des matrices [J] et [R].

REMARQUE :

A la différence de ce qui est obtenu en élasticité linéaire, la symétrie par rapport aux groupements (ij) et (hk) n'est pas obtenue en s'appuyant sur l'existence du potentiel, mais, elle est posée par le principe de symétrie de Osager, celui-ci se base sur la thermodynamique des milieux continus. (LEMAITRE, 1985)

On peut alors choisir deux fonctions $L(\tau)$ et $M(\tau)$ qui jouent le rôle équivalent des coefficients de Lamé λ et μ .

La réponse à une sollicitation quelconque s'écrit, en notation indicielle:

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{DL(t)}{Dt} * \epsilon_{ii}(t) \cdot \delta_{ij} + 2 \frac{DM(t)}{Dt} * \epsilon_{ij}(t) \quad (30)$$

Cette relation représente l'équation mathématique de la loi de comportement pour un matériau viscoélastique linéaire, non vieillissant et isotrope.

IV.3 EQUATIONS DES PROBLEMES VISCOELASTIQUES :

Appliquons la transformée de Laplace définie par :

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L} \{ f(t) \} = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt \quad (31)$$

à la relation (30), on obtient: (voir annexe A pour les propriétés de \mathcal{L})

$$\bar{\sigma}_{ij}(s) = s \cdot \bar{L}(s) \cdot \bar{\epsilon}_{ii}(s) \cdot \delta_{ij} + 2s \cdot \bar{M}(s) \cdot \bar{\epsilon}_{ij}(s) \quad (32)$$

Posons :

$$\bar{\lambda}(\Delta) = \Delta \bar{L}(\Delta) \quad (33)$$

$$\bar{\mu}(\Delta) = \Delta \bar{M}(\Delta) \quad (34)$$

(30) s'écrit :

$$\bar{\sigma}_{ij}(\Delta) = \bar{\lambda}(\Delta) \cdot \bar{\epsilon}_{ij}(\Delta) \cdot \delta_{ij} + 2 \bar{\mu}(\Delta) \cdot \bar{\epsilon}_{ij}(\Delta) \quad (35)$$

Cette écriture est similaire à celle de la loi de comportement de l'élasticité linéaire.

Ecrivons maintenant l'ensemble des équations d'un problème viscoélastique en transformée de Laplace.

Données et inconnues :

-Forces volumiques : $f(t) \longrightarrow \bar{f}(s)$ (36)

-Conditions aux limites :

$$\bar{u}_i(t) = \bar{\tilde{u}}_i(t) \longrightarrow \bar{u}_i(s) = \bar{\tilde{u}}_i(s) \quad \text{sur } C_u \quad (37)$$

$$\bar{t}_i(t) = \bar{\tilde{t}}_i(t) \longrightarrow \bar{t}_i(s) = \bar{\tilde{t}}_i(s) \quad \text{sur } C_t$$

avec $\bar{t} = \bar{\sigma}_{ij} \cdot n_j$ (38)

-Equations : Dans le cas de problèmes statiques, les équations en transformée de Laplace sont :

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{f}_i = 0 \quad (39)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (40)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\lambda} \cdot \bar{\epsilon}_{ii} \cdot \delta_{ij} + 2 \bar{\mu} \bar{\epsilon}_{ij} \quad (41)$$

Ces équations sont tout à fait similaires à celles d'un problème d'élasticité linéaire, si le type de conditions aux limites ne varie pas au cours du temps. Dans le cas contraire, on décompose l'histoire en périodes successives au cours desquelles, les conditions aux limites restent du même type.

IV.4 PRINCIPE DE CORRESPONDANCE :

L'analogie formelle entre le problème viscoélastique transformé et le problème d'élasticité conduit à la méthode de résolution schématisée ci-dessous dans laquelle on a :

-à résoudre un problème d'élasticité classique (problème élastique équivalent).

-puis à prendre l'écriture transposée, en remplaçant dans l'expression de la solution élastique :

$$\lambda \quad \text{par} \quad \bar{\lambda}(\delta) \quad (42)$$

$$\mu \quad \text{par} \quad \bar{\mu}(\delta) \quad (43)$$

$$f \quad \text{par} \quad \bar{f}(\delta) \quad (44)$$

$$F \quad \text{par} \quad \bar{F}(\delta) \quad (45)$$

etc...

-On obtient ainsi la transformé de Laplace de la solution viscoélastique, en prenant son inverse, on trouve la solution dans l'espace temps.

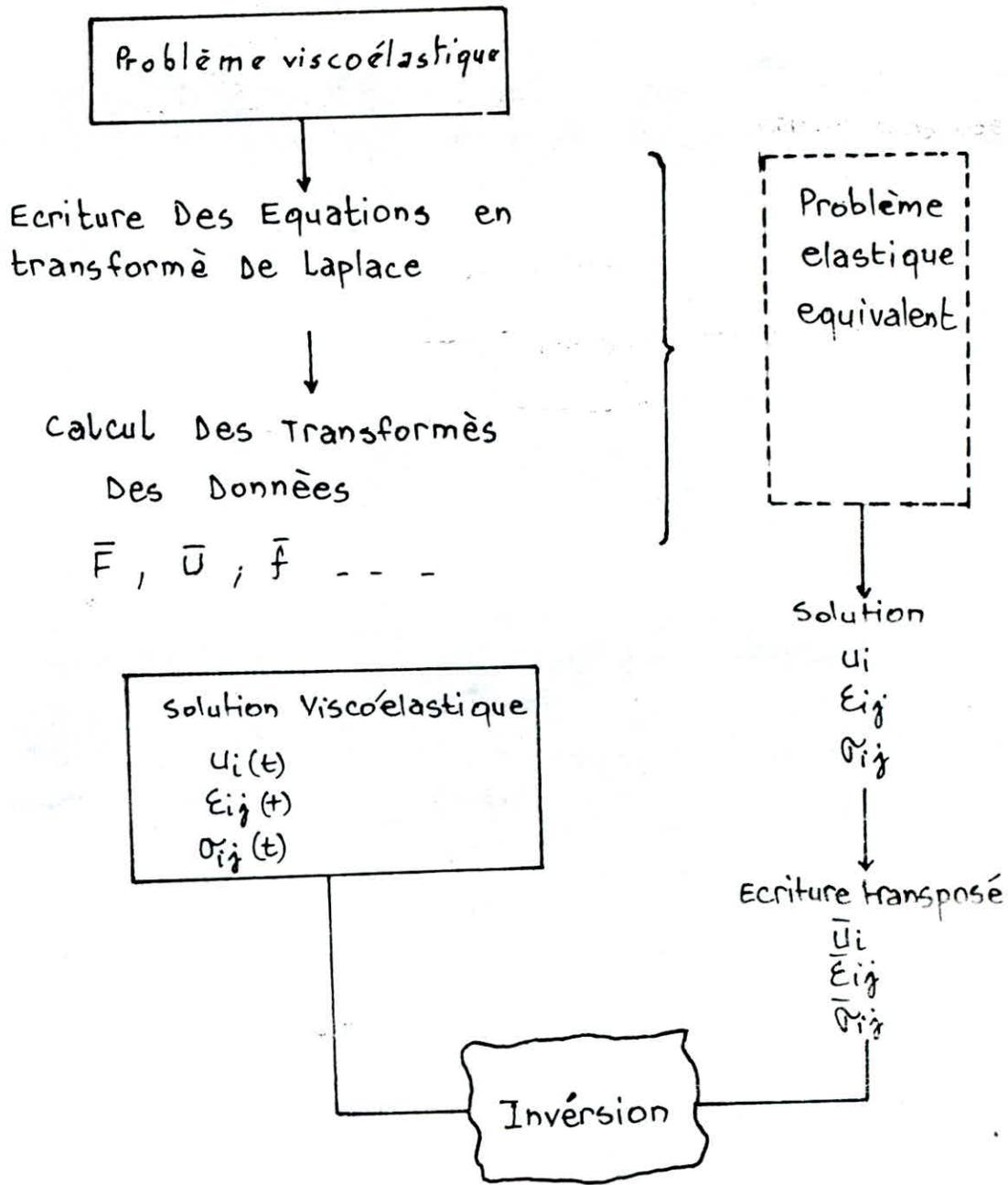


Fig. IV.6: Schéma du principe de correspondance.

Cette méthode est connue sous le nom de *principe de correspondance*

La difficulté est rejetée sur l'inversion, les calculs des transformées inverse de Laplace sont délicats, en particulier si le problème n'a de solution que numérique approchée.

VI.5 MODELES ANALOGIQUES POUR LE COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE LINEAIRE :

Les modèles analogiques sont des groupements d'éléments mécaniques dont les réponses à des sollicitations sont similaires à celles des matériaux. Ils sont utilisés pour donner une image concrète des équations de comportement.

IV.5.1 MODELES DE BASE EN VISCOELASTICITE LINEAIRE :

Les éléments mécaniques utilisés en viscoélasticité linéaire sont :

a) Le ressort qui schématise l'élasticité linéaire .(Fig. IV.7).



E:Module d'Young.

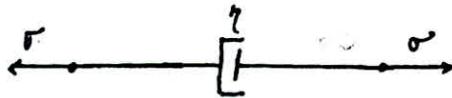
Fig. IV.7 :Ressort.

-Sa loi de comportement est : $\sigma(t) = E \epsilon(t)$ (46)

-sa fonction de fluage est : $J(t) = \frac{1}{E} H(t)$ (47)

-Sa fonction de relaxation est : $R(t) = E H(t)$ (48)

b) L'amortisseur qui schématise la viscosité linéaire .(Fig. IV.8)



η :Coefficient de viscosité

Fig. IV.8 :Amortisseur.

-Sa loi de comportement est : $\sigma(t) = \eta \dot{\epsilon}(t)$ (49)

-Sa fonction de fluage est : $J(t) = \frac{1}{\eta} H(t)$ (50)

-Sa fonction de relaxation est : $R(t) = \eta \delta(t)$ (51)

$\delta(t)$:impulsion de Dirac

R est obtenu par La transformé de Laplace.

IV.5.2 ETUDE DE MODELES COMPOSES :

IV.5.2.1 MODELE DE MAXWELL :(Fig. IV.8)



Fig. IV.8 :Modèle de Maxwell.

-Sa loi de comportement est régit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} = \dot{\epsilon}(t) \quad (52)$$

qu'on met sous la forme suivante :

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon} \quad (53) \text{ avec } \begin{cases} q_0 = 0 \\ q_1 = \eta \\ p_1 = \frac{E}{\eta} \end{cases} \quad (54)$$

-Sa fonction de fluage s'obtient en appliquant la transformé de Laplace à (IV.52) :

$$\Delta \bar{\epsilon} = \frac{\Delta \bar{\sigma}}{E} + \frac{\bar{\sigma}}{E} \Leftrightarrow \bar{\epsilon} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta \Delta} \right) \bar{\sigma} \quad (55)$$

or d'après (IV.22) on a :

$$\bar{\epsilon} = \Delta \cdot \bar{J} \cdot \bar{\sigma} \quad (56)$$

donc :

$$\bar{J} = \frac{1}{\Delta E} + \frac{1}{\Delta^2 \eta} \quad (57)$$

En prenant la transformé inverse, on obtient :

$$J(t) = \left[\frac{1}{E} + \frac{t}{E} \exp\left(-\frac{t}{\eta}\right) \right] H(t) \quad (58)$$

-De meme,sa fonction de relaxation est :

$$R(t) = E \cdot \exp\left(-\frac{t}{\eta}\right) \cdot H(t) \quad (59)$$

A partir de (IV.58), on voit que la réponse en déformation pour l'essai de fluage est :

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E} + \frac{t-t_0}{\eta} \right] H(t-t_0) \quad (60)$$

Sur la figure (IV.10) on voit que ϵ augmente indéfiniment, le modèle de Maxwell décrit un comportement fluide.

