

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLICUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

13/94

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ELABORATION D'UN CODE
DE CALCUL D'UN
ECOULEMENT REEL
QUASI TRIDIMENSIONNEL

Proposé par :

Mr| M. BOUDJEMAA

Etudié par :

Mr| A. ZERROUK

Mr| A. BOUAM

Dirigé par :

Mr| M. BOUDJEMAA

PROMOTION

Juin-1994

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

الهداء

الحمد

والدعي العزيزين
أخوتي وأخواتي
كل أصدقائي
كل من أحبه قلبي
أهدي عملي المتواضع هذا

عبد الله

الهدايا

الى:

اممي الحبيبة و ابي العزيز
الى كل اخوتي و اخواتي
الى كل الاصقاء
الهدى عملي المتواضع هذا

ز. احمد

REMERCIEMENTS

Nous tenons vivement à re-
mercier notre promoteur

M^r M. BOUDJEMAA pour l'aide pré-
cieuse qu'il nous a apportée et

pour les conseils qu'il nous a
prodigués pour la mise en oeuvre

de ce projet de fin d'étude .

Et nous remercions égale-
ment tous nos collègues, et
touts

ceux qui nous ont aidés dans no-
tre travail .

D'autre part nous remer-
cions, les Messieurs membres du
jury
que avons de citer :

Mr| AIT ALI

Mr| BOUDJEMAA

Mr| KHEMIS

Mr| LARBI

ملخص :

الهدف من هذا العمل ، هو حساب مميزات السيلان بين
فريجتين ، لعجلة تربينية بعد تجميع شبه ثلاثي الابعاد ، على
طول الخط المتوسط بين المستويين ، مع الاخذ بعين
الاعتبار عامل فقدان الطاقة المرافق لجميع الظواهر .

RESUME .

Le but recherché dans ce travail est le calcul
des caracteristiques du fluide sur une ligne
moyenne , après un couplage quasi-
tridimensionnel des deux plans étudiés ,
et cela en introduisant de toutes les pertes

ABSTRACT

The purpose of this work is to determinate
all characteristics of fluid , on a median ligne
between two blades , in a turbomachine and
this after introducing all of the losses .

SOMMAIRE

	Page
CHAPITRE 0 :	
Introduction générale.....	1
CHAPITRE I :	
Formulation du problème et mise en équation	
I-1 Introduction.....	3
I-2 Étude d'un écoulement dans une roue de turbomachine .3	3
I-3 Équation de continuité.....	3
I-4 Équation de mouvement.....	4
I-5 Relations thermodynamique.....	5
I-6 Équation d'état.....	7
I-7 Formulation des équations de mouvement dans un repère relatif.....	7
CHAPITRE II :	
Analyse des écoulements méridional et aube à aube	
II-1 Introduction.....	10
II-2 Définition des deux surfaces	10
II-2-1 Modélisation de "WU".....	12
II-2-2 Hypothèses simplificatrices.....	12
II-3 Analyse de l'écoulement méridien "surface -S2-"...13	13
II-3-1 Formulation du problème.....	13
II-3-2 Équation principale de "WU".....	20
II-3-3 Introduction des hypothèses simplificatrices.....	23
II-3-4 Conditions aux limite.....	23
II-4 Analyse de l'écoulement aube à aube"surface-s1-"..24	24
II-4-1 Formulation du problème.....	24
II-4-2 Conditions aux limite	27
II-4-3 Conditions de KUTTA-JOUKOWSKI.....	29
CHAPITRE III :	
Calcul quasitridimensionnel	
III-1 Introduction.....	30
III-2 Calcul des caractéristiques du fluide.....	30
CHAPITRE IV :	
Couplage calcul écoulement méridional, aube à aube - calcul de la couche limite	
IV-1 Introduction.....	37
IV-2 Étude de la couche limite.....	38
IV-2-1 Introduction.....	38
IV-2-2 Hypothèses de la couche limite.....	38
IV-2-3 Simplification des équations de NAVIER STOCKES....	39

IV-2-4	Epaisseur dynamique de la couche limite.....	41
IV-3	Calcul de la couche limite.....	43
IV-3-1	Définition de l'équation de la couche limite	43
IV-3-2	Méthode approximative de A.Th.VON KARMAN pour les écoulements bidimensionnel.....	45
IV-3-3	Solution de l'équation de la couche limite.....	47
IV-4	Couplage calcul méridien, aube à aube - calcul couche limite.....	47
CHAPITRE V :		
	Partie numérique	
V-1	Introduction.....	49
V-2	Déférents maillages utilisés.....	49
V-2-1	Maillage rectangulaire droit.....	49
V-2-2	Modèle de MARSH.....	50
	a- Maillage curviligne.....	50
	b- Maillage rectangulaire incliné.....	52
V-3	Application de modèle de MARSH.....	54
V-3-1	Déscretisation du domaine méridional.....	54
V-3-2	Déscretisation du domaine aube à aube.....	55
V-3-3	Calcul de la densité.....	60
V-4	Calcul quasitridimensionnel.....	60
V-5	Calcul des deux canaux réels dans les deux plans...	61
V-6	Calcul de l'épaisseur de la couche limite.....	61
V-7	Méthode de résolution	62
V-8	Convergence du calcul.....	62
CHAPITRE VI :		
	Critère de charge et des pertes	
VI-1	Introduction.....	64
VI-2	Critères de charge.....	64
VI-2-1	Critères de RODGERZ.....	64
VI-2-2	Critère longitudinale.....	65
VI-3	Étude des différents modèles	66
VI-3-1	Description du modèle de SODERBERG.....	68
VI-3-2	Description du modèle d'AINLEY.....	70
VI-3-3	Description du modèle de W.R.HOWTHORNE.....	70
VI-4	Couplage-calcul quasitridimensionnel et calcul des pertes.....	72
VI-4-1	Application de modèle de SODERBERG.....	72
VI-4-2	Calcul de l'enthalpie à l'entrée de la roue.....	73
VI-4-3	Calcul de l'enthalpie à la sortie.....	73

CHAPITRE VII :

Interprétation des résultats

Conclusion générale

ANNEXES :

Annexe-A .

Annexe-B

Annexe-C

LISTE DES SYMBOLES ET NOTATIONS

Les unités de mesure sont données dans le système S.I

- a : Célérité du son .
- ϵ : Déflexion .
- h : L'enthalpie statique .
- H : L'enthalpie totale .
- γ : Rapport des chaleurs spécifiques .
- I : La rothalpie .
- m : coordonnée curviligne dans le plan méridien .
- M : nombre de MACH .
- ψ_1 : La fonction de courant dans le plan aube-à-aube .
- ψ_2 : La fonction de courant dans le plan méridien .
- ω : La vitesse de rotation de la machine en [t/mn] .
- P : La pression statique .
- ϕ : L'angle de rotation selon l'axe de la machine .
- Q : Débit volumique .
- R : Constante du gaz .
- r : Rayon .
- ρ : La densité du fluide circulant dans la machine .
- s : L'entropie .
- T : Température statique .
- τ : Rapport de pression .
- u
- v
- w
- u
v
w] : Les composantes de la vitesse dans le repère EULEURIEN .
- V_e : La vitesse à l'infini de la paroi .
- Z : La distance mesurée suivant l'axe machine .

INDICES :

- 0. : En amant de la roue .
- 1 : Entrée de la roue .
- 2 : Sortie de la roue .

Les autres symboles utilisés seront définis dans le texte .

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE 0 INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

La roue mobile d'une turbomachine possède une géométrie très compliquée, dont le fluide passe à travers des canaux délimités par les parois des aubages, du noyau et du carter, dont la forme n'est pas simple, l'écoulement est ainsi un des plus complexe qu'on puisse rencontrer dans la mécanique des fluides .

Le dimensionnement des différents éléments d'une turbomachine revient à une étude complète de cet écoulement, qui consiste à résoudre les équations de **NAVIER - STOKES**, tenant compte des conditions aux limites imposées par l'obstacle .

A cause de la complexité de l'écoulement tridimensionnel, les recherches de la mécanique des fluides ont été développées afin d'obtenir précis basés sur certaines hypothèses simplificatrices, et cela pour de rendre les calculs beaucoup plus simples .

Parmi ces hypothèses nous citerons :

- Fluide parfait .
- Ecoulement stationnaire, Adiabatique et Isentropique .
- L'axisymétrie des surfaces de courant .
- La possibilité de décomposer l'écoulement tridimensionnel en deux écoulements bidimensionnels découplés.

Le but de ce projet, est l'analyse de cette dernière approche, avec un calcul bidimensionnel de deux écoulements, en suite on passera au couplage, afin d'aboutir à un calcul quasitridimensionnel .

On s'est intéressé au développement de la méthode de "WU" pour l'ensemble des avantages qu'elle possède :

- Les conditions aux limites sur les parois d'une famille (S1) à l'autre(S2), sont relativement découplées lorsque la forme de la section du canal évolue peut.

- Les conditions principales de "WU" peuvent se mettre sous une forme dont laquelle les opérateurs quasilineaires (ensemble des termes auxquels on associe des conditions aux limites), bien que couplés par les coefficients, sont typiquement les mêmes que ceux qui régissent les problèmes purement bidimensionnels .

Dans l'ensemble des chapitres, nous avons exposés :

- L'étude mathématique dans le chapitre I, d'un écoulement traversant la roue d'une turbomachine .
- En suite dans le chapitre II, nous avons développés les équations principales de "WU" pour les deux plans (méridien et aube-à-aube).
- Ainsi la partie essentiel de notre travail, qui est le couplage des deux plans, pour le calcul de la ligne moyenne, a été développé dans le chapitre III .
- Et dans le chapitre IV, nous avons introduit les pertes par frottement, et le calcul de la couche limite, pour la détermination des deux canaux réels des deux plans .
- La discrétisation des équations principales de "WU" des deux écoulements, et la résolution des équations, ont été présenté dans le chapitre V.
- Et pour une meilleur approche de l'écoulement réel, nous avons introduit dans le chapitre VI, une correction par la distribution réelle de la vitesse sur la ligne moyenne, en utilisant le modèle de perte proposé par **SODERBERG** .
- Et finalement les résultats obtenues sont présentés dans le chapitre VII, ainsi que leurs interprétations .

CHAPITRE - I
FORMULATION DU
PROBLEME ET MISE
EN EQUATIONS

FORMULATION DU PROBLEME ET MISE EN EQUATION

INTRODUCTION

L'écoulement dans une roue de turbomachine est généralement tridimensionnel, instationnaire et thermodynamiquement irréversible .

Il peut théoriquement être décrit à partir des équations fondamentales de conservation développées dans un repère mobile lié aux parties en rotation autour de l'axe de la machine.

Ces équations sont écrites en supposant que ce mouvement d'entraînement s'effectue à une vitesse angulaire ω constante .

I-1 ETUDE D'UN ECOULEMENT DANS UNE ROUE DE TURBOMACHINE

Lorsqu'un écoulement d'un fluide passe à travers une turbomachine, l'échange d'énergie s'effectue entre ce dernier en mouvement et l'arbre en rotation, par l'intermédiaire d'un ensemble d'aubages mobiles.

La description de l'écoulement dans une roue de turbomachine peut être approchée de façon classique, et cela par la décomposition de l'écoulement réel en deux types d'écoulements bidimensionnels [3]

I-2 EQUATION DE CONTINUITÉ

Cette équation concerne le principe de conservation de la masse dans un volume de contrôle .

L'équation de continuité est donnée par [22]:

$$\sum_I^n m_e - \sum_I^n m_s = \frac{\partial \rho}{\partial t} . dt . dv \quad (I-1)$$

Avec : $\sum m_e$: La masse entrante .
 $\sum m_s$: La masse sortante .

Qui peut se mettre sous la forme suivante [annexe-A]

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{I-2})$$

où: D/Dt : est la dérivée particulière.

I-3 EQUATION DE MOUVEMENT "NAVIER-STOKES"

Pour un fluide Newtonien les équations de Navier-stokes s'écrivent [23] :

$$\rho \cdot \frac{DU}{Dt} = \rho \cdot g_x + \mu \cdot \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right\} + \frac{\mu}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right\} - \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\rho \cdot \frac{DV}{Dt} = \rho \cdot g_y + \mu \cdot \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\} + \frac{\mu}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right\} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\rho \cdot \frac{DW}{Dt} = \rho \cdot g_z + \mu \cdot \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right\} + \frac{\mu}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right\} - \frac{\partial P}{\partial z}$$

(I-3)

Ces équations sont pratiques pour la description des écoulements des fluides Newtoniens et visqueux, elles forment un système d'équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires, et jusqu'à maintenant il n'existe pas une méthode analytique directe, pour résoudre le cas d'un écoulement visqueux quelconque, alors à ce stade d'étude, l'hypothèse d'un fluide non visqueux est nécessaire.

Cette hypothèse simplificatrice nous conduit aux équations d'EULER, qui s'écrivent [23] :

$$\rho \cdot \frac{DV}{Dt} = \rho \cdot g_i - \nabla p \quad (I-4)$$

Où encore :

$$\rho \cdot \frac{DV}{Dt} = - \nabla p + \rho \cdot g_i \quad (I-5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v &= - \frac{\nabla p}{\rho} - \nabla g_i x_i \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} + g_i x_i \right) &= - \frac{\nabla p}{\rho} \end{aligned} \quad (I-5)$$

Car :

$$\vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{v})$$

I-4 RELATIONS THERMODYNAMIQUES

Soit deux particules, qui se trouvent respectivement en P et Q en même temps t, les conditions d'état P,T,h et S au point P sont connues.

Les propriétés précédentes sont définies au point Q par :
P+dP, T+dT, h+dh, S+dS

Ce changement est relié par le premier principe de la thermodynamique :

$$Tds = dU + PdV \quad (I-8)$$

L'enthalpie est définie ainsi :

$$h = U + pV$$

Soit l'enthalpie totale.

$$H = h + V^2/2 + g \cdot x_1$$

Et l'équation (I-13) s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla H = \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) + T \cdot \nabla S \quad (\text{I-14})$$

I-5 EQUATION D'ETAT

Pour un fluide parfait, l'équation d'état est donnée par l'expression suivante, [annexe A] :

$$\rho = A \cdot h^{\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)} \cdot e^{\left(\frac{-S}{R}\right)} \quad (\text{I-15})$$

I-6 FORMULATION DES EQUATIONS PRINCIPALES DANS UN REPERE RELATIF

Dans un système relatif, qui tourne autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire ω , l'écoulement d'un fluide parfait, non visqueux, et non conducteur de la chaleur, est donné par les équations de mouvement suivantes [22] :

$$2 \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot (\nabla \cdot \vec{w}) = - \nabla I + T \cdot \nabla S \quad (\text{I-16})$$

Où :

W: est la vitesse relative
I: Rothalpie
S: Entropie

Et la rothalpie est définie par [23] :

$$I = h - \omega \cdot r \cdot V_u$$

D'où on calculera la variation de l'énergie interne

$$dU = dh - pdV - Vdp$$

Ainsi la relation (I-8) s'écrit :

$$Tds = dh - dP/\rho \quad (I-10)$$

Les conditions d'état dans un champ d'écoulement réel, sont habituellement exprimées, par des fonctions scalaires continues, donc les variations dP , dh et dS du point P au point Q à l'instant t sont exprimées par [23] :

$$\begin{aligned} ds &= \vec{dr} \cdot \nabla S \\ dh &= \vec{dr} \cdot \nabla h \\ dp &= \vec{dr} \cdot \nabla p \end{aligned} \quad (I-11)$$

L'équation (I-10) devient :

$$T \cdot \vec{dr} \cdot \nabla S = \vec{dr} \cdot \nabla h - \frac{1}{\rho} \cdot \vec{dr} \cdot \nabla p$$

ou

$$\vec{dr} (T \cdot \nabla S - \nabla h + \frac{\nabla p}{\rho}) = 0$$

Or " \vec{dr} " est arbitraire

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla h - T \cdot \nabla S \quad (I-12)$$

Injectant cette relation dans l'équation de mouvement (I-3)

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla (h + \frac{V^2}{2} + gx_1) = \vec{V} \cdot (\nabla \cdot \vec{V}) + T \cdot \nabla S \quad (I-13)$$

q₀ : est la chaleur reçue par le fluide par unité de masse.

$$\dot{W} \cdot \Delta T = q_0$$

Elle est donnée par [23] :

C-Equation d'énergie:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = \rho \frac{dq_0}{dt} - \frac{\partial}{\partial x} (p u) - \frac{\partial}{\partial y} (p v) - \frac{\partial}{\partial z} (p w) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zz}) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{yz})$$

$$(I-18) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = \rho \frac{dq_0}{dt} - \frac{\partial}{\partial x} (p u) - \frac{\partial}{\partial y} (p v) - \frac{\partial}{\partial z} (p w) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zz}) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{yz})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = \rho \frac{dq_0}{dt} - \frac{\partial}{\partial x} (p u) - \frac{\partial}{\partial y} (p v) - \frac{\partial}{\partial z} (p w) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zz}) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{yz})$$

b-Equation de mouvement:
Le fluide est non visqueux $\tau=0$ (effort du aux frottements est nul), on aura les équations suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Puisque l'écoulement est stationnaire :

$$(I-17) \quad \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0$$

a-Equation de continuité:

Dans le système de coordonnées r, z et ϕ , les équations de continuité de mouvement, d'énergie et d'état s'écrivent respectivement :

Cette équation est écrite comme suit:

$$W_r \cdot \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{W_r}{r} \cdot \frac{\partial I}{\partial \phi} + W_z \cdot \frac{\partial I}{\partial z} = Q \quad (\text{I-19})$$

D-Equation d'état :

$$\rho = f(h, s) = A \cdot h^{\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)} \cdot \exp^{-\left(\frac{s}{R}\right)} \quad (\text{I-20})$$

CHAPITRE -II
ANALYSE DES
Ecoulements
MERIDIEN
& AUBE A AUBE

ANALYSE DES ECOULEMENTS MERIDIEN ET AUBE A AUBE

II-1 INTRODUCTION

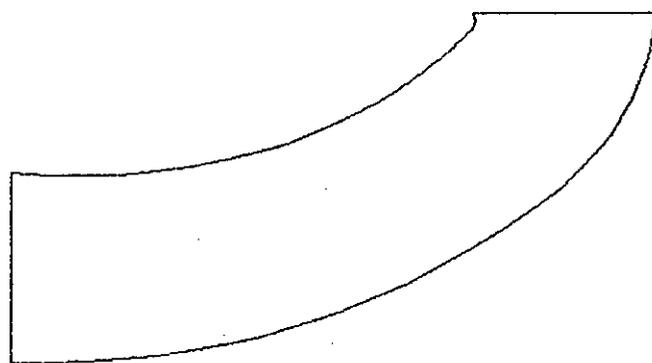
Pour la description de l'écoulement traversant une roue d'une turbomachine, nous admettons que le mouvement d'une particule fluide est stationnaire, dans le repère lié à la roue considérée, et que le caractère tridimensionnel de l'écoulement peut être approché par la méthode de WU [3], qui consiste à décomposer l'écoulement réel en deux écoulements :

- Écoulement moyen, dont la caractéristique principale est "la symétrie axiale" (écoulement méridien).
- Écoulement de grille, d'aube-à-aube, sur chacune des nappes de courant de révolution de cet écoulement moyen

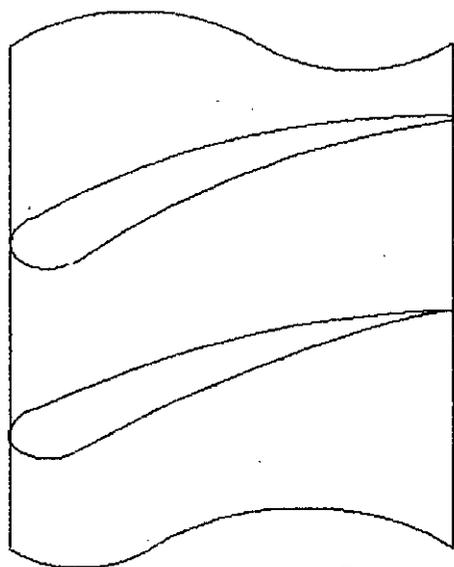
II-2 DEFINITION DES DEUX SURFACES

La décomposition de l'écoulement, définit deux surfaces de courant :

- Une surface de type S1, étant comme la surface de courant décrite dans la roue, par l'ensemble des particules fluide se trouvent initialement sur un cercle concentrique par rapport à l'axe de la machine; cette surface de courant possède une symétrie axiale.
- Une surface de type S2, considérée comme la surface de courant décrite par l'ensemble des particules fluides se trouvant à l'entrée de la roue sur un rayon de conduite d'aspiration.



Surface-S2-



surface-S1-

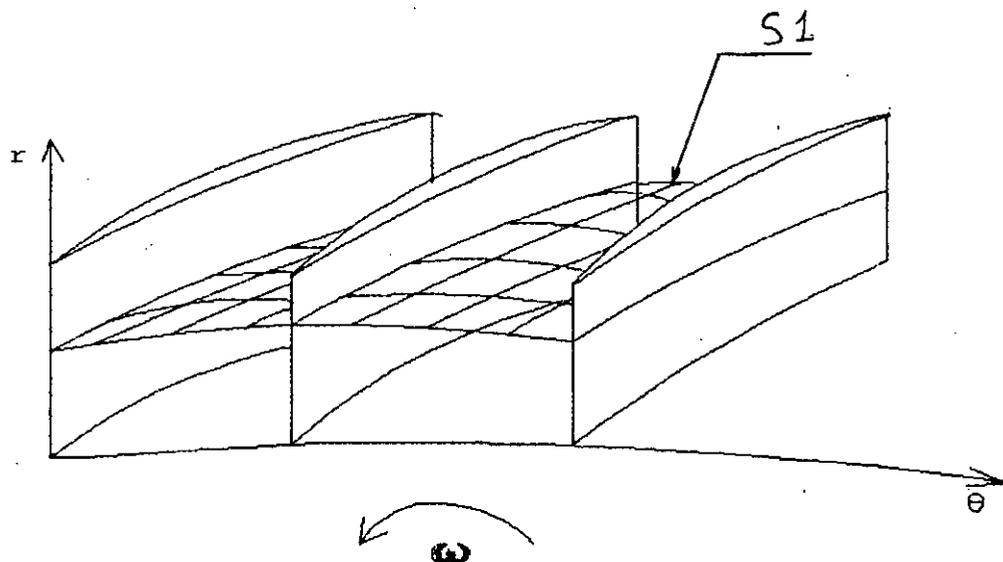
FIG(II-a) : Configuration des deux surfaces

II-2-1 MODELISATION DE " WU "

La modélisation proposée par WU [3], consiste à calculer successivement l'écoulement sur deux surfaces désignées S1-S2.

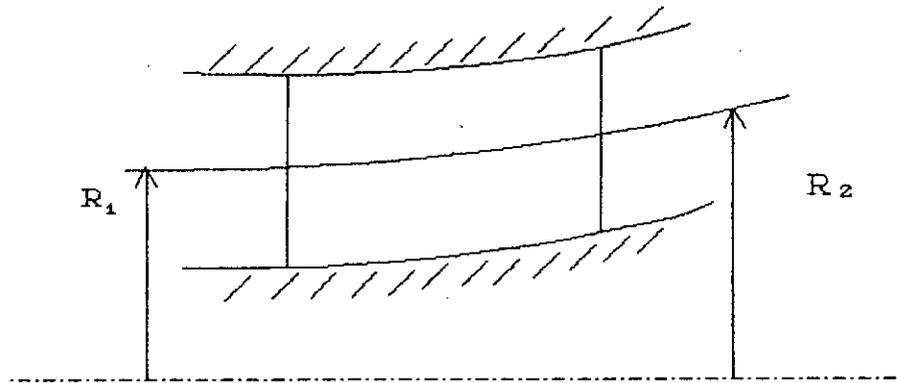
II-2-2 HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

Les conditions d'entrée du mouvement absolu sont supposées axisymétriques et stationnaires, pour que l'écoulement dans la roue le soit, nous admettons que l'écoulement est isentropique (adiabatique, sans frottement dans le cas parfait).



Representation d'une grille d'aube

FIG (II-b1)



FIG(II-b2)

FIG (II-b1,b2) : Schéma de l'écoulement tridimensionnel

II-3 ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT MÉRIDIEN "SURFACE S2"

II-3-1 FORMULATION DU PROBLÈME

Les équations de l'écoulement sont résolues seulement sur une surface moyenne de courant, cette surface est définie par :

$$S(r, z, \phi) = 0 \quad (\text{II-1})$$

Et \vec{n} : vecteur unitaire normal à la surface S2.

$$\text{Alors:} \quad \vec{n} \cdot \vec{vS} = 0 \quad (\text{II-2})$$

D'où on obtient:

$$\frac{n_r}{\frac{\partial s}{\partial r}} = \frac{n_u}{\frac{\partial s}{r \cdot \partial \theta}} = \frac{n_z}{\frac{\partial s}{\partial z}} \quad (\text{II-3})$$

Assumant que la surface à une seule valeur pour ϕ donné, d'où :

$$\Phi = \Phi(r, z) \quad (\text{II-4})$$

Donc pour définir n'importe quel point de la surface S2, on utilise les deux coordonnées r, z. Et ϕ qui est obtenue de l'équation (II-4).

Soit les dérivées partiales suivantes:

$\partial q / \partial r$: est la variation de q suivant r sur la surface de courant sachant la valeur de z .

$\partial q / \partial z$: est la variation de q suivant z sur la surface de courant sachant la valeur de r .

Qui sont définies comme suit :

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial r} = \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{n_r}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\partial q}{\partial \Phi} \quad (\text{II-5})$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{n_z}{r \cdot n_u} \cdot \frac{\partial q}{\partial \Phi} \quad (\text{II-6})$$

Où :

$\frac{\partial q}{\partial r}$: est la variation de q suivant r sur la surface de courant sachant la valeur de z et Φ

Remarque :

Dans le cas de la symétrie axiale les dérivées spéciales deviennent des dérivées partielles simples (ordinaire).

Les équations gouvernant l'écoulement sur la surface de courant deviennent après l'introduction des dérivées spéciales :

a/ Equation de continuité :

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot w_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot w_z) = - \frac{\rho}{r \cdot n_u} \left\{ n_r \cdot \frac{\partial w_r}{\partial \Phi} + n_u \cdot \frac{\partial w_u}{\partial \Phi} + n_z \cdot \frac{\partial w_z}{\partial \Phi} \right\} \quad (\text{II-7})$$

Ou sous la forme

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r \cdot w_r) + \frac{\partial}{\partial w_z} (\rho \cdot w_z) = \rho \cdot c(r, z) \quad (\text{II-8})$$

b/ Equation de mouvement :

$$-\frac{w_u}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) + w_x \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial I}{\partial r} + T \cdot \frac{\partial S}{\partial r} + F_r \quad (\text{II-9a})$$

$$\frac{w_x}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) + \frac{w_z}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot V_u) = F_u \quad (\text{II-9b})$$

$$-w_x \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) - \frac{w_u}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot V_u) = -\frac{\partial I}{\partial z} + T \cdot \frac{\partial S}{\partial z} + F_z \quad (\text{II-9c})$$

Avec :

$$\vec{F} = \frac{1}{r \cdot \rho \cdot n_u} \cdot \frac{\partial P}{\partial \Phi} \vec{n} \quad (\text{II-10})$$

c/ Equation d'énergie :

Pour un processus adiabatique l'équation d'énergie s'écrit :

$$w_x \cdot \frac{\partial I}{\partial r} + w_z \cdot \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-11})$$

La variation d'enthalpie sur une surface de courant peut s'écrire :

$$T \cdot \left(w_x \cdot \frac{\partial S}{\partial r} + w_z \cdot \frac{\partial S}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{II-12})$$

Pour un fluide non visqueux le vecteur force \vec{F} est normal à la surface moyenne de courant S, donc il est normal à la vitesse relative \vec{W} .

