



ECOLE NATIONALE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
Département d'Electronique

*Projet de fin d'études en vue de l'obtention du Diplôme
d'Ingénieur d'Etat en Electronique*

Segmentation d'images : de l'évolution des courbes aux ensembles de niveaux

Réalisé par : **Mr HALIMI Abderrahim**
Mr HAMI Zakaria

Soutenu le 09 Juin 2009 devant le jury composé de :

Président :	M. H.BOUSBIA-SALAH	Maître de Conférences	ENSP
Rapporteur :	M ^{me} L.HAMAMI	Professeur	ENSP
Examineurs :	M ^{lle} A.MOUSSAOUI	Chargée de cours	ENSP
	M. E.SAADAOU	Chargé de cours	ENSP

Juin 2009

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué à l'Ecole Nationale Supérieure Polytechnique d'Alger.

Tout d'abord, nous tenons à remercier tout particulièrement et très chaleureusement notre Directrice de thèse, Pr L Hamami, avec qui nous avons eu tant de plaisir à travailler et qui nous a fait profiter de son expérience dans le domaine du traitement d'images. Elle a accepté de nous encadrer malgré ses nombreuses occupations. Qu'elle trouve ici notre sincère gratitude.

Nous sommes très sensibles à l'honneur que nous fait le Dr H. Bousbia en présidant ce jury. Nous tenons à lui exprimer nos remerciements les plus sincères.

Nous exprimons notre profonde reconnaissance au Dr A. Moussaoui et au Mr E. Saadaoui d'avoir accepté d'être membres du jury et de juger ce modeste travail.

Que tous nos professeurs qui ont contribué à notre formation trouvent ici notre plus profonde gratitude.

Nous adressons nos plus sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Enfin, nous souhaitons dédier ce mémoire à nos parents. Rien n'aurait été possible sans leur soutien, confiance et générosité.

DEDICACE

A ma mère, ma mère, ma mère et mon père

A mes grands-parents

A mes frères

A ma promotrice : L.HAMAMI

A mon binôme : Zaki

A mes amis de l'ENP

A tous ceux qui ont su croire en moi

A tous ceux qui me sont chers

Je dédie ce modeste travail

Abderrahim

DEDICACE

A mes très chers parents

A ma tante Zahoua

A la mémoire de ma grand-mère et de mes grands-pères

A mes frères et sœur : Mahdi, Idir, Elias et Sabrina

A ma promotrice : L.HAMAMI

A Mr. M.HALIMI

A mon binôme : Rahim

A mes amis : Omar, Khaloudi, Slimane, Chriklou...

A tous ceux qui ont su croire en moi

A tous ceux qui me sont chers

Je dédie ce modeste travail

Zaki

TABLE DES MATIERES

LISTE DES FIGURES	i
TABLE DES NOTATIONS	iii
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : SEGMENTATION CLASSIQUE	5
1. Introduction.....	5
2. Différentes approches de la segmentation	6
2.1. Approche région	6
2.2. Approche frontière	6
3. Les techniques de segmentation	6
3.1. Le seuillage	7
3.2. Croissance de régions	7
3.3. "Quadtree" et descente pyramidale	7
3.4. Détection de contours	8
3.4.1. Opérateur de Roberts.....	10
3.4.2. Opérateur de Prewitt et Sobel.....	10
3.4.3. Opérateur de Kirsh	11
3.4.4. Opérateur de second ordre.....	11
4. Conclusion	13
CHAPITRE II : NOTIONS SUR LA GEOMETRIE DIFFERENTIELLE	14
1. Introduction.....	14
2. Représentation régulière	14
3. Vecteur tangent, vecteur normal.....	15
4. Longueur d'un arc	16
5. Changement de paramètre	17
6. Utilisation de l'abscisse curviligne	18
7. La courbure	19
8. Conclusion	22

CHAPITRE III : EVOLUTION DES COURBES	23
1. Introduction	23
2. Equation hyperbolique-condition entropique	25
3. Formulation fondamentale	27
4. Equation d'évolution de la courbure	28
4.1. Propagation suivant la normale avec une vitesse $F=1$	30
4.2. Propagation suivant la normale avec une vitesse $F=k$	34
4.3. Propagation suivant la normale avec une vitesse $F = 1 - \varepsilon k$	34
5. Evolution des courbes avec la méthode des ensembles de niveaux	36
5.1. Formulation des ensembles de niveaux	37
5.2. Avantages de la formulation des ensembles de niveaux	39
5.3. Exemples d'évolution de quelques courbes par les ensembles de niveaux	40
5.3.1. Evolution suivant la normale avec une vitesse unitaire	40
5.3.2. Evolution suivant la normale avec une vitesse égale à la courbure	41
5.3.3. L'évolution min/max	43
6. Conclusion	44
CHAPITRE IV : PRETRAITEMENTS UTILISANT LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES	45
1. Introduction.....	45
2. Equation de la chaleur	45
2.1. Schéma numérique	46
2.2. Application sur une image radiographique de soudure	47
3. Opérateur de Perona-Malik	48
3.1 Principe	48
3.2. Amélioration : convolution du gradient par une gaussienne	50
3.3. Schéma numérique	51
3.4. Applications	52
4. Conclusion	53

CHAPITRE V: DES CONTOURS ACTIFS AUX LEVEL-SET	54
1. Introduction	54
2. Principe	54
3. Paramétrisation	55
4. Energies	55
4.1. Energie interne	55
4.2. Energie externe.....	56
4.2.1. Gradient	56
4.2.2. Intensité	57
4.2.3 « Gradient Vector Flow »	57
4.3. Energie de contexte	58
5. Minimisation de l'énergie	59
6. Discussion.....	59
7. Contour actif géodésique	60
8. Application de la méthode des ensembles de niveaux pour la détection des contours ...	63
8.1. Discrétisation de l'équation de propagation obtenue par les ensembles de niveaux	63
8.1.1. Discrétisation du premier terme : Mean curvature motion	64
8.1.2. Evolution avec une vitesse constante (constant speed evolution)	64
8.1.3. Discrétisation du troisième terme	65
8.2. Besoin de réinitialisation	65
8.3. Discussion	68
9. Méthode des ensembles de niveaux sans-réinitialisation.....	69
9.1. Principe.....	69
9.2. Implémentation	71
9.2.1. Schéma numérique	71
9.2.2. Initialisation flexible de la fonction d'ensemble de niveaux	72
9.3. Discussion	72
10. Exemple de segmentation d'image	73

10.1. Segmentation des images synthétiques	73
10.1.1. Image contenant plusieurs éléments	73
10.1.2. Image contenant des objets imbriqués	74
10.1.3. Image bruitée	75
10.2. Images médicales	77
11. Conclusion	80
CHAPITRE VI : PRESENTATION DU LOGICIEL EASYLEVSET	81
1. Introduction	81
2. Organisation générale	81
3. La barre des menus	82
3.1. Menu « File »	82
3.2. Menu « Propagation »	83
3.3. Menu « Filtrage »	84
3.4. Menu « Segmentation »	86
3.5. Menu « Segmentation par EDP »	87
3.6. Menu « Help »	89
4. Conclusion	91
CONCLUSION GENERALE	92
BIBLIOGRAPHIE	94
ANNEXES	97

LISTE DES FIGURES

Figure I.1	Détection de contours (exemple mono-dimensionnel)	9
Figure I.2	Résultats de la détection des contours avec différentes méthodes	12
Figure II.1	Représentation des courbes.....	15
Figure II.2	Illustration de différentes valeurs de la tangente	16
Figure II.3	Longueur d'un arc	16
Figure II.4	Vecteur tangent unitaire obtenu par dérivée suivant l'abscisse curviligne	19
Figure III.1	Propagation d'une courbe avec une vitesse F dans sa direction normale	24
Figure III.2	représentation de l'équation hyperbolique d'une courbe en V	27
Figure III.3	Paramètres de propagation de courbe	28
Figure III.4	propagation suivant la normale avec une vitesse $F=1$	33
Figure III.5	Solution entropique (limite des solutions de viscosité).	36
Figure III.6	Propagation d'un cercle	38
Figure III.7	Evolution suivant la normale avec une vitesse unitaire	41
Figure III.8	Evolution suivant la normale avec une vitesse égale à la courbure d'une courbe non convexe	42
Figure III.9	Evolution suivant la normale avec une vitesse égale à la courbure d'une courbe convexe	42
Figure III.10	Evolution suivant la normale avec une vitesse égale à la courbure d'une courbe non convexe	43
Figure III.12	Evolution suivant la normale avec une vitesse égale à $\min(k,0)$ à gauche et $\max(k,0)$ à droite.	44
Figure IV.1	Filtrage par une Gaussienne avec différents nombres d'itérations	48
Figure IV.2	Représentation de $c_1(t)$ et $c_2(t)$ pour $K=2$	49
Figure IV.3	Filtrage par Perona-Malik avec différents nombres d'itérations	50
Figure IV.4	Filtrage d'une image bruitée avec différentes méthodes ($\delta t=0.15$)	52

Figure V.1	La convergence à une concavité, à gauche la méthode GVF, à droite celle du snake [3]	57
Figure V.2	Besoin de réinitialisation (représentation du gradient)	67
Figure V-3	Segmentation d'une image synthétique par les ensembles de niveaux	73
Figure V-4	Segmentation d'une image comportant des objets imbriqués par les ensembles de niveaux	75
Figure V-5	Segmentation d'une image bruitée après un filtrage Gaussien et de Perona-Malik	76
Figure V-6	Segmentation d'une image bruitée après un filtrage de Perona-Malik	76
Figure V-7	Segmentation d'une image de chromosomes par les ensembles de niveaux	78
Figure V-8	Segmentation d'image cellulaire par les ensembles de niveaux	79
Figure V-9	Segmentation d'une image coronaire par les ensembles de niveaux	79
Figure VI.1	Présentation de EasyLevSet	82
Figure VI.2	Menu « File »	83
Figure VI.3	Menu « Propagation »	84
Figure VI.4	Menu « Filtrage »	85
Figure VI.5	Menu « Segmentation »	87
Figure VI.6	Segmentation par EDP	88
Figure VI.7	Segmentation par EDP (lors de l'exécution)	88
Figure VI.8	Menu « Help interactif »	89
Figure VI.9	Help interactif, image de la vidéo du Filtrage	89
Figure VI.10	Menu « EasyLevSet help »	90
Figure VI.11	About	90
Figure A.1	Représentation des fonctions $y(x)$ et $Y(x)$ pour différents valeurs de α	98
Figure C.1	Géodésiques sur une sphère	101

TABLE DES NOTATIONS

F	Fonction de vitesse
EDP	Equations aux Dérivées Partielles
$f(x,y)$	Intensité de pixel au point (x,y)
R	Région d'image
Δ	Opérateur Laplacien
$\vec{\nabla}$	Opérateur Gradient
$\vec{\nabla}f(x,y)$	Gradient de l'intensité sur l'image au point (x,y)
$\text{div}()$	Opérateur Divergence
α, β	Paramètres de régulation du snake
x,y	Coordonnées d'un point dans l'image (pixel)
f_x	Dérivée partielle en x de la fonction f
f_y	Dérivée partielle en y de la fonction f
$\ \quad \ $	Norme
θ	Phase
w_x, w_y	Masques selon x,y respectivement
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire
u_0	Condition initiale ou contour initial
s	Abscisse curviligne
$\vec{n}(s)$	Vecteur unitaire normal
k	Courbure
ε	Coefficient de courbure
γ	Courbe initiale fermée
\vec{x}	Vecteur de position de la courbe
$g(s,t)$	Métrie permettant de calculer la longueur de l'arc
u	Fonction inconnue d'une EDP
Γ	Interface (hyper surface)
d	Distance entre deux points de contour (pixel)
ϕ	Fonction scalaire d'ensemble de niveaux
$\text{signe}()$	Fonction signe
c	Coefficient Courant-Friedreichts-Lewy (CFL)
δ_x^+	Différence finie « Forward » suivant l'axe ox
δ_x^-	Différence finie « Backward » suivant l'axe ox
δ_y^+	Différence finie « Forward » suivant l'axe oy
δ_y^-	Différence finie « Backward » suivant l'axe oy

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Le traitement d'images est une science basée sur plusieurs disciplines : les mathématiques, les probabilités, l'informatique et les architectures avancées. Il y a une quarantaine d'années, dans le bouillonnement d'activité de l'informatique naissante, le domaine de la reconnaissance des formes est apparu avec le besoin d'analyseurs automatiques. L'analyse automatique est potentiellement beaucoup plus rapide que l'analyse manuelle et, en principe, élimine la subjectivité due à l'opérateur ; de plus elle permet la mesure simultanée d'un grand nombre de paramètres ; enfin, elle est indispensable lorsque l'opération est répétitive.

Toutes les études qui ont porté sur la reconnaissance des formes ont avant tout démontré à quel point il est difficile de s'approcher des performances du système de perception humain. Détecter, localiser et reconnaître un objet dans une image est une opération relativement subjective qui peut différer d'une personne à une autre et selon l'environnement et le contexte.

Le domaine dans lequel se situe ce travail est celui de la segmentation d'images. Plus précisément, on parlera de détection de contours. On étudiera plusieurs approches de détection et un intérêt spécial sera donné à la méthode des ensembles de niveaux (Level Set Method). Cette méthode fera l'objet d'une étude détaillée.

La segmentation représente une étape importante dans le traitement d'images, puisqu'elle se situe à la charnière entre l'acquisition des images et l'utilisation de la sémantique qu'elles contiennent. La segmentation d'images consiste à rechercher les principaux constituants d'une image (recherche d'objets) en ayant pour objectif de détecter la présence des objets et les extraire de l'image. Ainsi, elle permet d'étiqueter les régions dissociées avec des descripteurs et c'est sur cet étiquetage que vont se baser les algorithmes de reconnaissance. La segmentation est une étape requise pour un grand nombre de tâches de haut niveau nécessaires aux systèmes de vision autonomes (par exemple en robotique), médicales, agronomiques, ou relatives à la sécurité routière et la surveillance (parkings, aéroports, etc.).

En étudiant des articles récents, il s'avère que dans des domaines tels que le filtrage et la segmentation d'images, il est nécessaire d'utiliser les équations aux dérivées partielles (EDP). Si les scientifiques numériciens de la discipline de la mécanique des fluides, qui en font largement usage, connaissent déjà la puissance de tels outils, il faut dire toutefois que ce n'est que très récemment que l'emploi des EDP en traitement d'image s'est concrétisé. Les approches à base d'EDP ont, en effet, pour intérêt qu'elles permettent d'obtenir dans de nombreux cas des résultats d'existence et d'unicité pour la solution recherchée, et qu'elles peuvent se mettre en œuvre à l'aide de puissants schémas numériques très étudiés à ce jour dans le domaine de la mécanique des fluides.

La détection de contours dans les images a débuté par des opérateurs locaux qui estimaient un gradient ou convolaient l'image par des masques caractéristiques des contours. Dans les années 80, des approches plus systématiques ont été mises en place pour obtenir des contours plus significatifs. Ces travaux ont abouti à une bonne compréhension de ce qu'il faut faire pour détecter les contours, mais la définition même des contours demeure très vague, ce qui rend ces techniques encore peu efficaces sur un problème concret.

Une approche très différente des méthodes antérieures de détection de contours, a été proposée par la suite. Cette approche appelée "contour actif ou snake" est une méthode semi-interactive dans laquelle l'opérateur place dans l'image, au voisinage de la forme à détecter, une ligne initiale de contour. Cette ligne sera amenée à se déformer sous l'action de plusieurs forces. Le contour actif va donc évoluer pour rechercher la position d'énergie minimale, qui sera ainsi un compromis entre les diverses contraintes du problème.

De plus, la plupart des modèles de détection et de reconnaissance des formes impliquent la connaissance, a priori, de la topologie de l'objet ou encore le nombre d'objets présents dans l'image. Une nouvelle formulation du problème d'évolution du contour, par ensemble de niveaux, a permis d'apporter une solution à ces problèmes.

Les ensembles de niveaux sont des représentations variationnelles des contours qui conduisent donc à des solutions qui évoluent au cours du temps dans l'image, régies par un critère global. Ces modèles ont cependant le mérite remarquable de pouvoir changer de topologie si les contours l'imposent : par exemple un contour simple peut évoluer en deux contours séparés, ou à l'inverse, deux contours séparés peuvent se réunir en un seul contour.

Notre travail sera réparti en six chapitres :

Dans le chapitre I, nous aborderons la segmentation classique. Nous verrons, tout d'abord, les deux principales approches de la segmentation à savoir l'approche région et l'approche contour. Ensuite, nous donnerons quelques techniques de segmentations et nous terminerons par une discussion relative à ces techniques.

Le chapitre II présente quelques notions sur la géométrie différentielle, la compréhension de ces notions théoriques sera nécessaire lorsqu'on abordera les chapitres traitant de l'évolution des courbes et de la détection des contours.

Le chapitre III sera consacré à l'évolution des courbes. Nous commencerons par introduire l'équation hyperbolique ainsi que les deux conditions de stabilité, de la solution numérique. Ensuite, nous passerons à la définition des équations de propagation d'une courbe ainsi que le problème d'instabilité qui en résultera. Après cela, nous aborderons l'étude de l'évolution d'un front selon la direction du vecteur normal avec une fonction vitesse qui dépend de la courbure locale. Enfin, nous étudierons l'évolution avec la méthode des Level-set et nous verrons les avantages apportées par cette méthode.

Dans le chapitre IV, nous parlerons du filtrage avec les équations aux dérivées partielles. Cette étape s'avère nécessaire dans plusieurs cas avant de procéder à la détection. Nous étudierons, tout d'abord, l'équation de la chaleur et nous verrons ensuite l'opérateur de Perona-Malik qui intègre le processus de détection des bords et qui permet, donc, de ne pas altérer les contours à détecter.

Dans le chapitre V, il sera question de présenter les différentes méthodes de détection de contours. Nous commencerons par introduire la méthode des contours actifs où nous verrons, aussi, les différentes énergies mises en jeu. Ensuite, nous nous attarderons sur les contours actifs géodésiques et verrons les avantages apportées par cette méthode. Nous étudierons, après cela, la détection par les Level-Set avec ou sans réinitialisation de la fonction de distance.

Le chapitre VI est une présentation du logiciel EASYLEVSET que nous avons réalisé avec l'outil 'guide' du logiciel Matlab. Ce logiciel regroupe la majorité des fonctions du traitement d'images en niveaux de gris. Il permet ainsi de compléter le travail théorique en fournissant un outil de travail interactif, simple à utiliser et réalisant les différentes opérations

INTRODUCTION GENERALE

nécessaires allant de la propagation des courbes et le filtrage jusqu'à la segmentation d'image en utilisant les méthodes classiques et les ensembles de niveaux.

Nous terminerons ce travail par une conclusion générale qui passera en revue tout ce qui a été abordé dans ce mémoire.

CHAPITRE I

SEGMENTATION CLASSIQUE

1. Introduction

Une image est une représentation d'une scène tridimensionnelle sur un support à deux dimensions.

Dans une image, 'x' et 'y' sont les coordonnées spatiales des points de l'image et chaque point ainsi repéré - chaque pixel - porte une information $f(x,y)$ de niveau de gris, de couleur, etc..

Au sein du traitement d'images, trois grands niveaux peuvent être considérés : Le traitement d'images de bas niveau qui transforme l'image d'origine ($f \rightarrow f'(x,y)$), l'analyse d'images qui extrait des caractéristiques de l'image ($f \rightarrow$ **caractéristiques de l'image**) et l'interprétation d'images qui cherche à décrire et comprendre l'image ($f \rightarrow$ **descripteurs de haut niveau**).

La segmentation est un traitement bas niveau qui effectue une partition de l'image I en un certain nombre de régions R_i disjointes dont les points partagent des propriétés communes (intensité, texture...).

Ces régions doivent satisfaire les conditions suivantes :

- $\forall (i,j), i \neq j, R_i \cap R_j = \emptyset$;
- $\forall i, R_i \neq \emptyset$
- $I = \cup_i R_i$

De nombreux travaux ont été réalisés sur ce sujet, dans des domaines aussi variés que le domaine médical ou militaire. C'est toujours un sujet d'actualité et un problème qui reste ouvert.

La segmentation d'image se divise en deux approches comprenant chacune plusieurs techniques et méthodes : l'approche frontière (détection de contours) et l'approche région. Ces deux approches sont duales car une région définit une ligne sur son contour et une ligne fermée définit une région intérieure.

2. Différentes approches de la segmentation

2.1. Approche région

Les méthodes appartenant à cette famille manipulent directement des régions. Ces dernières seront construites par des points connexes ayant des propriétés similaires (attributs): intensité de gris, couleur, texture ...etc. Cocquerez [2] présente aussi des attributs stochastiques, fractals, surfaciques, géométriques, etc. Pour aboutir à cette partition, plusieurs méthodes sont utilisées. Les plus fréquentes partent de quelques régions, qui sont amenées à croître par incorporation de pixels jusqu'à ce que toute l'image soit couverte ; on parle alors de méthodes par croissance de régions. Les autres partent d'une première partition de l'image, qui est ensuite modifiée en divisant ou regroupant des régions et on parle dans ce cas de méthodes de type division/fusion (ou *split and merge* en Anglais) [4]. Des méthodes fondées sur la modélisation statistique conjointe de la régularité des régions et des niveaux de gris de chaque région existent également. Finalement, il convient de signaler que les méthodes utilisées dans cette approche nécessitent un temps de calcul considérable.

2.2. Approche frontière

Cette approche, au contraire, est une technique non contextuelle qui ignore les relations pouvant exister entre les régions de l'image. En effet, le traitement effectué consiste à chercher les transitions détectables entre deux régions connexes.

Elle comprend les techniques de détection de contours, mais le résultat obtenu ne conduit pas toujours directement à la partition recherchée définie précédemment. En effet, les contours obtenus sont rarement connexes, il faut donc procéder à une fermeture des contours si l'on souhaite une partition complète de l'image.

L'intérêt principal des méthodes de segmentation selon l'approche frontière est de minimiser le nombre d'opérations nécessaires en cas d'itération du processus sur des séries d'images peu différentes les unes des autres (cas des images vidéo notamment).

3. Les techniques de segmentation

Comme évoqué précédemment la segmentation d'image présente de nombreuses techniques appartenant à l'une ou l'autre des deux approches précédentes. En effet, on peut

distinguer les techniques de seuillage, les classifications itératives de pixels, la segmentation basée sur la surface, la segmentation d'images couleurs, la détection de contours, les méthodes basées sur la théorie de la logique floue (où les conditions du §.1 ne sont alors pas remplies).

Nous allons maintenant examiner quelques techniques comme : le seuillage, la croissance de régions, l'utilisation de "*Quadtree*" et de descente pyramidale et la détection de contours. Une attention particulière sera accordée aux méthodes dérivatives du fait qu'elles sont en liaison étroite avec notre projet.

3.1. Le seuillage

Le seuillage est une technique simple, non contextuelle, globale, qui repose sur une mesure quantitative d'une grandeur. Il permet de classer les pixels en deux catégories, ceux dont la mesure est inférieure au seuil et ceux dont la mesure excède ou égale le seuil.

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x, y) < S \\ 1 & \text{si } f(x, y) \geq S \end{cases}, \text{ où } S \text{ est le seuil} \quad (1.1)$$

Cette transformation produit une image binaire. Les techniques de seuillage présentent de nombreuses variantes. Ainsi, le seuillage peut être double, adaptatif ou optimal.

3.2. Croissance de régions

La croissance de régions est une technique contextuelle ; elle prend en considération les attributs locaux des pixels. C'est une technique essentiellement ascendante.

Les algorithmes utilisés dans cette technique partent d'un premier ensemble de régions, qui peut être calculé automatiquement (par exemple, les minima de l'image), ou fourni par un utilisateur de manière interactive. Les régions grandissent ensuite par incorporation des pixels les plus similaires suivant un critère donné, tel que la différence entre le niveau de gris du pixel considéré et le niveau de gris moyen de la région. Les algorithmes de segmentation par ligne de partage des eaux, développés dans le cadre de la morphologie mathématique, appartiennent à cette catégorie.

3.3. "*Quadtree*" et descente pyramidale

Le "*Quadtree*" est une arborescence dont la racine est l'image toute entière et dont les nœuds possèdent quatre fils, ainsi l'application de plusieurs divisions amène à travailler sur une image où les différences entre pixels ne sont plus significatives. En effet, dans le cas de

l'algorithme de division/fusion (*Split and Merge*) [1] l'image originale est divisée en quatre quadrants qui seront, dans le cas où ils ne sont pas homogènes, divisés à leur tour par quatre jusqu'à l'obtention de région homogène suivant le critère imposé. Ce dernier peut être un niveau de gris constant, une variance minimale de niveau de gris ou tout autre attribut de région.

3.4. Détection de contours

Un contour peut approximativement être défini comme une zone de l'image où l'intensité des pixels change brusquement. Cette discontinuité dans l'image est le passage d'un niveau de gris à un autre, de manière plus ou moins rapide, donnant lieu à des interprétations d'échelon, de rampe ou de toit.

La première approche possible pour détecter les variations locales de la fonction $f(x,y)$ représentant l'intensité est d'utiliser une transformation du type gradient. Un contour d'orientation θ au point (x, y) est détecté par un maximum de la dérivée directionnelle, dans la direction ϕ du gradient $\vec{\nabla} f(x, y)$, c'est-à-dire le maximum de la fonction :

$$g(\phi) = \vec{\nabla} f(x, y) \cdot \vec{n} \quad (1.2)$$

Où \vec{n} représente le vecteur unitaire dans la direction du gradient :

$$\vec{n} = \begin{cases} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{cases} \quad (1.3)$$

Nous avons donc :

$$g(\phi) = \cos(\phi) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \sin(\phi) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (1.4)$$

Ainsi, une dérivation du premier ordre présentera un maximum pour le contour ; alors qu'une dérivée seconde présentera un passage par zéro indiqué par l'exemple du signal monodimensionnel présenté sur la figure (I-1). L'identification d'une transition peut être obtenue par seuillage de la norme du gradient.

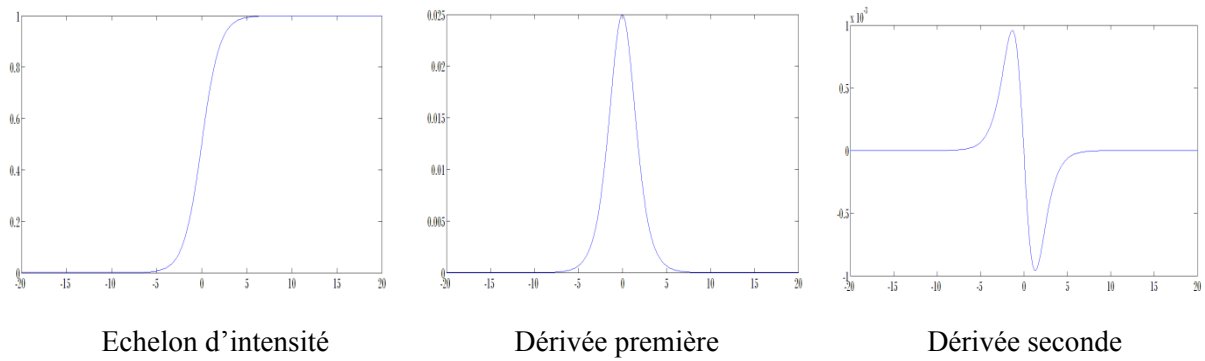


Figure I.1 : Détection de contours (exemple mono-dimensionnel)

Dans le cas discret, on approxime les dérivées directionnelles de la fonction image notée $f(.,.)$ par de simples différences. Ceci donne les deux opérateurs anisotropes suivants :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \delta_x f(i, j) = f(i + 1, j) - f(i, j)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx \delta_y f(i, j) = f(i, j + 1) - f(i, j)$$
(1.5)

Le calcul du gradient sur une image peut être obtenu par deux convolutions, l'une mettant en évidence les contours horizontaux, l'autre les contours verticaux.

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 w_x(i, j) f(x - i, y - j) \\ f_y(x, y) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 w_y(i, j) f(x - i, y - j) \end{cases}$$
(1.6)

où w_x correspond au filtre de dérivation horizontale et w_y au filtre de dérivation verticale.

L'opérateur isotrope norme du gradient $\|\vec{\nabla} f\|$ est alors donné par [6] :

$$\|\vec{\nabla} f\| = \sqrt{(\delta_x f)^2 + (\delta_y f)^2}$$
(1.7)

ou

$$\|\vec{\nabla} f\| = \max(|\delta_x f|, |\delta_y f|)$$
(1.8)

avec
$$\theta = \arctan \frac{f_y(x,y)}{f_x(x,y)} \quad (1.9)$$

comme phase du gradient.

Afin d'approximer le gradient de l'image plusieurs opérateurs ont vu le jour. Dans notre étude, on citera les plus fréquemment utilisés.