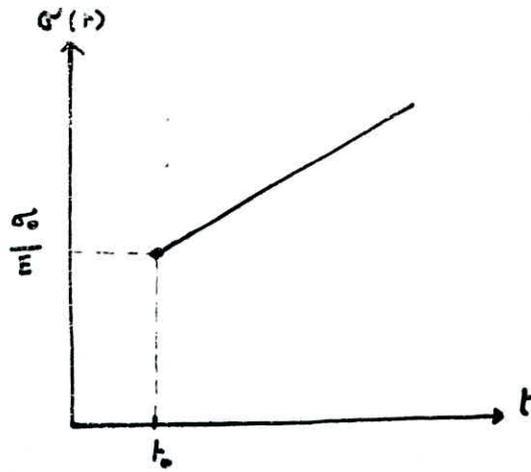


Fig. IV.10: Réponse en déformation pour l'essai de fluage du modèle de Maxwell!.

IV.5.2.2 MODELE DE KELVIN : (Fig. IV.11)

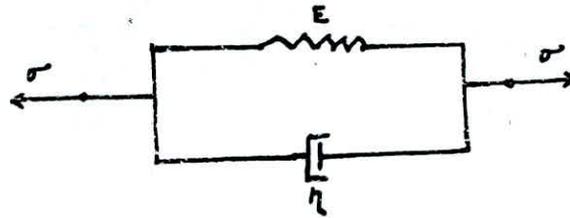


Fig. IV.11 : Modèle de Kelvin.

-Sa loi de comportement est régit par :

$$\sigma(t) = E \epsilon(t) + \eta \dot{\epsilon}(t) \quad (61)$$

qu'on met sous la forme suivante :

$$\sigma = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_0 = 1 \\ q_1 = E \\ q_2 = \eta \end{cases} \quad (62)$$

-Sa fonction de fluage est :

$$R(t) = \frac{1}{E} (1 - \exp(-E.t/ \eta)) H(t) \quad (63)$$

-Sa fonction de relaxation est :

$$J(t) = E^{-1} H(t) + \eta \delta(t) \quad (64)$$

-Sa réponse en déformation pour l'essai de fluage est :

$$R(t) = E \cdot H(t) + \eta \dot{\delta}(t) \quad (65)$$

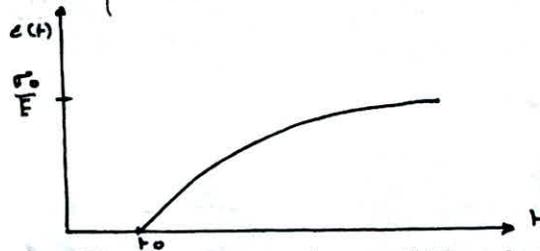


Fig. IV.12 : Essai de fluage pour le modèle de Kelvin

On remarque que ce modèle ne présente pas de l'élasticité instantané mais qu'il est asymptotiquement stable, il représente un comportement solide.

IV.5.2.3 MODELE DU SOLIDE A 3 PARAMETRES : (Fig. IV.13)

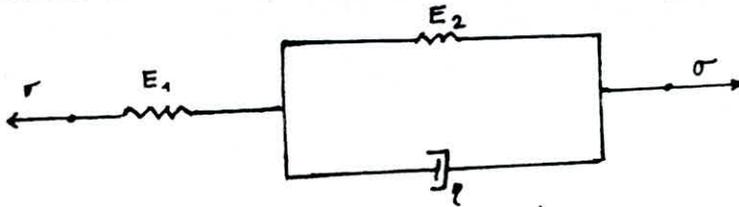


Fig. IV.13 : Modèle du solide a 3 paramètres

-Sa loi de comportement est régit par :

$$\sigma \left(\frac{E_1 + E_2}{E_2} \right) + \frac{\eta}{E_2} \dot{\sigma} = \eta \dot{\epsilon} + E_1 \epsilon \quad (66)$$

qu'on met sous la forme suivante :

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_1 = \frac{\eta}{E_1 + E_2} \\ q_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \\ q_1 = \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \end{cases} \quad (67)$$

-Sa fonction de fluage est :

$$J(t) = \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-E_2 t / \eta} \right) \right] \cdot H(t) \quad (68)$$

-Sa fonction de relaxation est :

$$R(t) = \left[\frac{E_1}{E_1 + E_2} \right] \cdot \left[E_2 + E_1 \exp\left(-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t\right) \right] \cdot H(t) \quad (69)$$

Les essais standards appliqués au modèle donnent : (Fig. IV.14) .

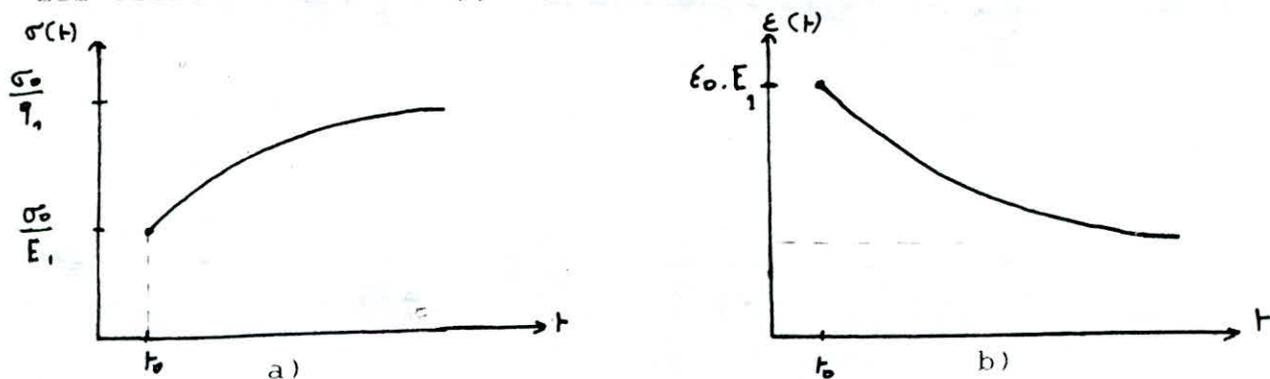


Fig. IV.14 : Essais standards appliqués au modèle a 3 parametres
 a) Fluage b) Relaxation

REMARQUES :

-Le modèle montre une élasticité instantané et est asymptotiquement stable, il représente un modèle standard du solide viscoélastique linéaire.

-L'élasticité instantané est due à la présence du ressort en serie avec le modèle de Kelvin.

IV.5.2.4 ^{NE} MODELES GERALISES :

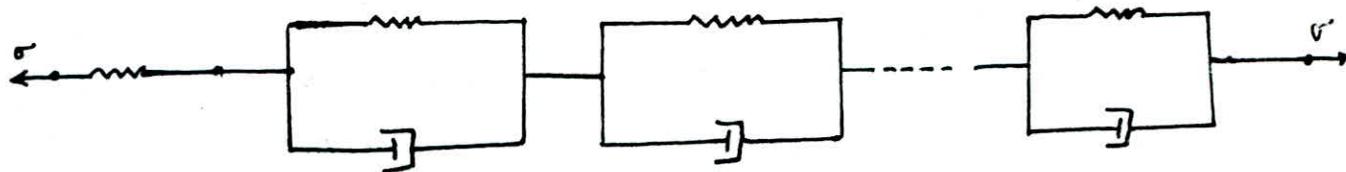
Il y a deux methodes systématiques pour la construction de modèles plus developper pouvant approcher plus fidelement le comportement du matériau.

a) ^{NE} MODELES DE KELVIN GERALISE :

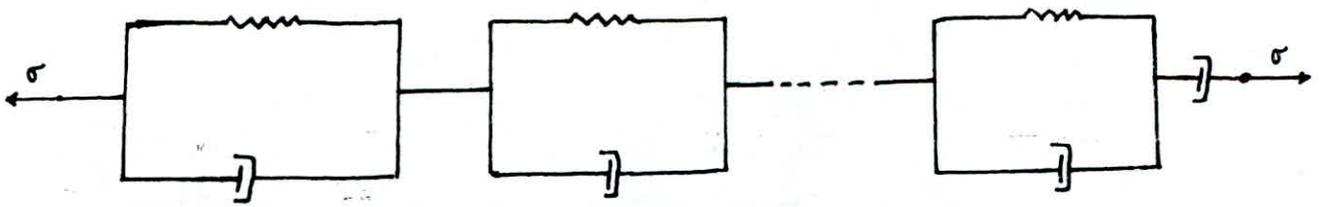
On met en serie plusieurs modèles de Kelvin, avec la possibilite d'inclure:

-Un ressort pour décrire un comportement solide .

Un amortisseur pour décrire un comportement fluide .



a)



b)

Fig. IV.15 : Modèle de Kelvin généralisé.

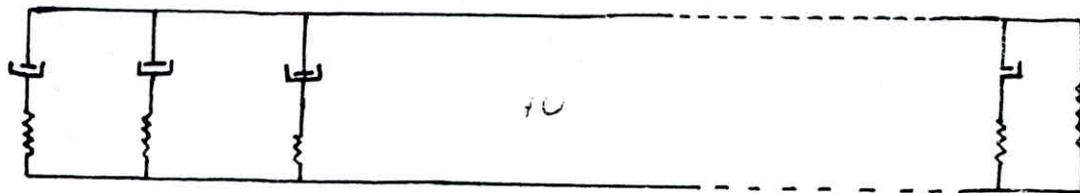
a) Solide

b) Fluide

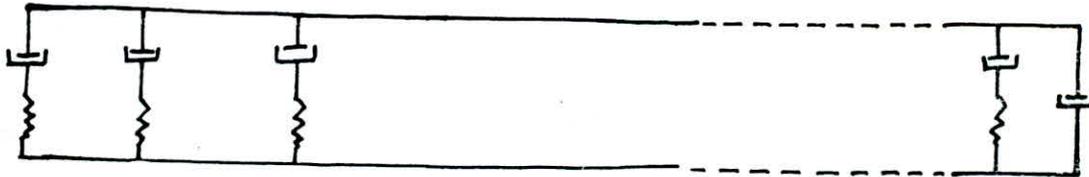
Le modèle fluide peut comporter un ressort en série pour l'élasticité instantané .