D'où :

$$\vec{W} \cdot \vec{F} = 0 \quad (\text{II-13})$$

Et :

$$W_x \cdot F_x + W_u \cdot F_u + W_z \cdot F_z = 0 \quad (\text{II-14})$$

A partir de cette équation on définit deux angles μ' et λ' , qui définissent la forme locale de la surface de courant par :

$$\text{tg} \lambda' = \frac{n_x}{n_u} = \frac{F_x}{F_u} \quad (\text{II-15})$$

$$\text{tg} \mu' = \frac{n_z}{n_u} = \frac{F_z}{F_u} \quad (\text{II-16})$$

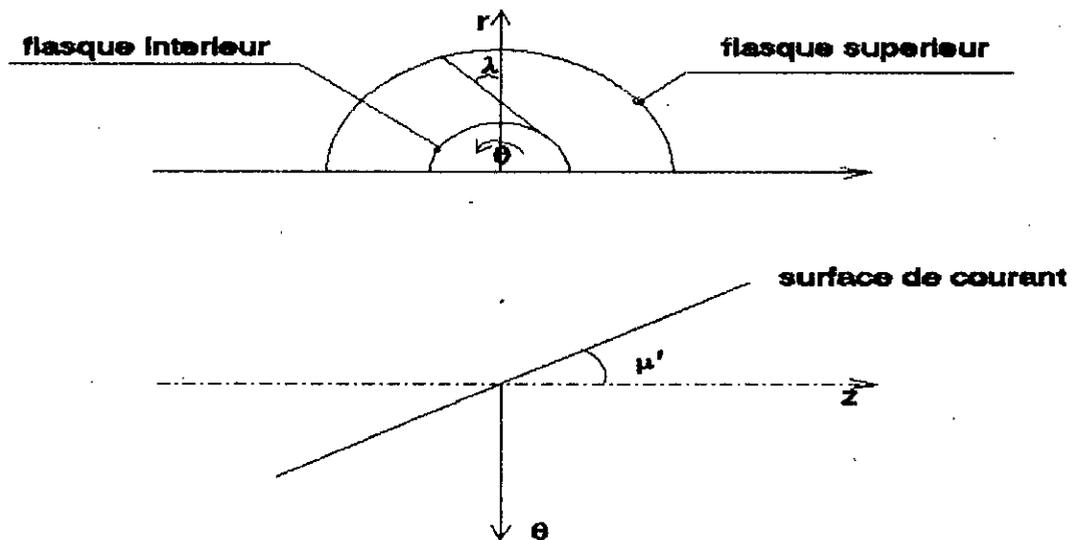


FIG (II-c)

\vec{W} : Etant perpendiculaire à \vec{n} , donc :

$$\vec{W} \cdot \vec{n} = 0$$

La relation (II-14) s'écrit :

$$W_u = -W_r \cdot \operatorname{tg} \lambda' - W_z \cdot \operatorname{tg} \mu' \quad (\text{II-17})$$

Qui représente la condition géométrique, qui assure que le fluide reste sur la surface moyenne de courant.

Pour obtenir l'équation de la fonction de courant (d'après [1]), on introduit un facteur d'intégration B de telle sorte que l'équation de continuité se met sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot B \cdot W_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \rho \cdot B \cdot W_z) = 0 \quad (\text{II-18})$$

L'équation (II-18) devient après simplification .

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot W_r) + r \cdot \rho \cdot \frac{W_r}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial z} + r \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot W_z) = 0 \quad (\text{II-20})$$

Et finalement on aura :

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot W_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot W_z) = \rho \cdot C(r, z) \quad (\text{II-20})$$

et

$$\frac{W_r}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{W_r}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial z} = -C(r, z) \quad (\text{II-21})$$

Le facteur B est proportionnel à l'épaisseur angulaire locale de la surface de courant, et dans l'analyse de l'écoulement moyen on assume que l'épaisseur de la surface de courant moyenne soit proportionnelle à la longueur du canal entre aubes.

Le facteur B sera défini par :

$$B = \frac{\text{Largeur circonférencielle du canal entre aubes}}{\text{Pas d'aube}} \quad (\text{II-22})$$

On introduit la fonction de courant ψ , telle que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = r \cdot \rho \cdot B \cdot W_z \quad (\text{II-23})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -r \cdot \rho \cdot B \cdot W_r \quad (\text{II-24})$$

En injectant ces changements dans l'équation de mouvement (II-9a), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = & \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \{\ln(r \cdot \rho \cdot B)\} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \{\ln(r \cdot \rho \cdot B)\} + \\ & + \frac{r \cdot \rho \cdot B}{W_z} \left\{ \frac{\partial I}{\partial r} - T \cdot \frac{\partial s}{\partial r} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_u) - F_r \right\} \end{aligned} \quad (\text{II-25})$$

Une équation similaire est obtenue en injectant les équations (II-23), (II-24) dans l'équation (II-9c) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = & \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \{\ln(r \cdot \rho \cdot B)\} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \{\ln(r \cdot \rho \cdot B)\} + \\ & - \frac{r \cdot \rho \cdot B}{W_r} \left\{ \frac{\partial I}{\partial z} - T \cdot \frac{\partial s}{\partial z} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot V_u) - F_z \right\} \end{aligned} \quad (\text{II-26})$$

Où F_r et F_z sont définis par :

$$F_r = F_u \cdot \operatorname{tg} \lambda' \quad (\text{II-27})$$

$$F_z = F_u \cdot \operatorname{tg} \mu' \quad (\text{II-28})$$

Ce sont les composantes des forces agissant sur les aubes, qui sont nulles dans le cas d'un écoulement axisymétrique .

II-3-2 Equation principale de "WU"

L'utilisation de l'une des deux équations précédentes, (une des deux formes de l'équation de WU) permet de calculer la fonction de courant, qui satisfait toutes les équations concernant l'écoulement réversible sur une surface de courant moyenne.

Afin de réaliser l'écoulement dans un repère cartésien faisant une rotation à notre système d'axes, d'un angle θ , par les changements suivant :

$$\begin{cases} r = x \sin \theta + y \cos \theta \\ z = x \cos \theta - y \sin \theta \end{cases}$$

qui donne :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta + z \cos \theta \\ y = r \cos \theta - z \sin \theta \end{cases} \quad (\text{II-29})$$

Pour une fonction quelconque f.

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \quad (a)$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \quad (b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \quad (c)$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \quad (d)$$

Avec cette transformation, appliquée aux deux équations précédentes (II-25) et (II-26), on aboutit aux formes de WU [23]

II-3-2-1 PREMIERE FORME DE L'EQUATION PRINCIPALE DE "WU"

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \{\ln(r \cdot \rho \cdot B)\} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \{\ln(r \cdot \rho \cdot B)\} \\ &\quad - \frac{r \cdot \rho \cdot B}{W_x} \left\{ \frac{\partial I}{\partial y} - T \cdot \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (r \cdot V_u) - F_y \right\} \end{aligned} \quad (II-30)$$

II-3-2-2 DEUXIEME FORME DE L'EQUATION PRINCIPALE DE "WU"

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \{\ln(r \cdot \rho \cdot B)\} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \{\ln(r \cdot \rho \cdot B)\} + \\ &\quad - r \cdot \rho \cdot \frac{B}{W_y} \left\{ \frac{\partial I}{\partial x} - T \cdot \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (r \cdot V_u) - F_x \right\} \end{aligned} \quad (II-31)$$

Avec :

$$\begin{aligned} r \cdot \rho \cdot \frac{B}{W_x} \left\{ \frac{\partial \bar{I}}{\partial y} - T \cdot \frac{\partial \bar{S}}{\partial y} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (r \cdot V_u) - F_u \right\} = \\ - r \cdot \rho \cdot \frac{B}{W_y} \left\{ \frac{\partial \bar{I}}{\partial x} - T \cdot \frac{\partial \bar{S}}{\partial x} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (r \cdot V_u) - F_x \right\} \end{aligned} \quad (\text{II-32})$$

D'une façon générale, l'équation principale de WU peut être exprimée par :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = q(x, y) \quad (\text{II-33})$$

avec :

$$\begin{aligned} q(x, y) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\text{Ln}(r \cdot \rho \cdot B)) \\ + \frac{\partial \Psi}{\partial y} (\text{Ln}(r \cdot \rho \cdot B)) + \frac{r \cdot \rho \cdot B}{W_x} \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial y} - T \cdot \frac{\partial \bar{S}}{\partial y} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (r \cdot V_u) - \gamma \right\} \end{aligned} \quad (\text{II-34})$$

Où : α, β et γ sont données suivant les deux cas :

a - En amont et en aval de la roue.

$$\begin{aligned} \alpha &= H \\ \beta &= 1 \\ \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (\text{e})$$

b - dans la roue.

$$\begin{aligned} \alpha &= I = H - \omega \cdot r \cdot V_u \\ \beta &= B \\ \gamma &= F_y = F_u \cdot \text{tg} \lambda \end{aligned} \quad (\text{f})$$

II-3-3 INTRODUCTION DES HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES.

- Écoulement stationnaire.
- Évolution isentropique.
- Surfaces de courant sont supposées axisymétriques; ce qui montre que les dérivées spéciales utilisées dans le développement deviennent des dérivées partielles ordinaires.

D'après ces hypothèses l'équation de WU s'écrit de la façon suivante.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = q(x, y) \quad (\text{II-35})$$

Avec:

$$q(x, y) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \{ \ln(r \cdot \rho \cdot b) \} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \{ \ln(r \cdot \rho \cdot B) \} + \frac{r \cdot \rho \cdot B}{W_u} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} - T \cdot \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{W_u}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (r \cdot V_u) - \gamma \right) \quad (\text{II-36})$$

II-3-4 CONDITIONS AUX LIMITES

La fonction de courant Ψ_2 , solution de l'équation différentielle (II-35), doit vérifier les conditions aux limites.

Ψ_{2I} et Ψ_{2II} , les valeurs de la fonction de courant respectivement sur le flasque avant (carter) et le flasque arrière (moyau), on doit avoir :

$$\Psi_{2II} - \Psi_{2I} = q \quad (\text{II-37})$$

q : est le débit massique

De plus on assumera l'hypothèse d'un écoulement uniforme loin à l'aval de la roue, et à l'infini à l'amont de celle-ci.

II-4 ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT AUBE A AUBE "SURFACE-S1"

L'analyse de l'écoulement aube-à-aube est basé sur la définition de la surface, et mise en équation du problème.

II-4-1 FORMULATION DU PROBLEME

La position d'un point sur la surface S1 est décrite par les coordonnées m et ϕ .

On a les relations suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial m} = \cos\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial z} + \sin\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial r} \quad (g)$$

$$W_1 = W_{u1} \cdot \vec{I}_1 + W_m \cdot \vec{I}_2 \quad (h)$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{W_m}{W_u} = r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial m} \quad (i)$$

$$W_m^2 = W_z^2 + W_r^2 \quad (j)$$

a- Equation de continuité :

Tenant compte des hypothèses simplificatrices précédentes l'équation de continuité s'écrit [22]:

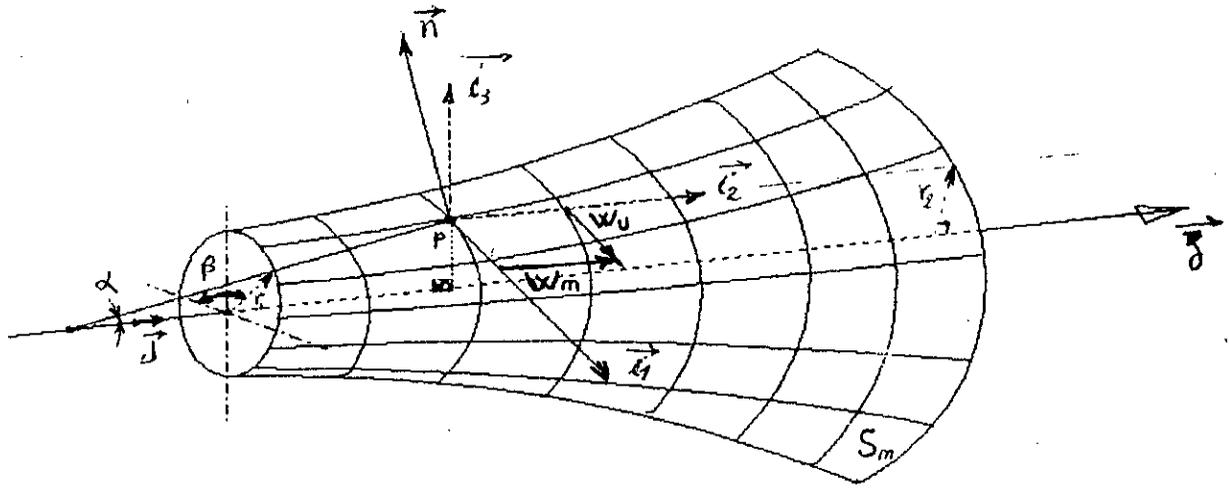
$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot W_u)}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot \rho \cdot W_m)}{\partial m} + \rho \cdot W_m \cdot K_n = 0 \quad (\text{II-38})$$

Avec:

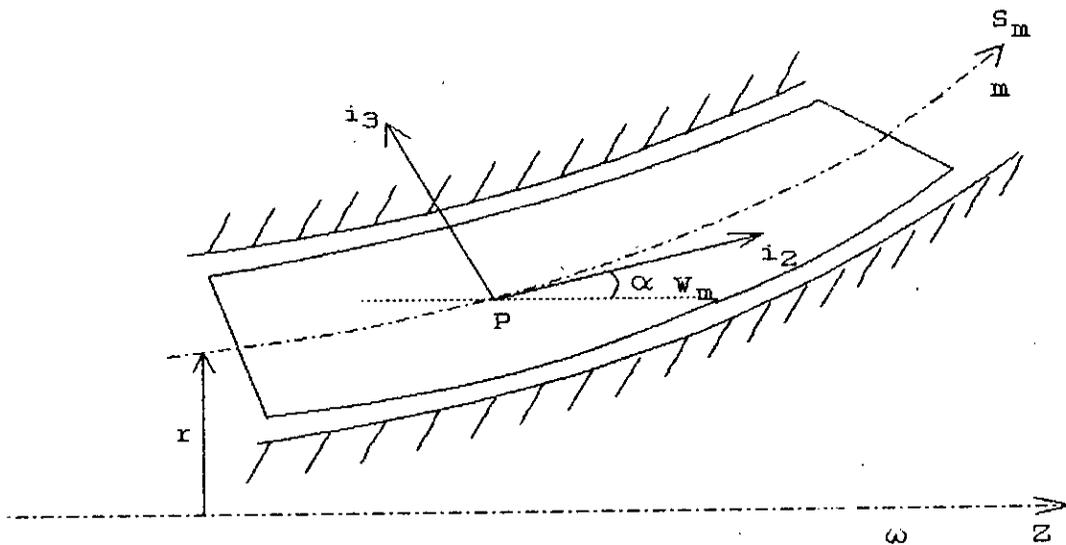
$$K_n = \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial b}{\partial m} \quad (\text{II-39})$$

K_n : Est la courbure de la ligne méridienne PP'.

b : est la hauteur des aubages, qui ne dépend que de m .



FIG(II-d1) : Coordonnées de la surface axisymétrique



FIG(II-d2) : Surface de courant axisymétrique

On rappelle que la hauteur des aubages b ne dépend que de la coordonnée m , et elle est petit devant le rayon r , donc l'équation (II-38) devient .

$$\frac{\partial(b \rho W_u)}{\partial \theta} + \frac{\partial(b \rho r W_m)}{\partial m} = 0 \quad (\text{II-40})$$

Introduisant la fonction de courant Ψ , telle que :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial m} = b \cdot \rho \cdot W_m \quad (\text{II-41})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -b \cdot \rho \cdot r \cdot W_m \quad (\text{II-42})$$

- Equation fondamentale

La vitesse \vec{W} doit vérifier l'équation de mouvement simplifier, qui est sous la forme :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{W} &= \left\{ -\frac{\partial W_m}{\partial n} - W_m \cdot k_m \right\} \cdot \vec{i}_1 + \frac{1}{r} \cdot \left\{ \frac{\partial(r \cdot W_u + \omega \cdot r^2)}{\partial n} \right\} \cdot \vec{i}_2 \\ &+ \frac{1}{r} \cdot \left\{ \frac{\partial W_m}{\partial \theta} - \frac{\partial(r \cdot W_u + \omega \cdot r^2)}{\partial m} \right\} \cdot \vec{i}_3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-43})$$

- On a des surfaces axisymétriques, donc:

$$\frac{\partial W_m}{\partial n} = 0$$

$$k_m = 0$$

- Le nombre d'aubages est infiniment grand, et leurs épaisseurs est infiniment minces.

D'où la quantité $(r.W_u + \omega.r^2)$ reste constante sur la normale \vec{n} entre deux aubes.

Donc on aura le terme :

$$\frac{1}{r} \cdot \left\{ \frac{\partial W_u}{\partial \theta} - \frac{\partial (r.W_u)}{\partial m} \right\} = 2 \cdot \omega \cdot \frac{\partial r}{\partial m} \quad (\text{II-44})$$

Introduisons la fonction de courant Ψ , dans l'équation (II-44), on aura:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b \cdot r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right\} + r \cdot \frac{\partial}{\partial m} \left\{ \frac{1}{\rho \cdot b} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial m} \right\} + \frac{\partial r}{\partial m} \cdot \frac{1}{b \cdot \rho} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial m} \\ = -2 \cdot \omega \cdot r \cdot \frac{\partial r}{\partial m} \end{aligned} \quad (\text{II-45})$$

Avec:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \sin \alpha \quad (\text{II-46})$$

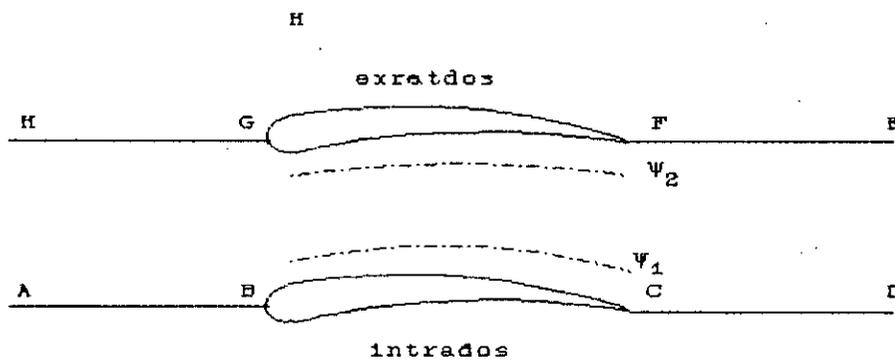
Et finalement on obtient l'équation de WU:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial (Lnr)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - 2 \cdot \rho \cdot b \cdot \omega \cdot \sin \alpha \\ - \frac{\partial \Psi}{\partial m} \left\{ \frac{\partial (Lnr)}{\partial m} - \frac{\partial (Lnr \cdot b)}{\partial m} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II-47})$$

II-4-2 CONDITIONS AUX LIMITES

La fonction de courant Ψ , solution de l'équation précédente doit vérifier les conditions aux limites du domaine d'étude.

Soit une surface S1 définie par la rotation autour de l'axe de la machine d'une ligne de courant méridienne, celle-ci se trouve découpées périodiquement par les aubages dans la direction périphérique en domaine élémentaire (c.f)



FIG(II-e) : Définition du plan (S1)

Si Ψ_1 et Ψ_2 sont les valeurs de Ψ respectivement aux limites BC et FG du domaine élémentaire, on doit avoir:

$$\Psi_2 - \Psi_1 = \text{Débit massique passant entre BC et GF}$$

On posera:

$$\Psi_1 = 0 \quad \text{sur BC}$$

$$\Psi_2 = 1 \quad \text{sur GF}$$

- Ces conditions équivalentes aux conditions de la tangence des vecteurs vitesses à la surface des aubes.

- Entre AB et HG, et entre CD et FG la condition de périodicité se traduit par:

$$\Psi_{HG} = \Psi_{AB} + 1$$

(II-48,49)

$$\Psi_{FE} = \Psi_{CD} + 1$$

II-4-3 CONDITIONS DE KUTTA-JOUKOWSKI

Cette condition concerne l'écoulement au bord de fuite, qui peut être :

Un angle fini, ou sous la forme de biseau, ou arrondie



FIG (II-f) : Différentes formes du bord de fuite .

En plus les conditions aux limites, la conditions de périodicité de l'écoulement; la condition de KUTTA-JOUKOWSKI doit être satisfaite, qui s'exprimer comme suit :

-Pour un écoulement de fluide autour d'un profil, dont l'intrados et l'extrados se terminent suivant une tangente commune, la ligne de courant issue du bord de fuite doit quitter ce dernier suivant cette tangente.

La vérification de cette condition pose un problème dans le cas d'un profil arrondi ou en dièdre, donc il est préférable de remplacer cette condition par une symétrie de la répartition des pressions ou des vitesses relatives, sur l'extrados et l'intrados de profil, le plus près possible du bord de fuite.

CHAPITRE - III
CALCUL QUASI -
TRIDIMENSIONNEL

CALCUL QUASITRIDIMENSIONNEL

III-1 INTRODUCTION :

Après la décomposition, proposée par WU, de l'écoulement stationnaire, dans une turbomachine.

On doit procéder au couplage des deux plans, ainsi on calculera la ligne moyenne à l'intersection des deux plans, pour déterminer les caractéristiques de l'écoulement dans cette dernière; pour cela on a adopté deux hypothèses :

- L'axisymétrie de l'une des deux surfaces .
- La régularité et l'uniformité du champ de vitesse .

III-2 CALCUL DES CARACTÉRISTIQUES DU FLUIDE

Dans l'intersection des deux plans d'écoulements, méridional et aube à aube, qui permet d'avoir la ligne moyenne, où on calculera :

- La vitesse relative.
- La densité de fluide.
- Le rapport de pression.
- La vitesse du son.
- Le nombre de MACH.

a- La vitesse relative

Soient les fonctions de courants Ψ_1 , Ψ_2 , qui décrivent plus particulièrement, l'une l'écoulement dans le plan aube à aube, l'autre l'écoulement dans le plan méridien.

La vitesse relative s'exprime par [3] :

$$\vec{w} = \frac{1}{\rho} \cdot \nabla \Psi_1 \times \nabla \Psi_2 \quad (\text{III-1})$$

Avec ρ est la densité du fluide dans la ligne moyenne.

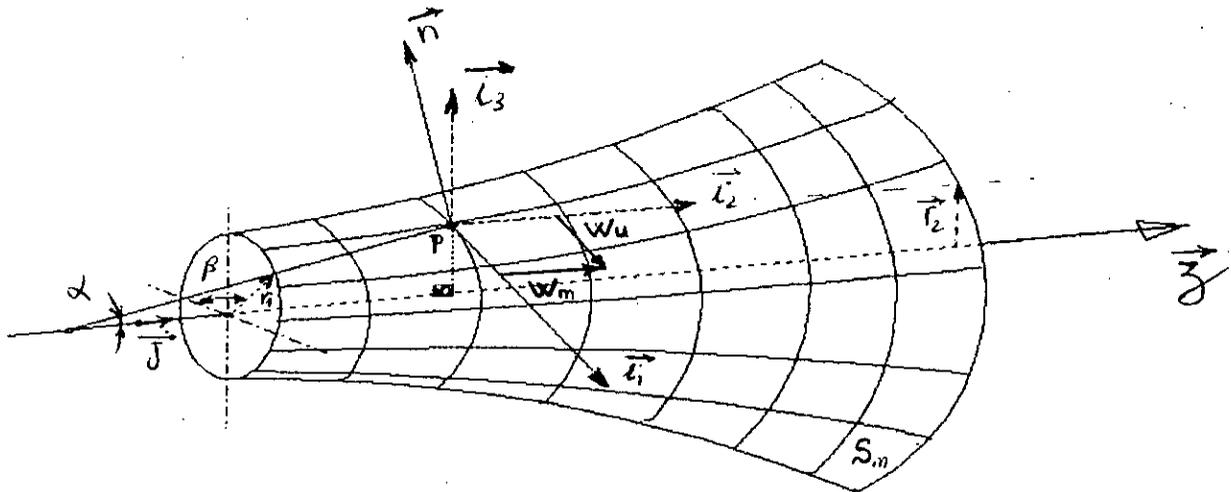


FIG (III-1) : La forme géométrique pour une roue de turbomachine .

L'équation (III-1) sera développée ainsi :

$$\vec{w} = \frac{1}{\rho} \cdot \left\{ \frac{\partial \psi_1}{r \cdot \partial \theta} \cdot \vec{i}_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \cdot \vec{i}_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \cdot \vec{i}_3 \right\} * \left\{ \frac{\partial \psi_2}{r \cdot \partial \theta} \cdot \vec{i}_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \cdot \vec{i}_2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \cdot \vec{i}_3 \right\} \tag{2}$$

Le produit vectoriel donne les composantes de la vitesses relatives quasitridimensionnelle.

$$\vec{w} = \frac{1}{\rho} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \cdot \frac{\partial \psi_2}{r \cdot \partial \theta} - \frac{\partial \psi_1}{r \cdot \partial \theta} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi_1}{r \cdot \partial \theta} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi_2}{r \cdot \partial \theta} \end{bmatrix} \tag{III-2}$$

Pour l'écoulement dans le plan méridional (plan axial), on a :

$$S=S(r,z)$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial \psi_2}{r \cdot \partial \theta} = 0$$

On aura ainsi les composantes de la vitesse relative dans le plan méridional .

$$\vec{w} = \frac{1}{\rho} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \\ - \frac{\partial \psi_1}{r \cdot \partial \theta} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi_1}{r \cdot \partial \theta} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (\text{III-3})$$

Et ceci en utilisant la transformation du chapitre (II), nous posons :

$$h = r \cdot \theta$$

Qui nous permet de déduire la forme suivante :

$$\frac{\partial \psi_1}{r \cdot \partial \theta} = \frac{\partial \psi_1}{\partial h} \quad (\text{a})$$

Et en prenant :

$$h = h(x,y)$$

On aura :

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial h} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial h} \quad (\text{b})$$

Ou bien :

$$r = r(x, y)$$

On aura :

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \quad (c)$$

Et pour :

$$Z = Z(x, y)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \quad (d)$$

Et de la même manière, on aura les dérivées de ψ_2 , sous les formes suivantes .

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial r} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \quad (e)$$

Et :

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial z} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \quad (f)$$

En remplaçant les équations b,c,d,e et f dans l'équation (III-3), on obtient les composantes de la vitesse relative dans un repère lié à la roue .

Qui s'exprime ainsi :

$$\begin{Bmatrix} W_u \\ W_x \\ W_r \end{Bmatrix} = \frac{1}{\rho} \cdot \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ - \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \right) \\ - \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial h} \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial h} \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \right) \end{Bmatrix}$$

(III-4)

Donc la vitesse relative est donnée par :

$$W = \sqrt{W_u^2 + W_z^2 + W_r^2} \quad (\text{III-5})$$

b-calcul de la densité :

La rothalpie se conserve sur toute la surface de courant aube à aube et méridional (pour un écoulement fluide stationnaire et adiabatique), donc on aura la conservation de cette dernière le long de la ligne moyenne .

$$I = I_0 \quad (\text{a,1})$$

A partir de cette équation on va calculé la densité pour un fluide compressible.

I_0 : la rothalpie à l'infini de l'amont .

$$I = H - \omega \cdot r \cdot V_u$$

qui s'exprime dans le repère relative :

$$I = h + \frac{W^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot r^2 \quad (\text{a,2})$$

L'enthalpie statique est donnée par :

$$h = C_p \cdot T = \frac{a^2}{\gamma - 1} \quad (\text{a,3})$$

Et d'après l'équation d'état :

$$\frac{h}{h_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} \quad (\text{a,4})$$

D'où, l'expression du rapport des enthalpies suivantes :

$$\frac{h}{h_0} = 1 + \frac{1}{2 \cdot h_0} \cdot \{(W_0^2 - W^2) - \omega^2 \cdot (r_0^2 - r^2)\}$$

Avec :

$$V_0 = M_0 \cdot a_0$$

M_0 : nombre de MACH .

a_0 : la vitesse du son à l'arrêt .

Donc :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_0^2 \cdot \{(W_0^2 - W^2) - \omega^2 \cdot (r_0^2 - r^2)\} \quad (\text{III-6})$$

C- Le rapport de pression

L'écoulement supposé adiabatique :

$$P \cdot V^\gamma = \text{Cste}$$

Le rapport de prsssion est définit comme suit :

$$\tau = P/P_0$$

P_0 : est la pression à l'amont (entrée)

Ainsi, nous déduisons l'expression du rapport de pression suivante :

$$\tau = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \quad (\text{III-7})$$

La pression à l'entrée est donnée par l'équation de BERNOULLI entre l'entrée de la roue et l'amont (à l'infini), nous donne la pression à l'entrée.

$$P_0 = P_\infty + \frac{1}{2 \cdot g} \cdot (V_\infty^2 - W_0^2)$$

d- La vitesse du son :

La vitesse du son est exprimée par :

$$a = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T}$$

$$a = \sqrt{P_0 \cdot \frac{\gamma}{\rho}}$$

(III,8)

e- Calcul du nombre du MACH

$$M = \frac{W}{a}$$

(III-9)

W : est la vitesse relative.

CHAPITRE - IV

COUPLAGE CALCUL
DES ECOULEMENTS
& LA COUCHE LIMITE

COUPLAGE DES ÉCOULEMENTS MÉRIDIONAL ET AUBE-A-AUBE ET DE LA COUCHE LIMITE

IV-1 INTRODUCTION

Le problème des couches limites, qui se développe sur les aubages relève d'une analyse classique, il n'en va pas de même pour les couches limites pariétales, beaucoup plus complexe et difficile à traiter .

