

جمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

1/94

وزارة التربية الوطنية

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة - BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT *Génie Mécanique*

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Étude de la
Lubrification Thermohydrodynamique
des paliers lisses par éléments finis*

Proposé par :

M^r BELMAMECHE, H
M^r BELBLIDIA, F

Étudié par :

M^r AMARA Rabah
M^r TALA IGHIL Nacer

Dirigé par :

M^r BELMAMECHE, H

PROMOTION

Juillet 1994

RESUME

Le but de notre travail est d'étudier la lubrification thermohydrodynamique des paliers lisses en régime laminaire par éléments finis et l'élaboration d'un logiciel permettant la détermination des champs de température, de pression et les caractéristiques statiques .

ABSTRACT

The object of our work is to study the thermohydrodynamic lubrication in the case of laminar problems on smooth journal bearings by the finite elements method and elaboration of computer program allowing to compute the temperature, pressure fields and static characteristics .

ملخص

ان الهدف من عملنا هذا هو دراسة التزييت
الحراري الديناميكي، الحركي، المساند المساء في الحالة
الخطية بواسطة العناصر المنتهية وإعداد برنامج حاسوبي يسمح
بتحديد مجالات الحرارة، الضغط والسميات السكونية.

DEDICACES

Je dédis ce travail à :

-ma mère

-mon père

-mes frères et soeurs

ainsi qu'a tous mes amis .

TALA IGHIL NACER

Je dédis ce travail à :

-ma mère

-mon père

-mes frères et soeurs

ainsi qu'a tous mes amis .

AMARA RABAH

REMERCIEMENTS

Nous tenons vivement à remercier messieurs H.BELHANECHÉ et F.BELBLIDIA qui à travers ce sujet nous ont permis d'accéder à un domaine scientifique des plus intéressants qui est la "tribologie" et en particulier M^r H.BELHANECHÉ pour l'aide précieuse qu'il nous a apporté pour la mise en œuvre de ce projet de fin d'étude .

D'autres part nous sommes extrêmement sensibles à l'honneur que nous font les membres du jury en acceptant d'examiner ce mémoire .

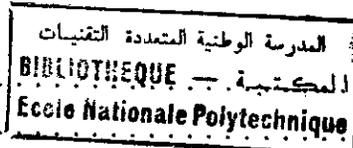
Finalement nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail .

SOMMAIRE

INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....	4
CHAPITRE II : DEFINITION DES EQUATIONS DE BASE UTILISEES EN LUBRIFICATION THERMOHYDRODYNAMIQUE.....	13
II.1 Introduction.....	13
II.2 Equations de la mécanique des milieux continus.....	13
II.3 Equations générales de la mécanique des films minces visqueux.....	14
II.3.1 Equation de Reynolds généralisée	22
II.3.2 Interprétation physique des différents termes de l'équation.....	25
II.3.3 Equation de l'énergie dans le film.....	27
II.3.4 Equation de la chaleur dans les massifs.....	30
II.4 Propriétés thermiques des lubrifiants.....	32
II.4.1 Masse volumique.....	32
II.4.2 Viscosité.....	32
II.5 Conclusion.....	33
CHAPITRE III : THERMOHYDRODYNAMIQUE D'UN PALIER LISSE	34
III.1 Introduction	34
III.2 Géométrie et cinématique des surfaces	35
III.3 Détermination des caractéristiques statiques du palier.....	37
III.3.1 La charge.....	37
III.3.2 Le débit axial.....	40
III.3.3 Le couple de frottement.....	41
III.4 Conditions aux limites sur la température.....	45
III.4.1 Les différents modes de transfert de chaleur.....	45
III.4.2 Surfaces externes du palier.....	47
III.4.3 Interface film-coussinet ou film-arbre.....	49
III.4.4 Extrémités de l'arbre.....	50
III.4.5 Forme particulière de l'équation de l'énergie dans la zone de rupture du film	50
CHAPITRE IV : APPLICATION DE LA M.E.F A LA LUBRIFICATION THERMOHYDRODYNAMIQUE	52
IV.1 Introduction	52
IV.2 Synthèse des principes variationnelles	52

IV.2.1	Introduction.....	52
IV.2.2	Méthode des résidus pondérés	53
IV.2.2.1	Forme intégrale faible.....	54
IV.3	Application de la M.E.F à l'équation de Reynolds.....	54
IV.3.1	Stationnarité de J(P).....	55
IV.3.2	Discrétisation de la forme intégrale.....	58
IV.3.2.1	Principe de discrétisation.....	58
IV.3.2.2	Discrétisation de W.....	59
IV.3.2.3	Elément d'approximation de la fonction P.....	62
IV.3.2.4	Elément d'approximation géométrique.....	62
IV.4	Application de la M.E.F à l'équation de l'énergie dans le film.....	63
IV.4.1	Méthode de Galerkin.....	63
IV.4.2	Formulation faible.....	64
IV.4.3	Discrétisation de la forme intégrale.....	65
IV.5	Application de la M.E.F à l'équation de la chaleur dans les massifs.....	68
IV.5.1	Discrétisation de la forme intégrale.....	69
IV.6	Elément d'approximation pour le champ thermique.....	71
IV.7	Principe et méthode de résolution.....	72
IV.7.1	Stockage des matrices élémentaires.....	72
IV.7.2	Résolution.....	73
IV.8	Etude de la convergence.....	75
IV.9	Comportement numérique du problème.....	76
IV.10	Conclusion.....	76
CHAPITRE V : PRESENTATION ET VALIDATION DES RESULTATS.....		77
V.1	Introduction.....	77
V.2	Comparaison théorie-expérience.....	77
V.2.1	Palier d'essai.....	77
V.2.2	Conditions aux limites utilisées.....	79
V.2.3	Résultats théoriques et expérimentaux.....	78
V.2.3.1	Répartition de la température.....	80
V.2.3.2	Répartition de pression.....	85
V.2.4	Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux sur le palier B.....	86
V.2.4.1	Pression maximale.....	86
V.2.4.2	Charge.....	87
V.2.4.3	Couple sur l'arbre.....	88
V.2.4.4	Débit du lubrifiant alimentant le palier.....	89

V.3 Conclusion.....	90
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.....	92



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ANNEXE A : Epaisseur du film lubrifiant
- ANNEXE B : Théorème d'Helmholtz et Korteweg
- ANNEXE C : Approximation Hermitienne dans un élément rectangulaire
- ANNEXE D : Élément quadrilatéral de type Hermite
- ANNEXE E : Élément d'approximation pour le champ thermique
- ANNEXE F : Passage de l'élément parent à l'élément réel
- ANNEXE G : Intégration de la fonction de dissipation à travers l'épaisseur du film

INTRODUCTION

Le nom "tribologie" crée en 1968 vient du grec Tribein : frotter et logos : parole, étude ou science ; ainsi la tribologie regroupe l'étude de la lubrification, du frottement. Plus généralement, la tribologie regroupe l'étude de la lubrification, du frottement et de l'usure des éléments de machine .

Elle a pour objet de faire fonctionner les liaisons qui existent aussi bien dans les systèmes vivants que dans les machines . Citons à titre d'exemples toutes les articulations du corps humain, les mécanismes des satellites, et les contacts dans les transports, dans les ordinateurs, dans presque toutes les étapes de la fabrication, dans la génération d'énergie, dans l'agro-alimentaire etc . Elle se doit d'élucider les aspects statiques et dynamiques des contacts qui existent dans tous ces domaines .

La tribologie a peu intéressé les scientifiques, car la matière est complexe et pluridisciplinaire . Elle se situe au carrefour de la mécanique et de la physique des surfaces et des volumes . Elle n'offre pas de perspectives de percées foudroyantes qui font la une des journaux . Mais, actuellement, la pression économique fait que quelques scientifiques viennent à la tribologie .

Il a été estimé par l'A.S.M.E. (American Society of Mechanical Engineers) que 11% de la consommation énergétique total des Etats-unis pouvait être économisée par des actions de recherche et de développement dans le domaine de la tribologie .

Les coûts des indisponibilités associés aux incidents de composants tels que les paliers peuvent être considérables .

Sur le plan industriel, la tribologie regroupe trois grands secteurs :

- 1) le frottement <<non lubrifié >> qui comprend les paliers secs, les assemblages, etc ;
- 2) la lubrification haute pression, ou lubrification elastohydrodynamique, qui comprend les engrenages, les roulements, etc ;
- 3) la lubrification basse pression, ou lubrification hydrodynamique qui comprend les paliers, les butées, etc .

En ce qui concerne le 1^{er} secteur qui est le frottement, il ne présente que des aspects négatifs, ainsi la tenue de route d'une automobile dépend directement du frottement entre les pneumatiques et la route .

Cependant, dès la construction des premiers mécanismes, les constructeurs ont toujours essayé d'éviter le contact sec entre des pièces en mouvement relatif, car ce contact est caractérisé par une usure rapide des surfaces frottantes et des pertes considérables d'énergie sous forme de chaleur, ce qui élève la température en entraînant une diminution des propriétés mécaniques des matériaux qui constituent les revêtements internes de ces surfaces en contact .Ainsi le risque d'avaries est accru .

En introduisant une couche fluide entre les deux surfaces du contact, on atténue les frottements en créant une portance dans le contact . Cette portance assure la séparation de ces deux surfaces tout en gardant leurs caractéristiques fonctionnelles . On aurait ainsi, substituer le frottement sec par un frottement dit fluide .Il s'agit alors de la lubrification . Selon la grandeur de la charge appliquée sur les surfaces du mécanisme on distingue deux sortes de lubrification :

- la lubrification haute pression ou elastohydrodynamique, qui tient compte des déformations des surfaces et de l'augmentation de la viscosité avec la pression, et plus généralement du comportement rhéologique des lubrifiants, sur la portance et le frottement des mécanismes .
- la lubrification basse pression où la pression dans le film fluide peut être créée soit par un système extérieure au contact, une pompe ou un compresseur par exemple c'est le cas des glissières des machines-outils et certains paliers etc, ce type de lubrification est dite "hydrostatique", soit par

le déplacement relatif des surfaces ; c'est le cas des butées et des paliers fluides .On parlera alors de lubrification "hydrodynamique" .

Dans le cadre de cette étude, nous déterminerons les caractéristiques statiques d'un contact thermohydrodynamique fonctionnant dans des conditions données, après un bref rappel des équations de comportement d'un écoulement thermohydrodynamique, le principe de minimisation de fonctionnelle est appliqué à l'équation de reynolds généralisée alors que la méthode de GALERKINE est utilisée pour résoudre conjointement l'équation de l'énergie dans le film ainsi que celle de la chaleur dans les massifs . Ainsi, grâce à cette modélisation l'étude du comportement d'un palier lisse en régime laminaire est faite .une modélisation de type éléments finis est appliquée pour la recherche des caractéristiques statiques du palier .

CHAPITRE I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Depuis des temps très anciens, l'homme s'est passionné pour la création de machines et a dès lors, compris que la lubrification des surfaces en mouvement relatif était l'une des clés de sa démarche inventive. Le savoir en cette matière a d'abord lentement progressé jusqu'à ce que se dégagent au 19^e et au début du 20^e siècles les lois essentielles qui constituent la base même des théories modernes, cette progression est présentée ci-dessous, en se basant essentiellement sur les références [1], [2], [3], [15], [17].

Le début de la révolution industrielle est marqué dans le domaine de la tribologie par CHARLES AUGUSTIN COULOMB qui présente en 1780 un mémoire intitulé « théorie des machines simples en ayant égard au frottement de leurs parties et à la raideur des cordages ». Il a étudié l'influence des cinq paramètres suivants, sur le frottement de glissement et dans certains cas sur le frottement de roulement :

- 1) nature des matériaux,
- 2) effet d'un lubrifiant,
- 3) étendue de la surface de contact,
- 4) charge appliquée,
- 5) temps de repos pendant lequel les surfaces restent en contact avant l'expérience.

En 1780, SAMUEL VINCE présente devant la « royal society » anglaise un article intitulé « on the motion of bodies affected by friction ». Ce travail traite essentiellement des problèmes de frottement dynamique.

Le XIX^e siècle a été marqué par des développements dans tout les domaines et en particulier en tribologie. Des expériences très précises ont été réalisées tant en frottement sec qu'en frottement lubrifié.

En 1835, ARTHUR JULES MARIN a fait des travaux sur les frottements sec qui ont éclipsé pendant plus d'un demi siècle les études de COULOMB .

En 1840 et 1846, JEAN LUIS MARIE POISEUILLE établis les équations qui gouvernent l'écoulement d'un fluide dans un tube de faible diamètre afin décrire l'écoulement du sang dans les vaisseaux. ces lois très utilisées en lubrification, on parle d'écoulement de type poiseuille, ont été confirmées indépendamment quelques années plus tard par HAGEN en Allemagne .Elles sont usuellement connues sous le nom de lois de HAGEN-POISEUILLRE. Le nom de poiseuille a d'ailleurs été donné à l'unité de viscosité dynamique dans le système M.K.S.A. De même, depuis 1913, la poise est utilisée pour désigner l'unité de viscosité dynamique dans le système C.G.S.

Les premières expériences de lubrification hydrodynamique ont été réalisées en 1847 par GUSTAVE ADOLPH HIRN .Ces essais lui ont permis, en l'absence du lubrifiant de retrouver les lois de COULOMB . HIRN constate que pour une charge donnée, le couple de frottement présente des fluctuations et est relativement élevé à de faibles vitesses et ce couple devient stable lorsque la vitesse augmente, il passe par un minimum puis, est proportionnelle à la vitesse de rotation à température constante .

Il montre aussi que le couple dépend directement de la viscosité du fluide .

Il constate que pour de faibles charges l'eau et même l'air peuvent être de très bon lubrifiants .Mais ces résultats ne furent publiés qu'en 1854 dans le bulletin de la société industrielle de MULHOUSE parce qu'ils étaient en totale opposition avec les lois de COULOMB .

En 1879, ROBERT HENRY THURSTON a montré dans ses études sur le frottement et la lubrification que lorsque la vitesse augmente le coefficient de frottement d'un palier lubrifié décroît au dessous de la valeur statique, passe par un minimum puis augmente ensuite avec la vitesse .Il remarque aussi que la vitesse qui correspond au minimum de frottement dépend de la charge appliquée au palier .

En 1883, NICOLAI PAVLOVICH PETROV montre après ses études et essais sur le frottement des paliers lubrifiés que parmi toute les caractéristiques physiques d'une huile seule la viscosité joue un rôle prépondérant sur le frottement des paliers .

Il précise qu'un film liquide sépare totalement les surfaces de l'arbre et du coussinet .la pression qui régné dans ce film est constante .Sa contribution la plus importante est sa loi dite "loi de PETROV " qui démontre que le frottement F du palier est proportionnel à la vitesse v , à la surface de contact Q et à la viscosité μ ;il propose la relation :

$$F = \frac{\mu v a}{\epsilon + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}}$$

où ϵ est l'épaisseur moyenne du lubrifiant et λ_1, λ_2 des coefficients introduits pour prendre en compte un éventuel glissement du fluide aux parois .En outre, il a démontré à l'aide d'une analyse thermique globale que pour un palier, une vitesse et un lubrifiant donnés le frottement dépend directement de la température si l'on connaît la courbe viscosité-température donnée .

Dés 1883 BEAUCHAMP TOWER réalise des essais sur la lubrification des paliers et présente dans un premier rapport les résultats déjà obtenus sur le frottement .Il montre par ailleurs la présence d'un film de lubrifiant entre les surfaces de l'arbre et du coussinet et l'existence d'une génération de pression dans le film, ainsi l'existence d'une pression hydrodynamique était prouvé pour la première fois par pur hasard durant une expérience de labos .A la suite de ces observations, B.TOWER montre que, pour assurer de bonnes conditions de fonctionnement, il fallait placer des rainures dans les zones non chargées du palier et laisser l'arbre entraîner l'huile dans la zone de pression . Dans un second rapport, en 1885, B.TOWER donne la répartition de pression mesurée à la surface du coussinet. Les études expérimentales de B.TOWER ont servi de base à la mise au point de la théorie de la lubrification .En effet, c'est au XIX^e siècle que les

bases de la lubrification moderne ont été établies.

En 1886, OSBORNE REYNOLDS (1842-1912) établit les bases de la lubrification hydrodynamique actuelle dans le but d'expliquer les travaux de B.TOWER dans son ouvrage célèbre «On the theory of lubrication and its application to Mr. B.TOWER's experiments».

Dans la première partie de cette étude, O.REYNOLDS montre que lorsqu'un film de lubrifiant sépare totalement les surfaces, le frottement n'est pas proportionnel à la vitesse car l'élévation de température dans le film entraîne une diminution de viscosité donc du frottement. Par ailleurs, il note que lorsque la charge augmente, la pression dans la zone de sortie du film devient négative ce qui entraîne la rupture du film.

Dans la seconde partie, il analyse les écoulements simples entre deux plaques parallèles puis inclinées. Il donne une explication physique du phénomène de portance dû à la conservation du débit dans le coin d'huile. Enfin, il explique la nécessité du rodage par l'existence des rugosités qui jouent un rôle dans la zone où l'épaisseur du film est la plus faible.

Dans la troisième partie de son travail, O.REYNOLDS présente les hypothèses de base de la lubrification hydrodynamique. Compte tenu, de ces hypothèses, et après un développement théorique, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} (h^3 \frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (h^3 \frac{\partial p}{\partial z}) = 6\mu \{ (U_0 + U_1) \frac{\partial h}{\partial x} + 2V_1 \}$$

Cette équation est connue depuis sous le nom d'équation de REYNOLDS, c'est l'équation de base de la lubrification hydrodynamique.

Dans la dernière partie de son mémoire O.REYNOLDS a intégré cette équation dans le cas du coin d'huile infiniment long ($\partial p / \partial z = 0$). Il a aussi proposé une solution dans le cas du palier

infiniment long en utilisant des développements en série. cependant l'intégration est très laborieuse et la solution n'est acceptable que dans le cas des paliers peu chargés .

En 1904, ARNOLD JOHANES WILHEM SOMMERFELD utilise un changement de variable judicieux et présente une solution analytique à l'équation de REYNOLDS dans le cas du palier infiniment long . Cependant les conditions aux limites proposées ne tiennent pas compte de la rupture du film dans le palier et la pression obtenue ainsi est négative dans la zone divergente, ce qui ne correspond pas à la réalité physique .

En 1905, ANTHONY GEORGE MALDON MICHELL obtient à l'aide de développements limités la solution de l'équation de REYNOLDS dans le cas d'une butée de largeur finie . Il montre aussi la diminution de portance dû aux fuites latérales du fluide .

En 1914, LUDWIG KARL FREIDRICH GUMBEL propose par le calcul de la charge dans le palier de ne prendre en compte que la partie positive de la pression et de négliger toute la zone où la pression est négative . La charge ainsi obtenue est évidemment erronée .

En 1917, LORD RAYLEIGH fut le premier à présenter l'analyse d'un système hydrostatique et a calculé la charge et le couple de frottement d'une butée hydrostatique axiale .

En 1918, JHON WILLIAM STRUT a proposé un autre type de butée échelon formée de deux parties parallèles décalées .

En 1931, ALBERT KINGSBURY obtient une solution approchée de l'équation de REYNOLDS en utilisant une méthode analogique basée sur la similitude existante entre l'équation de reynolds et l'équation qui décrit la loi de variation de la tension électrique dans un milieu résistible .

En 1932, HERBERT WALKER SWIFT puis W. Steiber en 1933 présentent indépendamment des conditions aux limites à la sortie du film plus représentatif de la réalité. Ils écrivent que dans la zone divergente du palier le film se rompt le long d'une frontière déterminée par les conditions supplémentaires suivantes : le long de la frontière la pression prend la valeur de la pression saturante du fluide et le gradient de pression s'annule. Ces conditions qui respectent la continuité du débit à la sortie du film sont dites conditions aux limites de REYNOLDS et sont universellement utilisées aujourd'hui pour le calcul des paliers soumis à des charges constantes.

Durant, toutes ces années, la théorie isotherme a été la seule utilisée, et les études théoriques entreprises entre les années 1900 et 1940 portèrent seulement d'une part sur les méthodes de résolution, et d'autre part sur les conditions aux limites associées à l'équation dite de REYNOLDS.

Ce n'est qu'au début des années 1930 que l'hypothèse de l'écoulement isotherme, émise par REYNOLDS fut réellement remise en question car malgré quelques extensions qui consistent à évaluer de façon globale l'énergie dissipée dans le film, cette hypothèse est impuissante à analyser précisément les phénomènes thermiques. C'est pourquoi dès le début du XX^e siècle, les chercheurs ont essayé de mettre au point des méthodes précises pour calculer le champ de température dans le contact lubrifié.

Cependant, en 1933, KINGSBURY a publié une étude remarquable intitulée «heat effects in lubrication films » qui contient les concepts essentiels du problème thermique dans le film. Dans cette étude, KINGSBURY a pris en compte la variation de la température et donc de la viscosité suivant l'épaisseur du film. Il a déduit que l'échauffement du film provoque une réduction de la charge supportée par l'arbre de 60 % par rapport à la charge calculée par la théorie isotherme pour des conditions de fonctionnement semblables :

En 1937, SWIFT constate l'insuffisance de la théorie isotherme et prône l'usage d'une viscosité moyenne effective qui permettrait selon lui de calculer de façon satisfaisante les grandeurs caractéristiques d'un palier .

En 1944, HAGG apporte une solution analytique au problème de KINGSBURY; en admettant un coefficient de conduction K indépendant de la température et une loi simplifiée de variation de la viscosité avec la température .

En 1946, FOGG attribue les phénomènes de portance observés entre faces parallèles à la dilatation du fluide sous l'effet de l'échauffement, on parle alors de "coin thermique", ce qui ne pouvait être expliqué par l'utilisation de l'équation de REYNOLDS pour l'analyse du système .

Ainsi, CAMERON et WOOD en 1946, SHAW en 1947 et CHARNES en 1953 étudient la variation de densité avec la température . les investigations montrent la réalité du coin thermique, mais la faiblesse de la portance mise en évidence est telle que cette notion ne permet pas d'expliquer les charges non négligeables mesurées par FOGG .

En 1949, COPE fait intervenir l'équation de l'énergie sous une forme simplifiée pour obtenir la température du film . quelques années plus tard, GULLINGER et saibl en 1958, et zienkivics en 1957 et HUNTER et ZIENKIVICS en 1960 sont les premiers à présenter une méthode pour résoudre simultanément l'équation de REYNOLDS et l'équation de l'énergie dans le film. De plus ces auteurs tiennent compte de façon approchée de la variation de température suivant l'épaisseur du film .

CHRISTOPHERSON, CAMERON, et WOOD , SHARE et COPE contribuèrent largement à l'évaluation de l'importance de l'effet thermique dans le film lubrifiant, ainsi dans les années 1950, on essaya par des voies différentes de prendre en compte l'influence de la

température sur les caractéristiques d'un contact lubrifié.

VOGELPHOL remarqua expérimentalement l'existence d'un important gradient de température à travers l'épaisseur du film . Il a eu le mérite de rappeler que la seule approche scientifique possible pour calculer la température dans un contact lubrifié est de faire une analyse thermique complète d'un système formé par le fluide et les solides délimitant le contact .