MODELE DE MAXWELL GENERALISE :

On met plusieurs modèles de Maxwell en parallèle, avec possibilité d'inclure un ressort ou un amortisseur .



a)



b)

Fig. IV.16 : Modèle généralisé de Maxwell

a) Solide

b) Fluide

L'équation différentielle régissant le comportement de n'importe quel modèle peut être écrite sous la forme suivante :

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} + \dots + p_m \sigma^{(m)} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} + \dots + q_n \varepsilon^{(n)} \quad (70)$$

Qu'on peut écrire aussi :

$$\sum_{k=0}^m p_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = \sum_{k=0}^n q_k \frac{d^k \varepsilon}{dt^k} \quad (71)$$

Ou encore : $P(\sigma) = Q(\varepsilon)$. (72)

avec $P = \sum_{k=0}^m p_k \frac{d^k}{dt^k}$ (a) et $Q = \sum_{k=0}^n q_k \frac{d^k}{dt^k}$ (b) (73)

En utilisant la transformé de Laplace on a :

$$\bar{P} \cdot \bar{\sigma} = \bar{Q} \cdot \bar{\varepsilon} \quad (74)$$

ou $\bar{P} = \sum_{k=0}^m p_k \lambda^k$ (a) et $\bar{Q} = \sum_{k=0}^n q_k \lambda^k$ (b) (75)

La transformé de Laplace de la fonction de fluage est donc, de (IV.56):

$$\bar{J} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\lambda \bar{\sigma}} = \frac{\bar{P}}{\lambda \bar{Q}} \quad (76)$$

Pour la fonction de relaxation, on a :

$$\bar{R} = \frac{\bar{Q}}{\lambda \bar{P}} \quad (77)$$

IV.6 IDENTIFICATION :

Les modèles mécaniques cités précédemment donnent l'expression analytique des lois de comportement, mais restent jusque la inutilisables, parceque les coefficients qui les définissent sont

inconnus.

On appelle *identification* tout le travail qui consiste à préciser les fonctions qui interviennent dans les modèles et à trouver les valeurs des coefficients qui les définissent, pour chaque matériau.

Prenons par exemple la fonction $M(t)$ jouant le même rôle que le coefficient de Lamé μ .

Le problème est de trouver un modèle mécanique qui approchera le comportement du matériau en cisaillement avec la précision voulue.

On effectue un essai de relaxation en cisaillement ; $\epsilon_{12} = \text{cte.}$

$$\sigma_{12}(t) = 2 \cdot M(t) \cdot \epsilon_{12} \quad (78)$$

$$M(t) = \frac{\sigma_{12}(t)}{2 \epsilon_{12}} \quad (79)$$

On obtient une série de couples $(t, M(t))$ et de fait, on peut tracer la courbe expérimentale de $M(t)$ par lissage directe des points expérimentaux.

On adopte ensuite un modèle analogique simple pour représenter la fonction $M(t)$, par exemple, un solide à 3 paramètres.

En donnant différentes valeurs à ces paramètres, on va tracer à chaque fois la courbe *théorique* $M(t)$, on fera varier les paramètres de façon à ajuster au mieux les deux courbes.

Si l'ajustement ne peut être obtenu selon la précision désirée, on adopte un modèle plus compliqué, avec 5 paramètres par exemple, et ainsi de suite, jusqu'à obtenir la précision voulue.

L'appréciation de l'ajustement peut être faite graphiquement (sur ordinateur) ou bien numériquement (méthode des moindres carrés par exemple).

V APPLICATION DE LA M. D. D AUX PROBLEMES VISCOELASTIQUES :

Les problèmes viscoélastiques sont d'une grande variété selon la loi de comportement du matériau et les conditions aux limites.

On a pu utiliser la M.D.D pour résoudre certains de ces problèmes, concernant les matériaux présentant une élasticité instantanée, en fluage, et ceux présentant un coefficient viscoélastique de Poisson constant.

La M.D.D se prête mal à la résolution de problèmes mixtes

V.1 PROBLEMES DE FLUAGE :

On entend par problème de fluage, les problèmes viscoélastiques dont les conditions aux limites sont décrit par :

$$t_i(t) = \bar{t}_i(t) = [H(t)] \cdot t_i^0 \text{ en tout point de } C \quad (1)$$

Ceux ci se traduisent dans le modèle numérique par :

$$\{ \alpha_i(t) \} = [H(t)] \{ \alpha_c^0 \} \quad (2)$$

avec $[H(t)] = [I] \cdot \dot{H}(t)$ et $[I]$: Matrice identité. (3)

Pour résoudre un tel problème, on va utiliser le principe de correspondance.

Le problème élastique correspondant nous amène à résoudre un système du type.

$$\{ \alpha_c \}_e = [A]_e \{ D \}_e \quad (4)$$

où $[A]_e$ est la matrice des coefficients d'influences, dépendant de la géométrie et des propriétés élastiques du matériau.

La matrice $[A]_e$ peut être écrite sous la forme suivante :

$$[A]_e = \frac{G_0}{2 \pi (1-\nu_e)} [A]^* \quad (5)$$

où $[A]^*$ est une matrice à coefficients géométriques seulement.

En supposant que la matrice $[A]^*$ soit inversible, les DD s'écrivent :

$$\{D\}_e = \frac{2\pi (1-\nu_e)}{G_e} [A]^*{}^{-1} \{\sigma_c\}_e \quad (6)$$

L'écriture transposée est donc :

$$\{\bar{D}(s)\}_e = \frac{2\pi (1-\bar{\nu}(s))}{\bar{G}(s)} [A]^*{}^{-1} \{\bar{\sigma}_c(s)\}_e \quad (7)$$

En appliquant la transformée inverse de Laplace à (7), on obtient les DD en fonction du temps, soient :

$$\{D(t)\}_v = 2\pi [A]^*{}^{-1} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1-\bar{\nu}(\Delta)}{\bar{G}(\Delta)} \cdot \{\bar{\sigma}_c(\Delta)\}_e \right] \quad (8)$$

or d'après (V.2) ; $\{\bar{\sigma}_c(\Delta)\}_e = \frac{1}{\Delta} [I] \{\sigma_c^o\}_e$ (9)

alors : $\{D(t)\}_v = 2\pi [A]^*{}^{-1} \{\sigma_c^o\}_e \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1-\bar{\nu}(\Delta)}{\Delta \bar{G}(\Delta)} \right]$ (10)

REMARQUE : $\bar{\nu}(s)$ et $\bar{G}(s)$ dépendent du modèle considéré.

On peut maintenant entamer le calcul à l'intérieur du corps.

a) Pour les contraintes, on a :

Dans le problème élastique correspondant, les contraintes dans le milieu sont données par, de (III.58b) :

$$\{\sigma_m\}_e = \frac{G_e}{2\pi (1-\nu_e)} [K]^* \{D\}_e \quad (11)$$

où $[K]^*$ est une matrice à coefficients géométriques seulement.

En remplaçant (V.6) dans (V.11), on obtient :

$$\{\sigma_m\}_e = [K]^* [A] \{\sigma_c\}_e \quad (12)$$

L'écriture transposé et l'inversion conduisent à :

$$\{\sigma_m(t)\} = [K]^* \cdot [A]^{*-1} \{\sigma_c(t)\} \quad (13)$$

Les contraintes à l'intérieur du corps ne dépendent pas du matériau

vu que $[K]$ et $[A]$ ne dépendent pas des coefficients élastiques. Elles sont les memes que celles du problème élastique correspondant.

$$\{\sigma_m(t)\} = \{\sigma_m\}_e \quad (14)$$

b) Pour les déplacements, on a :

Dans le problème élastique correspondant, de (II.54), pour une DD i seule les déplacements à l'intérieur du corps sont donnés par :

$$\{u\}_e = \frac{1}{4\pi(1-\nu_e)} [M]_i \{D^i\}_e \quad (15)$$

avec :

$$[M] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} -(1-2\nu) \sin \beta_i \bar{F} B_2^* + 2(1-\nu) \cos \beta_i \cdot \\ \bar{F} B_3^* + \bar{\gamma}^i (\sin \beta_i \bar{F} B_4^* - \\ - \cos \beta_i \bar{F} B_5^*) \end{array} & \begin{array}{l} -(1-2\nu) \cos \beta_i \bar{F} B_2^* - 2(1-\nu) \cdot \\ \sin \beta_i \cdot \bar{F} B_3^* - \bar{\gamma}^i (\cos \beta_i \cdot \bar{F} B_4^* + \\ + \sin \beta_i \bar{F} B_5^*) \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} (1-2\nu) \cos \beta_i \cdot \bar{F} B_3^* + 2(1-\nu) \\ \sin \beta_i \bar{F} B_3^* - \bar{\gamma}^i (\cos \beta_i \bar{F} B_4^* + \\ + \sin \beta_i \cdot \bar{F} B_5^*) \end{array} & \begin{array}{l} -(1-2\nu) \sin \beta_i \bar{F} B_3^* + 2(1-\nu) \\ \cos \beta_i \bar{F} B_3^* - \bar{\gamma}^i (\sin \beta_i \bar{F} B_4^* - \\ - \cos \beta_i \cdot \bar{F} B_5^*) \end{array} \end{array} \right] \quad (16) \end{array}$$

et $FB_k^* = 4\pi(1-\nu_e) \bar{F}_k \quad k=1,5$.

Ce sont des fonctione détuites de (III.47) et ne font intervenir que des coefficients géométriques .

REMARQUE :

On voit que [M] ne peut être décomposée en produit d'un terme faisant intervenir les coefficients élastiques et d'une matrice ne faisant intervenir que les paramètres géométriques.