La méthode développée dans ce chapitre concerne les couches limites visqueuses. Cependant, la détermination de l'épaisseur de la couche limite et le point de décollement, dont l'épaisseur est déduite par extrapolation à partir de ce point, afin de faire une approximation aux canaux réels.

Le calcul effectué dans le plan aube-à-aube, dont la couche limite est calculée sur l'intrados et l'extrados, d'une aube donnée .

Et le calcul de la couche limite pour l'écoulement méridien, supposé axisymétrique, se fait seulement sur le moyeu, en négligeant la couche limite qui se crée au carter, à cause des fuites et des écoulements secondaires .

La répartition des vitesses obtenues le long d'une ligne de courant particulière, qui est le contour de la paroi (écoulement parfait), est appliquée au calcul de la couche limite .

Le domaine de la couche limite est limité par l'entrée de la roue où l'épaisseur de déplacements est supposée nulle, jusqu'à la sortie.

Le principe du couplage consiste à retrancher au canal parfait calculé, une valeur égale à la somme des deux épaisseurs des déplacements, calculées aux niveaux de l'intrados l'extrados d'une aube pour l'écoulement aube-à-aube .

Pour le calcul approximatif au canal réel méridional on retranche la valeur de l'épaisseur de la couche limite au moyen du canal parfait.

III-2 ETUDE DE LA COUCHE LIMITE

III-2-1 INTRODUCTION :

Prandtl a montré que l'écoulement autour d'un solide pouvait être divisé en deux régions;

- Une très fine couche au voisinage du solide, dans laquelle le gradient de vitesse normal à la paroi (du/dy), est très grand, où la viscosité μ du fluide exerce une influence sur la contrainte de cisaillement (du/dy), qui prend une importante valeur (le frottement est très important) au niveau de la paroi.

- Une région extérieure à cette couche, où le gradient de la vitesse est très faible, et l'influence de la viscosité n'est pas importante.

Dans cette région l'écoulement est supposé potentiel et le frottement peut être négligé.

Ainsi, pour les écoulements à nombre de Reynolds élevé, l'influence de la viscosité est très importante, et les équations de NAVIER-STOKES sont simplifiées pour un calcul approché de la couche limite.

III-2-2 HYPOTHESES DE LA COUCHE LIMITE

Les équations de la couche limite ne seront autres que les équations de NAVIER-STOKES concernant l'écoulement laminaire, en tenant compte des hypothèses de la couche limite, qui sont :

- 1- L'épaisseur de la couche limite étant très petite devant les dimensions de l'obstacle (épaisseur est négligée devant le rayon de courbure de l'obstacle).
- 2- La composante V suivant la normale est petite devant U .
- 3- Deux régions sont à considérer .

III-2-3 SIMPLIFICATION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Supposant que la paroi ayant une forme plate qui coïncide avec la direction ox , la direction oy sera perpendiculaire à celle ci comme le montre la figure ci-dessous .

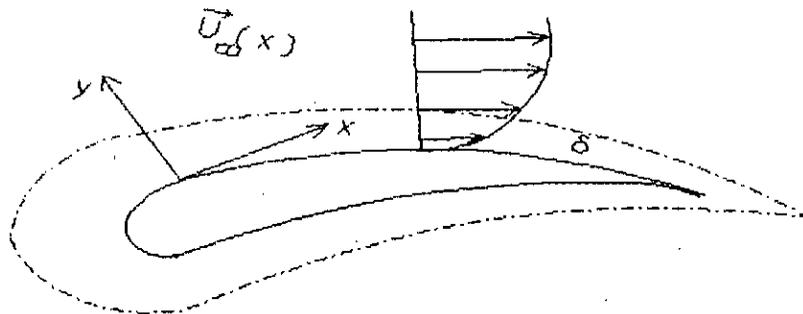


FIG (IV-1) : Profil des vitesses dans la couche limite pour un obstacle .

Les équations de mouvement pour un écoulement plan s'écrivent :

- suivant l'axe des x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III-1})$$

- suivant l'axe des y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III-2})$$

- L'équation de continuité est :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{III-3})$$

Les équations de NAVIER-STOKES dimensionnelles (ou équation de PRANDTL) pour la couche limite laminaire, et un écoulement stationnaire [ANNEXE C] sont :

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{III-4})$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{III-5})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{III-6})$$

Avec :

$$y = 0 \quad ; \quad u = v = 0$$

(absence de glissement entre le fluide et la paroi)

et :

$$u = V_0(x,t) \quad \text{lorsque } y \text{ tend vers l'infini}$$

III-2-4 EPAISSEUR DYNAMIQUE DE LA COUCHE LIMITE

Les équations dynamiques de la couche limite ne seront autre que les équations de NAVIER-STOKES concernant l'écoulement laminaire, en tenant compte des hypothèses de la couche limite, et l'équation de continuité .

Ces hypothèses sont :

- L'épaisseur de la couche limite étant très faible devant les dimensions de l'obstacle.
- La composante V est petite devant U .
- Les dérivées par rapport à x sont petites devant les dérivées par rapport à y .

D'après ces hypothèses on peut définir les épaisseurs suivantes [13] :

- L'épaisseur du déplacement :

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left[1 - \frac{u}{U_0}\right] . dy \quad (\text{III-7})$$

- L'épaisseur de quantité de mouvement :

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_0} . \left[1 - \frac{u}{U_0}\right] . dy \quad (\text{III-8})$$

- L'épaisseur d'énergie cinétique :

$$\delta_e = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_0} . \left[1 - \left(\frac{u}{U_0}\right)^2\right] . dy \quad (\text{III-9})$$

Remarque :

Au bord extérieur de la couche limite la composante U devient égale à $U(x,t)$, où le gradient de vitesse U tend vers zéro.

$$\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0$$

L'équation de NAVIER-STOKES s'écrit (pour un écoulement stationnaire).

$$U_e \cdot \frac{dU_e}{dx} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx} \quad (\text{III-10})$$

L'intégrale de cette équation est :

$$P + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U^2 = C^{ste} \quad (\text{III-11})$$

C'est l'équation de BERNOULLI le long de la frontière de la couche limite .

En injectant l'équation (III-11) dans l'équation (III-4) on aura :

$$\rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho \cdot U_e \cdot \frac{dU_e}{dx} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{III-11})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{III-12})$$

III-3 CALCUL DE LA COUCHE LIMITE

III-3-1 DEFINITION DE L'EQUATION

Le système d'équations (II-11) et (II-12) peut être résolu par des méthodes approchées utilisant l'équation de VAN-KARMAN qui est obtenue en intégrant les deux membres de l'équation (III-11) entre la paroi ($h=0$) et une hauteur h supérieur à l'épaisseur de la couche limite d'où :

$$\int_{y=0}^H (u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \cdot \frac{\partial U_e}{\partial x}) \cdot dy = \frac{\mu}{\rho} \cdot \int_{y=0}^H \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot dy \quad (\text{II-13})$$

D'autre part on a :

$$\frac{\mu}{\rho} \cdot \int_{y=0}^H \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot du = \frac{1}{\rho} \cdot [\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} |_{y=H} - \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} |_{y=0}]$$

$$\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} |_{y=H} \quad , \quad \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} |_{y=0}$$

sont les forces de frottement par unité de surface l'une au point $y = H$ du fluide qui est nulle, et l'autre sur la paroi .

En injectant ce terme dans le second membre de l'équation (III-13), on obtient :

$$\int_{y=0}^H (u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \cdot \frac{\partial U_e}{\partial x}) \cdot dy = - \frac{\tau_0}{\rho} \quad (\text{III-14})$$

Cette équation peut être valide aussi bien pour un écoulement laminaire que pour un écoulement turbulent à condition que u et y désignent les moyennes des composantes de la vitesse.

D'après l'équation (III-12) on a :

$$v = - \int_{y=0}^y \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) . dy$$

Remplaçant cette équation dans (III-14), on aura :

$$\int_{y=0}^H \left(u . \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} . \int_{y=0}^y \frac{\partial u}{\partial x} - U_e . \frac{dU_e}{dx} \right) . dy = - \frac{\tau_0}{\rho}$$

Soient les conditions aux limites sur u et v :

$$\begin{array}{ll} u = 0 & ; \quad v = 0 \quad \text{pour } y=0 \\ u = U_e & \quad \quad \quad \text{pour } y=H \end{array}$$

Intégrant le terme par partie :

$$\int_{y=0}^H \left(\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} . dy \right) . dy = U_e . \int_0^H \frac{\partial u}{\partial x} . dy - \int_0^H u . \frac{\partial u}{\partial x} . dy$$

D'où :

$$\int_0^H \left(2 . u . \frac{\partial u}{\partial x} - U_e . \frac{\partial u}{\partial x} - U_e . \frac{dU_e}{dx} \right) . dy = \frac{\tau_0}{\rho}$$

finalement on aura :

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial x} [u . (U_e - u)] . dy + \frac{du}{dx} \int_0^H (U_e - u) . dy = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (\text{III-15})$$

En faisant tendre H vers l'infini, on peut déterminer les épaisseurs qui sont exprimées dans (III-7) et (III-8), et en les injectant dans l'équation (III-15) on aboutira à :

$$\frac{\tau_0}{\rho} = U_o^2 \cdot \frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta_1) \cdot U_o \cdot \frac{dU_o}{dx} \quad (\text{III-16})$$

C'est une équation intégrale du moment pour une couche limite bidimensionnelle, qui s'applique aussi bien pour une couche limite laminaire que pour une couche limite turbulente.

III-3-2 METHODE APPROXIMATIVE DE A.TH.VON KARMAN ET K.POHL HAUSSEN POUR LES ECOULEMENTS BIDIMENSIONNELS

Pour intégrer l'équation (III-16), POHL HAUSSEN a proposé la fonction de vitesse u sous la forme suivante :

$$\frac{u}{U_o} = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4$$

Avec :

$\eta = y/\delta(x)$ la distance adimensionnelle à partir de la paroi .

$\delta(x)$ est l'épaisseur de la couche limite au point considéré.

Les conditions aux limite sont :

$$y = 0 \quad ; \quad u = 0$$

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx} = -U_o \cdot \frac{dU_o}{dx}$$

$$y = \delta \quad ; \quad u = U_o$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Les constantes a,b,c et d sont données par :

$$a = 2 + \frac{A}{6}$$

$$b = -\frac{A}{2}$$

$$c = -2 + \frac{A}{2}$$

$$d = 1 - \frac{A}{6}$$

L'EQUATION du moment (III-16) peut être réécrite sous la forme condensée suivante [13] :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F(k)}{U_e} \quad (\text{III-17})$$

où :

$$K = \frac{\theta^2}{v} \cdot \frac{dU_e}{dx} \quad (\text{III-17-a})$$

$$z = \frac{\theta^2}{v} \quad (\text{III-17-b})$$

$$F(k) = 2 \cdot \left(\frac{37}{315} - \frac{A}{945} - \frac{a^2}{9072} \right) \cdot \left[2 - \frac{116A}{315} + \left(\frac{2}{945} + \frac{1}{120} \right) \cdot A^2 + \frac{a^3}{4536} \right]$$

(III-17-c)

En combinant les équations (III-7) et (III-8) avec l'équation (III-a) on obtient :

$$\frac{\theta}{\delta} = \left(\frac{37}{315} - \frac{A}{945} - \frac{A^2}{9072} \right) \quad (\text{III-17-d})$$

(III-17) représente une équation différentielle non linéaire, du premier ordre d'inconnue $z = \theta^2/v$, en fonction de l'abscisse curviligne x .

III-3-3 SOLUTION DE L'EQUATION (III-17)

Avec les valeurs initiales [13]

$$z_0 = \frac{k_0}{U_{e0}} = \frac{0.0770}{U'_{e0}}$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_0 = -0.0652 \cdot \frac{U''_{e0}}{U'^2_{e0}}$$

L'équation (III-17) peut être intégrée, à partir du point d'arrêt pour lequel, $A=7,052$ et $K_0=0,0770$, jusqu'à atteindre le point de décollement correspondant à $\tau = 0$ c-à-d pour $A = -12$ et $k = -0,1567$.

III-4 COUPLAGE-CALCUL D'ÉCOULEMENT AVEC COUCHE LIMITE

En connaissant les coordonnées des canaux parfaits des deux plans, on supposera que les épaisseurs du déplacement sont nuls.

Les vitesses sont en premier lieu déterminées dans les deux plans, où les lignes de courants constituent les contours des canaux parfaits.

Notre travail consiste à déterminer le canal réel, en négligeant le décollement de la couche limite, qui apparaît sur l'extrados de l'aube.

L'épaisseur de la couche limite en aval du point de décollement, est obtenue par extrapolation linéaire.

Après avoir calculé l'épaisseur de la couche limite sur les parois (extrados et intrados d'aube et le moyeu), on va le retrancher du canal parfait pour chaque plan (méridien et aube-à-aube), afin de déterminer le canal réel pour chaque plan.

RECAPITULATION

- Pour le calcul de la couche limite on considère :
- la répartition de la vitesse $U_a(x)$ et leurs dérivées qui sont données en fonction de l'abscisse curviligne, elles sont calculées dans les deux plans (méridien et aube-à-aube).
 - L'intégration de l'équation (III-17) nous permet de déterminer $z(x)$, et le second facteur $k(x)$, ce qui conduit au calcul de $\theta(x)$ d'après l'équation (III-17-a), d'où on peut avoir la variation du premier facteur de forme $A(x)$.
 - L'épaisseur de la couche limite $\delta(x)$ est finalement déterminée à partir de l'équation (III-17-a).

REMARQUE

Notre travail consiste d'appliquer la résolution de l'équation (III-17) à la détermination de l'engraissement pour les deux plans (aube-à-aube, méridional).

CHAPITRE - V
PARTIE NUMERIQUE

CHAPITRE-V
PARTIE NUMERIQUE

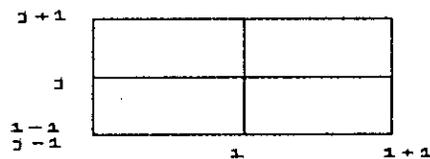
INTRODUCTION :

Parmi les méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles du second ordre et elliptiques, on cite la méthode des différences finies, qui s'appliquent soit aux domaines rectangulaires, ou bien aux domaines fictifs(de calcul), après une transformation conforme des domaines réels.

V-1 DIFFERENTS MAILLAGES UTILISES :**V-1-1 Maillage rectangulaire droit :**

L'entrée de la roue et sa sortie constituent des domaines réguliers, ce maillage donne une précision acceptable aux résultats, à cause de l'uniformité de la distribution des noeuds.

L'utilisation des différences finies pour déterminer les différentes dérivées partielles, consiste à développer la fonction de courant en chaque noeud, en série de TAYLOR poussée jusqu' à l'ordre deux.



Donc on aura les dérivées sous la forme discretisée suivante :

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2 \cdot \Delta x}$$

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2 \cdot \Delta y}$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} - 2 \cdot \Psi_{i,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1} - 2 \cdot \Psi_{i,j}}{(\Delta y)^2}$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right]_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1} + \Psi_{i-1,j-1} - \Psi_{i-1,j+1}}{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y}$$

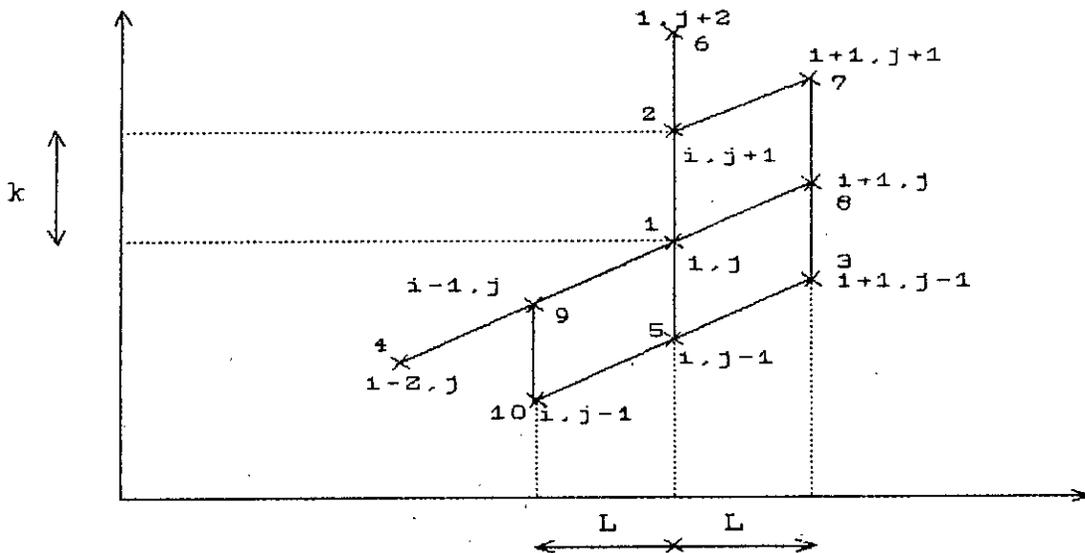
V-1-2 Modèle de MARSH

Deux types de maillages sont utilisés pour l'étude des écoulements dans un domaine fictif, après une transformation conforme du domaine réel.

a- Maillage curviligne :

Le domaine fictif de calcul, est un domaine curviligne régulier, le calcul des différentes dérivées partielles dans chaque noeud ce fait par le développement de la fonction de courant en série de TAYLOR poussée jusqu'à l'ordre quatre. Et on obtient un système de dimension (9*9).

Et cela nous permet de déterminer les dérivées partielles suivantes [23] :



Maillage curviligne

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{i,j} = & \text{xpsi1} \cdot \psi_{i,j} + \text{xpsi2} \cdot \psi_{i,j+1} + \text{xpsi3} \cdot \psi_{i+1,j-1} + \\ & \text{xpsi4} \cdot \psi_{i-2,j} + \text{xpsi5} \cdot \psi_{i,j-1} + \text{xpsi6} \cdot \psi_{i,j+2} + \text{xpsi7} \cdot \psi_{i+1,j+1} + \\ & \text{xpsi8} \cdot \psi_{i+1,j} + \text{xpsi9} \cdot \psi_{i-1,j} + \text{xpsi10} \cdot \psi_{i-1,j-1} \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{1}{6 \cdot k} \cdot (-3 \cdot \psi_{i,j} + 6 \cdot \psi_{i,j+1} - 2 \cdot \psi_{i,j-1} - \psi_{i,j+2})$$

Et de même pour les ordres supérieurs

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right]_{i,j} = & \text{xxpsi1} \cdot \Psi_{i,j} + \text{xxpsi2} \cdot \Psi_{i,j+1} + \text{xxpsi3} \cdot \Psi_{i+1,j-1} + \\ & \text{xxpsi4} \cdot \Psi_{i-2,j} + \text{xxpsi5} \cdot \Psi_{i,j-1} + \text{xxpsi6} \cdot \Psi_{i,j+2} + \text{xxpsi7} \cdot \Psi_{i+1,j+1} + \\ & \text{xxpsi8} \cdot \Psi_{i+1,j} + \text{xxpsi9} \cdot \Psi_{i-1,j} + \text{xxpsi10} \cdot \Psi_{i-1,j-1} \end{aligned}$$

Et on aura aussi :

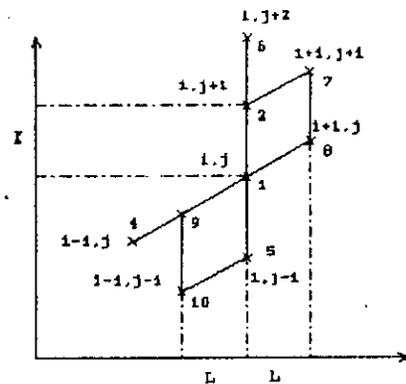
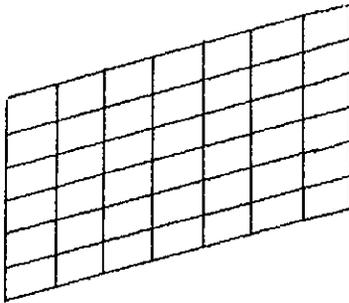
$$\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{1}{k^2} \cdot \{-2 \cdot \Psi_{i,j} + \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}\}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right]_{i,j} = & \text{yypsi1} \cdot \Psi_{i,j} + \text{yypsi2} \cdot \Psi_{i,j+1} + \text{yypsi3} \cdot \Psi_{i+1,j-1} + \\ & \text{yypsi4} \cdot \Psi_{i-2,j} + \text{yypsi5} \cdot \Psi_{i,j-1} + \text{yypsi6} \cdot \Psi_{i,j+2} + \text{yypsi7} \cdot \Psi_{i+1,j+1} + \\ & \text{yypsi8} \cdot \Psi_{i+1,j} + \text{yypsi9} \cdot \Psi_{i-1,j} + \text{yypsi10} \cdot \Psi_{i-1,j-1} \end{aligned}$$

b- Maillage rectangulaire incliné :

Le domaine obtenu après une transformation, est un domaine rectangulaire incliné, dont l'inclinaison des droites parallèles dépend du type de la machine, et des conditions de travail.

Les expressions des différentes dérivées partielles pour chaque noeuds seront calculées ainsi :



$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{1}{6 \cdot l} \cdot (3 \cdot (1+\varepsilon) \cdot \Psi_{i,j} + 2 \cdot \Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-2,j} - 6 \cdot \Psi_{i-1,j} - \varepsilon \cdot (6 \cdot \Psi_{i,j+1} - 2 \cdot \Psi_{i,j-1} - \Psi_{i,j+2}))$$

De même pour les autres dérivées :

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{1}{6 \cdot k} \cdot [6 \cdot \Psi_{i,j+1} - 3 \cdot \Psi_{i,j} - 2 \cdot \Psi_{i,j-1} - \Psi_{i,j+2}]$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{1}{l^2} \cdot [-2 \cdot (1+\varepsilon+\varepsilon^2) \cdot \Psi_{i,j} + (\varepsilon+\varepsilon^2) \cdot (\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}) - \varepsilon \cdot (\Psi_{i-1,j-1} + \Psi_{i+1,j+1}) + (1+\varepsilon) \cdot (\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i,j-1})]$$

$$\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{1}{k^2} \cdot [\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1} + 2 \cdot \Psi_{i,j}]$$

Et de même on aura :

$$\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right]_{i,j} = \frac{1}{2 \cdot l \cdot k} \cdot [(\Psi_{i+1,j+1} + \Psi_{i-1,j-1}) - (\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j}) + (1+2 \cdot \varepsilon) \cdot (\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1} - 2 \cdot \Psi_{i,j})]$$

Avec :

$$\varepsilon = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{l}$$

V-2 Utilisation des différents Modèle de MARSH :

V-2-1 Discretisation de l'écoulement méridional .

Faisant une transformation du domaine réel, en un domaine fictif, où les coordonnées des noeuds sont choisies arbitrairement, par un jacobien .

Soit une fonction f définie ainsi :

$$f = f(z,r) \quad \text{avec} \quad z=z(x,y) \text{ et } r=r(x,y)$$

$$j = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

Injectant les expressions des dérivées partielles développées dans un domaine curviligne (MARSH-curviligne) , dans l'équation de WU (plan méridional) Eq (II-31), après une transformation conforme du domaine réel.

On aboutira ainsi à la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & C1.\Psi_{i,j} + C2.\Psi_{i+1,j} + C3.\Psi_{i-1,j} + C4.\Psi_{i-2,j} + C5.\Psi_{i,j-1} \\
 & + C6.\Psi_{i,j+1} + C7.\Psi_{i,j+2} + C8.\Psi_{i+1,j+1} + C9.\Psi_{i+1,j-1} \\
 & + C10.\Psi_{i-1,j-1} = q_0
 \end{aligned}$$

On s'intéresse au maillage curviligne pour la discrétisation de l'équation de WU pour l'écoulement méridional, car il s'adapte mieux à la forme du canal.

V-2-2 Discretisation de l'écoulement aube à aube .

On approche cet écoulement par un maillage rectangulaire incliné, à cause de la forme et l'allure du canal, qui s'adapte convenablement à ce type de maillage .

Faisant le changement de variable suivant :

$$h = r.\theta$$

$$\sin\alpha = \frac{\Delta r}{\Delta m}$$

$$\cos\alpha = \frac{\Delta z}{\Delta m}$$

Et, on négligera la courbure du plan devant la longueur du canal.

$$x = h$$

$$y = m.\cos\alpha$$

Donc, on aboutit à une transformation de l'équation de WU (II-4-7) qui est sous la forme.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \cos^2 \alpha \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \text{Ln} \rho + \cos^2 \alpha \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\ln \left(\frac{\rho \cdot b}{r} \right) \right]$$

$$- 2 \cdot b \cdot \rho \cdot \omega \cdot \sin \alpha = A \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} + B \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + C$$

Avec, les constantes A, B et C sont données par :

$$A = \frac{\partial}{\partial y} (\text{Ln}(\rho))$$

$$B = \cos^2 \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\text{Ln} \left(\frac{\rho \cdot b}{r} \right) \right)$$

$$C = -2 \cdot b \cdot \rho \cdot \omega \cdot \sin \alpha$$

a- Discretisation du premier membre :

En injectant les dérivées partielles dans l'équation générale, dont le 1^{er} membre est :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \cos^2 \alpha \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{k^2} \cdot [(\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}) - 2 \cdot \Psi_{i,j} +$$

$$\frac{\cos^2 \alpha}{l^2} \cdot [-2 \cdot \Psi_{i,j} \cdot (1 + \varepsilon + \varepsilon^2) + (\varepsilon + \varepsilon^2) \cdot (\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1})$$

$$- \varepsilon (\Psi_{i-1,j-1} + \Psi_{i+1,j+1}) + (1 + \varepsilon) \cdot (\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i,j-1})]$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \cos^2 \alpha \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= -2 \cdot \left[\frac{\cos^2 \alpha}{l^2} \cdot (1 + \varepsilon + \varepsilon^2) + \frac{1}{k^2} \right] \cdot \Psi_{i,j} \\ &+ \left[\frac{\cos^2 \alpha}{l^2} \cdot (\varepsilon + \varepsilon^2) + \frac{1}{k^2} \right] \cdot (\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}) \\ &+ \frac{\cos^2 \alpha}{l^2} \cdot [-\varepsilon (\Psi_{i-1,j-1} + \Psi_{i+1,j+1}) + (1 + \varepsilon) \cdot (\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i,j-1})] \end{aligned}$$

Et sous une forme plus compacte on aura :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \cos^2 \alpha \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= c1 \cdot \Psi_{i-1,j-1} + c2 \cdot \Psi_{i,j+1} + c2 \cdot \Psi_{i+1,j-1} \\ &+ c3 \cdot \Psi_{i-1,j-1} + c3 \cdot \Psi_{i+1,j+1} + c4 \cdot \Psi_{i+1,j} + c4 \cdot \Psi_{i,j-1} \end{aligned}$$

Avec, les constantes données par :

$$c1 = -2 \cdot \left[\frac{\cos^2 \alpha}{l^2} \cdot (1 + \varepsilon + \varepsilon^2) + \frac{1}{k^2} \right]$$

$$c2 = \frac{\cos^2 \alpha}{l^2} \cdot (\varepsilon + \varepsilon^2) + \frac{1}{k^2}$$

$$c3 = - \frac{\cos^2 \alpha}{l^2} \cdot \varepsilon$$

$$c4 = \frac{\cos^2 \alpha}{l^2} \cdot (1 + \varepsilon)$$

b- Discretisation du second membre :

$$K = A \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} + B \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + C =$$

$$A \cdot \left[\frac{1}{6 \cdot k} \cdot (6 \cdot \Psi_{i,j+1} - 3 \cdot \Psi_{i,j} - 2 \cdot \Psi_{i,j-1} - \Psi_{i,j+2}) \right]$$

$$+ B \cdot \left[\frac{1}{6 \cdot l} \cdot (3 \cdot (1+\varepsilon) \cdot \Psi_{i,j} + 2 \cdot \Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-2,j} - 6 \cdot \Psi_{i-1,j} \right.$$

$$\left. - \varepsilon \cdot (6 \cdot \Psi_{i,j+1} - 2 \cdot \Psi_{i,j-1} - \Psi_{i,j+2})) \right]$$

Et a prés arrangement, on aura le second membre :

$$K = - \left(\frac{A}{6 \cdot k} \cdot 3 + \frac{B}{6 \cdot l} \cdot 3 \cdot (1+\varepsilon) \right) \cdot \Psi_{i,j} + \left(\frac{A}{k} - \frac{B \cdot \varepsilon}{l} \right) \cdot \Psi_{i,j+1}$$

$$+ \left(-\frac{A}{6 \cdot k} \cdot 2 + \frac{B}{6 \cdot l} \cdot 2 \cdot \varepsilon \right) \cdot \Psi_{i,j-1} + \left(-\frac{A}{6 \cdot k} + \frac{\varepsilon \cdot B}{6 \cdot l} \right) \cdot \Psi_{i,j+2}$$

$$+ \frac{b}{3 \cdot l} \Psi_{i+1,j} + \frac{b}{6 \cdot l} \cdot \Psi_{i-2,j} - \frac{b}{l} \cdot \Psi_{i-1,j} + c$$

Et avec une écriture compacte, on aura le 2^{ed} membre :

$$A \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} + B \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + C = a1 \cdot \Psi_{i,j} + a2 \cdot \Psi_{i,j+1} + a3 \cdot \Psi_{i,j-1}$$

$$+ a4 \cdot \Psi_{i,j+2} + a5 \cdot \Psi_{i+1,j} + a6 \cdot \Psi_{i-2,j} + a7 \cdot \Psi_{i-1,j} + c$$

Telle que, les constantes sont définies ainsi :

$$a1 = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A}{k} + B \cdot \frac{(1+\varepsilon)}{l} \right)$$

$$a2 = \frac{A}{k} - \frac{B \cdot \varepsilon}{l}$$

$$a3 = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{A}{k} + B \cdot \frac{\varepsilon}{l} \right)$$

$$a4 = \frac{1}{6} \left(\frac{A}{k} + \frac{B \cdot \varepsilon}{l} \right)$$

$$a5 = \frac{B}{3 \cdot l}$$

$$a6 = \frac{B}{6 \cdot l}$$

$$a7 = -\frac{B}{l}$$

L'égalité entre les deux membre donne :

$$\begin{aligned} (c1-a1) \cdot \Psi_{i,j} &= (a2-c2) \cdot \Psi_{i,j+1} + (a3-c2-c4) \cdot \Psi_{i,j-1} \\ &- c3 \cdot \Psi_{i-1,j-1} - c3 \cdot \Psi_{i+1,j+1} + (a5-c4) \cdot \Psi_{i+1,j} \\ &+ a4 \cdot \Psi_{i,j+2} + a6 \cdot \Psi_{i-2,j} + a7 \cdot \Psi_{i-1,j} \end{aligned}$$

Et finalement on aura l'équation du mouvement discretisée :

$$\begin{aligned} \Psi_{i,j} &= \frac{1}{(c1-a1)} \cdot [(a2-c2) \cdot \Psi_{i,j+1} + (a3-c2-c4) \cdot \Psi_{i,j-1} \\ &- c3 \cdot \Psi_{i-1,j-1} - c3 \cdot \Psi_{i+1,j+1} + (a5-c4) \cdot \Psi_{i+1,j} \\ &+ a4 \cdot \Psi_{i,j+2} + a6 \cdot \Psi_{i-2,j} + a7 \cdot \Psi_{i-1,j} + C] \end{aligned}$$

V-2-3 CALCUL DE LA DENSITE

Pour chaque ligne de courant dans le plan méridional, la rothalpie se conserve sur toute sa longueur .

