

1/90

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Génie Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

lex

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

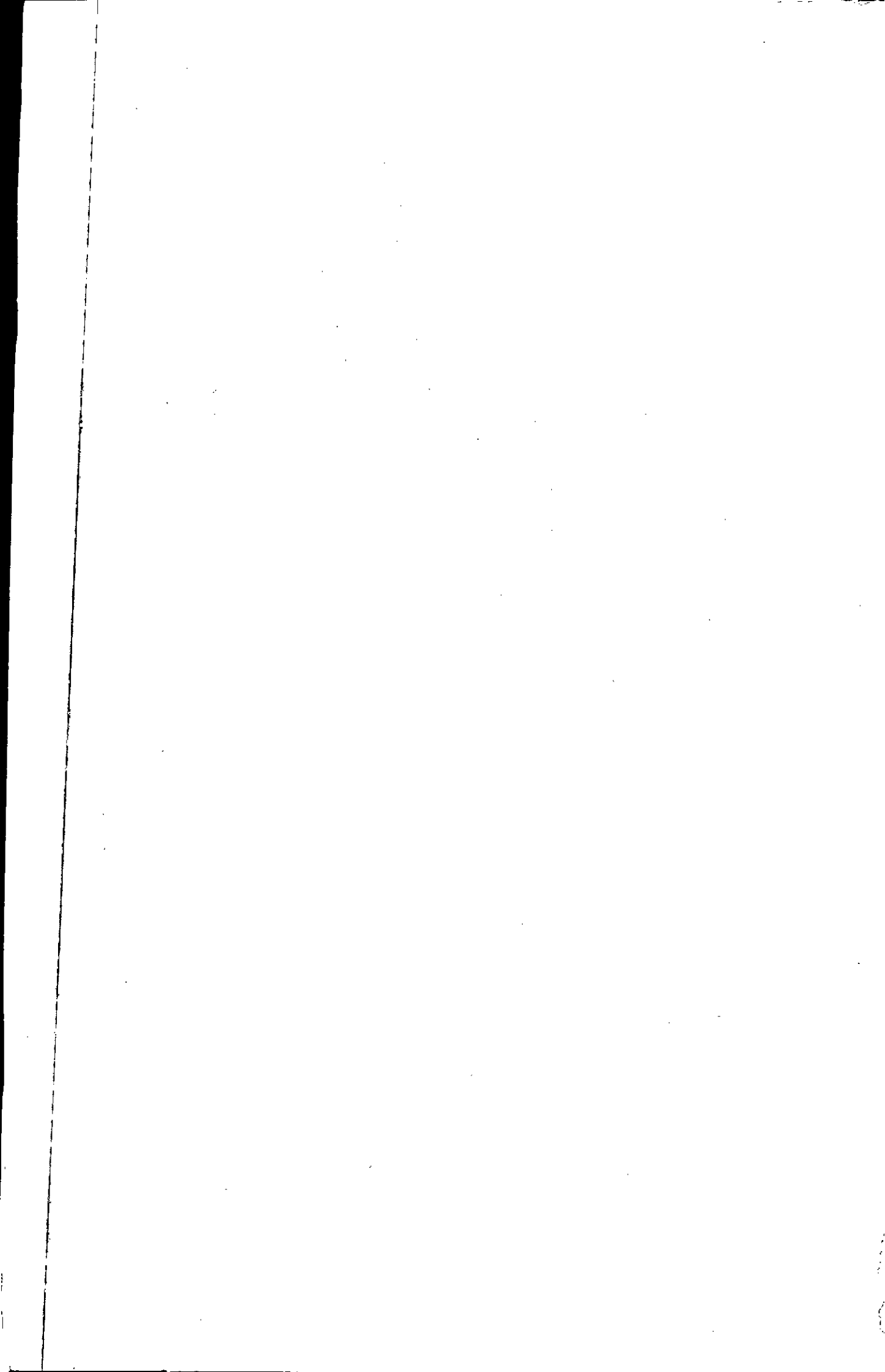
**ELABORATION D'UN
LOGICIEL POUR LE CALCUL
D'UNE DENT D'ENGRENAGE
PAR ELEMENTS FINIS**

Proposé par :
Mr. H. BELHANECHÉ

Etudié par
Mr. M. ABBA

Dirigé par:
Mr. H. BELHANECHÉ

PROMOTION : JUIN 1990



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Génie Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ELABORATION D'UN LOGICIEL POUR LE CALCUL D'UNE DENT D'ENGRENAGE PAR ELEMENTS FINIS

Proposé par :
Mr. H. BELHANECHÉ

Etudié par
Mr. M. ABBA

Dirigé par :
Mr. H. BELHANECHÉ

PROMOTION : JUIN 1990

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



وَقَدْ رَفَعْنَا
عَنْكُمْ
مِثْقَالَ حَبَّةٍ مِنْ
الْحَبِّ
صَلِّوا لِلَّهِ تَعَالَى

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

PROMOTEUR : H. BELHANECHÉ

ELEVE INGENIEUR : M. ABBA

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
وزارة التعليم العالي
Ecole Nationale Polytechnique
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

دائرة الهندسة الميكانيكية

الموجه : السيد . ح . بلحناش

الطالب المهندس السيد محمد عبا

----- \$ ملخص \$ -----

الموضوع : برنامج برمجى يسمح بحساب تفرس من أضرار تفرس فى الآلة الاستاتيكية

باستعمال طريقة العناصر المحدودة .

الملخص : يتضمن هذا البحث ايجاد برنامج لحساب الاثتقالات الناجمة عن تطيبت

قوة ثابتة ناجمة عن التواء أضرار تفرس لجعلها تقطع طول جانب من

جانبي التفرس وذلك باستعمال طريقة العناصر المحدودة ونظرية

هرتز .

----- \$ SUMMARY \$ -----

Subject : Developement of logiciel to calculate the tooth gear by the finite element method.

Abstract : This study concern the developement of a calculus logiciel for the deformations of tooth gear by considering a constant force wich is displacing along his profil , on the basis of the finite element and the Hertz theory .

----- \$ RESUME \$ -----

Sujet : Réalisation d'un logiciel pour le calcul d'une dent d'engrenage par la méthode des éléments finis .

Résumé : l'étude présentée consiste à élaborer un programme de calcul des déformations d'une dent d'engrenage en faisant parcourir une charge constante le long de son profil et ce en utilisant la méthode des éléments finis et la théorie de Hertz .

Remerciements

Je remercie mon promoteur, Monsieur Belhanech (H.) pour ses directives et son aide qu'il n'a pas cessé de me prodiguer le long de ce travail, ainsi que pour son apport moral.

Je remercie également Monsieur Belblidia (F.) pour son aide précieuse, sa disponibilité ainsi que ses conseils fructueux.

Des remerciements à tout les enseignants qui ont contribué à ma formation, ainsi qu'au personnel du centre de calcul et du Laboratoire de Génie-Mécanique de l'ENP.

Que tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin à la réalisation de ce travail trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

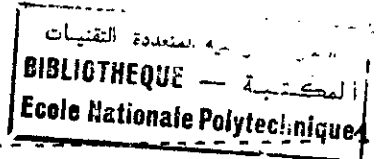
Dedicaces

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédie ce modeste travail à :

- Ma très chère mère qui s'est sacrifiée pour que je sois ainsi
- Mon père .
- Mes frères - Nacer- Eddine , Abd. Ennour et Djamel
- Mes sœurs Houria et Amina .
- Ma grand-mère .
- Tous mes amis surtout Ali Bouhraoua et Mohamed. Hadid
- Tous Les habitants de mon quartier .

Sommaire



INTRODUCTION

CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. Introduction	3
I.2. Etude d'un contact élastostatique de deux solides en deux dimensions.	5
I.3. Etude du comportement mécanique d'une dent d'engrenage sous charge.	6
I.4. lois gouvernant les déformations des dents	9
I.5. Aperçu général sur les méthodes appliquées au calcul des engrenages.	10
I.5.1. - Les méthodes expérimentales	11
I.5.2. - Les méthodes théoriques.	12
I.5.2.1. - Les méthodes analytiques	13
I.5.2.2. - La méthode des éléments finis	13
I.5.2.3. - La méthode des éléments frontières	14
I.6. Historique de la méthode des éléments finis.	15
I.7. Conclusion.	17

CHAPITRE II : THEORIE D'ELASTICITE PLANEY.

II.1. Introduction	18
II.2. Hypothèses.	18
II.3. Equations d'élasticité plane.	19
II.3.1 Equations différentielles d'équilibre.	19
II.3.2 Equations déformations - déplacements	20
II.3.3 Equations intrinsèques du matériau.	23
II.4 Problème de déformations planes	24

II.5. Problème de contraintes planes.	25
II.6. Elasticité en deux dimensions	26
II.7. Méthodes de résolution du problème.	28
II.8. Conclusion.	28

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
 BIBLIOTHEQUE — المكتبة
 Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE III : - PRÉSENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

III.1. Introduction	30
III.2. Analyse des structures continues par La méthode des éléments finis	31
III.3. Formulation	33
III.4. Différentes étapes de l'étude d'une structure continue Par Eléments finis.	34
III.5. Elément finis triangulaire à 6 degrés de liberté pour l'étude de l'élasticité plane.	39
III.6. Conclusion.	43

**CHAPITRE IV : - APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS A
L'ETUDE DE LA FLEXION D'UNE DENT D'ENGRENAGE.**

IV.1. Introduction	45
IV.2. Etude préliminaire	46
IV.2.1. Etude d'une structure à 36 éléments	46
IV.2.2. Conclusion	46
IV.3. Etude générale	48
IV.3.1. Introduction	41
IV.3.2. Délimitation du contour de la dent.	49
IV.3.3. Présentation du maillage de la dent	49
IV.3.4. Influence de la position de la force sur les déplacements de la dent	51
IV.3.4.1. Détermination de l'angle d'inclinaison	

CHAPITRE V : . ETUDE DE LA DEFORMEE AU CONTACT :-

CHAPITRE I.

e_i	distance qui sépare deux solides suivant la direction i
δ_i^1, δ_i^2	Les déformations élastiques des solides 1 et 2 respectivement
$\delta \alpha_1, \delta \alpha_2$	les "déplacements solides" des corps 1 et 2 respectivement
y_c	la distance qui sépare deux solides en contact.
w_c	la charge normale au contact.

CHAPITRE II.

σ	contrainte directe
τ	contrainte de cisaillement
ϵ	déformation directe
γ	déformation de cisaillement
x, y, z	Les composantes de la force de volume.
u, v, w	Les composantes de déplacement
ν	coefficient de poisson
E	Module de young.
G	Module de cisaillement.

CHAPITRE III.

$[k^e]$	Matrice de rigidité d'un élément
$\{F^e\}$	vecteur forces élémentaires
$\{c^e\}$	vecteur de déplacements nodaux.
$[A]$	matrice de coordonnées nodales
$[B]$	matrice reliant les déplacements nodaux aux déformations de l'élément
$[D]$	matrice d'élasticité reliant les déformations aux contraintes.

$[H]$. matrice reliant les déplacements nodaux
 contraintes dans l'élément

$\{F\}$. vecteur forces nodales de toute la structure

$[K^G]$ matrice de rigidité globale.

x, y, z système de coordonnées cartésiennes.

w_{ext} travail externe

w_{int} travail interne.

L l'épaisseur de la structure

Δ section.

CHAPITRE IV.

M_0 Module de taillage

Z nombre de dents

R_a Rayon de tête de la dent

R_f Rayon de pied

R_p Rayon primitif.

R_b Rayon de base.

w La charge appliquée au contact.

B l'argeur de la dent

α_i l'angle d'inclinaison de la charge avec l'horizontal

CHAPITRE V :.

R_x, R_z rayons de courbure principaux selon les axes x et z
 respectivement

α rapprochement des deux solides en contact.

E' module de young équivalent de deux solides.

P_0 pression maximale

w charge normale au contact

a	demi largeur de Hertz
w_L	charge par unité de largeur
l	largeur de la dent
Z_{max}	contrainte tangentielle maximale
R_{eq}	rayon équivalent
δ	déflexion Hertzienne notée γ_{HW} , pour le cas de Walker γ_H : pour le cas de Hertz, γ_{WH} pour Weber.
$\delta_{s,u}$	déflexion d'un solide.

INTRODUCTION

Les corps solides, sans exception se déforment sous l'action des sollicitations extérieures, et ces déformations, dans la plupart des temps, engendrent des désordres qui jouent un rôle néfaste soit dans les mécanismes dont le corps est une partie, soit sur le corps lui-même qui peut se rompre si les désordres dépassent des limites dites "admissibles". Il est donc indispensable de calculer et situer ces déformations afin de parvenir à une construction qui peut-être capable de leur résister et assurer la sécurité aux différents usages.

Les engrenages à dentures droites font plus exception à cette règle, la rencontre successive des dentures engendre une interaction mutuelle entre les dents qui est le siège de l'apparition de ces déformations, ainsi ces dernières vont nuire au fonctionnement des boîtes de transmission montées sur diverses machines, en entraînant une variation de la géométrie de la surface de denture et la puissance transmise en chaque point de l'engrenement.

En plus des déformations engendrées aux points de contacts des dents, ces dernières subissent des flexions causées par les forces qui sont chargées de les transmettre ce qui affecte par conséquent l'uniformité de la vitesse angulaire et la durée de vie de l'engrenement.

Ce travail a pour objet : - l'étude du comportement statique d'une dent d'engrenage à axes parallèles à dentures droites par la méthode des éléments finis. Il comprend l'évaluation des déplacements des différents points d'une dent sollicitée par une force due au contact supposée constante, la détermination de la déflexion Hertzienne aux points de contacts en faisant parcourir cette force le long du profil de la dent.

Le premier chapitre, contient une étude bibliographique portant sur les déformations dues aux contacts des dents ainsi que les méthodes utilisées pour la détermination de ces dernières, Au chapitre II, on présente une brève étude sur l'élasticité plane. Une présentation de la méthode des éléments finis et en particulier l'élément utilisé pour la modélisation de la dent est donnée au chapitre III. Le chapitre IV, comprend une description de la dent et la détermination des déplacements ainsi qu'une étude des contraintes dans les zones les plus sollicitées. En fin, le chapitre V est consacré à la détermination de la déflexion Hertzienne aux points de contacts en insistant sur la théorie de Hertz.

CHAPITRE: I.

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 INTRODUCTION: .

Les anciennes constructions ne présentaient aucun souci d'économie de matière ou de prix pour les constructeurs de cette période, leurs soucis de base résidaient dans le choix de la qualité des matériaux où un certain empirisme à base expérimentale leur a permis de réaliser des œuvres très résistantes et durables.

Actuellement la règle de compétitivité des machines qui est entrée en vigueur avec le développement des domaines de l'industrie ne se limite pas qu'à leurs performances mais aussi à leur fiabilité, leur longévité et leur rapport qualité-prix.

Ces critères dépendent de plusieurs paramètres, et en particulier du comportement des pièces et leurs qualités. Pour les engrenages à dentures droites, vu leur importance, il est nécessaire d'effectuer des études complètes sur leur comportement, l'optimisation de la puissance transmise ainsi que l'optimisation des profils qui permettent d'aboutir à un meilleur compromis. Ainsi la détermination des déplacements des profils des dents causés par les charges dues aux contacts est très importante pour la transmission de la puissance, elle permet aussi de résoudre plusieurs problèmes, notamment les problèmes de correction des profils, l'étude des risques

d'interférences, l'étude du comportement vibratoire, qui conduisent finalement à un choix adéquat des matériaux les plus adaptés et les plus répondants à ces critères.

L'étude du phénomène de la flexion des dents a été entamée dès les années trente par le travail consistant de Walker [4] à base expérimentale. Puis elle a été suivie par plusieurs autres études soit sur des pièces réelles soit sur des maquettes.

Avec le développement des méthodes numériques ainsi que les calculateurs qui permettent de réaliser les étapes les plus importantes et les plus compliquées de ces méthodes, les études théoriques et expérimentales ont été développées parallèlement [1-11].

I.2 . ETUDE D'UN CONTACT ELASTOSTATIQUE DE DEUX SOLIDES EN DEUX DIMENSIONS :-

Sous certaines conditions, l'étude dans le domaine élastique de structures complexes peut se ramener à l'étude sur modèle à deux dimensions en affectant chaque fois que possible au modèle une variation d'indice et d'épaisseur. par souci de simplicité on va traiter le problème en bidimensionnel.

Dans le cas général d'un contact entre deux solides élastiques sous charge normale, on peut exprimer la distance séparant les deux solides par :-

Avant chargement :-

la position initiale des deux solides est repérée le long d'une direction parallèle à la charge par la distance " e_i " qui les sépare voir figure (I.1).

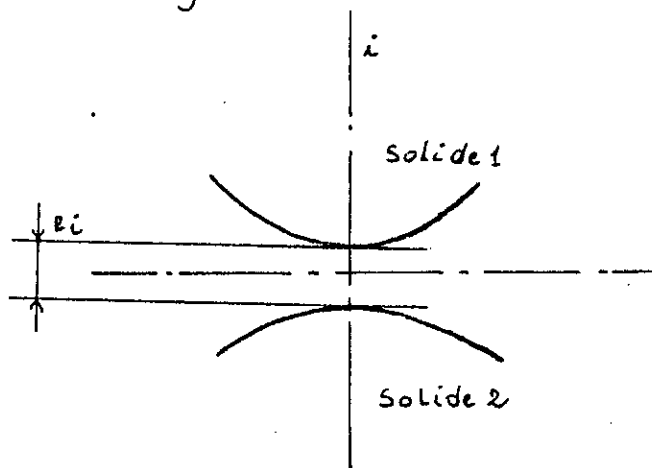


Figure I.1

Après chargement :-

chacun des deux solides s'est déformé élastiquement d'une quantité : δ_i^1 pour le solide 1 et d'une quantité : δ_i^2 pour le solide 2 selon la direction i parallèle à la charge. voir figure I.2.

- chaque solide se déplace d'un mouvement d'ensemble appelé aussi "déplacement solide". $\delta\alpha_1$ et $\delta\alpha_2$ respectivement pour le solide 1 et 2, ainsi le rapprochement global des deux solides sera :-

$$\delta\alpha = \delta\alpha_1 + \delta\alpha_2$$

Pour un point donné on peut écrire d'une façon générale :- la distance qui sépare les deux solides par :-

$$y_i = e_i + \delta_i^1 + \delta_i^2 - \delta\alpha \quad \text{I.1}$$

le contact dans ce cas sera caractérisé par :-

$$\left. \begin{array}{l} y_i = 0 \\ w_i > 0 \end{array} \right\} \quad \text{I.2}$$

tel que w_i : représente la charge au contact.

Pour les points qui se trouvent en dehors du contact, on aura :

$$\left. \begin{array}{l} y_i > 0 \\ w_i = 0 \end{array} \right\} \quad \text{I.3}$$

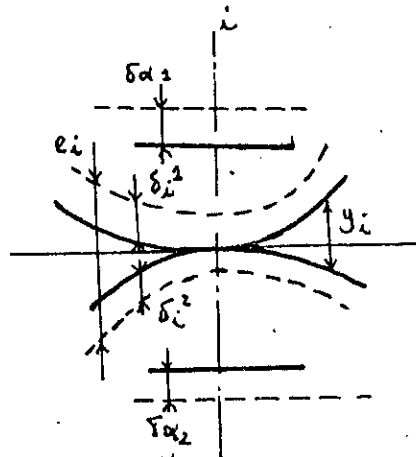


Figure I.2 - Représentation d'un contact élastique

I.3 - ETUDE DU COMPORTEMENT MECANIQUE D'UNE DENT D'ENGRENAGE SOUS CHARGE :-

Il a été montré que pour les engrenages cylindriques à dentures droites à axes parallèles, on peut représenter un point donné de l'engrenement en régime permanent par

Le contact entre deux cylindres à axes parallèles munis de mêmes charges, géométrie et vitesse [8] figure (I.3).

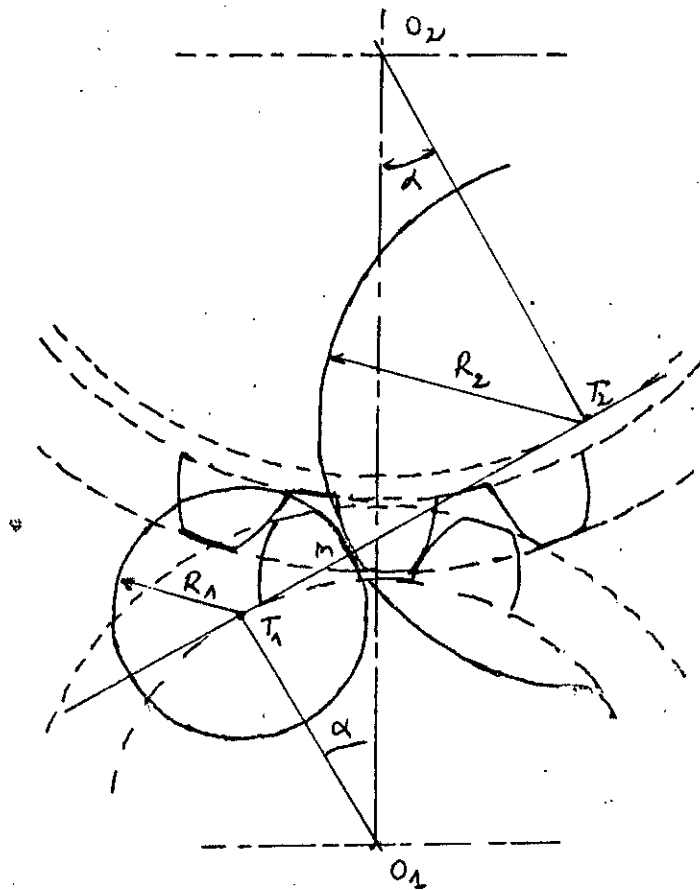


Figure I.3 : Simulation de l'engrenement.

des phénomènes rencontrés lors de l'analyse du contact des dents se situent à des échelles différentes :-

a. Effets globaux :-

- une déformation due à la flexion de la dent,

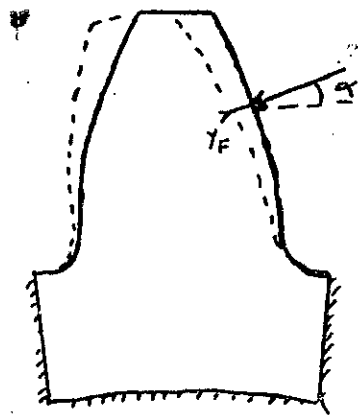


Figure I.4 :- Flexion de la dent.