3.4.1. Opérateur de Roberts

Roberts approxime les dérivées directionnelles suivant les axes orientés à 45 degrés à l'aide d'une convolution de l'image $f(.,.)$ avec les masques 2*2 suivants :

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Les applications de ce masque sur des images bruitées ont montré que ce différentiateur est très sensible au bruit car il opère sur une fenêtre de taille 2 et n'effectue pas de lissage [7].

3.4.2. Opérateur de Prewitt et Sobel

Prewitt et Sobel approximent les dérivées directionnelles suivant les axes O_x et O_y à l'aide d'une convolution de l'image $f(.,.)$ avec les masques 3*3 suivants :

$$H_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ c & 0 & -c \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, H_y = \begin{bmatrix} -1 & -c & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Pour $c=1$ on a les masques de Prewitt et pour $c=2$ les masques de Sobel.

On peut remarquer que les deux masques de Prewitt et Sobel correspondent en fait à l'application d'une opération de lissage par l'opérateur $[1, c, 1]$ suivi de l'application de l'opération de dérivation par l'opérateur $[1, 0, -1]$ dans la direction orthogonale.

$$H_x = \begin{bmatrix} 1 \\ c \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ -1] \quad H_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \ c \ 1] \quad (1.12)$$

Soient $f_x = f * H_x$ et $f_y = f * H_y$ les images obtenues par convolution de l'image originale f avec les deux masques de H_x et H_y . L'image accentuée est alors obtenue comme étant l'image approximant la norme du gradient :

$$I_a = \|\vec{\nabla} f\| \quad (1.13)$$

L'orientation du contour I_θ est donnée par :

$$I_\theta = \arctan\left(\frac{f_y}{f_x}\right) \quad (1.14)$$

Ainsi, l'opérateur de Prewitt résulte de l'application d'un filtre moyenné suivi de l'opération de dérivation ce qui réduit sa sensibilité aux bruits. De même pour l'opérateur de Sobel qui lui utilise un filtre moyenné avec pondération [6,2].

3.4.3. Opérateur de Kirsh

L'opérateur de Kirsh est un opérateur à huit masques correspondant chacun à une direction préférentielle obtenue par rotation de $\pi/4$ de l'opérateur de base H_0 :

$$H_0 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \dots \quad (1.15)$$

Le gradient retenu sera celui correspondant à la valeur maximum donnée par :

$$\max_{i=1,\dots,8} |H_i * f| \quad (1.16)$$

L'orientation retenue pour le contour sera celle correspondant au masque ayant permis d'obtenir le gradient maximum [7].

3.4.4. Opérateurs de second ordre

L'image représentant les contours de l'image peut s'obtenir par la convolution de l'image par l'opérateur Laplacien. Les points de contours correspondent alors aux passages par zéro de l'image résultant de la convolution précédente. Une opération de seuillage est généralement nécessaire afin d'éliminer les contours correspondant au bruit.

L'opérateur Laplacien est défini comme suit :

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial n_\perp^2} \quad (1.17)$$

Où n et n_{\perp} définissent deux directions orthogonales quelconques. En prenant les directions définies par les axes Ox et Oy , on obtient l'expression classique :

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (1.18)$$

En discret, l'approximation la plus simple du Laplacien est donnée par l'application des masques suivants :

$$H8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

L'application de cette technique à l'extraction des contours d'une image ne permet pas d'obtenir d'aussi bons résultats que ceux obtenus à l'aide de l'approche maxima locaux dans la direction du gradient [6].



a) image originale



b) opérateur Roberts (seuil=0.1)



c) opérateur Prewitt (seuil=0.1)



d) opérateur Laplacien (seuil=0.01)

Figure I.2 résultats de la détection des contours avec différentes méthodes

4. Conclusion

La segmentation est une phase incontournable dans l'analyse d'image. Elle permet d'extraire les informations nécessaires à la localisation et la délimitation des structures d'intérêt dans l'image. Les méthodes de segmentation présentées au §.3 de manière non exhaustive, présentent quelques inconvénients. L'approche contour, par exemple, nécessite souvent un algorithme de fermeture du contour. L'approche région, quant à elle, nécessite plus de calculs.

De nouvelles approches, regroupées sous le nom de modèles déformables, ont été proposées depuis 1987. Ces modèles déformables utilisent des connaissances a priori du contour qui peuvent être issues de bases d'apprentissage. Lorsque ces connaissances se bornent simplement à des propriétés de régularité et de continuité, on parle de contours actifs. Ces contours actifs seront abordés dans le chapitre V.

CHAPITRE II

NOTIONS SUR LA GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

1. Introduction

Il est plus que nécessaire d'avoir des notions sur la géométrie différentielle avant de se pencher sur le sujet de l'évolution des courbes et de la détection des contours. Nous allons, donc, voir dans ce chapitre quelques rappels théoriques qui nous permettront d'appréhender les chapitres suivants avec les connaissances mathématiques nécessaires à la compréhension des principes d'évolution de courbes tels que les notions de tangente, de normale et surtout celle de la courbure.

2. Représentation régulière

Une représentation paramétrique est dite régulière si le vecteur $X(t)$ de paramètre t dans l'intervalle I_t satisfait les deux conditions suivantes [8]:

- $X(t)$ est de classe C^1 dans I_t
- $\frac{dX}{dt} \neq 0$ pour tout t dans I_t

Exemples :

a) La fonction $X(t) = (t + 1)\overrightarrow{e_1} + (t^2 + 3)\overrightarrow{e_2}$ pour $-\infty < t < +\infty$ est une représentation paramétrique régulière car $X'(t) = \overrightarrow{e_1} + 2t\overrightarrow{e_2}$ est continue et $X'(t) \neq 0$ pour tout t dans \mathbb{R} .

b) La fonction $x_1 = t^2$, $x_2 = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0 \\ t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right), & \text{si } t > 0 \end{cases}$ pour $-\infty < t < +\infty$ a une dérivée continue pour tout t . Par contre pour $t = 0$, on a $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$. Cette fonction n'est donc pas une représentation paramétrique régulière.

c) La parabole peut être obtenue par la représentation

$$X_1(t) = t\overrightarrow{e_1} + t^2\overrightarrow{e_2} \text{ pour } -\infty < t < +\infty$$

ou par

$$X_2(t) = t^2\overrightarrow{e_1} + t^4\overrightarrow{e_2} \text{ pour } -\infty < t < +\infty,$$

Cependant, la première représentation est régulière alors que la seconde ne l'est pas car $X_2'(t) = 2 * t\overrightarrow{e_1} + 4 * t^3\overrightarrow{e_2}$, ce qui donne $X_2'(0) = 0$.

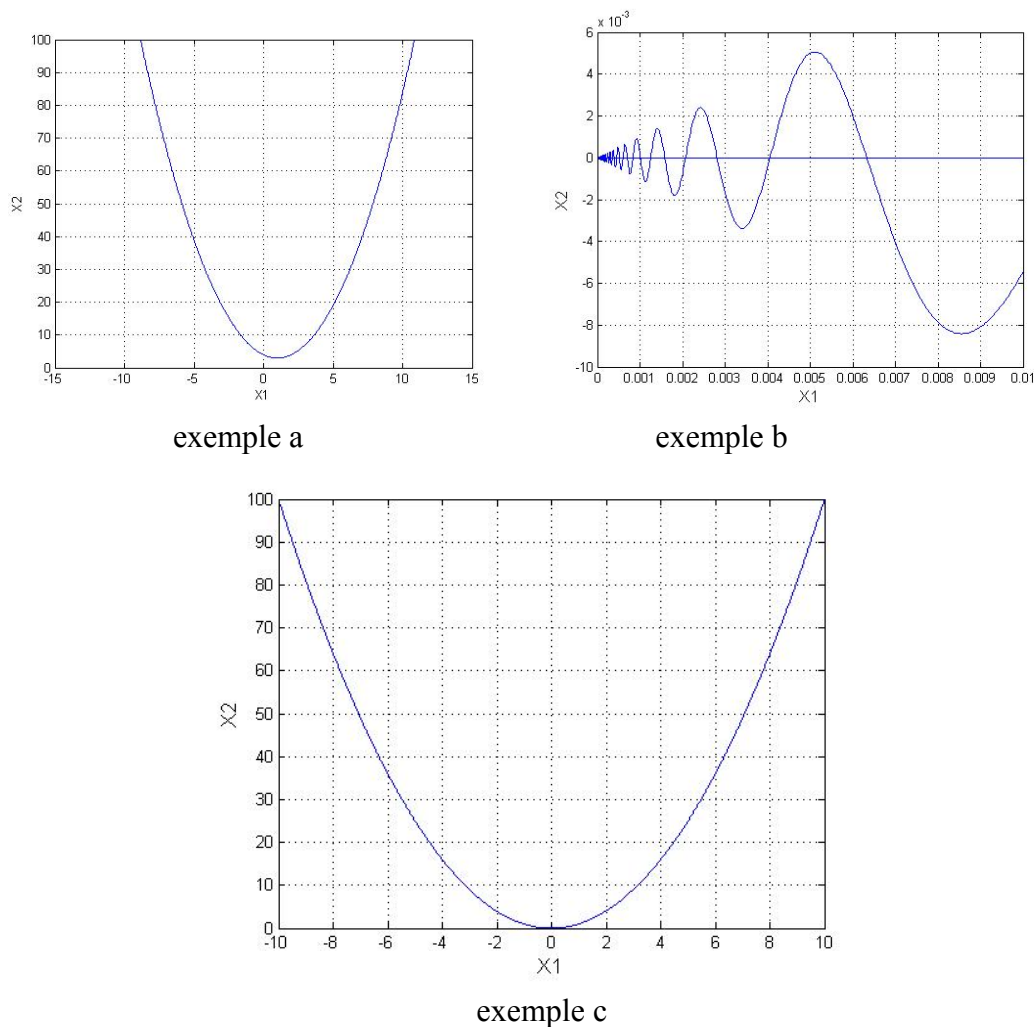


Figure II.1 : représentation des courbes.

3. Vecteur tangent, vecteur normal

Si la fonction $f(x)$ a une dérivée finie $f'(x_0)$ à $x = x_0$, la courbe $y = f(x)$ possède une tangente au point $P_0(x_0, y_0)$ dont la pente est :

$$m = \tan(\theta) = f'(x_0) \quad (2.1)$$

Si $m = 0$, la courbe a une tangente horizontale dont l'équation est $y = y_0$ au point P_0 , ceci est représenté par les cas A, C et E de la figure II.2. Sinon, l'équation de la tangente s'écrit :

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (2.2)$$

Si $f(x)$ est continue au point $x = x_0$ mais $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0) = \infty$, la courbe a une tangente verticale d'équation $x = x_0$, ceci est représenté par les cas B et D dans la figure II.2 [9].

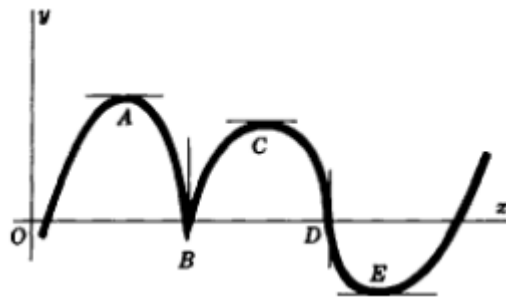


Figure II.2 Illustration de différentes valeurs de la tangente

La normale à une courbe à l'un de ces points est la ligne qui passe par ce point et qui est perpendiculaire à la tangente à ce point. L'équation de la normale au point $P_0(x_0, y_0)$ est :

$$x = x_0 \quad \text{si la tangente est horizontale}$$

$$y = y_0 \quad \text{si la tangente est verticale}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0) \quad \text{ailleurs.} \quad (2.3)$$

4. Longueur d'un arc

La longueur d'un arc AB d'une courbe est, par définition, la limite de la somme des longueurs d'une série de tronçons consécutifs A, P_1 , P_2 , ..., P_{n-1} , B joignant les points sur les arcs, quand le nombre des points s'accroît indéfiniment de telle manière que la longueur de chaque tronçon s'approche de zéro (Figure II.3) [9].

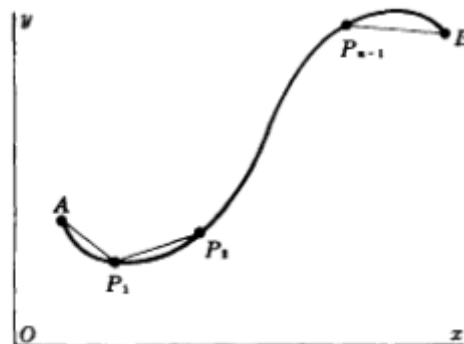


Figure II.3 Longueur d'un arc

Si $A(a,c)$ et $B(b,d)$ sont deux points de la courbe $y = f(x)$, où $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ sont continues sur l'intervalle $a \leq x \leq b$, la longueur de l'arc AB est donnée par :

$$S = \int_{AB} ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2.4)$$

1- D'une façon similaire, si $A(a,c)$ et $B(b,d)$ sont deux points sur la courbe $x = g(y)$, où $g(y)$ et sa dérivée sont continues sur l'intervalle $c \leq y \leq d$, la longueur de l'arc AB est donnée par :

$$S = \int_{AB} ds = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \quad (2.5)$$

2- Si, maintenant, $A(u=u_1)$ et $B(u=u_2)$ sont deux points d'une courbe définie par les équations paramétriques $x = f(u)$ et $y = g(u)$ et si les conditions sur la continuité sont vérifiées, la longueur de l'arc AB est donnée par :

$$S = \int_{AB} ds = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du \quad (2.6)$$

5. Changement de paramètre

Soit une représentation paramétrique régulière $x(t)$ de paramètre t . Le changement de paramètre $t = t(\theta)$ est dit valable si [8]:

- $t(\theta)$ est de classe C^1 dans I_θ
- $\frac{dt}{d\theta} \neq 0$ pour tout θ dans I_θ

De cette définition on peut facilement déduire que :

- $t(\theta)$ est une fonction bijective de I_θ vers $I_t = t(I_\theta)$;
- $t(\theta)$ est strictement croissante ou strictement décroissante ;
- La fonction inverse de $t(\theta)$ constitue aussi un changement de paramètre valable.

Exemple :

La fonction $t = (b - a) * \theta + a$, $0 \leq \theta \leq 1$ et $a < b$ est un changement de paramètre valable qui relie l'intervalle $0 \leq \theta \leq 1$ à $a \leq t \leq b$. La fonction inverse $\theta = (t - a)/(b - a)$ constitue aussi un changement de paramètre valable reliant l'intervalle $a \leq t \leq b$ à $0 \leq \theta \leq 1$.

La représentation paramétrique régulière $X = X(t)$, $t \in I_t$, est équivalente à la représentation paramétrique régulière $X = X^*(\theta)$, $\theta \in I_\theta$, s'il existe un changement de paramètre valable $t(\theta)$ satisfaisant :

- $t(I_\theta) = I_t$;
- $X(t(\theta)) = X^*(\theta)$

6. Utilisation de l'abscisse curviligne

Le passage à l'abscisse curviligne nous permet de calculer plus facilement la longueur de la courbe ainsi que la courbure.

Soit $X = X(s)$, une représentation naturelle d'une courbe régulière C . La dérivée $\frac{dX}{ds} = \dot{X}(s)$ sera utilisée pour définir la tangente à la courbe C au point $x(s)$. Ceci est vérifiée géométriquement du moment que $\dot{X}(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{X(s+\Delta s) - X(s)}{\Delta s}$.

Dans la figure.4, le vecteur \dot{X} est d'une longueur unité ; $|dX/ds| = |\dot{X}| = 1$, ceci représente l'une des propriétés de l'abscisse curviligne et revient à dire que le vecteur tangent est d'une longueur unité.

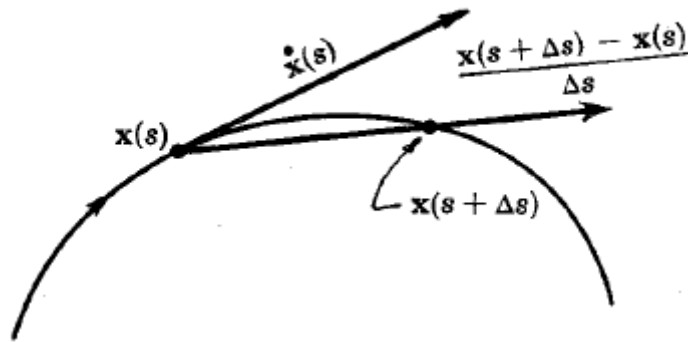


Figure II.4 Vecteur tangent unitaire obtenu par dérivée suivant l'abscisse curviligne

Une propriété importante de l'abscisse curviligne stipule que :

$$\frac{d\vec{T}}{ds}(s) = \kappa(s) \frac{\vec{N}(s)}{|\vec{N}(s)|} \quad (2.7)$$

Ou en l'écrivant autrement :

$$\kappa(s) = |C''| = \left| \frac{d^2X}{ds^2} \right| = \left| \frac{d\vec{T}}{ds}(s) \right| \quad (2.8)$$

Où $\vec{T}(s) = \frac{dX}{ds}(s)$ représente le vecteur tangent unitaire, $\vec{N}(s)$ représente le vecteur normal et $\kappa(s)$ représente la courbure [8]. Cette propriété sera utilisée plus loin dans ce chapitre.

7. La courbure

La courbure K en un point p d'une courbe est le taux de changement de la direction (l'angle τ que fait la tangente de la courbe au point p) par unité de longueur s (abscisse curviligne). On a alors :

$$K = \frac{d\tau}{ds} \quad (2.9)$$

- Pour une courbe donnée par $y = f(x)$, la courbure s'exprime par [8,9]:

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.10)$$

Démonstration :

Comme

$$\tau = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right) = \arctan(y') \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dx} = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

On trouve alors

$$K = \frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{dy'} \frac{dy'}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{d\tau}{dy'} \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx}{ds}$$

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- Dans le cas où la courbe est donnée par $x(p) = (x_1(p), x_2(p))$, avec p comme paramètre on obtient [10]:

$$K = \frac{x_1'(p)x_2''(p) - x_2'(p)x_1''(p)}{(x_1'(p)^2 + x_2'(p)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.12)$$

Démonstration : on sait que :

$\vec{T}(p) = x'(p) = (x_1'(p), x_2'(p))$, représente le vecteur tangent à la courbe.

$\vec{T}(s) = x'(s) = \left(x_1'(s), x_2'(s)\right) = \left(\frac{x_1'(p)}{\sqrt{x_1'(p)^2 + x_2'(p)^2}}, \frac{x_2'(p)}{\sqrt{x_1'(p)^2 + x_2'(p)^2}}\right)$, est le vecteur tangent unitaire à la courbe.

On sait par ailleurs que

$$\frac{d\vec{T}(s)}{ds} = K * \vec{n}(s) \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dp} = \sqrt{(x_1'(p)^2 + x_2'(p)^2)}$$

où $\vec{n}(s)$ est le vecteur normal unitaire à la courbe.

Donc, on trouve après calculs que :

$$K = \frac{x_1'(p)x_2''(p) - x_2'(p)x_1''(p)}{(x_1'(p)^2 + x_2'(p)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- La troisième écriture de la courbure est celle obtenue dans le cas où la courbe est décrite par une expression de la forme :

$$x(s) = \{ (x_1(s), x_2(s)) ; u(x_1(s), x_2(s)) = c \}, \text{ où } c \text{ est une constante} \quad (2.13)$$

la courbure s'exprime dans ce cas par [8,9,10]:

$$K = \frac{(u_{x_1})^2 u_{x_2^2} + (u_{x_2})^2 u_{x_1^2} - 2 u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2}}{((u_{x_1})^2 + (u_{x_2})^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.14)$$

Démonstration [10]:

Pour cette forme on obtient par différentiation de (2-13) par rapport à s :

$$x_1'(s) u_{x_1} + x_2'(s) u_{x_2} = 0, \text{ où } u_{x_i} = \frac{du}{dx_i} \quad (2.15)$$

de cette écriture on déduit que :

$$\vec{N} = (u_{x_1}, u_{x_2}) \text{ et}$$

$$\vec{T} = (x_1'(s), x_2'(s)) = (-u_{x_2}, u_{x_1})$$

Donc on peut écrire $\begin{cases} x_1'(s) = -\lambda u_{x_2} \\ x_2'(s) = \lambda u_{x_1} \end{cases}$, avec λ une constante réelle (2.16)

D'autre part, la différentiation de (2.15) donne :

$$(x_1'(s))^2 u_{x_1^2} + (x_2'(s))^2 u_{x_2^2} + 2 * x_1'(s) * x_2'(s) u_{x_1 x_2} + x_1''(s) u_{x_1} + x_2''(s) u_{x_2} = 0$$

Et en utilisant (2.16) on a :

$$\lambda^2 \left((u_{x_1})^2 u_{x_2^2} + (u_{x_2})^2 u_{x_1^2} - 2 u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2} \right) + \frac{1}{\lambda} (x_1''(s) x_2'(s) - x_2''(s) x_1'(s)) = 0$$

Comme $|x'(s)| = 1$, on tire de (2.16) que $\lambda^2 = \frac{1}{|\nabla u|^2}$.

Finalement en utilisant (2.12) on aboutit au résultat voulu :

$$K = \frac{(u_{x_1})^2 u_{x_2}^2 + (u_{x_2})^2 u_{x_1}^2 - 2 u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2}}{\left((u_{x_1})^2 + (u_{x_2})^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Qu'on peut écrire autrement par :

$$K = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \quad (2.17)$$

- **Propriétés :**

- La courbure d'un cercle est donnée par $K = \frac{1}{R}$, où R est le rayon du cercle.
- La courbure d'une droite est nulle $K = 0$.
- La courbure est infinie ($K = \infty$) dans le cas d'un point.

8. Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre quelques notions théoriques de la géométrie différentielle. On a commencé par voir ce qu'est une courbe régulière, ensuite, on a abordé les notions de tangente et de normale qu'on utilisera dans l'évolution des courbes. On a aussi vu le passage à l'abscisse curviligne qui permet une simplification de l'écriture de la tangente. Enfin, on a introduit la notion de courbure, terme qui sera très utilisé tout au long de ce travail. Les différentes écritures de la courbure selon la paramétrisation de la courbe ont également été mentionnées.

CHAPITRE III

EVOLUTION DES COURBES

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'évolution des courbes. Tout d'abord, nous commencerons par introduire l'équation hyperbolique ainsi que les deux conditions de stabilité de la solution numérique, connues sous le nom de *upwind propagation* et la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (*CFL*). Ensuite, on passera à la définition des équations de propagation d'une courbe ainsi que le problème d'instabilité qui en résultera. Après cela nous aborderons l'étude de l'évolution d'un front selon la direction du vecteur normal avec une fonction vitesse qui dépend de la courbure locale.

Dans le cas où le front se déplace avec une vitesse constante, nous montrerons que la solution est "instable", ce qui se traduit par l'apparition de chocs. Une solution peut être construite en exploitant la notion d'entropie ou celle de viscosité, comme c'est généralement le cas en mécanique des fluides.

Après cela nous traiterons le cas d'une vitesse égale à la courbure en expliquant le phénomène de disparition de la courbe ainsi que l'importante propriété qui en découle à savoir que la décroissance la plus rapide de la longueur d'une courbe est obtenue lorsqu'elle se propage avec une vitesse égale à la courbure suivant la direction du vecteur normal.

L'étude par la suite du cas spécial du mouvement de front avec une vitesse $F = 1 - \varepsilon k$, où ε est une constante et k la courbure, nous montre que le terme de courbure joue le rôle de régularité dans la solution ce qui est similaire à la notion de viscosité qu'on trouve dans l'équation de Burgers qui est une Equation aux Dérivées Partielles non linéaire.

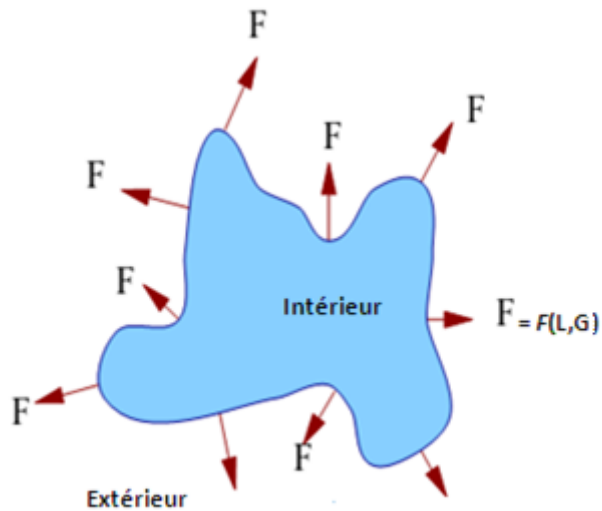


Figure III.1. Propagation d'une courbe avec une vitesse F dans sa direction normale.

Envisageons tout d'abord une frontière, une courbe en deux dimensions ou une surface en trois dimensions, séparant une région d'une autre. Imaginez que cette courbe / surface se déplace dans la direction du vecteur normal (où le sens normal est orienté par rapport à un intérieur ou un extérieur) avec une vitesse connue décrite par la fonction F . L'objectif est de suivre le mouvement du front pendant son évolution. Nous sommes intéressés seulement par le mouvement du front dans la direction du vecteur normal; le vecteur tangentiel n'intervient pas dans l'évolution du front.

La fonction de vitesse F , qui dépend de nombreux facteurs, peut être écrite comme suit;

$$F = F(L, G) \quad (3-1)$$

où :

L représente *les propriétés locales* qui sont celles déterminées par les informations géométriques telles que la courbure et la direction normale.

G représente *les propriétés globales du front* qui dépendent de la forme et de la position du front.

Dans ce chapitre, il est supposé que la fonction de vitesse F est connue. L'objectif est de suivre l'évolution de l'interface. Le premier objectif est de développer la théorie nécessaire pour comprendre l'interaction entre la fonction de vitesse F et la forme de l'interface.

2. Equation hyperbolique-condition entropique

Considérons l'équation de première dimension connue sous le nom d'équation de transport (transport or wave equation).

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + a \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ v(0, x) = v_0(x) \end{cases}, \text{ avec } a \text{ une constante} \quad (3.2)$$

On peut facilement montrer que la solution est de la forme :

$$v(t, x) = v_0(x - at) \quad (3.3)$$

Ceci implique que la fonction $v(t, x)$ se propage dans une direction qui dépend du signe de « a », par exemple de gauche à droite pour « a » positive.

Afin de résoudre l'équation numériquement, on doit approximer les dérivées temporelles et spatiale de v . Pour cela on utilise l'expansion de Taylor qui fournit une dérivée temporelle telle que :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(n \Delta t, i \Delta x) = \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad \text{où } v_h^k \text{ représente } v(t = k, x = h)$$

Et une dérivée spatiale qui peut s'écrire suivant trois schémas :

$$\frac{\partial v}{\partial x}(n \Delta t, i \Delta x) = \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad (\text{schéma avancé})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(n \Delta t, i \Delta x) = \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad (\text{schéma retardé})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(n \Delta t, i \Delta x) = \frac{v_{i+1}^n - v_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad (\text{schéma centré})$$

On aboutit donc à trois résultats pour l'équation discrète :

$$v_i^{n+1} = v_i^n + a \Delta t \begin{cases} \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{\Delta x} & (\equiv \delta_x^+ v_i^n) \text{ schéma avancé} \\ \frac{v_{i+1}^n - v_{i-1}^n}{2 \Delta x} & (\equiv \delta_x v_i^n) \text{ schéma centré} \\ \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{\Delta x} & (\equiv \delta_x^- v_i^n) \text{ schéma retardé} \end{cases} \quad (3.4)$$

Cependant le schéma centré donne un résultat instable suivant le critère de Von Neumann (voir figure III.2.a). Ceci est dû au fait que ce schéma ne prend pas en compte la nature de l'équation. En effet, le schéma numérique qu'on doit choisir doit suivre la direction de propagation de l'information ce qui est connu sous le terme de *upwind scheme* [10].