Mais pour le plan aube-à-aube, la rothalpie se conserve sur toute une surface.

$$dI = 0$$

D'où on peut déduire la densité du fluide :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_0^2 \cdot \left[1 - \frac{W^2 + 2 \cdot \omega \cdot (r_0 \cdot V_u - r \cdot V_u)}{V^2}\right]$$

V-3 CALCUL QUASI-TRIDIMENSIONNEL :

- La vitesse relative calculée dans l'intersection des deux plans, aube-à-aube et méridional (qui est une ligne moyenne), est le produit vectoriel des deux gradients, des deux fonctions de courants calculées pour chaque plan, dans un même repère lié à la roue, par densité du fluide dans le canal.

Et cela d'après l'équation suivante :

$$\vec{W} = \frac{1}{\rho} \cdot \nabla\psi_1 \times \nabla\psi_2$$

- Pour une ligne unidimensionnelle la densité est exprimée par :

$$\rho = \rho_0 \cdot \left[1 - \frac{\gamma-1}{2 \cdot \gamma} \cdot W^2 \cdot \frac{\rho_0}{P_0}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

- Après l'initialisation de la vitesse et la densité dans la ligne moyenne , la convergence est vérifiée simultanément sur les deux valeurs, et les caractéristiques de l'écoulement se calculent après avoir eu la convergence à une erreur près.

V-4 CALCUL DES CANAUX REELS DANS LES DEUX PLANS

- Plan méridional :

Les pertes dans l'écoulement méridional dues à l'engraissement de la couche limite, qui est considérée seulement sur le moyeu, en négligeant celles du flasque devant les pertes par fuite.

Le canal réel est déduit en tranchant l'épaisseur de la couche limite du canal parfait.

- Plan aube-à-aube :

Ce canal est délimité par l'intrados et l'extrados des deux aubes voisines, ainsi on a à calculer deux engraissements différents, et on obtient le canal réel en retranchant ces deux engraissements.

V-5 CALCUL DE L'ÉPAISSEUR DE LA COUCHE LIMITE

L'épaisseur de la couche limite est obtenue par la résolution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F(k)}{U_{\infty}}$$

En se basant sur la méthode des "ISOCLINES" [23].

Et enfin, on obtient l'épaisseur de la couche limite par l'équation :

$$\frac{\theta}{\delta} = \left(\frac{37}{315} - \frac{A}{945} - \frac{A^2}{9072} \right)$$

Un programme de calcul est utilisé pour déterminer les différentes épaisseurs de la couche limite, sur l'intrados, l'extrados et sur le moyeu.

V-6 METHODE DE RESOLUTION

Les fonctions de courants exprimées en chaque point du maillage forment un système d'équations suivant .

$$[A].\{\Psi\} = [B]$$

Dont la dimension est égale au nombre de points du maillage contenu dans le domaine.

Pour résoudre ce système, on a utilisé la méthode itérative de relaxation, partant d'un état initial .

Par cette formule :

$$\psi^{n+1}_{i,j} = \psi^n_{i,j} + \Omega \cdot D^n \cdot \psi$$

Soit :

$$\begin{aligned} \psi^{n+1}_{i,j} = & a^n_{i+1,j} \cdot \psi^n_{i+1,j} + a^n_{i-1,j} \cdot \psi^n_{i-1,j} \\ & + a^n_{i,j+1} \cdot \psi^n_{i,j+1} + a^n_{i,j-1} \cdot \psi^n_{i,j-1} - b^n_{i,j} \end{aligned}$$

Avec :

$$D^n \cdot \psi = - \psi^{n+1} - \psi^n$$

Ω : Étant un coefficient de relaxation compris entre 0.1 et 0.5 .

V-7 CONVERGENCE DU CALCUL

La solution est considérée comme stable, si la somme (calculée sur tous les points du maillage), des écarts entre les potentiels correspondant à deux itérations consécutives, est inférieur à une valeur donnée ϵ .

$$\sum_{i,j} |\psi^{n+1}_{i,j} - \psi^n_{i,j}| \leq \epsilon$$

V-8 CALCUL QUASITRIDIMENSIONNEL AVEC COUCHE LIMITE

L'introduction de la couche limite nous a permis de déterminer les deux canaux réels, ainsi après une nouvelle discretisation des deux domaines on recalculera les répartitions des deux fonctions de courant ainsi que les caractéristiques du fluide dans ces derniers.

CHAPITRE - VI
CRITERES DE
CHARGE & PERTES

CHAPITRE VI
CALCUL QUASITRIDIMENSIONNEL
CALCUL DES PERTES

CRITERE DE CHARGE ET PERTES

INTRODUCTION

Les critères de charge consiste à définir une limite de bon fonctionnement au de-là de laquelle l'écoulement est censé être décollé dans le canal considéré .

Parmi les méthodes qui ont été élaborées pour une meilleur approche de l'écoulement réel dans une roue de turbomachine, est l'étude des pertes, un travail bibliographique bien fourni a permis de sélectionner les méthodes suivantes .

- La méthode de C.R.SODERBERG .
- La méthode de D.G.AINLEY .

VI-1 CRITERES DE CHARGE

Parfois, si les formes méridiennes et les formes d'aubages sont mal choisies, les décollements qui se produisent dans la partie axiale de la roue et le décollement qui se produit sur la partie radiale (jet-sillage), sont regroupés en tête de pale .

Parmi les critères de charge nous citons :

VI-1-1 CRITERE DE RODGERS :

Basées sur la diffusion entre l'entrée (1) et la sortie (2) de la roue .

- Sans tenir compte du jet-sillage (calcul en tête de pale) [18]

$$D = \frac{W_{1\max}}{W_{2\min}} = 1 \quad (\text{VI-1-a})$$

$W_{1\max}$: Travail max à l'entrée du canal.

$W_{2\min}$: Travail min à la sortie du canal.

- Tenant compte du jet-sillage (calcul au rayon moyen) [18]

$$1,4 < \frac{W_1}{W_{2\text{sep}}} < 1,7 \quad (\text{VI-1-b})$$

W_1 : Travail à l'entrée

$W_{2\text{sep}}$:

- Critère basé sur le facteur de diffusion (calcul au rayon moyen) [18].

$$0,54 < 1 - \frac{W_2}{W_1} + f(u_2, q, W_1) + 0,1.b. \left(1 + \frac{W_2}{W_1}\right) < 0,66 \quad (\text{VI-1c})$$

U : La vitesse d'entraînement.

q : coefficient de travail.

b : Le pas des aubes.

- CRITERE LONGITUDINAL :

- Sans tenir compte du jet-sillage [18].

$$DL = \frac{W_{2\text{sep}}}{W_{2\max}} = 0,9 \quad (\text{VI-1-d})$$

- Tenant compte du jet-sillage [18].

$$1,4 < DL = \frac{W_{1c}}{W_{2\text{sep}}} = f(M_{1c}) < 1,7 \quad (\text{VI-1e})$$

avec : $0,5 < M_{1c} < 1,1$ (VI-1-f)

W_{1t} : Le travail total à l'entrée de la roue .

W_{2sep} : La vitesse à la section de décollement dans la roue .

VI-2 ETUDE DES PERTES

En général, les pertes occasionnées dans une roue de turbo-machine sont :

a- Pertes par profile :

A cause de la forme géométrique de la roue (aube), les pertes par profil sont générées par l'augmentation de la couche limite .

b- Pertes par écoulements secondaires :

Ce sont des écoulements en dehors de l'écoulement principal (Vortex ,tourbillon et sillage).

c- Pertes par fuites :

L'échappement de la quantité de l'écoulement de la machine due aux défauts de fabrication et la mauvaise étanchéité .

d- Pertes par ondes de chocs :

Elles ne sont occasionnées que dans le cas des écoulements supersoniques et transsoniques .

e- Pertes par incidence :

L'angle d'incidence nominal ou optimum I_{opt} est défini comme

étant celui qui donne le minimum de pertes est exprimé [18] par :

$$I_{opt} = 2. [27,5 - 0,4.\beta_1 - (22,5 - 0,3.\beta_1) \cdot \frac{(M_{w1} - 1)^2}{0,36}]$$

(VI-2-a)

β_1 : L'angle formé par la ligne moyenne de la pale avec le plan méridien à l'entrée .

M_{w1} : nombre de MACH relatif en amont de la roue .

- La plage d'incidence à la limite de laquelle les pertes sont doublées est calculées par [18] :

$$\Delta I = 5 + (12,5 - 0,1.\beta_1) \cdot \frac{(M_{w1} - 1)^2}{0,32} \quad (\text{VI-2-b})$$

- le travail équivalent à la perte de pression totale est [18]:

$$\Delta H_{inc} = 0,05. (\text{Coef} - 1) . W_1^2 \quad (\text{VI-2-c})$$

W_1 : Le travail à l'entrée [18] .

$$\text{Coef} = 1 + 0,1667 \left| \frac{I - 1}{\Delta I} \right| + 0,8333 \left| \frac{I - 1}{\Delta I} \right|^2 \quad (\text{VI-2-d})$$

Introduisant à la formule précédente une correction supplémentaire pour un écoulement supersonique qui devient .

$$\Delta H_{inc} = 0,1 (M_{w1}^2 - 1) . W_1^2 \quad (\text{VI-2-e})$$

f- Pertes par blocage :

A cause des pales et l'épaisseur de la couche limite entre le bord d'attaque et le col, la section de passage diminue et

entraîne aussi un blocage, qui est exprimé par un coefficient de blocage qui est :

$$C_{blc} = C_{blc}(I) \cdot C_{blc}(M_w) \quad (\text{VI-2-f})$$

Avec :

$$C_{blc}(I) = 1 - 0,009 \cdot I - 0,006 \cdot I^2$$

sont les effets d'incidence

Et :

$$C_{blc}(M_w) = 1,1 - 0,125 \cdot M_w \quad \text{si} \quad 0,8 < M_w < 1$$

$$C_{blc}(M_w) = 0,975 \quad \text{si} \quad M_w > 1$$

Ce sont les effets du MACH .

VI-3 Etude des différents modèles

VI-3-1 DESCRIPTION DU MODELE DE SODERBERG

Soderberg à posé son modèle sur les pertes en regroupant toutes les pertes induites dans une machine dans un seul coefficient qui est en fonction de :

$$\zeta = f\left(\frac{S}{l}, R_e, \frac{H}{L}, \frac{t}{l}, \epsilon\right) \quad (\text{VI-3-a})$$

Plusieurs test ont été effectués pour aboutir à une expres-

sion analytique, qui donne un coefficient .

$$C_y = 2. \left(\frac{s}{b}\right) (\operatorname{tga}_2 + \operatorname{tga}_1) \cos^2 \alpha_2 \quad (\text{VI-3-b})$$

qui est approximativement égal à 0,8.

α_1 , α_2 ; angles d'entrée et sortie données par le triangle des vitesses.

- Pour un $Re \leq 10^5$ et $H/b = [3,1]$:

avec l'hypothèse d'un angle d'incidence nul le coefficient de perte nominal ξ est exprimé en fonction de la déflexion et le rapport t/l sous la forme :

$$\xi = \sum_{i=0}^4 a_i s^i \quad (\text{VI-3-c})$$

t : Epaisseur de l'aube .

l : La corde .

telle que :

$$s = t/l = [0,1-0,9]$$

$$a_0 = 0,868982 - 8,03124 s + 19,585 s^2$$

$$a_1 = -0,05639 + 0,522925 s - 1,2043 s^2$$

$$a_2 = 0,0015 - 0,0132514 s + 0,028956 s^2$$

$$a_3 = -1,71902 \cdot 10^{-5} + 1,47994 \cdot 10^{-4} s - 3,1 \cdot 10^{-4} s^2$$

$$a_4 = 7,3715 \cdot 10^{-8} - 6,23 \cdot 10^{-7} s + 1,2849 \cdot 10^{-6} s^2$$

- pour $Re \leq 10^5$ et $H/b > 3/1$

Le coefficient de perte est donné par :

H : La hauteur de l'aube .

b : Le pas des aubes .

$$\zeta'' = (1 + \zeta) \left(0,975 + 0,075 \cdot \frac{b}{H} \right) - 1 \quad (\text{VI-3-d})$$

- pour $Re > 10^5$

Le coefficient de perte est défini par :

$$\zeta''' = \frac{10^5}{Re_c} \cdot \zeta'' \quad (\text{VI-3-e})$$

avec Re_c : est le REYNOLDS au col

VI-3-2 DESCRIPTION DU MODELE DE W.R.HOWTHORNE

HOWTHORNE a repris le même modèle mais en séparant chaque perte à part :

Les différents coefficients a_i sont exprimés par :

$$\zeta_p = 0,025 \left(1 + \left(\frac{e}{90} \right)^2 \right) \quad (\text{VI-4-a})$$

$$\zeta = \zeta_p \left(1 + 3,2 \cdot \frac{b}{H} \right) \quad (\text{VI-4-b})$$

$$\zeta_c = \zeta - \zeta_p \quad (\text{VI-4-c})$$

Avec :

ζ_p : pertes par des écoulements secondaires .

ζ_c : pertes par fuites .

ζ : pertes totales .

VI-3-3 DESCRIPTION DU MODELE D'AINLEY

Avec l'hypothèse d'un angle d'incidence nul, AINLEY a proposé une formulation semi-empirique, pour l'étude des pertes .

- Pour les pertes par profil dans le cas d'une turbine .

$$Y_p = (Y_{ps} + (\frac{\alpha_1}{\alpha_2})^2) (Y_{pr} - Y_{ps}) (\frac{t/l}{0,2})^{(\frac{\alpha_1}{\alpha_2})} \quad (\text{VI-5-a})$$

Avec :

Y_{ps} : pertes par profil dans le stator.

Y_{pr} : pertes par profil dans le rotor.

- Pour le calcul des pertes par écoulements secondaires et les pertes par fuites [18]

$$Y_s + Y_f = (\lambda + B \cdot \frac{\tau}{H}) (\frac{C_1}{s/l}) \cdot \frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^3 \alpha_m} \quad (\text{VI-5-b})$$

Avec :

$B = 0,5$ pour les pertes par fuites radiales .

$B = 0,25$ pour les pertes par fuites axiales .

C_1 : Coefficient de forme [7] .

λ : facteur qui est fonction de :

$$\lambda = f (\frac{(A_2/A_1)^2}{1 + (D_1/D_2)})$$

A_1 , A_2 : les surfaces normales à l'entrée et à la sortie de l'écoulement .

La formule empirique qui donne λ est :

$$\begin{aligned} \lambda = & 5,62 \cdot 10^{-3} - 0,02849 \alpha + 0,585236 \alpha^2 \\ & - 3,05592 \alpha^3 + 7,44773 \alpha^4 - 6,1976 \alpha^5 \end{aligned} \quad (\text{VI-5c})$$

telle que :

$$\alpha = \frac{(A_2/A_1)^2}{1 + (\Phi_{int}/\Phi_{ext})}$$

VI-4 COUPLAGE - CALCUL QUASITRIDIMENSIONNEL ET CALCUL DES PERTES

Le calcul exacte d'un écoulement et la représentation du comportement d'un fluide passant à travers une roue d'une turbomachine nécessite l'introduction des différentes pertes.

La solution numérique des équations gérant cet écoulement est obtenue avec l'application d'un simple modèle des pertes.

Notre objectif dans ce chapitre est de calculer les vitesses relatives dans chaque noeud appartenant à la ligne moyenne, connaissant la vitesse à l'entrée de la roue.

VI-4-1 APPLICATION DU MODELE DE " SODERBERG "

Ce modèle est appliqué suivant la simplification suivante :

- Toutes les pertes sont assemblés dans un seul coefficient .
- L'existence des formules empiriques des coefficients des pertes afin de simplifier les calculs numérique .

VI-4-2 CALCUL DE L'ENTHALPIE A L'ENTREE DE LA ROUE

L'enthalpie est donnée par la formule :

$$h = C_p \cdot T \quad (\text{VI-6-a})$$

Avec :

C_p : est la chaleur spécifique, qui est supposée C^{ste} .

$$C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R \quad (1)$$

et on a :

$$P V = m R T \quad (2)$$

Introduisant (1) et (2) dans (VI-6-a), on aura :

$$h_1 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} \quad (\text{VI-6-b})$$

VI-4-3 CALCUL DE L'ENTHALPIE A LA SORTIE

L'enthalpie à la sortie est donnée par :

$$h_2 = h_1 - \Delta h \quad (\text{VI-6-c})$$

Avec :

Δh : est la chute d'enthalpie.

Le coefficient des pertes pour un rotor est donné par :

$$\zeta = \frac{W_2^2}{2 (h_1 - h_{2s})} \quad (\text{VI-6-d})$$

ζ : est en fonction de t/l , z

z : est la déflexion .

$$z = z_1 + z_2$$

t/l : Rapport épaisseur-corde .

Ainsi on aura :

$$W_2 = \sqrt{2 \zeta \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right)} \quad (\text{VI-6-e})$$

Avec cette équation on calcul la vitesse relative à la sortie de la roue .

On suppose que la chute d'enthalpie est linéairement distribuée sur toute la ligne moyenne , car le coefficient de frottement est supposé constant.

Et par interpolation avec la longueur de la ligne moyenne , on recalculera la distribution de la vitesse relative sur cette ligne par :

$$W = W_1 + \frac{\Delta L}{L} (W_2 - W_1) \quad (\text{VI-6-f})$$

ΔL : la longueur curviligne entre l'entrée et le noeud, où on calcul la vitesse .

L : la longueur de la ligne moyenne .

CHAPITRE – VII
INTERPRETATIONS
& RESULTATS

En suite dans la figure FIG (VII-A2), nous avons donnés la répartition des vitesses relatives dans les deux cas :
On remarque que pour le calcul réel, sont moins importantes à la sortie que celle dans l'écoulement parfait .

Et pour la répartition des ISOMACH, elle est donnée dans la figure FIG (VII-A3) .

Pour le plan méridional :

Le calcul du canal réel (avec couche limite) est représenté dans la figure FIG (VII-5), ainsi la répartition de la fonction de courant est représentée sur la FIG (VII-B1), et sur la FIG (VII-B2), on a donné la distribution de la vitesse relative; et pour la représentation des ISOMACH est donnée sur la FIG (VII-B3), de même pour la distribution de la densité du fluide, elle est donnée dans la FIG (VII-B4), finalement sur la FIG (VII-B5) on a configuré la distribution le rapport de la pression. Et cela a été considéré dans les deux cas .

Ainsi par un couplage des deux plans on a déduit une représentation de la ligne moyenne, qui est dans l'espace. Les trois projections de cette ligne, est donnée par la figure FIG (VII-0-a) pour le plan (R.TETA,Z), la figure FIG (VII-0-b) pour le plan (R,Z), et la figure FIG (VII-0-c) pour le plan (R.TETA,R), et finalement nous avons donnés les coordonnées de la ligne moyenne dans un tableau FIG (VII-0) .

Cette ligne moyenne représente un outi principal pour la détermination de toutes les caractéristiques quasitridimensionnelles de l'écoulement .

Après la détermination de la ligne moyenne on a représenté la variation de la vitesse relative le long de celle ci sur la FIG (VII-8-c), et de même pour la variation de la densité qui est donné dans la FIG (VII-9-c), la variation du nombre de MACH est donnée dans la FIG (VII-10-c), ainsi que le rapport de compression a été configuré sur la FIG (VII-11-c) .

ITERPRETATIONS ET RESULTATS

Dans ce travail on a voulu donner les éléments et l'approximation pour le calcul d'un écoulement réel dans une turbomachine pour cela on prendra comme exemple un compresseur centrifuge .

Le travail accompli a été consacré à la mise au point d'un programme de calcul de la ligne moyenne, en se basant sur la discretisation des deux plans selon les deux modèle de MARSH, un maillage rectangulaire incliné FIG (VII-3) pour le plan aube-à-aube, et un maillage curviligne pour le plan méridional FIG (VII-3).

Pour une étude complète, nous avons tenus à donner tous les informations sur l'écoulement dans les deux plans avant le couplage, et cela pour faire une étude comparative entre l'écoulement parfait et l'écoulement réel .

Pour le plan aube-à-aube :

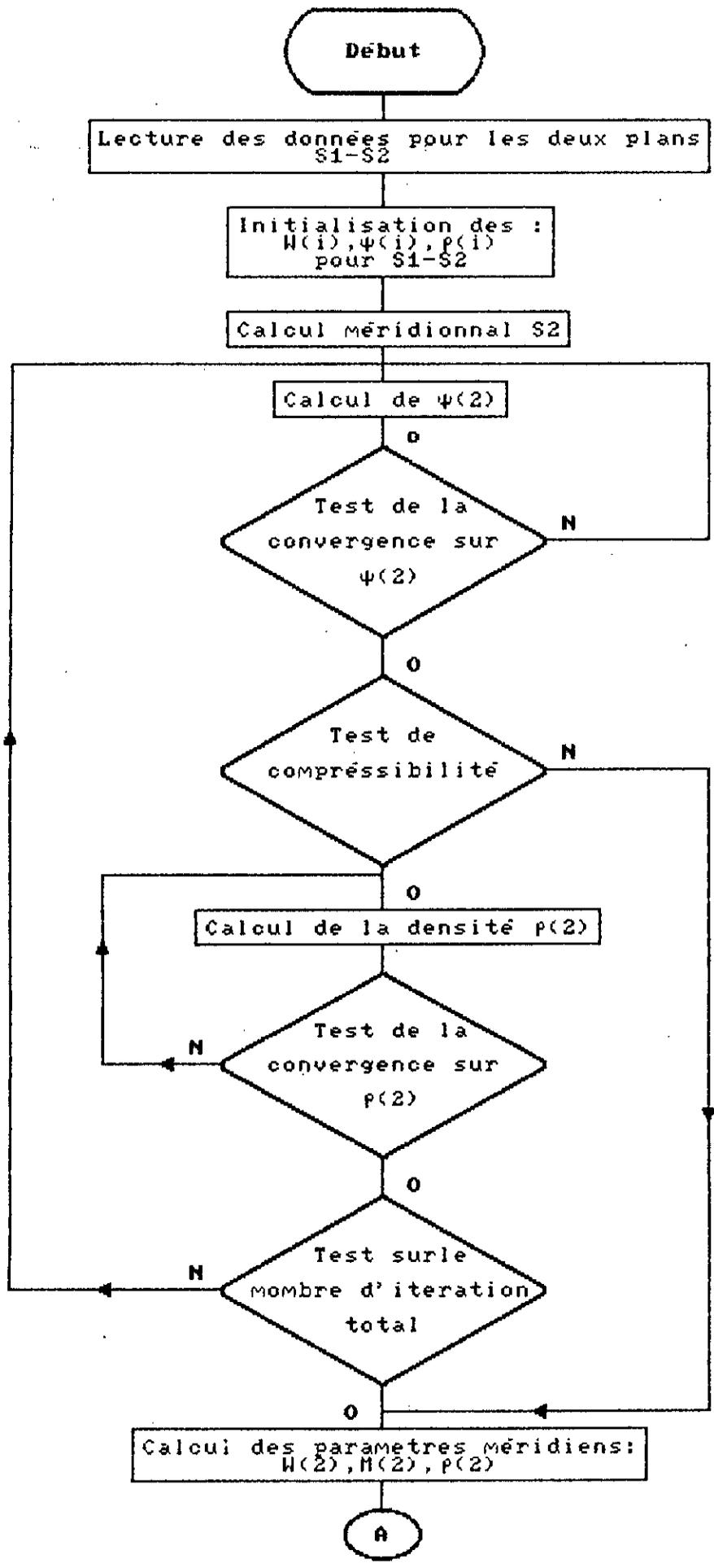
La figure FIG (VII-A1) donne la variation de la fonction de courant. Dans le cas réel les lignes de courant suivent la forme du canal (répartition uniforme) car on a éliminé les épaisseurs de la couche limite qui se développée dans le canal, représenté dans la figure FIG (VII-6), par contre dans le canal parfait on remarque la perturbation des lignes de courant, causée par la couche limite (négligée) au voisinage des deux parois .