En remplaçant (V.6) dans (V.15), on obtient :

$$\{u\}_e = \frac{1}{2G_e} [M]_i [A]_i^{*-1} \{\sigma_c\}_e \quad (18)$$

L'écriture transposée est donc :

$$\{\bar{u}(\Delta)\}_e = \frac{1}{2\Delta\bar{G}(\Delta)} [\bar{M}(\Delta)]_i [A]_i^{*-1} \{\bar{\sigma}_c^i(\Delta)\}_e \quad (19)$$

En remplaçant (V.9) dans (V.19), on obtient :

$$\{\bar{u}(\Delta)\}_e = \frac{1}{2\Delta\bar{G}(\Delta)} [\bar{M}(\Delta)]_i [A]_i^{*-1} \{\sigma_c^{i0}\}_e \quad (20)$$

$$\text{soit alors : } [\bar{W}(s)] = \frac{1}{\Delta\bar{G}(\Delta)} [\bar{M}(s)] \quad (21)$$

La transformée inverse de Laplace de (V.20) est :

$$\{u(t)\}_e = \frac{1}{2} \alpha^{-1} \left\{ [\bar{W}(\Delta)]_i \right\} [A]_i^{*-1} \{\sigma_c^{i0}\}_e \quad (22)$$

Selon la forme de la matrice [W], on voit que l'inverser-au sens de la transformée de Laplace-revient à trouver les expressions inverses des termes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1 - 2\bar{V}(\Delta)}{\Delta\bar{G}(\Delta)} \quad (a) \\ \frac{1 - \bar{V}(\Delta)}{\Delta\bar{G}(\Delta)} \quad (b) \\ \frac{1}{\Delta\bar{G}(\Delta)} \quad (c) \end{array} \right. \quad (23)$$

En effet, en prenant :

$$FI1 = \alpha^{-1} \left\{ \frac{1 - 2\bar{\nu}(\alpha)}{\alpha \bar{G}(\alpha)} \right\} \quad (a)$$

$$FI2 = \alpha^{-1} \left\{ \frac{1 - \bar{\nu}(\alpha)}{\alpha \bar{G}(\alpha)} \right\} \quad (b) \quad (24)$$

$$FI3 = \alpha^{-1} \left\{ \frac{1}{\alpha \bar{G}(\alpha)} \right\} \quad (c)$$

on aura : $\alpha^{-1} \{ [W(s)] \} = [W(t)]_i$ (25)
avec :

$$[W(t)]_L = \left[\begin{array}{c|c} -FI1 \sin \beta_i \bar{F} B_2^* + 2FI2 \cos \beta_i & -FI1 \cos \beta_i \bar{F} B_2^* - 2FI2 \cdot \\ \bar{F} B_3^* + FI3 \bar{\eta}_i (\sin \beta_i \bar{F} B_4^* - & \sin \beta_i \bar{F} B_3^* - FI3 \bar{\eta}_i \cdot \\ \cos \beta_i \bar{F} B_5^*) & \cdot (\cos \beta_i \bar{F} B_4^* + \sin \beta_i \bar{F} B_5^*) \end{array} \right] \quad (26)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} FI1 \cos \beta_i \bar{F} B_2^* + 2FI2 \sin \beta_i & -FI1 \sin \beta_i \bar{F} B_2^* + 2FI2 \cdot \\ \bar{F} B_3^* - FI3 \bar{\eta}_i (\cos \beta_i \bar{F} B_4^* & \cos \beta_i \bar{F} B_3^* - FI3 \bar{\eta}_i \cdot \\ + \sin \beta_i \bar{F} B_5^*) & \cdot (\sin \beta_i \bar{F} B_4^* - \cos \beta_i \bar{F} B_5^*) \end{array} \right]$$

et $\{U(t)\} = \frac{1}{2} [W(t)]_L [A]_L^* \{ \sigma_c^i \}$ (27)

Le principe de superposition reste applicable en viscoélasticité linéaire car la transformée de Laplace et son inverse sont linéaires

Dans le cas de N DD, on peut montrer que les déplacements s'écrivent sous la forme suivante :

$$\{U(t)\} = [W(t)]_g [A]^{* \cdot 1} \{ \sigma_c^i \} \quad (28)$$

où $[W(t)]_g$ englobe toutes les $[W]_i$.

Le problème maintenant est de trouver $[A]^{*-1}$
 On voit d'après (V.6) que :

$$[A]^{*-1} \{ \sigma_c \}_e = \frac{G_e}{2\pi(1-\nu_e)} \{ D \}_e \quad (29)$$

qui est calculable numériquement, une fois les DD élastiques calculées. Ceux ci peuvent être déterminés de (V.4).

Le problème se pose alors pour les coefficients G_e et ν_e , ces derniers, à priori ne représentent pas des grandeurs physiques, mais sont utilisés juste pour avoir une forme d'écriture identique à celle d'un problème élastique.

A ce stade, on va devoir restreindre notre étude aux matériaux viscoélastiques présentant une élasticité instantanée (la majorité des matériaux peuvent être considérés comme tels).

Pour ce genre de matériaux, il est possible de calculer $[A]^{*-1} \{ \sigma_c \}$ numériquement à partir d'une expression similaire à (V.29). En effet, à $t=0$, on a un comportement élastique, on peut alors écrire les équations physiques suivantes :

$$\{ \sigma_c \}_0 = \{ \sigma_c \} = [A] \{ D \}_0 \quad (30)$$

$$[A]^{*-1} \{ \sigma_c \} = \frac{G_0}{2\pi(1-\nu_0)} \{ D \}_0 \quad (31)$$

REMARQUES :

-La matrice $[A]^*$ ne dépend que des coefficients géométriques, elle ne varie pas avec le temps.

-L'indice 0 indique $t=0$.

-Les coefficients G_0 , ν_0 etc..., sont donnés par les fonctions de relaxation et de fluage.

-Pour le calcul des déplacements seulement, la relation (V.28) reste valable pour les matériaux ne présentant pas d'élasticité instantanée.

Les relations (V.10), (V.13), (V.28) s'écrivent alors :

$$\{ D(t) \}_v = FI2 \frac{G_0}{(1-\nu_0)} \{ D \}_0 \quad (32)$$

$$\{v(t)\}_v = [k]^* \{D\}_o \times \frac{G_o}{2\pi(1-\nu_o)} \quad (33)$$

$$\{u(t)\} = [w(t)]_g \frac{G_o}{1-\nu_o} \{D\}_o \quad (34)$$

La relation (V.28) peut être mise sous une forme analogue à (III.58a), soit :

$$\left\{ \begin{aligned} u_x(t) &= \sum_{j=1}^N B_{xs}^{j*}(t) D_{os}^j + \sum_{j=1}^N B_{xn}^{j*}(t) D_{on}^j \\ u_y(t) &= \sum_{j=1}^N B_{ys}^{j*}(t) D_{os}^j + \sum_{j=1}^N B_{yn}^{j*}(t) D_{on}^j \end{aligned} \right. \quad (35)$$

V.2 PROBLEMES DE RELAXATION :

On entend par problèmes de relaxation, les problèmes viscoélastiques dont les conditions aux limites sont décrit par :

$$U_l(t) = \bar{U}_l(t) = H(t) \cdot U_l^o \quad \text{en tout point de } C \quad (36)$$

avec U_l^o constant.

Ceux-ci se traduisent dans le modèle numérique par :

$$\{u_e(t)\} = [H(t)] \cdot \{u_c^o\} \quad (37)$$

Pour résoudre ce genre de problème on utilise aussi le principe de correspondance.

Le problème élastique correspondant nous amène à résoudre le système suivant :

$$\{u_c\}_e = [B] \{D\}_e \quad (38)$$

les solutions élastiques sont :

$$\{D\}_e = [B]_e^{-1} \{u_c\}_e \quad (39)$$

La matrice [B] ne peut être décomposé en un produit d'un terme faisant intervenir les coefficients élastiques et une autre matrice ne faisant intervenir que les coefficients géométriques, comme on l'a vu pour le fluage.

Néanmoins, on remarque que [B] ne fait intervenir que le coefficient ν_e .

L'écriture transposé étant :

$$\{\bar{D}\} = [B]^{-1} \{\bar{u}_e\} \quad (40)$$

A ce stade, on va encore restreindre notre étude aux matériaux présentant une fonction $\bar{\nu}(s)$, correspondante de ν_e , constante. Ceci revient à avoir des fonctions $M(t)$ et $E(t)$ jouant le rôle de G et E , constamment proportionnelles.

On aura $\nu_e = \nu = \bar{\nu}(s) = \text{cte.}$ (41)

Dans ce cas la transformé inverse s'écrit :

$$\{D(t)\}_v = [B]^{-1} \{u_e(t)\} \quad (42)$$

ou bien :

$$\{D\}_v = [B]^{-1} \{u_i\} = \{D\}_e \quad (43)$$

-Calcul des déplacements :

Le problème élastique équivalent donne, pour N DD

$$\{u\}_e = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} [M] \{D\}_e \quad (44)$$

L'écriture transposé est :

$$\{\bar{u}\} = \frac{1}{4\pi(1-\bar{\nu}(s))} [\bar{M}] \{\bar{D}(s)\} \quad (45)$$

Puisque $[\bar{M}]$ ne dépend que de $\bar{\nu}(s)$, alors :

$$\{u(t)\} = \frac{1}{4\pi(1-\nu_e)} [M]_v \{D\}_v \quad (46)$$

REMARQUE :

On voit que les DD et les déformations sont obtenus de la même manière qu'en élasticité, en remplaçant ν_e par ν_v . Ils sont constants dans le temps.

-Calcul des contraintes :

La solution élastique est :

$$\{\sigma\}_e = \frac{G_e}{2\pi(1-\nu_e)} [A]^* \{D\}_e \quad (47)$$

L'écriture transposée est :

$$\{\bar{\sigma}\}_v = \frac{\bar{G}(\Delta)}{2\pi(1-\bar{\nu}(\Delta))} [A]^* \{\bar{D}\}_v \quad (48)$$

L'inversion donne :

$$\{\sigma(t)\}_v = \frac{1}{2\pi(1-\nu_v)} [A]^* \{D\}_v d^{-1} \{\bar{G}(\Delta)\}_v \quad (49)$$

REMARQUE :

Dans le cas où le matériau présente un ν_v dépendant du temps, on décomposera l'histoire en périodes successives où l'on supposera qu'il est constant. Les inconnues seront déterminées par la méthode précédente dans chaque période.

V.3 EXEMPLES :

L'organigramme suivant résume le programme VMDD utilisant la M.D.D en viscoélasticité. (Fig. V.1)