La première modélisation tridimensionnelle est due à DAWSON et HUDSON en 1963 qui prennent en considération la conduction de la chaleur à travers les solides .

STROMBERG en 1971 utilise les conditions aux limites de type adiabatique pour l'étude d'un palier à patins oscillants infiniment long en tenant compte de la variation de la viscosité dans le sens de l'écoulement et à travers l'épaisseur du film .

En 1974, TIEU obtient la répartition du champ de température dans un palier à patins oscillants grâce à des conditions aux limites en température déterminées expérimentalement .

HUBNER en 1974, après une analyse thermohydrodynamique complète a noté qu'une hypothèse d'adiabaticité pour les gradients de températures aux interfaces fluide-solide peut être utilisée dans la plupart des cas pour déterminer la charge, le débit et le couple de frottement dans un palier .

MC CALLION et AL font l'analyse thermohydrodynamique d'un palier lisse sans cavitation . Ils désaccouplent l'équation de pression et celle de la température dans le film en négligeant l'influence du gradient de pression sur le champ de vitesse dans l'équation de l'énergie . Les auteurs font remarquer que les résultats obtenus sont valables pour les paliers dont le rapport L/D est inférieur à 0.5, et l'excentricité n'excédant pas 0.8 .

Plus récemment, une étude numérique par différence finis est faite par BONCOMPAIN en 1984 pour modéliser l'écoulement

thermohydrodynamique dans un palier lisse .l'auteur tient compte du transfert de chaleur entre différent corps en présence .Il montre que ces conditions aux limites de type adiabatique, dans le cas de figure étudiées peuvent être en première approximation utilisées pour le calcul des grandeurs globales telles que la charge, le débit ou le couple de frottement, mais qu'elles ne permettent pas de connaître la température réelle dans le palier.

L'étude bibliographique présentée ici montre que depuis le début du siècle et jusqu'en 1950, l'influence des phénomènes thermiques en lubrification a été progressivement mis en évidence. Dès les années 1955 à 1965 , on a écrit de façon de plus en plus précise, les équations descriptives du problème et souligné les difficultés qu'il y avait à poser des conditions aux limites convenables .Depuis 1965, on a formulé des conditions aux limites qui représentent de mieux en mieux les phénomènes physiques et mit en oeuvre des méthodes de calcul de plus en plus sophistiquées, prenant en compte pour les géométries de complexités croissantes les déformations élastiques et le régime turbulent. Ces développements ont été rendu possibles grâce à l'apparition de calculateurs de plus en plus puissants ..

CHAPITRE II

DEFINITION DES EQUATIONS DE BASE UTILISEES
EN LUBRIFICATION THERMOHYDRODYNAMIQUE

II.1-INTRODUCTION :

L'analyse thermohydrodynamique d'un contact lubrifié s'effectue à partir des équations qui décrivent le comportement des milieux continus. Ces relations sont très générales, nous les présenterons succinctement puis à la suite d'hypothèses plus restrictives nous en déduirons des formes simplifiées spécifiques à l'étude de problèmes particuliers en lubrification, ce qui permet d'aboutir à un système d'équations aux dérivées partielles qui permet de prédire le comportement du mécanisme :

- l'équation de REYNOLDS généralisée,
- l'équation de l'énergie dans le film,
- l'équation de la chaleur dans le massif .

II.2-EQUATIONS DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS :

Le comportement d'un fluide est décrit par [4] :

- la loi de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial \left(\frac{\rho u_1}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (\text{II-1})$$

- la loi fondamentale de la dynamique :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II-2})$$

-la loi de comportement rhéologique qui pour un fluide newtonien s'écrit :

$$\sigma_{ij} = (-P + \lambda \theta) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (\text{II-3})$$

-et la loi de conservation de l'énergie pour un fluide newtonien:

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \alpha T \frac{dp}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II-4})$$

dans ces expressions x_i et t sont les variables d'espace et du temps, u_i les composantes de la vitesse, ρ la masse volumique du fluide, f_i les forces massiques extérieures, σ_{ij} le tenseur de contraintes, K le coefficient de conductibilité thermique du fluide, T sa température, P la pression, ϵ_{ij} le tenseur des taux de déformations, θ le taux de dilatation cubique, δ_{ij} le symbole de kronecker et λ et μ , coefficients de NAVIER, sont des fonctions de l'espace et du temps. C_p est la chaleur massique à pression constante.

II.3-EQUATIONS GENERALES DE LA MECANIQUE DES FILMS MINCES VISQUEUX

En reportant l'équation de comportement rhéologique (II-3) dans l'équation de la dynamique (II-2) et en négligeant les forces massiques extérieures, on obtient les équations de NAVIER qui s'écrivent :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j}$$

(II.5)

En mécanique des films minces visqueux, la dimension suivant l'épaisseur du film $(0, \vec{x}_2)$ est très faible par rapport aux deux autres, ce qui permet, pour déterminer l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation (II-5) d'écrire en variables adimensionnées :

$$\bar{x}_1 = x_1/L, \quad \bar{x}_2 = x_2/H, \quad \bar{x}_3 = x_3/L, \quad \bar{t} = tV/L$$

$$\bar{U}_1 = U_1/V, \quad \bar{U}_2 = U_2L/VH, \quad \bar{U}_3 = U_3/V$$

et d'ajouter pour cette étude :

$$\bar{\mu} = \mu/\mu_0 \quad \text{et} \quad \bar{\lambda} = \lambda/\lambda_0$$

Dans cette expression L et V sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristiques selon les axes $(0, \vec{x}_1)$ et $(0, \vec{x}_3)$, H et VH/L celles suivant $(0, \vec{x}_2)$; $L/V, \mu_0, \lambda_0$ définissent l'ordre de grandeur du temps et des coefficients de NAVIER. Nous supposons que ces deux coefficients sont du même ordre de grandeur. Ce changement de variables conduit à poser $\bar{P} = PH^2/\mu_0VL$.

Compte tenu de ces changements de variables l'équation (II-5) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_1} = & \varepsilon \left[-R \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_j} \right) + \varepsilon (\bar{\mu} + \lambda \frac{\lambda_0}{\mu_0}) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_3^2} \right) \right] + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2^2} + \\ & + \varepsilon^2 \left[\frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} = & \varepsilon^2 \left\{ \varepsilon \left[-R \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_3^2} \right) \right] + (\bar{\mu} + \lambda \frac{\lambda_0}{\mu_0}) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_2^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_3} = & \varepsilon \left[-R \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_j} \right) + \varepsilon (\bar{\mu} + \lambda \frac{\lambda_0}{\mu_0}) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial x_3^2} \right) \right] + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial x_2^2} + \\ & + \varepsilon^2 \left[\frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \right). \end{aligned}$$

(II-6)

où $R = \rho_0 V H / \mu_0$ est le nombre de REYNOLDS relatif à l'épaisseur de l'écoulement et où $\varepsilon = H/L$, paramètre d'échelle, est en mécanique des films minces visqueux de l'ordre de 10^{-3} .

En négligeant les termes multipliés soit par ε^2 , soit par $\varepsilon^2 R$ il reste :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = -\varepsilon R \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_2} \quad (i=1 \text{ et } 3),$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} = 0 \quad (II-7)$$

Les termes en εR ou termes d'inertie, de l'équation (II-7) seront négligés devant les termes de viscosité quand $\varepsilon R \ll 1$; ce qui est vérifié dans la plupart des écoulements rencontrés en lubrification.

Si par hypothèse on néglige les forces d'inertie il vient :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_1} = \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_2} \quad (i=1 \text{ et } 3),$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} = 0$$
(II.8)

et en revenant aux variables dimensionnées, on obtient les équations de NAVIER :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$$
(II-9)

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)$$

Les équations (II-9) auxquelles s'ajoutent l'équation de conservation de la masse (II-1) et l'équation de conservation de l'énergie (II-4) permettent formellement de connaître, compte tenue des conditions aux limites et après intégration, le champ de vitesse, la pression et les contraintes de cisaillement dans le film. Pour intégrer les équations (II-9), il faut se donner les conditions aux limites sur les vitesses (fig.II-1).

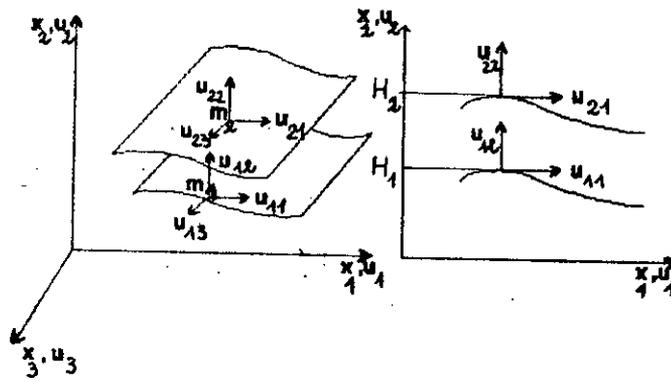


FIG.II-1 : système d'axes

si on suppose qu'il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact, ces conditions peuvent s'écrire :

-sur la paroi 1, pour $y=H_1(x,z,t)$:

$$u_1=u_{11} , u_2=u_{12} , u_3=u_{13}$$

(II-10)

-sur la paroi 2, pour $y=H_2(x,z,t)$:

$$u_1=u_{21} , u_2=u_{22} , u_3=u_{23}$$

le choix d'un système d'axe tel que l'épaisseur du film soit toujours mesurée selon $(0, \vec{x}_2)$ impose pour certains contacts, le palier cylindrique par exemple, de négliger la courbure générale du film .

Pour des raisons de commodité on pose :

$$I = \int_{H_1}^{H_2} \frac{\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)} d\xi$$

(II-11)

$$J = \int_{H_1}^{H_2} \frac{d\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)}$$

où ξ est une variable d'intégration; on a

pour $x_2=H_1$ $I=J=0$

pour $x_2=H_2$

$$I_2 = \int_{H_1}^{H_2} \frac{x_2}{\mu(x_1, x_2, x_3, t)} dx_2$$

(II-12)

$$J_2 = \int_{H_1}^{H_2} \frac{dx_2}{\mu(x_1, x_2, x_3, t)}$$

Il vient alors :

$$u_1 = \frac{\partial P}{\partial x_1} \left(I - \frac{JI_2}{J_2} \right) + \frac{u_{21} - u_{11}}{J_2} J + u_{11}$$

$$u_2 = - \int_0^{x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_2 - \int_0^{x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_2 + u_{12}$$

(II-13)

$$u_3 = \frac{\partial P}{\partial x_3} \left(I - \frac{JI_2}{J_2} \right) + \frac{u_{23} - u_{13}}{J_2} J + u_{13}$$

La vitesse u_2 selon l'axe Y a été obtenue à partir de l'équation de conservation de la masse.

L'équation de conservation de la masse (II-1) s'écrit après intégration à travers l'épaisseur du film :

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_2 + \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial (\rho u_1)}{\partial x_1} dx_2 = 0$$

(II-14)

on peut transformer cette équation en se servant de la formule de dérivation des intégrales qui s'écrit :

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{H_1}^{H_2} F dx_2 - F(x_1, H_2, x_3, t) \frac{\partial H_2}{\partial x_i} + F(x_1, H_1, x_3, t) \frac{\partial H_1}{\partial x_i} \quad (\text{II-15})$$

avec $i=1$ ou 3

par ailleurs pour $i=2$ on peut intégrer directement :

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} dx_2 = \rho_2 u_{22} - \rho_1 u_{12} \quad (\text{II-16})$$

où ρ_1 et ρ_2 sont respectivement les valeurs de la masse volumique sur les parois 1 et 2 .
 compte tenue des relations (II-10), (II-14) , (II-15), (II-16) il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{H_1}^{H_2} \rho u_1 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{H_1}^{H_2} \rho u_3 dx_2 &= \rho_2 u_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \rho_2 u_{23} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \rho_1 u_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \rho_1 u_{13} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + \\ &+ \rho_2 u_{22} - \rho_1 u_{12} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{H_1}^{H_2} \rho dx_2 - \rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II-17})$$

les deux premiers termes peuvent être explicités grâce aux termes de vitesse u_1 et u_3 donnés par (II-3) et en posant au préalable :

$$R = \int_{H_1}^{H_2} \rho(x_1, \xi, x_3, t) d\xi$$

$$F = \frac{1}{J_2} \int_{H_1}^{H_2} \frac{R}{\mu} dx_2 \quad (\text{II-18})$$

$$G = \int_{H_1}^{H_2} \frac{R}{\mu} \left(x_2 - \frac{I_2}{J_2}\right) dx_2 = \int_{H_1}^{H_2} \frac{R x_2}{\mu} dx_2 - I_2 F$$

il vient alors :

$$\int_{H_1}^{H_2} \rho u_1 dx_2 = R_2 u_{21} - \frac{\partial P}{\partial x_1} G - (u_{21} - u_{11}) F$$

(II-19)

$$\int_{H_1}^{H_2} \rho u_3 dx_2 = R_2 u_{23} - \frac{\partial P}{\partial x_3} G - (u_{23} - u_{13}) F$$

où R_2 est la valeur que prend la fonction R à la paroi 2, ou $R_2 = R(x_2 = H_2)$.

En regroupant les différents termes, on obtient l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(G \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(G \frac{\partial P}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} [u_{21} (R_2 - F) + u_{11} F] - \rho_2 u_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \rho_1 u_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3} [u_{23} (R_2 - F) + u_{13} F] - \rho_2 u_{23} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \rho_1 u_{13} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \\ &+ \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} + \rho_2 u_{22} - \rho_1 u_{12} \end{aligned} \quad (II-20)$$

Les contraintes de cisaillement dans le fluide s'écrivent :

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \tau_{32} &= \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (II-21)$$

Soit en tenant compte des relations (II-13) :

$$\tau_{12} = \left(x_2 - \frac{I_2}{J_2}\right) \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{u_{21} - u_{11}}{J_2}$$

(II-22)

$$\tau_{32} = \left(x_2 - \frac{I_2}{J_2}\right) \frac{\partial P}{\partial x_3} + \frac{u_{23} - u_{13}}{J_2}$$

L'équation (II-20) est la forme la plus générale de l'équation de REYNOLDS .pour l'obtenir il a été nécessaire de poser que :

- le milieu est continue, c'est-à-dire que les équations des milieux continus ne s'appliquent pas dans les zones où il y a rupture du film de fluide,
- le fluide est newtonien, c'est-à-dire que les contraintes de cisaillement sont proportionnelles aux gradients de vitesses (eq II-21),
- l'écoulement est laminaire, ce qui est réalisé pour autant que l'épaisseur du film soit suffisamment faible,
- les forces massiques extérieures sont négligeables,
- les forces d'inertie sont négligeables devant les forces de pression et de viscosité .Ce qui est vérifié pour autant que l'écoulement est laminaire,
- le glissement entre le fluide et les parois du contact n'existe pas .Autrement dit, sur les parois, la vitesse du fluide est égale à celle des parois,
- la courbure générale du film est négligée,
- l'épaisseur du film mesurée dans la direction ox_2 est toujours très faible devant les autres dimensions du contact; c'est l'hypothèse de base de la lubrification .

II.3.1-EQUATION DE REYNOLDS GENERALISEE :

Lorsque la vitesse d'une paroi du contact est tangente à cette paroi (cas fréquent en lubrification), l'équation des films minces visqueux généralisée (II-20) se simplifie car en plaçant l'origine du système d'axes sur cette paroi on peut poser:

$H_1=0$ et $H_2=h$ (fig.II-2) .
 si par ailleurs, on utilise les coordonnées cartésiennes (x,y,z) ,
 les conditions aux limites sur la vitesse s'écrivent :

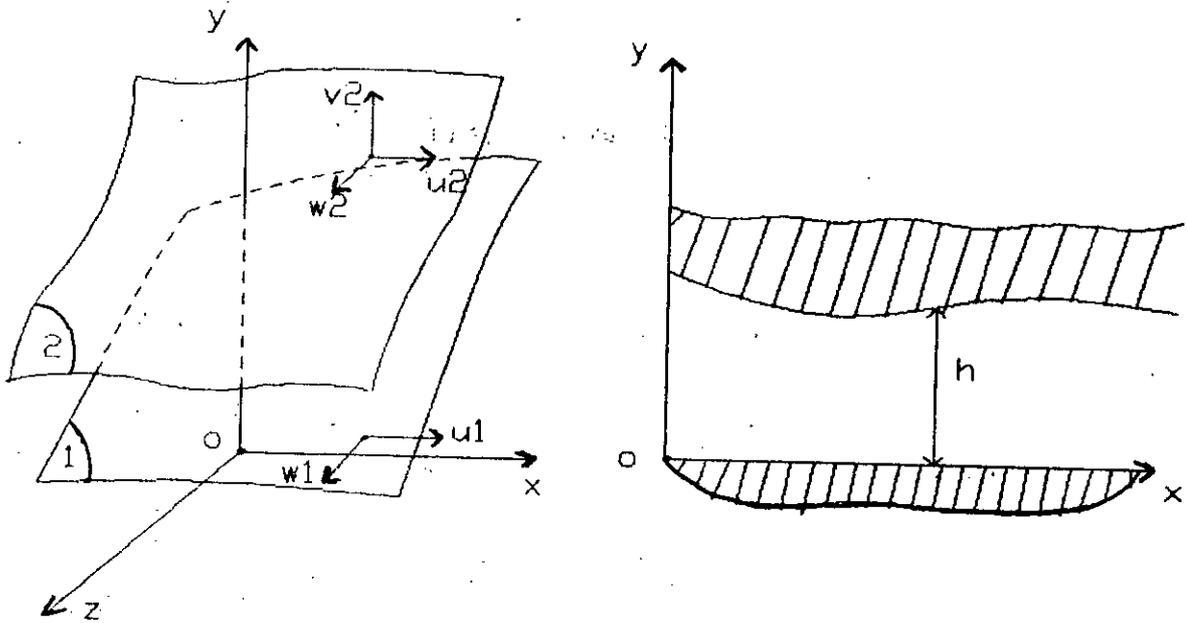


fig.II-2 : système d'axes

Sur la paroi 1, pour $y=0$ $u=u_1$; $v=0$; $w=w_1$

Sur la paroi 2, pour $y=h$ $u=u_2$; $v=v_2$; $w=w_2$

Remarquons que le choix du système d'axes impose à la vitesse v_1 de la paroi 1 dans la direction Y d'être identiquement nulle . Les vitesses u, v et w du fluide s'écrivent alors :

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} \left(I - \frac{I_2}{J_2} J \right) + \frac{u_2 - u_1}{J_2} J + u_1$$

$$v = - \int_0^y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dy \quad (\text{II-23})$$

$$w = \frac{\partial P}{\partial z} \left(I - \frac{I_2}{J_2} J \right) + \frac{w_2 - w_1}{J_2} J + w_1$$

Dans ces relations :

$$I = \int_0^y \frac{\xi}{\mu} d\xi$$

$$J = \int_0^y \frac{d\xi}{\mu}$$

$$I_2 = \int_0^h \frac{y}{\mu} dy$$

$$J_2 = \int_0^h \frac{dy}{\mu}$$

(II-24)

Des expressions précédentes (II-22) on déduit :

$$\tau_{xy} = \left(y - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{u_2 - u_1}{J_2}$$

$$\tau_{yz} = \left(y - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{w_2 - w_1}{J_2}$$

(II-25)

L'équation (II-20) s'appelle alors équation de REYNOLDS généralisée elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} [u_2 (R_2 - F) + u_1 F] - \rho_2 u_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} [w_2 (R_2 - F) + w_1 F] - \rho_2 w_2 \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_2 v_2 \end{aligned} \quad (\text{II-26})$$

où les fonctions R, F, G et R₂ sont définis par :

$$R = \int_0^y \rho(x, \xi, z, t) d\xi$$

$$F = \frac{1}{J_2} \int_0^h \frac{R}{\mu} dy$$

$$G = \int_0^h \frac{Ry}{\mu} dy - I_2 F$$

$$R_2 = \int_0^h \rho dy$$

Ces relations doivent être utilisées pour l'étude des contacts dans lequel on tient compte de l'effet thermique .

II.3.2-INTERPRETATION PHYSIQUE DES DIFFERENTS TERMES DE L'EQUATION

Dans cette équation (II-26):

-le terme

$$\frac{\partial}{\partial x} [u_2 (R_2 - F) + u_1 F] - \frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

représente la variation du débit massique dans la direction x pour une section de dimension h suivant y et unité suivant z .

-le terme

$$\frac{\partial}{\partial z} [w_2 (R_2 - F) + w_2 F] - \frac{\partial}{\partial z} (G \frac{\partial P}{\partial z})$$

représente la variation du débit massique dans la direction z pour une section de dimension h suivant y et unité suivant x. Dans les deux expressions ci-dessus, le premier terme correspond au débit dû au déplacement des parois (écoulement de couette). Le second terme au débit dû au gradient de pression (écoulement de poiseuille).

-le terme

$$-\rho_2 (u_2 \frac{\partial h}{\partial x} + w_2 \frac{\partial h}{\partial z} - v_2)$$

représente la variation du débit massique dans la direction y. les trois termes de cette expression caractérisent respectivement l'effet de l'inclinaison dans la direction x, de l'inclinaison dans la direction z et de la vitesse dans la direction y.

-le terme

$$\frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h}{\partial t}$$

caractérise l'effet transitoire dû à la compressibilité du fluide.

La résolution de l'équation (II-26) nécessite la connaissance de la distribution de la masse volumique et de la viscosité à l'intérieure du film, il faut par ailleurs connaître avec précision les conditions aux limites sur la température, ce qui n'est généralement pas le cas.

II.3.3-EQUATION DE L'ENERGIE DANS LE FILM :

Pour un fluide newtonien, la loi de conservation de l'énergie s'écrit [5], compte tenu de la loi de comportement rhéologique du fluide :

$$\rho \frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) - P \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) \quad (\text{II-27})$$

Dans cette expression E représente l'énergie interne, K le coefficient de conductibilité thermique du fluide, T sa température, P la pression.

On introduit habituellement la fonction de dissipation ϕ :

$$\phi = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) \quad (\text{II-28})$$

par ailleurs, le fluide obéit à la loi de stokes on a :

$$3\lambda + 2\mu = 0$$

La fonction de dissipation s'écrit alors :

$$\phi = \mu \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right)^2 \right] \quad (\text{II-29})$$

L'équation de l'énergie pour un fluide visqueux newtonien devient :

$$\rho \frac{dE}{dt} = -P \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \phi + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) \quad (\text{II-30})$$

En utilisant l'équation de continuité (II-1), on peut exprimer le terme $P \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

Le terme dE/dt peut être également transformé en introduisant les coefficients calorimétriques C_p et H

$$dE = C_p dT + HdP - Pd \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

où c_p est la chaleur spécifique à pression constante et H peut s'exprimer à l'aide des deux principes de la thermodynamique :

$$H = -T \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]_p = -\alpha \frac{T}{\rho}$$

où α est le coefficient de dilatation thermique ($\alpha = 0$ pour un fluide incompressible). Dans ces conditions, l'équation (II-30) s'écrit :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \phi + \alpha T \frac{dp}{dt} \quad (\text{II-31})$$

Dans le cadre de la mécanique des films minces visqueux, l'épaisseur du film selon oy (fig II.2) étant très faible devant les autres dimensions de l'écoulement; l'équation (II-31) se réduit à :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \phi + \alpha T \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + w \frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (\text{II-32})$$

avec

$$\phi = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]$$

et

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}$$

Cette dernière formulation de l'équation de l'énergie est commode lorsqu'on veut tenir compte de la variation de la masse volumique à l'intérieure du film, car elle fait apparaître le terme

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

qui est un terme connu.