Ainsi, afin d'obtenir un résultat stable il faut choisir la solution entropique qui prend compte de la direction de propagation (voir figure III.2.b), cette solution est donnée par:

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \begin{cases} a \Delta t \delta_x^- v_i^n & \text{si } a > 0 \\ a \Delta t \delta_x^+ v_i^n & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

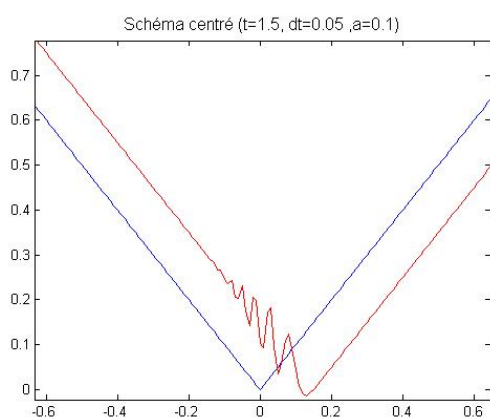
Ce qui peut s'écrire autrement par :

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \Delta t [\max(0, a) \delta_x^- v_i^n + \min(0, a) \delta_x^+ v_i^n] \quad (3.6)$$

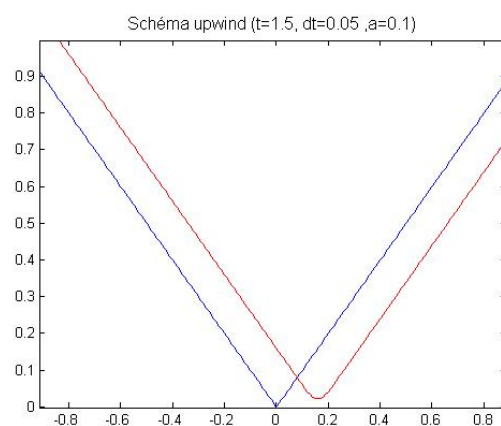
Un autre critère qu'on doit vérifier est la condition de stabilité de Courant-Friedreichts-Lewy (CFL) qui affirme que les ondes 'numériques' doivent se propager au moins aussi vite que les ondes physiques. Elle s'écrit comme suit:

$$|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.7)$$

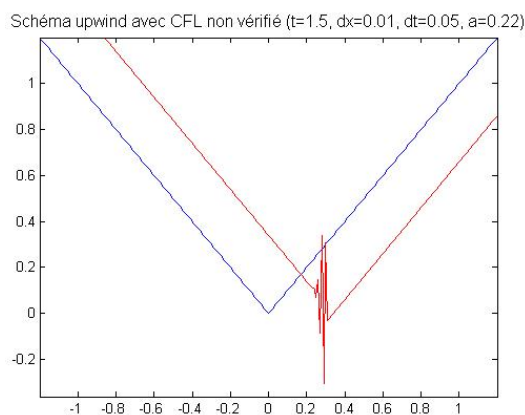
Ce critère permet de vérifier la stabilité de la solution en se basant sur le critère de Von Neumann (voir figure III.2.c) [10].



a) le schéma centré



b) le schéma entropique



c) le schéma entropique sans respect de la condition CFL

Figure III.2 : représentation de l'équation hyperbolique d'une courbe en V se propageant suivant : a) le schéma centré, b) le schéma entropique (upwind et respect de la condition CFL) c) le schéma entropique sans respect de la condition CFL ($a=0.22$, $\Delta t=0.05$, $\Delta x = 0.01$)

3. Formulation fondamentale

Soit γ une courbe initiale fermée dans \mathbb{R}^2 , simple, régulière, et soit $\gamma(t)$ la famille des courbes, à un paramètre, générées par le mouvement de γ le long de son vecteur normal de vitesse F (avec F une fonction scalaire donnée).

On a, donc, $\vec{n} \cdot \vec{x}_t = F$, où \vec{x}_t est le vecteur de dérivée par rapport au temps de la position de la courbe et \vec{n} le vecteur normal unitaire à la courbe.

Une approche naturelle est de considérer une forme paramétrique des équations. Nous supposons dans ce qui suit que la fonction de vitesse F ne dépend que de la courbure k de la courbe ($F = F(k)$). Soit $x(s,t)$ le vecteur de position qui paramètre γ au temps t , où $0 \leq s \leq S$, et supposons des conditions aux limites périodiques $\vec{x}(0,t) = \vec{x}(S,t)$. La courbe est paramétrée de telle sorte que l'intérieur est à gauche de s lorsqu'il augmente (voir la figure III-3).

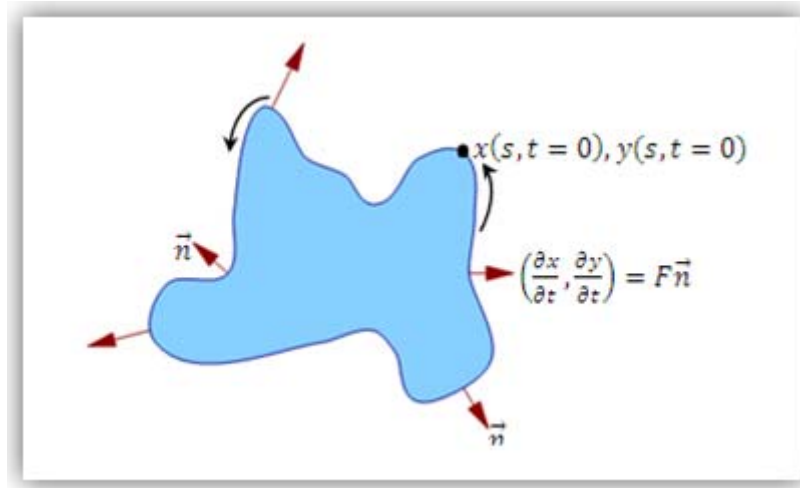


Figure III.3 Paramètres de propagation de courbe.

Soit $\vec{n}(s, t)$ le paramètre de la normale vers l'extérieur et $k(s, t)$ le paramètre de la courbure. Les équations de mouvement peuvent s'exprimer à l'aide des dérivées premières et secondes de x et y :

$$\begin{aligned} x_t &= \left(\frac{y_s}{(x_s^2 + y_s^2)^{1/2}} \right) * F \left[\frac{y_{ss}x_s - x_{ss}y_s}{(x_s^2 + y_s^2)^{3/2}} \right] \\ y_t &= - \left(\frac{x_s}{(x_s^2 + y_s^2)^{1/2}} \right) * F \left[\frac{y_{ss}x_s - x_{ss}y_s}{(x_s^2 + y_s^2)^{3/2}} \right] \end{aligned} \tag{3.8}$$

L'expression $\frac{y_{ss}x_s - x_{ss}y_s}{(x_s^2 + y_s^2)^{3/2}}$ représente la courbure k . Ceci est une représentation « Lagrangienne » parce que le couple $(x(s, t), y(s, t))$ décrit le déplacement du front [11].

4. Equation d'évolution de la courbure

La différenciation de la courbure k et de la métrique définie par $g(s, t) = \sqrt{x_s^2 + y_s^2}$ par rapport au temps, avec la substitution de l'équation (3-8), produit les équations d'évolution pour la métrique g et la courbure k , à savoir [12]:

$$\begin{aligned} k_t &= -g^{-1}(F_s g^{-1})_s - k^2 F \\ g_t &= g k F. \end{aligned} \tag{3.9}$$

- *Démonstration*

En posant $g(s,t) = (x_s^2 + y_s^2)^{\frac{1}{2}}$ et l'angle $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y_s}{x_s} \right)$ on obtient après un simple calcul :

$$\begin{aligned} \theta_s &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y_s}{x_s}\right)^2} \cdot \frac{y_{ss}x_s - x_{ss}y_s}{(x_s)^2} \\ &\Rightarrow \theta_s = \frac{y_{ss}x_s - x_{ss}y_s}{x_s^2 + y_s^2} \\ &\Rightarrow \theta_s = g k \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ensuite nous dérivons par rapport à s les équations :

$$x_t = F(k) \frac{y_s}{(x_s^2 + y_s^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad y_t = -F(k) \frac{x_s}{(x_s^2 + y_s^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.11}$$

ce qui donne :

$$x_{st} = F_s \frac{y_s}{g} + F \frac{y_{ss}g - g_s y_s}{g^2}, \quad y_{st} = -F_s \frac{x_s}{g} - F \frac{x_{ss}g - g_s x_s}{g^2} \tag{3.12}$$

Et par rapport à t la métrique g et l'angle θ .

$$\begin{cases} g_t = \frac{x_s x_{st} + y_s y_{st}}{x_s^2 + y_s^2} \\ \theta_t = \frac{x_s y_{st} - y_s x_{st}}{x_s^2 + y_s^2} \end{cases} \tag{3.13}$$

Finalement, en remplaçant dans (3-13) les valeurs de x_{st} et y_{st} par leurs expressions (3-12), on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} g_t = \theta_s F \left(\frac{\theta_s}{g} \right), & g_t = g k F \\ \theta_t = \frac{-1}{g} \frac{\partial}{\partial s} F \left(\frac{\theta_s}{g} \right) \end{cases} \tag{3.14}$$

On dérive ensuite par rapport à t la formule de θ_s , on obtient :

$$\begin{aligned} \theta_{st} &= g_t k + k_t g \\ &\Rightarrow k_t = \theta_{st} g^{-1} - g_t g^{-1} k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow k_t &= (\theta_t)_s g^{-1} - k^2 F \\ \Rightarrow k_t &= - (F_s g^{-1})_s g^{-1} - k^2 F \end{aligned} \quad (3.15)$$

(où g^{-1} représente $1/g$ et non la fonction inverse) [15,11].

4.1. Propagation suivant la normale avec une vitesse $F=1$

Dans cette partie nous allons étudier la propagation d'une courbe suivant la direction de sa normale avec une vitesse constante ($F=1$). La solution exacte à ce problème au temps t peut être construite en faisant avancer chaque point du front dans sa direction normale par une distance t . En utilisant la paramétrisation du front, la solution est donnée par :

$$x(s,t) = \frac{y_s(s,t=0)}{(x_s^2(s,t=0) + y_s^2(s,t=0))^{3/2}} t + x(s,t=0) \quad (3.16)$$

$$y(s,t) = \frac{-x_s(s,t=0)}{(x_s^2(s,t=0) + y_s^2(s,t=0))^{3/2}} t + y(s,t=0). \quad (3.17)$$

Où $\gamma(0) = (x(s,t=0), y(s,t=0))$ est la courbe initiale. [11,12]

Le résultat de cette évolution montre le développement de coins anguleux en un temps fini [11]. La figure III.4 montre l'évolution de deux courbes, la première étant une parabole et la seconde la fonction cosinus. Ce résultat peut être interprété à partir de l'équation de propagation de la courbure. En effet, étant donné que $F = 1$, on a alors $F_s = 0$.

Ce qui donne une équation d'évolution pour la courbure k :

$$k_t = -k^2 \quad (3.18)$$

La solution de cette équation différentielle est calculée par l'outil *Maple* et ce avec les commandes suivantes :

> PDE := diff(k(s,t),t)=-k(s,t)^2;

$$PDE := \frac{\partial}{\partial t} k(s,t) = -k(s,t)^2$$

> ans := pdsolve(PDE);

$$ans := k(s,t) = \frac{1}{t + _F1(s)}$$

La solution est alors

$$k(s, t) = \frac{1}{t + f(s)} = \frac{\frac{1}{f(s)}}{1 + \frac{t}{f(s)}} \quad (3.19)$$

Où $f(s)$: est une fonction quelconque de « s » qu'on détermine par les conditions aux limites. En effet, à $t=0$ on a :

$$k(s, 0) = \frac{\frac{1}{f(s)}}{1 + \frac{0}{f(s)}} = \frac{1}{f(s)} \quad (3.20)$$

Ce qui donne :

$$k = \frac{k(s, 0)}{1 + k(s, 0)t} \quad (3.21)$$

Cette solution montre que dans le cas où la courbure est négative, le dénominateur peut s'annuler à une valeur de $t = -\frac{1}{k(s,0)}$ donnant ainsi une courbure K infinie. Cette dernière implique la formation d'un point de choc qui en se propageant conduit à la formation de coins anguleux.

Ainsi, la formation de ces singularités rend la définition de la normale ambiguë, et de même pour ce qui est de l'évolution de la courbe. Nous aurons donc besoin d'une solution "faible" (voir annexe b). La figure III.4 montre deux possibilités de la solution pour ce problème : la première (Swallowtail) est produite en laissant le front passer sur lui-même. Ceci est la solution donnée par les équations 3-16 et 3-17. L'autre solution est une solution entropique construite selon le principe de Huygens. La solution donnée par la condition d'entropie est la solution faible que nous désirons et qui en plus satisfait la plupart des phénomènes physiques.

- **Solution entropique**

La solution entropique est l'une des solutions utilisées afin d'éviter l'obtention de coins anguleux. Elle s'applique pour les courbes définies par $y = f(x)$ c'est-à-dire par :

$$X = (x, y = f(x)), \quad \text{où } X \text{ représente la courbe}$$

Cette courbe a pour vecteur normal normalisé le vecteur :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{y_x}{\sqrt{(1+y_x^2)}} \\ \frac{1}{\sqrt{(1+y_x^2)}} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Par ailleurs, si on considère que cette courbe se déplace dans le temps, on aura :

$$X(t) = (x(t), y = f(x(t), t)) \quad (3.23)$$

et une vitesse de :

$$\frac{dX}{dt} = (x_t, y_x x_t + y_t) \quad (3.24)$$

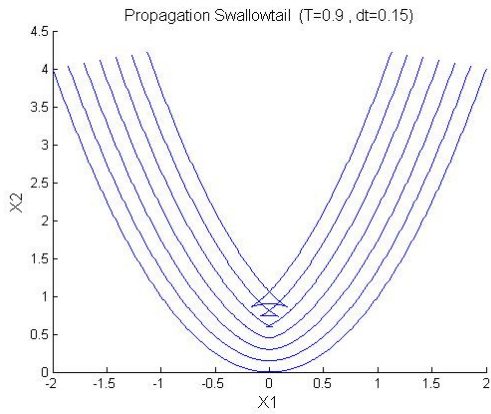
Pour que la courbe se déplace suivant sa normale il faut avoir une vitesse parallèle au vecteur normal de la courbe, c'est-à-dire $\frac{dX}{dt} = \vec{n}$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} x_t = -\frac{y_x}{\sqrt{(1+y_x^2)}} \\ y_t = \sqrt{(1+y_x^2)} \end{cases} \quad (3.25)$$

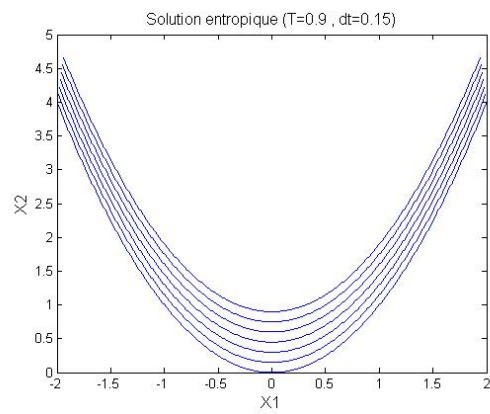
Ainsi, le déplacement de la courbe suivant sa normale peut s'obtenir en appliquant la formule $y_t = \sqrt{(1+y_x^2)}$ [5]. Le calcul numérique de cette dernière doit s'effectuer par la méthode entropique afin de suivre le sens de propagation de la courbe (upwind propagation). Ceci s'écrit par :

$$y_i^{n+1} = \sqrt{\left(1 + \left(\min\left(0, \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{\Delta x}\right)\right)^2 + \left(\max\left(0, \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{\Delta x}\right)\right)^2\right)} \quad (3.26)$$

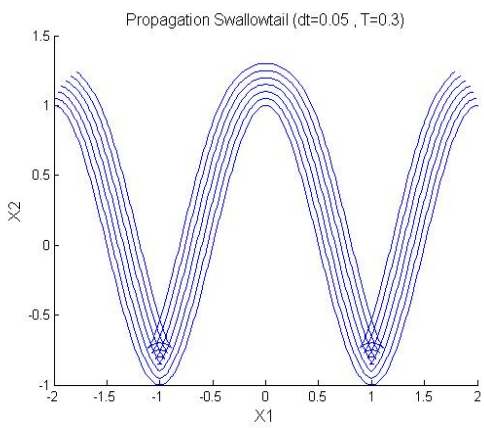
Où $y_k^h = y(t = h, x = k)$.



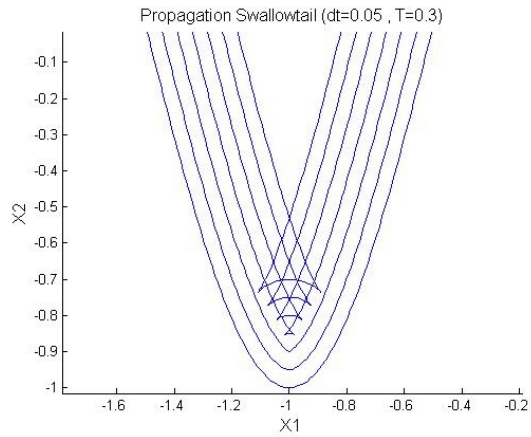
a) Propagation d'une parabole
(choc)



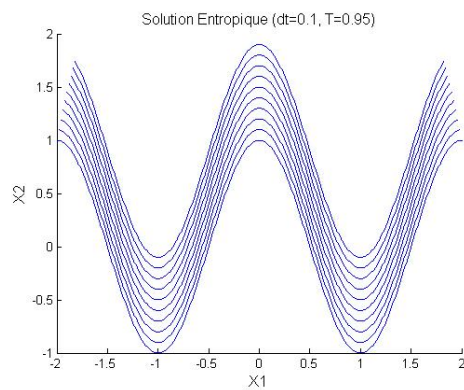
b) propagation entropique
d'une parabole



c) Propagation d'un cosinus
(choc)



d) agrandissement du choc



e) Courbe d'un cosinus avec une propagation entropique

Figure III.4 propagation suivant la normale avec une vitesse $F=1$

4.2. Propagation suivant la normale avec une vitesse $F=k$

Prenons dans ce cas $F = k$ ce qui donne pour l'équation d'évolution de la courbure :

$$k_t = -(F_s g^{-1})_s g^{-1} - k^3 \quad (3.27)$$

On démontre dans ce cas qu'en appliquant une force $F = k$ dans la direction de la normale intérieure d'une courbe fermée, la courbe tend à devenir un cercle dont le rayon décroît jusqu'à disparaître après un certain temps. Dans le cas où \vec{n} est dirigé vers l'extérieur le rayon du cercle continu à croître indéfiniment [11,12].

Une autre propriété importante de cette force est qu'elle permet d'avoir la plus grande réduction de la longueur en un temps minimal. En effet, sachant que la longueur est donnée par $L(t) = \int_0^1 \left| \frac{\partial C}{\partial p} \right| dp$, sa vitesse sera alors donnée par :

$$L'(t) = \int_0^1 \frac{\left\langle \frac{\partial C}{\partial p}, \frac{\partial^2 C}{\partial p \partial t} \right\rangle}{\left| \frac{\partial C}{\partial p} \right|} dp = - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial C}{\partial t}, \frac{1}{\left| \frac{\partial C}{\partial p} \right|} \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{\frac{\partial C}{\partial p}}{\left| \frac{\partial C}{\partial p} \right|} \right] \right\rangle \left| \frac{\partial C}{\partial p} \right| dp \quad (3.28)$$

Minimiser le temps de variation de la longueur revient alors à maximiser cette vitesse. Comme on a : $\left| \frac{\partial C}{\partial p} \right| dp = ds$ alors (3-28) devient :

$$L'(t) = - \int_0^{L(t)} \left\langle \frac{\partial C}{\partial t}, k \vec{N} \right\rangle ds. \quad (3.29)$$

Or le produit scalaire $\left\langle \frac{\partial C}{\partial t}, k \vec{N} \right\rangle$ est maximal quand $\frac{\partial C}{\partial t} = k \vec{N}$, c'est-à-dire que la décroissance de la longueur L sera la plus rapide pour une vitesse $F = K$ suivant la normale [30].

4.3. Propagation suivant la normale avec une vitesse $F = 1 - \epsilon k$

Examinons maintenant une fonction de vitesse de la forme $F = 1 - \epsilon k$, où ϵ est une constante (voir figure III.5). Dans ce cas, l'équation d'évolution de la courbure donnée par l'équation (3.15) peut être réécrite selon la formule [12]:

$$k_t = \epsilon k_{\alpha\alpha} + \epsilon k^3 - k^2 \quad (3.30)$$

- **Démonstration**

On a d'un coté:

$$k_t = -\frac{1}{g} \left(\frac{F_s}{g} \right)_s - F k^2$$

Pour $F = 1 - \varepsilon k$

$$k_t = -\frac{1}{g} \left(-\varepsilon \frac{k_s}{g} \right)_s - (1 - \varepsilon k) k^2$$

$$k_t = -k^2 + \varepsilon k^3 - \frac{1}{g} \left(-\varepsilon \frac{k_s}{g} \right)_s$$

$$k_t = -k^2 + \varepsilon k^3 + \frac{\varepsilon}{g} \left(\frac{k_s}{g} \right)_s$$

D'un autre coté on a $d\alpha = g ds$, où α représente l'abscisse curviligne.

$$\Rightarrow k_s = k_\alpha \frac{d\alpha}{ds} = g k_\alpha$$

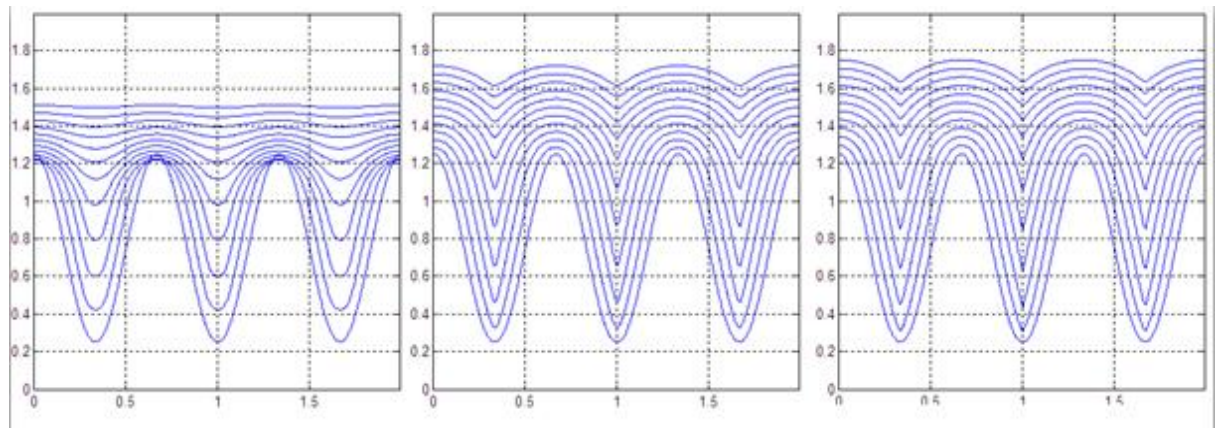
$$\Rightarrow k_t = \frac{\varepsilon}{g} \left(g \frac{k_\alpha}{g} \right)_s + \varepsilon k^3 - k^2$$

$$\Rightarrow k_t = \frac{\varepsilon}{g} k_{\alpha\alpha} g + \varepsilon k^3 - k^2$$

$$\Rightarrow k_t = \varepsilon k_{\alpha\alpha} + \varepsilon k^3 - k^2$$

Dans cette équation l'attrance vers les singularités en raison du terme de réaction ($\varepsilon k^3 - k^2$) est compensée par l'effet de lissage du terme de diffusion ($\varepsilon k_{\alpha\alpha}$).

La figure suivante montre la propagation d'un cosinus dans la direction de sa normale avec une vitesse de la forme $F = 1 - \varepsilon k$.



Peu de viscosité: $F = 1 - 0.1k$

Faible viscosité : $F = 1 - 0.01k$

Solution Entropique

Figure III.5 : Solution entropique (limite des solutions de viscosité).

Remarque :

En remplaçant $\varepsilon = 0$ dans l'équation (3.30) on trouve le résultat étudié précédemment $k_t = -k^2$ qui représente une propagation de la courbe suivant sa normale avec une vitesse unitaire.

5. Evolution des courbes avec la méthode des ensembles de niveaux

La méthode des ensembles de niveaux est un outil numérique et théorique pour propager des interfaces. Elle a été la première fois présentée par Osher et Sethian [12], [13], [14] et est devenu de plus en plus populaire dans le cadre du traitement d'image, mécanique des fluides, graphiques, vision par ordinateur, etc. La méthode des ensembles de niveaux est principalement employée pour poursuivre les fronts mobiles en considérant le front comme le niveau zéro d'une fonction, appelé fonction d'ensembles de niveaux. Dans le traitement d'image, elle est employée pour poursuivre des courbes dans l'espace bidimensionnel 2D ou des surfaces dans l'espace tridimensionnel 3D. Les applications de la méthode des ensembles de niveaux couvrent la plupart des champs dans le traitement d'image, tel que l'élimination du bruit, la segmentation d'image et la restauration.

Dans la segmentation d'image, la méthode des ensembles de niveaux a apporté des avantages non négligeables comparativement au modèle des contours actifs. La méthode des ensembles de niveaux permet le changement topologique ce qui n'est pas le cas des modèles de contours actifs.

5.1. Formulation des ensembles de niveaux

Soit une hyper-surface $\Gamma(t=0)$ de dimension $(N-1)$, et considérons maintenant la formulation Eulérienne pour le mouvement de l'hyper-surface $\Gamma(t)$ qui se propage selon sa direction normale avec une vitesse F , où F peut être une fonction ayant comme arguments la courbure, la direction normale, etc.

L'idée principale de la méthodologie des ensembles de niveaux est d'inclure cette interface qui se propage comme un ensemble de niveau zéro d'une fonction ϕ de dimension plus élevée et qui est défini comme suit :

$$\phi(x, t = 0) = \mp d$$

$$\text{avec } x \in \mathcal{R}^N. \quad (3.31)$$

Où d est la distance de x à $\Gamma(t=0)$, et le signe plus (moins) est choisi si le point x est à l'extérieur (intérieur) de l'hyper-surface initial $\Gamma(t=0)$. Ainsi, nous avons une fonction initial $\phi(x, t = 0) : \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{R}$ avec la propriété de :

$$\Gamma(t = 0) = [x/\phi(x, t = 0) = 0]. \quad (3.32)$$

Le but est de produire une équation pour la fonction évolutive $\phi(x,t)$ qui contient le mouvement de $\Gamma(t)$ comme l'ensemble de niveau $\phi = 0$. Pour cela, soit $x(t)$ le chemin des points du front qui se propage. C'est-à-dire, $x(t=0)$ est un point du front initial de $\Gamma(t=0)$, et $\vec{x}_t \cdot \vec{n} = F(x(t))$ avec \vec{x}_t vecteur normal au front à $x(t)$. Le fait que l'ensemble de niveau zéro d'une fonction ϕ évolutive s'adapte toujours à l'hyper-surface qui se propage signifie que :

$$\phi(x(t), t) = 0. \quad (3.33)$$

Par différentiation on obtient :

$$\phi_t + \vec{\nabla}\phi(x(t), t) \cdot \overrightarrow{x'(t)} = 0.$$

Puisque F assure la vitesse dans la direction normale extérieure, et que $\overrightarrow{x'(t)} \cdot \vec{n} = F$ où $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\phi}{|\vec{\nabla}\phi|}$, ceci nous donne une équation d'évolution pour ϕ notamment,

$$\phi_t + F|\nabla\phi| = 0, \tag{3.34}$$

$$\text{Sachant } \phi(x, t = 0) \tag{3.35}$$

Ceci est l'équation des ensembles de niveau présentée par Osher et Sethian [12]. Pour certaines formes de la fonction de vitesse, on obtient une équation standard de Hamilton-Jacobi donnée par : $\phi_t + H(t, |\nabla\phi|) = 0, t \geq 0,$

Comme illustration de ce qui précède, la figure (III-6), montre la propagation extérieure d'une courbe initiale et le mouvement d'accompagnement de la fonction d'ensemble de niveau ϕ .

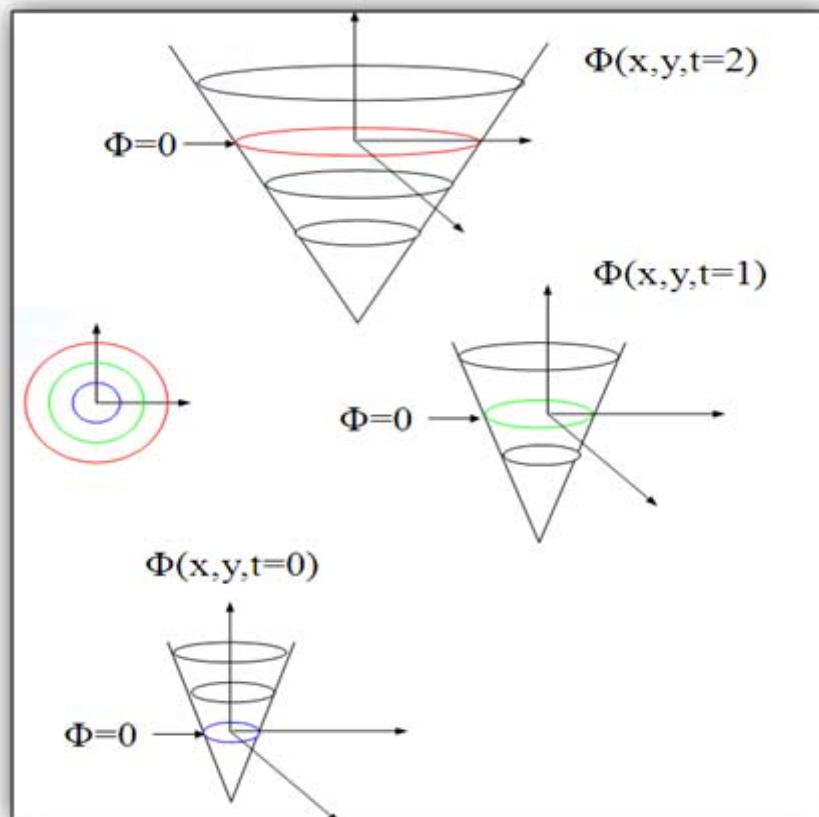


Figure III.6 Propagation d'un cercle

5.2. Avantages de la formulation des ensembles de niveaux

La formulation des ensembles de niveaux présente plusieurs avantages, on en cite :

- Tout d'abord, la fonction d'évolution $\phi(x, t)$ demeure toujours une fonction aussi longtemps que F est régulière. La surface de niveau $\phi = 0$, et par conséquent l'hypersurface de propagation $\Gamma(t)$, quant à elle peut changer de topologie, se diviser, fusionner, et former des points anguleux pendant l'évolution de la fonction ϕ .