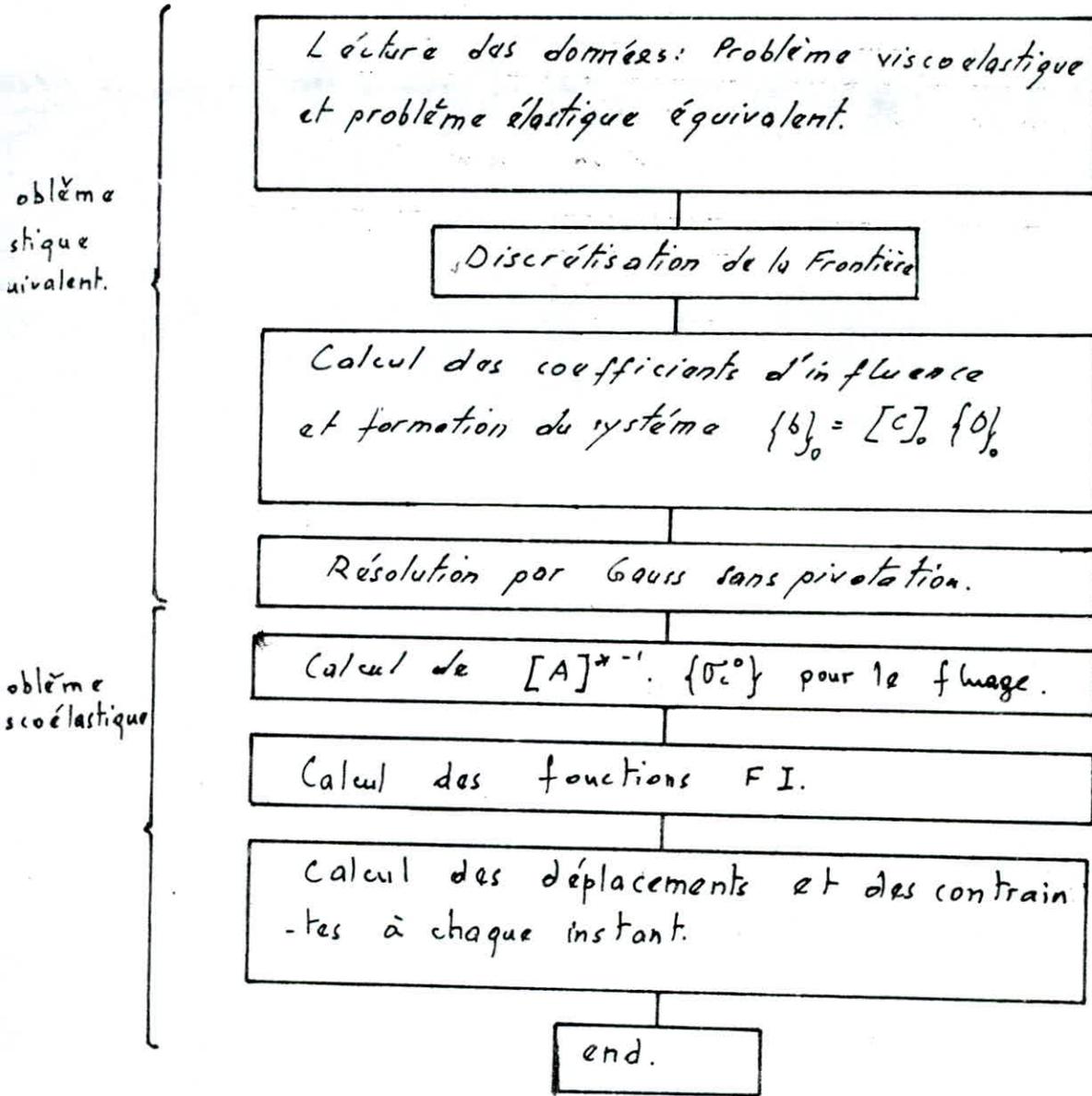


Fig. V.1: Organigramme VMDD.

Les exemples suivants permettent de tester le programme.

Pour les deux premiers exemples, on considère un matériau viscoélastique présentant un comportement élastique en dilatation et un comportement de solide à 3 paramètres en cisaillement.

On a alors :

$$K = \text{cte} \quad (K : \text{Module de dilatation volumique}) \quad (50)$$

La fonction correspondante à G est :

$$\text{En élasticité on a:} \quad G = \frac{\sigma_{xy}}{2\epsilon_{xy}} \quad (51)$$

$$\text{On a donc de (IV.77) : } G(s) = (52) \quad \bar{G}(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{2s\bar{P}(s)}$$

Pour un solide à 3 paramètres, de (IV.17) et (IV.18), on a :

$$\bar{P} = \frac{1}{s} + P_1 s \quad (a) \quad \bar{Q} = \frac{q_0}{s} + q_1 s \quad (b) \quad (53)$$

La fonction correspondante à ν est :

$$\text{En élasticité on a: } \nu = \frac{1}{2} \frac{3K - 2G}{3K + G} \quad (54)$$

$$\text{d'ou} \quad \bar{\nu}(s) = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\bar{G}(s)}{3K + \bar{G}(s)} \quad (\bar{K} = K) \quad (55)$$

Les fonctions FI sont alors : (voir annex C).

$$FI1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - 2\bar{\nu}(s)}{s\bar{G}(s)} \right\} = \left\{ \frac{2P_1}{q_1 + 6KP_1} \right\} \left\{ \exp(-ct) + \frac{B}{c} (1 - \exp(-ct)) \right\} \quad (57)$$

$$FI2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - \bar{\nu}(s)}{s\bar{G}(s)} \right\} = \left(\frac{4P_1}{q_1} - \frac{4}{q_0} \right) \exp(-Dt) + \frac{4}{q_0} - \left\{ \frac{18KP_1^2}{(6KP_1 + q_1)q_1} \right\} \cdot \left\{ \frac{B^2}{Dc} + \frac{(B-D)^2}{D(D-c)} \cdot \exp(-Dt) + \frac{(B-c)^2}{c(c-D)} \exp(-ct) \right\} \quad (58)$$

$$FI3(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s\bar{G}(s)} \right\} = \frac{2}{q_0} + \left(\frac{2P_1}{q_1} - \frac{2}{q_0} \right) \exp(-Dt) \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } q_0 &= \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} & (a) \quad B &= \frac{1}{P_1} & (d) \\ \nu &= \frac{\eta}{E_1 + E_2} & (b) \quad C &= \frac{q_0 + 6K}{q_1 + 6KP_1} & (e) \quad (60) \\ q_1 &= \frac{\eta}{E_1 + E_2} & (c) \quad D &= \frac{q_0}{q_1} & (f) \end{aligned}$$

$$\text{De plus, on a : } G(t) = \frac{E_1}{2} \exp\left(-\frac{t}{P_1}\right) + \frac{1}{2} q_1 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{P_1}\right)\right) \quad (61)$$

$$\text{D'où } G_0 = G(0) = 0.5 \frac{E_1}{2} \quad (62)$$

$$\nu_0 = \nu(0) = \frac{1}{2} \frac{3K - E_1}{3K + \frac{E_1}{2}} \quad (63)$$

On prendra donc dans le problème élastique :

$$E = E_1 (1 + \nu_0) \quad (a) \quad (64)$$

$$\nu = \nu_0 \quad (b)$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu_0)} \quad (c)$$

Les paramètres suivant sont utilisés dans les deux premiers exemples :

$$E=4800 \quad \nu=0.2, \text{ pour l'élasticité instantané} \quad (65)$$

$$E_1=4000 \quad E_2=1000 \quad \eta=1000, \text{ pour le modèle analogique}$$

EXEMPLE 1 : Tunnel sous pression.

La solution analytique du déplacement radiale est :

$$U(r, t) = \frac{Pb^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{q_0} \left(1 - \exp\left(-\frac{q_0}{q_1} t\right)\right) + \frac{P_1}{q_1} \exp\left(-\frac{q_0}{q_1} t\right) \right\} \quad (66)$$

La figure(V.2) donne les courbes des solutions exactes et numériques :

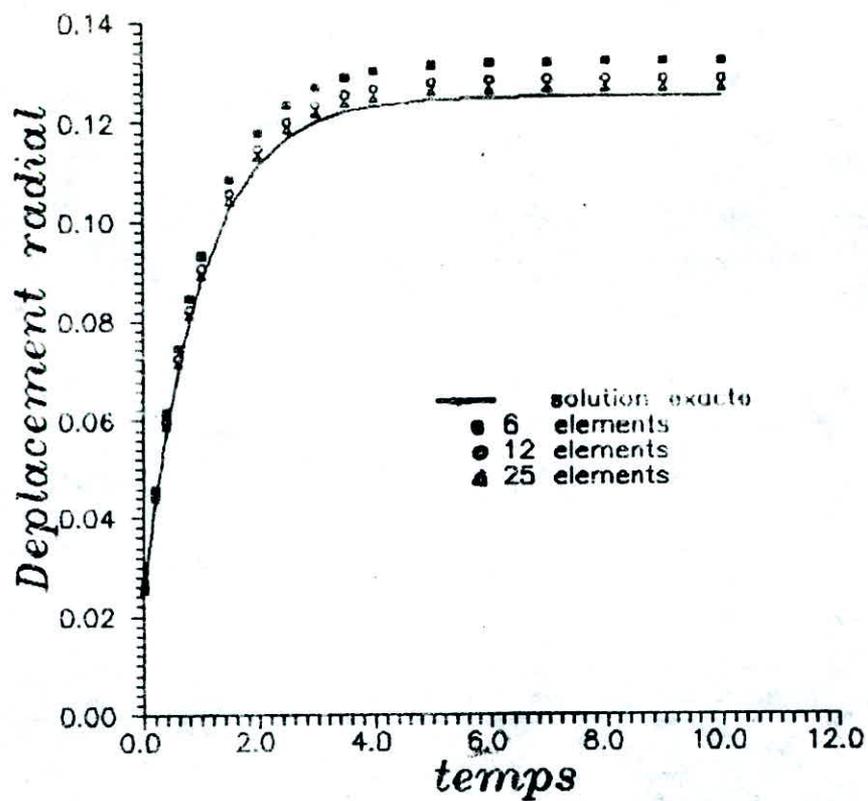


Fig. 5.2: Tunnel en fluage

On remarqua qu'il y a convergence vers la solution exacte.

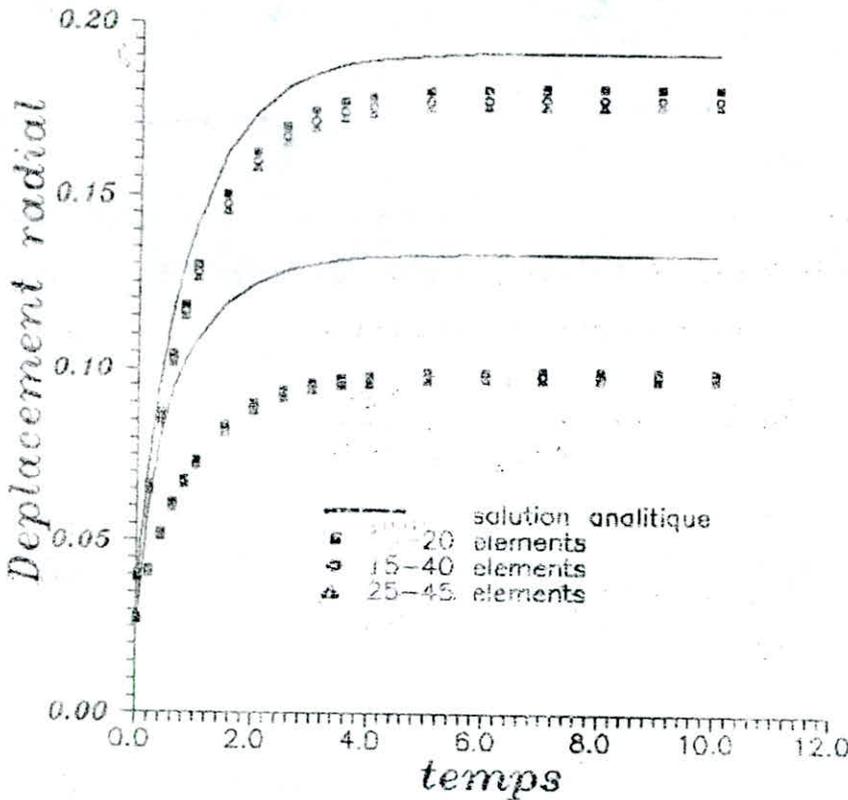
EXEMPLE 2 : Tube sous pression . (Figure V.4)

La solution analytique du déplacement radiale est donnée par :

$$U(r, t) = \frac{pb^2}{a^2 - b^2} \left\{ \left\{ \frac{3r}{q_1 + 6kP_1} \right\} \left\{ 1 - \exp(-ct) + \frac{3P_1 r}{(q_1 + 6kP_1)} \exp(-ct) \right\} + \right. \quad (67)$$

La figure (V.3) donne les courbes des solutions analytiques et numériques :

$$\left. + \frac{a^2}{q_1 r} (1 - \exp(-Dt)) + \frac{P_1 a^2}{q_1 r} \exp(-Dt) \right\}$$



Tube en fluage

Fig. V.3

On remarque que la solution numérique converge vers une solution qui s'écarte de la solution exacte.