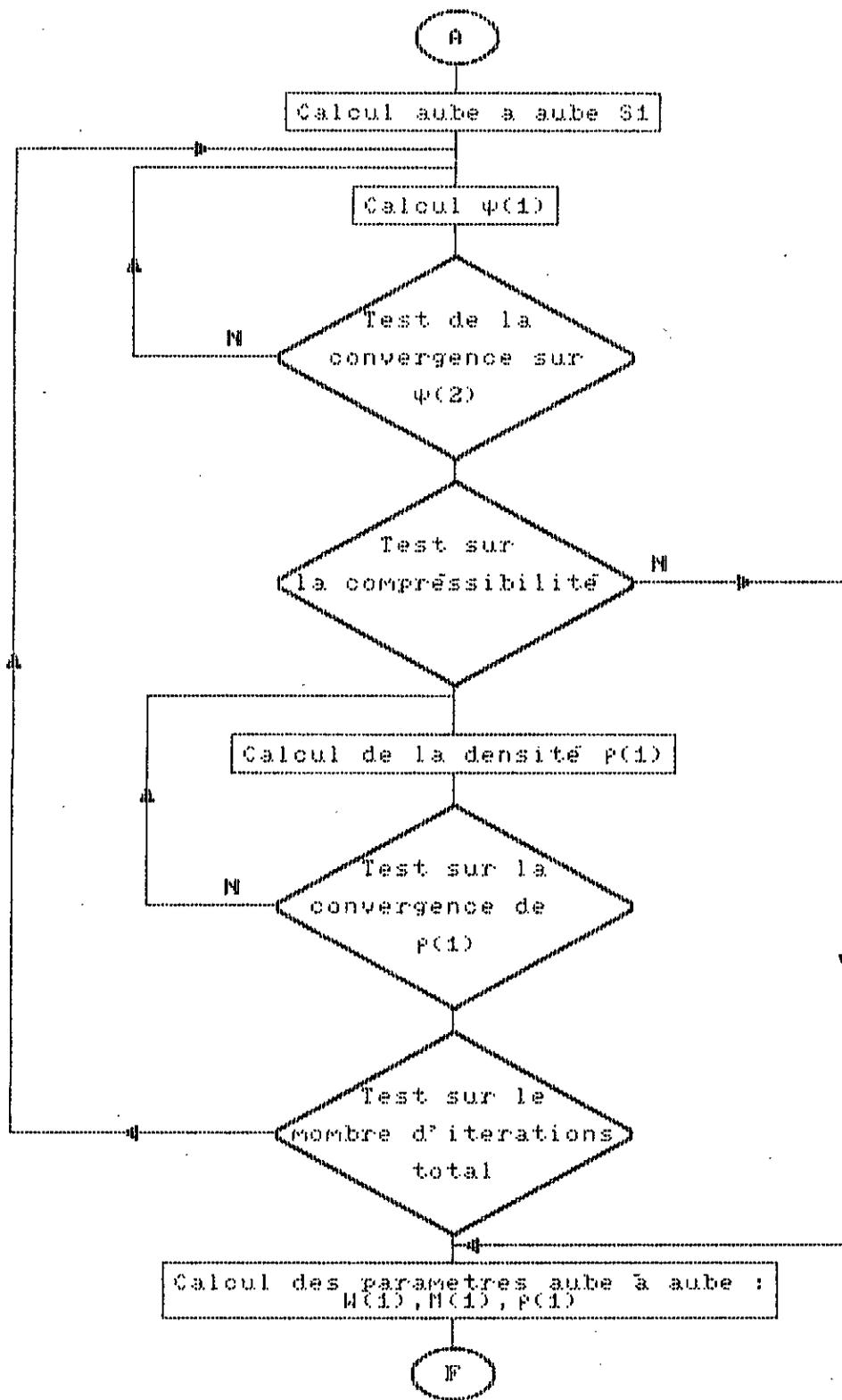
Et sur la figure FIG (VII-A4), nous avons donné la représentation de la densité du fluide dans les deux cas.

Le rapport de pression représenté dans la figure FIG (VII-A5) donne l'allure de la pression et sa variation dans les deux cas : Le cas réel, où il y a trop de perte d'énergie qui diminue le rapport de pression par rapport au cas parfait, où les pertes sont négligées .

Les deux programmes élaborés pour la détermination les caractéristiques du fluide pour un calcul quasi-tridimensionnel sont représentés sur la figure FIG (VII-1), qui résume le calcul de la ligne moyenne, et les différentes variations des caractéristiques d'un fluide après une correction par introduction des pertes.

Et la figure FIG (VII-2), représente un organigramme de calcul des deux canaux réels.





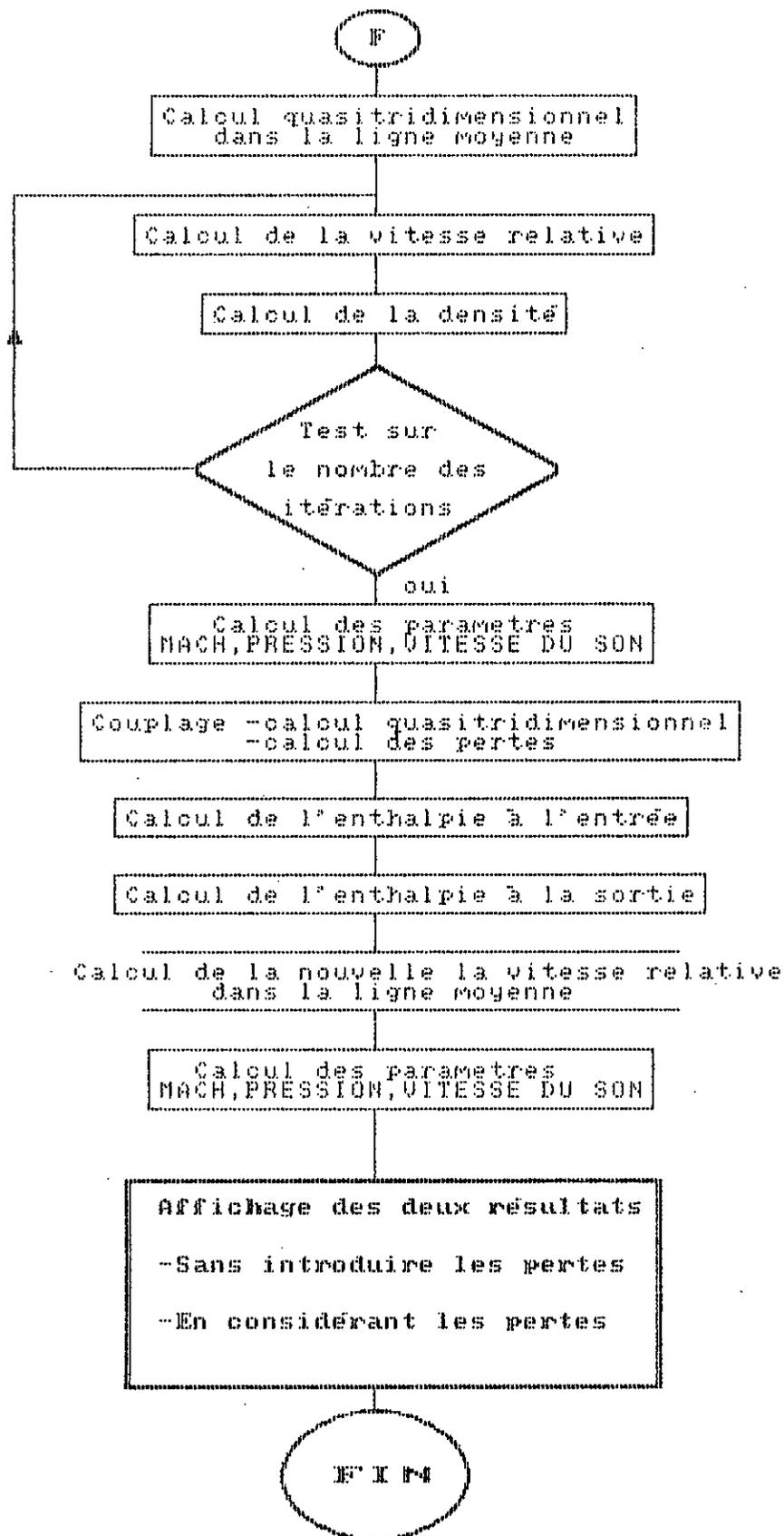
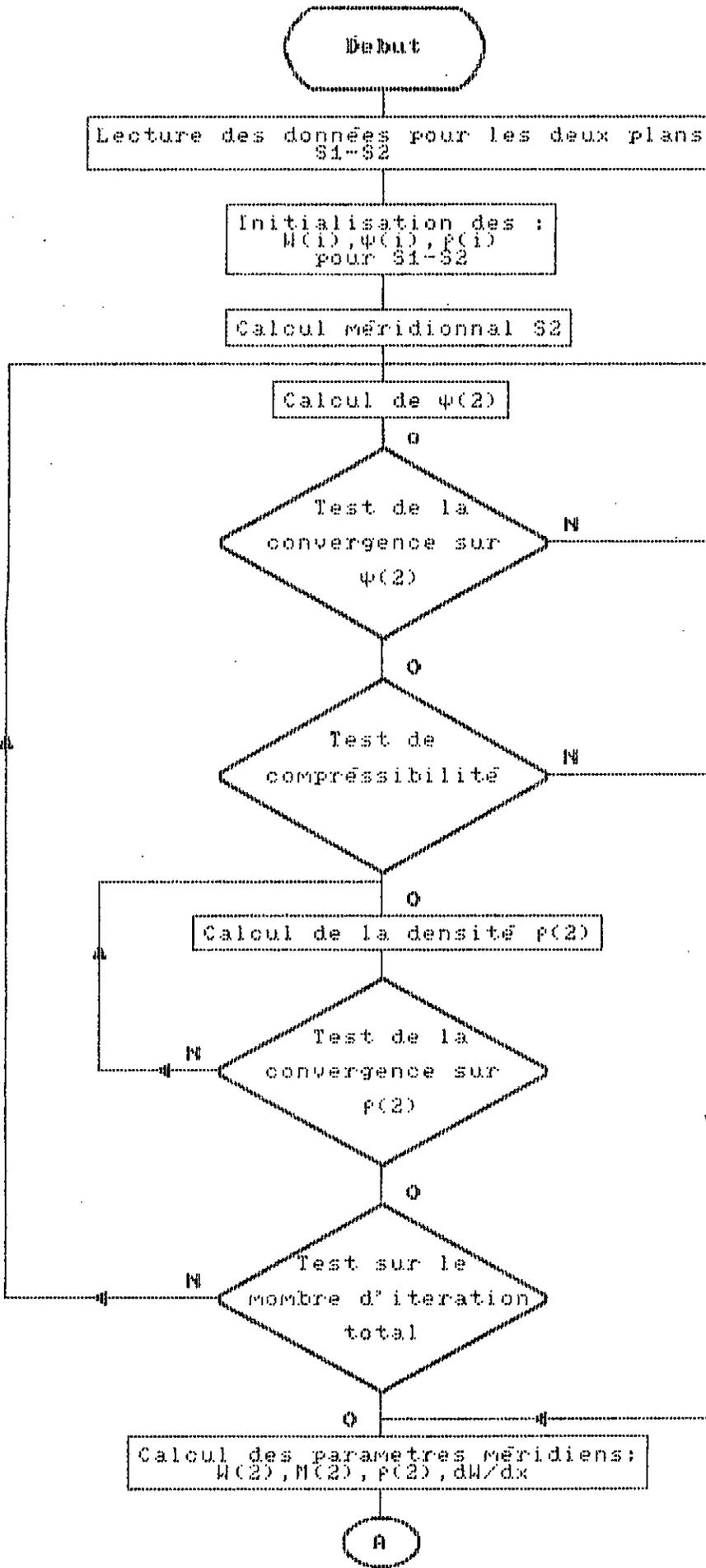


FIG (VII-1) :
Calcul quasitridimensionnel



Debut

Lecture des données pour les deux plans S1-S2

Initialisation des :
N(i), $\psi(i)$, $\rho(i)$
pour S1-S2

Calcul méridional S2

Calcul de $\psi(2)$

O

Test de la convergence sur $\psi(2)$

N

O

Test de compressibilité

N

O

Calcul de la densité $\rho(2)$

N

Test de la convergence sur $\rho(2)$

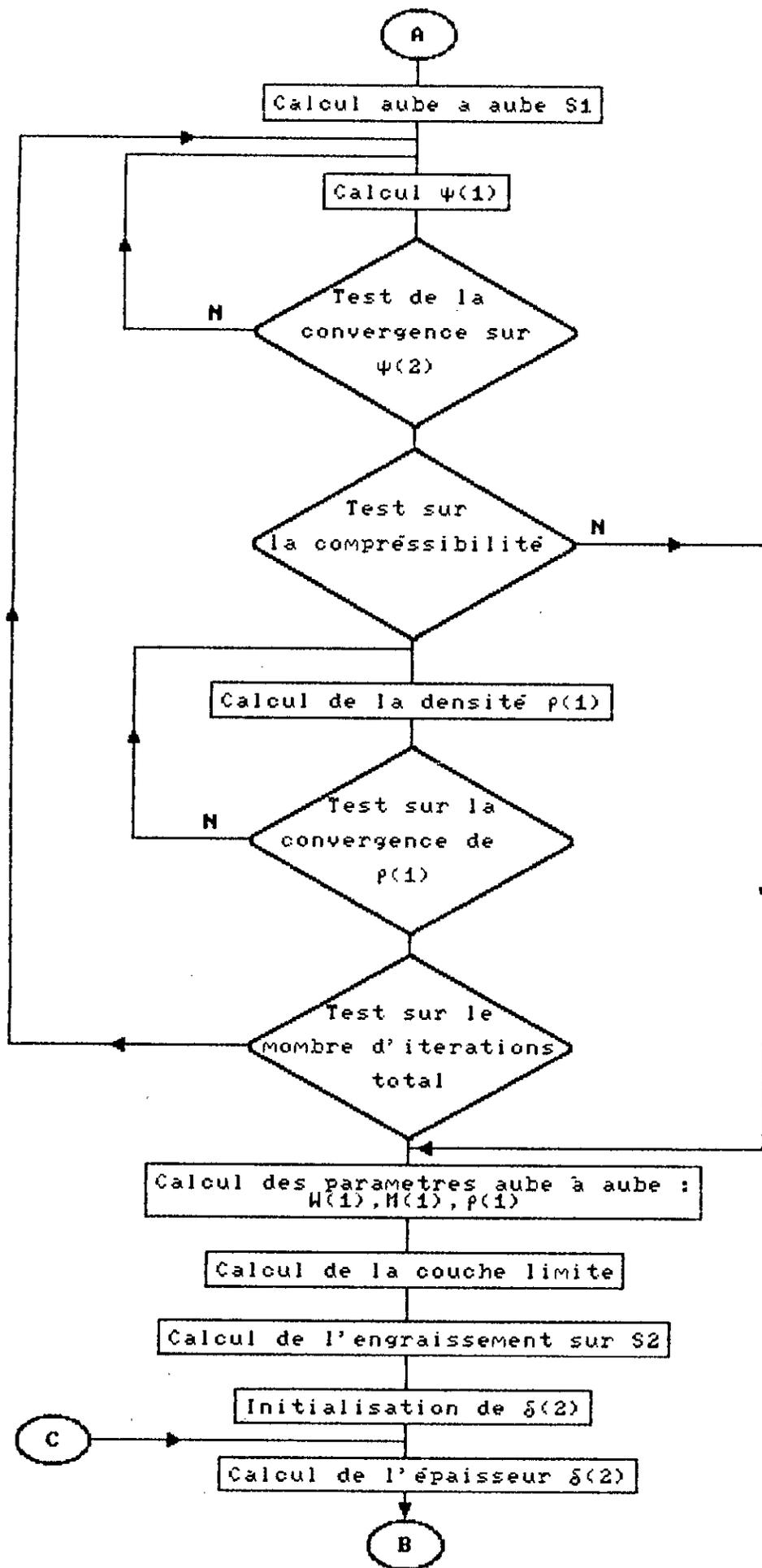
O

Test sur le nombre d'iteration total

N

Calcul des paramètres méridiens:
 $N(2)$, $\psi(2)$, $\rho(2)$, dW/dx

A



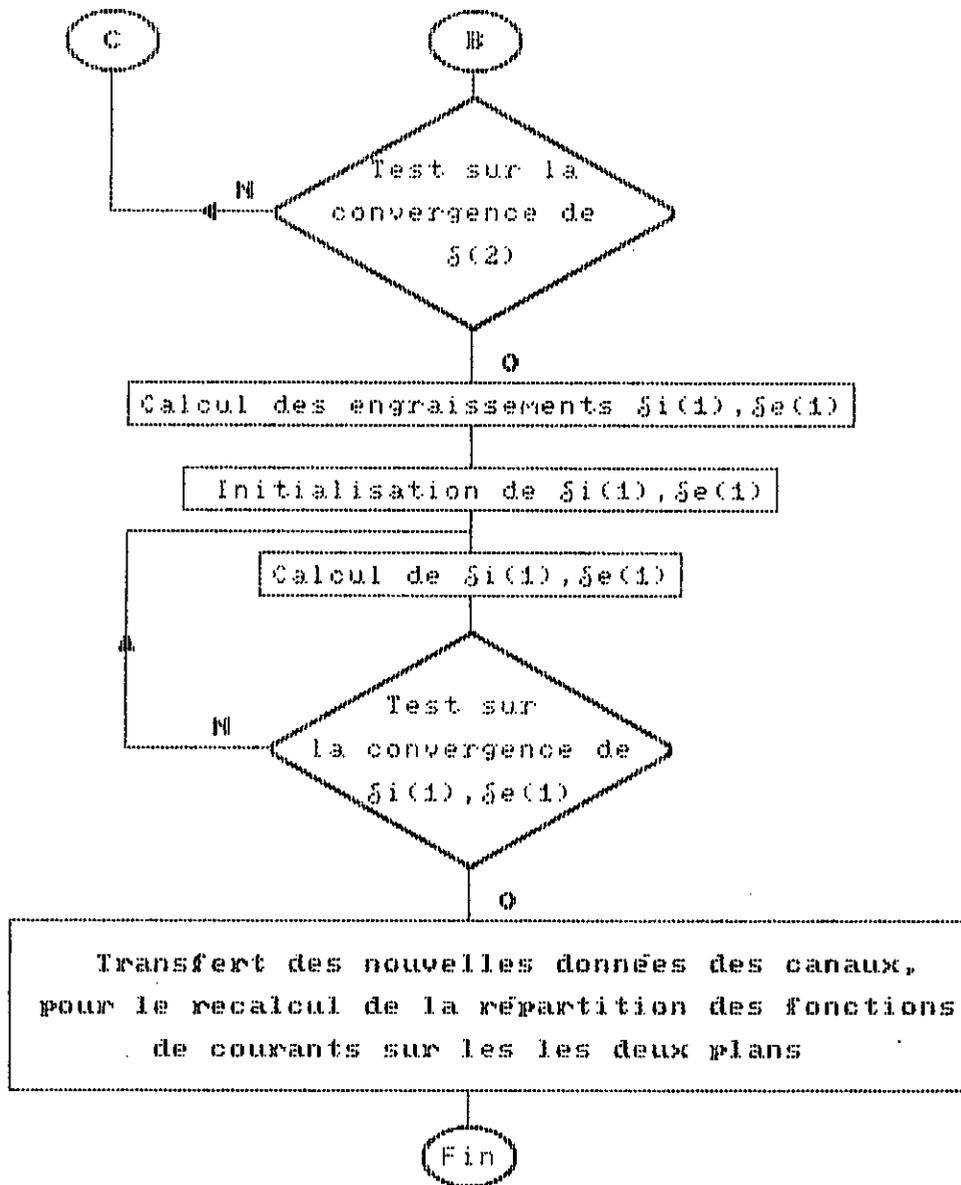


FIG : (VII-2)

Calcul des deux canaux réels (méridien , aube-à-aube)

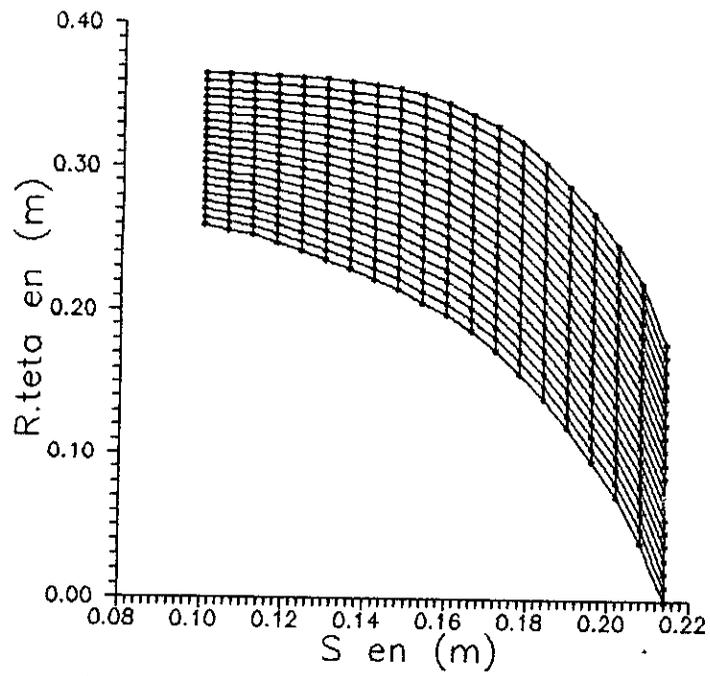


FIG (VII-3-3): Le maillage utilise pour le calcul aube a aube (domaine parfait)

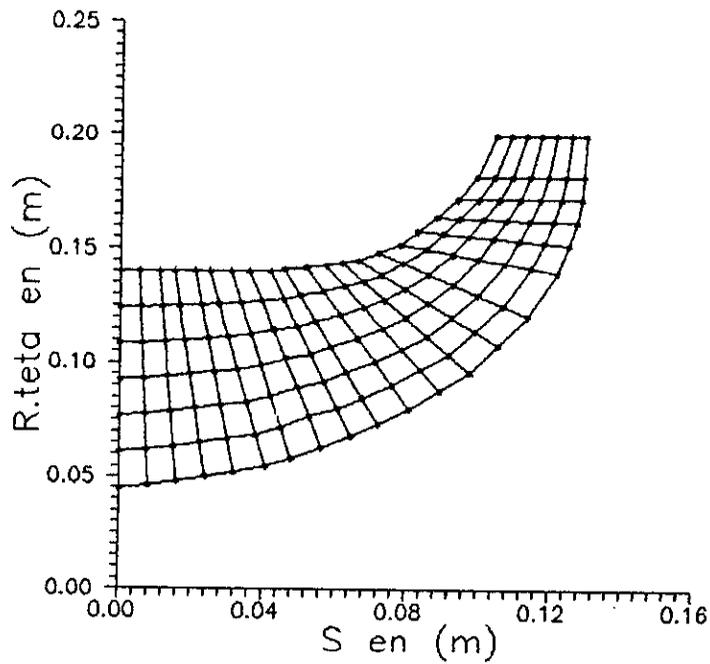
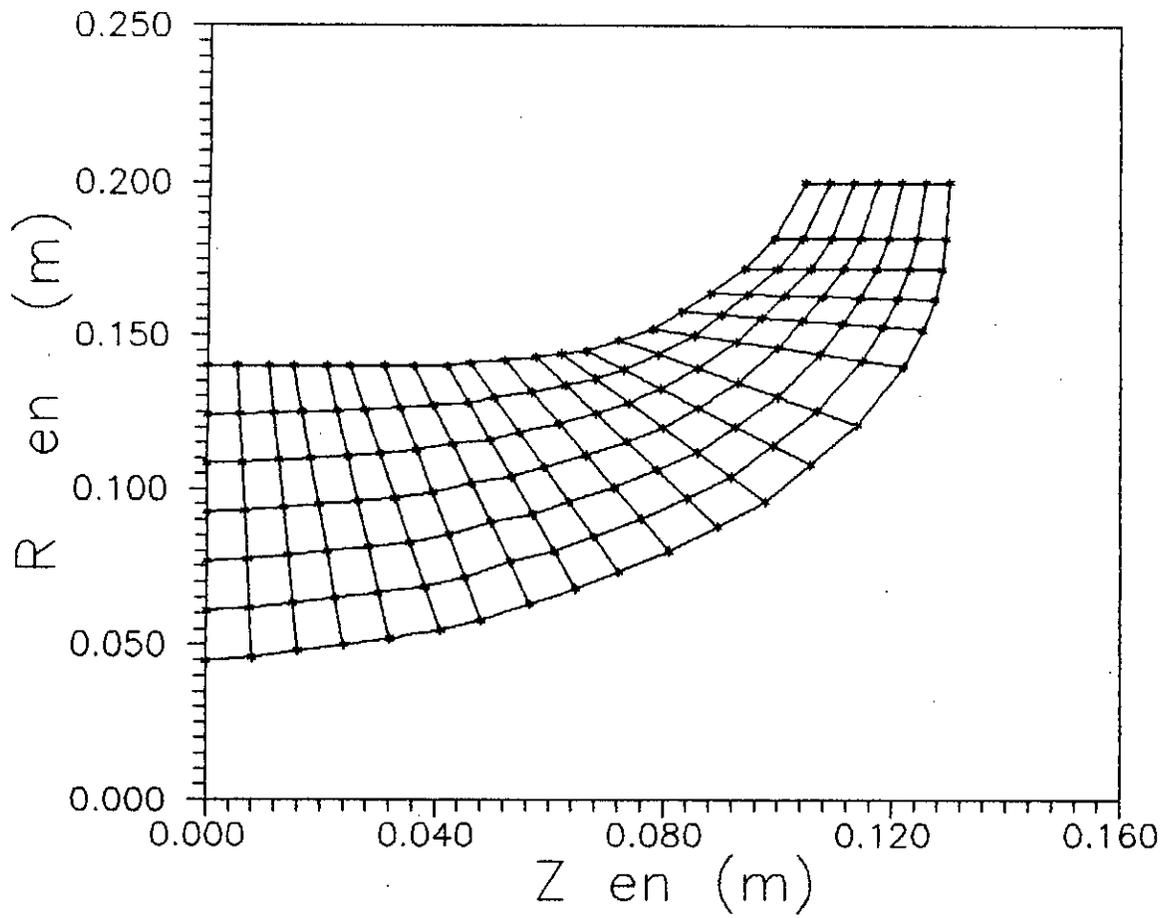
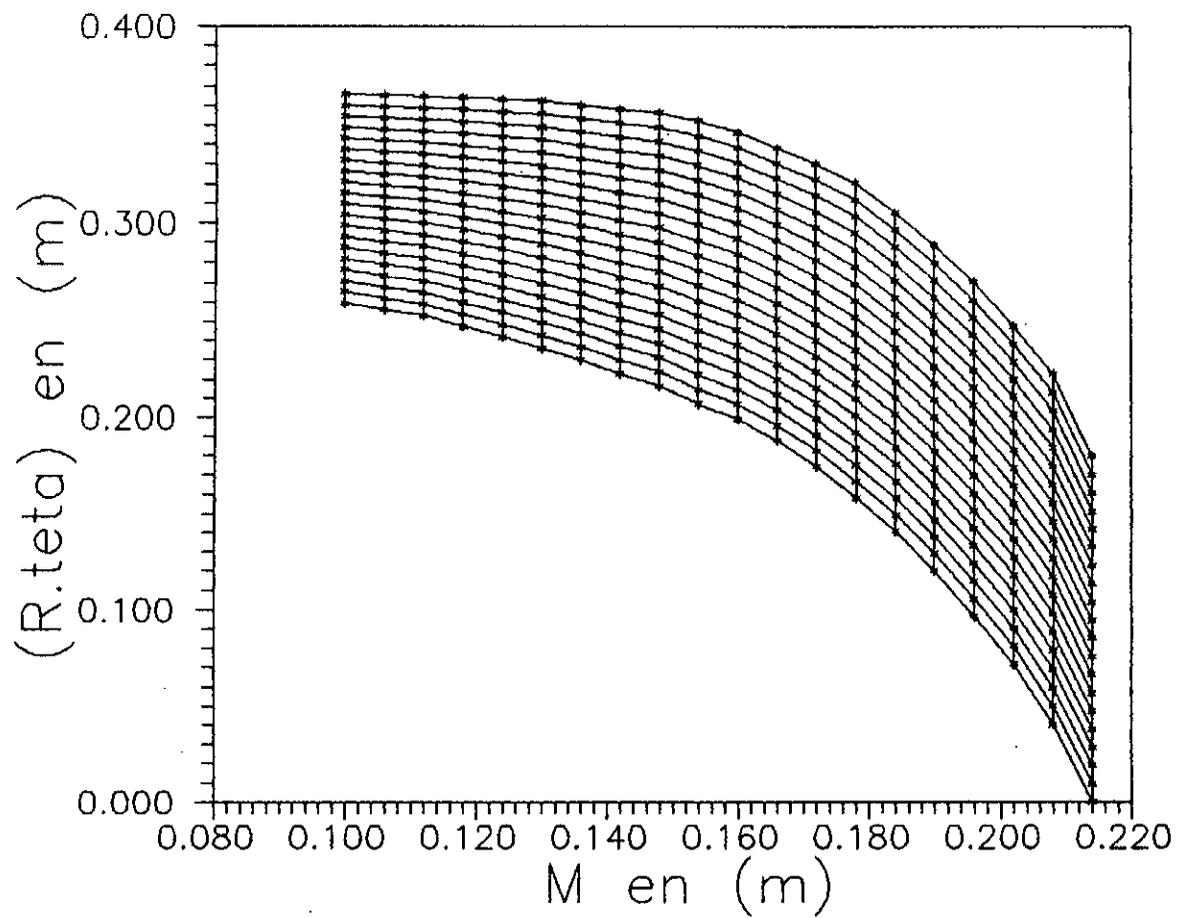