Dans le cas d'un écoulement isovolume et en régime permanent nous retiendrons l'équation suivante :

$$\rho C_p \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \phi \quad (\text{II-33})$$

la signification des différents termes de cette équation est la suivante :

$\rho C_p (u_i \frac{\partial T}{\partial x_i})$: taux de chaleur emmené par convection.

$\frac{\partial}{\partial y} (K \frac{\partial T}{\partial y})$: taux de chaleur emmené par conduction.

$\phi = \mu [(\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial w}{\partial y})^2]$: production de taux de chaleur par dissipation visqueuse.

II.3.4-EQUATION DE LA CHALEUR DANS LES MASSIFS :

l'équation de la chaleur dans un solide s'écrit sous la forme générale suivante [6] :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}) = \rho C \frac{dT}{dt} - T \beta_{ij} \frac{dx_{ij}}{dt} \quad (\text{II-34})$$

où K_{ij} représente le tenseur symétrique de conductivité thermique du milieu, C sa capacité calorifique, β_{ij} les coefficients de dilatation du matériau

Le terme

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j})$$

correspond à la conduction de chaleur dans un milieu fixe en régime permanent.

Le terme

$$\rho C \frac{dT}{dt}$$

prend en compte le transport de la chaleur dû au déplacement de la matière en régime transitoire

Le terme

$$-T\beta_{ij} \frac{de_{ij}}{dt}$$

Correspond à une partie de la puissance dissipée pour échauffer le solide, qui est récupérée sous forme mécanique par les contraintes de dilatation

L'équation (II-34) rassemble la théorie de l'élasticité et celle de la conduction de la chaleur . Les problèmes faisant intervenir ces deux théories sont en général difficiles à résoudre. Cependant, dans la plupart des applications, nous pouvons omettre le terme de couplage entre élasticité et conduction de la chaleur [6], sans pour cela introduire d'erreur appréciable . Avec cette hypothèse, les problèmes de conduction de la chaleur et de thermoelasticité devient distincts . Ainsi, nous n'aurons pas besoin des équations de l'élasticité pour obtenir la répartition des températures dans les solides .

L'équation de la chaleur devient :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}) = \rho C \frac{dT}{dt} \quad (\text{II.35})$$

Dans cette étude, les matériaux sont considérés ~~anisotropes~~ isotropes :

$$K_{ij} = K \delta_{ij} \quad (\text{II-36})$$

où K est la conductivité thermique du matériau . On supposera également que les caractéristiques des matériaux telles que la conductivité K, la capacité calorifique C et la masse volumique

ρ sont indépendants de la température et du point du solide considéré, en se plaçant en régime permanent l'équation de la chaleur dans les massifs se réduit dans un référentiel $(o, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (\text{II.37})$$

II.4-PROPRIETES THERMIQUES DES LUBRIFIANTS :

La formulation des équations régissant le comportement du lubrifiant à l'intérieur du contact doit inclure les fonctions de dépendance de la masse volumique et de la viscosité vis-à-vis de la température et de la pression .

II.4.1-MASSE VOLUMIQUE :

Le fluide étant supposé incompressible .La masse volumique ne dépend que de la température, d'après les travaux de DAWSON et HUDSON, la variation de la densité du lubrifiant avec la température est négligeable comparée à celle de la viscosité . nous supposons donc pour la suite de cette étude que la masse volumique est constante .

II.4.2-VISCOSITE

De toutes les propriétés physiques à considérer en lubrification hydrodynamique, la viscosité est la plus importante. la viscosité caractérise l'aptitude physique d'un fluide à assurer la lubrification sous des conditions définies de vitesse, de charge et de température .

Dans les contacts faiblement chargés, tels que paliers et butées, les variations de la viscosité avec la pression (effet piezovisqueux) sont négligeables devant les effets de température .

Différentes formules ont été proposées pour décrire cette variation de la viscosité avec la température. Nous citerons pour mémoire la formule de BARR, la formule de HUGEL et CLAIRBOIS.

La formule de MAC COULL et WALTHER a été retenue par l'ASTM (American Society of Testing Materials). Elle s'exprime sous la forme :

$$\log \log (v+a) = m \log T + n$$

Dans cette relation v est la viscosité cinématique en centistokes (mm^2/s), T est la température absolue et m, n sont des constantes spécifiques du lubrifiant. Le paramètre a dépend de la viscosité v , il prend les valeurs suivantes :

-pour v supérieur à 1.5 centistokes	$a=0.6,$
-pour v comprise entre 1 et 1.5 centistokes	$a=0.65,$
-pour v comprise entre 0.75 et 1.5 centistokes	$a=0.70,$
-pour v comprise entre 0.4 et 0.7 centistokes	$a=0.75,$

II.5-CONCLUSION

Les équations de la thermohydrodynamique des films minces visqueux que nous venons de présenter peuvent s'appliquer à n'importe quel type de contact lubrifié pour un fluide newtonien. Ainsi, muni de l'équation de REYNOLDS généralisée, de l'équation de l'énergie dans le film, de l'équation de la chaleur dans les massifs, et en tenant compte de la variation des propriétés du lubrifiant avec la température, nous sommes en mesure d'étudier le comportement thermohydrodynamique d'un contact lubrifié.

Le problème général fait intervenir un grand nombre de paramètres qu'il est difficile de prendre en compte dans toute leur généralité : géométrie et cinématique du contact, conditions aux limites, propriétés physiques des composants ...

Aussi, nous limiterons l'étude au cas particulier important du palier lisse.

CHAPITRE III

THERMOHYDRODYNAMIQUE D'UN PALIER LISSE

III.1-INTRODUCTION :

Les paliers lisses les plus simples sont constitués d'un arbre tournant dans un alésage en présence d'un lubrifiant. Dans un palier lisse hydrodynamique, un film fluide sépare totalement l'arbre du coussinet. Ainsi, ce palier peut être schématisé par deux cercles de rayons voisins. La figure (III.1) présente les trois phases observées lors de la mise en route sous charge du palier. A l'arrêt (fig III.1.a), l'arbre et le coussinet sont en contact. Au démarrage (fig III.1.b), l'arbre roule en glissant à l'intérieur du coussinet, le régime de lubrification est dit mixte, le lubrifiant est entraîné dans un espace convergent formé par l'arbre et le coussinet. Dès que la vitesse de rotation devient suffisante, il y a création d'un champ de pression hydrodynamique qui s'oppose à la charge \vec{W} et assure l'équilibre.

Dans cette étude, nous nous limiterons au régime hydrodynamique pur établi et nous supposerons que l'écoulement du fluide à travers le palier est laminaire et permanent.

Par ailleurs, nous prendrons en compte la variation de la viscosité en fonction de la température mais nous négligerons celle de la masse volumique.

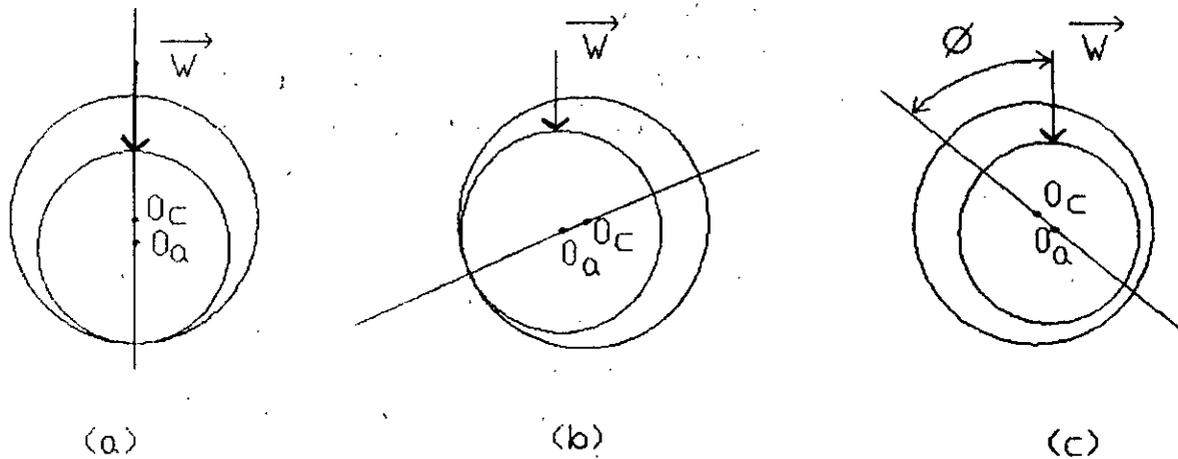


fig III.1 : schématisation d'un palier lisse

III.2-GEOMETRIE ET CINEMATIQUE DES SURFACES :

Un palier lisse (fig III.2) est constitué d'un coussinet, de centre O_c , de rayon R_c , et d'un arbre de centre O_a et de rayon R_a . Sous l'action de la charge, les centres O_c et O_a ne coïncident pas. La distance $O_c O_a$ est l'excentricité e .

L'angle que fait la ligne $O_c O_a$ avec la direction de la charge est l'angle de calage ϕ . Si les axes du coussinet et de l'arbre sont parallèles (palier aligné) et si l'on néglige les déformations élastiques des surfaces sous l'effet de la température et de la pression, ces deux paramètres sont suffisants pour repérer le positionnement de l'arbre à l'intérieur du coussinet.

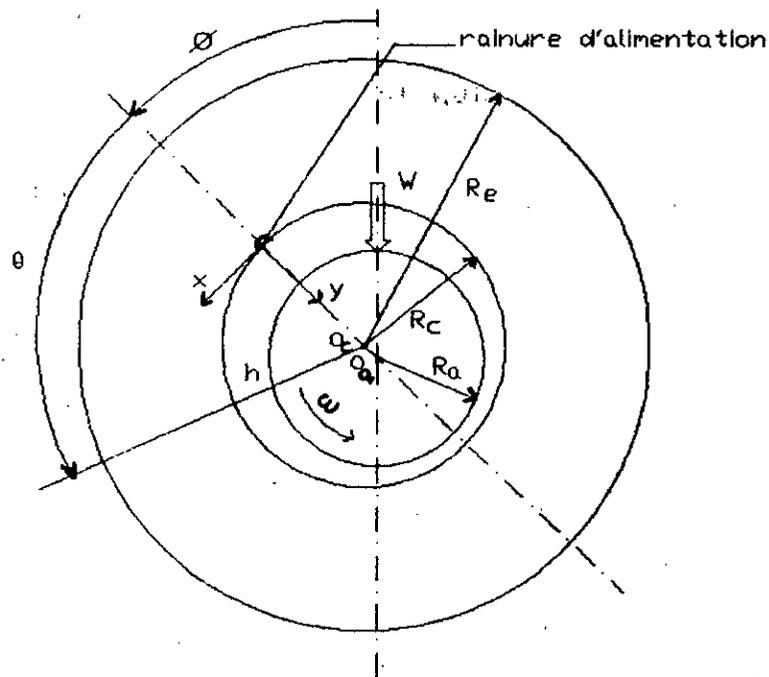


fig III.2 : section droite du palier

Compte tenu de ces hypothèses, l'épaisseur du film a pour expression (annexe A) :

$$h = c(1 + \epsilon \cos \theta) \quad (\text{III.1})$$

$c = R_c - R_a$: le jeu radial imposé par l'usinage ,
 $\epsilon = e/c$: l'excentricité relative, elle varie de 0 à 1 ,
 $\theta = x/R_a$: la coordonnée angulaire .

Les rayons R_a et R_c étant très voisins ($R_c/(R_c - R_a) = 10^3$), on peut négliger la courbure du film et développer l'arbre et l'assimiler à un plan (fig III.3) . Si seul l'arbre est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse ω ; dans le repère associé à la figure (III.3), dont le plan xoz est confondu avec la surface développée de l'arbre et en considérant qu'il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois, les conditions cinématiques relatives aux surfaces s'écrivent :

$$u_1 = u = \omega R_a, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0$$

(III.2)

$$u_2 = 0, \quad v_2 = 0, \quad w_2 = 0$$

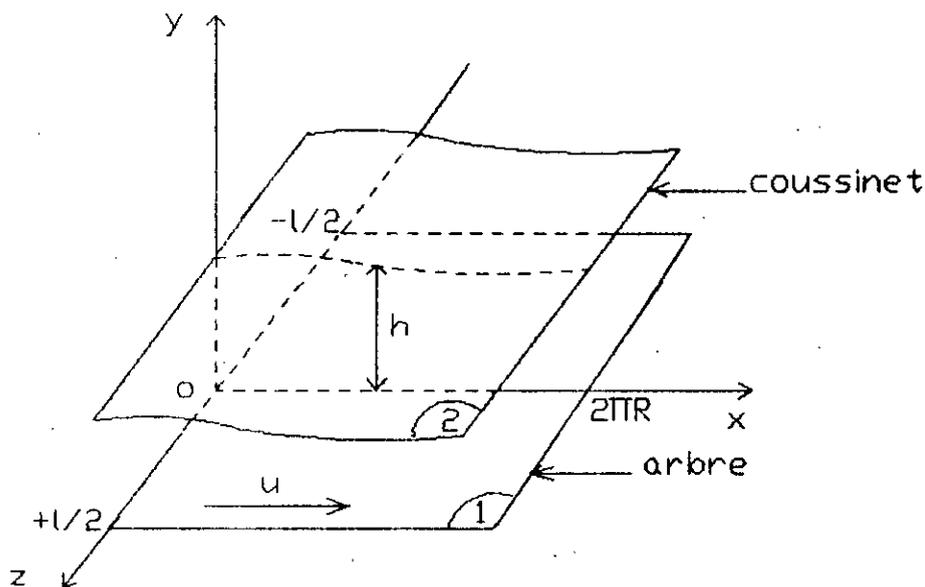


fig III.3 : palier développé

III.3-DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES STATIQUES DU PALIER:

III.3.1-LA CHARGE :

la valeur de la charge W que peut supporter le contact cylindrique est obtenue par intégration du champ de pression . Comme le palier n'est pas un contact plan, on projete la pression sur les axes ox_1 et ox_2 (fig III.4) .

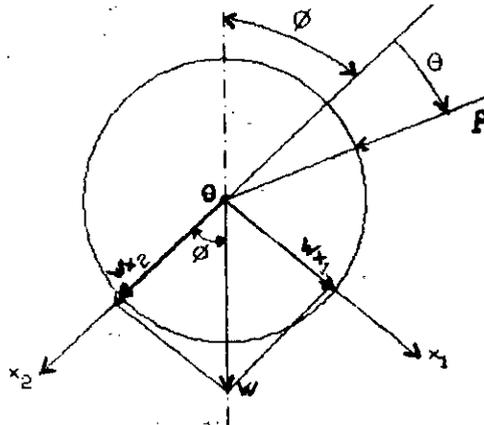


fig III.4: schématisation des composantes de la charge

Les composantes Wx_1 et Wx_2 de la charge sont ainsi données par :

$$Wx_1 = \int_{(s)} P \sin\theta \, ds \qquad Wx_2 = - \int_{(s)} P \cos\theta \, ds$$

L'intégration se fait sur l'enveloppe (s) d'un cylindre tel que $S=2\pi RL$, $ds=dx_2 dz$ est un élément de surface de cette enveloppe et $\theta=x_1/R$ la coordonnée angulaire déjà mentionnée .

La valeur de la pression étant nulle dans la zone inactive du film, on écrit :

$$Wx_1 = R \int_0^L \int_0^{\theta_0} P \sin\theta \, d\theta dz \tag{III.3}$$

$$Wx_2 = -R \int_0^L \int_0^{\theta_0} P \cos\theta \, d\theta dz$$

$\theta_0=x_0/R$: étant l'angle de rupture.
On en tire immédiatement la charge :

$$W = (Wx_1'^2 + Wx_2'^2)^{1/2} \tag{III.4}$$

et l'angle de calage

$$\phi = \arctg (Wx_1 / Wx_2)$$

La resolution de l'équation de Reynolds étant numérique, le champ de pression est discret; par conséquent, son intégration est numérique: on appliquera dans ce cas, deux fois une méthode d'intégration dite méthode composite: une fois en discrétisant en z puis une fois en x.

Soit une fonction f(x) considérée entre deux points d'abscisse a et b (fig III.5)

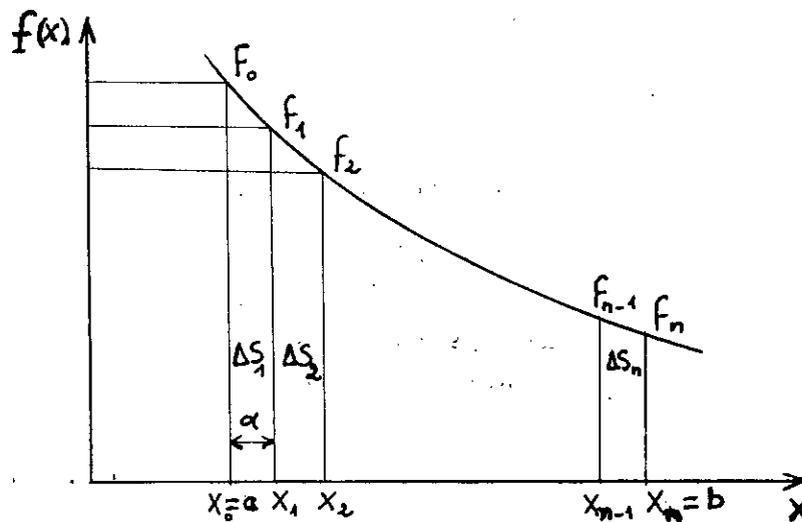


fig III.5

la méthode composite consiste à faire passer un polynôme dit de lagrange, par les valeurs de la fonction f(x_i) définies aux points x_i puis d'intégrer ce polynôme. L'intégration totale de la somme des éléments d'aire ΔS_i. On a :

$$\int_a^b f(x) dx = \alpha \sum_i \Delta S_i$$

α étant le pas entre deux points x_i et x_{i+1}.

Ainsi, en approchant la fonction $f(x)$ sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par un polynôme de degré 5, on aboutit à :

$$\frac{1}{\alpha} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n$$

Par suite, en discrétisant et en utilisant cette méthode, l'équation (III.3) devient :

$$Wx_1 = \sum_{i=2}^{m_s} \alpha \sin(\theta_i) \left[\beta \sum_{j=2}^{n-1} P(i, j) \right]$$

$$Wx_2 = - \sum_{i=2}^{m_s} \alpha \cos(\theta_i) \left[\beta \sum_{j=2}^{n-1} P(i, j) \right] - \frac{\alpha \beta}{2} \sum_{j=2}^n P(1, j)$$

avec α pas en x , β pas en z , $\theta_i = (i-1)\pi\alpha$, m_s valeur maximale de i correspondant à l'abscisse de rupture θ_s (ou x_s), n valeur maximale maximale de j .

La pression étant nulle sur les deux cotes latérales du palier, l'intégration du champ de pression se fait pour $j=2, n-1$.

III.3.2-LE DEBIT AXIAL :

On cherche à déterminer le débit sortant des deux faces latérales du palier. Ce débit trouve son importance dans le fait que sa valeur est la même que celle du débit alimentant le palier.

Vu la symétrie du mécanisme, les débits volumiques q_1 et q_2 sortants des deux faces du palier sont égaux. Ainsi, on ne détermine que le débit q_2 sortant de la face correspondant à l'abscisse $(z) = L/2$. En intégrant la composante W de la vitesse du fluide suivant la surface $(z) = L/2$, on obtient :

$$q_2 = \int_0^{2\pi R} \int_0^h W|_{z=L/2} dy dx$$

Le débit axial total q vaut donc, le double de q_2 et vu qu'il n'y a pas d'écoulement axial au delà de l'abscisse de rupture x_s , on a :

$$q = 2 \int_0^{x_s} \int_0^h W|_{z=L/2} dy dx$$

Ainsi, en utilisant la méthode composite d'intégration, on obtient :

$$q = 2\alpha \sum_{i=1}^{m_x} [\beta_1 \sum_{j=1}^n W(x_i, y_j, z=L/2)] \quad (\text{III.5})$$

α le pas suivant x , β_1 le pas suivant y fonction de x .

On définit un débit sans dimension \bar{q} , qui s'écrit :

$$\bar{q} = \frac{L}{\pi \omega CR^3} q$$

III.3.3-LE COUPLE DE FROTTEMENT :

On s'intéresse particulièrement au couple de frottement sur l'arbre, puisqu'il nous permet de déterminer la puissance dissipée par le palier.

L'état de contraintes de cisaillement permettant le calcul du couple de frottement sur l'arbre s'obtient à partir des équations (II.25). En remarquant que la somme des contraintes tangentielles τ_{yz} est nulle, en raison de la symétrie du contact et en tenant compte des conditions aux limites sur la vitesse du fluide

(III.2) il vient :

$$\tau_{xy}(y=0) = -\left(\frac{h}{2} \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{u}{h}\right)$$

Dans la partie active du film, c'est à dire jusqu'à l'abscisse $\theta = \theta_m$ où la répartition devient nulle, le couple résistant s'écrit :

$$C_{act} = \int \int_{\substack{\text{region} \\ \text{active}}} R \tau_{xy}(y=0) ds = -R \int_0^L \int_0^{\theta_m} \left[\frac{1}{2R} \frac{\partial P}{\partial \theta} h + \mu \frac{u}{h} \right] R d\theta dz$$

où $x = R\theta$

Il faut donc calculer deux intégrales :

$$I_1 = \int_0^L \int_0^{\theta_m} \frac{R}{2} \frac{\partial P}{\partial \theta} h d\theta dz$$

$$I_2 = \mu R^2 u \int_0^L \int_0^{\theta_m} \frac{1}{h} d\theta dz$$

où $h = c(1 + \epsilon \cos \theta)$

La première intégrale I_1 se calcule analytiquement par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{R}{2} \int_0^L \int_0^{\theta_m} \left(h \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) d\theta dz \\ &= \frac{R}{2} \int_0^L \left[(Ph) \Big|_0^{\theta_m} - \int_0^{\theta_m} P \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta \right] dz \end{aligned}$$

Comme $P=0$ aux frontières de la partie active, il vient :

$$I_1 = -\frac{R}{2} \int_0^L \int_0^{\theta_s} P \frac{\partial h}{\partial \theta} \alpha \theta dz$$

$$= \frac{c\epsilon R}{2} \int_0^L \int_0^{\theta_s} P \sin \theta \alpha \theta dz = \frac{c\epsilon Wx_1}{2}$$

$$\text{car } Wx_1 = R \int_0^L \int_0^{\theta_s} P \sin \theta \alpha \theta dz$$

La deuxième intégrale I_2 est immédiate à partir de [7]

$$I_2 = \frac{\mu R^2 u}{c} \int_0^L \int_0^{\theta_s} \frac{1}{1+\epsilon \cos \theta} \alpha \theta dz$$

$$I_2 = \frac{\mu R^2 u L}{c} \int_0^{\theta_s} \frac{\alpha \theta}{1+\epsilon \cos \theta}$$

$$I_2 = \frac{\mu R^2 u L}{c} \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \text{Arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \text{tg} \frac{\theta_s}{2} \right)$$

On a donc :

$$C_{act} = \left(\frac{2\mu R^2 u L}{c \sqrt{1-\epsilon^2}} \text{Arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \text{tg} \frac{\theta_s}{2} \right) + \frac{e}{2} Wx_1 \right)$$

Dans la partie inactive du film, la pression est nulle et par conséquent $\partial P / \partial \theta = 0$; toutefois, on ne peut pas considérer que la relation $\tau_{12} = \mu u / h$ car cela suppose le film est complet dans la partie inactive ce qui n'est vérifié expérimentalement que pour des pressions d'alimentation importantes. Dans cette portion de

l'écoulement le gradient de pression circonférentiel est nul; le débit est dû à la rotation de l'arbre. Vu qu'il n'y a pas d'écoulement axial, ce débit est supposé constant. On peut donc poser selon [8] :

$$uhL' = uh^*L$$

Où h^* est la hauteur du film d'huile au début de la zone inactive, et la longueur équivalente du coussinet $L' = L(h^*/h)$.