- Une déformée du voile (ou torsion de la jante de la roue)

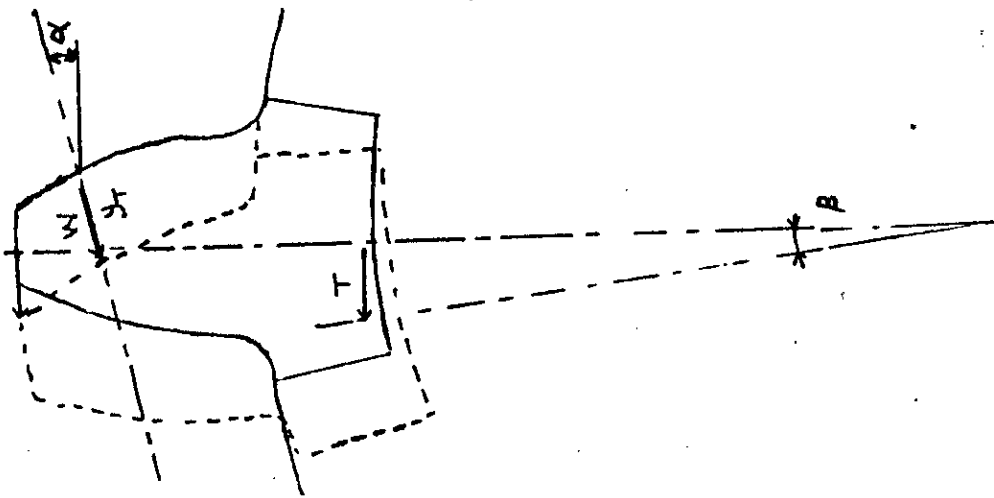


Figure I.5 déplacement dû à la torsion

b. Effet local :-

- Déformée au voisinage du point de contact (écrasement des surfaces situées autour du point de contact).

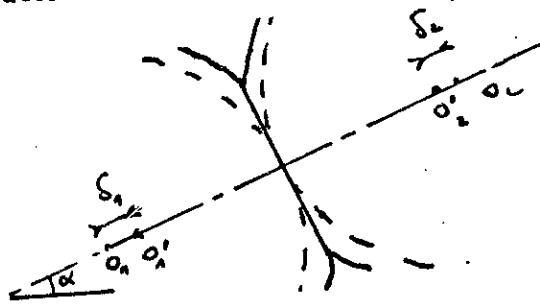


Figure I.6 : - déformée au contact.

L'ensemble de ces effets sont illustrés sur la

figure ci dessous :-

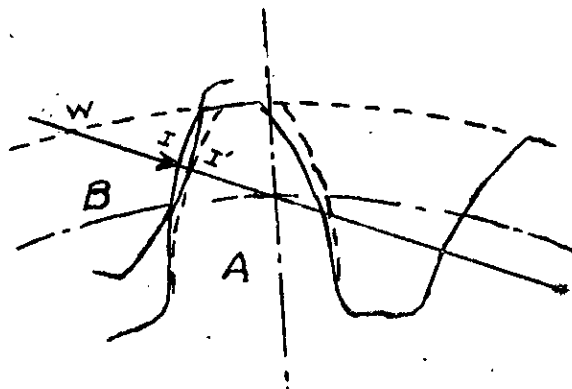


Figure I.7. Superposition des divers déplacements.

la dent B en poussant la dent A crée une force W

Normale au contact, le point théorique I s'est déplacé de la quantité II' qui représente l'ensemble des déplacements dus à la flexion de la dent, l'écrasement de la zone de contact et la torsion de la jante. et la dent A occupera la position illustrée sur la figure I.7 en traits pointillés au lieu de celle en traits pleins. par conséquent, ce déplacement aura une influence sur le fonctionnement du mécanisme en affectant l'uniformité de la vitesse angulaire de la transmission et la durée de vie de l'engrenement et crée des risques d'interférence et de coincement des dents.

Remarques :-

- La réaction de la dent A sur la dent B provoque des déformations identiques sur cette dernière dent dans la direction opposée. L'amplitude de la déformation de la dent B n'est pas la même que la dent A sauf si les deux roues sont identiques et si le point de contact est au primitif.

- La charge appliquée au contact est portée par la ligne d'action T_1T_2 (voir figure (I.3)) des deux dents conjuguées.

I 4. LOIS GOUVERNANT LES DEFORMATIONS DES DENTS :-

- a. Les déformations des structures sont proportionnelles aux charges appliquées alors que les déformations locales ne le sont pas tant qu'on ne dépasse pas la limite élastique.

- b. La déformation sous certaines charges est indépendante du module c'est à dire deux engrenages de proportions identiques (même nombre de dents et même angle de pression) mais de modules différents sont soumis à des déformations identiques.

cette loi a été démontrée par Walker [4]

c. L'amplitude de déformation due à l'écrasement de la surface dépend de la charge appliquée et non du nombre de dents. elle est également dépendante des rayons de courbures relatifs.

d. L'amplitude de la déformation totale varie suivant la forme des dents, leur nombre et leur angle de pression. En général, les déformations diminuent lorsque le nombre de dents augmente.

I.5. APERÇU GENERAL SUR LES METHODES APPLIQUEES AU CALCUL DES ENGRENAGES: -

Dans toute science physique, l'expérience est le corollaire de la théorie qu'elle doit contrôler aussi souvent qu'il est nécessaire. La théorie édifiée sur des hypothèses expérimentale volontairement schématisée ne traduit qu'imparfaitement les faits. Les résultats qu'elle fournit doivent être contrôlés par des essais sur des organes terminés dans des conditions similaires. Le domaine d'études des engrenages par ce fait est très riche. Dans notre étude, on a trouvé une multitude de recherches qui ont été faites.

Ces études concernent tout ce qui se rapporte aux engrenages, leur fonctionnement, leurs procédés de fabrication et d'usinage, les corrections des profils, l'extension des domaines d'utilisation, l'étude de leurs déformations, la répartition des contraintes à l'intérieur des dents voire même les espèces utilisées entre les dents pour améliorer les états de fonctionnement c'est à dire les lubrifiants.

I.5.1. LES METHODES EXPERIMENTALES: -

La flexion des dents d'engrenages a été étudiée des 1938 par Walker [4] dans le cadre de la résolution du problème de modification du profil des dents. Cette étude a été réalisée sur un appareil d'essai présenté sur la figure (I.8).

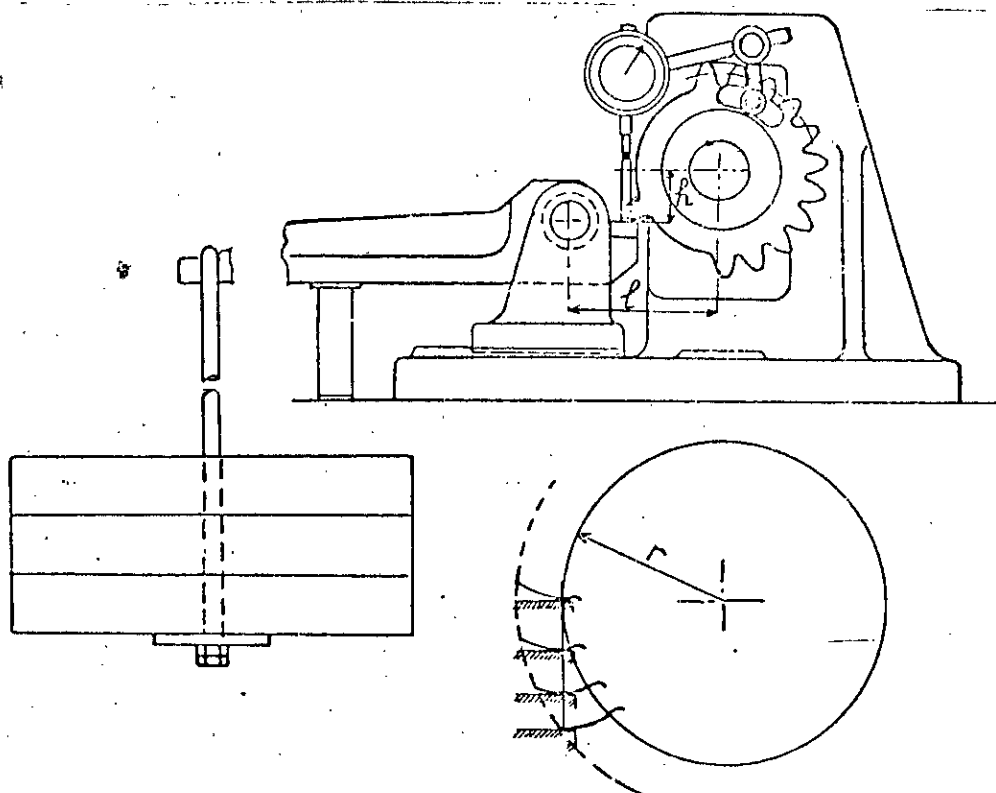


Figure I-8 . Dispositif d'essai [4]

La charge appliquée à la dent à l'aide d'une dent de crémaillère que l'on pouvait faire agir à différentes profondeurs ; la valeur de la flexion est déterminée à l'aide d'un micromètre palpant un galet introduit dans l'entre dent adjacent près du sommet des dents. Cet appareil permet de mesurer la flexion des dents en tout points de la ligne d'action.

Puis le domaine expérimental a connu un développement continu avec le développement des procédés et des méthodes

capables de mieux traduire les phénomènes de déformations [1]
Les expérimentateurs ont été confrontés à beaucoup de problèmes d'ordre technique, parmi lesquels la difficulté de l'analyse dimensionnelle, c'est à dire le respect des lois de similitude lorsqu'on procède à des mesures sur des maquettes. Tandis que les études sur les pièces réelles, grâce à l'arsenal des capteurs extensométriques du type mécanique (comparateur) ou électrique ne peut s'envisager que ponctuellement puisqu'on ne dispose pas des méthodes d'analyse globales permettant de déterminer le champ de déformations en tout point de la structure. Plusieurs méthodes optiques sont applicables à la mesure des déplacements des profils des dents. Elles sont apparues avec l'apparition des instruments de mesure optiques et elles sont peu utilisées dans les mesures sur des pièces réelles. Parmi ces méthodes on peut citer: -

- La méthode photoélastocimétrique
 - La méthode de Moirée
 - La méthode de Moirée Interferométrique
 - La méthode de Moirée Holographique [1]
 - La méthode d'Interferométrie speckle [1]
-

Ces méthodes n'ont pas donné pleinement satisfaction qu'à partir de 1980 on est arrivé à des résultats en accord avec ceux obtenus par les méthodes numériques.

I.5.2 LES METHODES THEORIQUES: -

Le problème complexe de l'étude théorique des déformations des dents d'engrenages, qui nécessite d'une part l'introduction de la géométrie particulière des dents: -

- Profils en développante de cercle, - raccordement trochoïdaux, et d'autre part, il résulte d'une combinaison d'effets globaux telque la flexion de la dent et la déformation de la jante et d'effets locaux telque la déformée au voisinage du point de contact a été largement abordé. parmi les méthodes utilisées dans l'étude de ce problème :-

I.5.2.1 LES METHODES ANALYTIQUES:-

Notons les études de H. Poritsky [9], Weber [10] et Cornell [11] qui ont traité le problème de déformation et la répartition des charges par la méthode de résistance des matériaux, en bidimensionnel.

Tobe [13] a utilisé la théorie des plaques d'épaisseurs variables mais cette méthode appliquée au calcul des engrenages reste très limitée à cause des grandes difficultés qui surgissent lorsqu'on s'intéresse à des structures de géométrie variables ou à des charges appliquées irrégulières.

I.5.2. LA METHODE DES ELEMENTS FINIS:-

Avec le développement qu'a connu la méthode des éléments finis ces dernières années, plusieurs logiciels traitant le cas des déformations des dents d'engrenage ainsi que la répartition des contraintes ont été réalisés, mais les résultats obtenus n'ont été publiés ni n'ont servi de support à l'élaboration standard au calcul des engrenages jusqu'en 1969, année où le centre de recherches C.E.T.I.M (Sensis) a mis en oeuvre un programme de calcul par éléments finis sur ordinateur traitant le problème d'élasticité plane dont les résultats et les discussions ont été publiés par Chabert en 1972 [5]

par la suite, plusieurs études sont apparues dont on peut citer celles de Wilcox et Coleman [14], Coyet Chao [15] qui ont tenté de faire un calcul simultané des déformations locales et globales, tandis que Ph. Sainsot [16] et Velez [2] ont utilisé la méthode mixte de résolution par couplage analyse numérique par éléments finis d'effets globaux et analytique de l'effet local en procédant par superposition.

I.5.3. METHODE DES ÉLÉMENTS FRONTIÈRES:.

Cette méthode récente est apparue à la suite des insuffisances qu'a présenté la méthode des éléments finis dans le cas des domaines irréguliers. Elle a été introduite par Bredia [17] pour le calcul des dents d'engrenages.

I.6 - HISTORIQUE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS:.

Depuis les années trentes la mécanique des structures permettait l'analyse des assemblages de poutres et de barres. En représentant chaque élément par une matrice de rigidité en se basant sur les hypothèses de la résistance des matériaux puis à partir de ces matrices élémentaires on construit un système d'équations algébriques. en utilisant les conditions de continuité des déplacements et d'équilibre des forces aux points de jonction des éléments. La résolution des systèmes d'équations conduit à la détermination des déplacements en tout point de jonction de la structure.

Motivée par les besoins de l'industrie aéronautique et grâce à l'apparition des premiers ordinateurs la mécanique de structure a subi une évolution très rapide entre 1950 - 1960.

Turner, Clough, Martin et Toop [18] ont introduit le concept d'éléments finis pour la première fois dans "Stiffness and deflection analysis of complex Structure" Journal of aeronautical Science en 1956. Ils ont présenté un élément continu élastique par un assemblage de panneaux triangulaires en caractérisant le comportement de chaque élément par une matrice de rigidité élémentaire, à partir de ces matrices la technique classique de la mécanique de structures conduit à la solution.

Nous soulignons aussi les travaux de Argyris et Kelsey [19] qui ont introduit la notion d'énergie à l'analyse des structures.

Dès 1960, la méthode des éléments finis a connu un développement rapide dans toutes les directions :-

- Reformulation à partir des considérations énergétiques et variationnelles sous la forme des résidus pondérés

- Création des éléments de haute précision et des éléments isoparamétriques.

- Utilisation de la méthode des éléments finis dans la résolution des problèmes non linéaires et non stationnaires dans le domaine de la mécanique des fluides, et le domaine thermique.

Vers 1965, on a assisté en Europe et aux U.S.A au développement intensif des programmes informatiques utilisant la méthode des éléments finis sous l'impulsion des universités et des centres de recherches.

En ce qui suit nous présentons un synoptique du développement des méthodes d'analyse des structures :-

1800		
1819	- Structure hyperstatique	- Navier
1864	- théorème de Imengie	- Maxwell
1900		
1908	- Méthode d'approximation	- Ritz
1915	- " "	- Galerkin
1940	- Approximation par Elements finis	- Courat
	- Méthode matricielle	
1950	-	
1956	- Concept d'Eléments finis	- Turner
	- Méthode de Force	- D. Argyris
	- Méthode de déplacement	- Argyris Turner

Par ailleurs la méthode des éléments finis à un caractère disciplinaire car elle met en œuvre les connaissances des trois disciplines de base :-

- Mécanique de Structures :- Elasticité, Résistance des matériaux, dynamique, Vibration

- Analyse numérique :- Méthode d'approximation, résolution des systèmes linéaires, et des problèmes de Valeurs propres

- Informatique appliquée :- techniques de programmation, développement et maintenances des logiciels.

1.7. CONCLUSION : -

Pour obtenir de bons résultats dans l'étude des engrenages à dentures droites, il faut tenir compte de toutes les conditions de fonctionnement dans leur ensemble : réducteurs des navires, l'aéronotique, automobiles, ... etc afin d'aboutir à de bonnes corrélations statistiques et de développer d'une manière cohérente et non empirique ces études.

L'étude bibliographique met en évidence la diversité des méthodes utilisées dans le calcul des déformations et d'autres paramètres. Chaque méthode a montré qu'il fallait apporter chaque fois, certaines améliorations aux travaux déjà faits.

Des travaux ont été traités et d'autres sont en cours d'études par plusieurs équipes et centres de recherches dans le monde, afin de converger vers un résultat meilleur, et permettre un bon fonctionnement sous des conditions très sévères.

La diversité des méthodes permet, entre autres, de bien mener les études et de comparer les résultats obtenus et leurs fiabilités. Elle permet aussi de créer une concurrence entre les chercheurs et d'élargir le plus que possible le champ de la recherche.

CHAPITRE . II .

THEORIE DE L'ELASTICITE PLANE

I.1 INTRODUCTION :-

Tous Les matériaux possèdent à un certain degré la propriété d'être élastique, c'est à dire si Les forces extérieures qui provoquent La déformation d'un corps ne dépassent pas une certaine limite, La déformation disparaîtra en même temps que La force qui Lui a donné naissance, d'où l'apparition de La théorie d'élasticité qui permet d'étudier Le comportement des Solides réels sous L'action de différents systèmes de forces.

L'utilisation de La méthode des éléments finis pour L'analyse des problèmes statique et dynamique nécessite La connaissance des équations de base de cette théorie.

Dans ce chapitre, une brève analyse de ces équations présente Les relations entre Les contraintes et Les déformations dans Le cas général.

I.2 HYPOTHESES:-

Pour L'établissement des lois mathématiques décrivant Le problème :- on suppose que Les solides sont homogènes, isotropes à L'état neutre c'est à dire que Les propriétés physiques et mécaniques sont Les mêmes en chaque point et dans toutes Les directions.

Ces solides ne doivent pas être le siège d'aucune tension interne en l'absence des forces extérieures, gradient thermique ou autres.

II.3 - LES EQUATIONS DE L'ELASTICITE PLANE :-

La théorie de l'élasticité consiste à formuler trois types d'équations à savoir :

- Les équations différentielles d'équilibre.
- Les équations de déformations - déplacements.
- Les lois intrinsèques du matériau.

II.3.1 LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'EQUILIBRE :-

Dans le cas général, chaque point matériel est soumis à neuf composantes de contraintes comme l'indique la figure (II.1).

X , Y et Z représentent les forces de volume.

En examinant la figure, on remarque 3 composantes de contraintes normales : $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ et 6 composantes de contraintes tangentielles, $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$ et τ_{zy} .

Considérons l'équilibre de cet élément :-

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \sum Y_i = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \sum Z_i = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{aligned} \right\} \dots \text{II.1}$$

On peut montrer facilement en prenant la somme des moments par rapport aux axes x', y' et z' passant par le

Centre de gravité de l'élément que *

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \end{aligned} \right\}$$

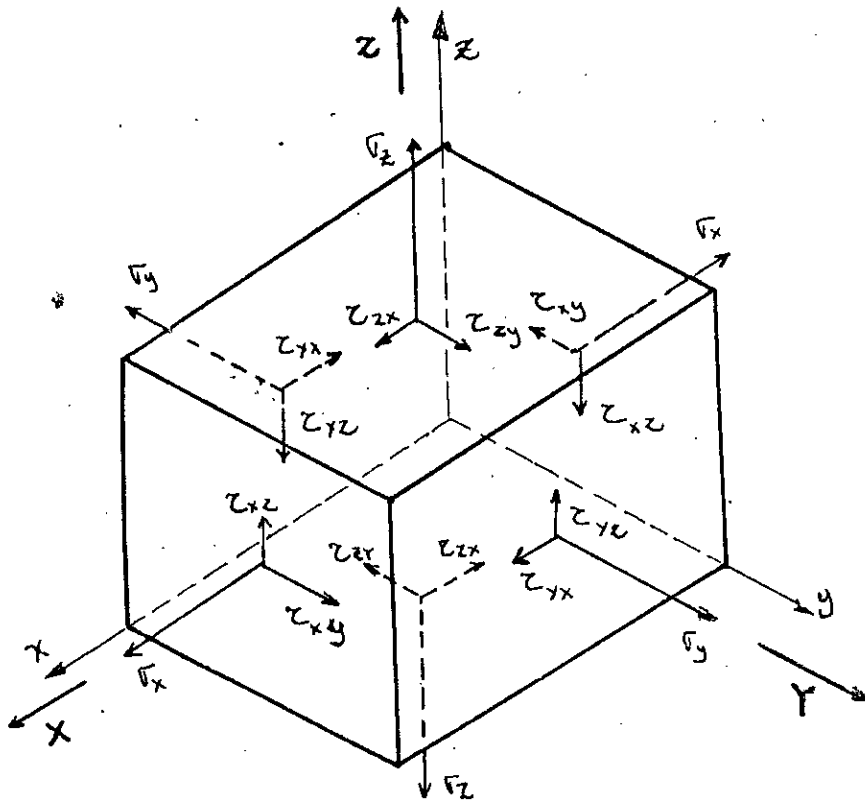


Figure II.1

II.3.2 LES EQUATIONS DE DEFORMATIONS - DEPLACEMENTS :

Lorsqu'un corps est soumis à un système de forces, en général, tous les points appartenant à ce corps changent de position.