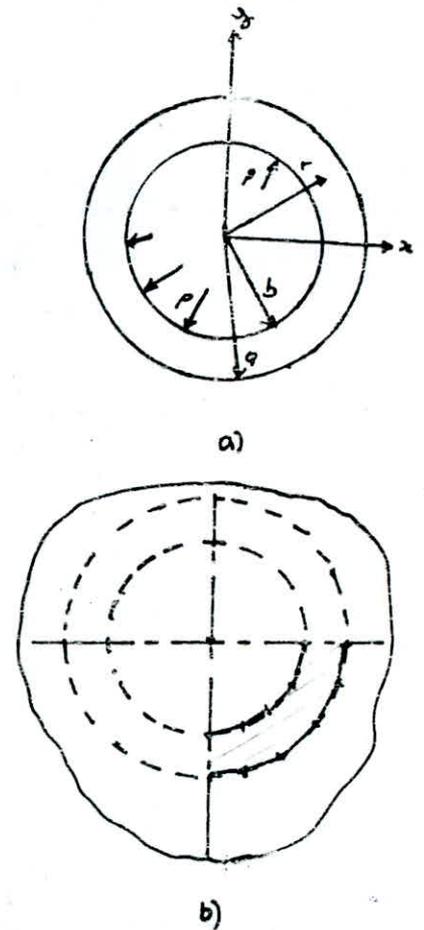


Fig. V.4: Tube.

- a) Modèle physique
- b) Modèle numérique

EXEMPLE 3 : Eprovette en fluage :

Pour cet exemple, et les exemples suivants on prendra un matériau viscoélastique ayant un coefficient de 'Poisson' constant, et un comportement de solide à 3 paramètres en cisaillement.

On aura :

$$\nu_v = \bar{\nu}(s) \quad (68)$$

$$G(0) = 0.5 E1 \quad (69)$$

et, FI3 est donnée par (V.55)

$$FI1 = \kappa^{-1} \left\{ \frac{1-2\nu_v}{1\bar{G}(0)} \right\} = (1-2\nu_v) FI3 \quad (70)$$

$$FI2 = \kappa^{-1} \left\{ \frac{1-\nu_v}{1\bar{G}(0)} \right\} = (1-\nu_v) FI3 \quad (71)$$

On utilisera les paramètres suivants :

$$E=6250 \quad \nu_v = 0.25 \quad (72)$$

$$E1=5000 \quad E2=5000 \quad \eta=5000$$

La solution analytique donnant le déplacement verticale est :

$$Uy = \gamma(1-\nu^2) \rho \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - \exp(-E_2 \eta t)) \right] \quad (73)$$

La figure (V.7) donne les courbes des résultats analytiques et numériques.

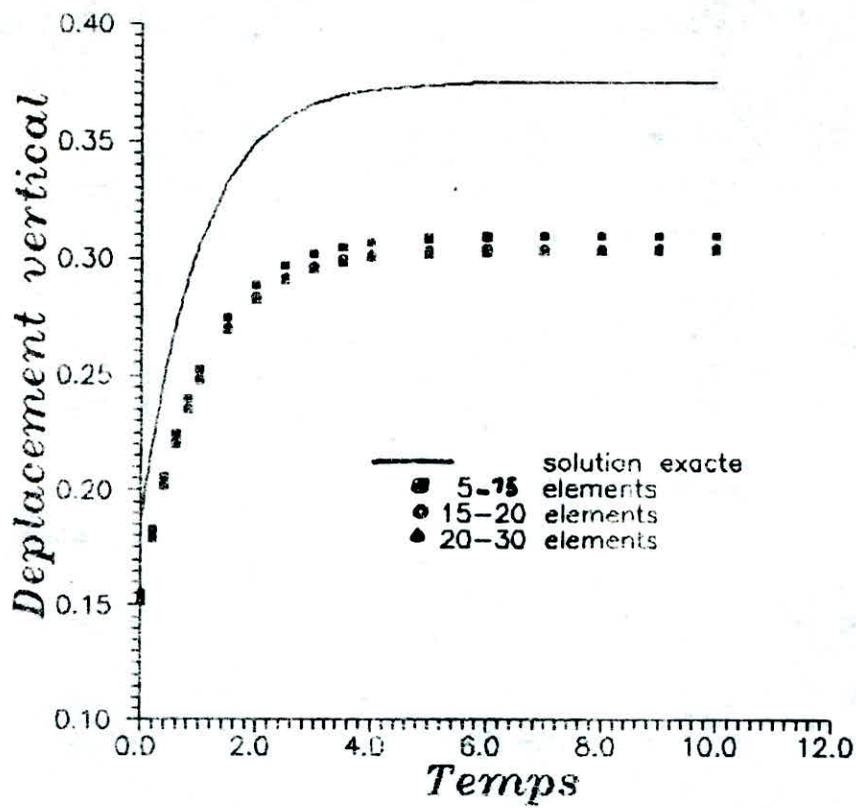


Fig: 5.4. *Eprouvette en fluage*
Déplacement verticale de la face supérieure

Dans ce cas aussi on remarque qu'on s'écarte de la solution exacte.

Exemple 4: Eprouvette en relaxation :

On impose un déplacement de $\Delta = 0.375$ à $t = 0$, qu'on maintient constant par la suite.

La solution analytique donnant la contrainte σ_y est :

$$\sigma_y = \frac{\Delta E_1}{10(E_1 + E_2)(1 - \nu^2)} (E_2 + E_1 \exp(-\frac{1}{\eta}(E_1 + E_2)t)) \quad (74)$$

La figure (V. 5) donne les courbes des solutions analytique et numérique de σ_y .

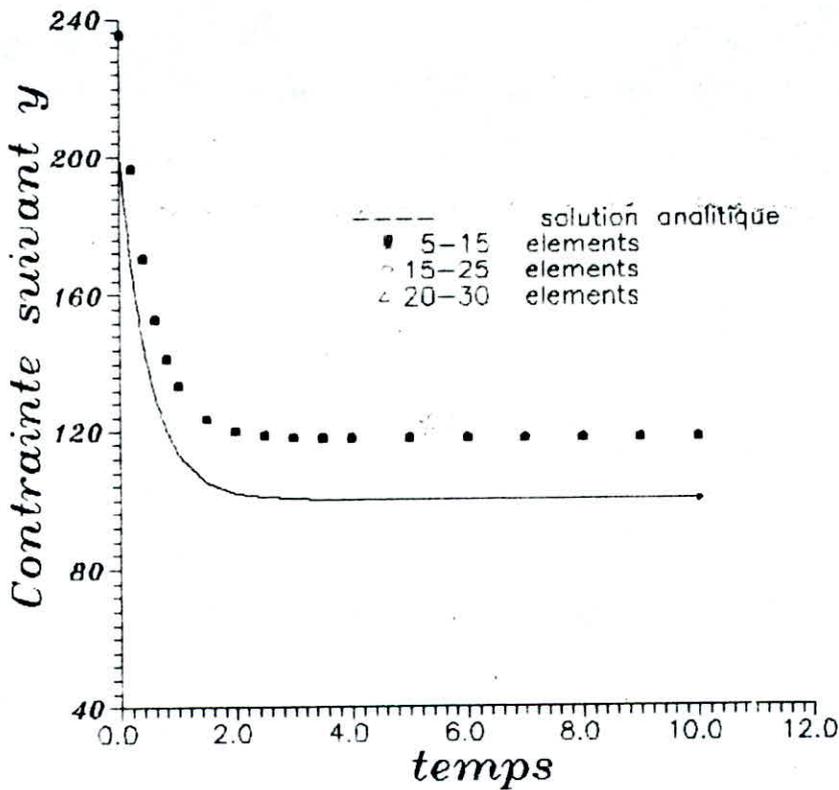


Fig: V. 5 : Eprouvette en relaxation

De même, ici, on s'écarte toujours de la valeur exacte.

Exemple 5 : Cavité en relaxation.

On impose un déplacement radial $\Delta = 0.001$ au contour intérieur.

La solution analytique donnant la contrainte radiale sur le contour intérieur :

$$\sigma_r(t) = \frac{-\Delta}{(1+\nu)} \left[q_0 + \frac{q_0}{E_2} \cdot E_1 \exp\left(-\frac{t}{p}\right) \right]$$

La figure (V. 6) donne les courbes des solutions analytiques et numériques de la contrainte radiale.

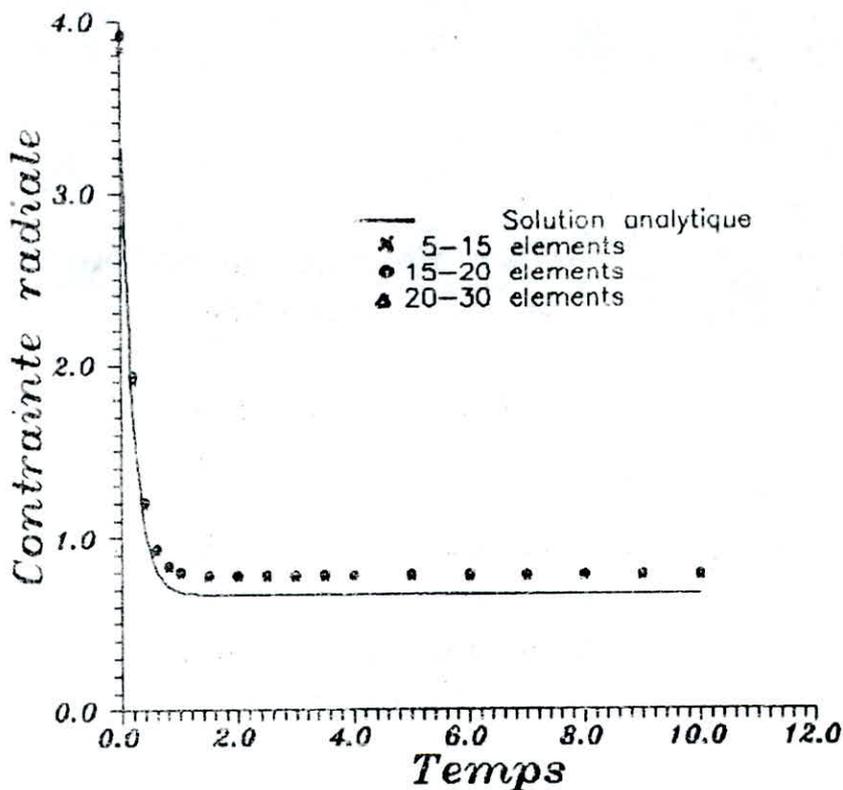


Fig. V.6: Cavité en relaxation

L'écart entre la solution exacte et la solution numérique est plus faible par rapport aux autres exemples.