Le couple de frottement dans cette partie s'écrit :

$$C_{inact} = \int_0^{L'} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \mu U}{h} d\theta dz = \int_0^L \int_{\theta_s}^{2\pi} \frac{R^2 \mu u h^*}{h^2} d\theta dz$$

Dans l'expression de C_{inact} seul h dépend de θ . D'où on a :

$$C_{inact} = \mu R^2 u h^* L \int_{\theta_s}^{2\pi} \frac{1}{h^2} d\theta$$

Cette intégrale est immédiate à partir de [7] :

$$C_{inact} = \frac{\mu R^2 u h^* L}{c^2} \left(\frac{\varepsilon \sin \theta_s}{(\varepsilon^2 - 1)(1 + \varepsilon \cos \theta)} - \frac{2}{(\varepsilon^2 - 1)(\sqrt{1 - \varepsilon^2})} \operatorname{Arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\theta_s}{2} \right) \right)$$

Etant la somme de C_{act} et C_{inact} , le couple de frottement sur l'arbre s'écrit :

$$C_a = -\frac{2\mu R^2 u L}{c\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{Arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\theta_s}{2} \right) + \frac{\mu R^2 u h^* L}{c^2} \left(\frac{\varepsilon \sin \theta_s}{(\varepsilon^2 - 1)(1 + \varepsilon \cos \theta_s)} - \frac{2}{(\varepsilon^2 - 1)\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{Arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\theta_s}{2} \right) \right) - \frac{\varepsilon}{2} W X_1 \quad (III.6)$$

III.4-CONDITIONS AUX LIMITES SUR LA TEMPERATURE :

III.4.1-LES DIFFERENTS MODES DE TRANSFERT DE CHALEUR :

Dans un palier, il y a production de chaleur à l'intérieur du film par dissipation visqueuse. Le problème qui se pose alors est de savoir comment cette chaleur est évacuée du palier. On distingue trois modes de transfert de chaleur :

- la conduction,
- la convection,
- le rayonnement.

Une combinaison de ces trois modes de transfert peut avoir lieu simultanément sur les différents interfaces rencontrés dans le palier.

-la conduction obéit à la loi de fourrier, elle exprime le flux de chaleur q_{1n1} qui traverse un élément de surface unité sous la forme :

$$q_{1n1} = -K \cdot T_{,1} n_1 \quad (\text{III.7})$$

-le rayonnement obéit à la loi de STEFAN-BOLTZMANN, le flux de chaleur émis par une surface d'aire unité s'écrit :

$$q_{1n1} = \epsilon_1 \sigma T^4$$

où T représente la température absolue de la surface rayonnante, ϵ_1 le facteur d'émission et σ la constante de STEFAN-BOLTZMANN ($\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ w/m}^2 \cdot \text{°K}^4$).

Si l'on considère une masse gazeuse à une température T_2 qui échange de la chaleur avec une paroi plane rayonnante à température T_1 , on peut écrire le flux de chaleur sous la forme :

$$q_1 n_1 = h_r (T_1 - T_2) = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \quad (\text{III.8})$$

h_r est le coefficient d'échange par rayonnement et s'exprime en $\text{w/m}^2 \cdot \text{k}$. Il dépend fortement de T_1 et T_2 . *Le gaz est transparent.*

-La convection est un mode de transfert d'énergie qui correspond à l'action combinée de la conduction et du mouvement du fluide. Ce mécanisme a lieu à l'intérieur d'une couche limite thermique et son étude est très délicate. Cependant on peut approcher la quantité de chaleur évacuée par convection à l'aide de la loi de NEWTON qui s'exprime sous la forme :

$$q_1 n_1 = h_c (T_1 - T_2) \quad (\text{III.9})$$

h_c le coefficient de convection, qui Varie avec :

- la vitesse V du fluide,
- sa masse volumique ρ ,
- sa chaleur massique C_p ,
- son coefficient de conductibilité K ,
- la viscosité cinématique ν .

On a l'habitude de regrouper les lois de rayonnement thermique et de convection. Ainsi, étant donné une paroi de température de surface T_1 , de facteur total d'émission ϵ_1 en contact avec un fluide de température T_2 de facteur d'émission ϵ_2 , h_c et h_r étant les coefficients d'échange superficiels par convection et rayonnement, on peut écrire pour le flux de chaleur :

$$q_1 n_1 = h_r (T_1 - T_2) + h_c (T_1 - T_2) = (h_r + h_c) (T_1 - T_2) = h (T_1 - T_2)$$

h étant le coefficient global d'échange superficiel, il est essentiellement fonction de la vitesse du fluide et des températures T_1 et T_2 .

Les différentes frontières à considérer lors des échanges thermiques entre les différents éléments constituant le palier lisse sont représentées sur la figure (III.6) .

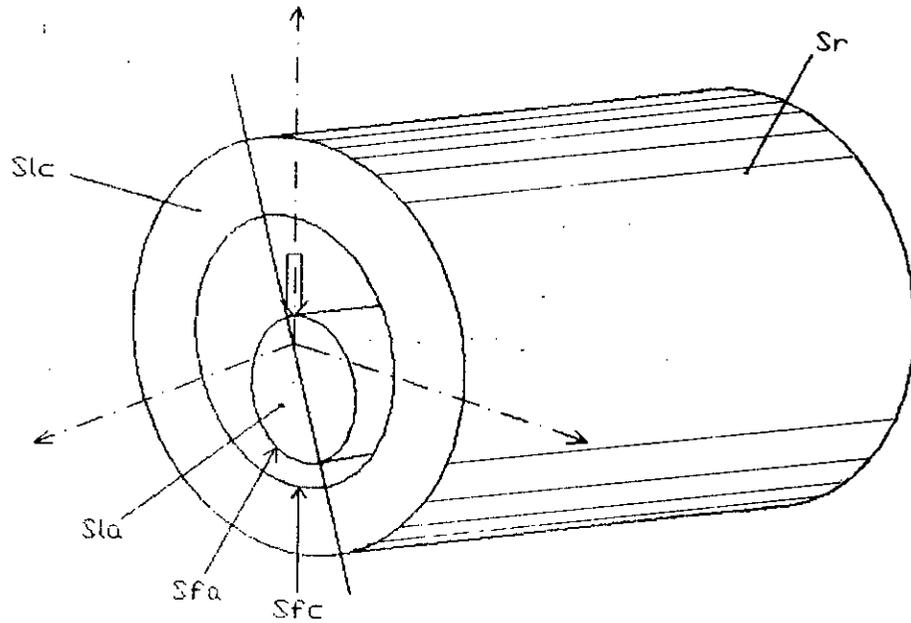


fig III.6 : différentes surfaces du palier

III.4.2-SURFACES EXTERNES DU PALIER :

Sur les surfaces externes du coussinet S_r S_{le} (fig III.6) trois types de conditions aux limites ont été envisagées :

a) la surface est à température fixée T_f .

sur S_r :

$$T|_{r=R_{ext}} = T_f$$

sur S_{le} :

$$T|_{z=L/2} = T_f$$

C'est le cas idéal qui suppose la température connue et maintenue constante par un élément extérieur au palier .

b) il y a convection et rayonnement sur ces deux surfaces.
sur S_r on peut écrire :

$$K_c \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_{ext}} = -h(T|_{r=R_{ext}} - T_a)$$

où encore :

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_{ext}} = -\frac{h}{K_c} (T|_{r=R_{ext}} - T_a)$$

Dans ces relations :

h : le coefficient globale d'échange considéré constant .

K_c : le coefficient de conduction du coussinet .

R_{ext} : le rayon externe du coussinet .

L_c : la longueur du coussinet .

T_a : la température ambiante .

T : la température de la paroi .

T_f : la température fixée .

De même sur S_{ic} on écrira :

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\pm L_c/2} = -\frac{h}{K_c} (T|_{z=\pm L_c/2} - T_a)$$

c) les surfaces S_{ic} et S_r peuvent être isolées; c'est le cas limite de b) lorsque $h \rightarrow 0$. Et on a par conséquent :

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

où n est la normale à la paroi : c'est la condition de type adiabatique .

III.4.3-INTERFACE FILM-COUSSINET OU FILM-ARBRE :

Les interfaces S_{fc} et S_{fa} entre le film et le coussinet ou le film et l'arbre sont baignés par le film lubrifiant : totalement dans la zone active du film et en partie seulement dans la zone inactive. Sur ces deux interfaces notre modélisation nous permet de tenir compte de trois types de conditions aux limites :

a) Sur S_{fc} ou S_{fa} la température est imposée à une valeur T_1

$$T|_{x=R_1} = T_1$$

ou

$$T|_{x=R_2} = T_1$$

De telles conditions aux limites éliminent par conséquent la participation des solides dans le bilan thermique global. Elles se justifient difficilement d'un point de vue physique.

b) sur S_{fc} ou S_{fa} le gradient de température est nul.

sur S_{fa} :

$$\frac{\partial T}{\partial y}|_{y=0} = 0$$

sur S_{fc} :

$$\frac{\partial T}{\partial y}|_{y=h} = 0$$

Ce sont des conditions aux limites de type adiabatiques. Elles excluent aussi les solides.

c) Sur S_{fc} et S_{fa} il y a continuité du champ de température. Le type d'élément choisi (approximation de lagrange) permet une identification nodale du champ thermique entre le fluide et les massifs en présence.

III.4.4-EXTREMITES DE L'ARBRE :

Les trois types de conditions aux limites énoncées en (III.7.2) peuvent être utilisées. Par conséquent on peut écrire :
température connue

$$T|_{s_{1a}} = T_1$$

condition adiabatique

$$\frac{\partial T}{\partial n}|_{s_{1a}} = 0$$

condition d'échange avec l'extérieur

$$\frac{\partial T}{\partial z}|_{z=L/2} = -\frac{h_a}{K_a} (T|_{z=L/2} - T_a)$$

Dans cette relation :

- K_a : le coefficient de conduction de l'arbre .
- h_a : le coefficient d'échange considéré constant .
- L_a : la longueur de l'arbre .
- T_a : la température ambiante .
- T : la température de la paroi .
- T_1 : la température connue .

III.4.5-FORME PARTICULIERE DE L'EQUATION DE L'ENERGIE DANS LA ZONE DE RUPTURE DU FILM :

Dans la zone divergente du film de la plupart du palier, il existe un domaine où le film lubrifiant n'est pas complet. Ceci se traduit dans cette partie du palier par une pression et un

gradient normal de pression nuls .

Nous supposons que dans la région inactive, le film est complet et la pression nulle .L'équation de l'énergie s'écrit donc :

$$\rho c_p (u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}) + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \mu (\frac{\partial u}{\partial y})^2 = 0$$

Cette hypothèse permet de traiter de la même façon la région inactive et la région active .

CHAPITRE IV

APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
A LA LUBRIFICATION THERMOHYDRODYNAMIQUE

IV.1-INTRODUCTION :

Si le cas de la lubrification en régime isotherme a été largement traité au moyen de la méthode des éléments finis (ARGYRIS et SCHARPF, REDDI et CHU, WADA et AL, ALLAN REINHOUDRT, BOOKER et HURBNER et NILSSON), peu de travaux relatifs au régime thermohydrodynamique ont été publiés à ce jour. Deux auteurs TIEU et HUEBNER ont contribué à la maîtrise de cette technique de calcul dans son application au régime de lubrification thermohydrodynamique. Ainsi, muni de l'équation REYNOLDS généralisée, de l'équation de l'énergie dans le film et de l'équation de la chaleur dans les massifs, nous sommes en mesure d'étudier le comportement thermohydrodynamique d'un contact lubrifié. Ces équations aux dérivées partielles n'admettant pas de solutions analytiques, nous sommes amenés à appliquer la méthode numérique de type éléments finis pour résoudre ce problème.

IV.2-SYNTHESE DES PRINCIPES VARIATIONNELS :

IV.2.1-INTRODUCTION

La méthode des éléments finis discrétise une formulation intégrale (ou variationnelle) des équations de comportements des systèmes physiques pour conduire à un système d'équations algébrique qui fournit une solution approchée du problème. Cette formulation intégrale est obtenue par l'utilisation de la méthode des résidus pondérés, et selon le choix des fonctions de pondération tout un ensemble de formulations intégrales est obtenue :

-formulation de type GALERKINE, ou de ritz si l'on utilise la notion de fonctionnelle. Celle-ci est la plus utilisée,

- formulation de type collocation par points ou par sous-domaines,
- formulation de type moindres carrés,
- formulation de type équations intégrales de contour .

La notion de fonctionnelle est souvent utilisée pour construire directement une formulation intégrale en utilisant le principe de stationnarité de la fonctionnelle, cette méthode n'est qu'un cas particulier de la méthode des résidus pondérés .

IV.2.2-METHODE DES RESIDUS PONDERES :

Soit un système physique continue stationnaire dont le comportement est représenté par un système d'équations aux dérivées partielles, linéaire ou non linéaire d'ordre m :

$$\mathcal{L}(u) + f_v = 0 \quad \text{sur le domaine } V \quad (\text{IV.1})$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$C(u) = f_s \quad \text{sur la frontière } S \quad (\text{IV.2})$$

où \mathcal{L} et C sont des opérateurs différentiels indépendants de u .
 f_v et f_s sont des fonctions connues dites sollicitations .
 Nous appelons résidus la quantité $R(u)$ définis par :

$$R(u) = \mathcal{L}(u) + f_v \quad (\text{IV.3})$$

Des fonctions u sont une solution du problème si il satisfont à la fois à (IV.1) et (IV.2), dans ce cas $R(u)$ est nul .

La méthode des résidus pondérés consiste a rechercher des fonctions u qui annulent la forme intégrale :

$$W(u) = \int_V \langle \psi \rangle \{R(u)\} dv = \int_V \langle \psi \rangle \{g(u) + f\} dv = 0 \quad (\text{IV.4})$$

Toute solution u qui vérifie (IV.1) et (IV.2) vérifie également (IV.4) quel que soit le choix de la fonction de pondération Ψ . Par contre la solution u de (IV.4) dépend du choix de Ψ .

IV.2.2.1-FORME INTEGRALE FAIBLE :

L'intégration par parties de (IV.4) fournit des formes intégrales dites faibles qui présentent les avantages suivants :

-l'ordre maximum des dérivées de u qui apparaissent dans la forme intégrale diminue. Les conditions de dérivabilité de u sont donc moins fortes ;

-certaines des conditions aux limites qui apparaissent dans la forme faible peuvent être prises en compte dans la formulation intégrale, au lieu d'être satisfaites identiquement par u .

IV.3-APPLICATION DE LA M.E.F A L'EQUATION DE REYNOLDS :

Pour un fluide incompressible, dans le cadre de la lubrification thermohydrodynamique, il existe une fonctionnelle associée au problème qui s'écrit selon [9] :

$$J(p) = \int_D (-G \nabla p \cdot \nabla p + 2(h\vec{u}_1 + F(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)) \cdot \nabla p + 2p \frac{\partial h}{\partial t}) dv + 2 \int_{\Gamma_q} p \cdot \vec{q} \cdot \vec{n} dl \quad (\text{IV.5})$$

où ∇ représente l'opérateur gradient, \vec{u}_1 le vecteur vitesse relatif à la surface i , (u_1, w_1) ses composantes dans les directions x, z , D le domaine de résolution dont la frontière Γ qui se décompose en deux parties :

- Γ_p où la pression est connue,
- Γ_q où le débit est imposé.

\vec{n} étant la normale unitaire à Γ_a et \vec{q} le débit normal à la frontière Γ_a .

Cette fonctionnelle est obtenue par l'application du théorème d'Helmoltz et Korteweg [9] et elle s'écrit (Annexe B) :

$$\begin{aligned}
 J(p) = \int_A \left\{ -G \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 - G \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 + 2hu_1 \frac{\partial P}{\partial x} + 2hw_1 \frac{\partial P}{\partial z} + \right. \\
 \left. + 2F(u_2 - u_1) \frac{\partial P}{\partial x} + 2F(w_2 - w_1) \frac{\partial P}{\partial z} + 2P \frac{\partial h}{\partial t} \right\} dv - \quad (\text{IV.6}) \\
 - 2 \int_{\Gamma_2} q p dl
 \end{aligned}$$

où $A = D - \Gamma$

et Γ_2 : la frontière où le champ de vitesse est connue.

IV.3.1-STATIONNARITE DE $J(p)$:

En régime hydrodynamique établie laminaire, lorsque seule la surface inférieure est animée d'une vitesse de translation u (fig IV.1), la fonctionnelle $J(p)$ se réduit à la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 J(p) = \int_A \left\{ -G \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 - G \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 + 2hu \frac{\partial P}{\partial x} - 2Fu \frac{\partial P}{\partial x} \right\} dA - \\
 - 2 \int_{\Gamma_2} q p dl \quad (\text{IV.7})
 \end{aligned}$$

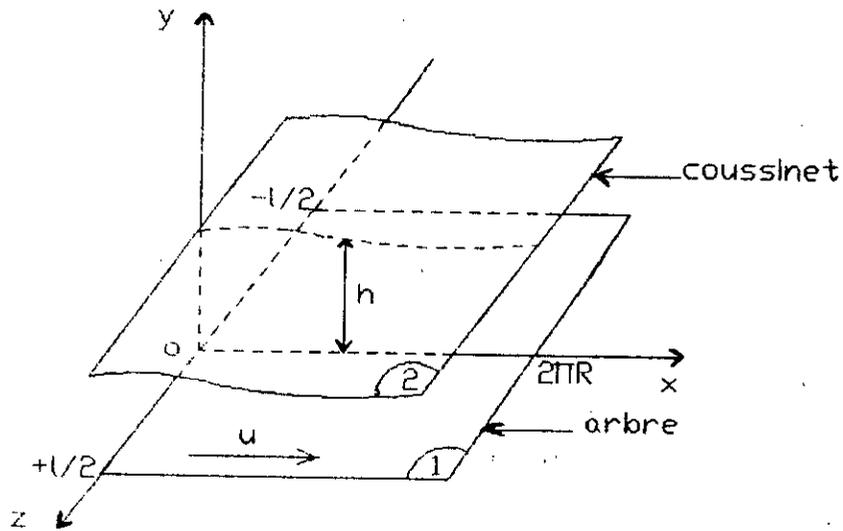


fig IV.1 : système d'axes

J est une fonction de P, P_x, P_z avec

$$P=P, P_x=\partial P/\partial x, P_z=\partial P/\partial z$$

La première variation de J est définie par :

$$\delta J(P, P_x, P_z) = \frac{\partial J}{\partial P} \delta P + \frac{\partial J}{\partial P_x} \delta (P_x) + \frac{\partial J}{\partial P_z} \delta (P_z) + \dots$$

où $\delta P, \delta P_x$ et δP_z sont les variations quelconques de P, P_x et P_z .

$\frac{\partial J}{\partial P}, \frac{\partial J}{\partial P_x}$ et $\frac{\partial J}{\partial P_z}$ sont obtenus par dérivation formelle de J par rapport P, P_x et P_z . On a :

$$\frac{\partial J}{\partial P} = -2 \int_{\Gamma_2} q \, dl$$

$$\frac{\partial J}{\partial P_x} = \int_A (-2G \frac{\partial P}{\partial x} + 2hu - 2Fu) \, dA$$

$$\frac{\partial J}{\partial P_z} = \int_A (-2G \frac{\partial P}{\partial z}) \, dA$$

L'expression de la variation de J s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \delta J(P, P_x, P_z) = \int_A \left(-2G \frac{\partial P}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) + 2u(h-f) \delta \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right. \\ \left. - 2G \frac{\partial P}{\partial z} \delta \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \right) dA - 2 \int_{\Gamma_2} q \, \delta p \, dl \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

$J(p)$ devant être stationnaire [10], $\delta J(P, P_x, P_z) = 0$.
 $\delta J(P, P_x, P_z)$ représente également la forme intégrale faible $W(p)$, dite de type Galerkin, de l'équation de Reynolds généralisée appliquée à notre cas. Lorsque le contour est constitué de segments Γ_1 , parallèles à l'axe z et Γ_2 parallèles à l'axe x , le dernier terme de l'équation (IV.8) peut s'écrire :

$$\int_{\Gamma_2} q \, \delta P \, dl = \int_{\Gamma_1'} Q_x \delta P \, dz + \int_{\Gamma_2'} Q_x \delta P \, dx$$

tel que :

$$Q_x = \int_0^h u \, dy = -G \frac{\partial P}{\partial x} + u(h-f)$$

$$Q_z = \int_0^h w \, dy = -G \frac{\partial P}{\partial z}$$

d'où l'expression (IV.8) peut être formulée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} W(p) = & \int_A \left(-G \frac{\partial P}{\partial x} - u(h-f) \right) \frac{\partial}{\partial x} (\delta P) \, dx dz + \\ & + \int_A \left(-G \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\delta P) \right) \, dx dz + \end{aligned} \quad (IV.9)$$

$$+ \int_{\Gamma_1'} \left(G \frac{\partial p}{\partial x} - u(h-f) \right) \delta p \, dz + \int_{\Gamma_2'} G \frac{\partial P}{\partial z} \delta P \, dx$$

IV.3.2-DISCRETISATION DE LA FORME INTEGRALE :

L'expression (IV.9) représente le comportement d'un système physique continu n'admettant pas de solutions directes, il est nécessaire pour obtenir une solution approchée du problème de discrétiser le domaine ainsi que la fonction pression .

IV.3.2.1-PRINCIPE DE DISCRETISATION :

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation nodale par sous domaines .Elle consiste tout d'abord à identifier le domaine D à un ensemble de sous-domaines ou éléments v^e .Dans chaque élément, on effectue une approximation nodale qui ne fait intervenir que les noeuds situés dans v^e ou sur la frontière de v^e .

Les fonctions approchées $P^e(x,z)$ sur chaque élément v^e sont construites de manière à être continues sur v^e et entre les différents éléments .On désigne donc par :

- élément : sous-domaine v^e ,
- points nodaux : les points, pour lesquels la fonction approchée coïncide avec la fonction exacte,
- coordonnées nodales : les coordonnées des noeuds : x_1, y_1, z_1 ,
- variables nodales : les valeurs $P_i = P^e(x_1, y_1, z_1)$

IV.3.2.2-DISCRETISATION DE W :

Il est nécessaire pour opérer sur un élément de remplacer la forme intégrale globale W (IV.9) par une somme de formes intégrales W^e dites élémentaires. Ceci est le principe de base de la méthode des éléments finis.