Etudions l'élément en 2 dimensions, avant de passer au cas général (tridimensionnel).

Soient : - ϵ_x : La déformation longitudinale.

ϵ_y : La déformation transversale

γ_{xy} : - La déformation tangentielle (étant la déformation d'un angle qui était droit avant tout déplacement).

On rappelle que ceci n'est valable que dans le cas de faibles déplacements.

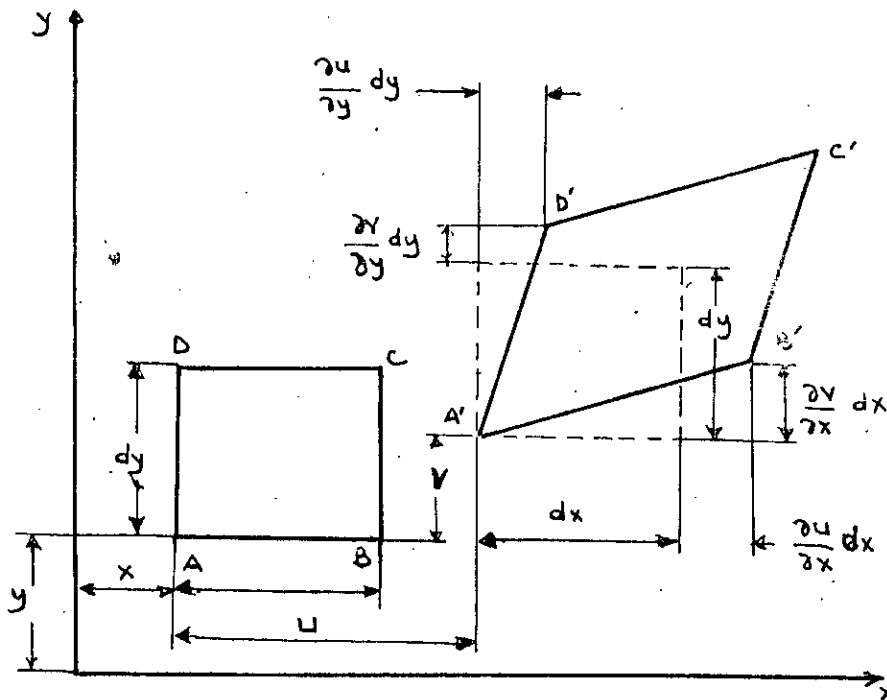


Figure 1.2

soient : - u : Le déplacement suivant la direction x

v : Le déplacement suivant la direction y

w : Le déplacement suivant la direction z

$w = 0$ pour le cas bidimensionnel.

Après déformation l'élément ABCD aura la configuration

A'B'C'D', Ainsi les déformations directs suivant x et y

seront :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

L'angle θ étant très petit, on peut écrire alors:-

$$\theta = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}$$

En négligeant le terme $\frac{\partial u}{\partial x}$ (car il est très petit devant l'unité), on obtient:-

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$$

de même pour l'angle λ on aura:-

$$\lambda = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Ainsi la déformation de cisaillement sera:-

$$\gamma_{xy} = \theta - \lambda = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Après avoir traité le cas bidimensionnel, on peut généraliser ces équations pour le cas tridimensionnel où l'élément considéré est à l'origine un prisme rectangulaire.

Les déformations seront:-

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots$$

II.2

et les déformations de cisaillement

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

II.3

4.33. LES EQUATIONS INTRINSEQUES DU MATERIAU:

Ces équations caractérisent les propriétés mécaniques du matériau:-

Soit un cube élémentaire soumis à des contraintes normales σ_x, σ_y et σ_z . σ_x provoque une déformation suivant l'axe x qui est: $\frac{\sigma_x}{E}$, mais les contraintes σ_y et σ_z provoquent chacune d'elles une déformation suivant l'axe x donnée par: $-\frac{\nu\sigma_y}{E}$ et $-\frac{\nu\sigma_z}{E}$ respectivement, ainsi on aura les équations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right\} \text{II.4}$$

Pour ce qui est des déformations angulaires, celles-ci sont causées par les contraintes tangentielles, telles que:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \right\} \text{II.5}$$

G: est le module d'élasticité en cisaillement

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Les équations (II.4) et (II.5) constituent la loi de Hook généralisée.

En additionnant les termes des équations II.4 on obtient :

$$(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = (1 - 2\nu)(\sigma_y + \sigma_x + \sigma_z)/E \quad \text{II.6}$$

En considérant toujours ces mêmes équations on peut exprimer les contraintes σ_x, σ_y et σ_z en fonction des déformations, on obtient la relation suivante sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad \text{II.7}$$

avec $\lambda = \frac{\nu}{E} (1 - 2\nu)(1 + \nu)$ et $\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$.

Après cette formulation on va ramener le problème dans le plan. Dans ce cas on considère les deux types de problèmes de l'élasticité plane.

4.4. PROBLEME DE DEFORMATIONS PLANES:-

Lorsqu'on a un corps dont l'une des dimensions est très importante par rapport aux deux autres, on dit qu'on est en présence d'un problème de déformation plane. Un tel problème est défini par:-

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \\ w &= 0 \end{aligned} \right\}$$

II.8

les relations entre les déformations et les déplacements

sont :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_z &= \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Ainsi les contraintes agissant sur un tel corps seront :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II.9}$$

sous une forme simplifiée : $[\sigma] = [D]\{\epsilon\}$.

II.5 - PROBLEME DE CONTRAINTES PLANES :

Contrairement à la condition de déformation plane, la condition de contrainte plane est caractérisée par le fait que la dimension suivant la direction z est négligeable par rapport aux deux autres.

Dans ce cas les contraintes sont de la forme :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y) \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y) \\ \tau_{xz} &= \tau_{yz} = \sigma_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{II.10}$$

ce qui implique :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] \\ \tau_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \epsilon_z &= \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \right\}$$

En inversant le système d'équations on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II. 11}$$

La forme simplifiée est donnée par $[\sigma] = [D] \{\epsilon\}$.

[D] est la matrice d'élasticité en contraintes planes.

REMARQUE :-

L'état de déformation plane est obtenu à partir de celui de contrainte plane en remplaçant dans la matrice [D] de cet état, ν par $\frac{\nu}{1-\nu}$.

1.6 - ELASTICITE EN DEUX DIMENSIONS :-

Les inconnues de base en élasticité sont les contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy} pour les déterminer on a les deux équations d'équilibre suivantes :-

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{II. 12}$$

X et Y sont les composantes de forces de volume.

On a dans ce cas un système de deux équations avec 3 inconnues σ_x , σ_y et τ_{xy} , on a donc un problème de degré d'hyperstaticité $k=1$.

Pour le résoudre, il nous faut une troisième équation, celle-ci peut être prise des équations de déformations.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{II.13}$$

Ces trois composantes sont exprimées par deux fonctions continues u et v , et donc elles ne peuvent pas être choisies arbitrairement, car il existe entre ces déformations la relation suivante qui peut être déduite facilement de (II.13).

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \text{II.14.}$$

cette dernière équation est appelée équation de compatibilité des déformations, mais celle-ci n'est pas en terme de contraintes pour se faire, il faut écrire les déformations en fonction des contraintes par le biais des équations de Hook généralisées :-

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\epsilon_z = \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

ce qui implique :-

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \text{II.15.a}$$

En dérivant les équations d'équilibre (II.1) puis en les additionnant terme à terme et après substitution dans l'équation (II.15.a) on obtient :-

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) = -(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} \right) \quad \text{II.15.b}$$

considérons le cas où la seule force de volume est le poids on aura :-

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

c'est à dire :- $\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0$

II. 16

tel que ∇^2 : est l'opérateur Laplacien.

à ce niveau, nous avons obtenu 3 équations et le problème est théoriquement résolu.

REMARQUES :-

- Les équations (I.1) traduisent l'équilibre de la variation des contraintes mais elles n'impliquent en aucun cas l'équilibre des contraintes.

- Dans le cas pratique où les forces massiques sont constantes, l'équation de compatibilité (II.16) est valable aussi bien pour le cas des contraintes planes que celui des déformations planes.

II.7. METHODES DE RESOLUTIONS DU PROBLEME :-

Pour la résolution du problème ainsi formulé il existe plusieurs techniques :-

- les méthodes analytiques.

- les méthodes numériques :-

a. La méthode des éléments finis.

b. la théorie des équivalences.

c. la méthode des différences finis.

II.8. CONCLUSION :-

Les équations développées dans ce chapitre sont indispensables pour l'application de la méthode des éléments finis à l'étude de l'élasticité plane. Ces équations le sont aussi pour la formulation de la méthode analytique, cette

dernière présente beaucoup de difficultés lors de l'analyse...
des structures complexes fréquemment rencontrés par les
Ingénieurs.

Dans le but d'arriver à des résultats capables de
décrire le comportement réel des structures, il est préfé-
-rable d'utiliser l'une des méthodes les plus générales
et les plus pratiques.

Dans des cas pareils, on a souvent recours à
l'utilisation des méthodes numériques et plus particulière-
-ment dans le cas où les calculateurs numériques sont
disponibles.

Parmi les méthodes numériques les plus utilisées;
la méthode des éléments finis qui a donné des résultats
satisfaisants comparés à ceux obtenus par la méthode
analytique considérée comme méthode exacte.

CHAPITRE . III

. PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS .

III.1. INTRODUCTION :-

Durant ces vingt dernières années, l'informatique a subi un développement considérable, et avec elle, la méthode des éléments finis s'affirma comme un outil très puissant permettant de résoudre des problèmes de structures très complexes alors que la méthode classique de la résistance des matériaux entraînerait fréquemment des calculs très longs et fastidieux.

Actuellement, la méthode des éléments finis est très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronotique, aérospatiale, navale et nucléaire et elle est en-train de se développer dans les applications de la mécanique des fluides, le magnétisme et l'électricité.

Les techniques de résolution de cette méthode qui se basent principalement sur le calcul informatique présentent de grands avantages, nécessitent peu de moyens matériels et s'avère très souple et rapide à l'usage comparées au système de calcul classique de la R.D.M. Elles permettent de visualiser instantanément l'influence d'une variation de l'un des paramètres de la structure: paramètre physique, paramètre géométrique, paramètre de construction sur le comportement de cette dernière.

Les structures utilisées sont composées d'une réunion de parties indépendantes reliées entre elles par des points,

une telle structure est appelée "structure treillie" Figure III.1
 Les points auxquels les parties indépendantes sont reliées étant
 communément appelés des noeuds. L'analyse de telles structures
 peut s'effectuer en considérant que le comportement de chaque
 partie est indépendant, puis on assemble les parties indépen-
 dantes de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité
 des déplacements soient satisfaits en chaque noeud.

En plus des "structures treillis", on a souvent besoin d'étu-
 dier les structures continues telle que les plaques, les poutres.
 épaisses, ... etc. dans ce cas les parties continues sont présentées
 par des structures composées d'éléments indépendants reliés par
 des noeuds uniquement. Figure III.2

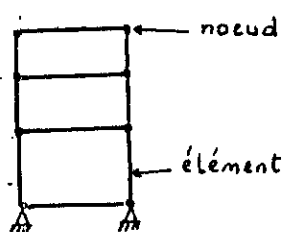


Figure III.1. Modélisation par éléments
 Finis d'une structure treillie

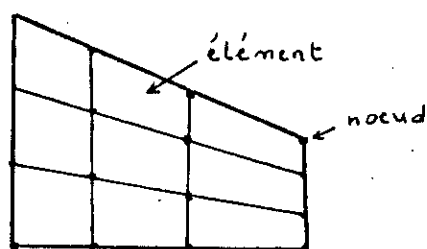


Figure III.2. Modélisation par
 éléments Finis d'une
 structure continue

III.2 - ANALYSE DES STRUCTURES CONTINUES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS :-

La méthode des éléments finis représente une extension
 de la méthode matricielle pour l'étude du continu. Elle permet
 à l'ingénieur d'étudier le comportement d'un domaine continu
 en le traitant comme une structure composée d'éléments indépen-
 dants reliés entre eux par des noeuds. chacun de ces éléments
 possède ses propres fonctions qui permettent de décrire l'état

des contraintes et des déplacements, il est important que ces fonctions assurent la continuité du comportement de l'ensemble du domaine

Les deux types d'éléments les plus communément utilisés pour la modélisation du continu sont les éléments de forme triangulaire et ceux de forme rectangulaire, ils sont adéquats pour un grand nombre de problèmes d'élasticité plane.

En général, la précision des solutions augmente avec l'augmentation du nombre d'éléments considérés, d'où l'augmentation du temps de calcul nécessaire pour obtenir la solution, cela donne donc un coût de calcul élevé, par conséquent on utilise dans ce cas une subdivision graduelle en éléments pour permettre une étude plus détaillée des régions de la structure où l'on attend une grande concentration des contraintes, par exemple, autour des ouvertures et près des charges concentrées.

Le système de charges extérieures agissant sur la structure est remplacé par un système de forces équivalentes concentrées aux noeuds. Dans le cas des charges concentrées, le maillage doit être choisi de façon que les noeuds se trouvent aux points d'application des charges. Pour des charges distribuées on doit calculer les charges nodales équivalentes.

Notons les trois conditions de bases qui doivent être vérifiées lors de l'analyse des structures par la méthode des éléments finis :-

- L'équilibre des forces :- les forces internes doivent équilibrer les forces externes appliquées aux noeuds.

- La compatibilité des déplacements :- Après déformation sous charges les éléments doivent se rencontrer aux noeuds.

- Lois du comportement des matériaux :- pour traiter

un problème en éléments finis, il est nécessaire de connaître les relations entre les charges et les déplacements pour chaque structure. Dans le cas de l'élasticité plane, ces relations se réduisent à la loi de Hook.

III.3. FORMULATION :-

Il existe au sein de cette méthode plusieurs formulations dont les plus connus sont :-

- La méthode de rigidité ou de déplacement.
- La méthode de souplesse ou de contrainte.

Pour la première méthode on définit un champ de déplacement en supposant qu'il satisfait la compatibilité des déplacements à l'intérieur de l'élément, ceci en choisissant une fonction de déplacement capable de définir l'état de déplacement d'une façon unique.

Dans la formulation de cette méthode, on suppose que les conditions de compatibilité des déplacements sont satisfaites ce qui nous amène à poser les équations d'équilibre, puis les résoudre afin de déterminer les déplacements nodaux.

La deuxième méthode consiste à définir un champ de contraintes de façon à assurer l'équilibre de l'élément puis poser les équations de compatibilité des déplacements et les résoudre afin d'obtenir les forces.

Dans notre cas, on a opté pour la première méthode qui est la plus utilisée à cause des facilités qu'elle permet par rapport aux autres méthodes, dont on peut citer par exemple qu'il est plus facile d'approcher un champ de déplacements que de contraintes. Les déplacements seront donc les inconnus du problème. On approche le champ de ces déplacements par des fonctions d'interpolation.

généralement polynomiales assurant la continuité des déplacements à l'interface de l'élément et aux noeuds.

Les fonctions d'interpolation peuvent définir l'état de déformations à l'intérieur de l'élément en fonction des déplacements nodaux, ces déformations jointes à d'éventuelles déformations initiales et compte tenu des propriétés des matériaux définissent l'état de contraintes en tout point de l'élément.

REMARQUE :-

On doit noter que du moment qu'on a opté pour la formulation de la "méthode des déplacements", le champ de contraintes ne sera pas continu et donc incompatibilité des valeurs de contraintes aux noeuds car en concentrant aux noeuds les forces nodales équivalentes les conditions d'équilibre ne sont satisfaites que globalement.

III. 4. DIFFERENTES ETAPES DE L'ETUDE D'UNE STRUCTURE PAR ELEMENTS FINIS :-

Après décomposition de la structure en un certain nombre d'éléments finis suivant un maillage adéquat, nous allons procéder à la formulation du problème en suivant les étapes décrites ci dessous :-

1^{re} Etape :-

Elle consiste à choisir un système de coordonnées et une numérotation des noeuds appropriés pour l'élément considéré. connaissant les degrés de liberté de l'élément et les forces appliquées aux noeuds, on peut exprimer la relation qui lie le vecteur forces au vecteur déplacements comme suit :-

$$\{F^e\} = [K^e]\{\delta^e\}$$

III.1

où :

$[K^e]$: est la matrice de rigidité de l'élément.

2^e Etape :-

Elle consiste à approcher le champ de déplacement par une fonction qui définit d'une façon unique l'état des déplacements en tous points de l'élément. Cette fonction peut être représentée par une expression polynomiale, et puisque le but de cette dernière est d'exprimer les déplacements $\delta(x,y)$ de l'élément en termes de déplacements nodaux $\{\delta^e\}$, elle doit contenir un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté de l'élément. L'état de déplacement en chaque point (x,y) de l'élément s'écrit alors :-

$$\{\delta(x,y)\} = [f(x,y)]\{a\} \quad \text{III.2}$$

où $\{a\}$: est un vecteur colonne de coefficients inconnus.

3^e Etape :-

Dans cette étape, on relie les déplacements généralisés de l'élément à ces déplacements nodaux, ensuite on exprime les coefficients inconnus de la fonction déplacement $\{a\}$ en fonction des déplacements nodaux $\{\delta^e\}$. En remplaçant les coordonnées nodales par leurs valeurs dans l'équation (III.2) on obtient :-

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1^e\} \\ \{\delta_2^e\} \\ \vdots \\ \{\delta_n^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f(x_1, y_1)\} \\ \{f(x_2, y_2)\} \\ \vdots \\ \{f(x_n, y_n)\} \end{Bmatrix} \{a\}$$

ce qui peut être écrit :-

$$\{a\} = [A] \{\delta^e\}$$

Les termes de $[A]$ étant connus, puisque ce sont simplement

les coordonnées des noeuds ; alors le vecteur des coefficients inconnus

$\{a\}$ sera donné par :

$$\{a\} = [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad \text{III.3}$$

En remplaçant $\{a\}$ dans (III.2), on obtient la relation qui

lie les déplacements en tout point (x, y) de l'élément aux dépla-

cements nodaux :-

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)] [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad \text{III.4}$$

4^e Etape :-

Elle consiste à relier les déformations $\{\epsilon(x, y)\}$ en

chaque point (x, y) de l'élément aux déplacements. Pour les pro-

blème de l'élasticité plane le vecteur déformations est donné

par :-

$$\{\epsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Les relations qui lient les déformations aux déplacements

sont données par la théorie de l'élasticité (voir chapitre II)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\}$$

tel que : u et v représentent les composantes du vecteur $\{\delta(x, y)\}$

on obtient après dérivation :-

$$\{\epsilon\} = [C] \{a\}$$

En remplaçant $\{a\}$ par son expression, on obtient :-

$$\{\epsilon(x, y)\} = [C] [A]^{-1} \{\delta^e\}$$

qui peut se mettre sous la forme :-

$$\{\epsilon(x, y)\} = [B] \{\delta^e\} \quad \text{III.6}$$

5^e Etape: -

Elle consiste à relier les contraintes internes $\sigma(x, y)$ aux déplacements nodaux. Les relations qui lient les déformations aux contraintes internes de l'élément sont données par la théorie de l'élasticité (chapitre II)

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \{\epsilon(x, y)\} \quad \text{III.7}$$

En remplaçant $\{\epsilon(x, y)\}$ par son expression dans (III.7), on obtient la relation cherchée: -

$$\{\sigma(x, y)\} = [D][B] \{\delta^e\} \quad \text{III.8}$$

6^e Etape: -

Cette étape consiste à relier les charges nodales aux déplacements nodaux de l'élément considéré afin d'obtenir la matrice de rigidité de cet élément.

Les contraintes internes $\{\sigma(x, y)\}$ seront remplacées par les charges nodales statiquement équivalentes, puis ces dernières seront reliées aux déplacements nodaux, ainsi on aura défini la matrice de rigidité élémentaire. Pour la détermination de l'ensemble des charges nodales statiquement équivalentes aux contraintes internes, on utilise le principe des travaux virtuels.

Énoncé du principe: - En communiquant à l'élément un déplacement virtuel $\{d\delta^e\}$, le travail externe total doit être égal au travail interne total des contraintes absorbé par la structure. Le travail extérieur des charges nodales notées $\{F^e\}$ est donné par:

$$W_{ext} = \{d\delta_1^e\} \{F_1^e\} + \{d\delta_2^e\} \{F_2^e\} + \dots + \{d\delta_n^e\} \{F_n^e\} \quad \text{III.9}$$

Le travail interne total est celui des contraintes dû à une variation de déformations $\{d\varepsilon(x,y)\}$ qui est le résultat du déplacement virtuel.