- Ensuite, du fait que $\phi(x, t)$ reste une fonction lorsqu'elle évolue, des simulations numériques peuvent être développées en utilisant une discrétisation dans le domaine de x et substitution des approximations par des différences finies pour les dérivés spatiales et temporelles. Par exemple, en utilisant une maille uniforme avec un espacement h , et les noeuds de grille (i, j) , en utilisant la notation standard que ϕ_{ij}^n est l'approximation à la solution $\phi(ih, jh, n\Delta t)$, où Δt est le pas temporel, on pourrait écrire :

$$\frac{\phi_{ij}^{n+1} - \phi_{ij}^n}{\Delta t} + (F)|\nabla_{ij}\phi_{ij}^n| = 0. \quad (3.36)$$

Ici, le schéma de différence avant(forward) a été utilisé pour la discrétisation temporelle, et $|\nabla_{ij}\phi_{ij}^n|$ représente un certain opérateur de différence finie approprié à la dérivée spatiale. Ainsi, une approche de différence finie explicite est possible.

- Troisièmement, les propriétés géométriques intrinsèques du front sont facilement déterminées à partir de la fonction de niveau. Par exemple, à un point quelconque du front, le vecteur normal est donné par :

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\phi}{|\vec{\nabla}\phi|} \quad (3.37)$$

et la courbure de chaque ensemble de niveau est facilement obtenue à partir de la divergence du vecteur unité normal au front, c-à-d,

$$\kappa = \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{\nabla}\phi}{|\vec{\nabla}\phi|} = \frac{\phi_{xx}\phi_y^2 - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_{yy}\phi_x^2}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.38)$$

- Enfin, il n'y a pas beaucoup de changement pour suivre des fronts dans l'espace à trois dimensions. Il suffit de prolonger les structures de vecteur et l'opérateur de gradient.

En résumé, on peut mentionner:

i. Une propagation de front à une vitesse constante peut former des points anguleux pendant l'évolution ; à ces points, le front n'est plus différentiable et une solution faible (voir annexe B) doit être construite pour obtenir la solution.

ii. La solution faible correcte, motivée en regardant le front comme une interface d'évolution séparant deux régions, sera déterminée au moyen d'une condition d'entropie.

iii. Une propagation de front à une vitesse qui dépend de sa courbure ne forme pas des points anguleux et reste régulière tout le temps. De plus lorsque la dépendance à l'égard de la courbure disparaît, la limite de ce mouvement est la solution entropique qui est obtenue dans le cas d'une vitesse constante.

iv. Si le front de propagation demeure un graphe pendant qu'il se déplace, il y a un lien direct entre l'équation du mouvement et les lois hyperboliques de conservation à une dimension. Le rôle de la courbure dans le front de propagation est analogue au rôle de la viscosité dans les équations du flux de fluide compressible à viscosité [10,11].

5.3. Exemples d'évolution de quelques courbes par les ensembles de niveaux

5.3.1. Evolution suivant la normale avec une vitesse unitaire

L'équation aux dérivées partielles s'écrit dans ce cas comme :

$$\phi_t + F |\nabla\phi| = 0, \text{ où } F = \mp 1 \quad (3.39)$$

Cette équation permet à la courbe d'évoluer suivant son vecteur normal et dans deux sens opposés. Dans le cas où la force F est positive la courbe évolue vers l'extérieur c'est-à-dire qu'elle gagne en volume. Par contre pour F négative, la courbe évolue vers l'intérieur jusqu'à disparaître. La figure montre des exemples d'évolution de deux courbes, courbe en T et un

triangle, suivant les deux sens cités. On constate que pour F positive les angles de la courbe s'arrondissent à mesure que la courbe évolue.

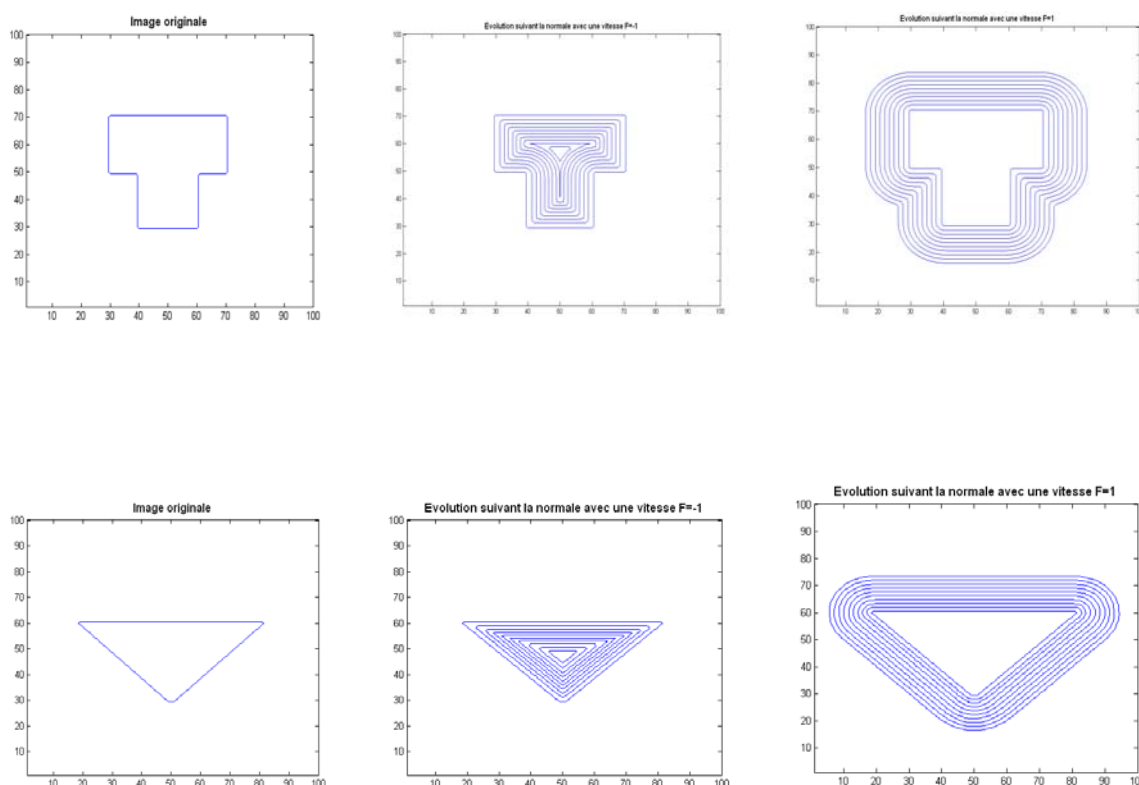


Figure III.7 Evolution suivant la normale avec une vitesse unitaire

5.3.2. Evolution suivant la normale avec une vitesse égale à la courbure

L'équation aux dérivées partielles s'écrit dans ce cas comme :

$$\phi_t + F |\nabla\phi| = 0, \quad \text{où } F = -\kappa \tag{3.40}$$

Comme évoqué précédemment (voir §4.2) le contour se rétrécit et tend dans ce cas à devenir un cercle jusqu'à disparaître. Les figures suivantes montrent l'effet de cette vitesse sur plusieurs courbes (convexe et non convexe).

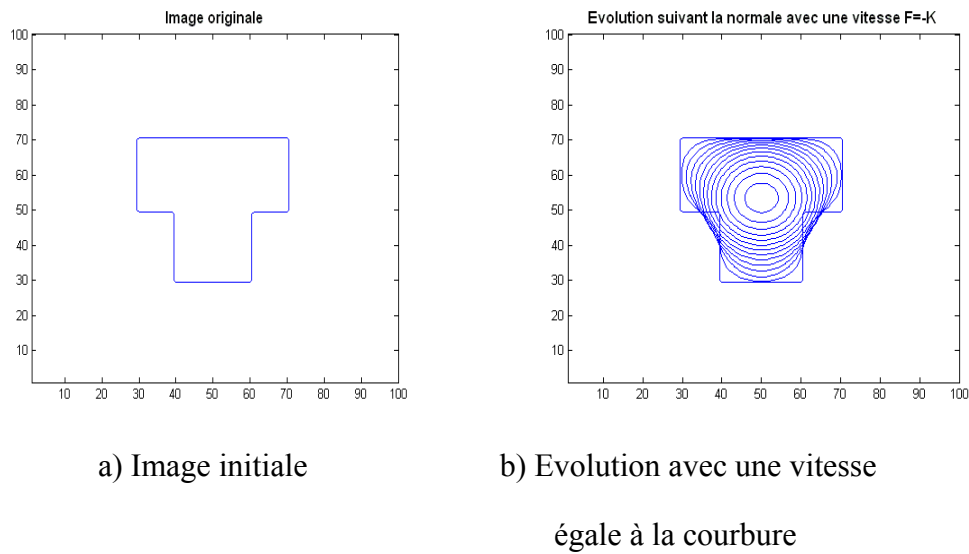


Figure III.8 Evolution suivant la normale avec une vitesse égale à la courbure d'une courbe non convexe

On n'omettra pas de signaler que les côtés droits qui ont une courbure nulle ne se déplacent pas tout de suite. Les régions qui possèdent une courbure se déplacent en premier. La forme initiale est donnée en (a) et les étapes d'évolution sont montrées en (b).

Pour une courbe convexe (une courbe présentant une courbure de signe constant), la courbe rétrécit jusqu'à disparaître après un certain nombre d'itérations.

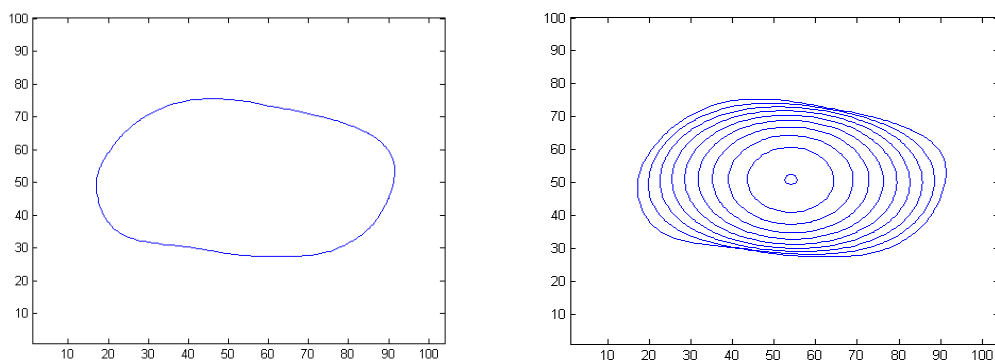


Figure III.9 Evolution suivant la normale avec une vitesse égale à la courbure d'une courbe convexe

Dans le cas des courbes non convexes, on remarque que les différentes parties ont des courbures de signes opposés et par conséquent se déplacent selon des directions opposées jusqu'à ce que la forme de contour devienne un cercle et disparaît après un certain temps.

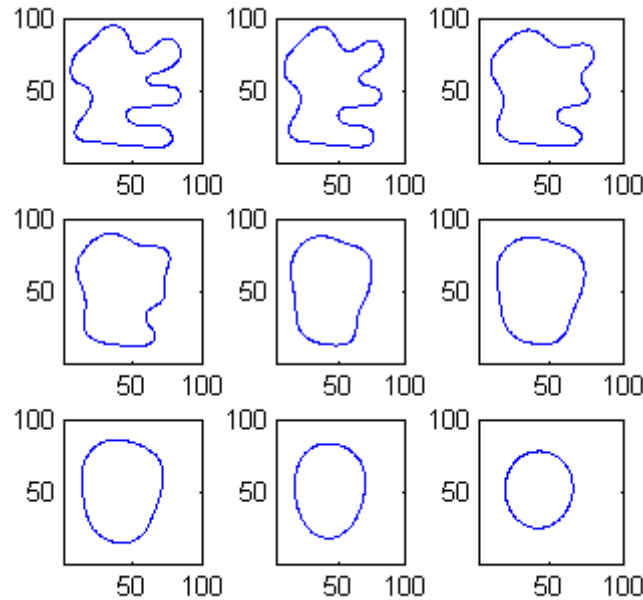


Figure III.10 Evolution suivant la normale avec une vitesse égale à la courbure d'une courbe non convexe

5.3.3. L'évolution min/max

Maintenant, considérons deux variations sur des mouvements de bases suivant la courbure donnés par :

$$\phi_t = F |\nabla\phi| \text{ avec } F(k) = \begin{cases} \min(k, 0) \\ \max(k, 0) \end{cases} \quad (3.41)$$

Comme il est montré sur la figure III.12, l'effet du mouvement avec $F(k) = \min(k, 0)$ est de permettre aux régions concaves internes de grandir vers l'extérieur, tandis que le mouvement des régions convexes externes est arrêté. Donc, le mouvement s'arrête dès qu'on obtient une coque convexe. Inversement, l'effet de l'évolution de la courbe avec $F(k) = \max(k, 0)$ est de permettre aux régions externes d'évoluer vers l'intérieur. Cependant, dès

que la courbe devient complètement convexe, la courbure est toujours positive et le mouvement devient le même que pour celui d'une courbure régulière et dans ce cas, la courbe rétrécit jusqu'à ce qu'elle devienne un point.

En résumé, le mouvement avec $F(k) = \min(k, 0)$ préserve une partie de la structure de la courbe et rend la courbe convexe, tandis que le mouvement avec $F(k) = \max(k, 0)$ diffuse toutes les informations.

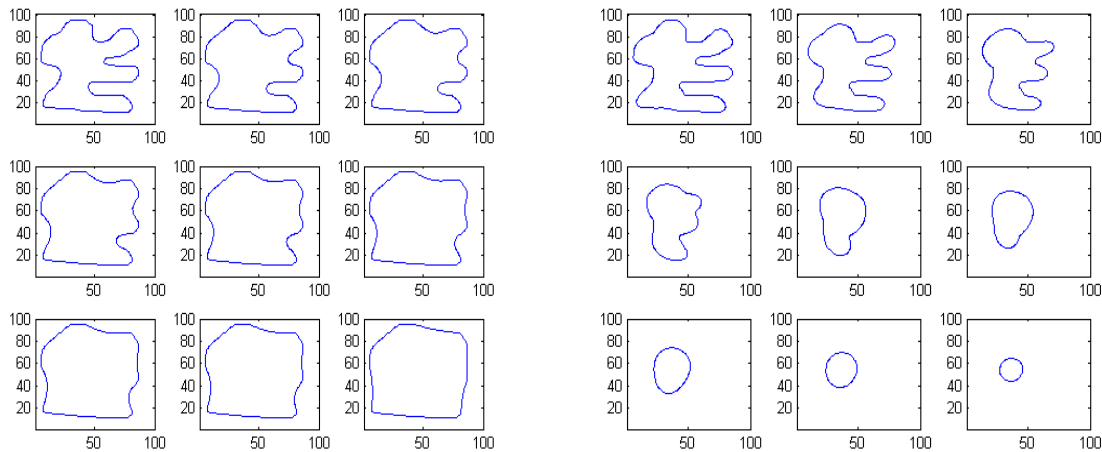


Figure III.12 Evolution suivant la normale avec une vitesse égale à $\min(k, 0)$ à gauche et $\max(k, 0)$ à droite.

6. Conclusion

Ce chapitre comporte une étude détaillée de l'évolution des courbes, suivant les deux formulations Lagrangienne et Eulérienne, qui représente une étape cruciale pour la compréhension de la segmentation par contour actif. L'étude a comporté plusieurs parties en commençant par l'introduction de l'équation hyperbolique ainsi que ses conditions de stabilité qui montrent la difficulté rencontrée dans ce type de propagation. Nous avons introduit, par la suite, l'équation de propagation de la courbure ainsi que celle résultante de l'évolution d'un front suivant sa direction normale et ce pour différents types de vitesse. Ceci nous a permis de constater les instabilités générées, à savoir les problèmes de choc, ce qui nous a conduit vers les solutions entropiques qui permettaient de remédier à ce problème. Suite à cela, nous avons abordé l'évolution par la méthode des Level-Set et ce par l'introduction de plusieurs exemples d'évolution de courbes ainsi qu'en évoquant les multiples avantages que procurent cette dernière.

CHAPITRE IV

PRETRAITEMENTS UTILISANT LES EQUATIONS

AUX DERIVEES PARTIELLES

1. Introduction

L'étape de prétraitement a pour but de faciliter la segmentation en renforçant la ressemblance entre pixels appartenant à une même région, ou en accentuant la dissemblance entre pixel appartenant à des régions différentes [2].

Nous allons aborder dans ce qui suit le filtrage par l'utilisation des équations aux dérivées partielles en commençant par introduire l'équation de la chaleur ainsi que sa discrétisation. Nous aborderons par la suite la méthode de Perona-Malik suivie de son amélioration. L'étude sera accompagnée par des exemples illustrant les différences entre les différentes méthodes étudiées.

2. Equation de la chaleur

La première EDP à avoir été utilisée en traitement d'images est certainement l'équation de la chaleur. Il s'agit d'une EDP parabolique.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \Delta u(t, x), & t \geq 0, x \in R^2 \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (4.1)$$

L'introduction de cette équation provient de la remarque suivante : si u_0 la donnée initiale est suffisamment régulière, la solution explicite de l'équation (4-1) est donnée par :

$$u(t, x) = \int_{R^2} G_{\sqrt{2t}}(x - y) u_0(y) dy = (G_{\sqrt{2t}} * u_0)(x) \quad (4.2)$$

Où G_σ désigne le noyau Gaussien en dimension 2 :

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.3)$$

L'opération de convolution par un noyau positif est une opération de base en traitement d'image. Cela correspond à un filtrage passe-bas.

Cette solution montre alors que plus grand est le temps d'évolution plus grand sera l'écart type de la gaussienne, donc pour un temps suffisamment grand ($t \rightarrow \infty$ donc $\sigma \rightarrow \infty$) la solution tend vers la moyenne de l'image initiale $u_0(x)$. De même, pour un temps d'évolution très petit ($t \rightarrow 0$ et donc $\sigma \rightarrow 0$) on obtient l'image initiale comme résultat.

L'équation est de nature parabolique ce qui veut dire que l'évolution se fait par diffusion dans toutes les directions. Ainsi, l'application de cette dernière sur une image permet de la lisser et du coup de réduire le bruit. Néanmoins, ce lissage affecte aussi les contours de l'image et les rend moins détectables [16, 17, 20,21].

2.1. Schéma numérique

- **Notation** : On note δt le pas de discrétisation en temps, et dx, dy les pas de discrétisation en espace (on prend le même pas selon les deux axes $dx = dy = h$). $u_{i,j}^n$ désigne la valeur de $u(n \delta t, i h, j h)$.

On va utiliser un schéma d'Euler explicite à l'ordre 1 en temps : on approxime donc le terme

$$\frac{\partial u}{\partial t}(n\delta t, i h, j h) = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\delta t}. \quad (4.4)$$

Pour obtenir une discrétisation du Laplacien, on discrétise les différentes dérivées par l'utilisation des différences finies décentrées à gauche et à droite. Ce qui donne :

$$\delta_x^+ u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{h} \quad (4.5)$$

$$\delta_{xx} u_{i,j}^n = \delta_x^- (\delta_x^+ u_{i,j}^n) = \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n - 2 * u_{i,j}^n}{h^2} \quad (4.6)$$

$$\delta_y^+ u_{i,j}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{h} \quad (4.7)$$

$$\delta_{yy} u_{i,j}^n = \delta_y^- (\delta_y^+ u_{i,j}^n) = \frac{u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 2 * u_{i,j}^n}{h^2} \quad (4.8)$$

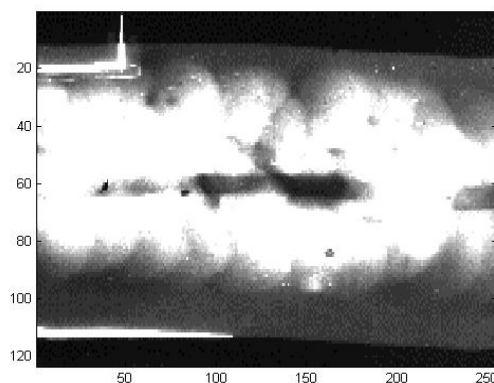
$$\Delta u_{i,j}^n = \delta_{xx} u_{i,j}^n + \delta_{yy} u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 4 * u_{i,j}^n}{h^2}. \quad (4.9)$$

Remarque : Cette discrétisation ne tient pas compte de la nature 2D et des propriétés de cet opérateur. En effet, le Laplacien est un opérateur invariant par rotation alors que le schéma discret utilisé ici ne l'est clairement pas. Pour s'approcher davantage de cette invariance, on peut modifier la discrétisation du Laplacien en utilisant tous les points dans un voisinage 3*3 du pixel considéré. On obtient ainsi des schémas numériques plus robustes. Un exemple de ces schémas est donné par [10,16]:

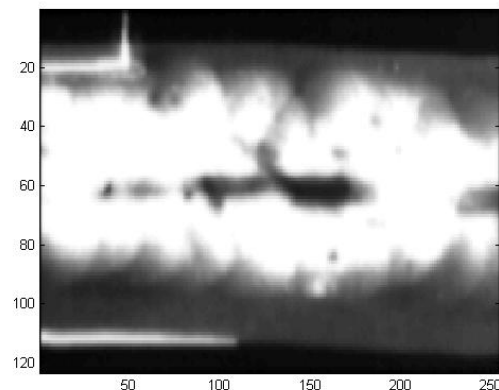
$$\Delta u_{i,j}^n = \lambda \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 4 * u_{i,j}^n}{h^2} + (1 - \lambda) \frac{u_{i+1,j+1}^n + u_{i-1,j+1}^n + u_{i+1,j-1}^n + u_{i-1,j-1}^n - 4 * u_{i,j}^n}{2h^2}. \quad (4.10)$$

où $\lambda \in [0,1]$ est une constante dont la valeur est prise en général $\lambda = \frac{1}{3}$, afin d'assurer une invariabilité du Laplacien pour une rotation de $\pi/4$.

2.2. Application sur une image radiographique de soudure



a) image originale



b) 5 itérations

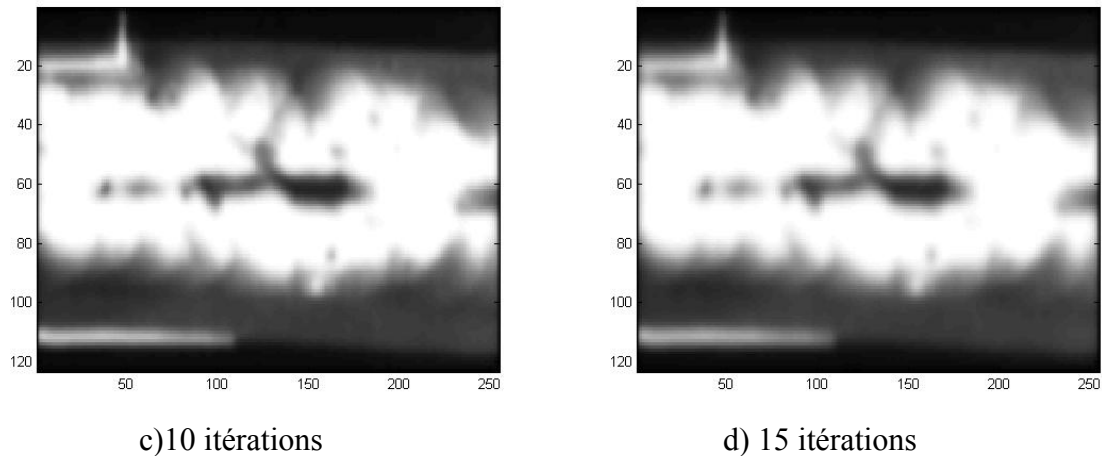


Figure IV.1 Filtrage par une Gaussienne avec différents nombres d'itérations

L'image résultante est alors floue du fait du lissage effectué par l'opérateur Gaussien. On constate aussi que plus on effectue d'itérations plus grand sera le lissage, ceci est dû au fait que l'écart type de la gaussienne grandit ($\sigma = \sqrt{2t}$).

Comme évoqué précédemment, l'équation (4-1) affecte les contours de l'image à traiter. Ce problème nous conduit donc à définir et utiliser une nouvelle équation EDP permettant de réduire le bruit tout en préservant les contours de l'image.

3. Opérateur de Perona-Malik

3.1. Principe

Pour améliorer les résultats obtenus par l'EDP de la chaleur, Perona et Malik [18] ont proposé de modifier l'équation en y intégrant le processus de détection des bords :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \operatorname{div}(c(|\nabla u|) \nabla u), & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial N} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (4.11)$$

Où c est une fonction, du gradient de l'image, décroissante de R_+ dans R_+ .

On constate alors que si $c = 1$, on retrouve l'équation de la chaleur.

On impose souvent que $c(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$. On distingue alors deux cas de figure :

- dans les régions de faible gradient ($|\nabla u| \ll 1$ et $c \sim 1$), l'équation agit essentiellement comme l'équation de la chaleur,
- dans les régions de fort gradient ($|\nabla u| \gg 1$ et $c \sim 0$), la régularisation est stoppée ce qui permet de préserver les bords.

Perona et Malik ont proposés deux fonctions classiques pour la fonction $c(t)$:

$$c_1(t) = \frac{1}{1 + \frac{t^2}{k^2}}, \quad c_2(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{k^2}\right) \quad (4.12)$$

Où k est un paramètre permettant de sélectionner l'amplitude seuil sur les gradients. Il peut-être déterminé par des statistiques sur le gradient de l'image. La figure suivante montre le graphe d'évolution de ces deux fonctions :

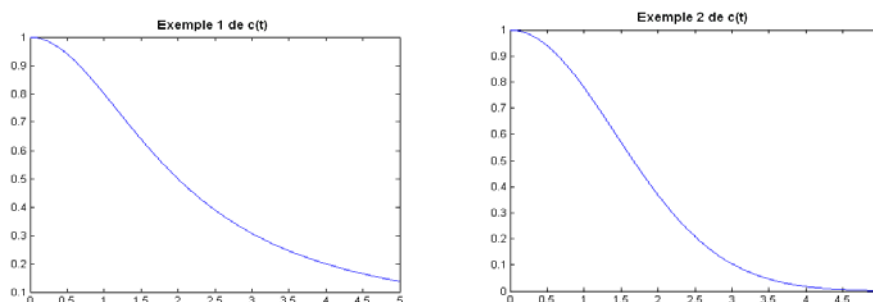


Figure IV.2 représentation de $c_1(t)$ et $c_2(t)$ pour $K=2$

La figure (IV-3) montre l'effet du filtrage par Perona-Malik d'une image avec différents nombres d'itérations et une constante temporelle égale à 0.15.