Soit NELT le nombre total d'éléments du domaine, on peut écrire :

$$W(P) = \sum_{e=1}^{NELT} W^e(P^e) = 0 \quad (IV.10)$$

avec

$$\begin{aligned} W^e(P^e) = & \int_{v^e} \left(-G \frac{\partial P^e}{\partial x} - u(h-f) \right) \frac{\partial}{\partial x} (\delta P^e) \, dx dz + \\ & + \int_{v^e} \left(-G \frac{\partial P^e}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z} (\delta P^e) \, dx dz + \\ & + \int_{(\Gamma_1^e)} \left(G \frac{\partial P^e}{\partial x} - u(h-f) \right) \delta P^e \, dz + \int_{(\Gamma_2^e)} G \frac{\partial P^e}{\partial z} \delta P^e \, dx \end{aligned} \quad (IV.11)$$

Si l'élément n'est pas adjacent à une alvéole, les deux intégrales curvilignes sont nulles. nous poserons :

$$\begin{aligned} P^e &= \langle N \rangle \{P_n^e\} \\ \delta P^e &= \langle N \rangle \{\delta P_n^e\} \end{aligned} \quad (IV.12)$$

où $\langle N \rangle$ représente l'ensemble des fonctions de forme permettant l'approximation de la fonction P sur l'élément .

$W^e(P^e)$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 W^e(P^e) = & -\langle \delta P_1^e \dots \delta P_n^e \rangle \int_{v^e} \left(G \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle + G \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial z} \right\rangle \right) dx dz \begin{Bmatrix} P_1^e \\ \vdots \\ P_n^e \end{Bmatrix} \\
 & + \langle \delta P_1^e \dots \delta P_n^e \rangle \int_{v^e} u(h-f) \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} dx dz + \\
 & + \langle \delta P_1^e \dots \delta P_n^e \rangle \int_{(\Gamma_1^e)} \left(G \frac{\partial P^e}{\partial x} - u(h-f) \right) \{N\} dz + \\
 & + \langle \delta P_1^e \dots \delta P_n^e \rangle \int_{(\Gamma_2^e)} G \frac{\partial P^e}{\partial z} \{N\} dx
 \end{aligned} \tag{IV.13}$$

Cette expression est valable quelle que soit la variation virtuelle δP_1 . La relation (IV.13) permet d'aboutir à :

$$W^e(P^e) = [K] \{P_n^e\} + \{f_v^e\} + \{f_s^e\} \tag{IV.14}$$

avec

$$K_{ij} = \int_{v^e} \left(-G \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + G \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dx dz \tag{IV.15}$$

terme (i,j) de la matrice fluidité élémentaire $[K]$ équivalent à un débit dû à l'écoulement de poiseuille sur l'élément ,

$$f_{vi}^e = \int_{v^e} u(h-f) \frac{\partial N_i}{\partial x} dx dz \tag{IV.16}$$

composante i du vecteur sollicitation de volume équivalent à un débit dû à l'écoulement de couette sur l'élément ,

$$f_{si}^e = \int_{(\Gamma_1)^e} (G \frac{\partial P^e}{\partial x} - u(h-f)) N_i dz + \int_{(\Gamma_2)^e} G \frac{\partial P^e}{\partial z} N_i dx \quad (IV.17)$$

composante i du vecteur sollicitation de surface équivalent au débit imposé à la frontière de l'élément .

La forme intégrale globale se construit par addition des formes élémentaires :

$$W(P) = \sum_{e=1}^{NELT} W^e(P^e) = \sum_e [K] \{P_n^e\} + \{f_v^e\} + \{f_s^e\} = 0 \quad (IV.18)$$

Cette somme est organisée sous la forme matricielle suivante :

$$W(P) = [K] \{P_n\} + \{f_v\} + \{f_s\} = 0 \quad (IV.19)$$

avec :

[K]: matrice fluidité globale équivalente au débit sur le domaine D dû à l'écoulement de poiseuille .

[f_v]: débit global dû à l'écoulement de couette sur le domaine .

[f_s]: représente le débit qui sort de toutes les alvéoles (c.a.d le débit qui sort du palier) .

La résolution de l'équation de Reynolds par éléments finis sur le domaine D revient à écrire la conservation du débit sur ce domaine .

Le passage de (IV.18) à (IV.19) se fait par l'assemblage des éléments .

IV.3.2.3-ELEMENT D'APPROXIMATION DE LA FONCTION P :

L'équation (IV.19) devant être résolue simultanément avec l'équation de l'énergie, la connaissance du champ de vitesse donc la valeur des gradients de pression en chaque noeud est intéressante, donc le choix de l'élément de base doit permettre de faire apparaître comme inconnues nodales la pression ainsi que ses dérivées dans les deux directions .

L'élément d'approximation de la fonction P que nous avons choisi, est l'élément cubique de type Hermite (fig IV.2) (quadrilatère, 4 noeuds, semi-C¹) (annexe C) .

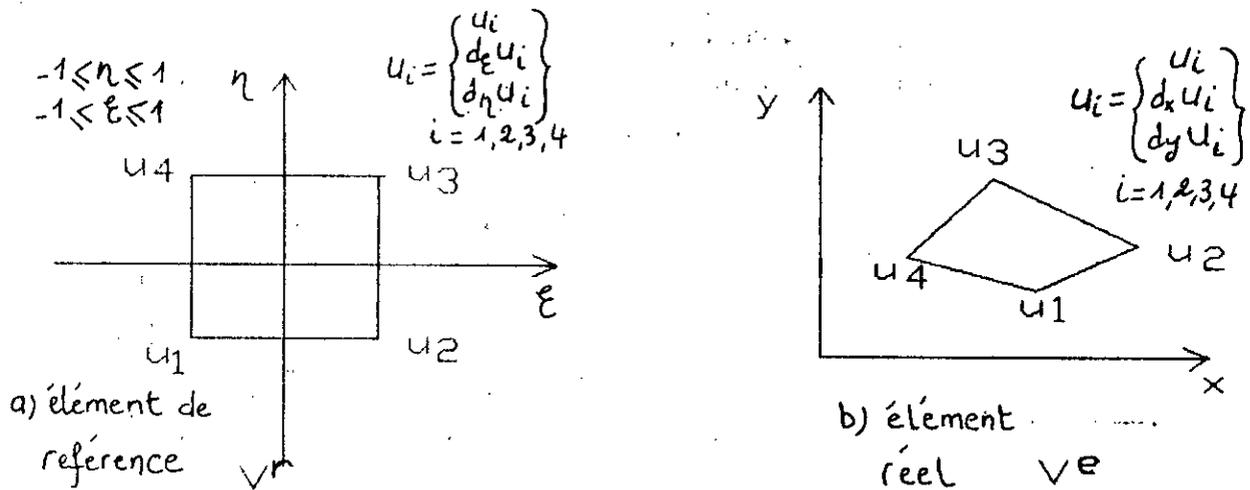
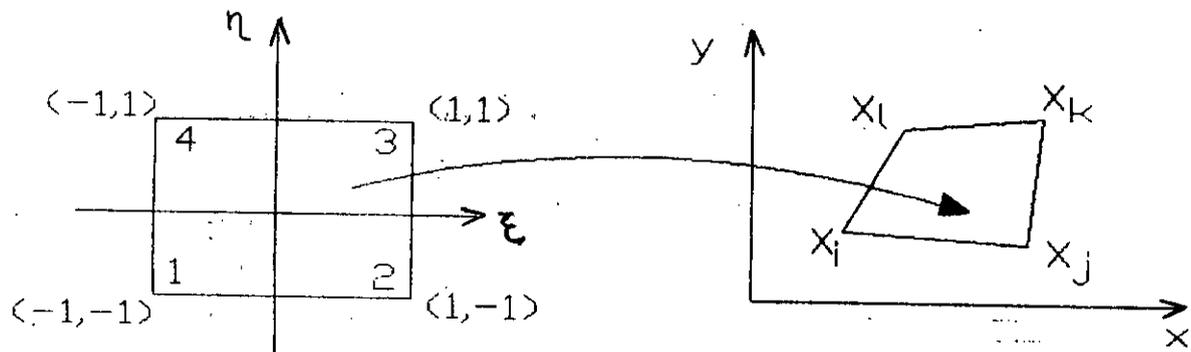


fig IV.2 :Elément d'approximation de la fonction P

L'approximation nodale fait ainsi apparaître douze fonctions de forme N_i (annexe D) .

IV.3.2.4-ELEMENT D'APPROXIMATION GEOMETRIQUE :

Nous avons choisi pour l'approximation géométrique du problème un élément de lagrange à quatre noeuds (fig IV.3) (annexe D) .



a) élément parent

b) élément réel

fig IV.3 : Elément d'approximation géométrique

Les noeuds géométriques sont au points choisis à priori dans et sur le bord du domaine. Ils sont en coïncidence avec les noeuds d'interpolation et définissent ainsi les éléments constitutifs de D , c'est-à-dire les éléments finis. Chaque élément est défini de manière analytique unique par ses noeuds géométriques.

IV.4-APPLICATION DE LA M.E.F A L'EQUATION DE L'ENERGIE DANS LE FILM :

La répartition de température dans le film fluide est obtenue par la résolution de l'équation de l'énergie (II.33). L'opérateur n'étant pas auto-adjoint, il n'existe pas de fonctionnelle associée à l'équation de l'énergie. Pour construire une équation intégrale nous utilisons la méthode des résidus pondérés et plus particulièrement celle de Galerkin.

IV.4.1-METHODE DE GALERKINE :

Considérons la quantité $R(T)$ définie par :

$$R(T) = \rho C_p \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.20})$$

La methode des résidus pondérés consiste à rechercher les fonctions T qui annulent la forme intégrale définie sur un domaine de résolution :

$$W(T) = \int_D \langle \Psi \rangle \{ R(T) \} dv \quad (IV.21)$$

Les différents choix possibles des fonctions de pondération Ψ définissent des méthodes de résolution distinctes. La methode de Galerkin consiste à prendre comme fonction Ψ l'ensemble des variations δT de T .

L'équation (IV.21) devient :

$$W(T) = \int_D \langle \delta T \rangle \left\{ \rho C_p \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy dz \quad (IV.22)$$

Ces fonctions T doivent être dérivables deux fois et satisfaire les conditions aux limites du problème définie sur le domaine D . Afin de diminuer l'ordre de dérivabilité des fonctions T , on construit la forme intégrale faible de (IV.22).

IV.4.2-FORMULATION FAIBLE :

La forme faible de (IV.22) est obtenue en intégrant par parties le terme de conduction. On obtient ainsi :

$$W(T) = \int_{(D-T)} \left\{ \rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} \delta T + v \frac{\partial T}{\partial y} \delta T + w \frac{\partial T}{\partial z} \delta T \right) + K \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial \delta T}{\partial y} - \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \delta T \right\} dx dy dz + \int_{\Gamma} K \frac{\partial T}{\partial y} \delta T dx dz \quad (IV.23)$$

Γ^* représente une partie du contour Γ du domaine A .
Le terme du contour est nul si la température est imposée ou si l'hypothèse d'adiabaticité est faite.

IV.4.3-DISCRETISATION DE LA FORME INTEGRALE :

La forme intégrale totale $W(T)$ est remplacée par une somme de formes intégrales élémentaire. En appelant $NELT1$ le nombre total d'éléments dans le film, on peut écrire :

$$W(T) = \sum_{e=1}^{NELT1} W^e(T^e) = 0 \quad (IV.24)$$

avec

$$\begin{aligned} W^e(T) = \int_{\text{élément}} & \left(\rho c_p (u^e \frac{\partial T^e}{\partial x} \delta T^e + v^e \frac{\partial T^e}{\partial y} \delta T^e + w^e \frac{\partial T^e}{\partial z} \delta T^e) \right. \\ & + K \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial \delta T^e}{\partial y} - \mu \left[\left(\frac{\partial u^e}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^e}{\partial y} \right)^2 \right] \delta T^e \Big) dx dy dz \quad (IV.25) \\ & + \int_{\Gamma^*} K \frac{\partial T^e}{\partial y} \delta T^e dx dz \end{aligned}$$

Il est à remarquer que les intégrales curvilignes sont nulles si l'élément considéré n'est pas adjacent au contour.

Si l'on pose :

$$T^e = \langle N^* \rangle \{ T_n^e \}$$

$$\delta T^e = \langle N^* \rangle \{ \delta T_n^e \}$$

$$u^e = \langle N^* \rangle \{ u_n^e \}$$

$$v^e = \langle N^* \rangle \{ v_n^e \}$$

$$w^e = \langle N^* \rangle \{ w_n^e \}$$

(IV.26)

Où $\langle N^* \rangle$ sont les fonctions de forme utilisées à la fois pour l'approximation du champ de température et du champ de vitesse. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
 W^o(T) = & \langle \delta T_1^o \dots \delta T_n^o \rangle \int_{\text{élément}} \{ \rho C_p \langle N^* \rangle \{ u_n^o \} \left\{ \frac{\partial N^*}{\partial x} \right\} \langle N^* \rangle + \\
 & + \langle N^* \rangle \{ v_n^o \} \left\{ \frac{\partial N^*}{\partial y} \right\} \langle N^* \rangle + \langle N^* \rangle \{ w_n^o \} \left\{ \frac{\partial N^*}{\partial z} \right\} \langle N^* \rangle + \\
 & + K \left\langle \frac{\partial N^*}{\partial y} \right\rangle \left\{ \frac{\partial N^*}{\partial y} \right\} - \mu \langle N^* \rangle [\left\langle \frac{\partial N^*}{\partial y} \right\rangle \{ u_n^o \}^2 + \left\langle \frac{\partial N^*}{\partial y} \right\rangle \{ w_n^o \}^2] dx dy dz \left. \begin{array}{c} T_1^o \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_n^o \end{array} \right\} \\
 & + \langle \delta T_1^o \dots \delta T_n^o \rangle \int_{\Gamma_s} K \left\langle \frac{\partial N^*}{\partial y} \right\rangle dx dz \left. \begin{array}{c} T_1^o \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_n^o \end{array} \right\} \quad (IV.27)
 \end{aligned}$$

Cette expression est valable pour toutes les variations virtuelles δT_i . L'équation (IV.27) donne :

$$W^o(T^o) = [K] \{T_n^o\} + \{F_v^o\} + \{F_s^o\} \quad (IV.28)$$

avec

$$\begin{aligned}
 (K_{ij}) = & \int_{\text{élément}} \{ \rho C_p \langle N^* \rangle \{ u_n^o \} \frac{\partial N_i^*}{\partial x} N_j^* + \langle N^* \rangle \{ v_n^o \} \frac{\partial N_i^*}{\partial y} N_j^* + \\
 & + \langle N^* \rangle \{ w_n^o \} \frac{\partial N_i^*}{\partial z} N_j^* \} + K \frac{\partial N_i^*}{\partial y} \frac{\partial N_j^*}{\partial y} \} dx dy dz \quad (IV.29)
 \end{aligned}$$

terme (i,j) de la matrice thermique du fluide qui représente l'énergie transmise par transport dû au déplacement du fluide et par convection.

$$(f_{vi})^e = - \int_{\text{élément}} \mu [\langle \frac{\partial N^*}{\partial y} \rangle (u_n^e)^2 + \langle \frac{\partial N^*}{\partial y} \rangle (w_n^e)^2] N_1^* dx dy dz \quad (IV.30)$$

Composante i du vecteur sollicitation de volume équivalente à une énergie de dissipation visqueuse .

$$(f_{si})^e = \int_{\Gamma^*} K \frac{\partial N_i^*}{\partial y} dx dz \quad (IV.31)$$

Composante i du vecteur sollicitation de surface équivalente à un flux de chaleur .

Le calcul de l'expression (IV.29) impose la connaissance du champ de vitesse dans le film . Les composantes u^e , v^e et w^e de la vitesse sont données par la relation (II.23) . Les calculs de u et w ne présentent pas de problèmes, vu que les gradients de pression suivant x et z sont connus . Par contre, le calcul de la vitesse v du fluide dans la direction de l'épaisseur du film à l'aide de la relation suivante est plus délicat :

$$v^e = - \int_0^y \left(\frac{\partial u^e}{\partial x} + \frac{\partial w^e}{\partial z} \right) dy$$

Le calcul de cette quantité se fait numériquement en utilisant la méthode composite suivant la formule :

$$v^e(x, y_m, z) = \sum_{l=1}^n \gamma \left[\frac{\partial u_l^e}{\partial x}(x, y_l, z) + \frac{\partial w_l^e}{\partial z}(x, y_l, z) \right]$$

γ le pas suivant y . En utilisant l'approximation (IV.26) on a :

$$\frac{\partial u^e}{\partial x} = \left\langle \frac{\partial N^e}{\partial x} \right\rangle \{u_n^e\}$$

$$\frac{\partial w^e}{\partial z} = \left\langle \frac{\partial N^e}{\partial z} \right\rangle \{w_n^e\}$$

On obtient pour une position donnée (x, y_1, z) :

$$\frac{\partial u_i^e}{\partial x} = \frac{\partial N_i^e}{\partial x} u_i^e$$

$$\frac{\partial w_i^e}{\partial z} = \frac{\partial N_i^e}{\partial z} w_i^e$$

IV.5-APPLICATION DE LA M.E.F A L'EQUATION DE LA CHALEUR DANS LES MASSIFS :

La modélisation par élément finis de l'équation de la chaleur dans le massif nécessite la même démarche que celle utilisée pour l'équation de l'énergie dans le film .

La méthode de Galerkin appliquée à (II.37) conduit à la forme intégrale suivante :

$$W(T) = \int_V \delta T \left\{ k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \rho C_v \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right\} dv \quad (IV.32)$$

La forme faible de (IV.32) est obtenue par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 W(T) = & \int_V -K \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \delta T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \delta T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \delta T}{\partial z} \right) dx dy dz \\
 & - \int_V \rho C_v \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) \delta T dx dy dz \\
 & + \int_{\Gamma_1} K \frac{\partial T}{\partial x} \delta T dy dz + \int_{\Gamma_2} K \frac{\partial T}{\partial y} \delta T dx dz \\
 & + \int_{\Gamma_3} K \frac{\partial T}{\partial z} \delta T dx dy
 \end{aligned}
 \tag{IV.33}$$

($\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$) représente le contour total du massif. Ces intégrales sont nulles si la température est imposée ou si le flux de chaleur est identiquement nul sur le contour.

IV.5.1-DISCRETISATION DE LA FORME INTEGRALE :

Le même principe de discrétisation de l'équation de l'énergie est adopté pour l'équation de la chaleur. En appelant NELT2 le nombre total d'éléments dans le massif, on peut écrire :

$$W(T) = \sum_{e=1}^{NELT2} W^e(T^e) = 0 \tag{IV.34}$$

avec

$$\begin{aligned}
 W^e(T^e) = & \int_{\text{élément}} -K \left(\frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial \delta T^e}{\partial x} + \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial \delta T^e}{\partial y} + \frac{\partial T^e}{\partial z} \frac{\partial \delta T^e}{\partial z} \right) dx dy dz \\
 & - \int_{\text{élément}} \rho C_v \left(u \frac{\partial T^e}{\partial x} + v \frac{\partial T^e}{\partial y} + w \frac{\partial T^e}{\partial z} \right) \delta T^e dx dy dz \tag{IV.35} \\
 & + \int_{\Gamma_1^e} K \frac{\partial T^e}{\partial x} \delta T^e dy dz + \int_{\Gamma_2^e} K \frac{\partial T^e}{\partial y} \delta T^e dx dy + \int_{\Gamma_3^e} K \frac{\partial T^e}{\partial z} \delta T^e dx dy
 \end{aligned}$$

Il est à remarquer que les intégrales curvilignes sont nulles si l'élément considéré n'est pas adjacent au contour.

Si l'on pose :

$$T^{\circ} = \langle N^{\circ} \rangle (T_n^{\circ})$$

$$\delta T^{\circ} = \langle N^{\circ} \rangle (\delta T_n^{\circ})$$

on obtient ainsi :

$$W^{\circ}(T^{\circ}) = -\langle \delta T_1^{\circ} \dots \delta T_n^{\circ} \rangle \int_{\text{élément}} K \left(\left\langle \frac{\partial N^{\circ}}{\partial x} \right\rangle \left\{ \frac{\partial N^{\circ}}{\partial x} \right\} + \left\langle \frac{\partial N^{\circ}}{\partial y} \right\rangle \left\{ \frac{\partial N^{\circ}}{\partial y} \right\} \right.$$

$$\left. + \left\langle \frac{\partial N^{\circ}}{\partial z} \right\rangle \left\{ \frac{\partial N^{\circ}}{\partial z} \right\} dx dy dz \begin{Bmatrix} T_1^{\circ} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_n^{\circ} \end{Bmatrix}$$

$$- \langle \delta T_1^{\circ} \dots \delta T_n^{\circ} \rangle \int_{\text{élément}} \rho C_v \left(u \left\{ \frac{\partial N^{\circ}}{\partial x} \right\} + v \left\{ \frac{\partial N^{\circ}}{\partial y} \right\} + w \left\{ \frac{\partial N^{\circ}}{\partial z} \right\} \right) dx dy dz \begin{Bmatrix} T_1^{\circ} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_n^{\circ} \end{Bmatrix}$$

$$+ \langle \delta T_1^{\circ} \dots \delta T_n^{\circ} \rangle \int_{\Gamma_1^{\circ}} K \left\{ \frac{\partial N^{\circ}}{\partial y} \right\} dy dz \begin{Bmatrix} T_1^{\circ} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_n^{\circ} \end{Bmatrix}$$

$$+ \langle \delta T_1^{\circ} \dots \delta T_n^{\circ} \rangle \int_{\Gamma_2^{\circ}} K \left\{ \frac{\partial N^{\circ}}{\partial y} \right\} dx dz \begin{Bmatrix} T_1^{\circ} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_n^{\circ} \end{Bmatrix} +$$

$$+\langle \delta T_1^e \dots \delta T_n^e \rangle \int_{\Gamma_2^e} K \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial V} \right\} dx dz \begin{Bmatrix} T_1^e \\ \vdots \\ T_n^e \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.36})$$

Cette expression est valable pour toutes les variations virtuelles δT_i . L'équation (IV.36) donne :

$$W^e(T^e) = [K] \{T_n^e\} + \{f_s^e\}^e \quad (\text{IV.37})$$

avec :

$$(K_{ij}) = \int_{\text{élément}} K \left[\left\langle \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right\rangle \left\{ \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right\} + \left\langle \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right\rangle \left\{ \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right\} + \left\langle \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right\rangle \left\{ \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \right\} \right] + \rho C_v \left(u \left\{ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right\} + v \left\{ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right\} + w \left\{ \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right\} \right) N_j^e dx dy dz \quad (\text{IV.38})$$

terme (i,j) de la matrice thermique du solide qui représente l'énergie transmise par conduction et par convection due au déplacement du solide.

$$(f_{si})^e = \int_{\Gamma_1^e} K \frac{\partial N_i^e}{\partial x} dy dz + \int_{\Gamma_2^e} K \frac{\partial N_i^e}{\partial y} dx dz + \int_{\Gamma_3^e} K \frac{\partial N_i^e}{\partial z} dx dy \quad (\text{IV.39})$$

terme i du vecteur de sollicitation de surface correspondant à l'énergie échangée à la frontière du solide.