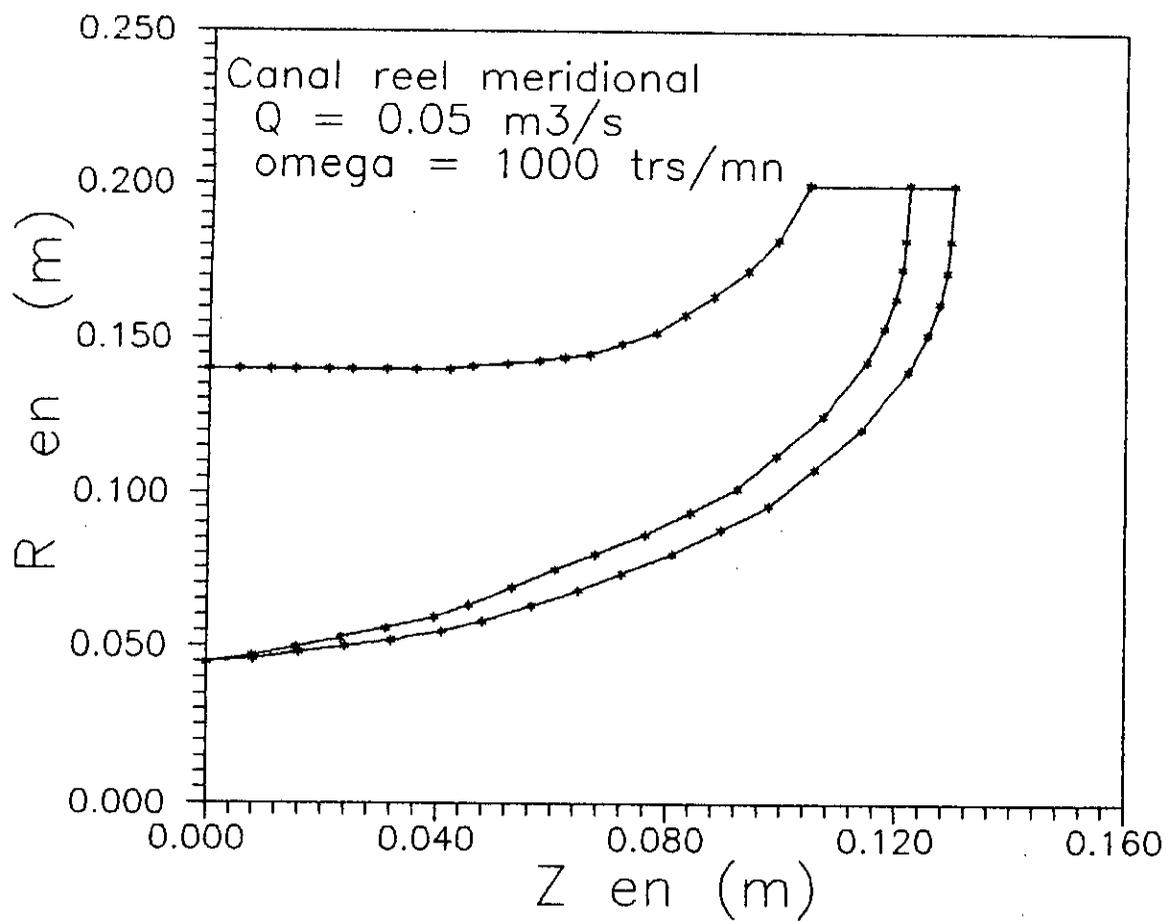
FIG (VII-3-4): Le maillage utilise pour le calcul meridional (domaine parfait)



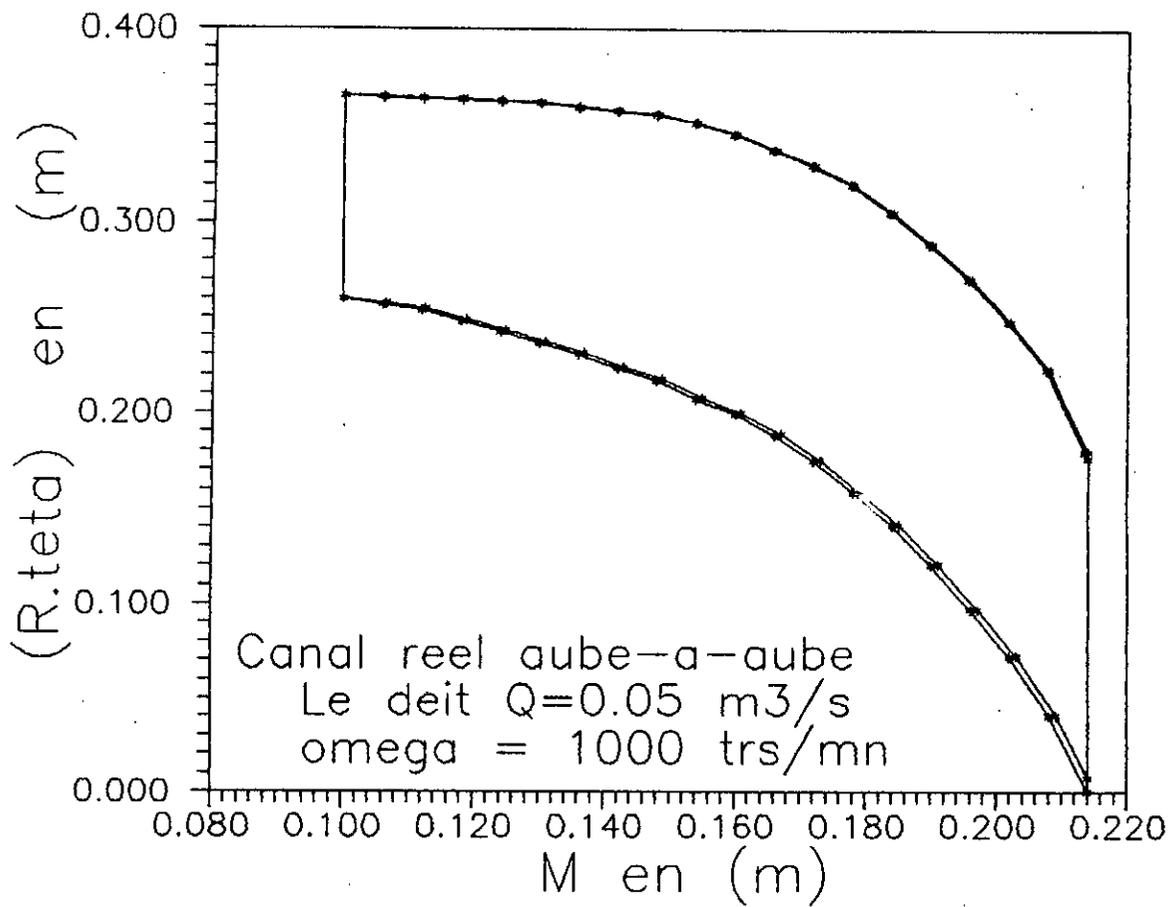
Fig(VII-3): Discretisation du domaine meridional (S2)



Fig(VII-4): Discretisation du domaine
aube-a-aube (S1)



Fig(VII-5) : L'epaisseur de la couche limite au niveau du noyau



Fig(VII-6) : Les epaisseurs des couches limites de l'intrados et l'extrados d'un

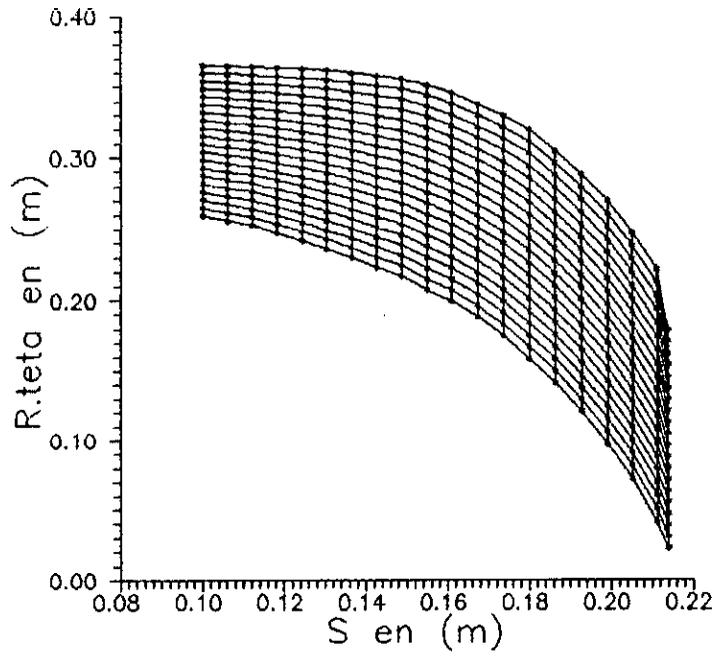


FIG (VII-3-1): Le maillage utilise pour le calcul aube a aube (domaine reel)

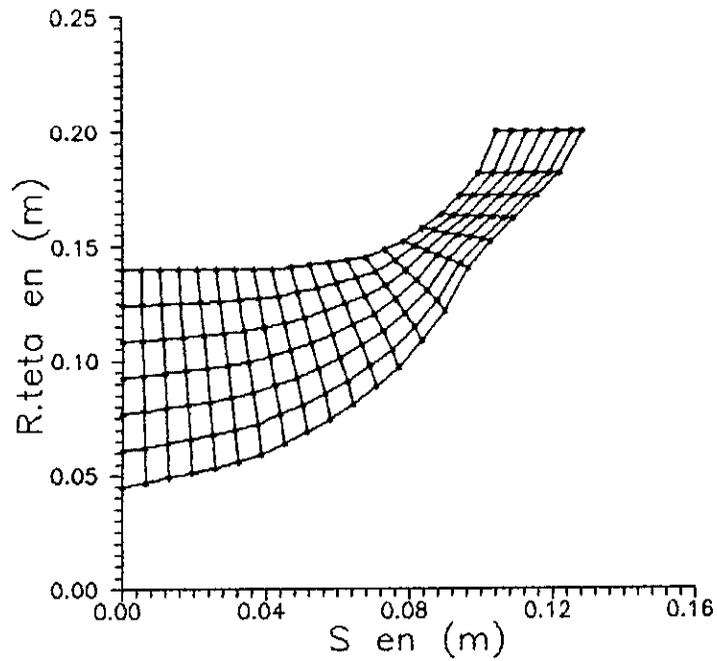
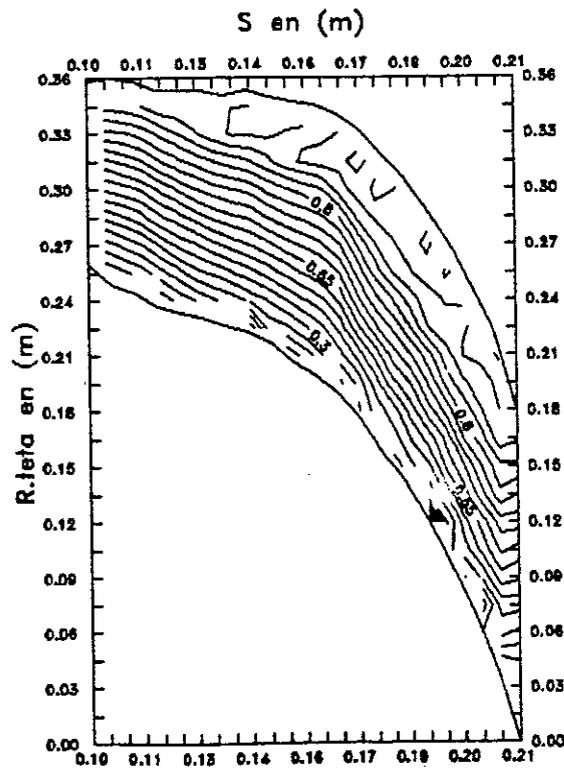


FIG (VII-3-2): Le maillage utilise pour le calcul meridional (domaine reel)

FIG (VII-A1): La répartition de la fonction de courant

La répartition des lignes de courant
sans pertes dans le plan aube à aube
maillage rectangulaire incliné



La répartition des lignes de courant
avec pertes dans le canal aube à aube
maillage rectangulaire incliné

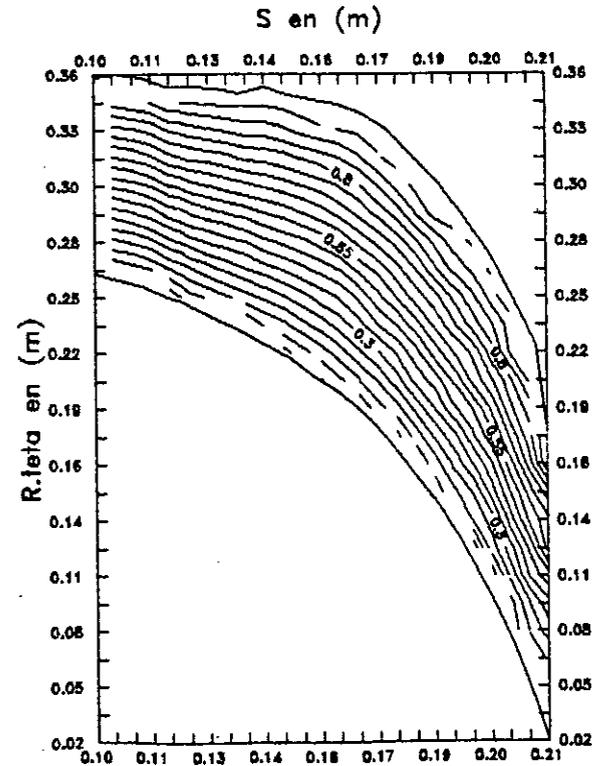
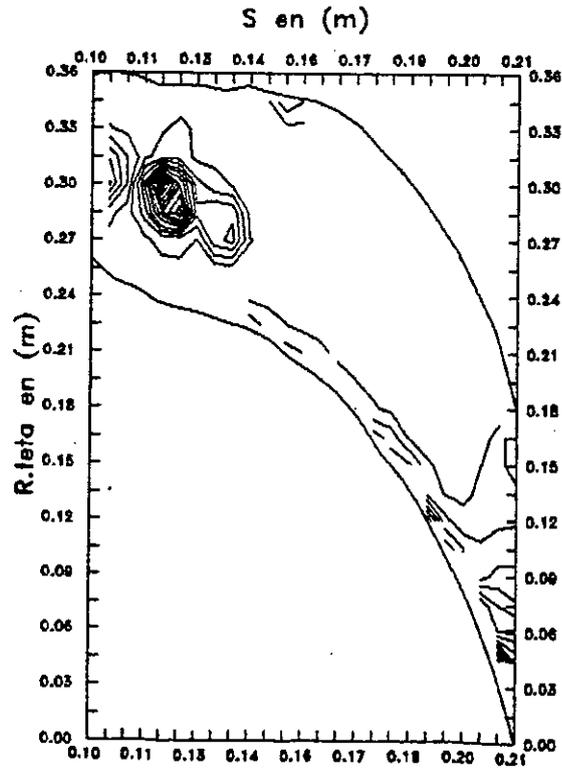


FIG (VII-A4): La distribution de la densité

La repartition de la densité sans perte
dans le canal aube a aube
maillage rectangulaire incline



La repartition de la densité dans
le canal aube a aube réel
maillage rectangulaire incline

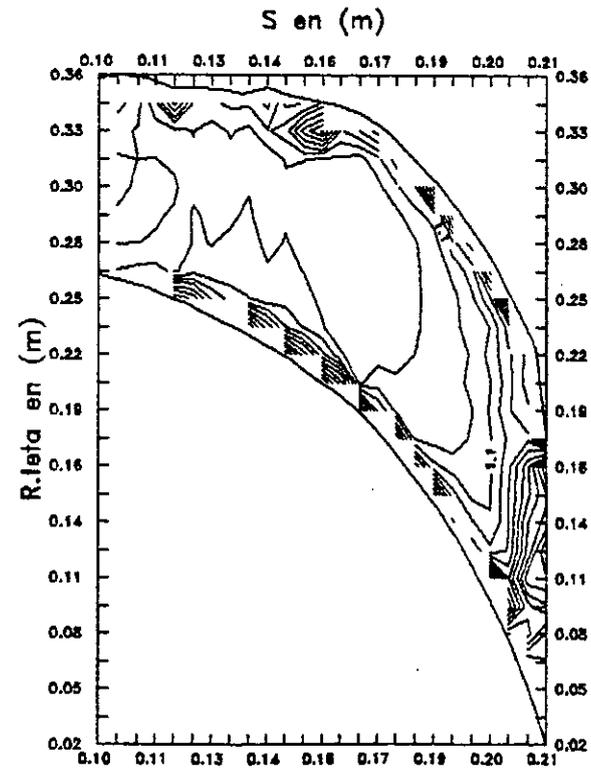
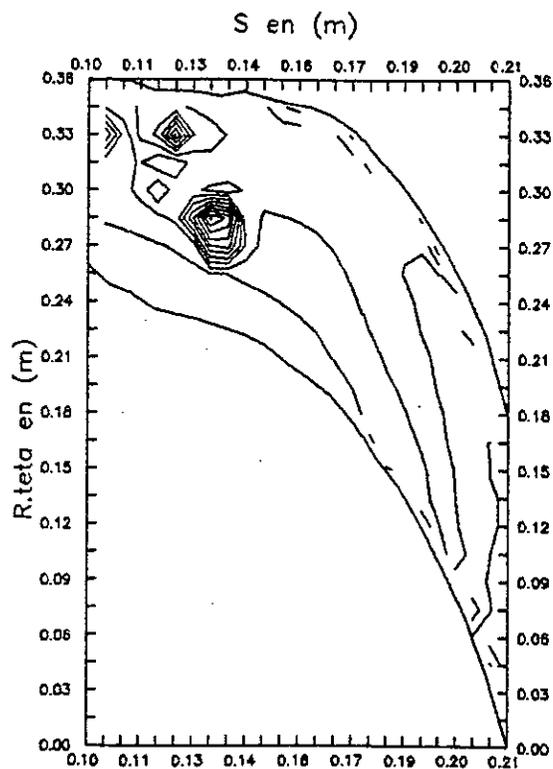


FIG (VII-A2): La distribution de la vitesse relative

La distribution de la vitesse relative dans le canal aube a aube sans pertes maillage rectangulaire droit



La repartition des vitesses relatives dans le canal reel aube a aube maillage rectangulaire incline

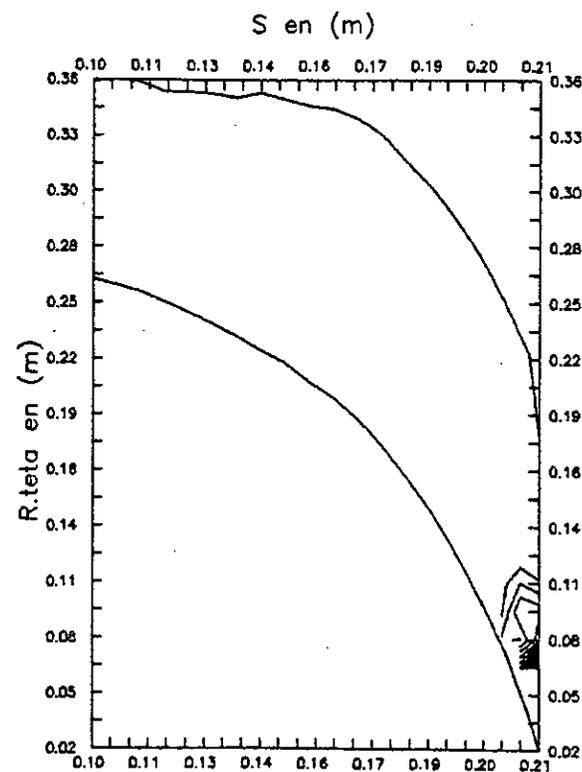
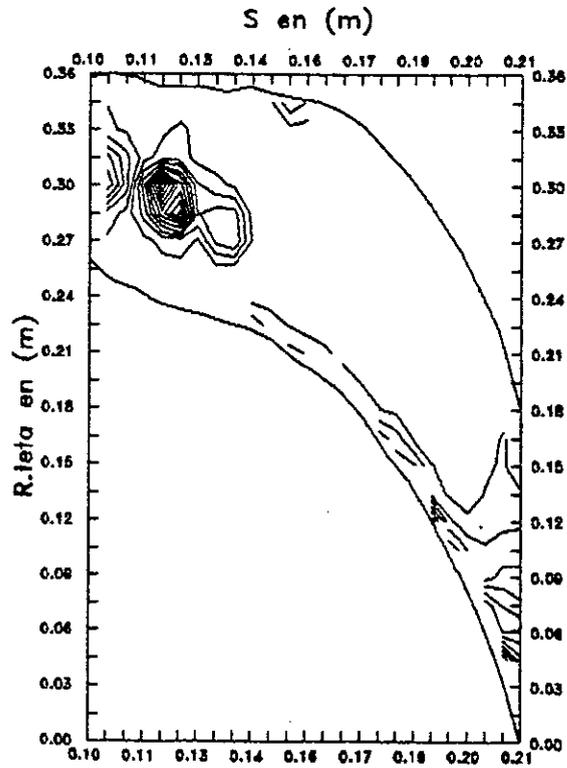


FIG (VII-A5): La distribution du rapport de pression :

la repartition du rapport de pression (p/p_0)
dans le canal aube a aube sans pertes
maillage rectangulaire incline



la repartition du rapport de pression (p/p_0)
dans le canal reel aube a aube
maillage rectangulaire incline

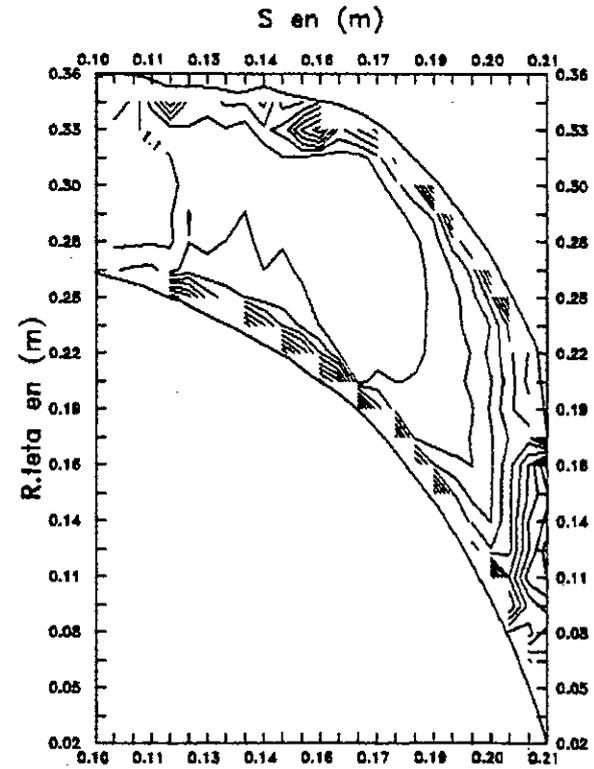
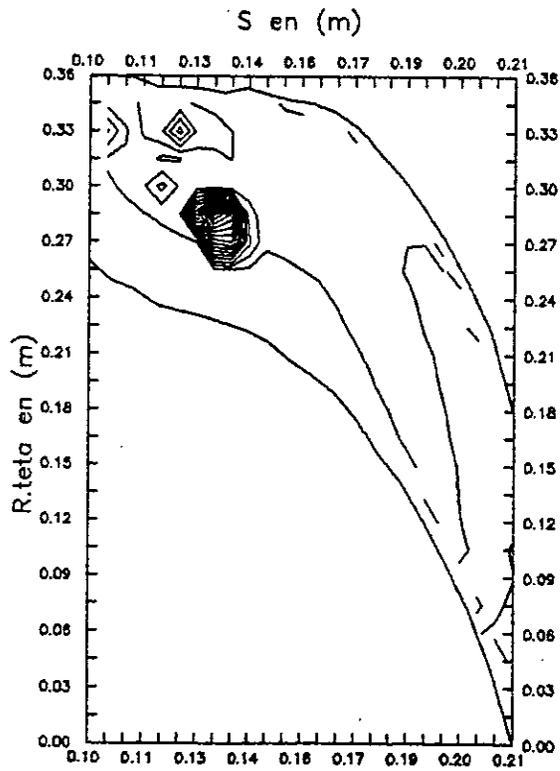


FIG (VII-A3): La distribution du nombre de Mach

La repartition des nombres de Mach dans le canal aube a aube sans pertes
maillage rectangulaire incline



La repartition des nombres de Mach dans le canal reel aube a aube
maillage rectangulaire incline

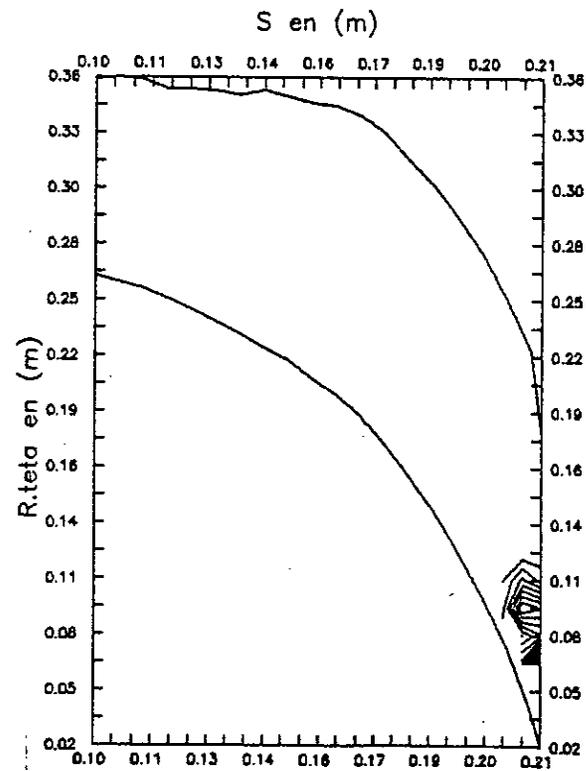
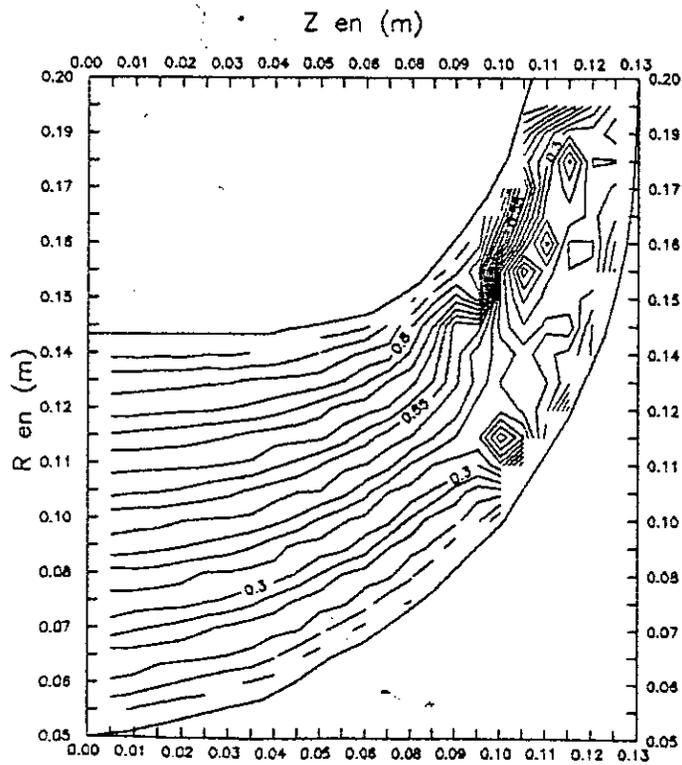
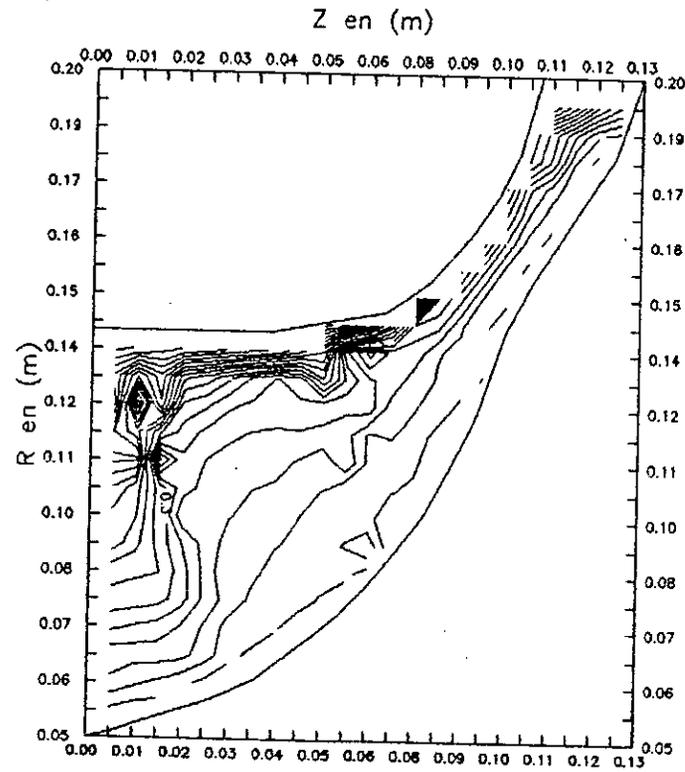


FIG (VII-B1): La répartition de la fonction de courant

La répartition des lignes de courant dans le plan méridional sans pertes
maillage curviligne



La répartition des lignes de courant dans le canal réel méridional
maillage curviligne



la distribution de la densité dans
le plan meridional sans pertes
maillage curviligne