Ce travail est donné par unité de volume sous la forme:-

$$w^{int} = \{d\varepsilon(x,y)\}^T \{\sigma(x,y)\}$$

Le travail total interne sera:-

$$\int_V w^{int} dV = \int_V \{d\varepsilon(x,y)\}^T \{\sigma(x,y)\} dV \quad \text{III.10}$$

En imposant donc des déplacements virtuels $\{d\delta^e\}$, les déformations correspondantes seront: $\{d\varepsilon(x,y)\} = [B]\{d\delta^e\}$. En remplaçant cette expression et l'expression de $\{\sigma(x,y)\}$ de III.8 dans III.10, on

aura:-

$$\int_V w^{int} dV = \int_V \{d\delta^e\}^T [B]^T [D] [B] \{d\delta^e\} dV$$

En tenant compte du fait que le principe des travaux virtuels est valable pour n'importe quel système de déplacements, il est donc commode de choisir les déplacements virtuels aux noeuds égaux à l'unité on obtient alors:-

$$\{F^e\} = \int_V [B]^T [D] [B] \{\delta^e\} dV \quad \text{III.11}$$

En remplaçant $\{F^e\}$ par son expression de (III.1) dans (III.11), on obtient finalement la matrice de rigidité d'un élément sous la forme:-

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad \text{III.12}$$

7^e Etape:-

Quand la matrice de rigidité est déterminée pour un élément typique dans la structure, les équations pour tous les éléments de la structure doivent être assemblées pour l'obtention d'un système d'équations qui régit tout le système, en assemblant bien entendu les matrices de rigidité de tous les éléments.

le système final est donné par:-

$$\{F\} = [K^G] \{\delta\} \dots \dots \dots \quad \text{III.13}$$

$\{F\}$: est le vecteur forces extérieures appliquées aux noeuds de la structure, chaque force est la somme des forces appliquées aux noeuds adjacents.

$\{\delta\}$: le vecteur déplacements nodaux, chaque déplacement dans le vecteur δ a la même valeur que les déplacements des noeuds adjacents.

$[K]$: La matrice de rigidité globale de toute la structure dont les termes sont la somme des termes appropriés dans la matrice de rigidité des éléments qui ont un déplacement commun.

8: Etape:-

Cette étape consiste à relier les contraintes aux déplacements nodaux. l'équation (III.8) nous donne cette relation:

$$\{\sigma(x,y)\} = [H] \{\delta^e\} \quad \text{avec: } [H] = [D][B]$$

Cela rend possible l'évaluation des contraintes une fois que le problème global a été résolu pour les déplacements nodaux.

III.5 - ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRE A 6 DEGRES

DE LIBERTE POUR L'ETUDE DE L'ELASTICITE PLANE:

L'élément triangulaire est l'un des éléments les plus simple dans l'étude de l'élasticité plane. Pour déterminer sa matrice de rigidité on suit les étapes décrites au paragraphe précédent, en se basant sur la figure (III.3).

Les noeuds sont numérotés en i, j et k et les coordonnées sont respectivement (x_i, y_i) , (x_j, y_j) et (x_k, y_k) .

l'élément possède 2 degrés de liberté par noeud, en tout 6 degrés de liberté. Les déplacements sont dans le plan

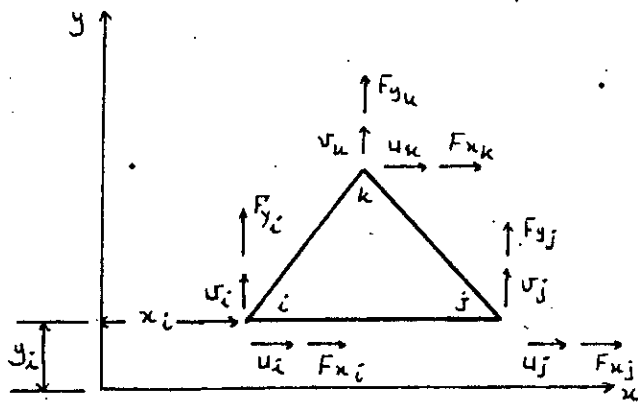


Figure III.3 . Numérotation des noeuds et système de coordonnées .

Les déplacements peuvent être obtenus en considérant les mouvements u et v dans les directions x et y respectivement. On a dans ce cas 6 degrés de liberté, donc on a besoin de 6 coefficients inconnus dans le polynôme représentant le mode de déplacement permis. La représentation la plus simple est donnée par les deux expressions linéaires :-

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y$$

$$v(x, y) = a_4 + a_5 x + a_6 y$$

qui peuvent s'écrire sous la forme matricielle :-

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \{a_i\} \quad i=1, \dots, 6$$

$$\text{c'est à dire :- } \{\delta(x, y)\} = [f(x, y)] \{a\}$$

L'étape qui suit consiste à exprimer les constantes $\{a\}$ en fonction uniquement des déplacements nodaux δ_i^e , δ_j^e et δ_k^e de l'élément. Ces déplacements deviendront ainsi les degrés de liberté inconnus du système. Connaissant les coordonnées x et y des 3 noeuds, nous pouvons écrire que :-

$$\{\delta^e\} = [A] \{a\}$$

où :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$$

Pour un élément particulier du maillage, la matrice $[A]$ est toujours définie numériquement. En inversant la matrice $[A]$ on obtient : $\{a\} = [A]^{-1} \{\delta^e\}$.

Les déformations sont obtenues, en dérivant les fonctions des déplacements qu'on peut écrire sous la forme matricielle :

$$\{\epsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \{a_i\} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

En remplaçant $\{a\}$ par son expression on aura :

$$\{\epsilon(x, y)\} = [C][A]^{-1} \{\delta^e\} = [B] \{\delta^e\}$$

Le produit matricielle $[C][A]^{-1}$ étant effectué on obtient :

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \\ x_k - x_j & y_j - y_k & x_i - x_k & y_k - y_i & x_j - x_i & y_i - y_j \end{bmatrix}$$

avec $2\Delta = 2 \times$ aire du triangle $= (x_j y_k - x_k y_j) - (x_i y_k - x_k y_i) + (x_i y_j - x_j y_i)$

La relation qui lie les contraintes internes dans l'élément aux déformations est donnée par l'équation (III.7) sous la forme générale.

avec :

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad \text{: qui représente la matrice d'élasticité du matériaux}$$

La relation qui lie les contraintes aux déplacements est donnée par l'équation (III.8).

Pour l'obtention de la matrice de rigidité, on utilise la relation qui lie les contraintes internes aux forces nodales donnée par le principe des travaux virtuels, on aboutit finalement à l'équation (III.12). Notons dans ce cas que les matrices $[B]$ et $[D]$ ne contiennent que des termes constants, on peut donc les faire sortir de l'intégration, et il nous reste que le terme $\int_V dV$. Pour une épaisseur constante "L" de la structure, l'intégrale sera égale à :

$$\int_V dV = L \cdot \text{aire du triangle} = L \cdot \Delta.$$

$$\text{d'où : } [K^e] = L \cdot \Delta \cdot [B]^T [D] [B]$$

En effectuant le produit matricielle $[B]^T [D] [B]$ en le multipliant par $L \cdot \Delta$ on aboutira à la matrice de rigidité de l'élément triangulaire.

II.6. CONCLUSION:-

Cette étude théorique, nous a donné une idée claire sur les facilités et les avantages que présente la méthode des éléments finis par rapport à la méthode de résistance des matériaux. L'avantage le plus important est qu'elle permet de résoudre des problèmes de structures complexes insolubles par les autres méthodes conventionnelles. elle permet aussi d'analyser n'importe quelle région de la structure étudiée.

Un Ingénieur en Génie-mécanique peut se familiariser avec cette méthode puisque les notions de bases et les connaissances nécessaires pour l'assimiler sont à sa portée, néanmoins, il lui reste à combler ses lacunes dans le domaine Informatique. car son assimilation dépend en grande partie d'une bonne utilisation des techniques de l'Informatique.

En résumé, Les notions qu'on doit avoir pour pouvoir appliquer cette méthode sont :

- Les mathématiques et le calcul matricielle.
- Les lois de la résistance des matériaux.
- En grande partie l'Informatique.

CHAPITRE IV.

APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS A L'ETUDE DE LA FLEXION D'UNE DENT D'ENGRENAGE

IV.1 INTRODUCTION: -

Comme nous l'avons souligné dans le premier chapitre, les phénomènes rencontrés lors de l'analyse des déformations des dents d'engrenages se situent à des échelles différentes. La résolution simultanée de ces effets par la méthode des éléments finis imposerait une très grande finesse du maillage et surtout près de la zone de contact [15], donc un coût de calcul élevé. Pour réduire ce coût et faire une extension à l'analyse tridimensionnelle, il est recommandé de faire une résolution séparée des effets globaux par la méthode des éléments finis et du problème de contact sera résolu de manière analytique [2]. Les résultats obtenus seront ensuite superposés à cause de la linéarité des petits déplacements afin d'obtenir la déformée totale.

L'essentiel de notre travail porte sur l'analyse des déplacements dus à la flexion et à la déformation Hertzienne. Pour une première approche, nous avons étudié une structure simple qui a la forme approchée de la dent.

Afin d'approcher le comportement réel de la dent et obtenir une précision plus grande sur les valeurs des déplacements, nous avons été amené à utiliser les dimensions réelles de la dent avec un maillage plus fin, et nous avons étudié l'influence de la position du point d'application de la charge sur les déplacements.

IV.2. ETUDE PRELIMINAIRE:-

Nous abordons l'étude de la flexion par l'analyse d'une structure très simple, en vue d'obtenir un aperçu sur les déplacements et les contraintes.

La structure décrite à les dimensions présentées sur la figure (IV.2). Elle représente une première schématisation de la dent.

IV.2.1. ETUDE D'UNE STRUCTURE A 36 ELEMENTS:-

La structure modélisée en éléments triangulaires est considérée encastree selon le contour ADBC.

Une force $W = 1615 \text{ N}$ est appliquée au noeud 29 suivant un angle $\alpha = 20.0^\circ$ par rapport à l'horizontal.

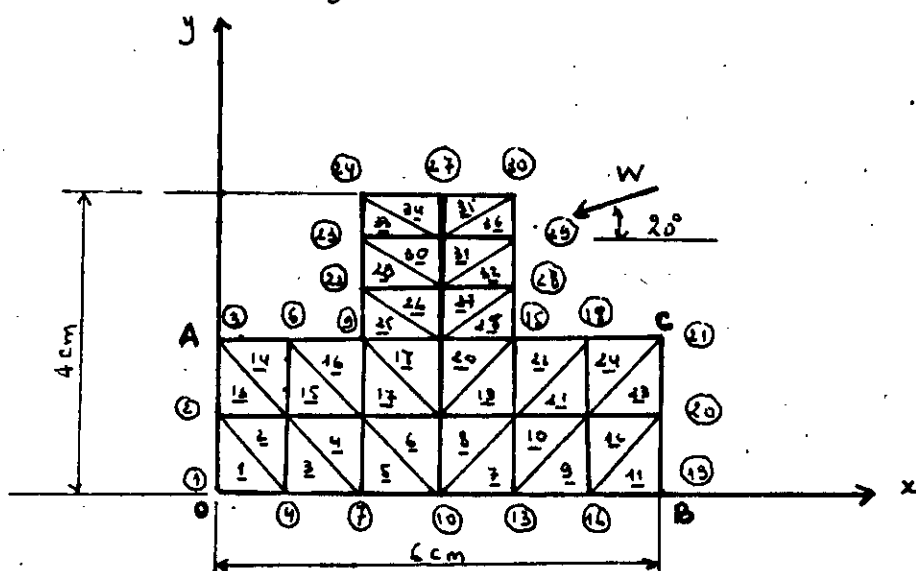


Figure IV.1 - Schéma simplifié de la dent

Le déplacement maximum est obtenu au noeud 30

$$\delta_{30} = 4,4614 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

les valeurs maximales des contraintes sont:

selon x: -

dans l'élément 31 - $\sigma_x = -20,56 \text{ N/mm}^2$

dans l'élément 16 - $\sigma_x = -14,80 \text{ N/mm}^2$

selon y: -

dans l'élément 25 $\sigma_y = -19,10 \text{ N/mm}^2$

dans l'élément 16 $\sigma_y = -13,74 \text{ N/mm}^2$

La contrainte de cisaillement maximale est obtenue

dans l'élément 32 : $\tau_{xy} = -19,22 \text{ N/mm}^2$

La structure déformée est représentée sur la figure (IV.2)

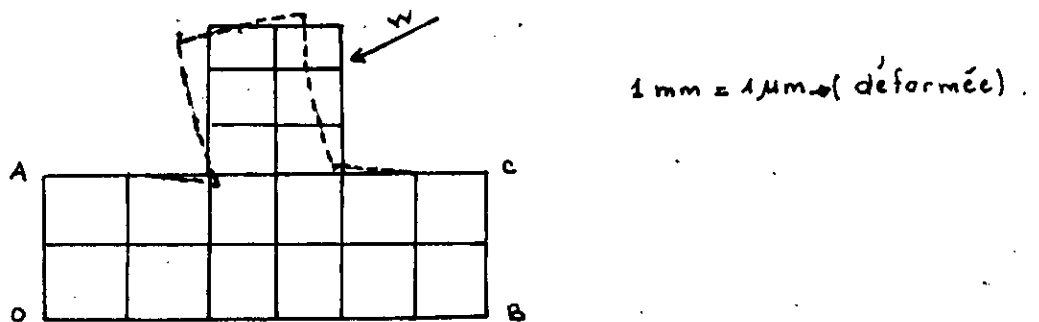


Figure IV.2. Schématisation de la déformée de la structure

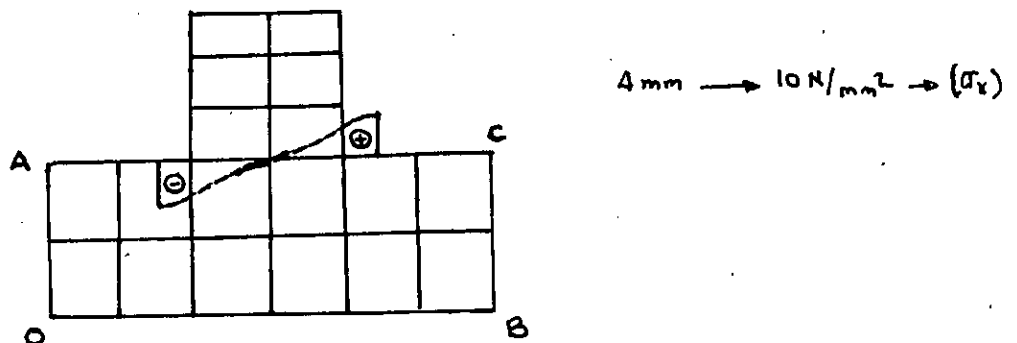


Figure IV.3. Visualisation des variations de la contrainte σ_x dans les éléments 16, 18, 20, 22

On remarque que les valeurs extrêmes sont cohérents avec leurs situations dans la structure, le déplacement maximum est obtenu au noeud 30 et les contraintes maximales dans la zone d'application de la charge et les zones correspondant au changement de forme près du pied de la dent.

IV.2.2 CONCLUSION:-

A partir de cette brève étude nous pouvons en tirer les conclusions suivantes:-

- La déformée fait apparaître au voisinage du point d'application de la force une zone plus incurvée. Nous savons que dans cette zone il faut faire une étude particulière soit en raffinant le maillage soit on procède par un calcul analytique, en utilisant la théorie de Hertz pour déterminer plus précisément la valeur du déplacement.

Le pied de la dent est soumis à deux états de contraintes, une zone de compression située sur le côté opposé au chargement et une zone de traction sur le côté correspondant au chargement.

IV.3. ETUDE GENERALE:-

IV.3.1 INTRODUCTION:-

Nous isolons du pignon une dent qui sera encastree au niveau de son embase et soumise à une force supposée constante.

On applique cette force aux différents noeuds situés sur le profil lié au contact et nous examinons son influence sur le comportement de la dent.

IV.3.2. DELIMITATION DU CONTOUR DE LA DENT:.

Dans cette étape, nous nous basons sur des études qui ont été faites [5] et confirmées par [2] par la méthode des éléments finis. Ces études ont permis d'optimiser le contour afin d'avoir une précision suffisante tout en maintenant un degré raisonnable du coût de calcul. Elles ont montrées qu'une profondeur d'encastrement d'au moins 1.5 fois le module de la dent par rapport au rayon de fond de dent est suffisante pour ne pas perturber le champ de contraintes en pied de la dent. Il est donc raisonnable de poser comme conditions aux limites que les déplacements étaient nuls le long du contour PQRS voir figure(IV.5).

tel que:

$$\overline{PQ} = \overline{RS} = 1.5 M_0 : M_0 \text{ est le module}$$

$$\overline{QR} = 2\pi \cdot R_c / Z :$$

$$\overline{PS} = 2\pi \cdot R_f / Z.$$

où R_c : est le rayon de la base de la dent

R_f : est le rayon du cercle de pied.

Z : est le nombre de dents.

IV.3.3. PRESENTATION DU MAILLAGE DE LA DENT:-

Nous avons maillé plus finement les zones où on espère trouver des problèmes, par exemple, les zones d'application de la charge ainsi que près des profils de raccordement c'est à dire les zones les plus chargées.

Notre structure est complexe, pour cela on n'a pas pu procéder à l'utilisation de la génération automatique

du maillage, pour l'introduction des données. Cela se fait donc manuellement.

Nous sommes arrivés à la discrétisation présentée sur la figure (IV.4), dont le nombre d'éléments total $NELT = 152$ et le nombre de noeuds $NNT = 97$.

Les caractéristiques de l'engrenage traité dans cette étude sont données dans le tableau (IV.1).

Note:

Le pignon et la roue sont identiques

```

*****
*Module de taillage MO= 3.175 *
*Nombre de dents Z= 28 *
*Coefficient de saillie Ha=1.0 *
*Coefficient de creux Hf=1.4 *
*Coefficient de deport X=0.000 *
* La largeur B= 6.2500 (mm) *
*L'angle de pression Alpha = 20.0000° *
*Le Rayon primitif Rp=44.45000[mm] *
*Le rayon de tete Ra= 40.00500[mm] *
*Le Rayon de pied Rf =47.62500[mm] *
*Le Rayon de base Rb=41.76934[mm] *
*L'Entraxe normale A= 88.90000[mm] *
*La droite d'action tit2= 30.40559[mm] *
*****

```

TABLEAU IV.1. :- Caractéristiques de l'engrenage étudié.

IV. 3. 4. INFLUENCE DE LA POSITION DE LA FORCE SUR
LES DEPLACEMENTS DE LA DENT : .

Nous avons cherché l'influence de la position d'application de la charge sur les déplacements des profils chargé et non actif. Pour cela, on a fait parcourir une charge w le long du profil de la dent à partir du noeud 64 au noeud 92.

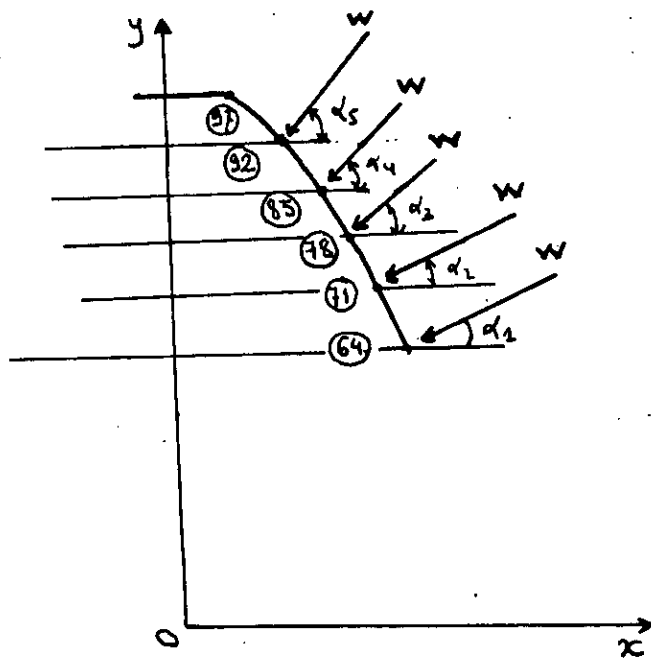


Figure IV.5

IV.3.4.1. DETERMINATION DE L'ANGLE D'INCLINAISON DE LA FORCE EN FONCTION DE SA POSITION:-

Les angles α_i que fait la force avec l'horizontal sont déterminés à partir des relations suivantes:

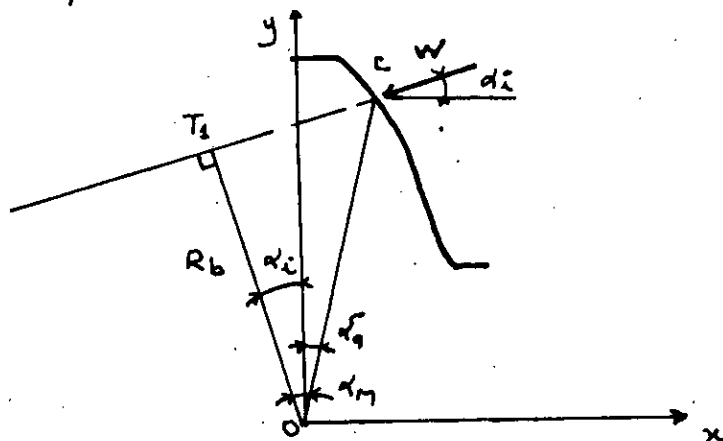


Figure IV.6.

$$\alpha_c = \alpha_m - \gamma_a$$

avec:

$$\alpha_m = \arccos \left[\frac{R_b}{(x_c^2 + y_c^2)^{1/2}} \right]$$

$$\gamma_a = \arctg \left(\frac{x_c}{y_c} \right)$$

IV.3.4.2. RESULTATS DES DEPLACEMENTS:-

Nous avons étudié les déplacements de la dent pour la condition suivante:-

- Un couple de dents en prise, charge appliquée au contact : $W = 1615 \text{ N}$

Module de Young : $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$

Coefficient de poisson : $\nu = 0.3$.

Constante d'élasticité : $\text{ALPHA} = 1$: cas des déformations planes.

Nous présentons dans ce qui suit quelques résultats des déplacements pour quelques positions de la force sur le profil de la dent.