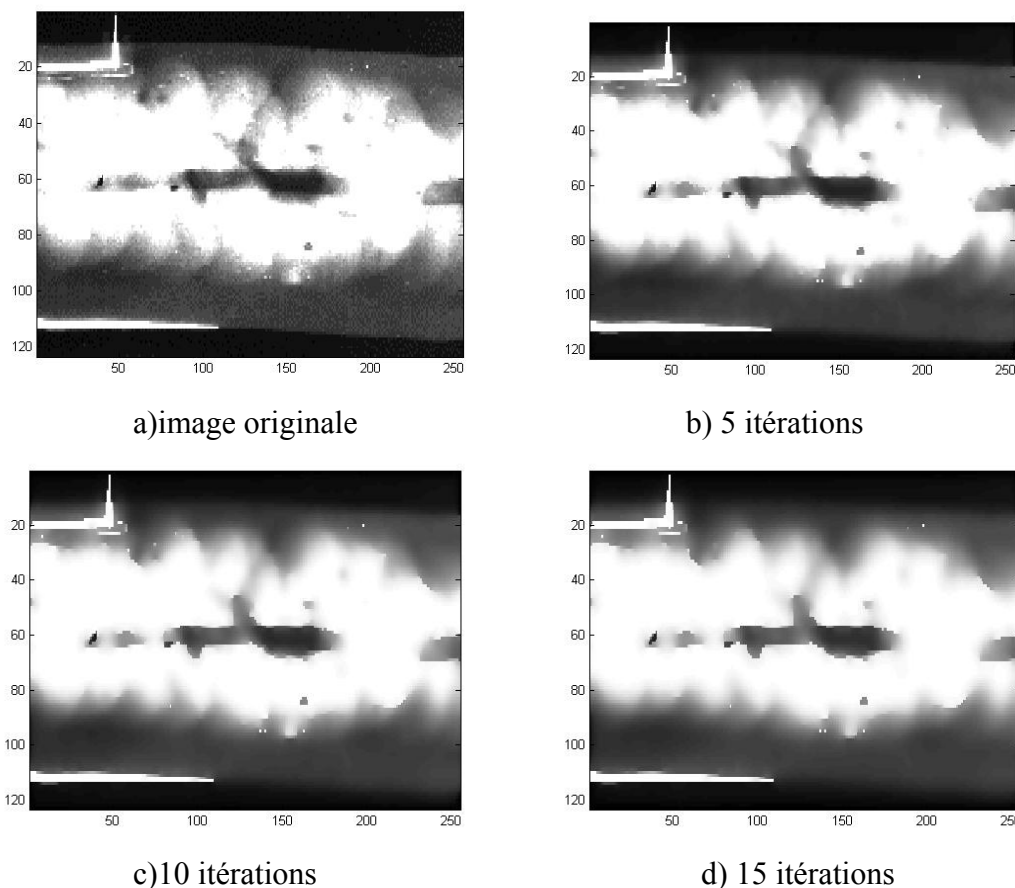


Figure IV.3 Filtrage par Perona-Malik avec différents nombres d'itérations

Bien qu'il y ait lissage des zones homogènes, on constate que les contours sont préservés puisqu'on arrive facilement à distinguer les différentes régions composant l'image. Ceci dit, il convient de signaler que cet opérateur n'est pas très efficace pour des images bruitées d'où l'étude de l'opérateur suivant :

3.2. Amélioration : convolution du gradient par une gaussienne

L'un des principaux défauts du modèle précédent concerne la restauration des images bruitées.

En effet, l'adjonction de bruit à une image entraîne de fortes oscillations de son gradient et le modèle va donc garder le bruit (en le considérant comme des bords). Une solution pour résoudre les inconvénients associés au modèle de Perona et Malik est de travailler avec une version régularisée (lissée) de l'EDP (4-11) impliquant le gradient $c(|\nabla G_\sigma * u|)$ en lieu et place de $c(|\nabla u|)$. Cette approche, proposée par Catte & al [19] rend le problème bien posé.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \operatorname{div}(c(|G_\sigma * \nabla u|) \nabla u), & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial N} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (4.13)$$

Ceci revient alors à convoluer le gradient de l'image par une gaussienne ce qui entraîne l'élimination des oscillations dues aux bruits tout en préservant les contours réels de l'image. Ainsi, l'application de l'équation (4-13) permet de lisser l'image tout en s'arrêtant sur ses vrais contours [19].

3.3. Schéma numérique

Le schéma numérique de l'équation (4-11) peut s'écrire comme [16,18]:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \delta t * [c_N \nabla_N u + c_S \nabla_S u + c_W \nabla_W u + c_E \nabla_E u]_{i,j}$$

Où :

$$\nabla_N u_{i,j} = u_{i,j-1} - u_{i,j}, \quad \text{et } c_N = c(\nabla_N u_{i,j})$$

$$\nabla_S u_{i,j} = u_{i,j+1} - u_{i,j}, \quad \text{et } c_N = c(\nabla_S u_{i,j})$$

$$\nabla_W u_{i,j} = u_{i-1,j} - u_{i,j}, \quad \text{et } c_N = c(\nabla_W u_{i,j})$$

$$\nabla_E u_{i,j} = u_{i+1,j} - u_{i,j}, \quad \text{et } c_N = c(\nabla_E u_{i,j})$$

Remarque : dans le cas du filtre obtenu par convolution du gradient par une gaussienne le changement se fait au niveau des fonctions c_i (gradient) où il suffit d'introduire le gradient de l'image filtrée par une gaussienne.

3.4. Applications

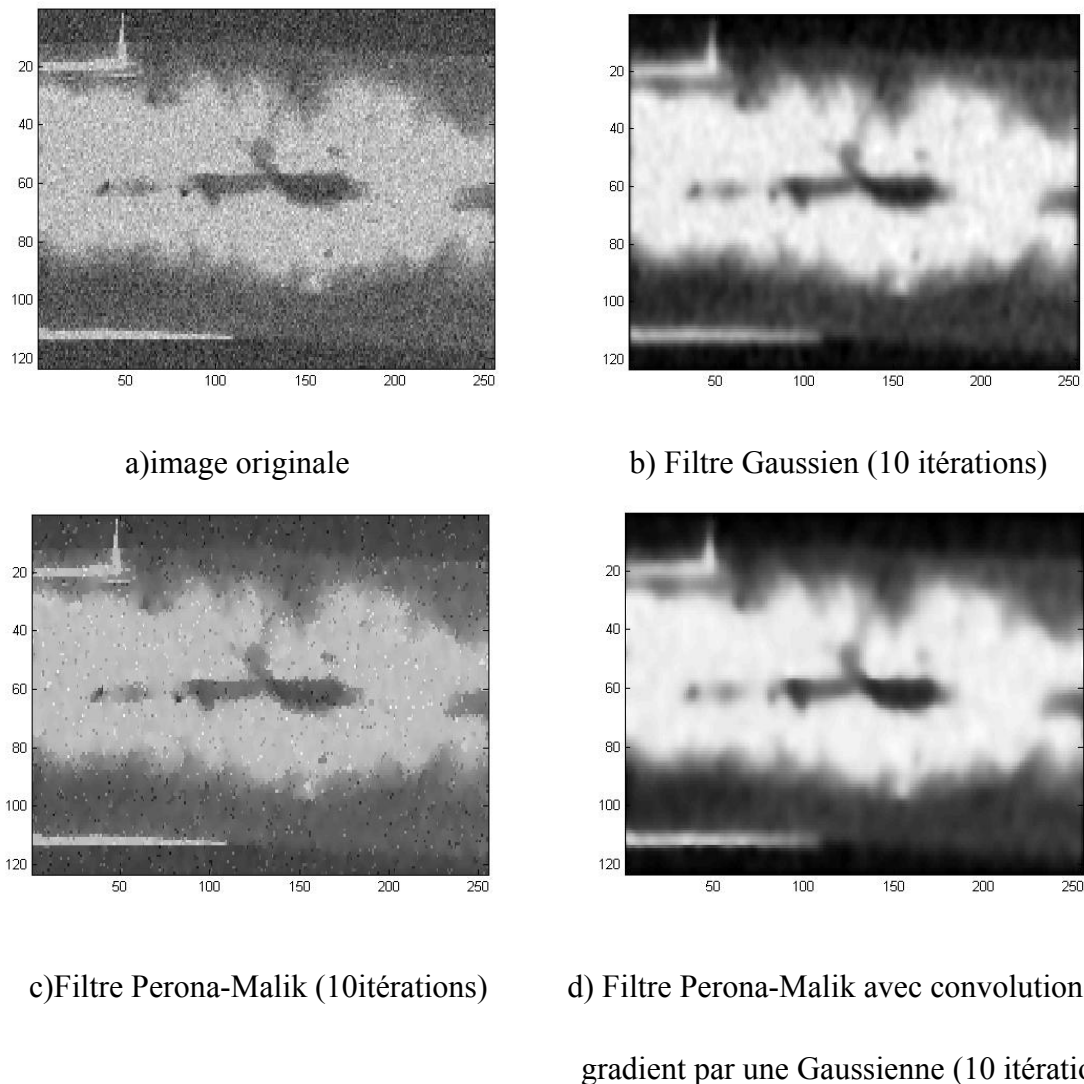


Figure IV.4 Filtrage d'une image bruitée avec différentes méthodes ($\delta t=0.15$)

La figure (IV.4) présente le filtrage d'une image radiographique bruitée avec les différents types d'opérateurs étudiés. On constate alors que le filtrage par une gaussienne permet de lisser l'image en éliminant le bruit ainsi que les contours de l'image. Le filtre de Perona-Malik quant à lui lisse l'image mais de manière non significative puisque le lissage s'arrête lors de la rencontre du bruit. Finalement, on constate que le filtre de Perona-Malik amélioré, avec convolution du gradient par une gaussienne, présente un meilleur résultat puisqu'il permet de lisser l'image tout en préservant ses contours.

4. Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre le filtrage par les équations aux dérivées partielles. Ce filtrage s'avère nécessaire dans plusieurs cas d'images bruitées et ce avant que l'on procède à la détection. Nous avons commencé par voir l'équation de la chaleur qui est la première à avoir été utilisée dans le traitement d'image. Ensuite, nous avons décrit les opérateurs de Perona-Malik et de Catte & al(Perona-Malik amélioré) qui intègrent le processus de détection des bords et qui permettent, de ce fait, de ne pas altérer les contours lors du filtrage.

CHAPITRE V

DES CONTOURS ACTIFS AUX LEVEL-SET

1. Introduction

Kass, &al [22] furent les premiers à introduire les contours actifs (snakes) ou courbes minimisantes. Les snakes tiennent leur nom de leur aptitude à se déformer comme des serpents. Depuis la publication de cette équipe, les modèles déformables sont devenus un sujet très important pour la communauté du traitement d'images. De très nombreuses équipes s'y sont intéressées de manière plus ou moins approfondie. Un état de l'art exhaustif sort du cadre de ce mémoire ; Les domaines d'utilisation sont nombreux tant en 2D qu'en 3D tels : la reconnaissance de formes, la simulation, le suivi de scènes, la segmentation d'images.

Dans ce chapitre nous allons commencer par introduire les différents types d'énergies utilisées dans la méthode des contours actifs. En effet, le principe des contours actifs se base sur la minimisation de ces dernières. Nous passerons, par la suite, à l'étude des contours actifs géodésiques qui permettent, de par leur formulation, l'utilisation de la méthode des ensembles de niveaux. La discrétisation de cette dernière fera alors le sujet d'une étude détaillée en évoquant les différentes contraintes rencontrées ainsi que les solutions nécessaires à adopter. L'étude de la méthode des ensembles de niveaux traditionnels nous révélera des insuffisances dues au temps de calcul important et au besoin de réinitialisation. Ces derniers seront éliminés par l'utilisation de la méthode des ensembles de niveaux sans réinitialisation qui sera minutieusement étudiée. Finalement, on terminera notre chapitre par des exemples résultant de l'application de ces méthodes sur différentes images synthétiques, bruitées et médicales.

2. Principe

Les contours actifs sont définis par une courbe continue, fermée ou non, à extrémités fixes ou non qui sera amenée à se déformer sous l'action de plusieurs forces jusqu'à une position d'équilibre, c'est-à-dire en direction des bords de l'objet à détecter. Le déplacement de cette courbe se fait avec une vitesse régie par une équation mettant en jeu des forces à appliquer au contour, généralement selon la normale. La position d'équilibre peut être définie comme le minimum d'une fonctionnelle d'énergie dont la dérivée correspond aux forces à appliquer. L'énergie du modèle comprend un terme d'énergie interne de régularisation ou de lissage qui

est dû uniquement à la forme de la courbe, un terme d'énergie externe ou d'adéquation aux données qui vise à plaquer la courbe sur les contours, auquel des contraintes en termes d'énergie peuvent être ajoutées.

3. Paramétrisation

Dans le cas des *snake* la courbe est modélisée par une représentation paramétrique. Soient $v(s, t)$ la position d'un point de la courbe à un instant t et x, y les coordonnées cartésiennes d'un point de l'image.

$$v(s, t) = (x(s, t), y(s, t))^t, \quad \forall (s, t) \in [0, 1] \times [0, +\infty] \quad (5.1)$$

Ainsi la courbe C est déformable spatialement et temporellement. Le domaine de définition de la courbe est normalisé à $[0, 1]$ avec généralement l'abscisse curviligne « s » comme paramètre spatial.

La courbe initiale étant définie par l'utilisateur, le problème est de trouver la vitesse permettant à la courbe d'évoluer vers un minimum local correspondant aux contours des objets ou régions à segmenter.

4. Energies

Suivant les considérations précédentes concernant les différentes énergies mises en jeu, l'énergie totale du contour actif peut être donnée par :

$$\phi(v): v \rightarrow E_{interne}(v) + E_{externe}(v) + E_{contexte}(v) \quad (5.2)$$

Nous allons préciser ces trois types d'énergies.

4.1. Energie interne

L'énergie interne gère la cohérence de la courbe. Elle maintient la cohésion des points et la raideur de la courbe. C'est le modèle physique type « plaque - membrane mince » qui est utilisé comme terme de régularisation, c'est-à-dire les deux premiers termes régularisant de Tikhonov.

$$E_{interne}(v) = \int_0^1 (\alpha(s) \|v'(s)\|^2 + \beta(s) \|v''(s)\|^2) ds \quad (5.3)$$

Les termes v' et v'' sont les dérivées première et seconde de v par rapport à s .

Le terme du 1^{er} ordre correspond à la tension (comportement comme une membrane mince). Il prend une valeur importante quand la courbe se détend. Lorsque $\alpha = 0$ la courbe peut présenter des discontinuités. Nous parlerons donc d'énergie de continuité.

Le terme du 2^{ème} ordre correspond à la courbure (comportement comme une plaque mince). Il prend une valeur importante lorsque la courbe s'incurve rapidement c'est-à-dire pour l'obtention de coins. Lorsque $\beta = 0$, la courbe peut prendre une forte convexité, par contre lorsque β est grand, la courbe tendra vers un cercle si elle est fermée ou une droite si elle est ouverte.

4.2. Energie externe

L'énergie interne que nous venons d'analyser, gère la régularisation du contour actif. L'énergie externe correspond à l'adéquation aux données de l'image à traiter. Cette énergie externe prend donc en compte les caractéristiques de l'image. Rappelons ici que ce sont les contours des formes qui sont recherchés donc les points de fort gradient.

4.2.1. Gradient

La recherche des zones de fort gradient de l'image s'obtient par la minimisation de l'énergie donnée par :

$$E_{externe}(v) = - \int_0^1 \|\nabla I(v(s))\|^2 ds \quad (5.4)$$

où $\nabla I(v(s))$ représente le gradient de l'image I en $v(s)$.

La minimisation de cette énergie revient donc à trouver la courbe $v(s)$ minimisant cette intégrale.

Très souvent, c'est le gradient de l'image filtrée par une gaussienne qui est utilisé

$$E_{externe}(v) = - \int_0^1 \|\nabla(g_\sigma * I)(v(s))\|^2 ds \quad (5.5)$$

où g_σ est la gaussienne centrée d'écart type σ .

4.2.2. Intensité

Cette énergie, au contraire, permet de sélectionner les zones sombres ou claires selon le signe choisi.

$$E_{intensité} = \pm \int_0^1 (I(v(s)) - i_0)^2 ds \quad (5.6)$$

La valeur i_0 introduit un certain seuillage. On peut ainsi favoriser la position du contour dans une zone donnée.

4.2.3. "Gradient vector flow"

C. Xu constatant la médiocrité de la qualité de la convergence de la courbe de contour actif vers le contour souhaité dans les zones à forte concavité, a introduit un nouveau potentiel [23]. Il s'agit d'une nouvelle force externe qui traduit la diffusion isotropique d'un flux externe. Il définit le champ "Gradient Vector Flow", comme le champ de vecteurs :

$$V(x, y) = [u(x, y)v(x, y)]^t \quad (5.7)$$

qui minimise la fonctionnelle d'énergie :

$$\varepsilon(u, v) = \varepsilon = \iint_t \mu. (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + \|\nabla(\|\nabla I\|)\|^2. \|V - \nabla(\|\nabla I\|)\|^2 dx dy \quad (5.8)$$

Xu et Prince proposent par la suite une généralisation, le "Generalized Gradient Vector Flow" [24].



Figure V-1 : La convergence à une concavité, à gauche la méthode GVF, à droite celle du snake [3].

Ce nouveau potentiel, d'un intérêt certain lorsque l'objet à segmenter est unique, peut poser problème dans le cas d'objets multiples dans des images réelles ; la diffusion du gradient pouvant créer des interférences entre les zones d'influence des différents objets. Le temps de calcul de ce GVF peut aussi représenter un handicap pour l'application de cette méthode.

4.3. Energie de contexte

L'énergie de contexte, parfois appelée énergie de contrainte, permet d'introduire des connaissances a priori sur ce que nous cherchons. Entre autres, nous plaçons, sous cette rubrique, l'énergie ballon introduite par Laurent D. Cohen [25]. Les snakes, de par leur discrétisation, ont une tendance naturelle à se rétracter. La minimisation de l'énergie implique une minimisation de distance. La force ballon va permettre de gonfler, tendre le contour actif ou accélérer sa rétraction selon le signe de la force introduite. De plus, cette force va permettre de dépasser les contours présentant un faible gradient et ainsi de sortir du bruit pour atteindre une frontière plus fortement marquée. Il s'agit d'une force normale au contour en chaque point.

$$F_{\text{balloon}}(v(s)) = \alpha \vec{n}(s) \quad (5.9)$$

où $\vec{n}(s)$ est un vecteur unitaire normal à la courbe en $v(s)$. L'intensité de l'énergie ballon est un scalaire généralement négatif (expansion du ballon) proportionnel à l'aire intérieure du contour.

Elle devient :

$$E_{\text{balloon}}(v) = \pm \delta \iint dx dy \quad (5.10)$$

C'est à partir de ces différentes énergies et de leur combinaison que l'on peut définir un problème dont la solution est le contour recherché. La mise en œuvre d'une telle approche a donné lieu à de nombreuses implémentations.

5. Minimisation de l'énergie

Désignons par v' et v'' les dérivées premières et secondes de v le long de la courbe et Ω la région (permettant de définir le domaine de s), l'énergie à minimiser est donc donnée par :

$$E(v(s)) = \int_{\Omega} \alpha(s) \|v'(s)\|^2 ds + \int_{\Omega} \beta(s) \|v''(s)\|^2 ds - \int_{\Omega} \lambda(s) \|\nabla I(v(s))\|^2 ds \quad (4.11)$$

où α , β et λ , sont potentiellement variables le long de s . Cette équation intégrale est résolue généralement de façon variationnelle afin d'obtenir un contour fournissant un minimum d'énergie.

Ce minimum de l'énergie est atteint lorsque l'équation associée d'Euler-Lagrange est satisfaite (*voir annexe A*):

$$-(\alpha v')' + (\beta v'')'' + \nabla P(v) = 0 \quad (5.12)$$

où $P(v) = -\lambda(s) \|\nabla I(v(s))\|^2$ est le potentiel associé aux forces externes (dépend du gradient car on désire attirer le *snake* vers les différences de niveaux de l'image). On obtient finalement :

$$-\alpha v'' + \beta v^{(4)} + \nabla P(v) = 0 \quad (5.13)$$

en supposant α , β et λ des constantes positives.

Ainsi la minimisation de la fonction énergie revient à résoudre une équation différentielle du quatrième ordre [2,25].

6. Discussion

Dans cette approche des contours actifs, l'idée principale consiste à modéliser le problème comme un problème de minimisation. Cependant, cette approche possède des inconvénients:

- la contrainte de régularité interdit les changements de topologie, il est impossible de détecter plusieurs objets et l'objet unique doit être convexe ;
- le contour initial doit être suffisamment proche de l'objet pour pouvoir converger,

– le calcul de la dérivée d'ordre 4 qui apparaît dans l'équation d'évolution pose des problèmes de discrétisation et d'instabilités numériques.

Afin de pouvoir pallier ces effets négatifs, Caselles, Kimmel et Sapiro [27] ont proposé les contours actifs géodésiques.

7. CONTOUR ACTIF GEODESIQUE

Considérons le modèle de Kass [22], où :

$$J(c) = \underbrace{\int_a^b |c'(q)|^2 dq + \beta \int_a^b |c''(q)|^2 dq}_{\text{Energie interne}} + \underbrace{\lambda \int_a^b g^2(|\nabla I(c(q))|) dq}_{\text{Energie externe}}, \quad (5.14)$$

Ce dernier consiste en un modèle déformable intrinsèquement fermé qui évolue vers les frontières de la région désirée. La déformation est fondée sur une formulation Lagrangienne de minimisation de l'énergie, exprimée comme la somme d'un terme d'attache aux données de l'image et d'un terme de régularisation. Dans ce modèle, la fonctionnelle $J(c)$ n'est pas intrinsèque car elle dépend de la paramétrisation de c , ce qui veut dire qu'avec une même courbe initiale on peut obtenir différents résultats en changeant uniquement la paramétrisation. De plus, elle ne permet pas de changement de topologie.

Caselles & al.[26] ont introduit un modèle géométrique des contours actifs formulé par des équations aux dérivées partielles (EDP) d'évolution de courbes. Chaque point de la courbe se déplace dans la direction de son vecteur normal à une vitesse proportionnelle à la courbure.

Caselles & al.[27] ont, par la suite, proposé un problème équivalent de minimisation d'énergie, fondée sur la recherche d'un chemin géodésique minimal dans un espace de Riemann (voir annexe C). Ce problème, qui peut être également résolu numériquement par les ensembles de niveaux (level set), permet en théorie de résoudre le problème d'initialisation des contours actifs. Les résultats théoriques ont montré l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution.

Ce dernier modèle commence par mettre $\beta = 0$ dans le modèle de Kass, le terme $\beta \int_a^b |c''(q)|^2 dq$ (terme d'élasticité) étant une composante de lissage qui minimise le carré de la courbure. La formule résultante diminue aussi la courbure, comme on le verra par la suite, ce qui veut dire que ce terme introduit implicitement une redondance.

Soit alors la fonctionnelle J_1 définie par :

$$J_1(c) = \int_a^b |c'(q)|^2 dq + \lambda \int_a^b g^2(|\nabla I(c(q))|) dq \quad (5.15)$$

et une nouvelle fonctionnelle J_2 définie par :

$$J_2(c) = 2\sqrt{\lambda} \int_a^b g(|\nabla I(c(q))|) |c'(q)| dq \quad (5.16)$$

On peut constater que $J_2(c)$ est intrinsèque car un changement de paramétrisation de la courbe $q = \phi(r)$, $\phi: [a', b'] \rightarrow [a, b]$, $\phi' > 0$, nous donnera

$$J_2(c) = 2\sqrt{\lambda} \int_{a'}^{b'} g(|\nabla I(\bar{c}(r))|) |\bar{c}'(r)| dr \quad \text{avec} \quad \bar{c}(r) = c(\phi(r)) \quad (\text{il n'y a donc pas de changement d'énergie}) [10].$$

De plus si nous comparons la fonctionnelle $J_2(c)$ à la définition classique de la longueur d'une courbe ($L = \int_a^b |c'(q)| dq$) on peut dire que J_2 correspond à une nouvelle longueur après application d'une pondération à la longueur Euclidienne. Cette pondération $g(|\nabla I(c(q))|)$ contient des informations relatives aux bords de l'objet.

Aubert et al. [10] ont calculé $J_1'(t)$ et $J_2'(t)$ et ont montré que la fonction $\frac{\partial c}{\partial t}$ qui diminue le plus J_2 diminue aussi J_1 et vice versa. Ils ont ainsi déduit que la minimisation de J_1 est équivalente à la minimisation de J_2 selon cette précédente notion d'équivalence.

Nous reproduisons, par la suite, uniquement la démonstration de $J_2'(t)$ qui va nous permettre d'aboutir à l'équation des ensembles de niveaux [10].

- Calcul de $J_2'(t)$. On a :

$$\frac{1}{2} J_2'(t) = \int_a^b g(|\nabla I(c(t, q))|) \left| \frac{\partial c}{\partial q}(t, q) \right| dq. \quad (5.17)$$

Dans le but de simplification des notations, on écrira par la suite c et g à la place de $c(t, q)$ et de $g(|\nabla I(c(t, q))|)$

$$\frac{1}{2}J'_2(t) = \int_a^b g \left\langle \frac{\frac{\partial c}{\partial q}}{\left| \frac{\partial c}{\partial q} \right|}, \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial q} \right\rangle dq + \int_a^b \left| \frac{\partial c}{\partial q} \right| \langle \nabla g, \frac{\partial c}{\partial t} \rangle dq. \quad (5.18)$$

On effectue ensuite une intégration par parties pour la première intégrale à droite:

$$\frac{1}{2}J'_2(t) = - \int_a^b \left[\left\langle g \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\frac{\partial c}{\partial q}}{\left| \frac{\partial c}{\partial q} \right|} \right) + \frac{\frac{\partial c}{\partial q}}{\left| \frac{\partial c}{\partial q} \right|} \langle \nabla g, \frac{\partial c}{\partial q} \rangle, \frac{\partial c}{\partial t} \right\rangle \right] dq + \int_a^b \left| \frac{\partial c}{\partial q} \right| \langle \nabla g, \frac{\partial c}{\partial t} \rangle dq \quad (5.19)$$

Cette équation peut être écrite comme:

$$\frac{1}{2}J'_2(t) = \int_a^b \left| \frac{\partial c}{\partial q} \right| \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, \nabla g - \frac{1}{\left| \frac{\partial c}{\partial q} \right|} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\frac{\partial c}{\partial q}}{\left| \frac{\partial c}{\partial q} \right|} \right) g - \frac{\frac{\partial c}{\partial q}}{\left| \frac{\partial c}{\partial q} \right|} \langle \nabla g, \frac{\frac{\partial c}{\partial q}}{\left| \frac{\partial c}{\partial q} \right|} \rangle \right\rangle dq \quad (5.20)$$

et en rappelant les définitions de T , N , et k , on obtient :

$$\frac{1}{2}J'_2(t) = \int_a^b \left| \frac{\partial c}{\partial q} \right| \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, \nabla g - \kappa g N - \langle T, \nabla g \rangle T \right\rangle dq. \quad (5.21)$$

En décomposant encore une fois ∇g sur la base $\langle N, T \rangle$, on obtient :

$$\frac{1}{2}J'_2(t) = \int_a^b \left| \frac{\partial c}{\partial q} \right| \left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, \langle \nabla g, N \rangle N - \kappa g N \right\rangle dq. \quad (5.22)$$

Ainsi la direction pour laquelle $J_2(t)$ diminue le plus rapidement est donnée par :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = (\kappa g - \langle \nabla g, N \rangle) N \quad (5.23)$$

Remarque: si $g \equiv 1$, l'équation précédente se réduit à $\frac{\partial c}{\partial t} = \kappa N$, résultat bien connu du flux à courbure moyenne (mean curvature motion or shortening flow). Dans ce cas, toute courbe initiale rétrécit en un temps fini selon une forme asymptotique circulaire jusqu'à devenir un point. (voir chapitre 3)

Le modèle de Caselles & al [27] peut être amélioré par l'addition d'un terme supplémentaire à l'équation (côté droit):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = (\kappa g - \langle \nabla g, N \rangle + \alpha g) N \quad (5.24)$$

L'intérêt principal de l'addition de " αg " à la vitesse est qu'il permet d'avoir une détection plus facile des objets non-convexes et une augmentation de la vitesse de convergence. Le terme $\alpha > 0$ doit être suffisamment grand afin que le coefficient $(\kappa + \alpha)$ garde un signe constant. Par conséquent la courbure peut avoir un signe quelconque et ainsi des formes non-convexes peuvent être détectées.

De plus les équations d'Euler-Lagrange associées à la fonctionnelle J_2 peuvent être écrites selon la formulation Eulérienne en utilisant l'approche des ensembles de niveaux (ce qui n'est pas le cas de la fonctionnelle J_1) d'où le principal intérêt de cette formulation.

8. Application de la méthode des ensembles de niveaux pour la détection des contours

De l'équation précédente, on peut déduire que la formulation en *level set* du modèle de Caselles et al.[27], donnée par l'équation (5.24), sera donnée par (voir équation 3-34):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left((\kappa + \alpha)g + \langle \nabla g, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \rangle \right) |\nabla u| \quad (5.25)$$

sachant que la courbure κ est donnée par $\kappa = \text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla I|) \left(\text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \alpha \right) |\nabla u| + \langle \nabla g, \nabla u \rangle \quad (5.26)$$

le terme d'arrêt a généralement la forme :

$$g = \frac{1}{1 + \|\nabla \hat{I}\|^p} \quad p = 1 \text{ ou } 2 \quad (5.27)$$

et \hat{I} est la version régularisée (image filtrée) de l'image originale I .

8.1. Discrétisation de l'équation de propagation obtenue par les ensembles de niveaux

Pour la discrétisation temporelle de l'équation (5-26) un schéma avancé (forward scheme) sera utilisé.