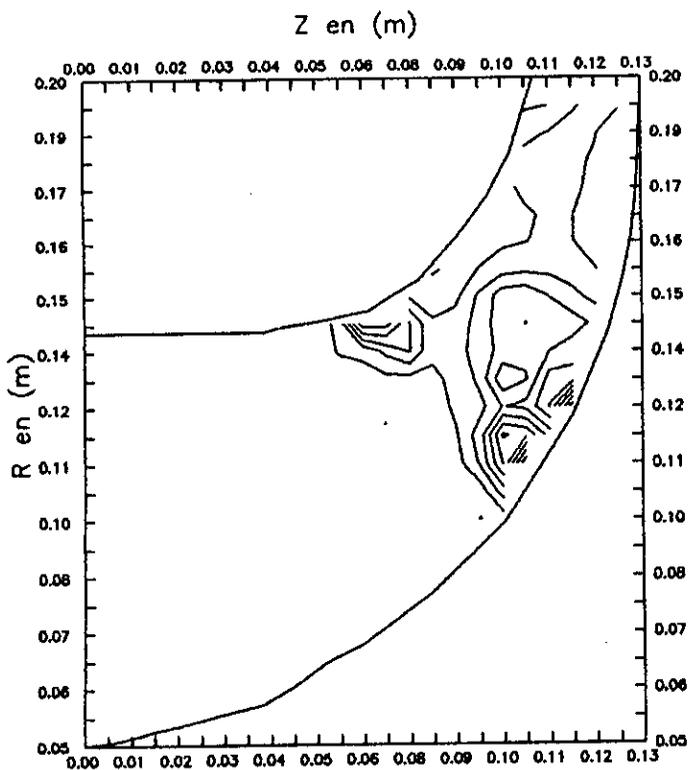
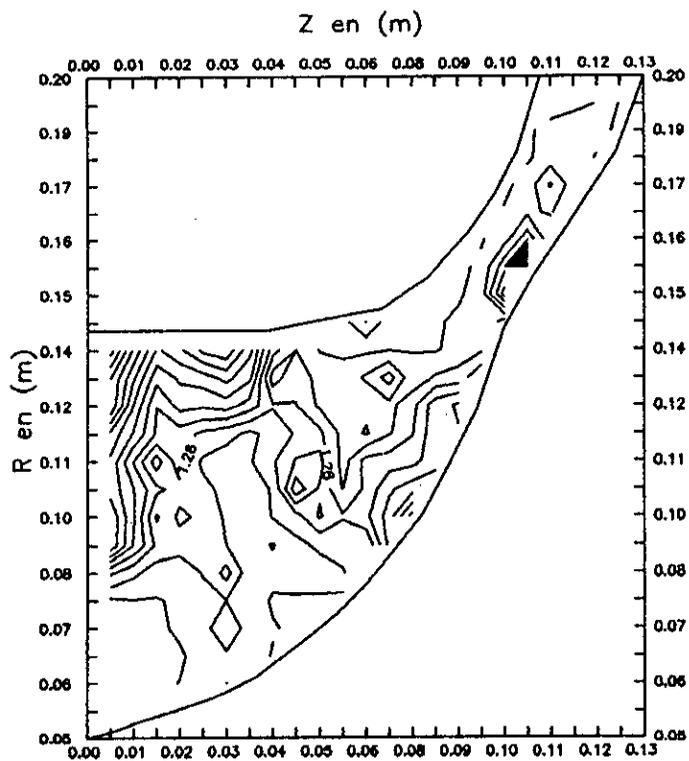


FIG (VII-B4): La distribution de la densité

La repartition de la densite dans le
canal reel meridional
maillage curviligne



La distribution du rapport de pression (p/p_0)
dans le canal meridional sans pertes
maillage curviligne

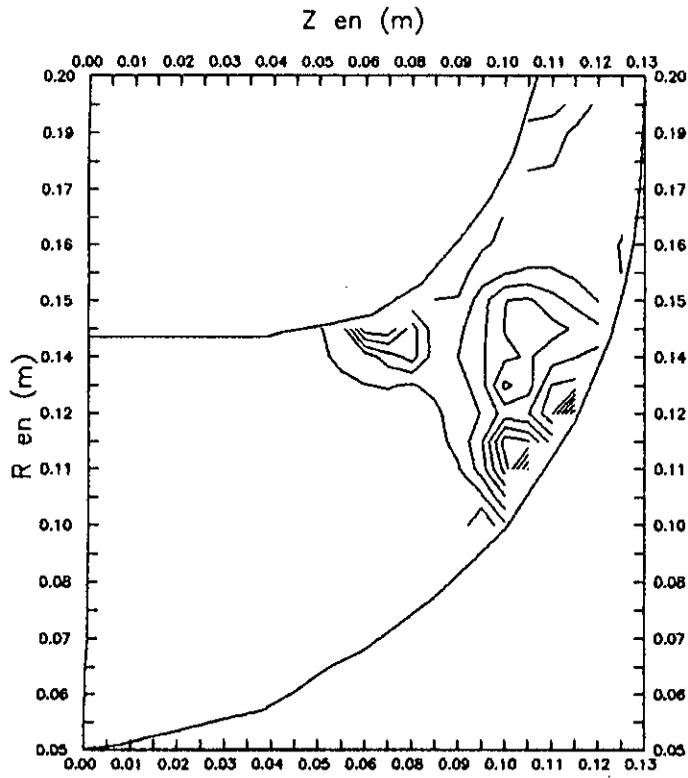
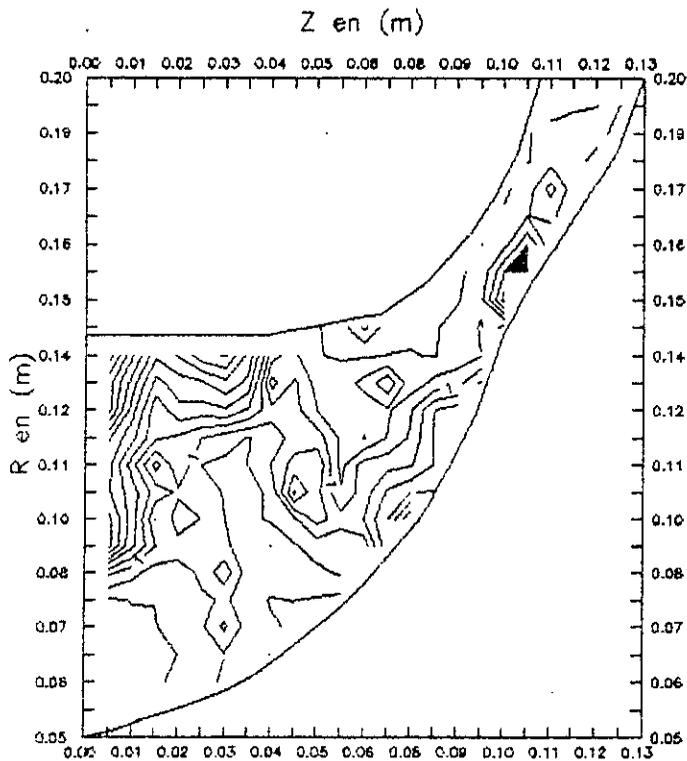
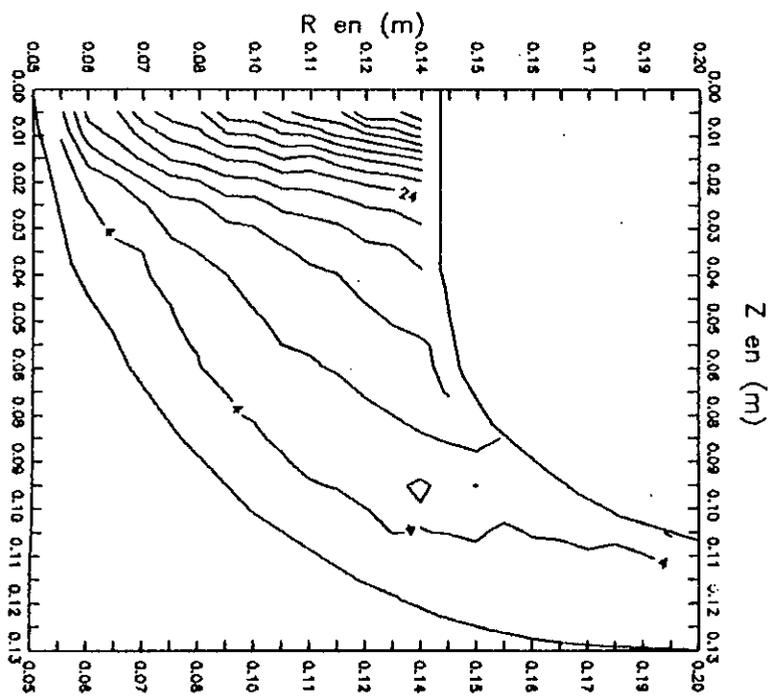


FIG (VII-B5): La distribution du rapport de pression

La distribution du rapport de pression (p/p_0)
dans le canal reel meridional
maillage curviligne





La repartition des vitesses relatives dans le canal meridional sans pertes maillage curviligne

FIG (VII-B2): La distribution de la vitesse relative

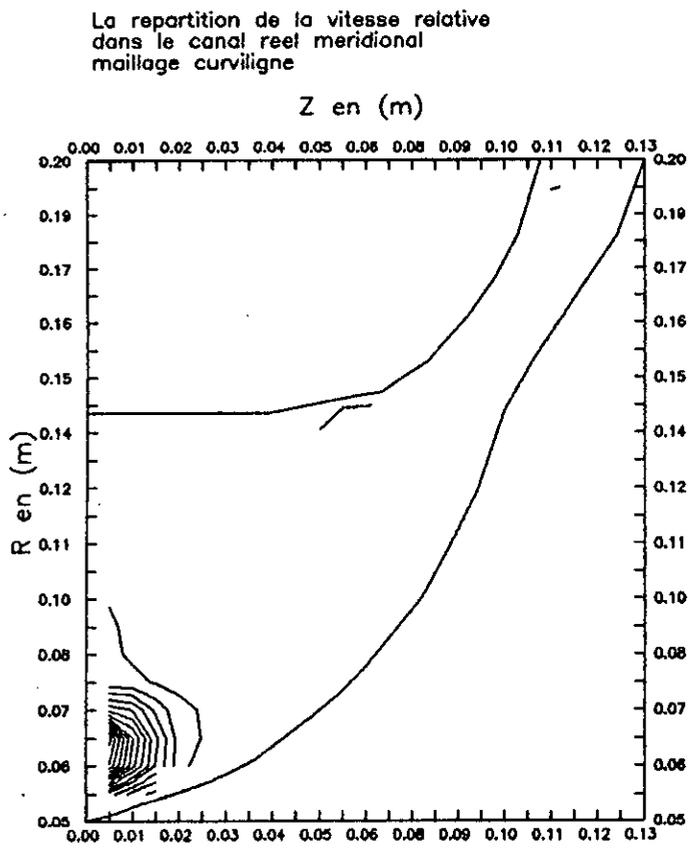
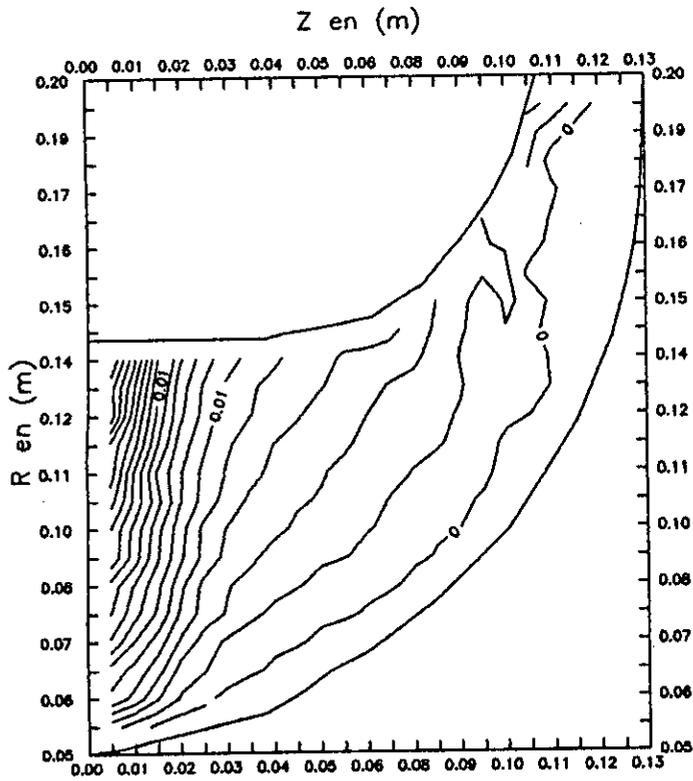
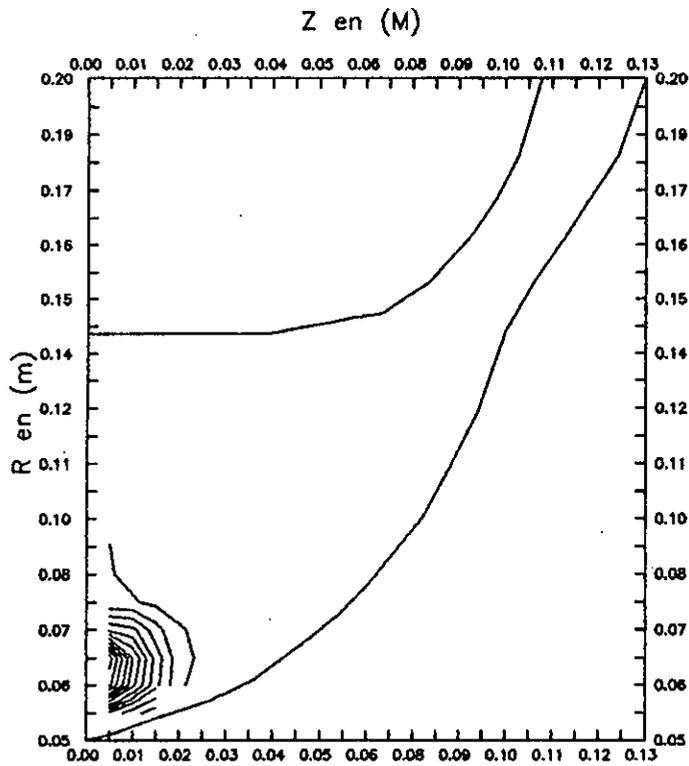


FIG (VII-B3): La distribution du nombre de Mach

La distribution du nombre de Mach dans
le canal meridional sans pertes
maillage curviligne



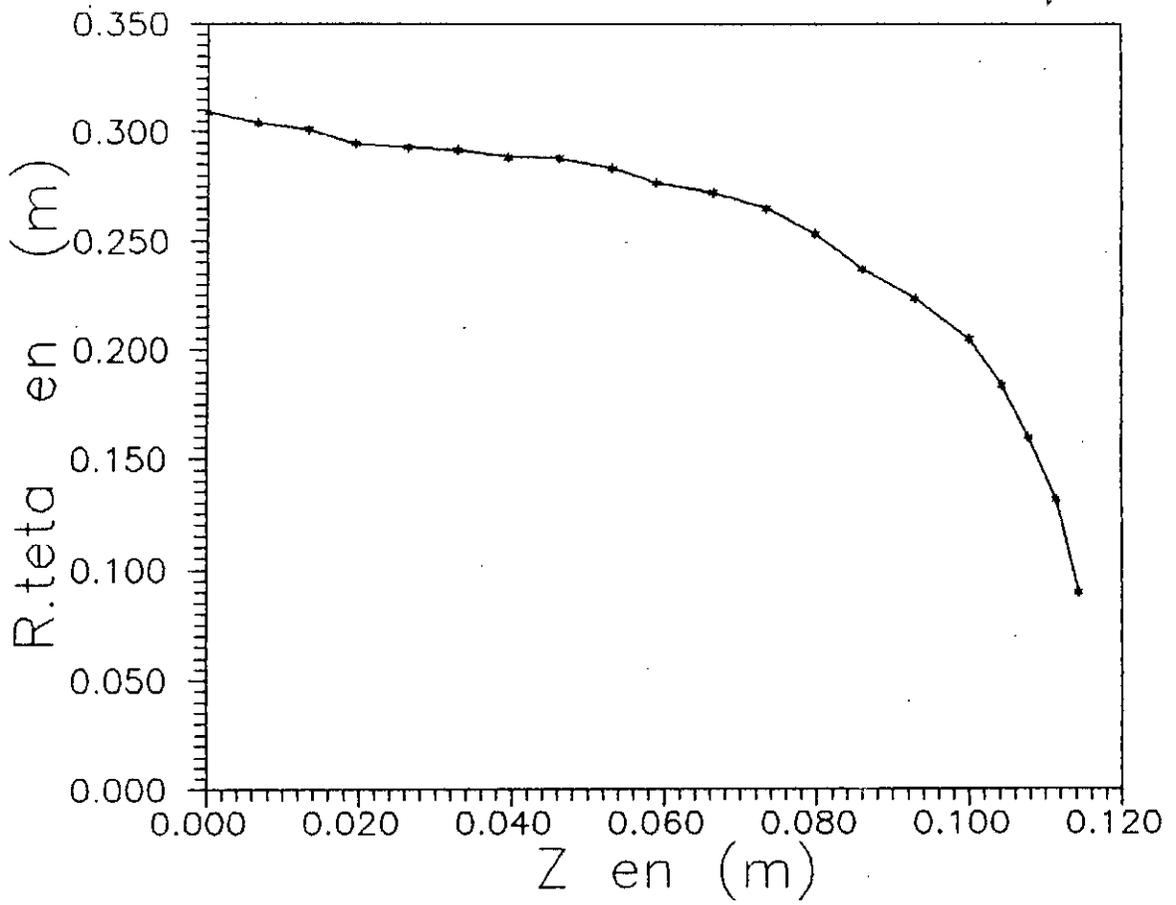
La repartition du nombre de Mach dans
le canal reel meridional
maillage curviligne



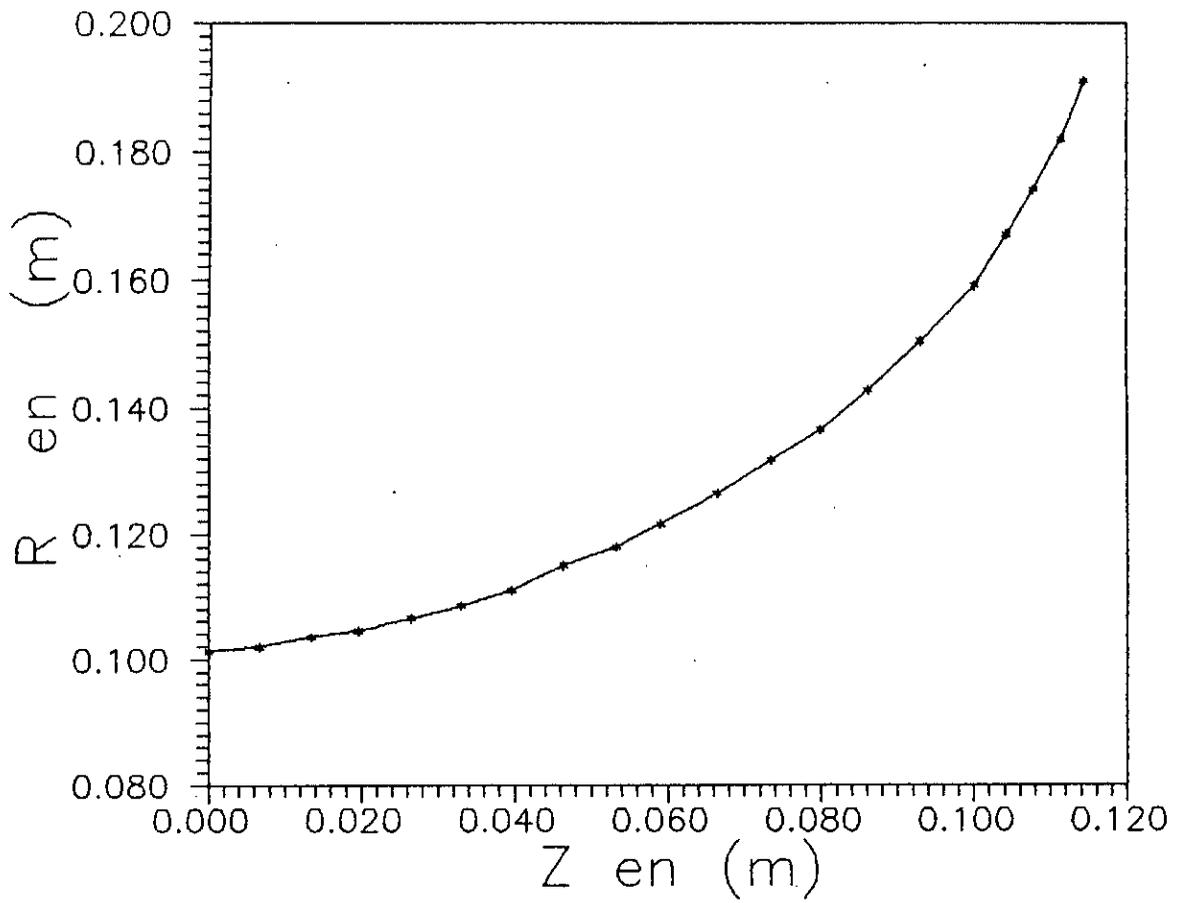
coordonnée : Z	coordonnée :R.teta	coordonnée R
0,1345.10 ⁻⁰¹	0,3010	0,1035
0,1962.10 ⁻⁰¹	0,2946	0,1045
0,2648.10 ⁻⁰¹	0,2929	0,1065
0,3295.10 ⁻⁰¹	0,2915	0,1085
0,3951.10 ⁻⁰¹	0,2883	0,1110
0,4632.10 ⁻⁰¹	0,2878	0,1150
0,5332.10 ⁻⁰¹	0,2830	0,1180
0,5905.10 ⁻⁰¹	0,2766	0,1216
0,6650.10 ⁻⁰¹	0,2718	0,1265
0,7350.10 ⁻⁰¹	0,2647	0,1318
0,7990.10 ⁻⁰¹	0,2530	0,1365
0,8610.10 ⁻⁰¹	0,2367	0,1427
0,9295.10 ⁻⁰¹	0,2231	0,1504
0,1000	0,2045	0,1590
0,1042	0,1833	0,1670
0,1077	0,1598	0,1740
0,1114	0,1313	0,1820

TABLEAU DES COORDONNEES DE LA LIGNE MOYENNE

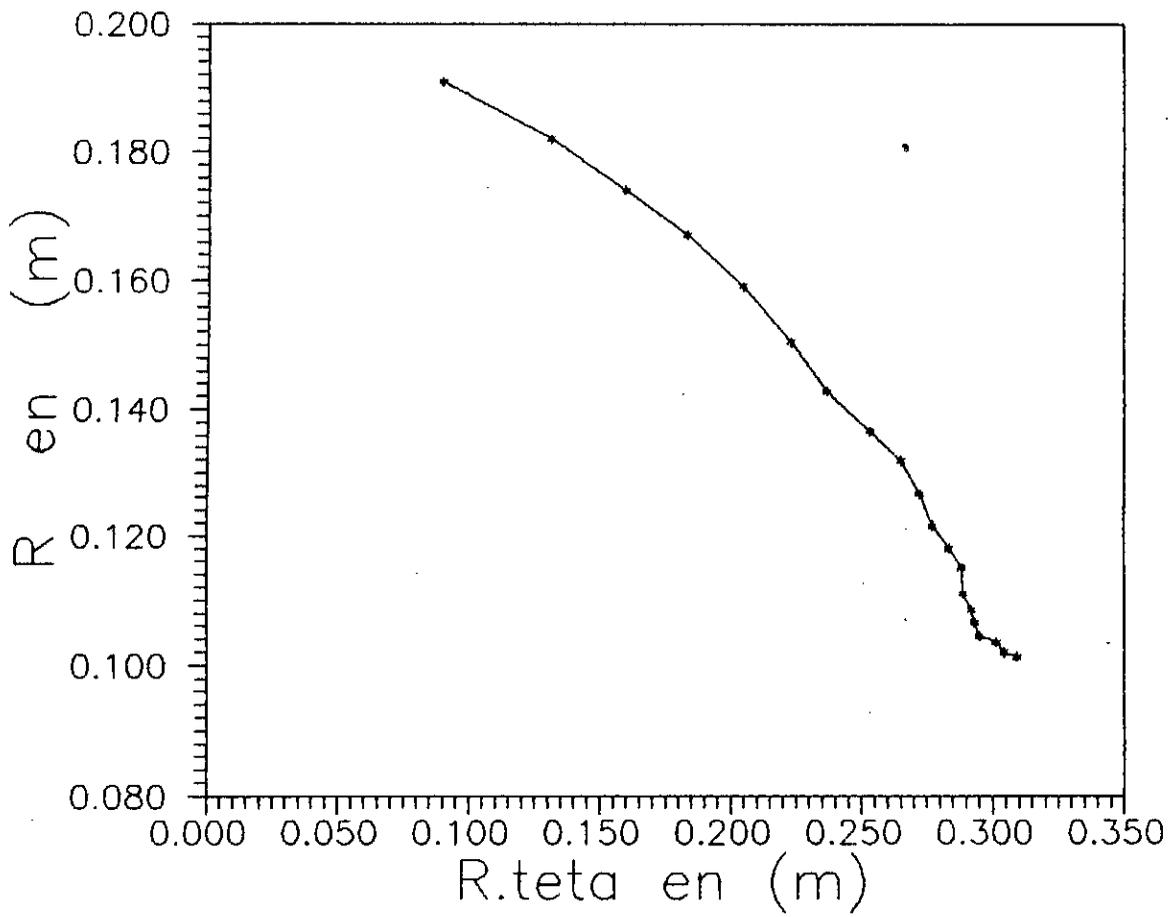
Fig(VII-0)



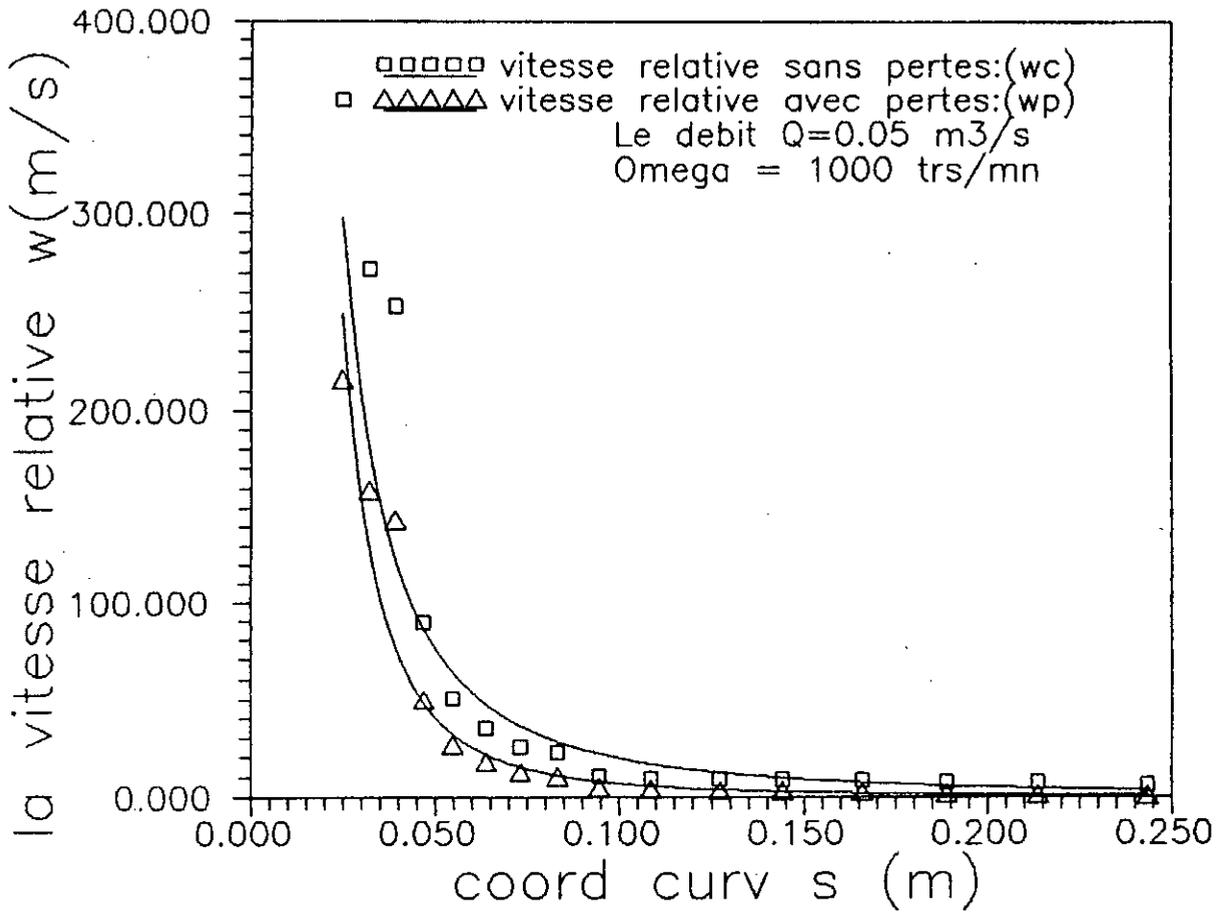
Fig(VII-0-a): la projection de la ligne moyenne dans le plan de revolution (R.teta,Z)