SOLLICITATION AU NOEUD 64=-0.16150E+04

NOEUD	X[mm]	Y[mm]	DX[mm]	DY[mm]	D.RES[mm]
28	-4.2000000	4.2750000	-0.0002403	-0.0002160	0.0003231
29	-3.7500000	4.7500000	-0.0005131	-0.0003845	0.0006411
36	-3.4250000	5.1750000	-0.0007927	-0.0005391	0.0009587
42	-3.2000000	5.7000000	-0.0011629	-0.0007184	0.0013669
44	-3.0000000	6.4000000	-0.0016835	-0.0008824	0.0019007
51	-2.9000000	7.1600000	-0.0022011	-0.0009998	0.0024176
58	-2.7500000	8.1000000	-0.0027872	-0.0010110	0.0029649
65	-2.5000000	9.0500000	-0.0032823	-0.0009132	0.0034070
72	-2.1000000	10.0000000	-0.0036946	-0.0007340	0.0037668
79	-1.7500000	10.8750000	-0.0040160	-0.0005801	0.0040577
93	-1.1600000	12.3000000	-0.0044912	-0.0003558	0.0045052
34	4.2000000	4.2750000	-0.0002452	0.0001815	0.0003050
33	3.7500000	4.7500000	-0.0005274	0.0003156	0.0006146
40	2.3500000	5.3750000	-0.0010336	0.0002903	0.0010736
41	3.4250000	5.1750000	-0.0008346	0.0004325	0.0009400
43	3.2000000	5.7000000	-0.0012666	0.0005725	0.0013900
50	3.0000000	6.4000000	-0.0019139	0.0006901	0.0020345
57	2.9000000	7.1600000	-0.0027473	0.0007518	0.0028483
64	2.7500000	8.1000000	-0.0043311	0.0007704	0.0043991
71	2.5000000	9.0500000	-0.0037702	0.0006178	0.0038205
78	2.1000000	10.0000000	-0.0038301	0.0005671	0.0038719
85	1.7500000	10.8750000	-0.0040363	0.0005178	0.0040694
86	-1.5000000	11.5500000	-0.0042438	-0.0004781	0.0042707
92	1.5000000	11.5500000	-0.0042313	0.0004691	0.0042572
97	1.1600000	12.3000000	-0.0044585	0.0003793	0.0044746

TABLEAU N° IV.2

La première colonne du tableau représente les numéros des noeuds du profil chargé et non chargé :

X, et Y les coordonnées respectives des noeuds pour un repère lié à la dent.

D_x et D_y les déplacements suivant X et Y respectivement
 D_{RES} : est le déplacement résultant.

L'angle de pression dans ce cas : $\alpha = 12.2636^\circ$

La courbe représentant les déplacements du profil chargé et non chargé est donnée sur la figure ci-dessous.

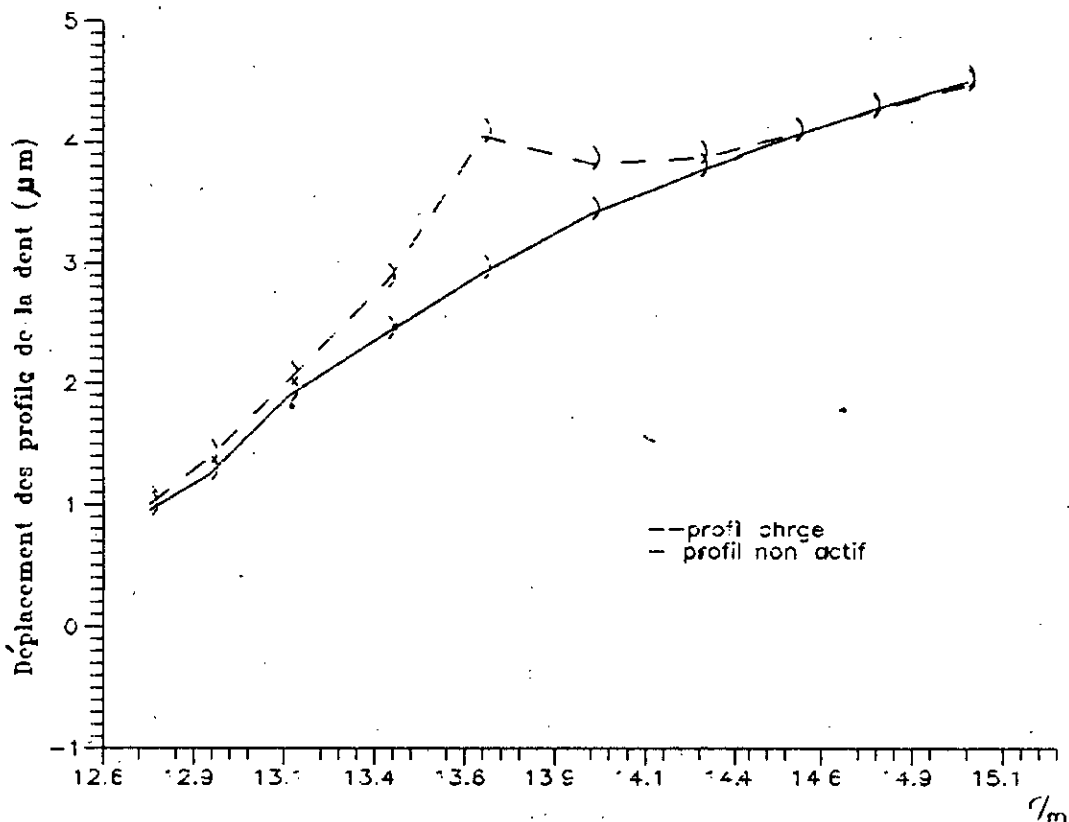


Figure IX.7. Variation des déplacements des profils chargé et non actif pour une charge appliquée au noeud 64.

des autres résultats sont présentés de la même façon:-

L'ANGLE DE PRESSION $\alpha = 16.45110$ [DEGRES]

SOLLICITATION AU NOEUD 71=-0.16150E+04

NOEUD	X[mm]	Y[mm]	DX[mm]	DY[mm]	D.RES[mm]
28	-4.2000000	4.2750000	-0.0002390	-0.0002789	0.0003673
29	-3.7500000	4.7500000	-0.0005204	-0.0005024	0.0007234
33	3.7500000	4.7500000	-0.0004954	0.0003895	0.0006302
34	4.2000000	4.2750000	-0.0002265	0.0002203	0.0003160
36	-3.4250000	5.1750000	-0.0008206	-0.0007115	0.0010861
41	3.4250000	5.1750000	-0.0007924	0.0005438	0.0009611
42	-3.2000000	5.7000000	-0.0012358	-0.0009613	0.0015656
43	3.2000000	5.7000000	-0.0012161	0.0007349	0.0014209
44	-3.0000000	6.4000000	-0.0018475	-0.0012162	0.0022119
50	3.0000000	6.4000000	-0.0018687	0.0009189	0.0020824
51	-2.9000000	7.1600000	-0.0024962	-0.0014327	0.0028781
57	2.9000000	7.1600000	-0.0026382	0.0010720	0.0028477
58	-2.7500000	8.1000000	-0.0032886	-0.0015265	0.0036256
64	2.7500000	8.1000000	-0.0037539	0.0010702	0.0039035
65	-2.5000000	9.0500000	-0.0040432	-0.0014433	0.0042931
71	2.5000000	9.0500000	-0.0054681	0.0009352	0.0055476
72	-2.1000000	10.0000000	-0.0046909	-0.0012139	0.0048454
78	2.1000000	10.0000000	-0.0050910	0.0007052	0.0051396
79	-1.7500000	10.8750000	-0.0051959	-0.0009996	0.0052912
85	1.7500000	10.8750000	-0.0052935	0.0006044	0.0053279
86	-1.5000000	11.5500000	-0.0055452	-0.0008510	0.0056101
92	1.5000000	11.5500000	-0.0055508	0.0005313	0.0055762
93	-1.1600000	12.3000000	-0.0059153	-0.0006696	0.0059530
97	1.1600000	12.3000000	-0.0058713	0.0004032	0.0058851

TABLEAU N° IV. 3

L'ANGLE DE PRESSION = 22.99490[DEGRES]

SOLLICITATION AU NOEUD 85=-0.16150E+04

NOEUD	X[mm]	Y[mm]	DX[mm]	DY[mm]	D.RES[mm]
28	-4.2000000	4.2750000	-0.0002247	-0.0004034	0.0004618
29	-3.7500000	4.7500000	-0.0005102	-0.0007369	0.0008963
33	3.7500000	4.7500000	-0.0004578	0.0005585	0.0007222
34	4.2000000	4.2750000	-0.0002000	0.0003104	0.0003693
36	-3.4250000	5.1750000	-0.0008362	-0.0010565	0.0013474
41	3.4250000	5.1750000	-0.0007598	0.0007935	0.0010987
42	-3.2000000	5.7000000	-0.0013205	-0.0014506	0.0019617
43	3.2000000	5.7000000	-0.0012148	0.0010919	0.0016334
44	-3.0000000	6.4000000	-0.0020884	-0.0018977	0.0028219
50	3.0000000	6.4000000	-0.0019564	0.0014182	0.0024163
51	-2.9000000	7.1600000	-0.0029639	-0.0023431	0.0037782
57	2.9000000	7.1600000	-0.0028201	0.0017546	0.0033214
58	-2.7500000	8.1000000	-0.0041354	-0.0026867	0.0049315
64	2.7500000	8.1000000	-0.0040251	0.0019771	0.0044845
65	-2.5000000	9.0500000	-0.0054029	-0.0027867	0.0060792
71	2.5000000	9.0500000	-0.0054069	0.0019376	0.0057435
72	-2.1000000	10.0000000	-0.0067632	-0.0025924	0.0072430
78	2.1000000	10.0000000	-0.0070474	0.0015427	0.0072143
79	-1.7500000	10.8750000	-0.0080282	-0.0022982	0.0083507
85	1.7500000	10.8750000	-0.0091964	0.0010890	0.0092606
86	-1.5000000	11.5500000	-0.0088700	-0.0020317	0.0090997
92	1.5000000	11.5500000	-0.0092039	0.0008229	0.0092406
93	-1.1600000	12.3000000	-0.0096995	-0.0016574	0.0098401
97	1.1600000	12.3000000	-0.0097343	0.0005559	0.0097502

TABLEAU N° IV. 4.

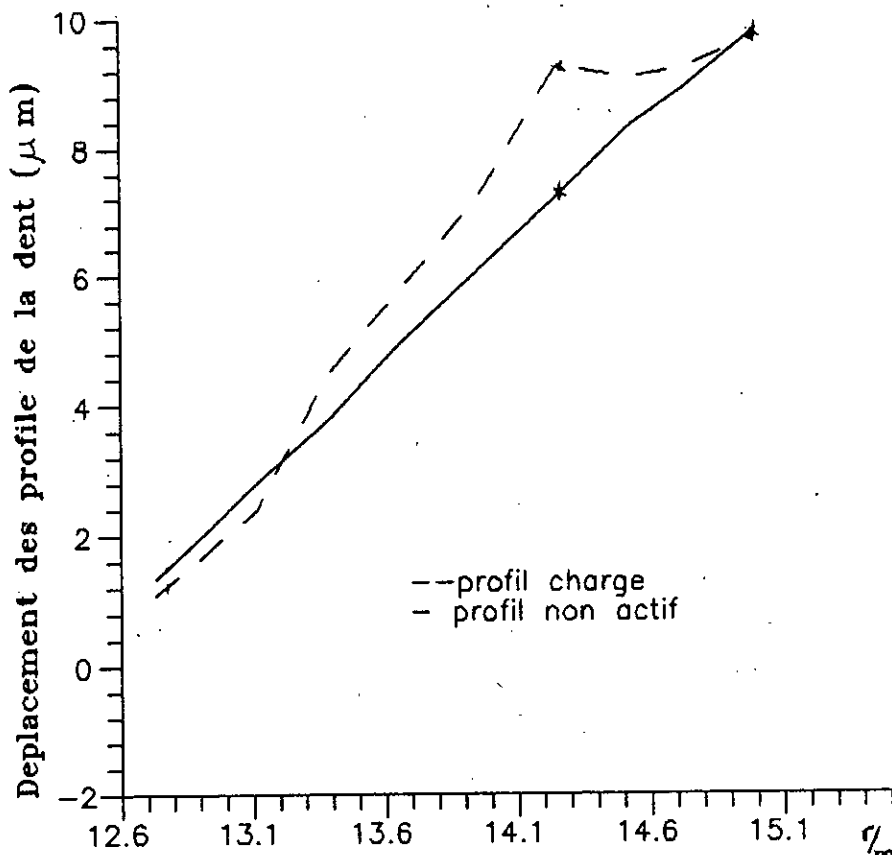


Figure IV.8 : Variation des déplacements des profils chargé et non chargé pour une force appliquée au noeud 85.

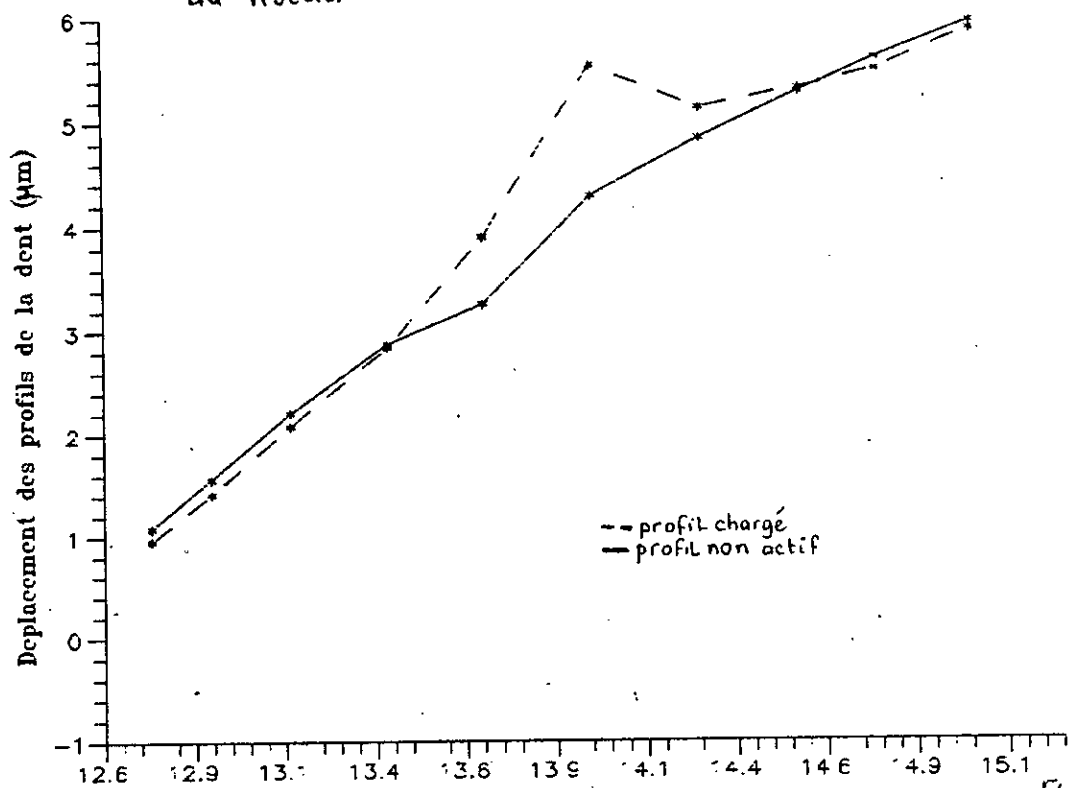


Figure IV.9 : variation des déplacements des profils chargé et non chargé pour une charge appliquée au noeud 72.

DISCUSSION:

- Les déplacements deviennent de plus en plus importants lorsque la charge s'éloigne du pied de la dent.

La déflexion Hertzienne au point de contact apparaît quelque soit le point d'application de la charge et diminue progressivement lorsqu'on s'éloigne du pied de la dent.

IV. 3.5. INFLUENCE DE LA POSITION DE LA FORCE SUR LES CONTRAINTES

En plus des déplacements, nous avons également étudié l'influence de la charge sur les contraintes.

IV. 3.5.1 INFLUENCE DE LA POSITION DE LA FORCE SUR LES CONTRAINTES PRES DU PIED DE LA DENT :.

Nous avons étudié l'état des contraintes dans la zone du pied de la dent. Pour cela nous avons tracé les courbes des contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy} en fonction de l'angle delimitant le contour dans une section ou $r = 39.74 \text{ mm}$ qui est très proche du pied de la dent pour une charge appliquée au noeud 78.

Dans les tableaux présentés les contraintes sont exprimées en $[\text{N}/\text{mm}^2]$.

REMARQUE:

Les courbes obtenues pour les autres positions de la charge sont semblables à ceux présentés, pour cela

```

*****
*   ELT   SIGX       SIGY       TAUXY   *
*****
*
*   37   -.8841E+02  -.1100E+03  -.5715E+02 *
*   38   -.3750E+02  -.5999E+02  -.3656E+02 *
*   41   -.3517E+02  -.4991E+02  -.2027E+02 *
*   42   -.4478E+01  -.3883E+02  -.1327E+02 *
*   43   -.8639E+00  0.1506E+02  -.1123E+02 *
*   44   0.2805 E+02  0.2650E+02  -.1406E+02 *
*   47   0.2921E+02  0.4184E+02  -.2713E+02 *
*   48   0.7501E+02  0.9137E+02  -.4709E+02 *
*
*   =====

```

TABLEAU IV.5 .. Valeurs des contraintes en pied de la dent pour une charge appliquée au noeud. 77