INTERPRETATION DES RESULTATS

Dans le cas élastique, les résultats obtenus, par la M.D.D, pour les exemples traités, sont très satisfaisant. On arrive à converger vers la solution exacte avec un nombre réduit d'éléments. La discrétisation est très simple à réaliser, contrairement à ce qui aurait été pour la M.E.F, surtout pour les exemples de la fissure et de la cavité.

On remarque aussi la manière pratique dont la symétrie est prise en compte, on ne discrétise qu'une partie (la moitié ou le quart) de la structure sans mettre des éléments sur les axes de symétrie .

Le programme de calcul est simple à mettre au point, et s'exécute très rapidement. On peut conclure de tout ceci que la M.D.D se prête bien à la résolution des problèmes élastiques et présentant des fissures .

Dans le cas viscoélastique on a :

Pour l'exemple du tunnel en fluage, les résultats obtenus sont très bons, on voit bien la convergence des résultats numériques vers la solution exacte quand on affine la discrétisation

Pour les autres exemples (tube sous pression et plaque en fluage et relaxation), les résultats s'écartent de 25 % de la solution exacte . Nous pensons qu'il y a une erreur dans le logiciel que nous avons élaboré.

CONCLUSION

Cette étude avait pour objet l'adaptation de la méthode des discontinuités pour les milieux viscoélastiques linéaires.

L'intérêt de cette méthode numérique présentée dans ce travail est qu'elle se prête facilement à la simulation de ce type de comportement. Le résultat de cette étude permet de connaître l'évolution des contraintes et des déplacements au cours du temps pour ce type de matériaux.

Nous pensons que l'objectif de ce travail a été concrétisé en partie par le développement d'un logiciel pour la modélisation des milieux viscoélastiques linéaires par la méthode des discontinuités de déplacement. Ce logiciel permet de traiter les problèmes de fluage et de relaxation. Sur certains cas les résultats obtenus sont satisfaisants. Quelques exemples présentés restent néanmoins à vérifier.

Ce travail peut être aussi exploité pour une étude des milieux stratifiés (élastique-Viscoélastique) et par l'utilisation d'éléments de discrétisation plus performants pour pouvoir traiter des problèmes plus généraux et améliorer les résultats.

ANNEXE A

RAPPELS MATHÉMATIQUES:

1 Gradient divergence :

Considérons l'opérateur différentiel, appelé NABLA, défini par:

$$\underline{\nabla} = \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \quad (1)$$

ainsi que les champs vectoriel $\vec{A}(x,y,z)$ et scalaire $\phi(x,y,z)$.

A l'aide de ceci; on définit les grandeurs suivantes

a/ Gradient:

$$\underline{\nabla} \phi = \left(\vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \phi = \vec{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2)$$

C'est un vecteur appelé gradient de ϕ et qui s'écrit aussi grad ϕ

b/ Divergence:

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \vec{A} &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \right) = \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = A_{i,i} \end{aligned} \quad (3)$$

C'est un scalaire appelé divergence de \vec{A} et qui s'écrit aussi div \vec{A}

2/ Laplacien:

Le Laplacien est défini par:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (\text{noté aussi: } \Delta) \quad (4)$$

Une fonction $\phi(x,y,z)$ dont le Laplacien est nul ($\nabla^2 \phi = 0$) est dite -harmonique-

en notation indicielle, il s'écrit: $\nabla^2 \phi = \phi_{,i,i}$ (5)

Remarques:

$$- \text{div. grad. } \phi = \nabla^2 \phi \quad (6)$$

$$\begin{aligned} - \text{pour un vecteur; } \Delta \vec{A} \text{ représente le vecteur:} \\ \Delta A_x \cdot \vec{i} + \Delta A_y \cdot \vec{j} + \Delta A_z \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (7)$$

3/ Analyse Fonctionnelle:

Les notions présentées ici sont loin d'être pourvue de la rigueur mathématique nécessaire. Néanmoins elles nous servent comme support d'esprit pour comprendre les relations utilisées dans ce Travail

3.1/ fonctionnelle:

Une fonctionnelle est un opérateur faisant correspondre un scalaire à une fonction:

$$\begin{array}{ccc}
 F: C & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 \text{fonction} & \longrightarrow & \text{scalaire}
 \end{array} \quad (8)$$

C: ensemble de fonctions

3.2/ distribution

on appelle distribution toute fonctionnelle linéaire continue sur l'espace D. L'espace D est un espace vectoriel, formé des fonctions (complexes), x indéfiniment dérivables, à support borne.

3.3/ dérivé au sens des distributions:

Soit une fonction discontinue en un point x=a.

La dérivée au sens des distributions de f(x) est :

$$f' = \sigma_0 \delta + \{f'\}$$

Il faut ajouter à la dérivée, prise au sens des fonctions, une distribution de DIRAC $\sigma_0 \delta(x-a)$ proportionnelle au saut σ_0 ,

$$\sigma_0 = f(a^+) - f(a^-).$$

3.4/ Produit de convolution:

On appelle produit de convolution de deux fonctions f(x) et q(x), la fonction h(x) définie par:

$$h(x) = \int f(t) \cdot q(x-t) dt$$

et l'on écrit symboliquement:

$$h(x) = f(x) * q(x).$$

L'opération du "produit" de convolution est commutative et distributive par rapport à l'addition.

Remarque:

$$f(x) * \delta(x) = f(x).$$

La distribution de DIRAC est l'élément neutre du produit de convolution.

On va essayer de donner une sorte d'explication à la relation (III -21) et ceux du même genre:

on a:

$$\mathcal{E}(f) = \mathcal{J}(f) * \frac{D\sigma(f)}{Dt}$$

pour la fonction $\sigma(x)$ discontinue;

$$\frac{D\sigma(H)}{Dt} = \{\sigma'(H)\} + \sum_{j=1}^N [\Delta\sigma_j] \delta(t-t_j) \quad \text{où } [\Delta\sigma_j]: \text{termes de sauts.}$$

Alors :

$$\varepsilon(H) = J(H) * \{\sigma'(H)\} + \sum_{j=1}^N J(H) * \delta(t-t_j) \cdot [\Delta\sigma_j]$$

$$\varepsilon(H) = J(H) * \{\sigma'(H)\} + \sum_{j=1}^N J(t-t_j) \Delta\sigma_j.$$

on retrouve l'expression (-20). C.Q.F.D.

4/ Transformé de Laplace:

Le transformé de Laplace est défini par:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Propriétés de la transformé de Laplace:

1/ Linéarité:

$$\mathcal{L}\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} = C_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + C_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}, \forall C_1, C_2$$

2/ Transformé de Laplace de dérivées:

$$\text{si: } \mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s).$$

$$\text{alors: } \mathcal{L}\{f'(t)\} = s \bar{f}(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \bar{f}(s) - s f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \bar{f}(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - s^0 f^{(n-1)}(0).$$

Dans notre étude, on prendra comme limite inférieure d'intégration 0, dans ce cas

$$f^{(n)}(0) = 0 \text{ et } \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \bar{f}(s).$$

3/ Transformé d'un produit de convolution:

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \bar{f}(s) \cdot \bar{g}(s).$$

4/ Transformé inverse de Laplace:

$$\text{si } \bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \text{ alors } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\}.$$

elle est linéaire.

Le Tableau montre les transformées de Laplace de quelques fonctions couramment utilisées:

quelques

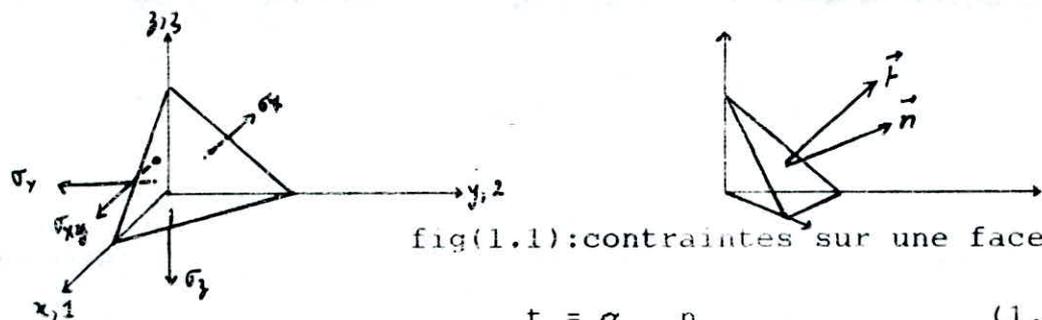
$f(t)$	$\bar{f}(s)$
$H(t)$	$1/s$
$\delta(t)$	1
$\exp(-a.t)$	$1/(s+a)$
$\frac{1}{a} (1 - \exp(-a.t))$	$\frac{1}{s(s+a)}$
t	$1/s^2$
$t \exp(-a.t)$	$1/(s+a)^2$

TABLE . A.1.

Ces tables servent à calculer les transformées inverses des solutions dans le principe de correspondance.

ANNEXE B
ELASTICITE

1 Contraintes sur une facette d'orientation quelconque: Les composantes de l'état de contraintes sur une facette d'orientation quelconque (fig 1.1) sont données par:



fig(1.1):contraintes sur une facette

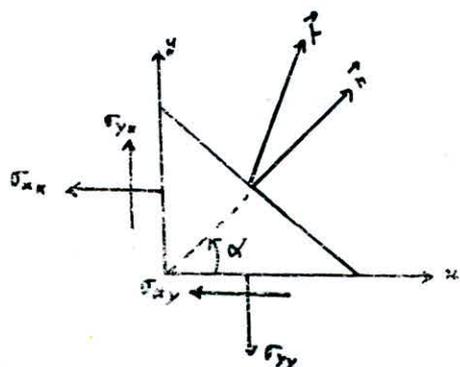
$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (1.1)$$

n_j : cosinus directeurs

σ_{ij} : composantes du tenseur de contraintes

Dans le cas de l'élasticité plane fig(1.2) , (1.1) s'écrit:

$$\begin{cases} t_x = \sigma_{xx} \cos\alpha + \sigma_{xy} \sin\alpha \\ t_y = \sigma_{yx} \cos\alpha + \sigma_{yy} \sin\alpha \end{cases} \quad (1.3)$$



fig(1.2):cas bidimensionnel

Dans le repère de directions péripendiculaire et normale à la facette, les composantes de l'état de contraintes sur celle ci s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_n = t_x \sin \alpha - t_y \cos \alpha \\ \sigma_n = t_x \cos \alpha + t_y \sin \alpha \end{cases} \quad (1.4)$$

En mettant (1.3) dans (1.4) on obtient:

$$(1.5) \quad \begin{cases} \sigma_n = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ \sigma_n = (\sigma_{xx} \cos^2 \alpha + 2\sigma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha) \end{cases}$$

Dans notre travail, on est amené à utiliser un angle autre que α , c'est l'angle β de la figure (1.3)

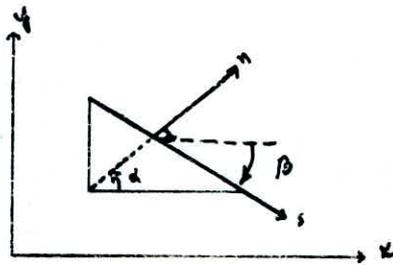


fig (1.3): angle β

Dans ce cas : $\cos \alpha = \sin \beta$ et $\sin \alpha = \cos \beta$, (1.5) devient:

$$\begin{cases} \sigma_n = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \beta \cos \beta + \sigma_{xy} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \\ \sigma_n = \sigma_{xx} \sin^2 \beta + 2\sigma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{yy} \cos^2 \beta \end{cases} \quad (1.6)$$

2 Changement de repère:

En élasticité bidimensionnelle, les relations de changement de repère sont données par:

a) Déplacements: fig(2.1)

$$\begin{cases} U_x = U_n \cos \beta - U_s \sin \beta \\ U_y = U_n \sin \beta + U_s \cos \beta \end{cases} \quad (2.1)$$

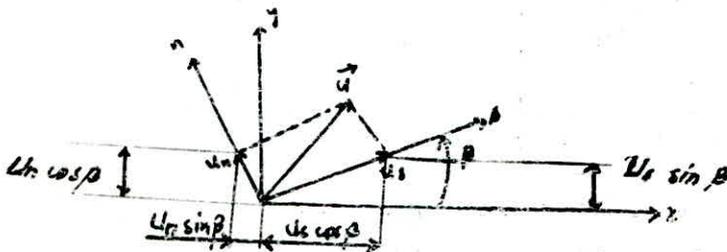


Fig. 2.1.