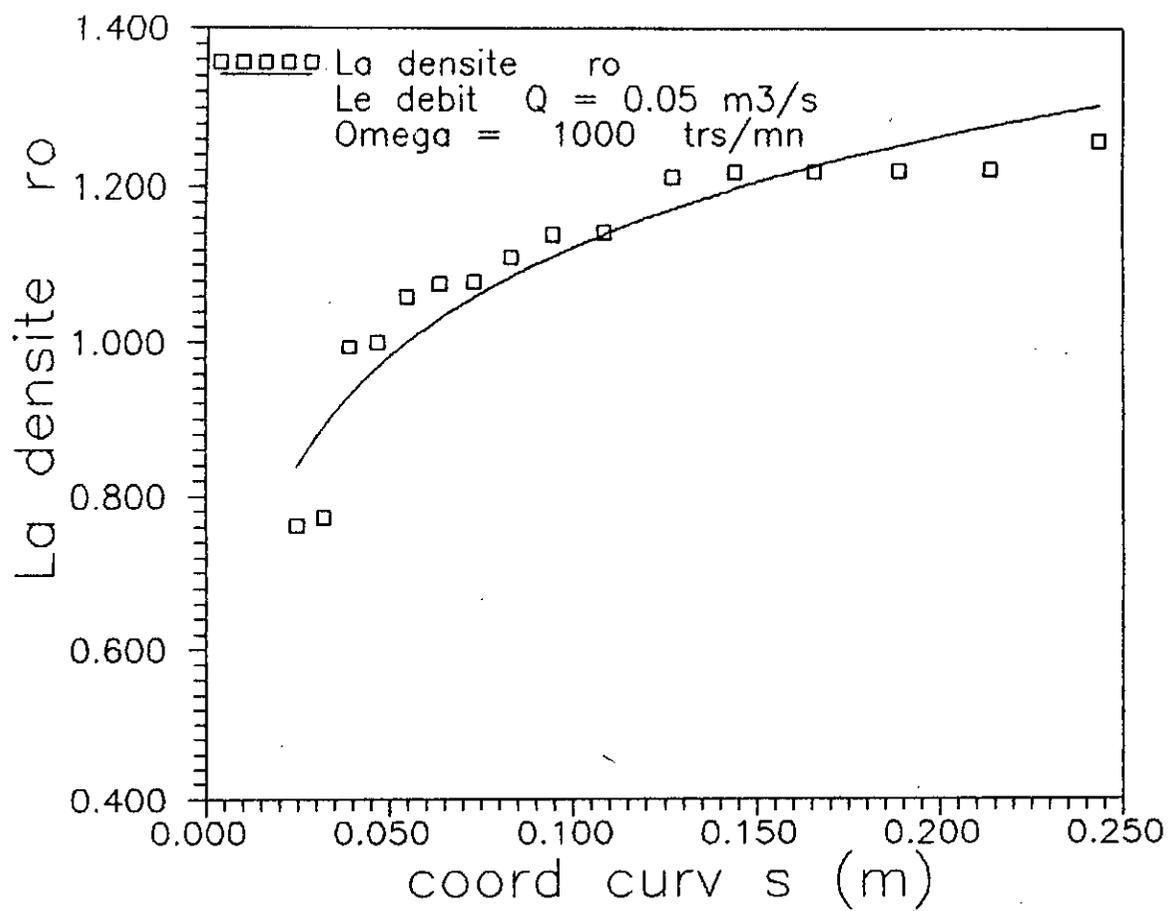
Fig(VII-0-b): la projection de la ligne moyenne dans le plan axial (Z,R)



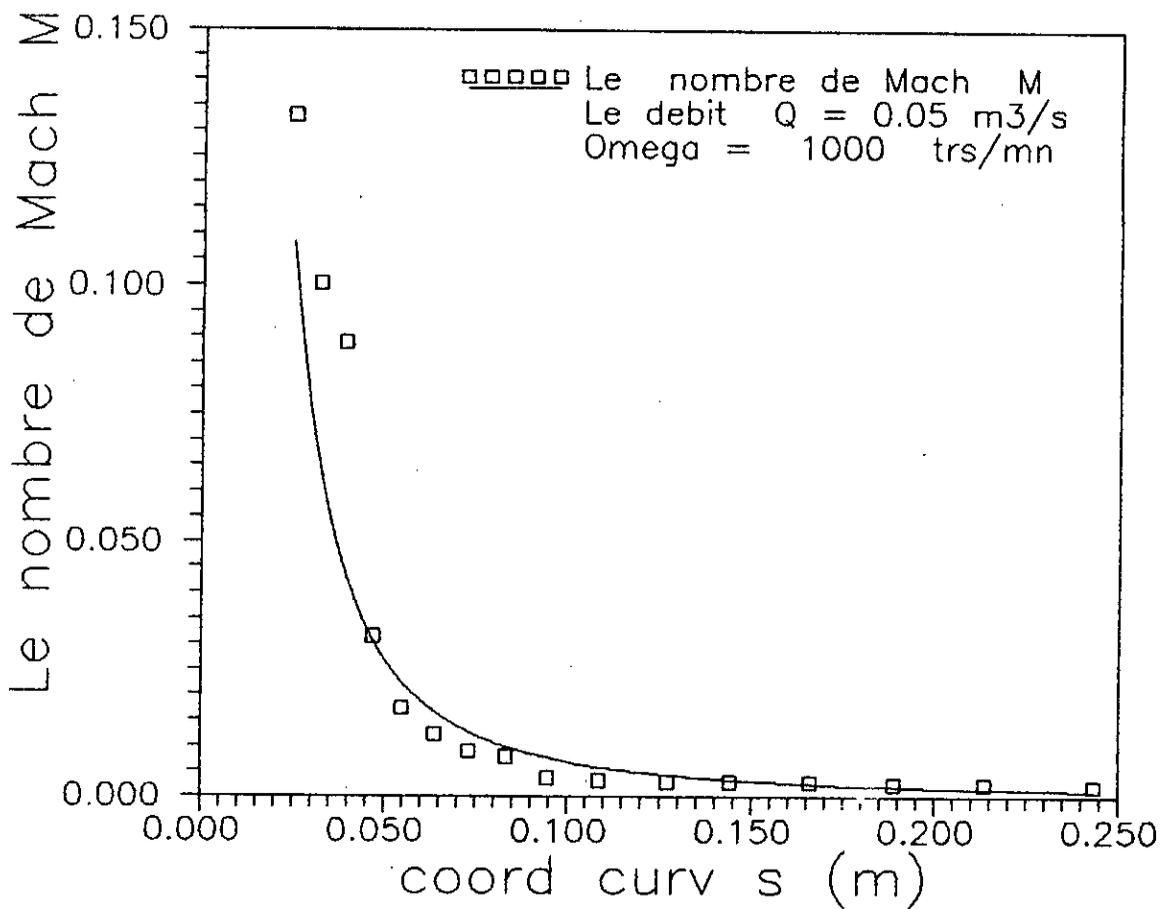
Fig(VII-0-c): la projection de la ligne moyenne dans le plan (R.teta,R)



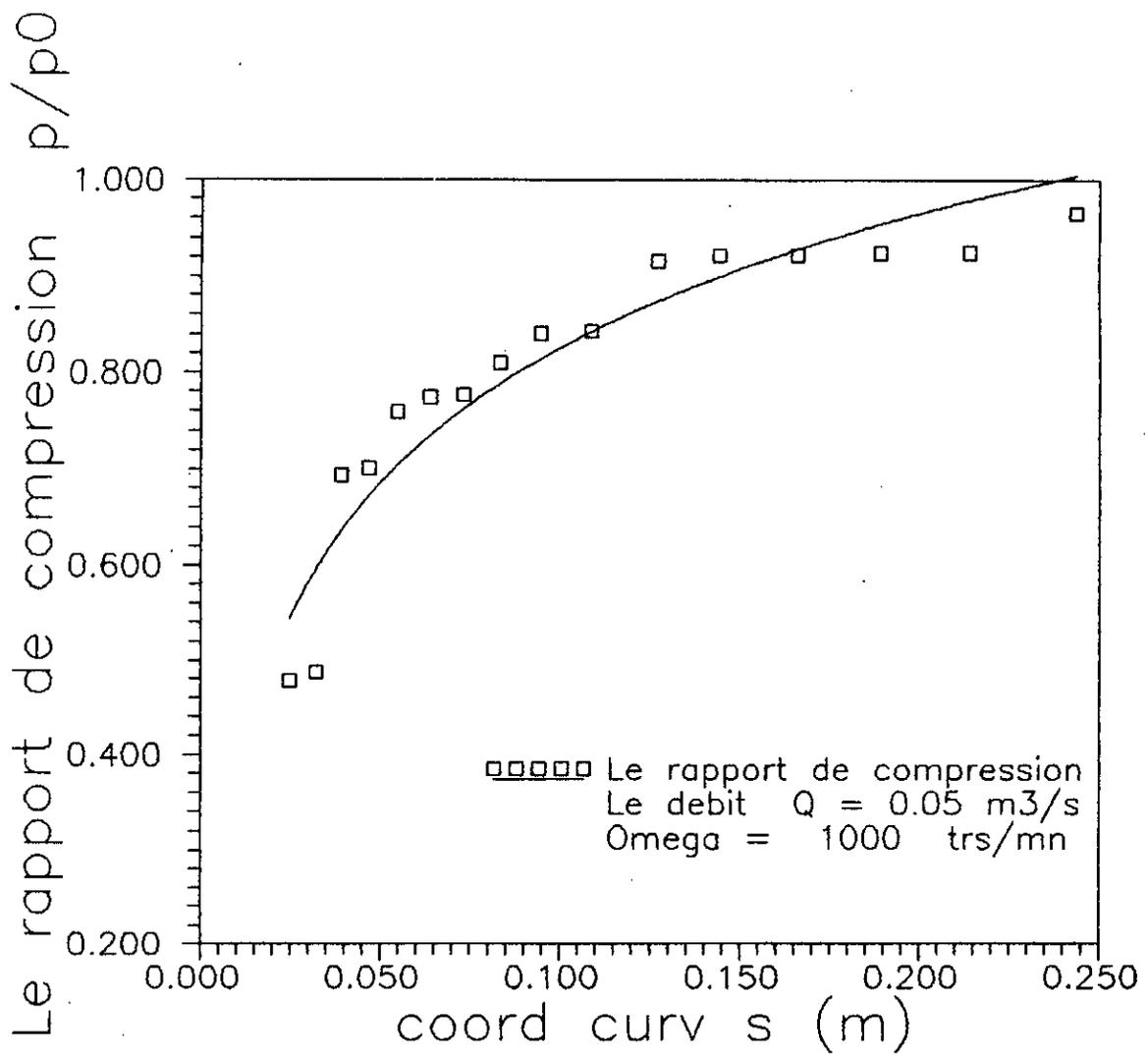
Fig(VII-8-c) : La variation de la vitesse relative selon la ligne moyenne



Fig(VII-9-c) : L'evolution de la densite du fluide selon la ligne moyenne



Fig(VII-10-c) : L'evolution du nombre de Mach selon la ligne moyenne



Fig(VII-11-c) : L'evolution du rapport de compression selon la ligne moyenne

CONCLUSION
GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Le présent travail que nous avons élaboré a pour but de donner les éléments et l'approximation pour le calcul d'un écoulement réel dans une turbomachine .

Et pour cela on a utilisé le modèle proposé par "WU" en se basant sur une discretisation curviligne pour le plan S2, et une discretisation rectangulaire pour le plan S1.

Pour un calcul parfait en premier lieu et avec introduction des pertes par profile en second lieu, pour déduire les deux canaux réels .

Après un couplage quasi-tridimensionnel, on a déterminé les caractéristiques du fluide moteur sur le long d'une ligne moyenne

Cette étude nous a permis de faire une approximation de l'écoulement réel entre deux aubes afin d'optimiser les limites de fonctionnement, et pour chercher une meilleure modélisation des aubes, ainsi que leurs formes géométriques, qui permet d'avoir un rendement supérieur de la machine, et de minimiser les pertes principalement occasionnées par profile .
Ainsi on peut donner une meilleure performance à la machine .

Finalement, pour une approche plus exacte de l'écoulement nous proposons de faire une étude tridimensionnelle d'un écoulement réel entre deux aubes, en faisant varier alternativement les surfaces S1-S2 .

ANNEXE - A

ANNEXE A

Equation de continuité :

L'application du bilan de masse [définit l'équation (I-1)] pour un élément fluide illustré dans la Fig (A-1), à travers lequel le fluide peut se déplacer librement, donne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} . dt + \frac{\partial}{\partial x} (\rho . U) . dx + \frac{\partial}{\partial y} (\rho . V) . dy = 0$$

Cette équation s'écrit dans l'espace sous la forme suivante :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (A-1)$$

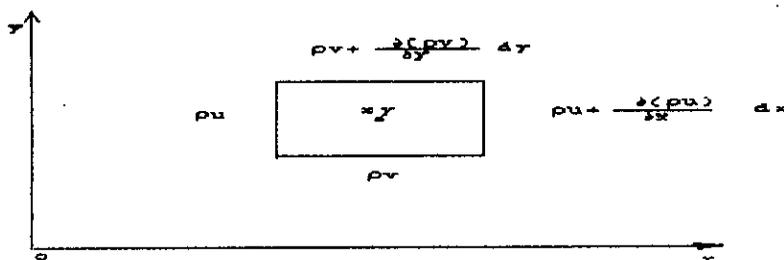


FIG (A-1)

Equation d'état :

L'application du second principe de la thermodynamique pour un fluide parfait donne :

$$dh - dP/\rho = T.ds \quad (A-2)$$

Avec :

$$dh = C_p . dt \quad (A-3)$$

Et pour un écoulement adiabatique :

$$P.V^\gamma = \text{Cste} \quad (\text{A-4})$$

Avec la loi des gaz parfait .

$$P.V = m.R.T$$

Où :

$$P = \rho.R.T \quad (\text{A-5})$$

En substituant (A-5) dans (A-4) on trouve .

$$T.\rho^{1-\gamma} = \text{Cste} \quad (\text{A-6})$$

Soit :

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho.R.T} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (\text{A-7})$$

L'équation (A-2) devient :

$$T.ds = dh - R.dT - R.T.\frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{A-8})$$

Où :

$$ds = \frac{C_p.dT}{T} - R.\frac{dT}{T} - R.\frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{A-9})$$

Avec :

$$C_p - C_v = R \quad \text{et} \quad C_p/C_v = \gamma$$

Donc l'équation (A-9) devient :

$$ds = \frac{R}{\gamma-1}.\frac{dT}{T} - R.\frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{A-10})$$

L'intégration de (A-10) donne:

$$S + C^{sto} = R \cdot \text{Ln} \frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\rho} \quad (7)$$

D'où on obtient.

$$\rho = A \cdot h^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot e^{-\frac{S}{R}} \quad (A-11)$$

avec $A = C^{sto}$

ANNEXE - B

annexe B
EQUATION DU MOUVEMENT

L'hypothèse d'axisymétrie des surfaces de courant est assujettie au respect de certaines conditions qui sont démontrées dans ce qui suit.

D'après l'équation de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \nabla I = \vec{w} \cdot (\nabla \cdot \vec{w} + 2 \cdot \vec{\omega}) + T \cdot \nabla S + \vec{F} \quad (1)$$

Et après une multiplication scalaire par :

$$d\vec{r} = \vec{w} \cdot dt$$

On aura :

$$dt \cdot \vec{w} \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \nabla I \right) = \vec{w} \cdot (\vec{w} \cdot (\nabla \cdot \vec{w} + 2 \cdot \vec{\omega}) + T \cdot \nabla S + \vec{F}) \cdot dt \quad (2)$$

Où :

$$T \cdot dS = dq \quad (3)$$

dq : est la chaleur totale que reçoit le fluide, cette dernière peut provenir de deux sources différentes :

- Une part dq_0 : chaleur transmise par convection dans le fluide par un milieu extérieur.

- l'autre part dq_f : due à l'effet des sources frictionnelles qui agissent sur les particules fluides, elle est égale au travail

des forces frictionnelles :

$$dq_f = - dr \cdot \vec{f} = - dt \cdot \vec{w} \cdot \vec{F} \quad (4)$$

$$dq = dq_0 - dt \cdot \vec{w} \cdot \vec{F} = T \cdot ds \quad (5)$$

et on a :

$$\vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \cdot dt = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{w^2}{2} \right) \cdot dt \quad (6)$$

Dans le cas où les surfaces de révolution S_m se coïncident avec les surfaces de courant S_1 , pour un fluide relatif; BELTRAMI a montré que [23] :

$$\vec{w} \cdot (\vec{w} \cdot [\nabla \vec{w} + 2 \cdot \vec{\omega}]) = 0 \quad (7)$$

Donc l'équation de mouvement devient:

$$dI = dq_0 - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{w^2}{2} \right) \cdot dt \quad (8)$$

L'hypothèse de la conservation de la rothalpie pour un écoulement fluide stationnaire et adiabatique conduit à :

$$dI = 0 \quad (9)$$

Et on obtient l'équation de mouvement réduite :

$$\vec{w} \cdot (\nabla \cdot \vec{w} + 2 \cdot \vec{\omega}) = 0 \quad (10)$$

La condition d'axisymétrie impose à la particule de se mouvoir sur une surface de révolution S_m , de telle sorte que la troisième composante de \vec{w} qui est w_n (normale à S_m) soit nulle.

Donc on aura :

$$\vec{w} = w_u \vec{i}_1 + w_m \vec{i}_2 \quad (11)$$

Dans le cas d'une surface axisymétrique, le rotationnel de

la vitesse relative s'écrit [22] :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{W} = & \left\{ \frac{\partial W_n}{\partial m} - \frac{\partial W_m}{\partial n} - W_m \cdot k_m \right\} \cdot \vec{i}_1 + \frac{1}{r} \cdot \left\{ \frac{\partial (r \cdot W_u)}{\partial n} - \frac{\partial W_n}{\partial \theta} \right\} \cdot \vec{i}_2 \\ & + \frac{1}{r} \cdot \left\{ \frac{\partial W_m}{\partial \theta} - \frac{\partial (r \cdot W_u)}{\partial m} \right\} \cdot \vec{i}_3 \end{aligned} \quad (12)$$

Où :

k_m : représente le rayon de courbure de la surface S_m sur m .

$$\vec{J} = \cos \alpha \cdot \vec{i}_2 - \sin \alpha \cdot \vec{i}_3 \quad (13)$$

Avec :

$$\sin \alpha = \frac{\partial r}{\partial m} \quad (14)$$

$$\text{et: } \cos \alpha = \frac{\partial r}{\partial n}$$

Et tenant compte des composantes de la vitesse \vec{W} on aura :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{W} + 2 \cdot \vec{\omega} = & \left\{ - \frac{\partial W_m}{\partial n} - W_m \cdot k_m \right\} \cdot \vec{i}_1 + \frac{1}{r} \cdot \left\{ \frac{\partial (r \cdot W_u + \omega \cdot r^2)}{\partial n} \right\} \cdot \vec{i}_2 \\ & + \frac{1}{r} \cdot \left\{ \frac{\partial W_m}{\partial \theta} - \frac{\partial (r \cdot W_u + \omega \cdot r^2)}{\partial m} \right\} \cdot \vec{i}_3 \end{aligned} \quad (15)$$

Avec la courbure de la surface moyenne est :

$$K_m = \frac{1}{W_m} \cdot \frac{\partial W_m}{\partial m} \quad (16)$$

Et par conséquent :

$$\begin{aligned} \vec{W} \cdot (\nabla \cdot \vec{W} + 2 \cdot \vec{\omega}) &= \frac{W_u}{r} \cdot \left\{ \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{\partial (r \cdot W_u + \omega \cdot r^2)}{\partial m} \right\} \cdot \vec{I}_1 \\ &+ \frac{W_u}{r} \cdot \left\{ \frac{\partial (r \cdot W_u + \omega \cdot r^2)}{\partial m} - \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right\} \cdot \vec{I}_2 \\ &+ \left\{ \frac{W_u}{r} \cdot \left[\frac{\partial (r \cdot W_u + \omega \cdot r^2)}{\partial n} \right] + W_m \cdot \frac{\partial W_m}{\partial n} + W^2 \cdot k_m \right\} \cdot \vec{I}_3 \end{aligned} \quad (17)$$

D'après cette dernière équation, on conclue que le seul écoulement relative qui peut avoir des surfaces axisymétriques, est celui pour lequel :

$$\nabla \cdot \vec{W} + 2 \cdot \vec{\omega} = 0 \quad (18)$$

Pour cela, il suffit que :

$$\frac{\partial (r \cdot W_u + \omega \cdot r^2)}{\partial n} = 0 \quad (19)$$

Cette condition est réalisée dans le cas où la hauteur de l'aubage b est petite devant le rayon r , où bien si la turbomachine possède un grand nombre d'aubages

ANNEXE - C

ANNEXE-C
SIMPLIFICATION DES EQUATIONS DE NAVIER STOKES POUR
L'ETUDE DE LA COUCHE LIMITE

Réécrivant les équations de NAVIER-STOKES sous la forme adimensionnelle .

Soit :

V_0 : est la vitesse d'écoulement, dont on réfère toutes les vitesses .

L : la longueur du corps .

La pression est rendue adimensionnelle avec $\rho.V^2$.

Le temps est référé à L/V_0 .

Le nombre de REYNOLDS est $R = V_0.L.\rho/\mu = L.V_0/\nu$ (III-a)
qui est considéré très grand .

Avec ces formules on peut écrire :

$$x^* = \frac{x}{L}$$

$$y^* = \frac{y}{L}$$

$$u^* = \frac{u}{V_0} \quad \text{(III-b)}$$

$$v^* = \frac{v}{V_0}$$

$$p^* = \frac{p}{\rho.V_0^2}$$

Donc les équations de NAVIER-STOKES deviennent après substitution des formules ci-dessous .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(u^* \cdot V_0)}{\partial(L \cdot x^*)} = \frac{V_0}{L} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x^*}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(u^* \cdot V_0)}{\partial(L \cdot y^*)} = \frac{V_0}{L} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial y^*}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(p^* \cdot \rho \cdot V_0^2)}{\partial(L \cdot x^*)} = \frac{\rho \cdot V_0^2}{L} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial x^*}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(V_0 \cdot u^*)}{\partial(L \cdot x^*)^2} = \frac{V_0}{L^2} \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(V_0 \cdot u^*)}{\partial(L \cdot y^*)^2} = \frac{V_0}{L^2} \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\rho \cdot V_0^2}{L} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial y^*}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{V_0}{L} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial y^*}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{V_0}{L^2} \cdot \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{V_0}{L^2} \cdot \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}$$

Et finalement on a :

$$\frac{1}{V_e^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + u^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{(V_e \cdot L/\nu)} \cdot \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$\frac{1}{V_e^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + v^* \cdot \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + u^* \cdot \frac{\partial v^*}{\partial x^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{(V_e \cdot L/\nu)} \cdot \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

L'estimation de l'ordre de grandeur permet de négliger certains termes.

Soit δ l'épaisseur de la couche limite :

$$\delta \ll L$$

$$o(u^*) \rightarrow 1$$

$$o(x^*) \rightarrow 1$$

$$\text{donc} : o\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right) \rightarrow 1$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\text{donc} : o\left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right) \rightarrow 1$$

Et de même :

$$v^* = \int_0^y \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \cdot dy^*$$

$$\text{donc : } o(v^*) \approx o(y^*)$$

$$y^* = \frac{y}{L}$$

$$\text{donc : } o(y^*) \approx o(\delta)$$

$$o\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) \rightarrow \frac{1}{\delta^*}$$

$$o\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}\right) < o\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) \rightarrow o\left(\frac{1}{\delta^{*2}}\right)$$

$$o\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}\right) < o\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right) \rightarrow o\left(\frac{1}{\delta^{*2}}\right)$$

Négligeant les termes :

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \quad \text{devant} \quad \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

Donc les équations de NAVIER-STOKES simplifiées adimensionnelles pour un écoulement stationnaire sont :

$$u^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

BIBLIOGRAPHIES

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - H.MARSH
A digital computer program for the through-flow mechanics
in an arbitrary turbomachine using a matrix method .
National gas turbine establishment report/N°R.282
- [2] - R.ZGOULLI
Contribution à l'étude de couplage écoulement sain-couche
limite dans un calcul de grille d'aubes .
Thèse de doctorat 1984
- [3] - D.BUISINE et P.MICHEAU
Écoulement tridimensionnel dans une roue. Calcul
effectivement tridimensionnel des écoulements dans les
turbomachines par la méthode S1-S2.
Journal de mécanique théorique et appliquée :
Vol 6/N°4. 1987
- [4] - R.DRING and H.D.JOSLYN
Through-flow modeling of axial turbomachinery .
Journal of engineering for gas turbines and power
Vol 108/247. 1986
- [5] - J.P.VEUILLOT
Calcul de l'écoulement moyen dans une de turbomachine
axiale .
Office national d'études et de recherches aérospatiales
1973
- [6] - H.MITON
Étude théorique et expérimentale des problèmes
aérodynamiques concernant les compresseur transsoniques
Université d'AIX-MARSEILLE II Thèse Doctorat 1978
- [7] - J.H.HORLOCK
Axial flow, fluid mechanics and thermodynamics . 1973
- [8] - C.BOSMAN and H.MARSH
An improved method for calculating in turbomachines,
including a consistent loss model .
Journal mechanical engineering science 1974
- [9] - O.P.SHARMA and T.L.BUTLER
Prédiction of endwall losses and secondary flows in axial
flow turbine cascades .
Journal of turbomachinery Vol 109/229 1987
- [10] - A.YAMAMOTE
Production and développement of secondary flow and losses
in two types of straight turbine cascade a stator case .
Journal of turbomachinery Vol 109/188 1987

- [11] - A.YAMAMOTE
Production and développement of secondary flow and losses
in two types of straight turbine cascade stator cases .
Journal of turbomachinery Vol 110/188 1987
- [12] - D.C.WISLER
Loss réduction in axial-flow compressors through low-speed
model testing .
Journal of turbomachinery Vol 107/354 1985
- [13] - B.MAHFOUD et M.AIT TALEB
Couplage, calcul de la couche limite, méthode inverse .
Projet fin d'étude 1992
- [14] - SCHLICHTING
Boundary layer theory
- [15] - G.L.MELLOR and G.M.WOOD
An axial compressor end-wall boundary layer .
Journal of turbomachinery 1973
- [16] - J.H.WAGNER, R.P.DRING and JOSLYN
Inlet boundary layer effects in an axial compressor rotor
through-flow effects . part-II
Journal of engineering for gas turbines and power .
Vol 107/381 1985
- [17] - J.H.WAGNER, R.P.DRING and JOSLYN
Inlet boundary layer effects in an axial compressor rotor
blade-to-blade effects part-II
Journal of engineering for gas turbines and power .
Vol 107/381 1985
- [18] - BELAHCENE AIT-HADAD
Détermination théorique et numérique des performances et
limites de fonctionnement des compresseurs centrifuges .
Thèse de Doctorat 1991
- [19] - G.MEAUZE, R.SOVRANO et Y.BIRAUD
Synthèse des méthodes numériques développées à l'ONERA,
applicables aux calculs des écoulements dans les
turbomachines .
- [20] - M.FENAIN
Méthodes de relaxation pour la résolution d'équations
elliptiques dans des domaines de frontières quelconques,
application aux calculs des écoulements subcritiques .
Journal de mécanique appliquée Vol 1 N°1 1977
- [21] - J.P.VUILLLOT
Calcul numérique de l'écoulement transsonique d'un fluide
parfait dans une grille d'aubes .
ONERA N°6 1977

- [22] - VAVRA
Aéro-thermodynamics and flow in turbomachines .
- [23] - N.CHIKHI,S.BOUBENDIR
Element d'un code pour le calcul d'un écoulement dans une
roue de turbomachine . PFE 1993
- [24] - H.P.HODSON
Boundary layer transition and separation near the leading
of a high speed turbine blade .
Journal of engineering for gas turbine and power
VOL 107/127 1985