En ce qui concerne la discrétisation spatiale, il convient de signaler que l'équation (5-26) comporte trois termes de nature différente, un terme parabolique (le premier terme à droite) et deux autres termes de nature hyperbolique. Ces termes nécessitent bien évidemment des discrétisations différentes. D'une manière générale, on peut dire que les termes paraboliques peuvent être discrétisés par des schémas numériques centrés, alors que les termes hyperboliques nécessitent l'application de schéma numérique non oscillatoire upwind [10].

8.1.1. Discrétisation du premier terme

Considérons l'équation simplifiée suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \\ u(0, x, y) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (5.28)$$

Ce terme $\left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) |\nabla u| \right)$ a un effet de diffusion (comme l'équation de chaleur) et l'équation est de nature parabolique, par conséquent on utilisera des schémas numériques centrés pour sa discrétisation spatiale, ce qui donne :

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \sqrt{(\delta_x u_{i,j}^n)^2 + (\delta_y u_{i,j}^n)^2} K_{i,j}^n \quad (5.29)$$

Où $K_{i,j}^n$ est la courbure calculée à partir des différences centrées (voir l'équation (2-14)).

8.1.2. Evolution avec une vitesse constante

Considérons maintenant l'équation:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c |\nabla u| \\ u(0, x, y) = u_0(x, y) \end{cases}, \text{ où } c \text{ est une constante} \quad (5.30)$$

Cette équation, équivalente au deuxième terme $\alpha g(|\nabla I|) |\nabla u|$, décrit un mouvement dans la direction normale au front (la formulation Lagrangienne équivalente est donnée par $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, p) = c N(t, p)$, où N est le vecteur normale à la courbe $\Gamma(t)$). Ce terme est calculé par l'intermédiaire d'un schéma numérique non oscillatoire upwind donné par [10]:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \nabla^+ u_{i,j}^n \quad (5.31)$$

où

$$\nabla^+ u_{i,j}^n = \left[\max(\delta_x^- u_{i,j}^n, 0)^2 + \min(\delta_x^+ u_{i,j}^n, 0)^2 + \max(\delta_y^- u_{i,j}^n, 0)^2 + \min(\delta_y^+ u_{i,j}^n, 0)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.32)$$

8.1.3. Discrétisation du troisième terme

Le troisième terme $\langle \nabla g, \nabla u \rangle$ (équation d'advection) est résolu par l'utilisation d'un schéma de type upwind. On vérifie le signe de chaque composante de ∇g , et on construit le schéma upwind dans la direction appropriée. Le résultat est donné par :

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \left[\max((g_x)_{i,j}^n, 0) \delta_x^- u_{i,j}^n + \min((g_x)_{i,j}^n, 0) \delta_x^+ u_{i,j}^n + \max((g_y)_{i,j}^n, 0) \delta_y^- u_{i,j}^n + \min((g_y)_{i,j}^n, 0) \delta_y^+ u_{i,j}^n \right] \quad (5.33)$$

Ainsi le schéma global de la discrétisation de l'équation (4-26) est donné par :

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \left[g_{i,j} K_{i,j}^n \sqrt{(\delta_x u_{i,j}^n)^2 + (\delta_y u_{i,j}^n)^2} + \alpha (\max(g_{i,j}, 0) \nabla^+ + \min(g_{i,j}, 0) \nabla^-) u_{i,j}^n + \max((g_x)_{i,j}^n, 0) \delta_x^- u_{i,j}^n + \min((g_x)_{i,j}^n, 0) \delta_x^+ u_{i,j}^n + \max((g_y)_{i,j}^n, 0) \delta_y^- u_{i,j}^n + \min((g_y)_{i,j}^n, 0) \delta_y^+ u_{i,j}^n \right] \quad (5.34)$$

où $\nabla^- u_{i,j}^n$ est obtenue de $\nabla^+ u_{i,j}^n$ en remplaçant les signes plus par moins [10].

8.2. Besoin de réinitialisation

La fonction des ensembles de niveaux est définie comme une fonction de distance signée¹ possédant la propriété $|\nabla u| = 1$. Néanmoins, la discrétisation du premier terme (faite précédemment) peut entraîner un gradient ($|\nabla u|$) nul ou infini durant l'évolution ce qui introduira des erreurs de détection de contour. Pour résoudre ce problème on est obligé de recourir à une méthode de réinitialisation de la courbe qui assure l'importante propriété $|\nabla u| = 1$ [10].

En effet, l'existence du front signifie que la fonction distance des ensembles de niveaux a des parties positives et négatives. Cette propriété devrait être gardée durant les itérations afin

¹ c'est-à-dire que la fonction des ensembles de niveaux associe à chaque point la valeur de sa distance au point le plus proche du front et lui donne un signe positif si le point est à l'extérieur et négatif s'il est à l'intérieur des frontières (naturellement nulle sur les frontières).

de ne pas perdre le front. Pour illustrer ceci, nous allons traiter l'exemple correspondant au rétrécissement d'un cercle unitaire de deux dimensions. La fonction implicite définissant ce cercle à son état initial est :

$$v_0 = v(0, x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \quad (5.35)$$

Où v_0 est la fonction distance signée pour le cercle unitaire.

Dans ce cas, si on cherche la solution de l'équation (4-28) qui est invariante par rotation, sous la forme :

$$v(t, x, y) = \phi(t, \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (5.36)$$

On trouve à l'aide de l'outil *Maple* que la solution est :

$$v(t, x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2t} - 1 \quad (5.37)$$

Ce qui nous permet d'avoir :

$$\begin{aligned} \nabla v &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2t}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, & |\nabla v| &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2t}} \\ \frac{\nabla v}{|\nabla v|} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, & \operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{|\nabla v|}\right) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \quad (5.38)$$

On constate alors que les deux dernières équations ne sont pas définies à l'origine, et qu'effectivement un choc se produit en ce point. De plus, l'interface $\Gamma(t) = \{(x, y); v(t, x, y) = 0\}$ étant le cercle $x^2 + y^2 = 1 - 2t$ ceci implique que sur l'interface $|\nabla v|(t) = \sqrt{1 - 2t}$. C'est pourquoi $v(t, x, y)$ devient de plus en plus aplatie à mesure que le temps passe jusqu'à disparaître pour $t = \frac{1}{2}$ d'où le besoin de réinitialisation. La figure (IV.2) montre la fonction du gradient correspondant à l'évolution d'un cercle. On constate, effectivement, qu'elle diminue (tend vers 0) à mesure que le temps passe.

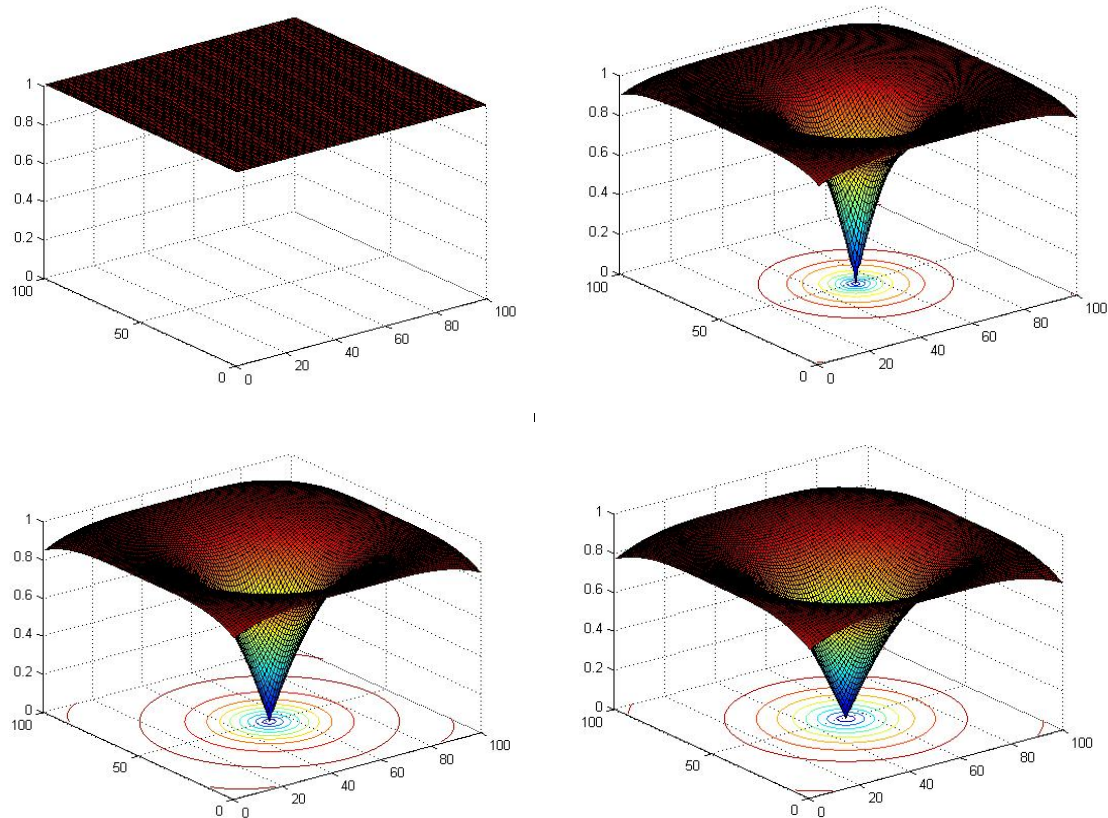


Figure V.2 Besoin de réinitialisation (représentation du gradient).

Il y a plusieurs approches (par exemple [13]) dans la littérature pour la réinitialisation de la fonction d'ensemble de niveau. La fonction d'ensemble de niveau est généralement mise à jour par l'équation suivante :

$$\phi_t = \text{signe}(\phi)(1 - |\nabla\phi|) \quad (5.39)$$

Pour n'importe quelle fonction initiale ϕ , résoudre l'équation aux dérivées partielles (5.39) nous donnera une nouvelle fonction ϕ telle que $|\nabla\phi| = 1$ (donc obtention d'une fonction distance), puisque la convergence est atteinte lorsque le second terme est nul.

Remarque :

- Il est préférable de lancer l'exécution numérique dans la bande étroite qui entoure le front ce qui économisera le temps de calcul.

- La fonction distance signée fait partie des représentations implicites. Elle est régulière et possède la propriété $|\nabla u| = 1$ qui la rend attractive. Dans ce cas, les équations se simplifient énormément.

Par exemple, l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \\ u(0, x, y) = u_0(x, y) \end{cases}$$

devient l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} \\ u(0, x, y) = u_0(x, y) \end{cases}$$

qui est nettement plus facile à calculer que l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_x^2 u_{yy} + u_y^2 u_{xx} - 2 u_x u_y u_{xy}}{(u_x^2 + u_y^2)}$$

8.3. Discussion

L'utilisation de la méthode des ensembles de niveaux pour la détection de contours présente plusieurs avantages par rapport aux méthodes de détection précédentes (snake, GVF) tels que le changement de topologie, l'implémentation présente moins de problèmes ...

Néanmoins, cette méthode présente quelques inconvénients qui sont :

- La courbe initiale doit être une fonction distance signée.
- Un temps de traitement assez grand du fait que l'évolution se fait avec une constante temporelle très petite.

Ces inconvénients ont été éliminés grâce la méthode des ensembles de niveaux sans-réinitialisation que nous allons traiter.

9. Méthode des ensembles de niveaux sans-réinitialisation

9.1. Principe

Comme expliqué auparavant, la fonction des ensembles de niveaux doit, lors de son évolution, approximer la fonction distance signée c'est à dire que le gradient de la courbe doit garder une valeur unitaire ($|\nabla\phi| = 1$). On sait par ailleurs que n'importe quelle fonction ϕ ayant un gradient unitaire $|\nabla\phi| = 1$ n'est autre que la somme d'une fonction distance signée et d'une constante. C'est à partir de cette constatation que Chunming Li[28] s'est basé pour définir une méthode permettant de satisfaire la condition précédente et de ce fait éliminer le besoin de réinitialisation. Pour ce faire, il a défini une métrique mesurant le degré de convergence de la fonction des ensembles de niveaux vers la fonction distance. Cette métrique est donnée par :

$$P(\phi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (|\nabla\phi| - 1)^2 dx dy \quad (5.40)$$

A partir de $P(\phi)$, la nouvelle formule d'énergie sera donnée par :

$$\varepsilon(\phi) = \mu P(\phi) + \varepsilon_{g,\lambda,v}(\phi) \quad (5.41)$$

où $\mu > 0$ est un paramètre positif contrôlant l'effet d'écart de ϕ par rapport à la fonction de distance signée.

$\varepsilon_{g,\lambda,v}(\phi)$ est l'énergie externe qui dépend des données de l'image, cette énergie attire l'ensemble de niveau zéro vers les objets désirés et est définie comme suit :

$$\varepsilon_{g,\lambda,v}(\phi) = \lambda L_g(\phi) + v A_g(\phi) \quad (5.42)$$

où $\lambda > 0$ et v sont des constantes, et

$$L_g(\phi) = \int_{\Omega} g \delta(\phi) |\nabla\phi| dx dy \quad (5.43)$$

$$A_g(\phi) = \int_{\Omega} g H(-\phi) dx dy \quad (5.44)$$

où δ est la fonction Dirac, et H celle de Heaviside définie par $H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Afin de mieux comprendre la première fonction $L_g(\phi)$, on suppose que le niveau zéro de ϕ est représenté par une courbe différentiable $C(p), p \in [0,1]$. L'écriture précédente de $L_g(\phi)$ devient :

$$L_g(\phi) = \int_0^1 g(C(p)) |C'(p)| dp \quad (5.45)$$

Cette intégrale représente le calcul de la longueur de la courbe $C(p)$ suivant la métrique $ds = g(C(p)) |C'(p)| dp$ (calcul de la longueur suivant un relief dépendant de l'image à traiter). Minimiser $L_g(\phi)$ revient alors à minimiser la longueur de la courbe $C(p)$.

En ce qui concerne l'énergie $A_g(\phi)$, on peut constater pour $g = 1$ que la fonctionnelle $A_g(\phi)$ donne pour résultat la surface de la région $\Omega_{\bar{\phi}} = \{(x, y) | \phi(x, y) < 0\}$. Cette fonctionnelle peut être ainsi vue comme une surface pondérée de $\Omega_{\bar{\phi}}$.

Le coefficient ν de l'équation (5.42) dépend de la position relative du contour initial par rapport à l'objet désiré. Il prend une valeur positive, lorsque le contour initial est placé en dehors de l'objet d'intérêt (minimiser la surface de $\Omega_{\bar{\phi}}$), et négative si le contour initial est placé à l'intérieur des contours de l'objet d'intérêt (maximiser la surface de $\Omega_{\bar{\phi}}$).

Le but consiste alors à évoluer la fonction ϕ de façon à minimiser l'énergie $\varepsilon(\phi)$. L'une des méthodes qui se propose à nous est la méthode du flux du gradient (gradient flow) qui conduit à un état stable minimisant l'énergie désirée. L'évolution se fera donc suivant l'équation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} \quad (5.46)$$

où l'on obtient après calculs que :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} = -\mu \left[\Delta \phi - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right] - \lambda \delta(\phi) \operatorname{div} \left(g \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - \nu g \delta(\phi) \quad (5.47)$$

où Δ est l'opérateur Laplacien.

L'équation d'évolution (5.46) devient alors:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu \left[\Delta \phi - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right] + \lambda \delta(\phi) \operatorname{div} \left(g \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) + \nu g \delta(\phi) \quad (5.48)$$

Le premier terme à droite résulte de la dérivation de la fonctionnelle $\mu P(\phi)$, il permet de maintenir $|\nabla \phi| = 1$ durant toute l'évolution de la fonction d'ensemble de niveaux. Le second et le troisième terme résultent, quant à eux, des fonctionnelles $\lambda L_g(\phi)$ et $\nu A_g(\phi)$ et tendent à diriger le niveau zéro de la fonction vers les contours des objets d'intérêt.

Dans ce qui suit nous allons nous intéresser à l'implémentation de cette méthode ainsi que sa numérisation.

9.2. Implémentation

9.2.1. Schéma numérique

Du fait que les termes de l'équation (5.48) sont des termes de diffusion (de nature parabolique) l'utilisation du schéma *upwind* ne sera plus nécessaire. On utilisera ainsi un schéma de différence centrée pour la discrétisation spatiale, et un schéma avancé (forward scheme) pour celle temporelle. La discrétisation de l'équation (5-46) devient alors :

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + \tau L(\phi_{i,j}^n) \quad (5.49)$$

où $L(\phi_{i,j}^n)$ est l'approximation du terme de droite dans l'équation (5-49) avec le schéma de différence décrit précédemment.

Le pas temporel τ peut prendre des valeurs largement plus grandes (allant jusqu'à $\tau = 100$) que celles utilisées dans la méthode des ensembles de niveaux traditionnelles. Toutefois, l'expérience nous a montré qu'il faut garder $\tau\mu < \frac{1}{4}$ pour assurer la stabilité de l'évolution [28].

Remarque :

L'utilisation d'un pas temporel assez grand peut accélérer de manière significative l'évolution de la courbe, néanmoins, ceci se fait au détriment de la qualité des contours obtenus. Il y a donc un compromis entre rapidité d'évolution et qualité des contours obtenus.

On note enfin que la fonction Dirac est approximée, lors de son implémentation, par la fonction:

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \varepsilon \\ \frac{1}{2 * \varepsilon} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{\varepsilon}\right) \right], & |x| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (5.50)$$

9.2.2. Initialisation flexible de la fonction d'ensemble de niveaux

Dans le modèle des ensembles de niveaux traditionnels, la courbe initiale devait être une fonction de distance signée pour que la fonction de réinitialisation puisse converger. Ceci n'est plus le cas pour la méthode des ensembles de niveaux sans-réinitialisation où la courbe initiale n'a plus besoin d'être une fonction de distance. Dans notre étude, ainsi que notre implémentation, la courbe initiale a été définie de la manière suivante :

$$\phi_0(x, y) = \begin{cases} -\rho, & (x, y) \in \Omega_0 - \partial\Omega_0 \\ 0, & (x, y) \in \partial\Omega_0 \\ \rho, & (x, y) \in \Omega - \Omega_0 \end{cases} \quad (5.51)$$

Où :

ρ est une constante ($\rho > 2\varepsilon$, où ε est la largeur de la fonction Dirac implémentée)

Ω est le domaine de l'image I

Ω_0 est un sous domaine de l'image I

$\partial\Omega_0$ représente les points du contour de Ω_0

9.3. Discussion

Dans cette partie nous avons abordé une nouvelle méthode variationnelle qui comme son nom l'indique élimine complètement le besoin de réinitialisation. De plus, l'implémentation de cette méthode est de loin plus facile à implémenter que celle des ensembles de niveaux traditionnelle du moment qu'il n'est utilisé que des schémas de différences centrés. Le temps du traitement a aussi été amélioré grâce à l'utilisation d'un pas temporel assez grand et ce en gardant une évolution stable et une bonne qualité des contours obtenus.

Nous allons dans ce qui suit présenter quelques exemples de détection de contour par application des méthodes des ensembles de niveaux traditionnels et sans-réinitialisation sur des images synthétiques, réelles et bruitées.

10. Exemple de segmentation d'image

10.1. Segmentation des images synthétiques

10.1.1. Image contenant plusieurs éléments

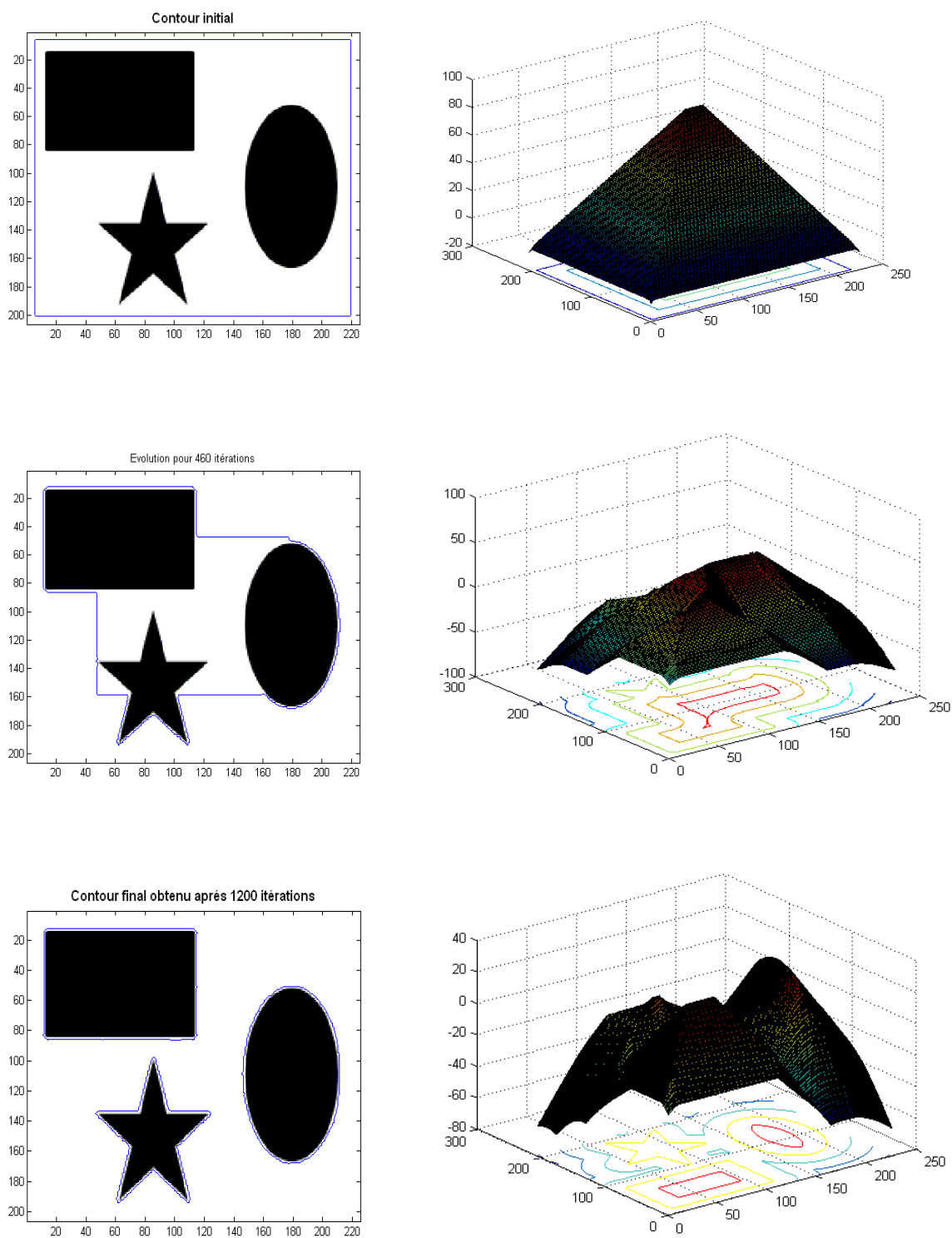


Figure V-3 Segmentation d'une image synthétique par les ensembles de niveaux

La figure montrée ci-dessus représente la segmentation d'une image synthétique non bruitée (225x206 pixels) qui contient différentes formes géométriques. La fonction initiale $\phi_0(x, y)$ est donnée sous forme d'un rectangle. La courbe est réinitialisée toute les 11 itérations, le pas temporel est égal à 0.05. Nous pouvons remarquer que la courbe se rétrécit jusqu'à obtenir les contours voulus après 1200 itérations (le nombre d'itérations est grand du fait qu'on a pris un petit pas temporel). Les courbes en 3D représentent l'inverse de la fonction distance signée. Ce même résultat peut s'obtenir plus rapidement par la méthode des ensembles de niveaux sans réinitialisation où le nombre d'itérations nécessaires est de 360 itérations pour un pas temporel égal à 5.

10.1.2. Image contenant des objets imbriqués

Pour détecter plusieurs formes imbriquées l'une dans l'autre on a utilisé une courbe d'initialisation composée de plusieurs cercles de rayon 2 pixels. Ces derniers vont évoluer jusqu'à épouser les contours de l'image. L'image représente un rectangle comportant deux trous l'un ayant une forme rectangulaire alors que l'autre est de forme elliptique. La simulation montre que les cercles augmentent et fusionnent. Les bords des deux rectangles sont obtenus après 2000 itérations (du fait qu'on a pris un petit pas temporel égal à 0.05). L'utilisation de la méthode des ensembles de niveaux sans réinitialisation, quant à elle, nécessite moins d'itérations (300 itérations) du fait que le pas temporel peut prendre des valeurs plus importantes ($\delta t = 5$ dans notre cas).

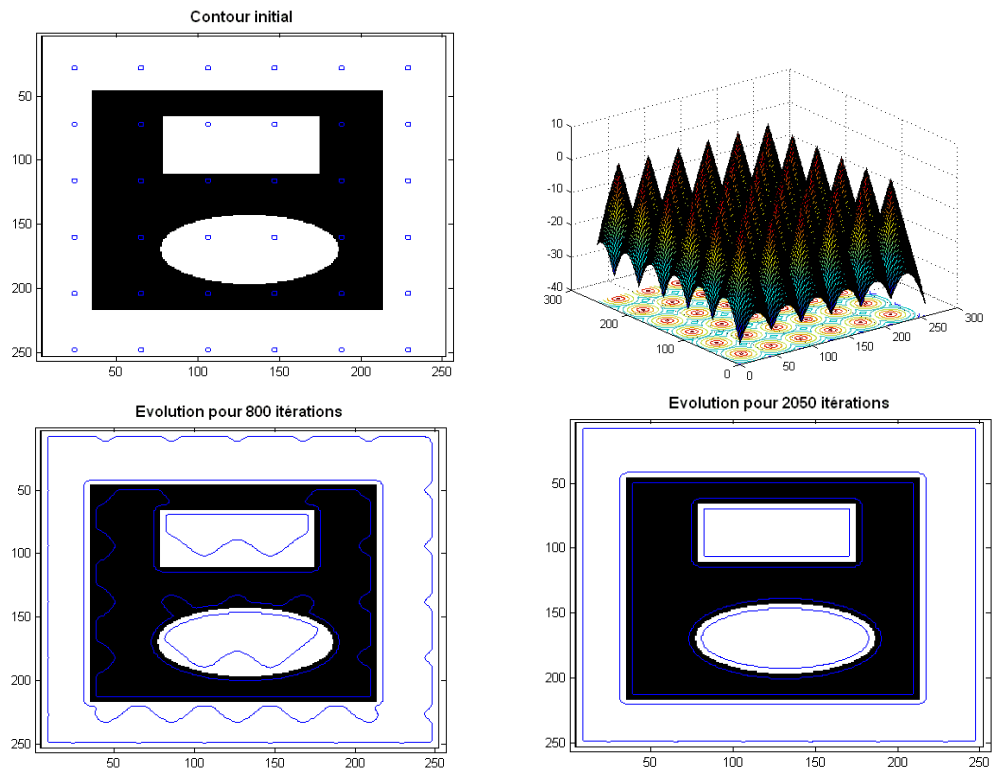


Figure V-4 Segmentation d'une image comportant des objets imbriqués
par les ensembles de niveaux

10.1.3. Image bruitée

Nous appliquons maintenant la méthode des ensembles de niveaux sans réinitialisation sur quelques images synthétiques bruitées (bruit gaussien avec variance=0.01). La figure (IV-5) représente une image (206x225 pixels). Nous prenons un rectangle comme fonction d'initialisation. Il commence à se déformer et atteint les bords de l'objet lorsque le nombre d'itérations est égal à 650 pour un filtrage Gaussien ($\sigma = \sqrt{3}$) et 500 pour un filtrage de Perona-Malik. On constate que les contours résultants ne sont pas très lisses à cause du bruit.