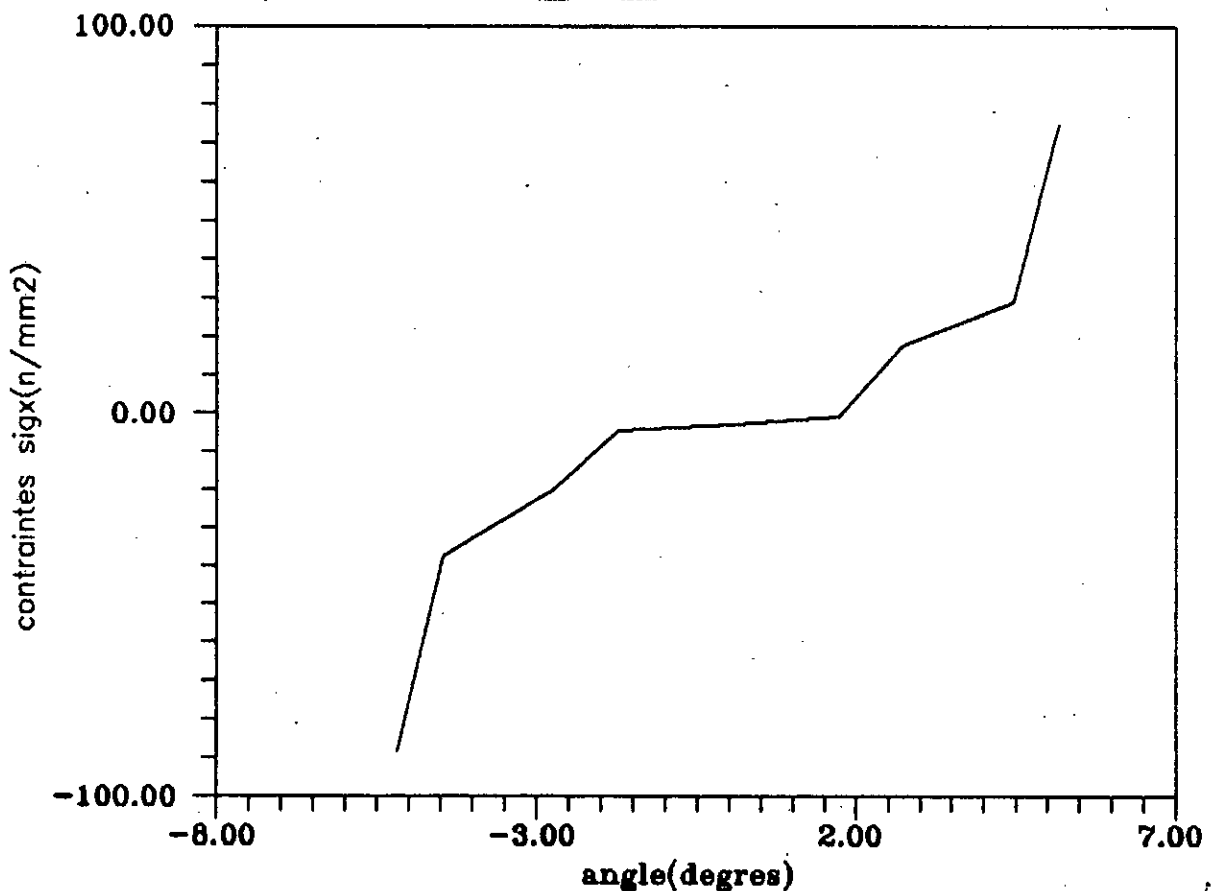


Figure IV.10 : - Variation des contraintes σ_x dans la zone du pied de la dent

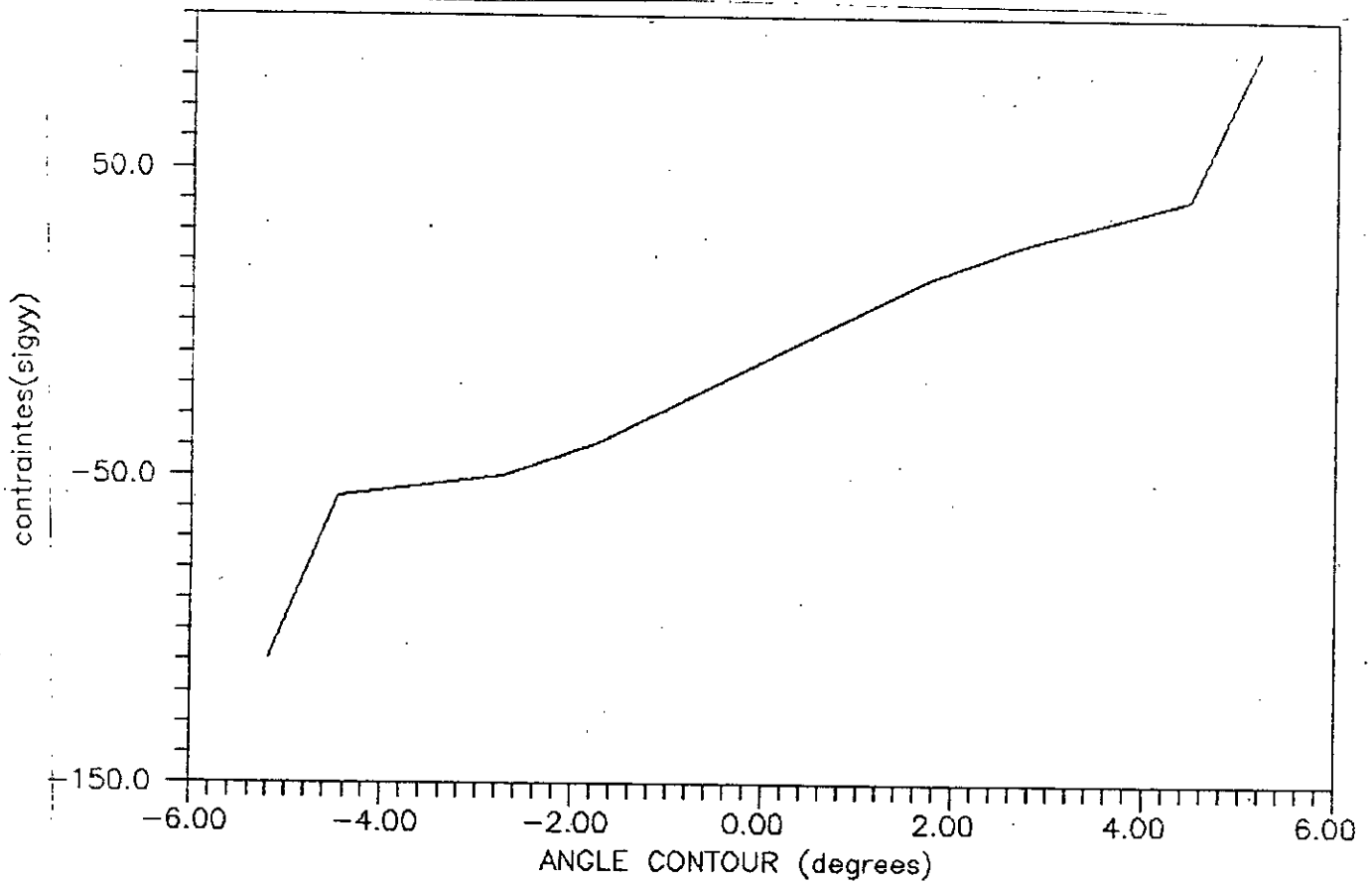


Figure IV.11 Variation des contraintes σ_y dans la zone du pied de la dent

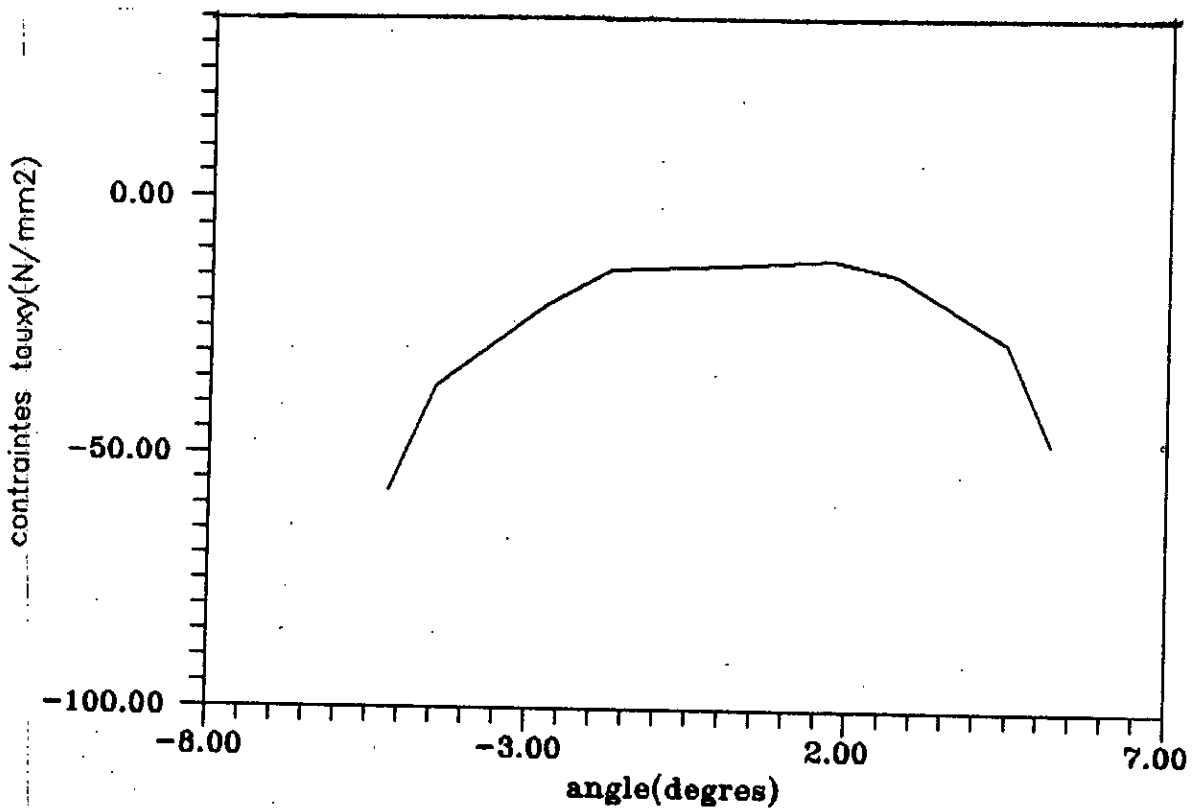


Figure IV.12. Variation des contraintes tangentielles τ_{xy} dans la zone du pied de la dent

nous nous limitons à cet exemple. et nous donnons les valeurs numériques pour une autre position.

```

*****
* ELT   SIGX       SIGY       TAUXY   *
*****
*
* 37  -.9338E+02  -.1255E+03  -.6214E+02 *
* 38  -.3829E+02  -.7075E+02  -.3964E+02 *
* 41  -.3580E+02  -.5882E+02  -.1861E+02 *
* 42  -.5976E+01  -.4881E+02  -.8930E+01 *
* 43  0.5231E+00  0.2296E+02  -.6450E+01 *
* 44  0.2780E+02  0.3295E+02  -.1210E+02 *
* 47  0.2909E+02  0.4989E+02  -.2909E+02 *
* 48  0.7752E+02  0.1027E+03  -.5033E+02 *
*
=====

```

TABLEAU N° VI.6 : Valeurs des contraintes σ_x, σ_y et τ_{xy} en pied de la dent pour une charge appliquée au noeud 85

DISCUSSION:-

- Les contraintes augmentent avec le bras de levier de la force c'est à dire lorsque le point d'application de la charge se déplace vers le sommet.
- Nous remarquons aussi la non linéarité des courbes.
- De plus, nous remarquons que la zone de compression qui se trouve dans le côté opposé au chargement est plus importante que celle de traction donc dans cette région qu'il faudra chercher les conditions de résistance.
- nous notons également l'importance des contraintes quand on se rapproche de la surface libre et l'importance de la contrainte σ_y dans toute la section.

IV.3.2 INFLUENCE DE LA POSITION DE LA FORCE SUR LES CONTRAINTES DES ELEMENTS SITUÉS AU VOISINAGE DU PROFIL DE RACCORDEMENT:-

Nous avons considéré dans ce cas la zone la plus chargée (compression) et on a relevé les contraintes en cinq points des centres de gravités des éléments situés au voisinage du profil de raccordement. Ces résultats sont présentés dans le tableau (N° IV.7).

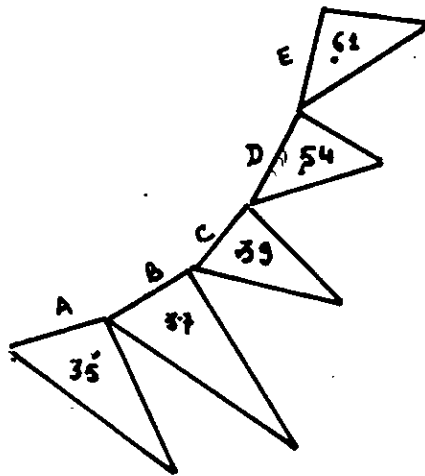


Figure IV.13. Visualisation des éléments situés sur le profil de raccordement.

d'ensemble des contraintes augmentent avec le déplacement de la force vers le sommet de la dent.

La zone la plus influencée commence à partir de l'élément 35 jusqu'à l'élément 54 puis les contraintes deviennent régulières. C'est la zone de concentration des contraintes.

La contrainte σ_y a toujours la plus forte valeur et subit une augmentation sensible.

NC	Contraintes [N/mm ²]	A	B	C	D	E
71	σ_x	-102.5	-92.39	-91.10	-63.97	-34.34
	σ_y	-92.75	-92.55	-121.7	-143.1	-123.3
	τ_{xy}	-57.12	-51.39	-59.91	-56.44	-39.64
78	σ_x	-106.2	-88.03	-89.92	-73.18	-40.54
	σ_y	-108.9	-119.3	-146.9	-177.7	-163.3
	τ_{xy}	-63.67	-56.88	-66.49	-63.5	-44.73
85	σ_x	-109.7	-92.38	-97.82	-82.13	-46.10
	σ_y	-120.4	-125.5	-171.4	-211.4	-199.6
	τ_{xy}	-69.97	-62.14	-73.58	-48.92	-48.92
92	σ_x	-111.8	-97.00	-103.5	-88.32	-50.15
	σ_y	-130.1	-137.1	-188.9	-235.4	-216.6
	τ_{xy}	-74.41	-65.84	-78.32	-75.05	-52.13

TABEAU N° IV - Variation des contraintes en fonction de la position de la force dans les éléments situés au voisinage du profil de raccordement.

NC: représente le numéro de noeud chargé.

IV.4 CONCLUSION:-

Cette étude nous a permis de mettre en évidence quelques résultats pratiques, afin de mieux cerner le problème de la flexion des dents d'engrenages. En particulier nous avons remarqué les points suivants:-

Les déplacements induits par la flexion deviennent de plus en plus importants lorsqu'on déplace la charge vers le sommet de la dent, ainsi que les contraintes et cela peut poser des problèmes pratiques surtout dans le fonctionnement.

Les zones les plus chargées sont :- La zone du profil de raccordement, - la zone du pied de la dent, - la zone d'application de la charge.

Le pied de la dent est sollicité par trois états de contraintes qui suivent une loi non linéaire.

Pour le déplacement obtenu au point d'application de la charge, il représente un déplacement de flexion plus grand qu'il n'est réellement. Pour trouver la valeur de la flexion pure dans la zone d'application de la charge, nous devons soustraire à la déformée que l'on obtient avec l'encastrement P.Q.R.S voir figure (II.3) la déformée parasite que l'on peut isoler approximativement en encastrent la dent en N.P.Q.R.S. Il existe une autre alternative pour obtenir la déformée de la flexion seule qui consiste à rigidifier la zone d'application de la charge pour éviter de faire deux fois le même calcul il suffit de modifier localement le module de Young au voisinage du point d'application de la charge.

Enfin on a pas pu procéder à une comparaison, puisque les résultats qu'on a trouvé dans la littérature [1] représentent le déplacement global de la dent en tenant compte des trois effets qu'on a cité dans le chapitre I. Ce qu'on peut relever en mettant en évidence notre travail que les déplacements induits par les autres effets ont le même ordre de grandeur que celui de la flexion.

CHAPITRE V

ETUDE DE LA DEFORMEE AU CONTACT

V 1. INTRODUCTION :-

Lors de l'analyse de la flexion de la dent on a obtenu des courbes de la déformée présentant une certaine particularité dans la zone de contact, pour obtenir une bonne précision dans cette zone, il faut faire une étude particulière soit en raffinant le maillage, soit on utilise une autre approche,

L'analyse théorique de ce problème a été l'objet de nombreuses recherches, notamment les travaux célèbres de Hertz et de Boussinesq. Cette analyse repose sur trois ensembles de valeurs :- le déplacement, la déformation et les contraintes pour chacune des deux massifs en contact, à leurs frontières voire même dans le film séparateur lorsqu'il est pris en compte [12]. Dans notre étude, seul l'aspect mécanique est abordé.

V 2. PRESENTATION DU PROBLEME :-

Lorsqu'une charge est exercée sur un contact, elle comprime les matériaux en contact et fait apparaître une aire de compression au lieu d'un point, la détermination de cette aire et la répartition des pressions dans le contact ont fait l'objet des travaux de Hertz en 1881.

V.3. HYPOTHESES DE HERTZ :-

Hertz a fondé son étude sur un certain nombre d'hypothèses pour rendre le problème plus soluble :-

- Les surfaces en contact sont parfaitement lisses.
- La force appliquée est perpendiculaire à la zone de contact, ce qui implique une force tangentielle due aux frottements nulle.
- Le domaine élastique des matériaux n'est pas dépassé.
- Les matériaux sont isotropes et homogènes.
- Les dimensions de l'aire du contact sont faibles comparées aux rayons de courbures des massifs en contact.

V.3.1 GEOMETRIE DU CONTACT :-

Hertz a fait son étude pour un contact entre deux paraboloides élastiques voir Figure(V.1).

d'équations

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_1^2}{R_{x_1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z_1^2}{R_{z_1}} \quad \dots \text{V-1.}$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_2^2}{R_{x_2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z_2^2}{R_{z_2}} \quad \dots \text{V-2.}$$

En choisissant dans le plan tangent au point de contact O, le système d'axe Oxz dans lequel la distance entre les deux surfaces du contact suivant la direction normale Oy s'écrit :-

$$y_1 + y_2 = Ax^2 + Bz^2.$$

Ⅴ.3

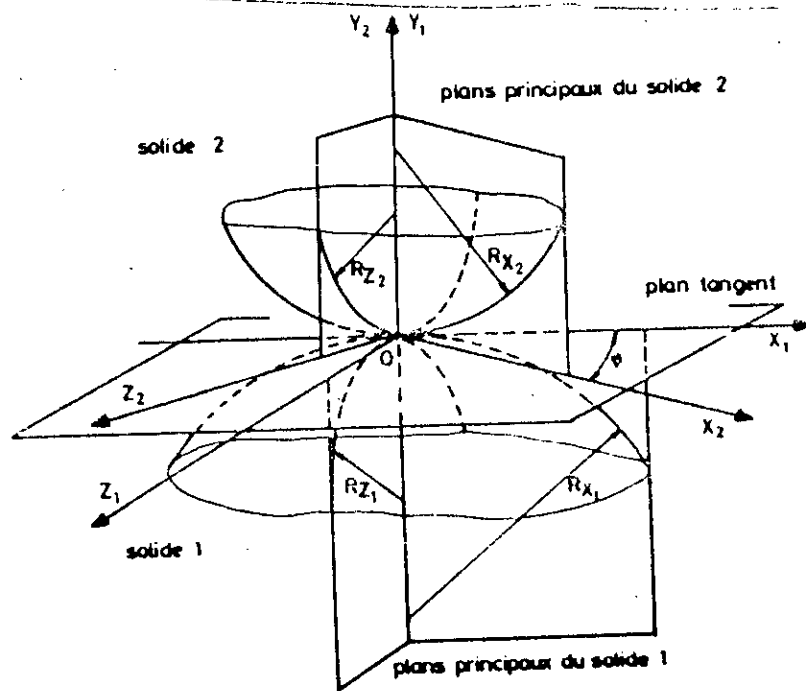


Figure Ⅴ.1- : Géométrie du contact hertzien elliptique.

où A et B sont des constantes dépendant des courbures principales de chacune des surfaces en contact et l'angle φ que font entre eux les plans principaux normaux. Le contact se définit donc par les deux solides de révolution caractérisés par leurs rayons de courbures principaux $R_{x_1}, R_{z_1}, R_{x_2}$ et R_{z_2} dans les plans principaux dont l'axe d'intersection OY est normal au contact et passe par le point O. Dans ces conditions les constantes A et B qui sont des courbures définissent la géométrie du contact dans le cas général mais dans le système d'axe OXYZ sont déterminées par les équations.

$$A + B = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{R_{x_1}} + \frac{1}{R_{x_2}} + \frac{1}{R_{z_1}} + \frac{1}{R_{z_2}} \right) \quad \text{V-4}$$

$$A - B = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{R_{x_1}} - \frac{1}{R_{z_1}} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_{x_2}} - \frac{1}{R_{z_2}} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{R_{x_1}} - \frac{1}{R_{z_1}} \right) \left(\frac{1}{R_{x_2}} - \frac{1}{R_{z_2}} \right) \cos 2\phi} \quad \text{V-5}$$

REMARQUE :-

les rayons de courbures sont positifs si le centre de courbure est à l'intérieur du solide correspondant et négatifs dans le cas contraire.

V-4. DETERMINATION DES PARAMETRES DE HERTZ :-

Considérons la figure (V.2) qui représente un contact entre deux paraboloides.

Après déformation, la distance entre deux points en contact sera caractérisée par :-

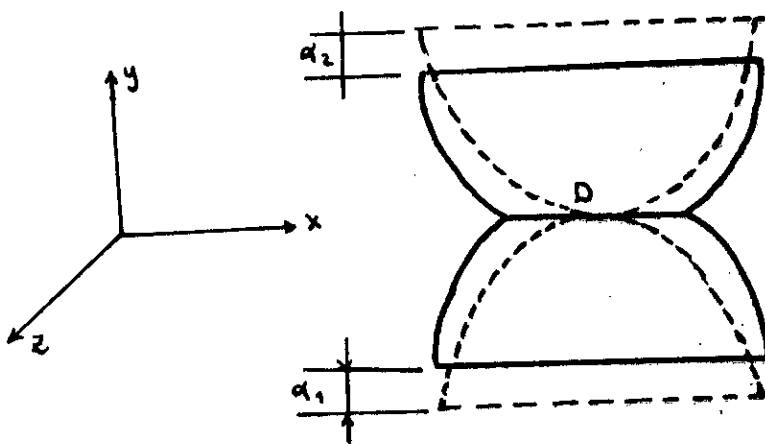


Figure V.2 :- Schématisation du contact
 — Après déformation
 --- Avant déformation.

$$y^* = y_1 + y_2 + v_1 + v_2 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \quad \text{V.6}$$

où :-

$v = v_1 + v_2$:- est le déplacement des points par rapport à leurs surfaces.

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$: est le déplacement des corps.

$$y = y_1 + y_2 = Ax^2 + Bz^2.$$

d'où on aura :

$$\alpha - (Ax^2 + Bz^2) = v \quad \text{V-7.}$$

A partir de ces travaux sur l'électrostatique, Hertz a imaginé que le potentiel quadratique Φ_0 était une solution de son équation. Pour cela, il a considéré un ellipsoïde pesant. Notons dans ce cas que la répartition des pressions dans le contact est ellipsoïdale.

Après la détermination de l'équation du potentiel quadratique, Hertz a posé comme solution de son équation :-

$$\alpha - (Ax^2 + Bz^2) = \frac{1}{E'} \Phi_0 = \frac{1}{E'} \int \frac{P(x,z) dx dz}{r}$$

ou encore :-

$$\alpha - (Ax^2 + Bz^2) = \frac{3W}{4E'} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u}\right) \frac{du}{[(a^2+u)(c^2+u)u]^{1/2}}$$

où u varie de 0 à $+\infty$ à l'intérieur de l'ellipsoïde.

Après identification terme à terme on obtient

$$\alpha = \frac{3W}{4E'} \int_0^{+\infty} \frac{du}{[(a^2+u)(c^2+u)u]^{1/2}} \quad \text{.. V - 8}$$

$$A = \frac{3W}{4E'} \int_0^{+\infty} \frac{du}{[(a^2+u)^3(c^2+u)u]^{1/2}} \quad \text{.. V - 9}$$

$$B = \frac{3W}{4E'} \int_0^{+\infty} \frac{du}{[(a^2+u)(c^2+u)^3u]^{1/2}} \quad \text{.. V - 10}$$

où A et B étant des données du problème, on tire a et c des deux dernières équations puis le rapprochement "de corps solides" de la première.

E' : - module de young équivalent des deux corps solides.

Hertz a résolu le problème dans les deux cas suivants.

- Un contact axisymétrique ($a=c$), les surfaces en contact sont des billes.

- Un contact cylindre-cylindre infiniment longs ($c \rightarrow \infty$)

V 4.1. SOLUTIONS PARTICULIÈRES DE HERTZ:-

V.4.1.1 - CONTACT ENTRE DEUX BILLES:-

Dans ce cas Hertz a obtenu,

$$\alpha = \frac{3W}{4E'} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(a^2+u)(a^2+u)u} = \frac{3\pi W}{4E'a}$$

$$A = B = \frac{3W}{4E'} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(a^2+u)^2 u^2} = \frac{3\pi W}{8E'a^2}$$

Puisque:

$$R_{x_1} = R_{z_1} = R_1 = R$$

$$R_{x_2} = R_{z_2} = R_2 = R$$

$$A = B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{R}$$

d'où :

$$a = \left(\frac{3\pi R}{4E'} \right)^{1/2}$$

$$\alpha = \left(\frac{9\pi^2 W^2}{16E'^2 R} \right)^{1/2}$$

$$P_0 = \frac{3}{2\pi^2} \times \left(\frac{16\pi W E'^2}{9R^2} \right)^{1/2}$$

V 4.1.2. CONTACT ENTRE DEUX CYLINDRES:-

Ce qui correspond au cas des engrenages droits à axes parallèles.