IV.6-ELEMENT D'APPROXIMATION POUR LE CHAMP THERMIQUE :

Contrairement à la résolution de l'équation de Reynolds généralisée qui nécessite la connaissance du gradient de pression pour connaître le champ de vitesse, la recherche du champ de

température dans le film ou dans le massif ne nécessite pas le choix d'un élément particulier. Dans un souci de gain d'espace mémoire et de temps de calcul, nous avons choisi pour l'approximation du champ thermique un élément simple tridimensionnel isoparamétrique à 8 noeuds avec un degré de liberté par noeud (fig IV.4).

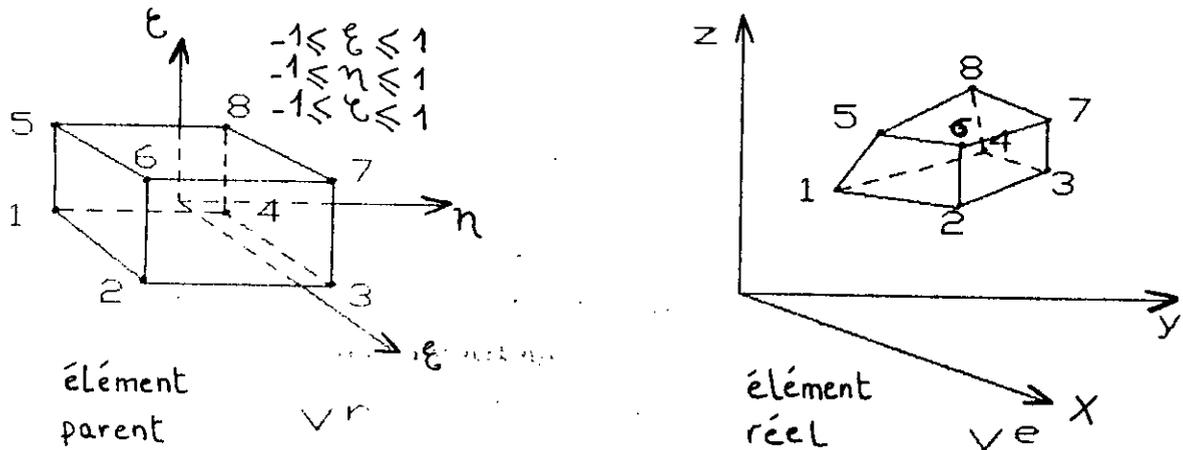


fig IV.4 : élément d'approximation du champ thermique

L'élément ainsi défini est un hexaèdre à 8 noeuds qui assure une continuité C^0 . L'élément est donc complet et conforme. Les fonctions de forme sont données en annexe E.

IV.7-PRINCIPE ET METHODE DE RESOLUTION :

IV.7.1-STOCKAGE DES MATRICES ELEMENTAIRES :

La méthode de stockage la plus efficace pour les matrices globales est la méthode dite de "ligne de ciel". Elle consiste à stocker les termes de $[K]$ par lignes et colonnes de longueurs variables. La ligne de ciel est définie comme étant l'enveloppe des sommets des colonnes de hauteurs variables. Les termes nuls de $[K]$ extérieures aux deux enveloppes ne sont pas stockés.

Elle est symétrique par rapport à la diagonale de l'enveloppe des extrémités gauches des lignes, que $[K]$ soit symétrique ou non. C'est la méthode que l'on adoptée pour stocker les matrices globales.

IV.7.2-RESOLUTION

Le traitement des équations de Reynolds généralisée, de l'énergie dans le fluide et de la chaleur dans les massifs par élément finis permet d'aboutir à un système linéaire à résoudre :

$$[K]\{u\}=\{F\} \quad (IV.40)$$

où $\{u\}$ le vecteur qui comprend les inconnues de pression et de température, $\{F\}$ le vecteur sollicitation qui contient les composantes de flux et de débit. La matrice $[K]$ est donc obtenue par assemblage des matrices élémentaires de fluidité, d'énergie dans le film et de la chaleur dans le massif.

La résolution du système d'équations (IV.40) est une étape importante de la méthode des éléments finis. Dans notre cas, pour un problème linéaire une méthode de résolution directe dite "méthode d'élimination de Gauss" est choisie, la matrice $[K]$ est décomposée sous la forme dite de Doolittle, $[K]=[L][S]$.

Les équations aux dérivées partielles étant liées implicitement ou explicitement par la température, seul un processus itératif peut permettre la résolution. Ce principe est le suivant:

partant d'une viscosité de référence μ_0 , les équations de Reynolds généralisée, de l'énergie dans le film et de la chaleur dans les massifs sont résolues. Ceci permet d'obtenir un champ de pression donc un champ de vitesse et un champ de température et ainsi une nouvelle valeur de viscosité en tout point du domaine de résolution. Le système atteint son état d'équilibre lorsque la différence relative entre les températures obtenues pour deux itérations successives est inférieure à 0.001. L'organigramme schématique est donnée en figure IV.5.

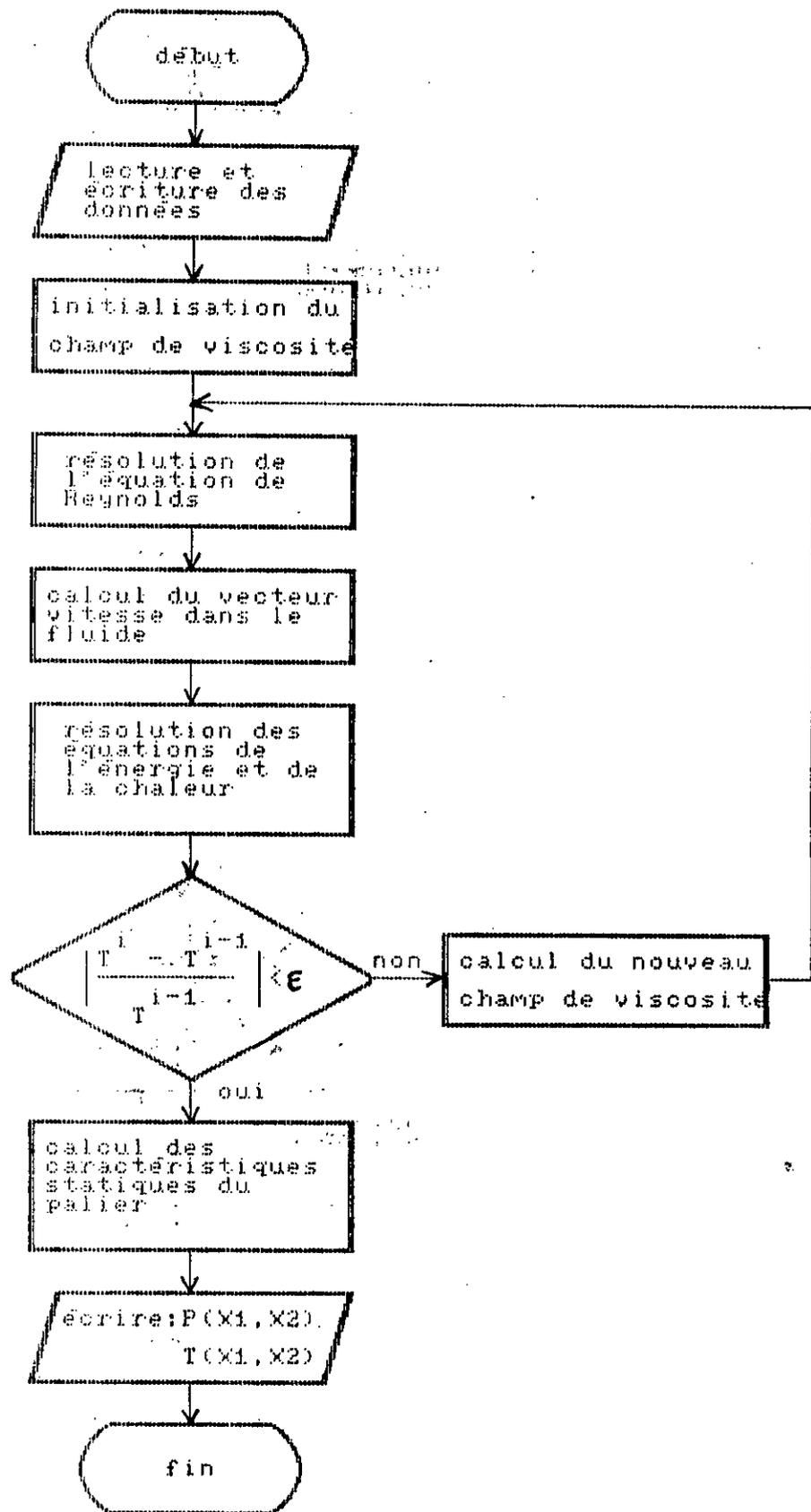


Fig 10.5 : Organigramme schématique de la résolution numérique du problème thermohydrodynamique

IV.8-ETUDE DE LA CONVERGENCE :

Dans les méthodes d'approximation par sous-domaine, les fonctions d'interpolation sont uniquement définies par sous-domaine ou élément. Le problème se pose quant aux conditions que doivent remplir ces fonctions d'interpolation pour que la continuité inter-élément soit garantie.

Pour assurer une convergence monotone de la solution approchée construite à partir des fonctions d'interpolation vers la solution exacte lorsque la taille de l'élément tend vers zéro, les deux conditions suivantes doivent être vérifiées :

- à la frontière de l'élément, les fonctions d'interpolation ainsi que leur $(m-1)$ ièmes dérivées doivent être continues si le problème est de classe C^{m-1} (c'est-à-dire, un problème où apparaissent des dérivées partielles d'ordre m). Si cette condition est remplie, les éléments sont dits conformes.

- les fonctions d'interpolation qui sont construites à partir de bases polynomiales doivent utiliser des bases complètes. Si ceci est vérifiée, les éléments sont dits conformes.

Dans notre cas, grâce à la formulation faible, l'ordre de dérivabilité de la fonction a diminué et le problème est devenue de classe C^0 . Ceci signifie que la fonction doit être continue sur l'élément, ce qui est vérifié pour les éléments choisis. Les éléments sont donc conformes. Par contre, l'élément du champ de pression n'est pas complet car la base complète devrait faire intervenir seize coefficients, or dans notre représentation, nous ne faisons intervenir que douze fonctions (annexe C). Ceci ne signifie pas qu'il n'y aura pas convergence, au contraire le choix d'élément non conforme ou incomplet présente l'avantage de converger plus rapidement vers une solution acceptable.

IV.9-COMPORTEMENT NUMERIQUE DU PROBLEME :

Le calcul des quantités élémentaires (matrice élémentaire, second membre) est réalisé en élément finis sur un élément de référence sur lequel on définit des coordonnées locales unitaires. Le passage à l'élément réel se fait grâce à une transformation géométrique (annexe F).

Ces calculs se font numériquement par la méthode de Gauss qui est très utilisée en élément finis. Les poids ω_i ainsi que les abscisses ξ_i des r points d'intégration (annexe F) sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre $m \leq (2r-1)$.

Pour l'élément d'hermite choisi, il faut 3×3 points de Gauss et $2 \times 2 \times 2$ pour l'élément trilineaire.

IV.10-CONCLUSION :

Les trois équations fondamentales caractérisant l'étude d'un contact thermohydrodynamique ont été établies. Elles permettent de déterminer le champ de pression dans le film, le champ de température dans le lubrifiant ainsi que dans les solides en contact. Le principe de minimisation de l'énergie de dissipation visqueuse ainsi que la méthode de Galerkin ont été utilisés conjointement pour aboutir à une modélisation par éléments finis du problème global.

Les différents types d'éléments utilisés pour la modélisation numérique ont été présentés. Cette approche numérique permet ainsi la prédiction du comportement d'un palier lisse lubrifié fonctionnant en régime thermohydrodynamique laminaire établie.

CHAPITRE V**PRESENTATION ET VALIDATION DES RESULTATS****V.1-INTRODUCTION :**

Dans ce chapitre nous confrontons dans un premier temps les résultats théoriques relatifs au champ de pression et de température ainsi que les caractéristiques statiques d'un palier lisse obtenus par le programme éléments finis que nous avons élaboré à ceux obtenus par R. Boncompain [26] en utilisant la méthode des différences finis, et d'autres part ceux obtenus expérimentalement par Ferron relatifs aux caractéristiques du même palier .

Dans un deuxième temps, nous présentons des résultats obtenues par le programme M.E.F pour différentes données sur les caractéristiques constructives du palier (jeux radial, excentricité relative, ...etc) et les conditions de son fonctionnement (vitesse de rotation, conditions aux limites, ...etc)

V.2-COMPARAISON THEORIE EXPERIENCE**V.2.1-PALIER D'ESSAI**

Le palier d'essai réalisé par Ferron et Frêne est constitué de deux bagues, l'une représentant l'arbre l'autre le coussinet . Ce système permet de modifier facilement le diamètre du palier, jeu radial et la rapport L/D de la largeur au diamètre . Le palier est alimenté en lubrifiant par l'intermédiaire de trois orifices qui débouchent dans une rainure axiale dont l'amplitude circonférencielle est de 18 degré et la largeur de 70 mm .

En vue d'établir la comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux, nous avons repris les caractéristiques du palier d'essais qui sont :

-longueur du palier	: L = 80 mm
-rayon du palier	: R = 5 mm
-rayon extérieur du coussinet	: $R_c = 100$ mm
-jeux radiaux	: $C_a = 145$ μ m et $C_b = 123$ μ m
-pression d'alimentation	: $P_a = 70 \cdot 10^3$
-température d'alimentation	: $T_0 = 40$ °C
-température ambiante	: $T_a = 45$ °C
-la conductivité thermique du coussinet	: $K_c = 45$ W/m°C
-la conductivité thermique de l'arbre	: $K_a = 45$ W/m°C

Pour tous les essais, le palier a été alimenté en huile dont la variation de la viscosité avec la température est présenté en variable logarithmique sur la figure (V.1).

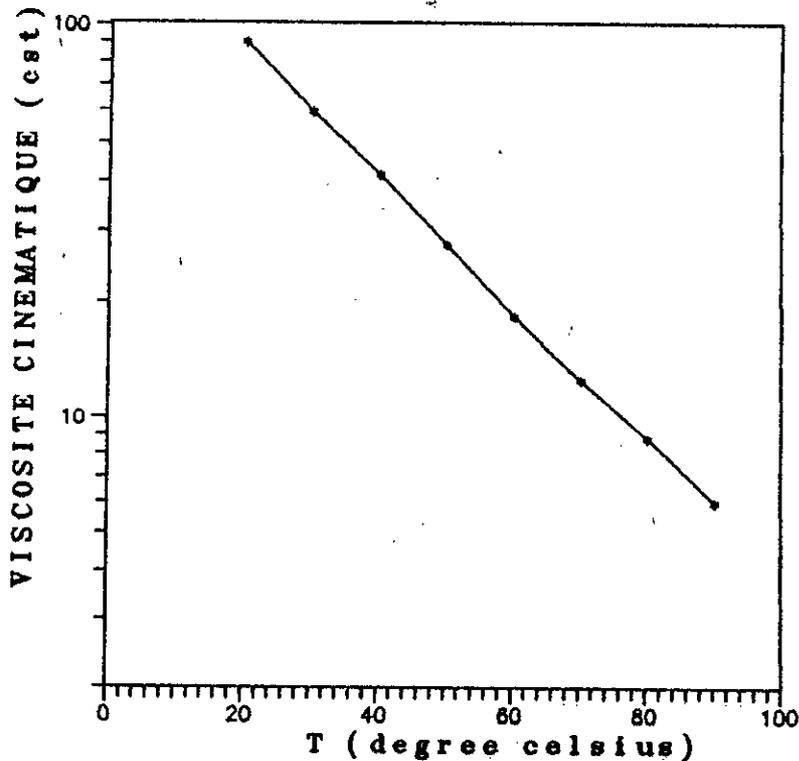


Fig V-1 : VARIATION DE LA VISCOSITE CINEMATIQUE EN FONCTION DE LA TEMPERATURE

Dans la gamme de température utilisé, la viscosité suit la loi suivante :

$$\mu = \frac{D}{AT^3 + BT^2 + CT + 1}$$

où T est la température en degré Celsius, A,B,C,D des constantes qui dépendent du type d'huile utilisé et μ la viscosité en poiseuille (Pa.s) .Le lubrifiant utilisé est l'huile Total Preslta 32 pour laquelle les coefficients sont approchés par [26]:

$$A = -1.13 \cdot 10^{-5}$$

$$B = 1.6 \cdot 10^{-3}$$

$$C = -6.84 \cdot 10^{-2}$$

$$D = 3.485 \cdot 10^{-3}$$

A 40 °C, la viscosité $\mu = 0.032 \text{ Pl}$.

Le calcul requiert d'autres paramètres caractérisants le lubrifiants qui est :

-la masse volumique du lubrifiant considéré constante

$$\rho = 860 \text{ Kg/m}^3$$

-la conductivité thermique du lubrifiant : $K_0 = 0.032 \text{ W/m}^\circ\text{C}$

-la chaleur spécifique du lubrifiant : $C_p = 2000 \text{ J/Kg}^\circ\text{C}$

V.2.2-CONDITIONS AUX LIMITES UTILISEES :

Différentes types de conditions aux limites sur la température (voir III.4) peuvent être utilisées aux niveaux de chaque élément constitutif du palier .

Dans ce qui suis, nous avons considéré la surface extérieur du coussinet à température constante .Des conditions de type isotherme interviennent donc sur cette surface .La surface extérieur de l'arbre est considéré aussi isotherme .

V.2.3-RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX :

Dans un premier temps, nous allons présenter les résultats théoriques obtenus à l'aide du programme M.E.F pour excentricité relative imposée de 0.8 et une vitesse de rotation de 2000 tr/mn,

nous comparerons ces résultats à la fois à ceux obtenus expérimentalement par Ferron et Frêne et à ceux obtenus théoriquement par Boncompain en utilisant la méthode des différences finies, ceci pour le palier d'essai A dont le jeu radial est de $145 \mu\text{m}$.

V.2.3.1-REPARTITION DES TEMPERATURES :

La figure V.2 présente avec des échelles radiales différentes pour le film et le coussinet, la carte des isothermes dans le plan de symétrie du palier, dans le cas où la température sur la surface externe cylindrique du coussinet est imposée (45°C). On constate que le point de température maximale de 63° se situe au sein du film en aval de la zone d'épaisseur minimale du film ($\theta=190^\circ$) c'est-à-dire dans la zone de rupture du film. D'autre part, le point de température maximale du coussinet est situé une dizaine de degré en amont du précédent ($\theta=180^\circ$) et ce maximum est légèrement plus faible (59.2°C).

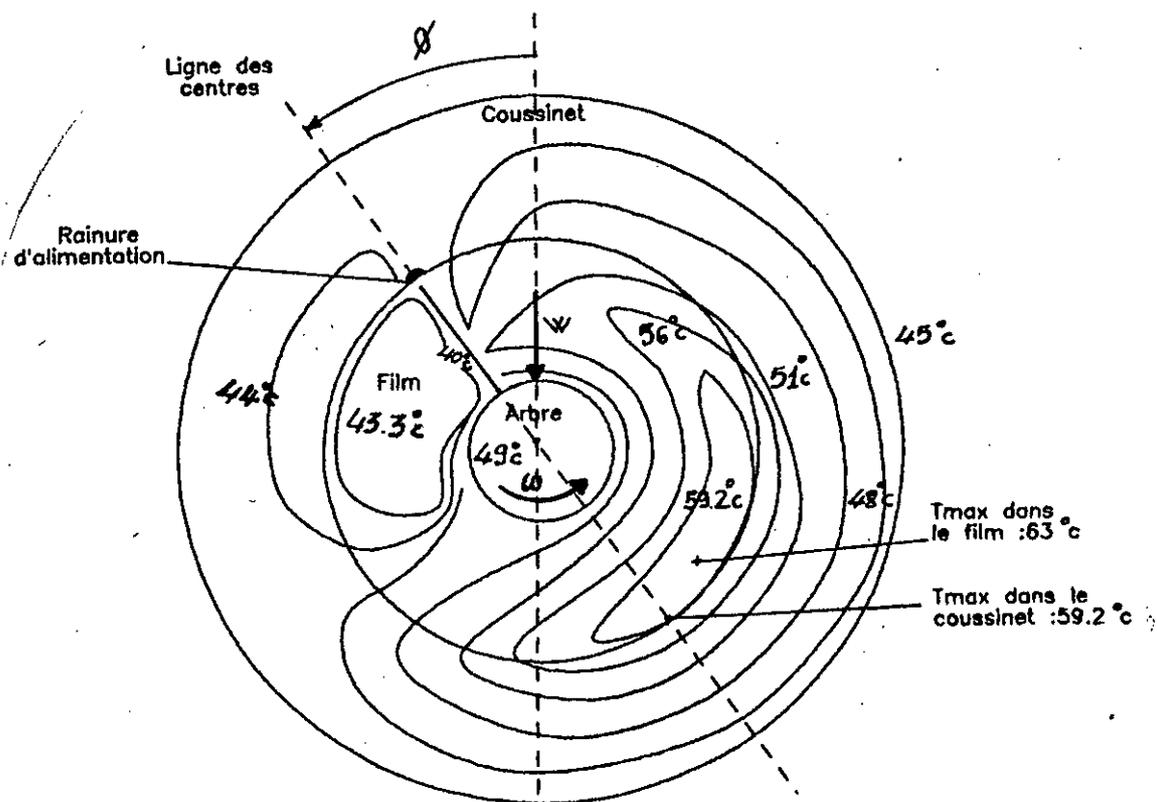


Fig V-2 :Cartes des isothermes dans le plan médian du palier A ($\epsilon=0.8$; $N=2000\text{tr/mn}$)
Température imposée : 45°C

La figure (V.3) déduite de la figure (V.2), représente les lignes de flux de chaleur .Ce sont les trajectoires orthogonales des isothermes .La surface de l'arbre étant une surface isotherme, les lignes de flux le coupe orthogonalement .Deux zones ont été mises en évidence .A la droite de la zone de température maximale, le flux de chaleur est surtout radial .Une partie de la chaleur est transférée vers l'arbre et une autre vers le coussinet, cette dernière partie est d'une part évacuée radialement par la surface externe du coussinet et d'autres part circonférenciellement et va réchauffer les zones plus froides du film .