En inversant ce système on obtient:

$$\begin{cases} U_x = U_x \cos\beta + U_y \sin\beta \\ U_y = -U_x \sin\beta + U_y \cos\beta \end{cases} \quad (2.2)$$

2 Principe de superposition des effets:

Considérons pour un même corps, deux systèmes de sollicitations extérieures (forces volumiques et données aux limites).

Désignons les quantités relatives à ces deux états par (*) pour le premier et par (**) pour le second. Considérons maintenant les données suivantes:

$$\begin{cases} F_i = a_1 \cdot F_i^* + a_2 \cdot F_i^{**} & (\text{forces volumiques}) \\ u_i = a_1 u_i^* + a_2 u_i^{**} & (\text{c.a.l déplacements}) \\ t_i = a_1 t_i^* + a_2 t_i^{**} & (\text{c.a.l contraintes}) \end{cases} \quad (3.1)$$

Compte tenu de ce que le système (1,2,3.1), tout comme les conditions (5,6,7.1) contiennent seulement des opérateurs linéaires. On voit que les quantités

$$u_i = a_1 u_i^* + a_2 u_i^{**}, \quad \epsilon_{ij} = a_1 \epsilon_{ij}^* + a_2 \epsilon_{ij}^{**}, \quad \sigma_{ij} = a_1 \sigma_{ij}^* + a_2 \sigma_{ij}^{**} \quad (3.2)$$

forment elles-mêmes un système cohérent de grandeurs caractérisant un état élastique (c.a.d, les sommes ϵ_{ij} sont justement les déformations qui correspondent aux déplacements somme u_i , les sommes σ_{ij} sont les tensions qui correspondent aux déformations sommes ϵ_{ij}), et ce système décrit l'état élastique du corps soumis aux sollicitations sommes (3.1) Ce résultat s'appelle le **théorème de superposition des effets**.

Viscoélasticité

Calcul des fonctions FI.

$$FI1 = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - \bar{v}(s)}{s \bar{G}(s)} \right\} \quad (1)$$

$$\text{On a : } G(s) = \frac{Q'}{2P}, \quad \bar{v}(s) = \frac{1}{2} \frac{3k - 2\bar{G}(s)}{3k + \bar{G}(s)} \quad \text{avec } P = 1 + p_1 s, \quad Q' = q_0 + q_1 s. \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{d'ou : } \frac{1 - 2\bar{v}(s)}{s \bar{G}(s)} &= \frac{6(1 + p_1 s)}{s [(q_0 + 6k) + (q_1 + 6kp_1)s]} \quad (5) \\ &= \frac{6}{s (q_1 + 6kp_1) \left[\frac{q_0 + 6k}{q_1 + 6kp_1} + s \right]} + \frac{6p_1}{(q_1 + 6kp_1) \left[\frac{q_0 + 6k}{q_1 + 6kp_1} + s \right]} \quad (6) \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } B = \frac{1}{p_1} \quad (7) \quad C = \frac{q_0 + 6k}{q_1 + 6kp_1} \quad (8)$$

Alors d'après la table A1, on a :

$$FI1 = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - 2\bar{v}(s)}{s \bar{G}(s)} \right\} = \frac{6p_1}{q_0 + 6k} \cdot \left\{ (1 - \exp(-C.t)) \frac{B}{C} + \exp(-C.t) \right\} \quad (9)$$

$$FI2 = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - \bar{v}(s)}{s \bar{G}(s)} \right\} \quad (10)$$

$$\frac{1 - \bar{v}(s)}{\Delta G(s)} = \frac{1 - (3kP' - Q') / (6kP' + Q')}{\frac{\Delta Q'}{2P'}} \quad (11)$$

$$= \frac{2P' [6kP' + Q' - 3kP' + Q']}{\Delta Q' (6kP' + Q')} \quad (12)$$

$$= \frac{4P'}{\Delta Q'} - \frac{18kP'^2}{\Delta Q' (6kP' + Q')} \quad (13)$$

(1) (2)

$$(1) = \frac{4P'}{\Delta Q'} = \frac{4(1 + P_1 s)}{s(q_0 + q_1 s)} = \frac{4/q_1}{s(p + \frac{q_0}{q_1})} + \frac{4P_1/q_1}{(\frac{q_0}{q_1} + s)} \quad (14)$$

En posant: $D = \frac{q_0}{q_1}$ (15)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4P'}{\Delta Q'} \right\} = \frac{4P_1}{q_1} \exp(-D.t) + \frac{4}{q_1} \left[\frac{1 - \exp(-D.t)}{\frac{q_0}{q_1}} \right] = \quad (16)$$

$$= \left(\frac{4P_1}{q_1} - \frac{4}{q_0} \right) \exp(-D.t) + \frac{4}{q_0} \quad (17)$$

$$(2) = \frac{18k(1 + P_1 s)^2}{s[6k(1 + P_1 s) + (q_0 + q_1 s)] (q_0 + q_1 s)} \quad (18)$$

$$= \frac{18k(1 + P_1 s)^2}{s[q_0 + q_1 s] [s(6kP_1 + q_1) + (6k + q_0)]} \quad (19)$$

$$= \frac{18 k p_i^2 \left(1 + \frac{1}{p_i}\right)^2}{18 q_1 \left(\frac{q_0}{q_1} + 1\right) \left(1 + \frac{6k + q_0}{6k p_1 + q_1}\right) \left(6k p_1 + q_1\right)} \quad (20)$$

$$= \frac{18 k p_i^2}{q_1 (6k p_1 + q_1)} \cdot \frac{(a+B)^2}{1(a+C)(a+D)} \quad (21)$$

Posons: (3) = $\frac{(a+B)^2}{1(a+C)(a+D)} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a+C} + \frac{d}{a+D}$ (22)

ona: (3) x a = $\frac{(a+B)^2}{(a+C)(a+D)} = a + a \left(\frac{b}{a+C} + \frac{d}{a+D} \right)$ (23)

pour a=0; $\frac{B^2}{C \cdot D} = a$ (24)

(3) x (a+C) = $\frac{(a+B)^2}{1(a+D)} = b + (a+C) \left(\frac{a}{a} + \frac{d}{a+D} \right)$ (25)

pour a=-C; $\frac{(B-C)^2}{-C(C+D)} = b$ (26)

(3) x (a+D) = $\frac{(a+B)^2}{1(a+B)} = d + (a+D) \left(\frac{a}{a} + \frac{b}{a+D} \right)$ (27)

pour a=-D; $\frac{(B-C)^2}{D(D-C)} = d$ (28)

d'où: $\mathcal{L}^{-1}\{3\} = \frac{B^2}{DC} + \frac{(B-D)^2}{D(D-C)} \exp(-D \cdot t) + \frac{(B-C)^2}{C(C-D)} \exp(-C \cdot t)$ (29)

On a finalement.

$$\begin{aligned}
 F I 2 = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - \bar{v}(s)}{s \bar{G}(s)} \right\} &= \left(\frac{4 P_1}{q_1} - \frac{4}{q_0} \right) \exp(-D.t) + \frac{4}{q_0} - \\
 &- \left\{ \frac{18 K P_1^2}{q_1 (6 k P_1 + q_1)} \right\} \left[\frac{B^2}{D.C} + \frac{(B-D)^2}{D(D-C)} \exp(-D.t) + \frac{(B-C)^2}{C(C-D)} \exp(-C.t) \right] \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$F I 3 = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s \bar{G}(s)} \right\}. \quad (31)$$

$$\frac{1}{s \bar{G}(s)} = \frac{1}{s \frac{Q'}{P'}} = \frac{2 P'}{s Q'} = \frac{2 (1 + q_1 s)}{s (q_0 + q_1 s)} = \frac{2/q_1}{s (q_0/q_1 + s)} + \frac{2 q_1/q_1}{s + q_0/q_1} \quad (32)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s \bar{G}(s)} \right\} = \frac{2 q_1}{q_1} \exp(-D.t) + \frac{2}{q_1} \frac{1 - \exp(-D.t)}{q_0/q_1} \quad (33)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s \bar{G}(s)} \right\} = \frac{2 q_1}{q_1} - \frac{2}{q_0} \exp(-D.t) + \frac{2}{q_0} \quad (34)$$

BIBLIOGRAPHIE

BELKACEMI.Y. Application de la méthode des discontinuités de déplacements aux milieux viscoélastiques.D.E.A de mécanique du solide. Université de Lille 1. 1985

BELKACEMI.Y. Méthode des discontinuités de déplacement de champ complexe. Développements analytiques et numériques- Application aux milieux fissurés. thèse de Doctorat Université de Lille 1.1990

CROUCH.S.L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. Int.J.Num.Methods.Engng.Part I and II .1976

CROUCH.S.L. STARFIELD.A.M. Bondary element method in solid mechanics. Allen et Unwin. 1983.

CRAWFORD.A.M. CURRAN.J.H. A displacement discontinuity approach to modelling the creep behaviour of rock and its discontinuities. Int.J.Num.Methods.Engng. 1983.

CREUS.G.J. Vicoelasticity- Basic theory and application to concrete structures. Springer Verlag . 1986.

FLUGE.W. Viscoelasticity. Springer Verlag. 1975

LEMAITRE.J. CHARBOCHE.J.L. Mecanique des matériaux solides. Dunod. 1985.

PARTON.V. Méthode de la théorie mathématique de l'élasticité.Ed Mir 1977.

RODDIER.F. Distributions et transformation de Fourier. Mc.Graw.Hill. 1988.

SALENSON.J. Viscoélasticité .Presse de l'école nationale des ponts et chaussés. 1983.

SOLOMON.L. Elasticité linéaire. Masson. 1968.