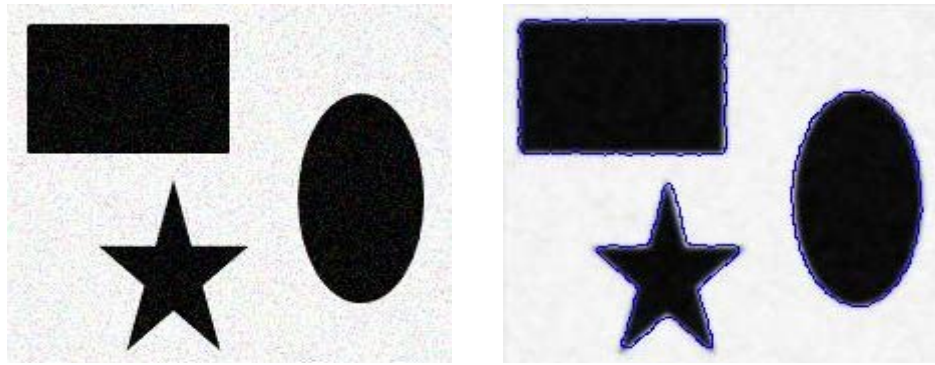
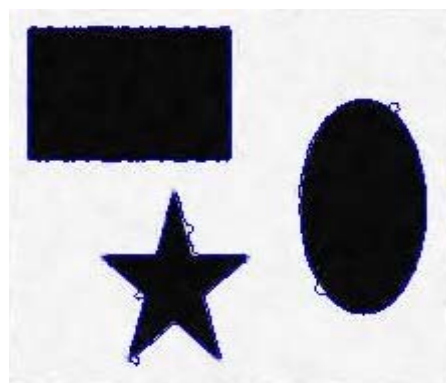


Image bruitée

Détection après filtrage Gaussien

(10 itérations, $\delta t = 0.15$)



Détection après filtrage de Perona-Malik (40 itérations, $\delta t = 0.1$)

Figure V-5 segmentation d'une image bruitée après un filtrage Gaussien et de Perona-Malik

On constate aussi que la segmentation d'une image (100*94 pixels) présentant un objet de grandeur considérable est de meilleure qualité car les particules du bruit affectent moins les contours (Figure IV-6)

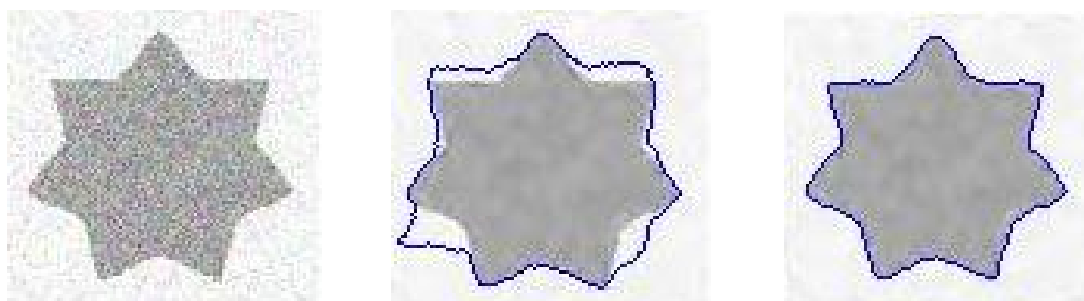


Image bruitée

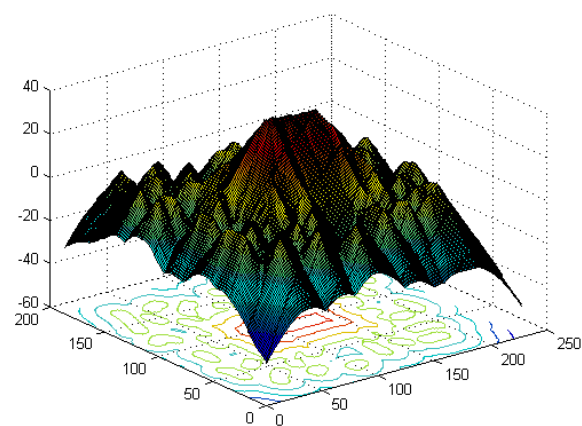
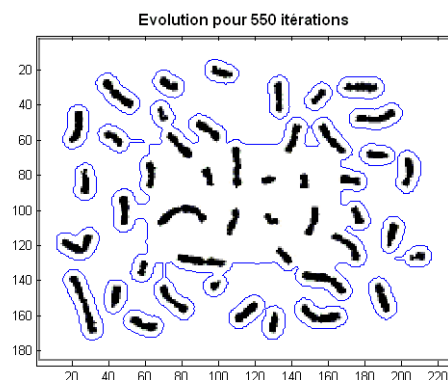
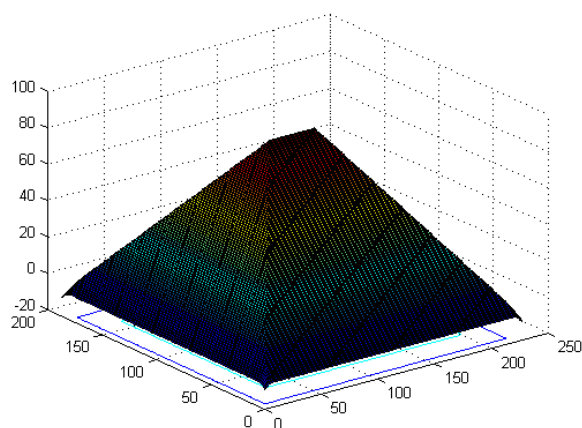
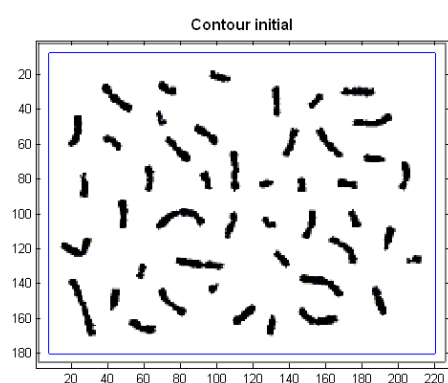
50 itérations

100 itérations

Figure V-6 segmentation d'une image bruitée après un filtrage de Perona-Malik (5 itérations, $\delta t = 0.15$, $K=2$)

10.1.4. Images médicales

Dans cette partie, on applique les méthodes des ensembles de niveaux étudiées sur une image médicale de chromosomes de taille 412*309 pixels. Les résultats obtenus dans ce cas sont très satisfaisants et on a pu entourer les différents chromosomes. On signale aussi que le traitement en utilisant la méthode sans réinitialisation est plus rapide que celui traditionnel car il converge en moins d'itérations (1050 itérations pour la méthode traditionnelle et 400 pour celle sans réinitialisation).



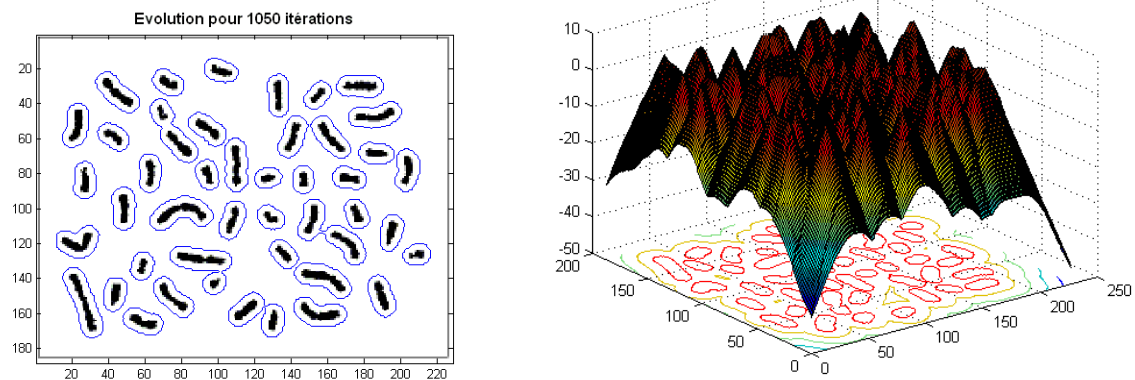


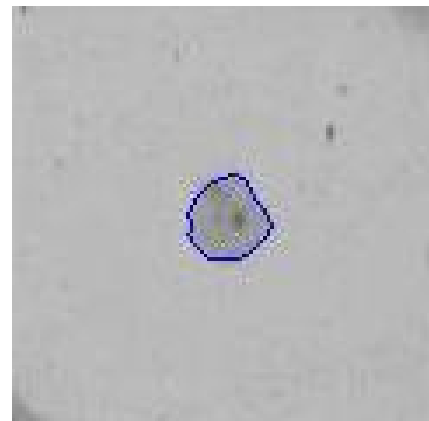
Figure V-7 Segmentation d'une image de chromosomes par les ensembles de niveaux

En appliquant ces méthodes sur une image comportant une cellule on constate que la méthode traditionnelle détecte plus de composants ce qui n'est pas le cas pour celle sans réinitialisation. Ceci est dû au pas temporel qui, contrairement à la méthode traditionnelle, est élevé pour la méthode sans réinitialisation ce qui entraîne une évolution rapide et de ce fait ignore les composants présentant un faible gradient. En effet, l'application de la méthode sans réinitialisation avec un petit pas temporel ($\delta t=0.2$) montre qu'on détecte plus de composants, cependant, ceci se fait au prix d'un plus grand temps de calculs (260 itérations pour $\delta t=5$ et 1000 pour $\delta t=0.2$).

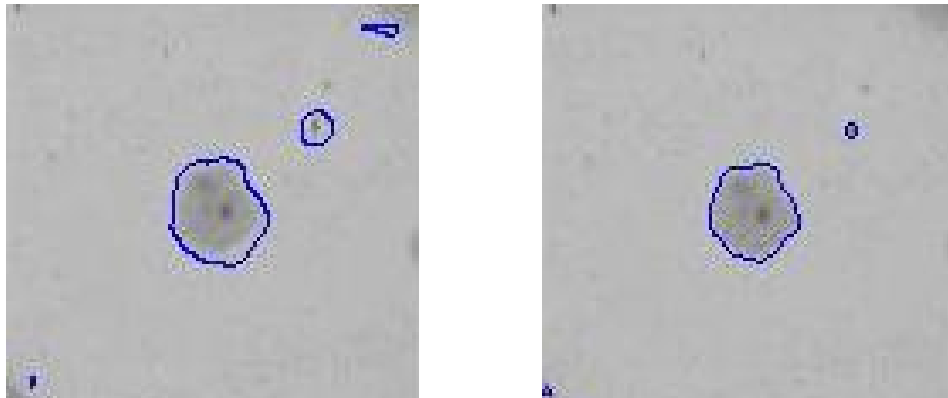
Finalement, on note qu'une conversion d'image a eu lieu puisque l'image originale est en couleur et que le traitement étudié concerne celle en niveau de gris.



a) Image originale



b) Méthode sans réinitialisation ($\delta t=5$)



c) Méthode Traditionnelle ($\delta t=0.05$) d) Méthode sans réinitialisation ($\delta t=0.2$) avec filtrage Gaussien ($\sigma=1$)

Figure V-8 Segmentation d'image cellulaire par les ensembles de niveaux

La figure V-9 présente quant à elle le résultat de la détection de contour par la méthode des ensembles de niveaux sans réinitialisation. Le traitement a été précédé par l'utilisation de l'opérateur de Catté ($N=38$, $\delta t=0.15$, $K=1$, $\sigma=2.5$). Le résultat final est obtenu après 600 itérations avec un pas temporel de $\delta t=6$.

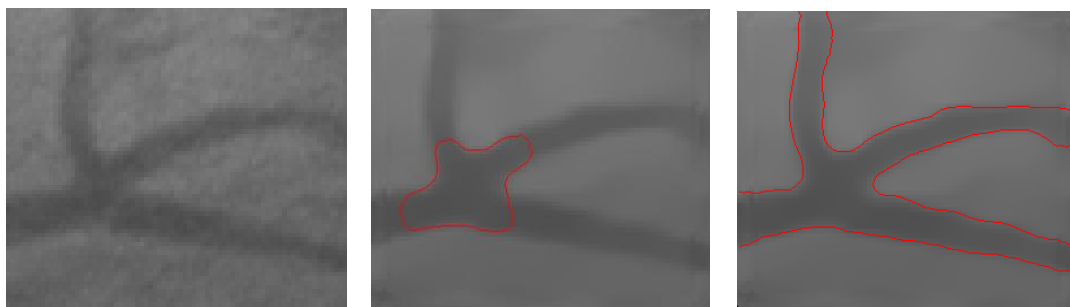


Figure V-9 Segmentation d'une image coronaire par les ensembles de niveaux

11. Conclusions

Nous avons introduit en premier dans ce chapitre le principe des contours actifs. L'idée principale des contours actifs consiste à modéliser le problème comme un problème de minimisation, cependant, cette approche présente plusieurs inconvénients. Afin de pouvoir pallier à ces effets négatifs, on a eu recours aux contours actifs géodésiques. Ce choix est justifié par le fait que l'effet régularisant les contours actifs provient des flots basés sur la courbure qui sont obtenus seulement avec les autres termes. On essaye ainsi de localiser les points où le gradient de l'image est élevé tout en conservant une certaine régularité de la courbe.

Par la suite, la méthode des ensembles de niveaux a été exposée, cette méthode présente plusieurs avantages par rapport aux méthodes précédentes telles les snakes ou le GVF, elle permet notamment le changement de topologie, nous avons vu aussi que l'implémentation présente moins de problèmes. Cependant, cette méthode présente deux problèmes majeurs qui sont le besoin de réinitialiser la fonction distance, ajouté à cela un temps de traitement assez conséquent dû au fait que le pas temporel est assez petit.

Enfin, nous avons étudié la méthode des level-set sans réinitialisation qui a permis de remédier au problème de la fonction distance. De plus, l'implémentation de cette méthode est beaucoup plus facile car nous n'avons utilisé que des schémas centrés. Le temps de traitement a été sensiblement amélioré grâce à l'utilisation d'un pas temporel de loin plus grand.

Pour clore ce chapitre, nous avons présenté quelques exemples de détection de contours par application des méthodes des ensembles de niveaux traditionnels et sans-réinitialisation sur des images synthétiques, réelles et bruitées. Ceci nous a permis de tirer des conclusions quant aux avantages apportées par ces deux méthodes notamment le changement de topologie, la facilité d'implémentation ainsi que la réduction du temps de traitement. De plus, on n'omettra pas de signaler que la méthode des ensembles de niveaux nous permet d'avoir directement la surface des objets (ou cellules) et ceci en comptant le nombre de valeurs négatives de la fonction ϕ .

CHAPITRE VI

PRESENTATION DU LOGICIEL EASYLEVSET

1. Introduction

EasyLevSet, le logiciel que nous avons conçu, regroupe la majorité des fonctions de traitement d'image en niveau de gris. Il permet ainsi de compléter le travail théorique en fournissant un outil de travail simple à utiliser et réalisant les différentes opérations nécessaires allant de la propagation des courbes et le filtrage jusqu'à la segmentation d'image en utilisant les méthodes classiques et les ensembles de niveaux. Cette interface a été réalisée avec l'outil « guide » de Matlab [29].

2. Organisation générale

Le logiciel s'est voulu un environnement convivial pour l'utilisateur avec des applications simples à exécuter. L'interface graphique est organisée de manière hiérarchique avec un menu général comportant 6 menus « fichier » permettant ainsi un regroupement selon l'orientation ou le domaine d'intérêt.

Les six menus sont :

- File : fonctions globales permettant au logiciel d'interagir avec les données de l'ordinateur.
- Propagation : permet de faire évoluer des courbes par la méthode des ensembles de niveaux.
- Filtrage : présentant deux types de filtres, par masque ou en utilisant les équations aux dérivées partielles.
- Segmentation : regroupant les opérateurs de segmentation à 1 et 2 dérivée ainsi que l'opérateur optimal de Canny
- Segmentation par EDP : regroupant les deux méthodes de segmentation par ensembles de niveaux (traditionnel et sans réinitialisation)
- Help : fournissant les renseignements nécessaires pour le bon fonctionnement du logiciel.



Figure VI.1 Présentation de EasyLevSet

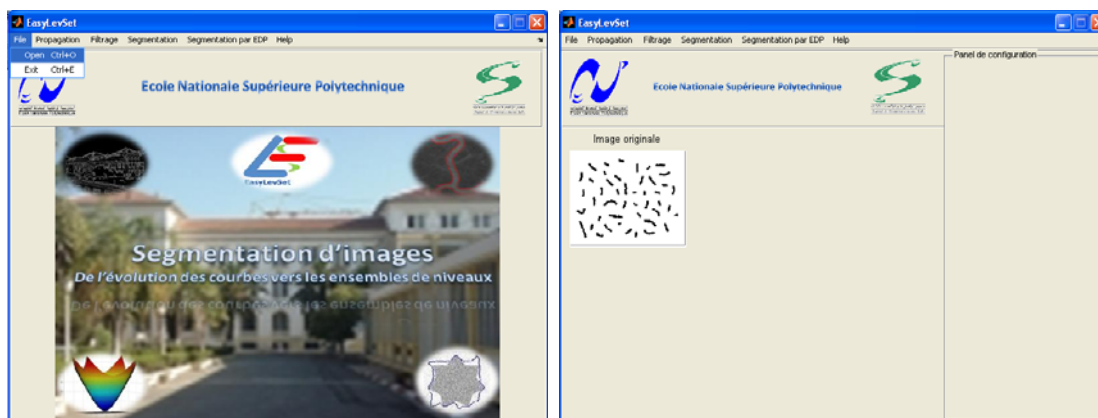
3. La barre des menus

3.1. Menu « File »

Il comporte deux sous-menus (voir figure VI.2) :

- Open : Cette icone permet d'ouvrir l'image à traiter en ouvrant une boîte de dialogue, son exécution se fait soit en cliquant directement sur son item ou en tapant les touches de raccourci suivantes « Ctrl + O ».
- Exit : Fermeture de l'application, elle s'exécute soit en cliquant directement sur son item ou en tapant les touches de raccourci suivantes « Ctrl + E ».

Remarque : le menu Save As... n'a pas été ajouté du fait que l'image traitée est imprimable en figure fournissant ainsi la possibilité de la sauvegarder, lui donner un titre, une légende ...



a) Présentation du menu File

b) Ouverture d'une image

Figure VI.2 Menu « File »

3.2. Menu « Propagation »

Ce menu permet d'appliquer la méthode des ensembles de niveaux sur des courbes données par des images. Il permet ainsi d'introduire de manière pédagogique cette méthode en montrant les différentes possibilités d'évolution d'une courbe donnée.

On distingue quatre sous-menus représentant chacun une direction de propagation :

- Suivant la normale : cette icône permet de faire évoluer la courbe suivant la direction de sa normale avec une vitesse spécifiée par l'utilisateur. L'exécution de cette instruction offre à l'utilisateur le choix de plusieurs facteurs qui sont le pas temporel, le nombre d'itérations à effectuer ainsi que la vitesse de propagation. La vitesse est donnée dans ce cas par :

$$\vec{v} = a \vec{N} \quad (6.1)$$

- Suivant un vecteur : cette icône permet de faire évoluer la courbe suivant la direction d'un vecteur spécifié par l'utilisateur. ce dernier peut aussi choisir le pas temporel ainsi que le nombre d'itérations à effectuer. La vitesse est donnée dans ce cas par :

$$\vec{v} = V_x \vec{o\hat{x}} + V_y \vec{o\hat{y}} \quad (6.2)$$

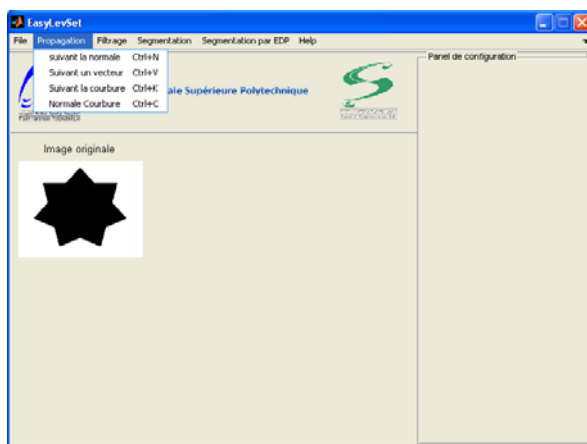
- Suivant la courbure : cette icône permet de faire évoluer la courbe suivant la direction de la normale avec une vitesse proportionnelle à la courbure. L'utilisateur doit alors

introduire le facteur multiplicatif de la courbure α , le pas temporel ainsi que le nombre d'itérations à effectuer. La vitesse est donnée dans ce cas par :

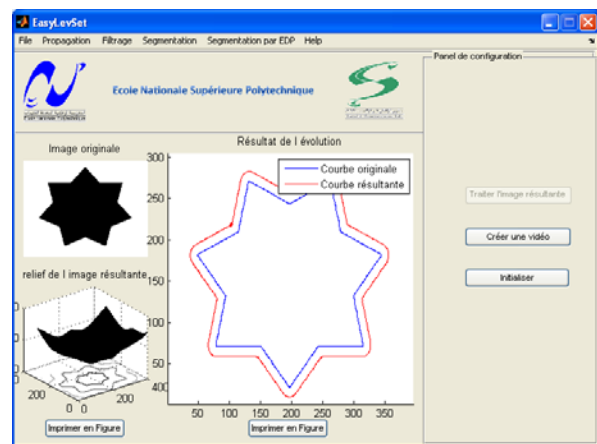
$$vitesse = \alpha * courbure \vec{N} \quad (6.3)$$

- Normale-Courbure : cette dernière icône regroupe la propagation suivant la normale et la courbure. L'utilisateur doit alors introduire le facteur multiplicatif de la courbure α , la vitesse suivant la normale, le pas temporel ainsi que le nombre d'itérations à effectuer. La vitesse est donnée dans ce cas par :

$$vitesse = \alpha * courbure \vec{N} + V_x \vec{o\hat{x}} + V_y \vec{o\hat{y}} \quad (6.4)$$



a) Présentation du Menu Propagation



b) résultat d'une propagation
suivant la normale

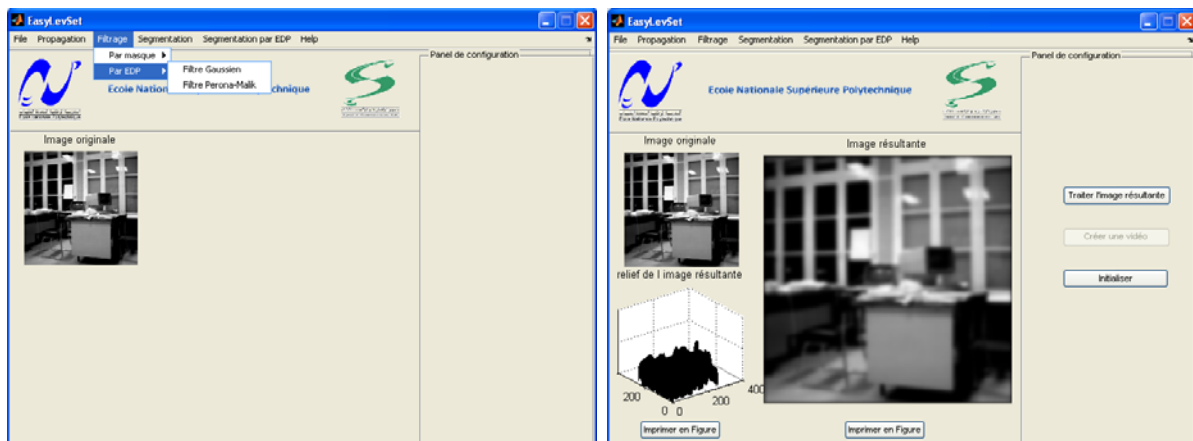
Figure VI.3 Menu « Propagation »

3.3. Menu « Filtrage »

Ce menu regroupe deux types de filtres qui sont :

- Filtrage par masque : ce menu se divise en trois sous-menus :
 - Filtre Moyenneur: ce filtre applique un masque moyennneur sur l'image sélectionnée. L'utilisateur doit introduire la taille du masque « u » (masque de taille $u*u$).
 - Filtre Gaussien : ce filtre applique un masque gaussien sur l'image sélectionnée. L'utilisateur doit introduire l'écart-type de la gaussienne « sigma » qui permet de déterminer la taille du masque à appliquer ($11 \text{ sigma} * 11 \text{ sigma}$).

- Filtre Exponentiel : ce filtre applique un masque exponentiel sur l'image sélectionnée. L'utilisateur doit introduire l'écart type « sigma » qui permet de déterminer la taille du masque à appliquer ($11\sigma * 11\sigma$).
- Filtrage par EDP : ce menu comporte les méthodes de filtrage étudiées dans le chapitre IV. Il se divise alors en deux sous-menus :
 - Filtre Gaussien : applique un filtre Gaussien sur l'image sélectionnée. Ce filtre s'obtient en faisant évoluer l'image initiale suivant une certaine équation aux dérivées partielles (équation (4.1)). Ce filtre nécessite l'introduction du pas temporel « dt » et du nombre d'itérations « N » par l'utilisateur.
 - Filtre de Perona-Malik : Ce filtre revient à appliquer l'équation (4.13) (ou l'équation (4.11) dans le cas où sigma est nul) sur l'image sélectionnée. L'exécution de cette instruction nécessite l'introduction de plusieurs paramètres qui sont :
 - ✓ Le pas temporel « δt »
 - ✓ le nombre d'itérations « N »
 - ✓ le choix de la fonction $c(t)$
 - ✓ le paramètre « K »
 - ✓ l'écart type « sigma » (ce paramètre est facultatif)



a) Présentation du Menu Filtrage

b) résultat d'un filtrage Gaussien

Figure VI.4 Menu « Filtrage »

3.4. Menu « Segmentation »

Ce menu fournit trois classes d'opérateurs de segmentation (voir figure VI.5) :

- Dérivée première : il englobe les opérateurs de : Prewitt, Sobel et Roberts. Pour chacun de ces opérateurs l'utilisateur doit introduire le paramètre de seuil « S » qui représente le seuil minimal au dessus duquel la valeur du gradient donne un contour, en d'autres termes si la valeur du gradient, pour une région donnée, est supérieure à « S », cette dernière fera partie du contour détecté.
- Dérivée seconde : il englobe les opérateurs du Laplacien et du Laplacien de la Gaussienne qui revient à appliquer à l'image le Laplacien de la gaussienne et de ce fait il permet de filtrer l'image avant la segmentation. Pour chacun de ces opérateurs l'utilisateur doit introduire le paramètre de seuil « S » qui représente le seuil maximal au dessous de laquelle la valeur de la deuxième dérivée peut être assimilée à zéro.
- Opérateur optimal : comportant le filtre de Canny qui nécessite l'introduction de la valeur du seuil « S ».

Remarque :

Il est conseillé de suivre les valeurs du seuil indiqué entre parenthèse lors de l'exécution de ces différentes méthodes.

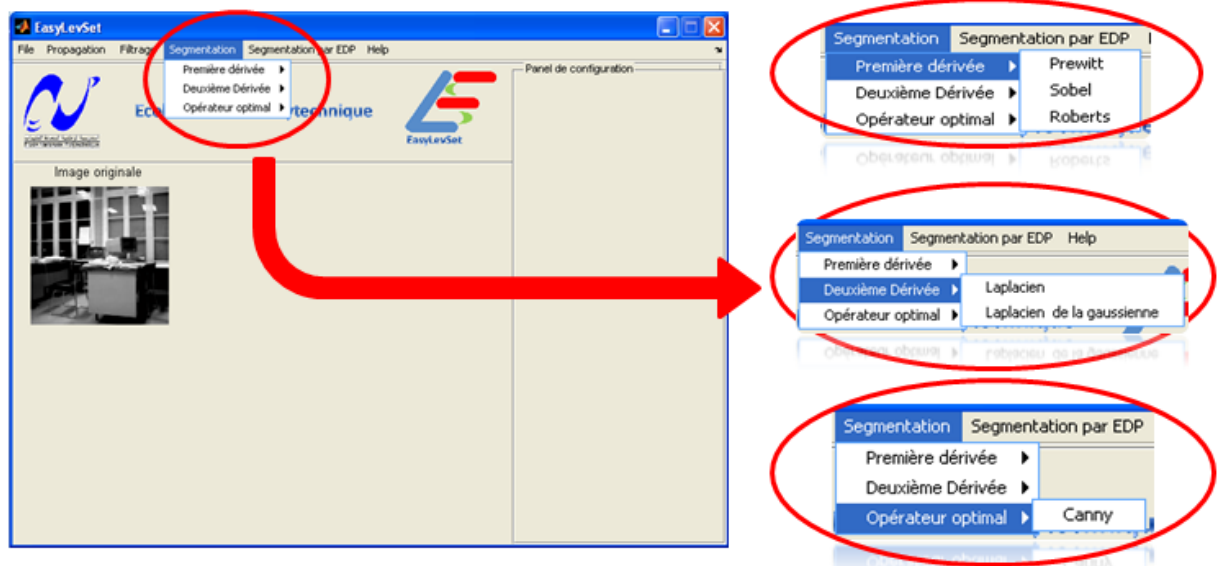


Figure VI.5 : Menu « Segmentation »

3.5. Menu « Segmentation par EDP »

Ce menu englobe les deux méthodes de segmentation par les ensembles de niveaux étudiés précédemment (voir figure VI.6) :

- *Level set* : Ce menu permet d'appliquer la méthode des ensembles de niveaux traditionnels sur l'image sélectionnée. L'utilisateur doit dans ce cas introduire le nombre d'itérations à effectuer tout en choisissant la courbe initiale à évoluer, qui peut être :
 - Une courbe composée de plusieurs cercles (conseillée pour les images comportant des objets imbriqués)
 - Une courbe carrée
 - Une courbe introduite manuellement (elle peut soit grandir ou rétrécir suivant le choix de l'utilisateur)
- *Level set sans réinitialisation* : Ce menu permet d'appliquer la méthode des ensembles de niveaux sans réinitialisation sur l'image sélectionnée. L'utilisateur doit dans ce cas introduire le pas temporel « δt », le nombre d'itérations à effectuer « N » et la courbe initiale à évoluer qui peut être :

- Une courbe composée de plusieurs cercles
- Une courbe carrée
- Une courbe introduite manuellement (elle peut soit grandir ou rétrécir suivant le choix de l'utilisateur)

Remarque :

Pour ces deux méthodes, l'utilisateur dispose d'un bouton permettant de précéder ou pas la détection par un filtrage. Dans le cas où il y a filtrage, l'utilisateur doit aussi introduire les paramètres du filtre choisi avant de lancer l'exécution.