Dans ce cas $c \rightarrow \infty$. Ainsi l'équation de l'ellipsoïde de pression se réduit à :

$$\Phi_0 = \pi a b g \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} \right) \times \frac{du}{[u(a^2+u)]^{1/2}}$$

L'équation de Hertz s'écrit alors :-

$$\alpha - Ax^2 = \frac{1}{E'} \frac{W}{L} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+u}\right) \frac{du}{[u(a^2+u)]^{1/2}}$$

avec $\frac{W}{L}$: charge linéique en Z.

Alors les relations (V-8) et (V-9) deviennent :-

$$\alpha = \frac{1}{E'} \frac{W}{L} \int_0^{+\infty} \frac{du}{[u(a^2+u)]^{1/2}}$$

$$A = \frac{1}{E'} \frac{W}{L} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(a^2+u)[u(a^2+u)]^{1/2}}$$

On remarque que l'exposant de u dans l'équation de α est inférieur ou égal à 1, ce qui fait que le critère de convergence de Riemann n'est pas vérifié, d'où α est infini, on ne peut pas calculer le rapprochement des corps solides par cette méthode.

Par contre :-

$$a = \left(\frac{4WR}{LE'}\right)^{1/2}$$

$$P_0 = \left(\frac{WE'}{L\pi^2 R}\right)^{1/2} = \frac{2W}{\pi aL}$$

et le rayon équivalent selon l'axe x est donné

par :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{x1}} + \frac{1}{R_{x2}}$$

a : - La demi largeur de Hertz

P_0 : - La pression au centre de contact.

R_{x1}, R_{x2} : Les rayons de courbures en x des cylindres

V - 5. CALCUL DES PARAMETRES DE HERTZ DANS LA ZONE DE CONTACT DE DEUX DENTS :-

On supposera un contact cylindre - cylindre,

La pression superficielle, due au contact, entraîne une déformation dans la zone du point d'application de la charge. Ce déplacement doit se superposer au déplacement dû à la flexion.

On pourrait traiter ce problème par la méthode des éléments finis, mais il faudrait faire un maillage extrêmement fin près de la zone de contact. Pour des raisons d'économie on procédera à une détermination analytique du problème.

On utilisera les résultats obtenus par Hertz dans un cas pareil, le pignon et la roue sont identiques et ils ont les mêmes caractéristiques mécaniques, alors :-

Le module de young équivalent sera défini par :-

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \nu^2}{E}$$

avec $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ et $E_1 = E_2 = E$

Le rayon équivalent au point d'application de la charge est donné par :-

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_{x_2}}$$

En se basant sur la figure (V-3), on pourrait écrire :

$$\alpha = \alpha_m - \delta$$

tel que: $\operatorname{tg} \alpha_m = \frac{R_{x_1}}{R_b}$

R_b est le rayon de base de la roue.

R_{x_1} est le rayon de courbure du profil de la dent de la roue.

ainsi :

$$\cos \alpha_M = \frac{R_b}{(x_c^2 + y_c^2)^{1/2}}$$

$$\delta = \arctg \frac{x_c}{y_c}$$

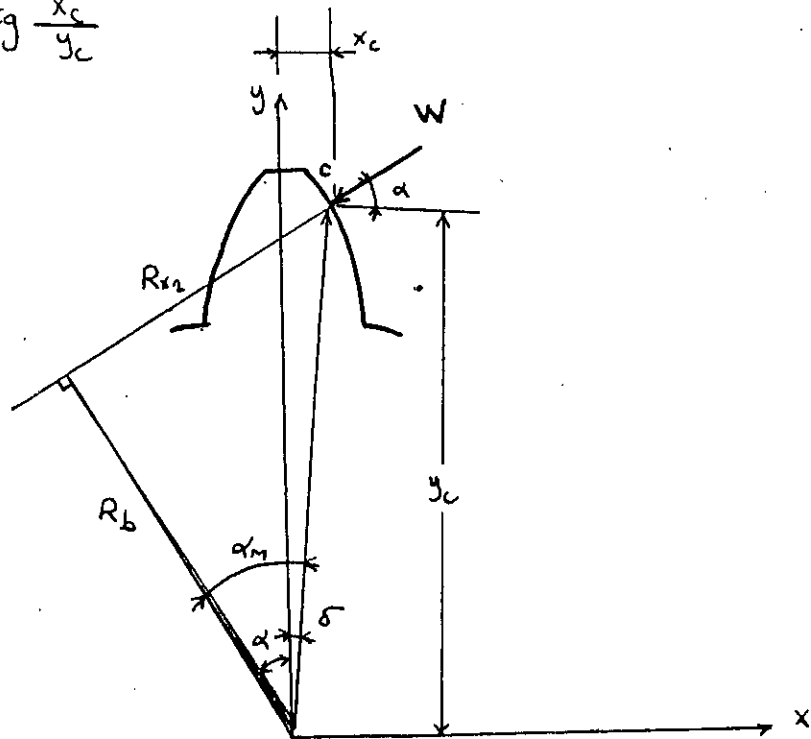


Figure V - 3 . Détermination de l'angle d'inclinaison de la force

des valeurs des coordonnées et des paramètres α_M , α et δ sont présentés dans le tableau (N° V 1), pour les 7 Noeuds sur le profil chargé.

NOEUD	COOR.X	COOR.Y	ALPHM	ALPHA	DELTA
57	2.90000	42.40250	10.6508	6.7383	3.91249
64	2.75000	43.34250	15.8940	12.2636	3.63044
71	2.50000	44.29050	19.6817	16.4511	3.23066
78	2.10000	45.24250	22.7443	20.0867	2.65756
85	1.75000	46.11750	25.1681	22.9949	2.17313
92	1.50000	46.79250	26.8500	25.0139	1.83607
97	1.16000	47.54000	28.5557	27.1579	1.39777

TABLEAU N° V 1.

avec :-

NOMBRE DE NOEUDS SUR LE PROFIL CHARGE NC= 7

CHARGE APPLIQUEE PAR UNITE DE LARGEUR WL= 0.25840E+03

MODULE DE YOUNG EQUIVALENT EEQ= 0.3573130E+06

COEFFICIENT DE POISSON POUR LES 2 ROUES NU= 0.300

Le rayon de courbure du profil de la dent conjuguée est donné par :

$$R_{x_2} = T_1 T_2 - R_{x_1}$$

tel que $T_1 T_2$: est le segment de la droite qui lie les points de tangence de la droite d'action avec les cercles de bases du pignon et de la roue respectivement :

a - La demi largeur de Hertz sera :

$$a = \sqrt{\frac{W R}{L \cdot E'}}$$

L : est la largeur de la dent.

R : est le rayon de courbure équivalent.

w : est la charge appliquée au contact.

b - La pression maximale de Hertz :-

Pour le contact linéaire Hertz a trouvé.

$$P_0 = P_{\max} = \frac{2W}{\pi \cdot a b}$$

c - La contrainte de cisaillement maximale :

Selon la théorie de Hertz, la pression maximale de Hertz P_0 crée des contraintes de cisaillement en sous couche, très près de la surface à $0.8 \cdot a$ (de la profondeur). La contrainte maximale est donnée par :-

$$\tau_{\max} = 0.3 P_{\max} = 0.3 P_0$$

On présente dans le tableau (V-2) les différentes valeurs de a, R, P_{\max} et τ_{\max} pour les 7 Noeud du profil

NOEUD	*A*	*REQ*	PMAX	TAUMAX
57	0.12982	5.82584	1267.1893	380.1568
64	0.14473	7.24124	1136.6177	340.9853
71	0.14826	7.59914	1109.5291	332.8587
78	0.14657	7.42625	1122.3696	336.7109
85	0.14187	6.95772	1159.5438	347.8632
92	0.13649	6.44011	1205.2418	361.5725
93	0.12883	5.73724	1276.9369	383.0811

TABLEAU N°V.2

avec : -

A: DEMI LARGEURE DE HERTZ

REQ: RAYON EQUIVALENT

PMAX:PRESSION MAXIMALE

TAUMAX:CONTRAINTE DE CISAILLEMENT MAXIMALE

On remarque que les contraintes obtenues sont plus fortes que celles dues à la flexion, ce qui nous amène à tenir compte de ces dernières pour la vérification des critères de résistance de la dent, par exemple, en appliquant le critère de Tresca ; on doit avoir : -

$$\tau_{\text{MAX}} \leq \tau_{\text{lim}}$$

avec : $\tau_{\text{lim}} = \frac{R_p}{2}$

R_p : est la résistance maximale à la rupture.

Pour l'acier on a : $R_p = 60 \text{ daN/mm}^2 = 600 \text{ N/mm}^2$

d'où : $\tau_{\text{lim}} = 300 \text{ N/mm}^2$

Ces contraintes sont donc très fortes, elles arrivent même à dépasser la limite élastique, d'où il y a risque de détérioration.

d. Calcul de la déflexion Hertzienne au point de contact:

d.1. Selon la théorie de Hertz:-

On a supposé un contact cylindre-cylindre, or la théorie de Hertz ne peut pas donner le rapprochement des deux massifs en contact dans ce cas.

En se basant sur des études faites dans le même cadre [2], qui ont considéré un éventuel bombé de denture, on a pris le rapport des deux rayons équivalents $\frac{R_z}{R_x} \sim 100$ qui fait intervenir le rayon de courbure dans le plan tangent au cercle de base R_z mais de telle façon que R_z est très grand que R_x .

de la même manière R_z est défini:-

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_{z1}} + \frac{1}{R_{z2}}$$

R_{z1} et R_{z2} sont les rayons de courbure du pignon et de la Roue respectivement, selon l'axe Z.

Les intégrales elliptiques présentées dans les équations (V 9) et (V 10) ont été calculées numériquement pour différentes valeurs du rapport $\frac{R_z}{R_x}$, ce qui a permis de tabuler les valeurs addimensionnées suivantes:-

$$\frac{D}{W^{2/3}} = \frac{\delta / R_x}{(W / E' R_x^2)^{2/3}} \quad \text{V 11.}$$

où: δ représente le rapprochement des deux corps en contact, pour des valeurs de $\frac{R_z}{R_x}$ allant de 1 à 12577, et de déterminer le rapprochement δ . Ces valeurs sont présentées en Annexe 1.-

d.1.1. Détermination du rapprochement d'une seule dent:-

Au voisinage de la surface de contact, les contraintes et les déformations sont liées à la géométrie de la surface. en tenant compte du fait que les géométries des dents en contact sont peut différentes quelque soit le point de contact, c'est à dire les rayons de courbures sont du même ordre de grandeur, on peut considérer que le rapprochement de chacune des dents est identique et égal à la moitié du rapprochement total.

$$\text{soit : } \delta_1 = \delta_2 = \frac{\delta}{2}$$

Pour notre cas $\frac{R_2}{R_1} \approx 100$, ce qui permet de déterminer la valeur de $\frac{D}{W^{4/3}}$,

$$\text{on a trouvé } \frac{D}{W^{4/3}} \approx 0.512.$$

Les résultats du rapprochement d'une dent pour les 7 Noeuds du profil chargé sont présentés dans le tableau ci-dessous.

NOEUD	XC	YC	(***YHH[mm]***)
57	2.900000	42.402500	0.00000000
64	2.750000	43.342500	0.00361730
71	2.500000	44.290500	0.00355960
78	2.100000	45.242500	0.00358701
85	1.750000	46.117500	0.00366578
92	1.500000	46.792500	0.00376147
97	1.160000	47.540000	0.00000000

TABEAU N° 5

La figure (V-4), illustre la variation du déplacement de HERTZ en fonction de l'angle de pression.

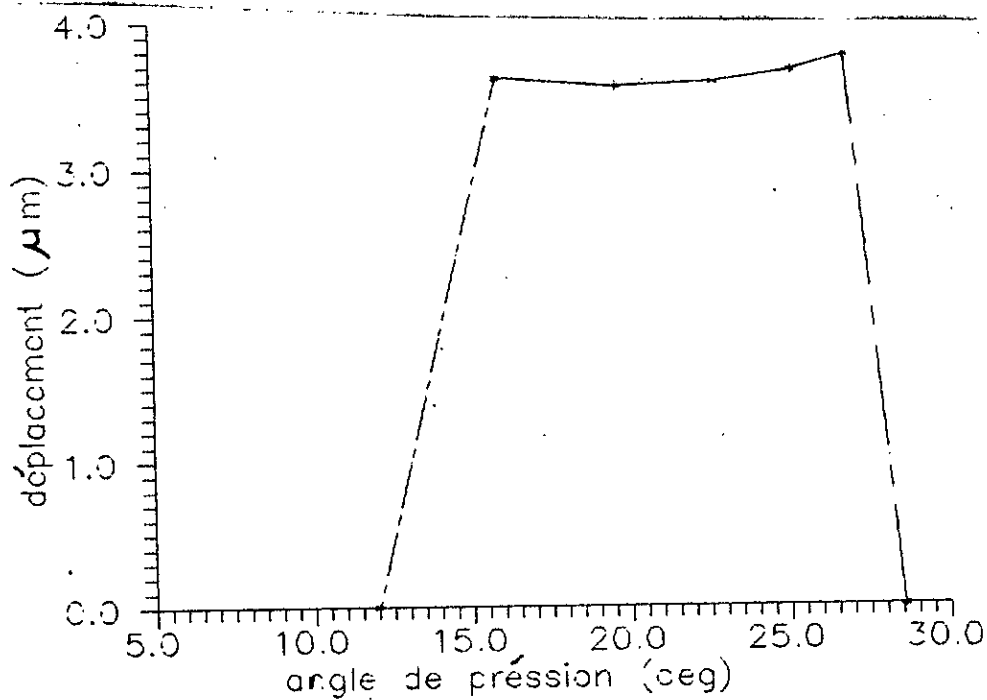


Figure V 4 : Valeur du rapprochement en fonction de la position du point de contact.

d. 2. Selon les Formules de Weber et Walker :-

Mis à part la méthode numérique des éléments finis et celle de Hertz pour laquelle on a considéré un éventuel bombé qui correspond à une correction de denture, il existe beaucoup de formules empiriques approchées en deux dimensions qui donnent plus ou moins de bonnes résultats (Hamilton standard, Palmgren, etc). La formule qui semble donner la meilleure solution est la formule de Weber que nous avons utilisée en plus de celle de Walker.

d.2.1 :- Selon Walker :-

La déformation due à l'écrasement de la surface de contact dépend uniquement de la charge par unité de largeur de denture et non du nombre de dents et de la courbure relative de la dent. [4].

L'écrasement total de deux dents en contact est donné

Par : $\delta = 1.15 \frac{WL}{E}$

V.12

En calculant les déplacements pour les différents noeuds sur le profil chargé on a obtenu le résultat présenté dans le tableau ci dessous :-

NOEUD	COOR.X	COOR.Y	**YHW[mm]**
57	2.90000	42.40250	0.0000000000
64	2.75000	43.34250	0.0014355556
71	2.50000	44.29050	0.0014355556
78	2.10000	45.24250	0.0014355556
85	1.75000	46.11750	0.0014355556
92	1.50000	46.79250	0.0014355556
97	1.16000	47.54000	0.0000000000

TABLEAU N° V 4

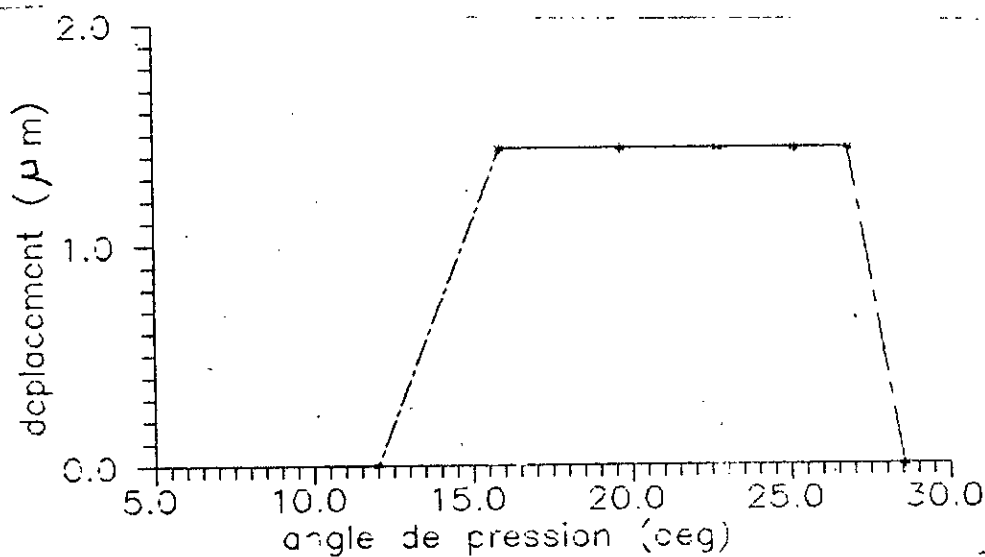


Figure V.5 : Valeur du rapprochement de deux dents en fonction de la position du point de contact

d. 2.2 Selon Weber :-

le déplacement de Hertz dans la direction de la normale à la zone de contact est donné par la formule :-

$$\delta = \frac{2}{E'} \cdot \frac{v_1}{L} \left[\ln\left(\frac{2h}{a}\right) - \frac{D}{2(1-\nu)} \right] \quad \text{--- V.13}$$

avec : $h = \frac{x_c}{\cos\alpha}$

x_c : l'abscisse du point de contact voir figure(V.5)

\ln : logarithme népérien.

les valeurs des déplacements trouvés par cette relation sont présentés dans le tableau suivant:-

NOEUD	*XC*	*YC*	*YH[mm]*
57	2.90000	42.40250	0.0000000000
64	2.75000	43.34250	0.0050077419
71	2.50000	44.29050	0.0048656912
78	2.10000	45.24250	0.0046601725
85	1.75000	46.11750	0.0044707901
92	1.50000	46.79250	0.0043244590
97	1.16000	47.54000	0.0000000000

TABLEAU N° 3

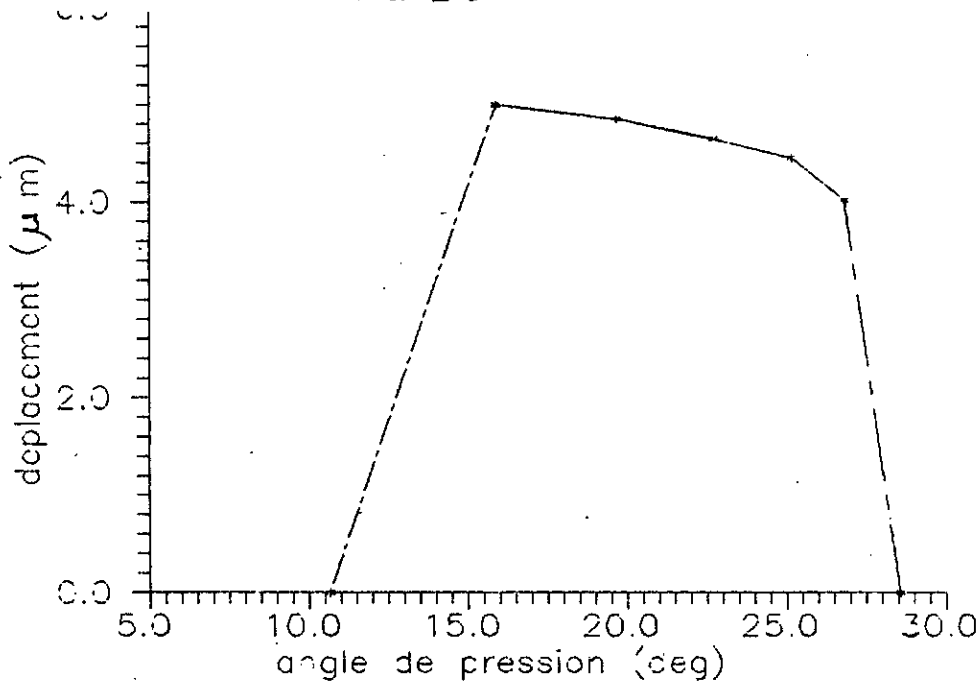


Figure V - 6 Valeur du rapprochement d'un dent en Fonction de la position du point de contact

DISCUSSION ET COMPARAISON:-

des résultats obtenus, montrent que la déflexion Hertzienne est presque constante le long du profil de la dent chargée pour une force w supposée constante et n'exécède pas les 5 µm.

On présente dans ce qui suit les trois courbes obtenues, dans un même graphe voir Figure (V-7). On remarque que le seul résultat qui est loin d'être pris

en compte est celui de Walker, d'ailleurs c'était une première approche pour l'étude des engrenages, donc le résultat reste très restreint. La figure (V.8) montre les résultats obtenus dans le même cadre mais avec d'autres hypothèses pour la simulation du contact permet de valider nos résultats.

Pour le résultat de Weber présente dans la figure (V.8) il a été considéré que les deux dents ont les mêmes caractéristiques mécaniques et géométriques et que les rayons de courbures des profils sont les mêmes quelque soit le point de contact.