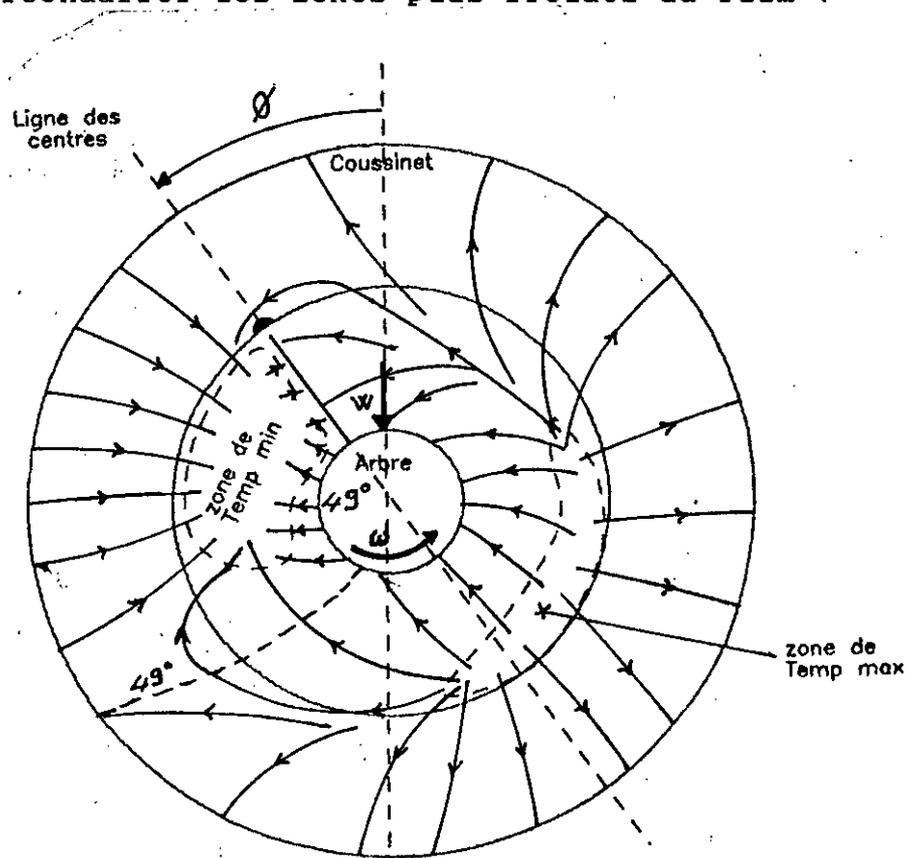


Fig V-3 :Lignes de flux de chaleur ($\epsilon=0.8$; $N=2000$ tr/mn)
 Température imposée : 45°C

La zone de température minimale, en aval de la rainure d'alimentation reçoit de la chaleur par le film, l'arbre et le coussinet .On peut remarquer qu'à partir de la rainure d'alimentation et jusqu'à 120° environ le coussinet et l'arbre donnent de la chaleur au film, alors que pour l'autre partie du palier c'est le film qui distribue la chaleur aux solides .la rainure d'alimentation d'une part et l'isotherme 49°C d'autre part, sé-

parent ces deux régions .Ce fait est mis en évidence par la figure (V.4) qui montre les variations des températures suivant l'épaisseur du film et pour différentes valeurs de la coordonnée angulaire θ .Il faut tout d'abord noter le fort gradient thermique suivant l'épaisseur du film .En effet, pour ($\theta=190^\circ$), la température passe de 49°C (arbre) à $63,7^\circ\text{C}$ en 20 microns environ .De plus vers ($\theta=120^\circ$), le gradient thermique change de signe à la fois sur la surface de l'arbre et du coussinet .Ce phénomène met en évidence le rôle important posé par le film dans les transferts thermiques .

En effet, la zone de rupture du film prend naissance dans le film au voisinage de ($\theta=270^\circ$) et à partir de cette abscisse peu d'énergie est dissipée dans le film .C'est donc la chaleur transportée par le fluide qui revient réchauffer la partie du contact situé au droit de la zone de rupture du film .

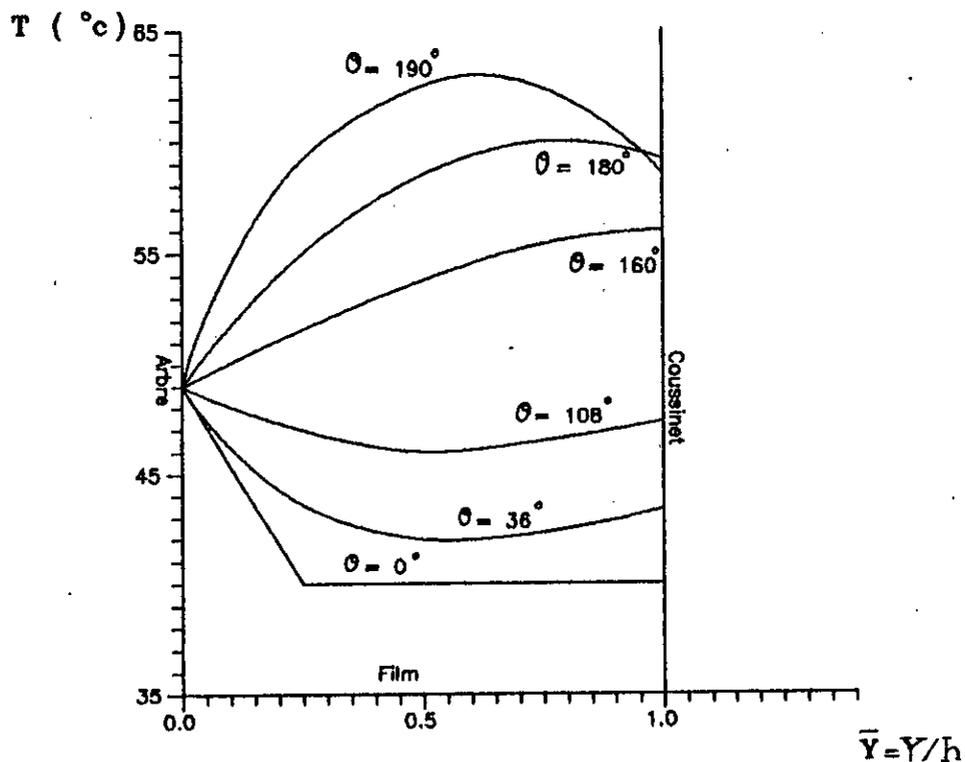


Fig V-4 :TEMPERATURE SUIVANT L'ÉPAISSEUR DU FILM POUR DIFFÉRENTES POSITIONS ANGULAIRES ($\epsilon=0.8$; $T_f=45^\circ\text{C}$; $N=2000$ tr/mn)

La figure (V.5) montre la variation axial de la température de la surface interne du coussinet pour $\theta=180^\circ$. On peut noter la faible variation de la température suivant cette direction, de $2,2^\circ\text{C}$ pour ce cas de fonctionnement .

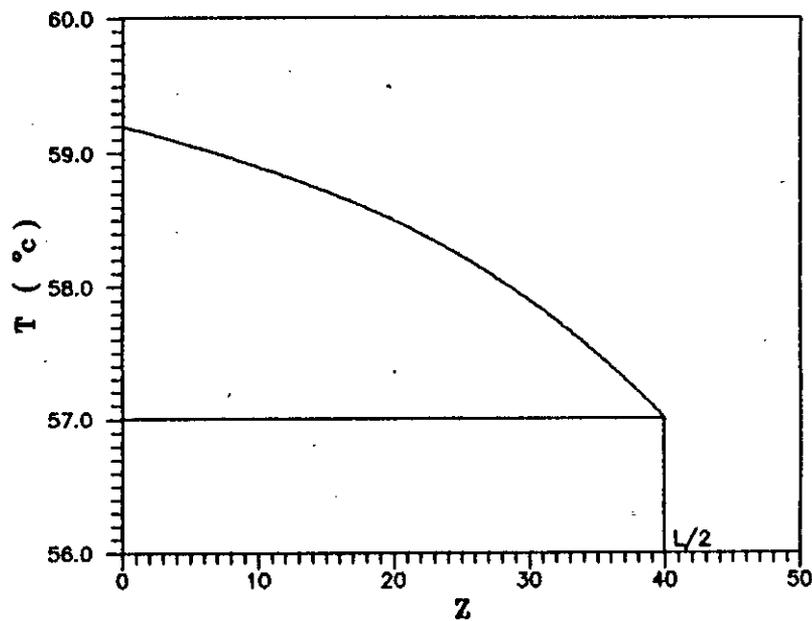


Fig V-5 :Temperature de la surface interne du coussinet pour $\theta=180$ en fonction de la coordonnée axiale Z

Dans la figure (V.6), nous avons représenté la variation de la température interne du coussinet dans le plan de symétrie du palier en fonction de la coordonnée circonférencielle θ . Différentes courbes sont tracées :

- la courbe (I) a été obtenue expérimentalement pour une excentricité de 0.8 et un jeu radial de $145\ \mu\text{m}$. La température maximale atteinte est de $51,5^\circ\text{C}$ pour une abscisse $\theta=267^\circ$.

- la courbe (II) provient des résultats obtenus numériquement par Boncompain à l'aide de son programme (T.E.H.D) Thermoelastohydrodynamique qui tient compte des déformations thermo-elastiques des massifs en présence .

- la courbe (III) provient des résultats obtenus par Boncompain à l'aide du programme (T.H.d) thermohydrodynamique .La température maximale atteinte est voisine de 54 °C pour $\epsilon=0.8$ de la courbe expérimentale .

- la courbe (IV) est issue des calculs effectués à partir du programme M.E.F .L'excentricité ϵ a été imposée .La température maximal atteinte est de 59.2 °C et cette courbe se situe toujours au dessus de la courbe expérimentale .

Nous notons une différence assez sensible entre notre calcul et l'expérience qui provient de la non prise en compte de la déformation thermoélastique de l'arbre et du coussinet .

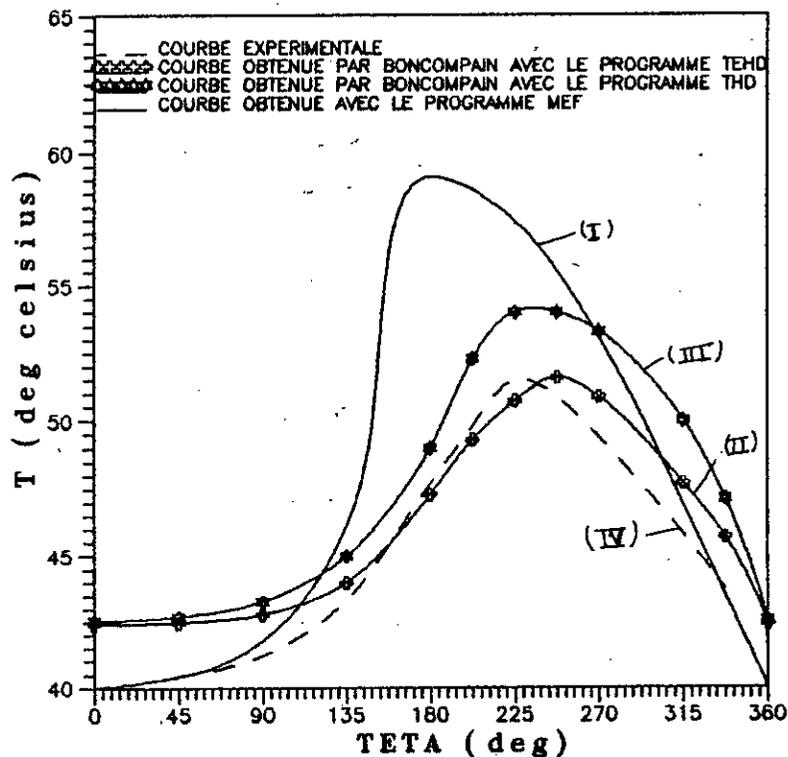


Fig.V-5 :VARIATION DE LA TEMPERATURE DE LA SURFACE INTERNE DU COUSSINET DANS LE PLAN MEDIAN EN FONCTION DE LA COORDONNEE CIRCONFERENCELE POUR N=2000 tr/mn

V.2.3.2-REPARTITION DE PRESSION :

La figure (V.7) représente les courbes de pression au cas mentionné ci-dessus :

-la courbe (I) montre la répartition de pression obtenue expérimentalement pour une excentricité calculée de 0.8 [26] .Le maximum de pression est de 30 bars .

-la courbe (II) provient des calculs effectués par Boncompain sur le même cas avec le programme T.H.E.D .

-la courbe (III) représente la courbe calculée par boncompain à l'aide du programme T.H.D .Le maximum est de 46 bars .

-la courbe (IV) a été obtenue théoriquement par le programme M.E.F .Le maximum de pression est de 30 bars .

Les résultats obtenus par la méthode des éléments finis sont en bon accord avec l'expérience .

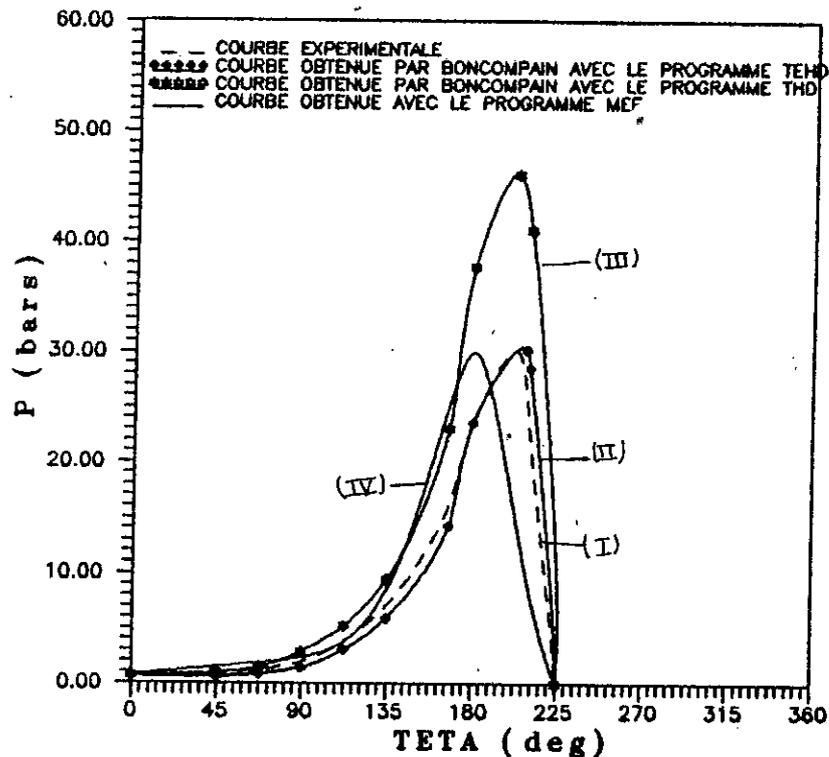


Fig V-7 :VARIATION DE LA PRESSION EN FONCTION DE LA COORDONNEE CIRCONFERENCEILLE POUR N=2000 tr/mn

V.2.4-COMPARAISON DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX SUR LE PALIER B :

Les paramètres caractéristiques du palier B sont identiques à ceux du palier A, excepté le jeu radial qui est $C_b = 123 \mu\text{m}$ alors que celui de A était de $145 \mu\text{m}$.

Les résultats expérimentaux ont été obtenus pour des vitesses de rotation de 2000 tr/mn et 4000 tr/mn et l'excentricité relative de manière à obtenir une plage de variations de charge allant de 2000 à 10.000 N [26].

V.2.4.1-PRESSION MAXIMALE :

Les figures (V.8) et (V.9) montrent la variation de la pression maximale en fonction de l'excentricité relative respectivement pour deux valeurs de la vitesse de rotation (2000 tr/mn et 4000 tr/mn). On note l'augmentation très rapide de cette grandeur en fonction de l'excentricité à vitesse constante. On constate une très bonne concordance entre théorie et expérimentation avec cependant des valeurs théoriques obtenues par la M.E.F sont légèrement inférieures aux valeurs expérimentales à fortes excentricité.

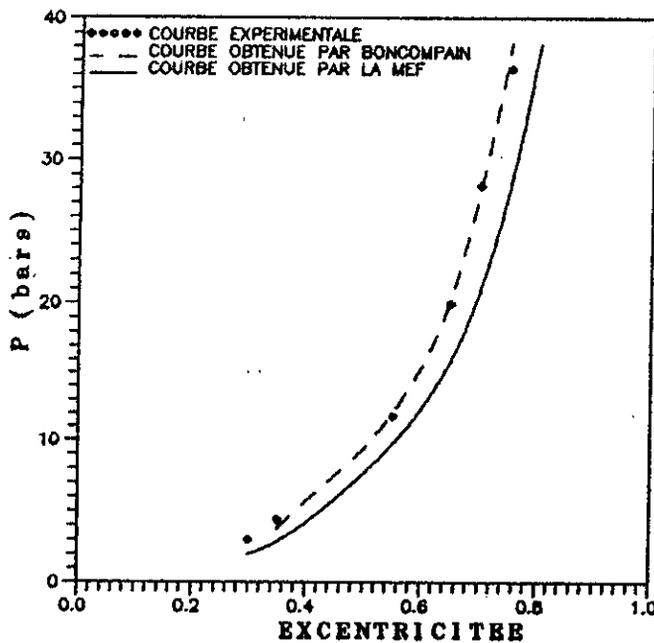


Fig V-8 :PRESSION MAXIMALE DANS LE FILM EN FONCTION DE L'EXCENTRICITEE RELATIVE POUR $N=2000 \text{ tr/mn}$

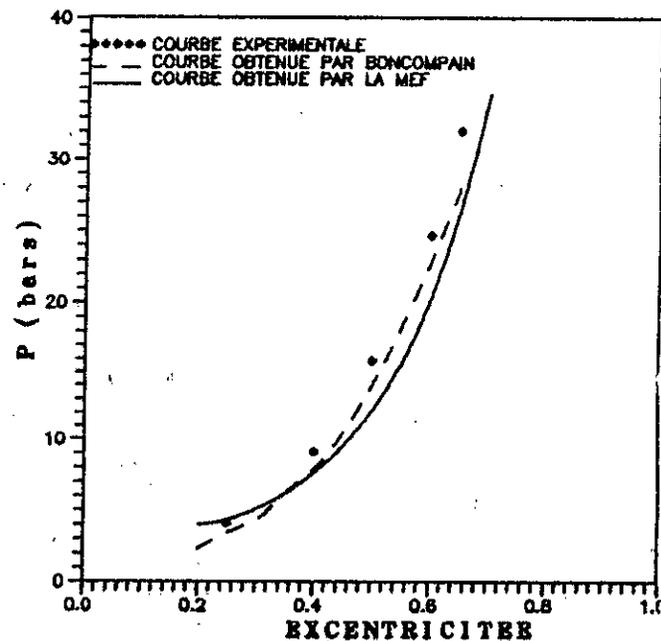


Fig V-9 :PRESSION MAXIMALE DANS LE FILM EN FONCTION DE L'EXCENTRICITEE RELATIVE POUR $N=4000 \text{ tr/mn}$

Au contraire à ceux obtenues par Boncompain avec la théorie T.E.H.D où les valeurs obtenues sont situées légèrement au dessus des relevés expérimentaux à forte excentricités .

V.2.4.2-CHARGE :

La même tendance que pour la pression maximale est observée sur la figure (V.10) et (V.11) qui donnent les variations de la charge supportée par le palier en fonction de l'excentricité relative .Nous notons en effet que pour des excentricités relatives importantes, les résultats théoriques obtenus par la M.E.F sont situés légèrement au dessous des relevés expérimentaux pour de fortes excentricités, contrairement à ceux obtenus par Boncompain qui se situent légèrement au dessus de ceux obtenus expérimentalement .

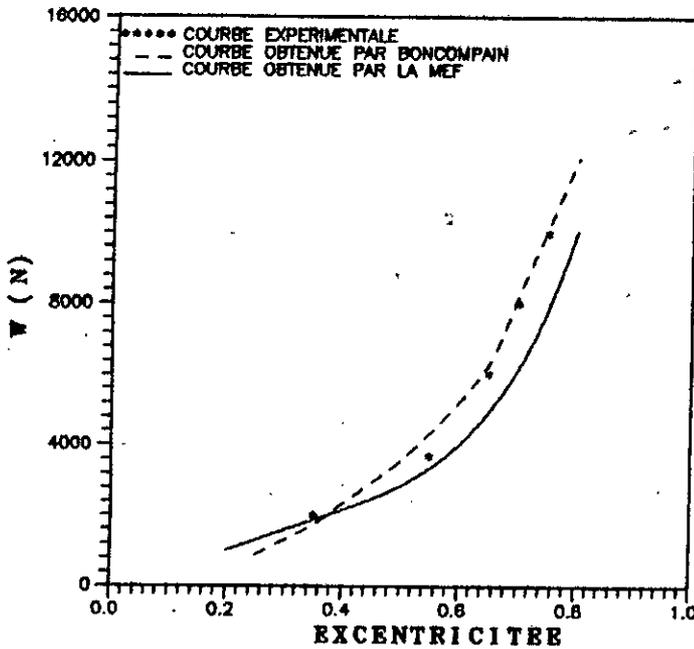


Fig V-10 :CHARGE EN FONCTION DE L'EXCENTRICITEE RELATIVE POUR N=2000 tr/mn

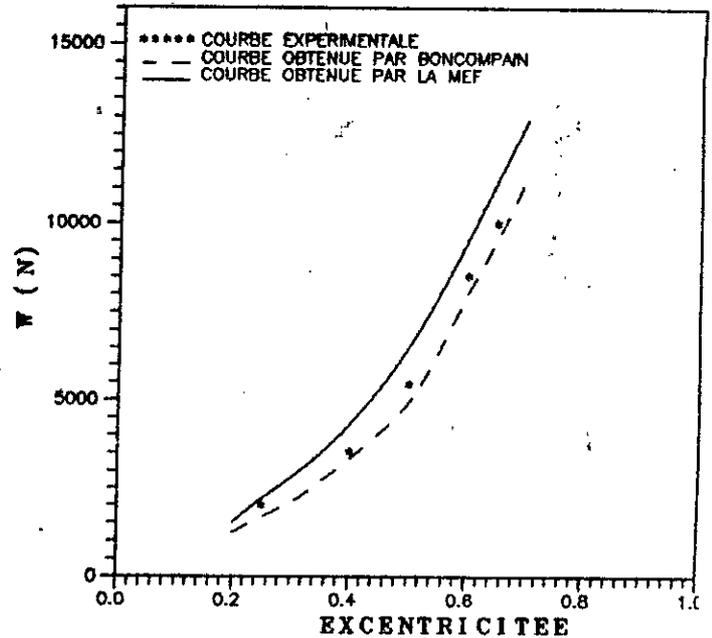


Fig V-11 :CHARGE EN FONCTION DE L'EXCENTRICITEE RELATIVE POUR N=4000 tr/mn

V.2.4.3-COUPLE SUR L'ARBRE :

Le couple sur l'arbre n'a pas été mesuré expérimentalement, nous l'avons calculé et comparé aux valeurs théoriques obtenues par Boncompain .

La figure (V.12) montre la variation du couple en fonction de l'excentricité pour une vitesse de rotation de 4000 tr/mn .