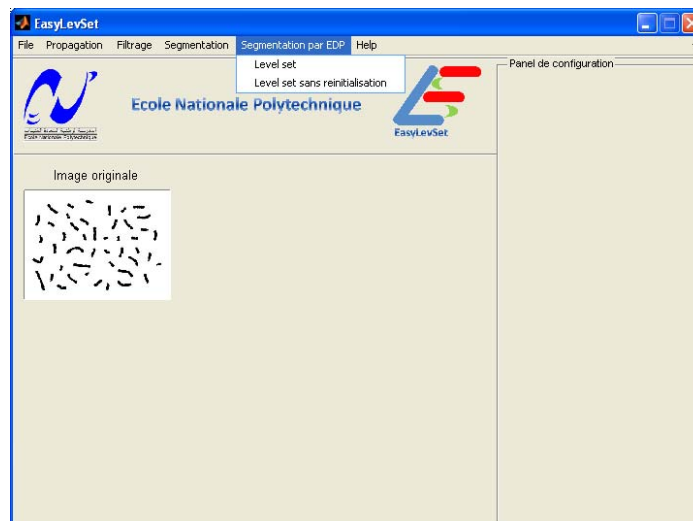


Figure VI.6 : Segmentation par EDP

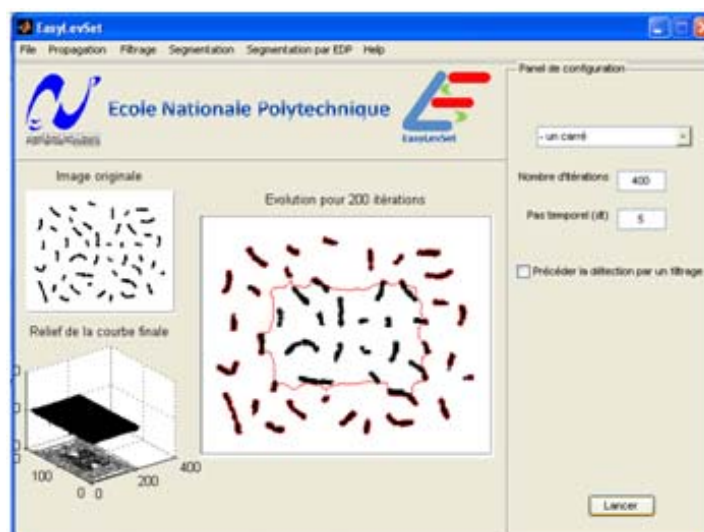


Figure VI.7 : Segmentation par EDP (lors de l'exécution)

3.6. Menu « Help »

Ce menu propose trois sous menus :

- Le premier consiste en « Help interactif » qui offre des vidéos composées chacune d'une suite d'images montrant les étapes à suivre pour le traitement voulu. L'utilisateur dispose alors de cinq choix correspondant aux fichiers menus disponibles ce qui lui offre un gain de temps en allant directement vers l'aide voulue.

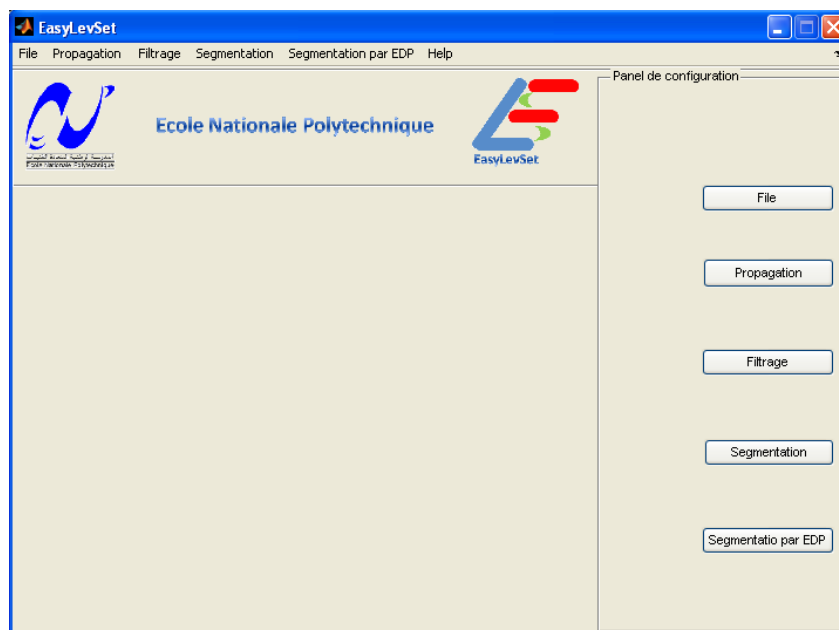


Figure VI.8 : Menu « Help interactif »

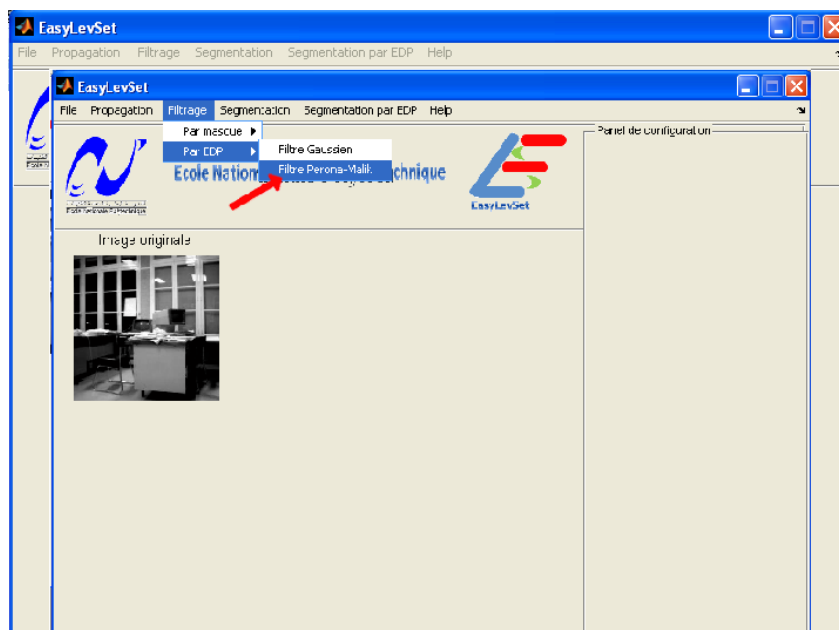
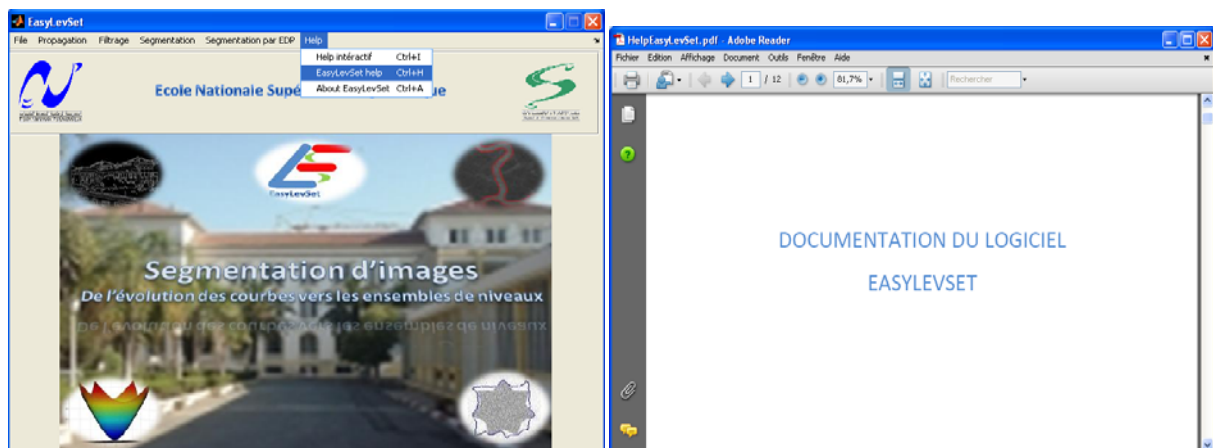


Figure VI.9 : Help interactif, image de la vidéo du Filtrage

- Le second est le Help fourni en document PDF. Ce document explique le mode de fonctionnement du logiciel ainsi que les différentes étapes à suivre pour réaliser l'application voulue. Des exemples y sont fournis afin de faciliter l'utilisation du logiciel et de mieux illustrer les commandes. Ainsi, même un amateur pourra facilement s'y adapter.



a) Présentation du Menu « EasyLevSet help » b) document d'aide donné en PDF

Figure VI.10 Menu « EasyLevSet help »

- Le troisième sous-menu « About » fournit des informations sur les réalisateurs du logiciel.



Figure VI.11 About

4. Conclusion

Cette interface complète le travail théorique réalisé en lui fournissant des outils de propagation de courbe, de traitement et de segmentation d'image. Ces différentes fonctions sont faciles à utiliser et sont présentés de manière simple et attractive afin d'éveiller l'intérêt de l'utilisateur sur ce domaine d'étude connaissant une grande expansion dans le monde. Finalement, nous n'omettrons pas de signaler que la conception reste ouverte à des améliorations afin d'augmenter et d'optimiser les performances de ce logiciel.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été initiés dans le but d'améliorer nos connaissances dans un des domaines du traitement d'images à savoir la segmentation.

Arrivés au terme de ce projet et avant d'en évoquer les perspectives, nous nous proposons de faire un bilan rapide des principaux résultats obtenus, à travers le résumé du contenu des quatre chapitres qui ont été développés, tout en soulignant les différents liens les unissant.

En premier, nous nous sommes intéressés à la segmentation classique ainsi que les deux approches principalement utilisées. Ensuite, nous avons exposé différentes techniques de segmentation avec des illustrations.

Le second chapitre s'est voulu être une sorte de rappels sur la géométrie différentielle. La connaissance de ces notions est, toutefois, nécessaire pour appréhender les chapitres suivants tels que l'évolution des courbes ainsi que la détection de contours.

Nous avons ensuite abordé le problème de l'évolution des courbes. Nous avons constaté l'existence d'instabilités d'où l'introduction de solutions entropiques. Nous nous sommes, ensuite, intéressés à la propagation des courbes suivant la direction normale avec une vitesse qui dépend de la courbure. Enfin, nous avons introduit l'évolution avec les Level-Set qui présentent de grands avantages et nous avons donné quelques exemples d'évolution des courbes avec cette méthode.

Avant d'aborder le cœur du sujet à savoir la détection de contours, nous avons parlé du filtrage avec les équations aux dérivées partielles. Cette étape s'avère nécessaire dans le cas des images bruitées où le bruit peut être interprété comme étant un contour à cause de son fort gradient. Nous avons commencé par étudier l'équation de la chaleur, puis l'opérateur Perona-Malik ainsi que sa version améliorée proposée par Catte & al. Ces deux opérateurs ont l'avantage d'intégrer le processus de détection de bords et préservent donc l'image à segmenter.

En ce qui concerne le problème de la détection, nous avons commencé par les contours actifs et nous avons vu leurs limites quant au changement de topologie. De plus le contour

initial doit être proche de l'objet à détecter pour pouvoir converger, ce qui nous a amené aux contours actifs géodésiques qui ont pu remédier à ces problèmes. Par la suite, nous avons introduit la méthode des ensembles de niveaux. Cette méthode a apporté beaucoup d'avantages par rapport aux précédentes. Elle permet notamment le changement de topologie, de plus, l'implémentation de cette méthode n'est pas trop complexe. Néanmoins, nous nous sommes aperçus que cette méthode présentait quelques inconvénients dont le besoin de réinitialiser la fonction distance ainsi que l'importance du temps de traitement. Pour y remédier, nous avons exposé la méthode de Chunming Li des ensembles de niveaux dite « sans réinitialisation » qui a remédié au problème de réinitialisation de la fonction distance. Cette technique permet l'utilisation d'un pas temporel beaucoup plus grand, ce qui induit un plus petit temps de traitement.

Nous avons, en dernier, présenté notre logiciel EASYLEVSET. Ce logiciel regroupe la majorité des fonctions du traitement d'images dont celles que nous avons étudiées tout au long de notre travail. Ce logiciel s'est voulu pratique, interactif et surtout très facile à utiliser. L'opérateur peut l'utiliser à sa guise, que ça soit pour un simple filtrage ou bien pour une opération plus compliquée telle la segmentation par les level-set précédée par un filtrage par les EDP.

Comme amélioration à ce travail, on propose d'inclure la texture comme paramètre dans la fonctionnelle d'énergie et d'aborder le problème des ensembles de niveaux à plusieurs phases.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Conzalez , R. Woods , “ *Digital image processing 2nd Ed*” , Prentice Hall ISBN : 0-201-18075-8, 2002
- [2] J.P. Cocquerez, S. Philipp , “*Analyse d’images Filtrage et segmentation*” , Editions Masson
- [3] I. Bechar , “*Flux du vecteur du gradient*”
<http://www.tsi.enst.fr/tsi/enseignement/ressources/mti/gvf/gvf3.htm>
- [4] I. Pitas , “*Digital Image Processing : Algorithms and Applications*” John Wiley & Sons Inc. ISBN 0-471-37739-2, 2000
- [5] F. Cao , “*Geometric Curve Evolution and Image Processing*” Springer Verlag Berlin 2003
- [6] R. Deriche , “*Techniques d’extraction de contours*”
ftp://ftp-sop.inria.fr/odyssee/Team/Rachid.Deriche/Lectures/Master-Stic-IGMMV/techniques_contours.pdf
- [7] H. Maitre , “*La détection des contours dans les images*”
http://www.tsi.enst.fr/~tupin/TDI/poly_contours.pdf
- [8] M. M. Lipschultz , “*Differential geometry, theory and problems*” , Schaum’s outline series, Mc Graw-Hill 1969
- [9] F. Ayres and E. Mendelson , “*Theory and problems of differential and integral calculus*” , Schaum’s outline series, Mc Graw-Hill 1990
- [10] G. Aubert and P. Kornprobst , “ *Mathematical Problems in Image Processing Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*” , Second edition Ed. Springer 2006
- [11] J. A. Sethian , “*Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*” , Cambridge Monograph on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1996.
- [12] S. Osher, S and J. Sethian, “ *Fronts propagating with curvature-Dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation*” , Journal of computational physics, 79, pp.12-49, 1988.
- [13] J.A. Sethian, “ *Numerical methods for propagating fronts, in variational methods for free surface interfaces*” , Eds. Springer-Verlag, New York, 1987
- [14] S. Osher and R. Fedkiw, “*Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*” Ed. Springer, 2003

- [15] J.A. Sethian , “ *Curvature and the evolution of fronts* ”, Communication of Maths and Physics, 101, pp. 487-499, 1985.
- [16] J.F. Aujol, “*Traitement d’images par approches variationnelles et équations aux dérivées partielles* ”
<http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/14/86/65/PDF/cours.pdf>
- [17] O. Coulon, “*Analyse d’images: Filtrage et introduction aux équations de diffusion* ”
<http://olivier.coulon.perso.esil.univmed.fr/cours/MINT-2-filtrage-diffusion.pdf>
- [18] P. Perona, J. Malik, “*Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion* ”
IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 12(7) pp. 629-639, July 1990.
- [19] F. Catte, P.L. Lions, J.M. Morel, and T. Coll, “*Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion* ”, SIAM Journal of Numerical Analysis, 29(1), pp. 182-193, February 92.
- [20] R. Deriche, O. Faugeras, “*Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur*”, Rapport de recherche RR-2697 de l’INRIA Sophia-Antipolis Nov 1995
<ftp://ftp.inria.fr/INRIA/publication/RR/RR-2697.ps.gz>
- [21] L. Alvarez, P.L. Lions and J.M. Morel, “*Image selective Smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*”, SIAM J. Numer. Anal. 29, pp.845-866, 1992.
- [22] M. Kass, A. Witkin and D. Terzopoulos, “*Snakes: Active Contour Models* ”, in Proceedings of the first International Conference on Computer Vision pp. 259-268, June 1987.
- [23] C. Xu, J.L. Prince, “*Snakes, Shapes, and Gradient Vector Flow*”, IEEE Trans. on Image Processing, vol. 7, n° 3, pp. 359-369, March 1998
- [24] C. Xu. J.L. Prince, “*Generalized Gradient Vector Flow External Forces for Active Contours*”, Signal Processing, Vol. 71 (2), pp.131-139, Dec. 1998
- [25] L.D. Cohen, “*On Active Contour Models and Balloons* ”, Computer Vision, Graphics, and Image Processing, Vol. 53, n° 2, pp. 211-218, March 1991.
- [26] V. Caselles, F. Catte, T. Coll and F. Dibos, “*A geometric model for active contours*”, Numerische Mathematik, Vol. 66(1) pp. 1-31, 1993
- [27] V. Caselles, R. Kimmel and G. Sapiro, “*Geodesic Active Contours* ”, International Journal of Computer Vision 22(1), 61-79, 1997
- [28] C. Li, C. Xu, C. Gui, and M.D. Fox, “*Level set formulation without re-initialization: a new variational formulation*”, IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 430-436, San Diego, 2005.
- [29] Gérard Blanchet et Maurice Charbit, “*Signaux et images sous Matlab* ”, Ed. HERMES, 2001

BIBLIOGRAPHIE

- [30] Po-Yan Tsang , “*Multi-resolution Image Segmentation using geometric Active Contours*”, Master thesis Waterloo, Ontario Canada 2004.

ANNEXES

ANNEXE A: Calcul variationnel

L'un des problèmes les plus classiques en calcul est la détermination de la valeur d'une variable x qui maximise ou minimise une certaine fonction $y = f(x)$. Le calcul variationnel permet de généraliser ce problème à la détermination des fonctions maximisant ou minimisant une intégrale donnée.

Soit l'intégrale :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) dx \quad (A.1)$$

Avec F une fonction qui dépend non seulement de x mais aussi de y (qui lui dépend aussi de x) et de y' . La forme de F est généralement due au phénomène physique étudié. Le seul élément permettant de maximiser ou minimiser I est la forme de $y(x)$, ainsi le problème revient à trouver la fonction $y(x)$ donnant le résultat souhaité. On dit que l'intégrale I est une fonctionnelle de la courbe $y(x)$.

Dans ce qui suit nous allons exposer les équations d'Euler-Lagrange qui permettent de résoudre le problème précédent.

Equations d'Euler Lagrange

La résolution du problème précédent (i.e. minimiser ou maximiser l'intégrale I) revient à résoudre une équation aux dérivées partielles (EDP) donnée par :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (A.2)$$

Cette équation trouvée par Euler en 1744 a été connue sous le nom de *l'équation d'Euler-Lagrange* de fait qu'elle constitue aussi la base de la formulation de Lagrange de la mécanique classique.

Démonstration

Soit la fonction $y(x)$ donnant une valeur minimale à l'intégrale I . Ceci implique que n'importe quelle fonction avoisinante de cette dernière donne une valeur supérieure ou égale à ce minimum (Figure A.1). On peut représenter cette famille de fonctions par la formule :

$$Y(x) = y(x) + \alpha \eta(x) \quad (A.3)$$

Où α est un paramètre de faible valeur, et $\eta(x)$ est une fonction arbitraire de x qui est bornée et de classe C^1 .

Si, comme on le constate sur la figure (A.1) (représentant la courbe $y(x)$ en trait plein et les courbes $Y(x)$, en trait discontinu, pour des petites variations de α), les deux bords des fonctions avoisinantes sont fixés aux points x_1, x_2 , la fonction $\eta(x)$ doit satisfaire les conditions de bords $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

En remplaçant la fonction $y(x)$ par $Y(x)$ dans l'intégrale I ,

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F(Y, Y', x) dx \quad (\text{A. 4})$$

on obtient la valeur de l'intégrale pour toute les courbes passant à travers les deux points de bords. Chacune de ces courbes est caractérisée par la valeur de α , $\alpha = 0$ correspond à la courbe qui minimise I .

A partir de ce raisonnement, on déduit une condition nécessaire mais non suffisante pour un minimum, soit:

$$\frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \text{pour toute fonction } \eta(x) \quad (\text{A. 5})$$

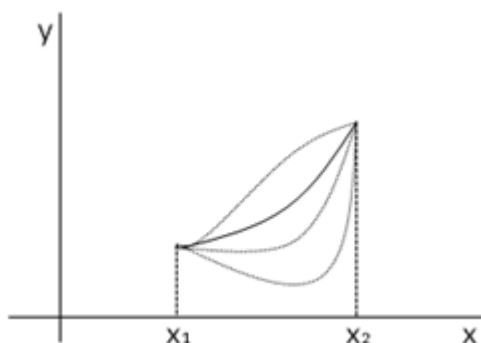


Figure A.1 représentation des fonctions $y(x)$ et $Y(x)$ pour différents valeurs de α

Comme α ne dépend pas de x , on peut introduire la différentiation à l'intérieur de l'intégrale:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dY}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial Y'} \frac{dY'}{d\alpha} \right] dx \quad (\text{A. 6})$$

D'autre part on a de l'équation A.3:

$$Y'(x) = y'(x) + \alpha \eta'(x) \quad (\text{A. 7})$$

$$\frac{dY}{d\alpha} = \eta(x), \quad \frac{dY'}{d\alpha} = \eta'(x) \quad (\text{A. 8})$$

Poser $\alpha = 0$ revient alors à mettre $Y(x) = y(x)$ et $Y'(x) = y'(x)$, et donc (A.6) devient :

$$\frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx \quad (\text{A.9})$$

Le deuxième terme à droite peut être intégré par partie, on a :

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial \eta}{\partial x} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} d\eta \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x) dx \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Le terme intégré est nul car $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ ce qui donne :

$$\frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx = 0 \quad (\text{A.11})$$

Comme $\eta(x)$ est arbitraire, il devient évident que :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

Ce résultat peut s'écrire autrement en utilisant la formule:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \frac{dy'}{dx} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \frac{dy'}{dx} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0 \quad (\text{A.13})$$

ANNEXE B : Solution faible

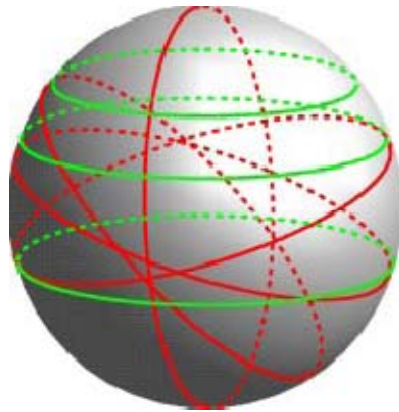
Une solution est dite « solution faible » d'une équation différentielle si elle satisfait une formulation intégrale de cette équation. L'avantage de cette formulation est qu'elle ne requiert pas le même degré de différentiation pour la solution potentielle ce qui permet l'obtention de plus de solutions.

Afin d'illustrer cette formulation prenons comme exemple une équation d'onde de première dimension $u_t = u_x$. Ainsi, la solution de cette équation doit être différentiable pour x et t . Néanmoins, en intégrant cette équation des deux cotés par rapport à x dans l'intervalle $[a,b]$, on obtient l'équation $\frac{d}{dt} \int u dx = u(b) - u(a)$ qui ne nécessite pas que sa solution soit différentiable dans l'espace. Ceci montre alors que les solutions de la deuxième équation sont nettement plus nombreuses que celles de la première.

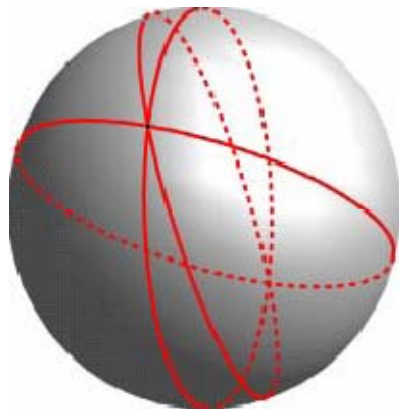
ANNEXE C : Géodésiques

Etant donnés deux points p et $q \in S$ (sphère par exemple), il est possible de s'intéresser aux longueurs des chemins tracés sur S et joignant p et q . Le plus court chemin (courbe de longueur minimale joignant p et q), s'il existe, est une géodésique.

Dans le cas d'une sphère, par exemple, les géodésiques sont les "méridiens" qui s'inscrivent sur la sphère. C'est-à-dire tous les cercles qui ont pour centre le centre de la sphère, comme les cercles en rouge sur la figure. Les cercles dessinés en vert ou "parallèles" ne sont pas des géodésiques, excepté l'équateur.



a) Cercles géodésiques (en rouge) et non-géodésiques (en vert)



b) En un point passe une infinité de géodésiques

Figure C.1 Géodésiques sur une sphère

ملخص:

يشتمل هذا البحث على بعض المفاهيم المرتبطة بالهندسة التفاضلية. بعد ذلك تم القيام بدراسة مدققة في انتشار المنحنيات حسب الأسلوبين المنسوبين إلى "لاغرونج" و "أولر" لنعرف بعدها طريقة "المحيطات المتحركة". هذه الطريقة تعرف بعض النقص مما جعلنا نتطرق، بهدف معالجتها، إلى طريقة "المحيطات المتحركة الجغرافية" ثم إلى طريقة "مجموعة المستويات" التي منحت العديد من الإيجابيات بالمقارنة مع الطرق السابقة. في الأخير تم التطرق إلى "مجموعة المستويات من دون إعادة التعريف" وذلك بهدف توفير وقت إعادة التعريف بالمحافظة على الدالة البعدية. قمنا بعدها بتطبيق الطرق المدروسة على صور مرسومة، طبيعية و طبية. في الأخير يجدر الإشارة إلى أنه تم إنجاز واجهة صورية تمكن من تطبيق جميع الطرق المذكورة بطريقة سهلة و بسيطة.

المفاتيح:

تحديد المحيط، المعادلات التفاضلية الجزئية، تجزئة الصور، المحيطات المتحركة، المحيطات المتحركة الجغرافية، مجموعة المستويات، معالجة الصور.

Résumé

Nous avons commencé tout d'abord par donner quelques notions théoriques de la géométrie différentielle. Ensuite, une étude détaillée de l'évolution des courbes, suivant les deux formulations *Lagrangienne et Eulérienne*, a été présentée. Nous avons ensuite introduit la méthode des contours actifs. L'idée principale des contours actifs consiste à modéliser le problème comme un problème de minimisation, cependant, cette approche présente plusieurs inconvénients. Afin de pouvoir pallier à ces effets négatifs, on a eu recours aux contours actifs géodésiques puis à la méthode des ensembles de niveaux. Cette méthode présente plusieurs avantages par rapport aux précédentes méthodes (snakes & GVF) car elle permet le changement de topologie. Enfin, nous avons étudié la méthode des level-set sans réinitialisation qui a permis de remédier au problème de la fonction distance. Nous avons présenté par la suite quelques exemples de détection de contour par application des méthodes des ensembles de niveaux traditionnels et sans-réinitialisation sur des images synthétiques, réelles et bruitées. Un interface graphique complète le travail théorique réalisé en lui fournissant des outils de propagation de courbe, de traitement et de segmentation d'images. Ces différentes fonctions sont faciles à utiliser et sont présentées de manière simple et attractive afin d'éveiller l'intérêt de l'utilisateur sur ce domaine d'étude connaissant une grande expansion dans le monde.

Mots-clés : détection de contour, EDP, segmentation d'images, snakes, modèles déformables, contours actifs géodésiques, ensemble de niveaux, traitement d'images.

Abstract

First of all, we give some notions of differential geometry. After that we discuss numerical schemes to model the motion of curves under the curvature. Techniques of active contours and curve evolution have been widely investigated and applied to the image segmentation problem. We present the two main types of actives contour models: parametric or geometric. Parametric or "explicit" active contours are classical snakes models, where the curve is defined explicitly by the curves points, and moves the points according to the energy function. The geometric or "implicit" active contours, on the other hand, implicitly represent the curve by embedding the curve in a higher dimension function and then evolve this function instead. The basic idea stems from Euclidean curve shortening and the use of level sets when evolving the curve. Topological changes are then handled automatically. After that, a new variational formulation for geometric active contours that forces the level set function to be close to a signed distance function and therefore completely eliminates the need of the costly re-initialization procedure is described. Experiments results show that we have obtained good results both on synthetic and real images. Finally, an attractive graphical interface, which contains all the functions used in this work, is given.

Keywords: Edge detection, PDE, image segmentation, snakes, active contour, geodesic active contour, level set, curvature, Image processing.