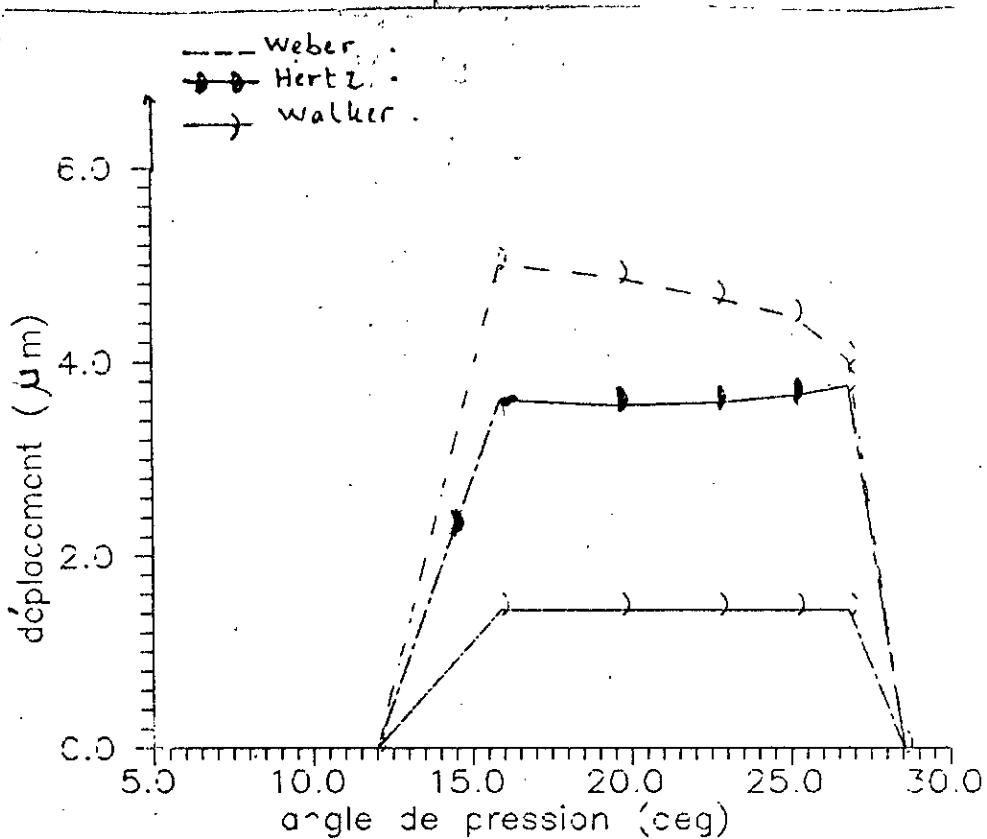


Figure V.7 Valeur de la déflexion Hertzienne
En fonction de l'angle de pression.

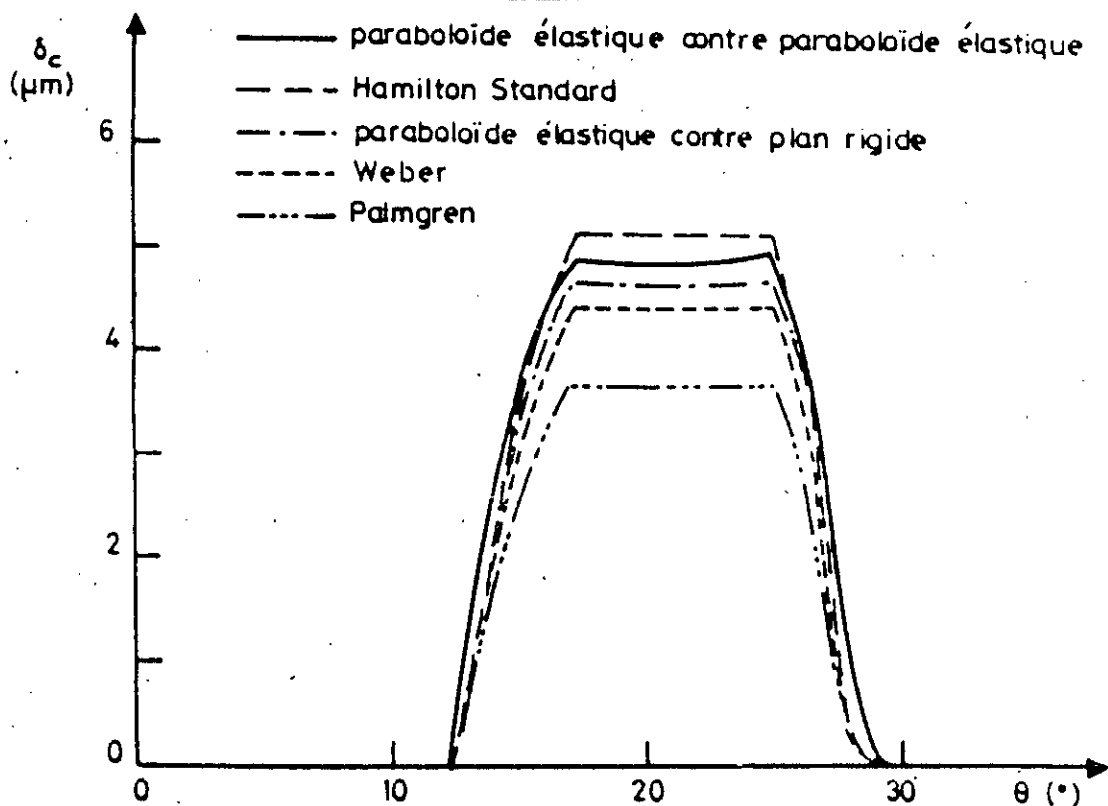


Figure V.8 Valeur du rapprochement en fonction de la position du point de contact d'après [2]

V.6. CONCLUSION: -

On aurait dû utiliser d'autres méthodes et d'autres hypothèses pour ce calcul afin que la comparaison soit très riche, mais le manque des ouvrages dans ce domaine nous a obligé à n'utiliser que peu de méthodes.

Nos résultats ont révélé des ordres de grandeur identiques entre les déformations dues à la flexion et celles dues à la déflexion du point de contact, ce qui nous oblige à superposer chaque fois le problème de Hertz à celui de la flexion.

L'étude des états de contraintes est aussi très importante, car ces dernières ont même tendance à être plus dangereuses que les contraintes de cisaillements dues à la flexion.

- CONCLUSION GENERALE.

Les engrenages fabriqués actuellement fonctionnent dans des conditions très sévères avec des tolérances de fabrication et de deflexion qui ne sont jamais réelles que prévues par la théorie. Ils doivent cependant, transmettre la puissance régulièrement, silencieusement et dans de bonnes conditions.

Notre travail avait pour objectif principal d'élaborer un logiciel permettant, d'une part, de calculer les déformations d'une dent d'engrenage en utilisant:

- La méthode des éléments finis pour le calcul de la flexion de la dent.

- La méthode analytique pour le calcul de la deflexion Hertzienne au point de contact.

D'autre part, de calculer les contraintes dues à la flexion de la dent.

Les résultats obtenus par les deux méthodes étant du même ordre de grandeur. Ce qui nous oblige à les superposer lors du calcul de la déformée totale en les additionnant la déformée due à la torsion de la jante.

Par ailleurs, la méthode analytique nous permet de procéder à une comparaison des résultats obtenus par les différents modes de calcul utilisés avec les résultats trouvés dans la littérature [2].

Vu l'importance à l'échelle industrielle du calcul des déformations des dents d'engrenages à dentures droite à axes parallèles, il serait judicieux d'approfondir ce genre d'étude en incluant la déformation due à la torsion du voile et en élargissant l'étude à trois dimensions. Les mêmes études peuvent être entreprises avec d'autres type de dentures que se soit en statique ou en dynamique.

Il serait nécessaire en plus de procéder au développement de ce programme en utilisant les éléments de haute précision tel que l'élément isoparamétrique à 8 noeuds qui est le plus adapté à la complexité de la forme de la dent.

Je ne saurais finir sans insister sur l'absence d'outils informatiques qui auraient pu servir de base pour ce genre d'étude que se soit à l'E.N.P ou dans l'industrie.

Bibliographie

- [1] - Belhaneche (H) : - Contribution à l'étude du comportement statique et vibratoire des engrenages à axes parallèles à denture droite par speckle et holographie. - Thèse Docteur Ingénieur, I.N.S.A de Lyon, 1988.
- [2] - Velex (Ph) : - Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles. - Thèse doctorat, I.N.S.A de Lyon, 1988.
- [3] - Chabert (G.), Delfosse (M.) et Mathis (R.) : - Evaluation des contraintes et de la flexion des dents d'engrenages cylindriques droits sous charges, Les mémoires technique de CETIM n°15, 1974, p. 45-57.
- [4] - Walker (M.H) : - Flexion des dents et modification du profil. - Société d'études de l'industrie de l'engrenage, N°11, 1938, p. 24-40.
- [5] - Chabert (G.), Dang Tran (T.), Mathis (R.) - An Evaluation of stresses and deflections of spur gears Teeth under strain. J. eng. industry, 1974 v. 96, n°1 p. 85-93
- [6] - Madrowski (D.) : - Conception des engrenages spiro-coniques. - Géométrie et simulation du comportement, Thèse doctorat. I.N.S.A de Lyon. 1987.
- [7] - Velex (Ph.), Berthe (D.) : - Comportement dynamique d'un réducteur à axes parallèles. - Rapport final contrat I.N.S.A. DRET, Lyon, n° 85/1425, Septembre 1986.

- [8]. Sainsot (Ph.) - Calcul des conditions de Lubrification des engrenages, - DEA, I.N.S.A de Lyon, 1984.
- [9]. H. Poritsky . SUTTON (A.D.) . Prnick (A.) . Répartition des charges sur La largeur de La denture d'un pignon, J. of applied Mechanics Juin 1945, P. 25 - 35.
- [10] - Weber (C.) . - The deformation of Loaded Gears and the Effect of their Load - Carrying Capacity . Part I. Department of Scientific and Industrial Research, Sponsored Research (Germany), 1949, n: 3, London
- [11] - Cornell (R.W.) . - Compliance and stress Sensitivity of spur Gear Teeth . J. mech. design, 1981, V. 103, p. 447. 459 .
- [12] . Haihem (A.) - Aire réelle et raideur d'un contact normal rugueux sec ou Lubrifié , Thèse doctorat, I.N.S.A de Lyon, 1989
- [13] - Tobe (T.) Kato (M.) , Inoue (K.) - Bending of stub Cantilever Plate and some Applications to Strength of gear Teeth . J. mech. design, 1978
- [14] - Wilcox (L.) . Colman (W.) . - Application of finite elements to the analysis of gear tooth Stresses . - J. eng. industry, 1973
- [15] - Coy (J.J) Chao (C.H.C) , - A method of selecting grid size to Account for Hertz Deformation in finite element Analysis of Spur Gears , J. mechanical design, 1982, V104, P. 759 - 766
- [16] - Sainsot (Ph.) , Velex (P.) , Berthe (O.) , - Etude du comportement dynamique d'un reducteur à axes paralleles - Rapport Annuel Contrat I.N.S.A. DRET , Lyon, N: 85/165, Juin 1987.
- [17] - Brebia (C.A) . Walker (M.A) . - Boundary element techniques in engineering, New York, Newnes - Butterworths, 1980

- [18] - M.J. Turner , (R.W) .Clough , (H.C) Martin and (L.T) Toop.
Stiffness and deflexion Analysis of complex Structures, J.
of Aeronotical science , v: 23 , p. 805-823 , 1956.
- [19] . Argyris (J.H) , Kelsey (S.) , Energy theorems and Structural
Analysis , Bullerworth , London , 1960 .
- [20] - Dhatt (G.) , Touzot (G.) , - Une présentation de la méthode des
éléments finis . - Collection Université de Compiègne , Paris , Maloine
S.A. , 1981 .
- [21] - Rockey (L.) , Evans (R.) , Griffiths (W.) , Nethercot (D.) , Introdu-
-ction à la méthode des éléments finis - Ed. Eyrolles , Paris , 1979 .

. ANNEXE 1 .

. THEORIE DE HERTZ .

A.1 POTENTIEL QUADRATIQUE ELLIPSOÏDAL DE HERTZ :

Pour la résolution du problème de contact, Hertz a considéré un ellipsoïde pesant de densité ρ Figure A.1, d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{A.1}$$

où : - a, b etc sont les demi axes de l'ellipsoïde

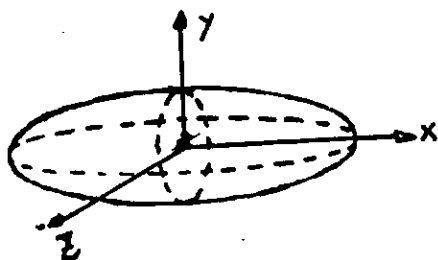


Figure A.1 Schématisation de l'ellipsoïde.

La masse de l'ellipsoïde sera :

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho a.b.c$$

Ainsi le potentiel quadratique pour un point à l'intérieur de l'ellipsoïde sera défini comme suit :

$$\Phi_0 = \pi \rho a b c \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u} \right) \frac{du}{[(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)]^{1/2}} \quad \text{A.2}$$

en un point intérieur à l'ellipsoïde de coordonnées $(x', 0, z')$ situé dans le plan xoz , la hauteur y de la colonne de l'ellipsoïde de section élémentaire est :-

$$z|y| = 2b \left[1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{z'^2}{c^2} \right]^{1/2}$$

A.3

La masse dm de cette colonne est: -

$$dm = \gamma \rho dx' dz' = 2 \rho b \left[1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{z'^2}{c^2} \right]^{1/2}$$

Maintenant, on fait tendre γ vers 0. c'est à dire en apla-
-tissant l'ellipsoïde, mais on conserve sa masse totale en
maintenant ρb constant. Il vient:

$$\Phi' = \pi a \rho b c \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u} \right) \frac{du}{[(a^2+u)(c^2+u)]^{1/2}} \quad \text{A.5}$$

Ce qui conserve la masse de la colonne élémentaire

$$dm = 2 \rho b \left[1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{z'^2}{c^2} \right]^{1/2} \quad \text{A.6}$$

En assimilant cette masse à une pression, alors on
aura :

$$dp(x, z) = 2 \rho b \left[1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{z'^2}{c^2} \right]^{1/2} dx' dz'$$

En remplaçant la masse totale m par la charge due à
la répartition des pressions:

$$W = \frac{4\pi}{3} \rho a b c$$

$$\text{d'où : } \rho b = \frac{3W}{4\pi a c}$$

La pression locale sera:

$$p(x, z) = \frac{3W}{2\pi a c} \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} \right]^{1/2}$$

Et le potentiel quadratique devient :

$$\Phi_2 = \frac{3W}{4} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u} \right) \frac{du}{[(a^2+u)(c^2+u)]^{1/2}} \quad \text{A.7}$$

La répartition de pression:

par définition :

$$\Phi = \int \frac{dm}{r} = 2 \rho b \int \left(1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{z'^2}{c^2} \right)^{1/2} \frac{dx' dz'}{r}$$

pour un point situé sur le plan $Y=0$, toujours.

en assimilant la masse à une pression :

$$\Phi = \int_S \frac{P(x', z') dx' dz'}{r}$$

d'où par identification :

$$P(x', z') = P_0 \left[1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{z'^2}{c^2} \right]^{1/2}$$

avec : $P_0 = 2gb$.

P_0 : est la pression au point de contact.

Nous présentons en ce qui suit, les valeurs numériques des résultats de la théorie de Hertz pour les contacts elliptiques ainsi que la courbe qui nous a permis de déterminer le rapprochement des deux dents. Cette courbe est présentée sous la forme :

$$R = R_z/R_x = f(D/W^{2/3})$$

$R = \frac{R_z}{R_x}$	$\frac{a}{R_x}$	$\frac{c}{R_x}$	$\frac{E}{E}$	$\frac{\delta}{R_x}$	$\epsilon = \frac{a}{c}$
	$\frac{1}{W^{1/3}} \left(\frac{W}{ER^2} \right)^{1/3}$	$\frac{1}{W^{1/3}} \left(\frac{W}{ER^2} \right)^{1/3}$	$\frac{1}{W^{1/3}} \left(\frac{W}{ER^2} \right)^{1/3}$	$\frac{1}{W^{2/3}} \left(\frac{W}{ER^2} \right)^{2/3}$	
1	1.1447	1.1447	0.3644	1.310	1
1.2409	1.1036	1.2744	0.3395	1.263	0.8660
1.9429	1.0190	1.5852	0.2956	1.166	0.6428
2.8425	0.9493	1.8986	0.2649	1.084	0.5000
3.8972	0.8937	2.1972	0.2431	1.019	0.4067
5.0901	0.8484	2.4804	0.2269	0.964	0.3420
6.4963	0.8087	2.7652	0.2135	0.916	0.2925
8.7466	0.7623	3.1509	0.1988	0.858	0.2419
11.1175	0.7268	3.4952	0.1880	0.814	0.2079
14.830	0.6863	3.9514	0.1761	0.762	0.1737
21.220	0.6390	4.5918	0.1627	0.701	0.1392
30.531	0.5944	5.3335	0.1506	0.643	0.11145
45.926	0.5484	6.2933	0.1383	0.581	0.08714
72.801	0.5011	7.5619	0.1260	0.518	0.06627
122.43	0.4531	9.2744	0.1136	0.454	0.04885
218.83	0.4052	11.610	0.1015	0.390	0.03490
408.16	0.3598	14.731	0.0901	0.331	0.02443
739.74	0.3218	18.437	0.0805	0.281	0.01745
1100.7	0.2987	31.395	0.0747	0.252	0.01396
1843.3	0.2714	25.918	0.0679	0.219	0.01047
3834.1	0.2371	33.962	0.0593	0.179	0.006981
12577	0.1882	53.910	0.0471	0.125	0.003491
-	0	-	0	0	0

TABLEAU N° A . 1

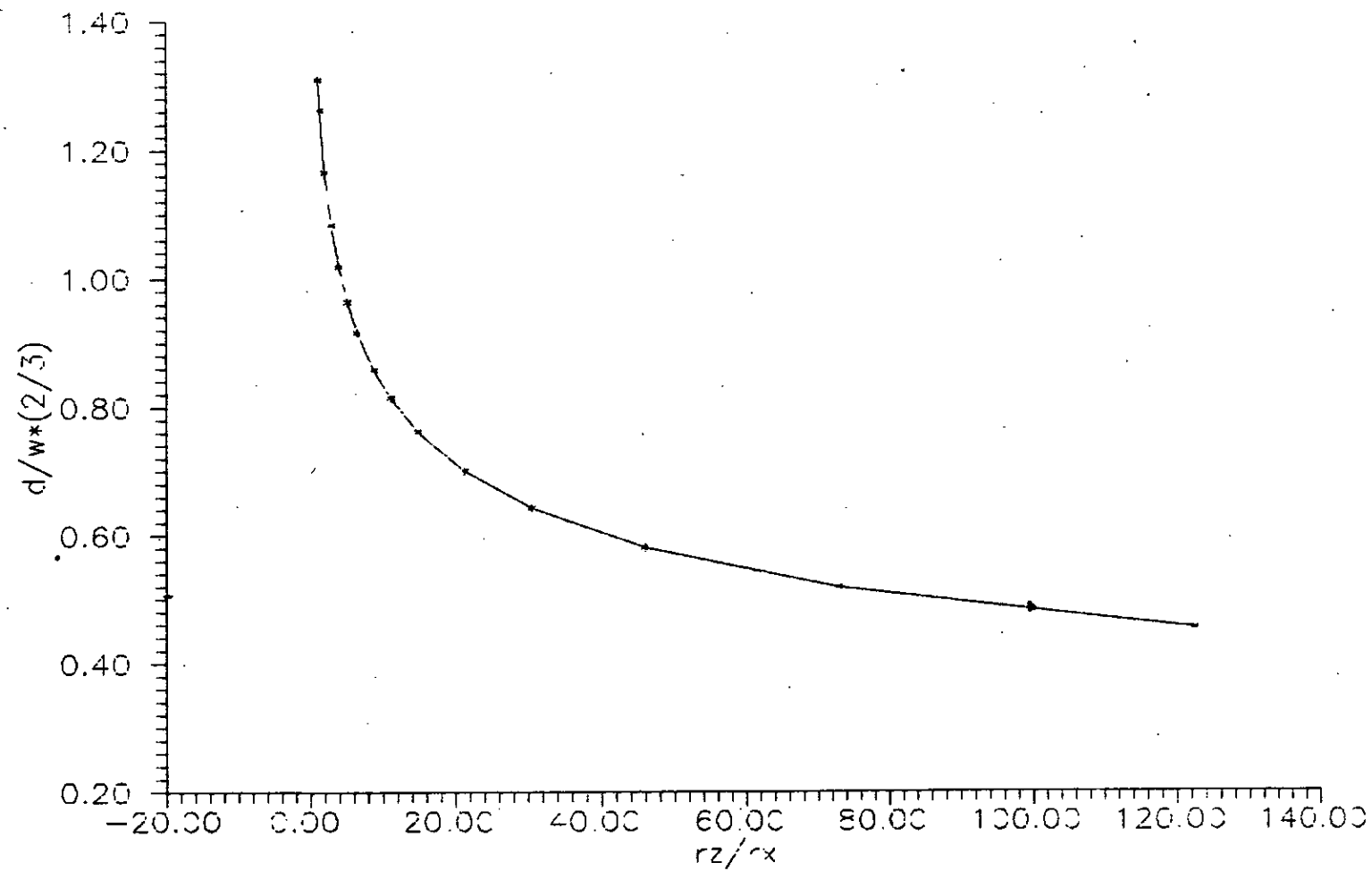


Figure A 2 : - Variation de $\frac{D}{w^{2/3}}$ en fonction de $R = \frac{Rz}{Rx}$