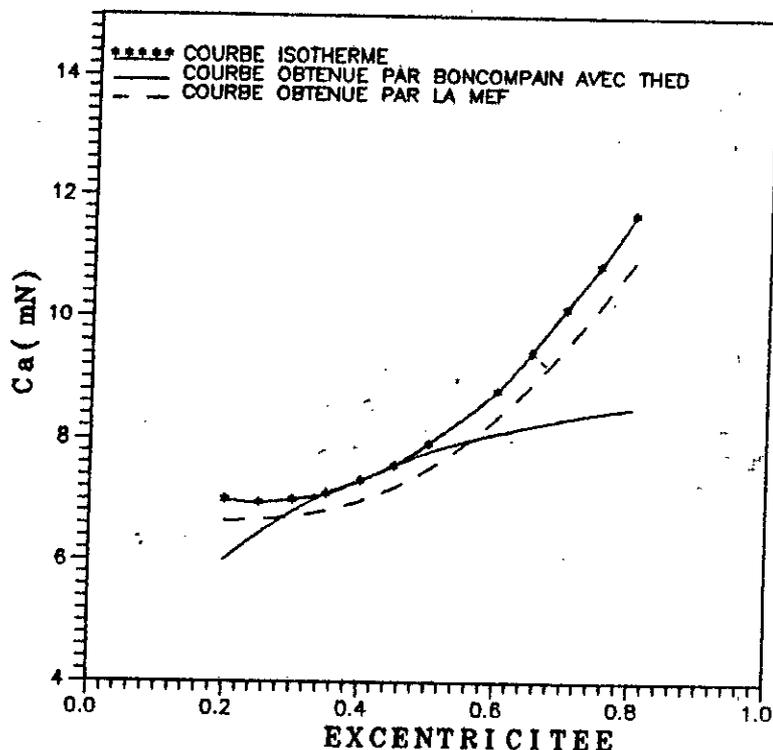


Fig.V-12 :COUPLE SUR L'ARBRE POUR N=4000 tr/mn

Nous obtenons une courbe (I) de même tendance qu'en régime isotherme avec des valeurs inférieures alors que Boncompain (II) observe une divergence importante lorsque l'excentricité augmente, l'écart constaté entre les deux théories peut provenir du fait que notre approche prend en compte la contribution de la zone inactive considéré comme pleine de lubrifiant .

V.2.4.4-DEBIT DU LUBRIFIANT ALIMENTANT LE PALIER

Les figures (V.13) et (V.14) représentent les variations du débit sans dimension du lubrifiant pour deux vitesses de rotation de l'arbre .

Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec les calculs théoriques par la M.E.F pour des excentricités relatives comprises entre 0.3 et 0.5 .On note de légères différences à forte et faibles excentricité de fonctionnement .

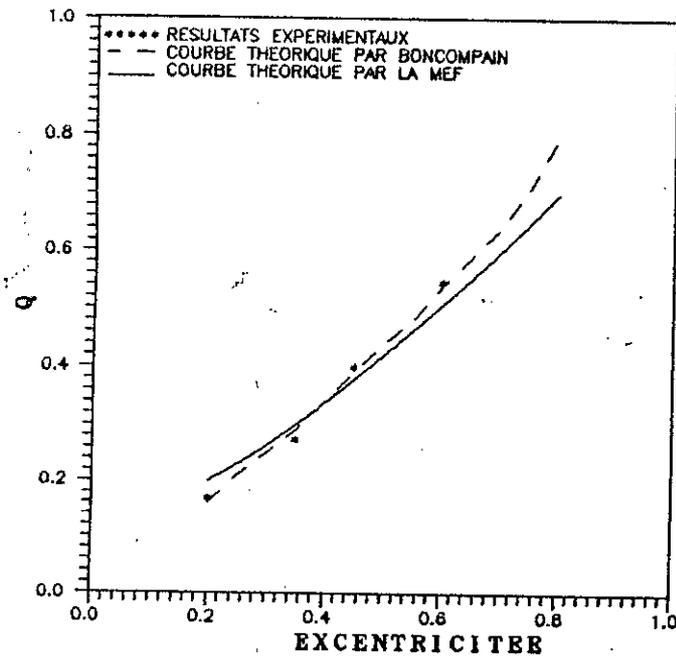


Fig V-13: DEBIT SANS DIMENSION EN FONCTION DE L'EXCENTRICITEE RELATIVE POUR N= 2000 tr/mn

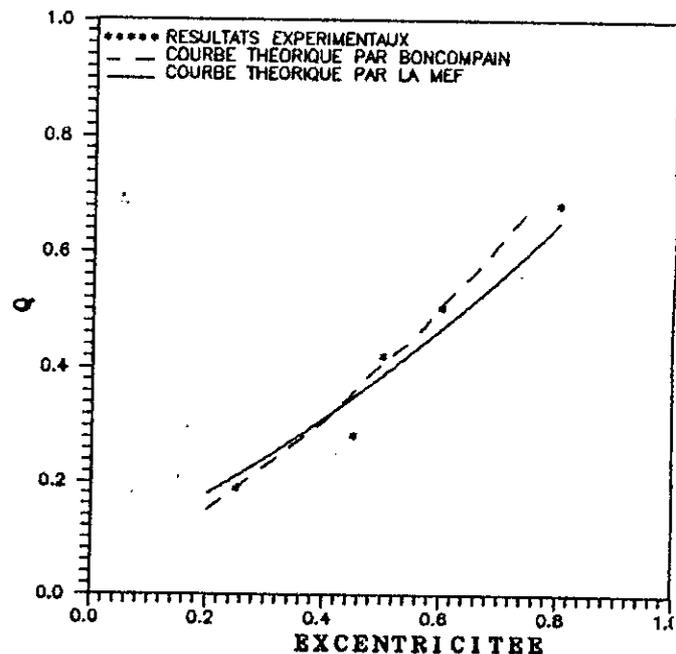


Fig V-14: DEBIT SANS DIMENSION EN FONCTION DE L'EXCENTRICITEE RELATIVE POUR N= 2000 tr/mn

CONCLUSION:

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats que nous avons jugé utiles à la compréhension des différents phénomènes régissant un contact thermohydrodynamique dans le cas particulier d'un palier lisse cylindrique avec une rainure axiale non débouchante. Les conditions aux limites thermiques prises sur la paroi externe du coussinet sont du type isotherme avec une température constante d'une valeur de 45°C (voir III.4.2).

Dans un premier temps, nous avons présenté des résultats relatifs au champ thermique et au champ de pression sur un cas test (palier A) : une carte de température (fig V.2) dans le plan médian du palier montrant la distribution de la température dans celui-ci, ainsi que la position des points de température extrêmes ; une carte des lignes de flux (fig V.3) déduite de la précédente carte, montrant l'évolution du flux de chaleur à travers les différentes parties constituant la palier (arbre, film de lubrifiant, coussinet) ; des figures (fig V.4) et (fig V.5) montrant l'évolution du champ de température à travers l'épaisseur du film et suivant l'axe du palier respectivement, et mettant en valeur le fort gradient thermique suivant cette épaisseur et la faible variation de la température suivant cette axe ; la figure (fig V.6) pour constater l'effet d'un phénomène de recirculation du fluide où une partie du lubrifiant entrant dans le convergent n'est pas évacué latéralement mais fait le tour du palier en s'échauffant et se mélange avec le lubrifiant froid d'alimentation, ce qui fait que la température au niveau du dispositif d'alimentation est plus élevée que celle du lubrifiant d'alimentation et aussi pour montrer l'effet de l'étude thermoélastique sur l'approche réelle du problème de lubrification ; et enfin une figure (fig V.7) montrant l'évolution du champ de pression suivant la circonférence du palier dans le film, aussi que l'effet des déformations élastiques ne sont pas à négliger pour une bonne approche de la réalité physique du problème.

Dans un deuxième temps, nous présentons des résultats relatifs aux variations des paramètres qui sont la pression maximale dans le film, les caractéristiques statiques du palier en fonction de l'excentricité relative tout en faisant varier la vitesse de rotation de l'arbre et cela avec les résultats expérimentaux obtenus par Ferron, et d'un autre côté avec ceux obtenus par R. Boncompain [26] sur ce cas test .

Enfin, nous avons développé un programme de calcul qui peut être exploité industriellement, bien sur en lui apportant des modifications nécessaires de façon à l'adapter au problème désiré . Vu la puissance de l'outil numérique utilisé dans ce code qui consiste en la méthode des éléments finis qui s'adapte bien aux problèmes des discontinuités, que se soit au niveau de la géométrie ou des propriétés de champs quand ceux-ci apparaissent et qui présente un avantage qui lui est propre qui est sa généralité, l'extension du programme à l'étude d'autres variétés de problèmes de lubrification (butées, paliers à patin oscillants, ...) ne présentent pas de problème majeur, elle nécessite seulement une simple modification de données . Il est important de ne pas perdre de vue que l'efficacité de ce type de programme ne peut s'obtenir qu'au prix d'un effort de conception important .

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Suite à l'étude menée par M^r AMARI.M [8] portant sur la lubrification isotherme en régime laminaire par la méthode des différences finis et vu l'impuissance de cette théorie à analyser précisément les phénomènes thermiques, nous avons entrepris une étude en lubrification thermohydrodynamique et en régime laminaire par la méthode des éléments finis qui met en évidence ces phénomènes .

Dans ce travail, la modélisation d'un contact thermohydrodynamique d'un palier lisse en régime laminaire établie a été faite. Après avoir présenté les équations nécessaires à la détermination des différents champs dans le contact, une formulation intégrale sur ces mêmes équations a été réalisée .Le principe de minimisation de l'énergie de dissipation visqueuse ainsi que la méthode de Galerkin ont été appliquées pour obtenir la solution du problème par éléments-finis .Une validation du programme de calcul a été faite en comparant les résultats obtenus par M.E.F à ceux obtenus expérimentalement par Ferron et Frene et ceux obtenus théoriquement par Boncompain sur un cas test .

L'influence de la température sur les performances du palier lisse ainsi que la distribution de chaleur dans celui-ci ont été mises en évidence .Nous terminons notre étude par la présentation de quelques résultats particuliers .

Ce travail nous a permis de constater que la méthode des éléments finis est un puissant outil numérique pour l'analyse des problèmes de lubrification .

Le complément logique à apporter à cette étude aurait été d'insérer les conditions aux limites sur la température qui décrivent au mieux la réalité physique, ainsi que de prendre en compte l'effet du débit du fluide recyclé sur la température à l'entrée du contact .

Les extensions possibles à ce programme de calcul seraient de prendre en compte les effets de température et de pression sur la déformation des surfaces en contact .D'autre part, l'étude peut s'étendre pour le régime turbulent .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FRENE J., NICOLAS D., DEGUEURCE B., BERTHED.,GODET M.
"lubrification hydrodynamique : paliers et butées".
Editions Eyrolles 1990, pp.12-22
- [2] BONCOMPAIN R "les paliers lisses en régime thermohydrodynamique aspects théoriques et expérimentaux" .Thèse de doctorat-ès-sciences présentée devant l'université de Poitiers, novembre 1984 .PP.6-7 et P.14
- [3] BOU-SAID B "la lubrification à basse pression par la méthode des éléments finis application aux paliers" .Thèse de docteur-ingénieur présentée devant l'INSA de Lyon, décembre 1985 pp.59-61
- [4] FRENE J., NICOLAS D., DEGUEURCE B., BERTHE D., GODET M.
"lubrification hydrodynamique : paliers et butées".
Edition Eyrolles 1990, pp.49-50
- [5] BONCOMPAIN R "les paliers lisses en régime thermohydrodynamique aspects théoriques et expérimentaux" .Thèse de doctorat-ès-sciences présentée devant l'université de Poitiers, novembre 1984 . P.41
- [6] BOU-SAID B."la lubrification à basse pression par la méthode des éléments finis application aux paliers" .Thèse de docteur-ingénieur présentée devant l'INSA de lyon,décembre 1985 p.72
- [7] OURAGH Y. "Aide mémoire de mathématiques pour ingénieurs".
(1^{ère} partie) O.P.U . p.249
- [8] AMARI.M "Calcul de palier lisse hydrodynamique isotherme en régime d'écoulement permanent et laminaire", P.F.E présenté à l'E.N.P. Dép.G.Mécanique promotion 1992.PP.28 .

- [9] M.J.BROWN, S.CARMI, R.L.MULLEN "Symposium on thin fluid films Presented at the 1987 ASME applied mechanics, bioengineering, and fluids engineering conference, Cincinnati, Ohio June 14-17, 1987
- [10] G.DHATT, G.TOUZOT "Une présentation de la méthode des éléments finis" .Collection université de Compiègne, 1981
- [11] D.DOWSON, C.M.TAYLOR, M.GODET AND D.BERTHE Proceedings of the 14th Leeds-Lyon Symposium on Tribology, held at the I.N.S.A Lyon, France. 8th-11th September 1987 .
- [12] J.DUPARQUET, J.FRENE, B.FANTINO Calcul du comportement d'un palier de bielle déformable avec un lubrifiant piezovisqueux sous charge stationnaire .Présenté: journée de conférences relatives aux carburants et lubrifiants pour moteurs .groupe français de coordination , le 21 mars 1979 .
- [13] MASAHIRO KUBO , Y.OHTSUBO, N.KAWASHIMA, H.MARUMO Finite element solution for the rarefied gas lubrication problem journal of tribology, April 1988, vol. 110, PP.335-341
- [14] B.BOU-SAID , J.P.CHAOMLEFFEL Hybrid journal bearings: Theoretical and experimental results, journal of tribology, April 1989, vol. 111, PP.219-224
- [15] R.BONCOMPAIN, M.FILLON, J.FRENE Analysis of thermal effects in hydrodynamic bearings, journal of tribology, April 1986, vol.108, PP.219-224
- [16] SANAE WADA, H.HAYASHI AND M.MIGITA Application of finite element method to hydrodynamic lubrication problems (part 1 and 2) J.S.M.E vol.14, N°.77, 1971, PP.1222-1244
- [17] J.F.BOOKER, K.H.HUEBNER Application of finite element to lubrication : an engineering approach .Journal of lubrication technology, October 1972, PP.313-323

- [18] **KENNETH H. HUEBNER** A three dimensionnal thermohydrodynamic analysis of sector thrust bearings ASLE, vol,17,1, 62-73
- [19] **BELHANECHÉ H.** Cours de mécanique des contacts, dép.G.mécanique ENP 94
- [20] **JEAN-PIERRE CHAOMLEFFEL** "Influence des forces d'inertie en lubrification hybride". Thèse de docteur-ingénieur présentée devant l'INSA de Lyon, décembre 1983 .
- [21] **FRANÇOIS COLIN** "Simulation thermique du contact application aux mécanismes 2-D 3-D" .Thèse de docteur présentée devant l'INSA de Lyon, décembre 1986
- [22] **BABAAMER H.** , FORTRAN 77, cours et exercices, BERTI Editions
- [23] **M. BOUMAH RAT, A. GOURDIN,** Méthodes numériques appliquées, O.P.U, 10-93
- [24] **B. BOU-SAÏD** "Calcul des caractéristiques statiques et dynamiques d'un palier lisse soumis ou non à un gradient de pression axial, laboratoire de mécanique des contacts, I.N.S.A Lyon, juillet 91 .
- [25] **DANIEL NICOLAS**"Calcul des caractéristiques de fonctionnement des paliers hybrides (version 2, nov 1987) Université de Poitiers
- [26] **BONCOMPAIN R** "les paliers lisses en régime thermohydrodynamique aspects théoriques et expérimentaux" .Thèse de docteur-ès-sciences présentée devant l'université de Poitiers, novembre 1984 .

ANNEXE A

EPAISSEUR DU FILM LUBRIFIANT

Considérons une section droite du palier (fig A.1), un point M appartenant à la surface du coussinet sera repéré par la coordonnée angulaire $\theta = (O_c A, O_c M)$;

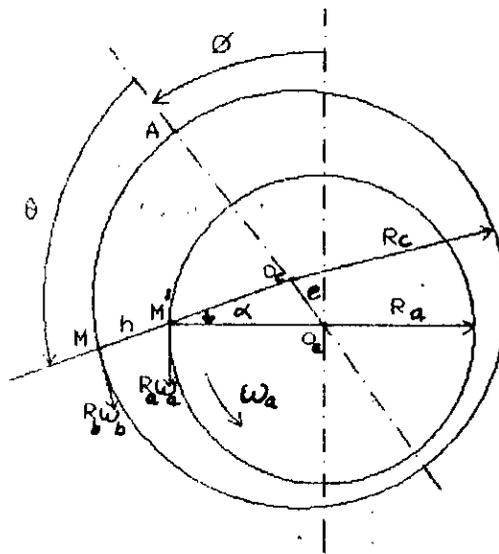


fig a.1 : Section droite du palier.

L'épaisseur du film d'huile est :

$$h = O_c M - O_c M'$$

$$h = R_c - O_c M'$$

En appliquant la règle des sinus au triangle $O_a M' O_c$ il vient :

$$\frac{O_a M'}{\sin(O_a O_c M')} = \frac{e}{\sin \alpha} = \frac{R_a}{\sin(M' O_a O_c)} = \frac{R_a}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{R_a}{\sin \theta}$$

$$\text{d'où } \sin \theta = \frac{e}{R_a} \sin \theta$$

$$\text{et } O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin (O_c O_a M')$$

$$\text{or } (O_c O_a M') = \theta - \alpha = \theta - \arcsin \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right)$$

$$\text{done } O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin \left(\theta - \arcsin \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right) \right)$$

en développant le sinus nous obtenons :

$$O_c M' = R_a \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta \right)^2} - e \cos \theta$$

La quantité e/R_a est très petite devant l'unité (de l'ordre de 10^{-3}) on peut donc négliger le terme $(e/R_a \sin \theta)^2$ devant 1 .
il vient alors

$$h = c(1 + \epsilon \cos \theta)$$

où l'excentricité relative : $\epsilon = e/c$ varie de 0 à 1 .

ANNEXE B

THEOREME D'HELMHOLTZ ET KORTEWEK

Considérons (fig B.1) le volume fluide limité d'une part par deux plaques (A) et (A') dont la cinématique est donnée, et d'autre part par une surface latérale (S). Les conditions aux limites sont telles que la pression sur (S_1), une partie de (S), est imposée tandis que sur (S_2), le complément de (S_1) par rapport à (S), le champ de vitesse est connu.

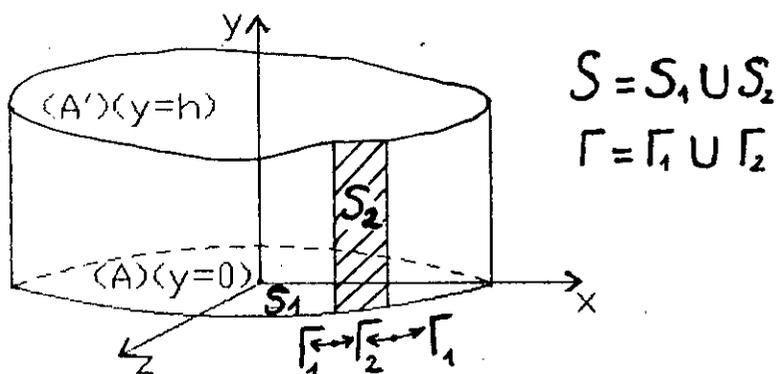


fig b.1 : volume fluide de D

D'après le théorème d'Helmholtz et Korteweg, nous savons que l'énergie représentée par l'intégrale :

$$J(P) = \int_D \phi \, dv + 2 \int_{S_1} P \vec{n} \cdot \vec{u} \, ds \quad (\text{B.1})$$

Dans cette expression, \vec{n} représente le vecteur unitaire normal à la surface latérale S_1 , \vec{u} le vecteur vitesse et ϕ la fonction de dissipation qui, en mécanique des films minces visqueux et incompressible s'écrit :

$$\phi = \mu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

avec :

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} \left(I - I_2 \frac{J}{J_2} \right) + \frac{u_2 - u_1}{J_2} J + u_1$$

$$w = \frac{\partial P}{\partial z} \left(I - I_2 \frac{J}{J_2} \right) + \frac{w_2 - w_1}{J_2} J + w_1$$

$J(P)$ peut également s'écrire :

$$J(P) = \int_D \phi \, dv + 2 \int_S P \vec{n} \cdot \vec{u} \, ds$$

ou, après intégration selon l'épaisseur du film (annexe G)

$$J(P) = \int_{(D-F)} G \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + G \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 + \frac{(u_2 - u_1)^2}{J_2} + \frac{(w_2 - w_1)^2}{J_2} \, dv +$$

$$+ 2 \int_{\Gamma_1} \vec{Pn} \cdot \vec{Q} \, dl - 2 \int_{\Gamma_2} \vec{Pn} \cdot \vec{Q} \, dl \quad (B.3)$$

avec :

$$Q \begin{cases} Q_x = \int_0^L u \, dy = hu_2 - \frac{\partial P}{\partial x} G - (u_2 - u_1) F \\ Q_z = \int_0^L w \, dy = hw_2 - \frac{\partial P}{\partial z} G - (w_2 - w_1) F \end{cases} \quad (B.4)$$

La quantité $\vec{n} \cdot \vec{q}$ représente le débit normal à la frontière. Ce débit est connu sur Γ_2 est égal à q . Par ailleurs, on peut transformer la deuxième intégrale de l'équation (B.3) en inté-

grale double par l'intermédiaire de théorème de Green :

$$\int_{\Gamma} \vec{p} \cdot \vec{Q} \, dl = \int_{(D-F)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (P Q_x) + \frac{\partial}{\partial z} (P Q_z) \right\} dv \quad (B.5)$$

L'intégration de l'équation de continuité selon l'épaisseur du film permet d'écrire :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} = -\frac{\partial h}{\partial t} \quad (B.6)$$

Ainsi, en posant $A=D-F$

$$J(P) = \int_A \left\{ -G \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 - G \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 + 2hu_1 \frac{\partial P}{\partial x} + 2hw_1 \frac{\partial P}{\partial z} + 2F(u_2 - u_1) \frac{\partial P}{\partial x} + \right. \\ \left. + 2F(w_2 - w_1) \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{(u_2 - u_1)^2}{J_2} + \frac{(w_2 - w_1)^2}{J_2} + 2P \frac{\partial h}{\partial t} \right\} dv - 2 \int_{\Gamma_2} qP \, dl \quad (B.7)$$

Les quantités $(u_2 - u_1)^2 / J_2$, $(w_2 - w_1)^2 / J_2$ qui sont indépendantes de la pression peuvent être ignorés lors de la minimisation de $J(P)$.

Cette intégrale n'est valable que sur un domaine (A) où l'on peut appliquer les équations de la mécanique des films minces visqueux. Il est possible toutefois d'étendre ce domaine de validité à un domaine (\bar{A}) contenant (A) tel que sur le complément de (A) par rapport à (\bar{A}) la pression soit identiquement nulle (fig B.2). Cette extension permet d'inclure les zones inactives qui existent dans certains écoulements en mécanique des films minces visqueux.

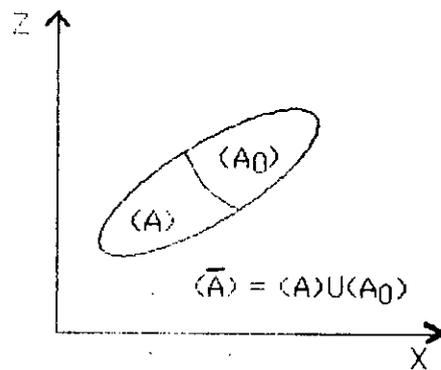


fig b.2 : Domaine de validité
de l'équation fonctionnelle

Compte tenu des remarques précédentes, on peut écrire l'expression (B.1) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 J(P) = & \int_A \left\{ -G \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 - G \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 + 2hu_1 \frac{\partial P}{\partial x} + 2hw_1 \frac{\partial P}{\partial z} + \right. \\
 & \left. + 2F(u_2 - u_1) \frac{\partial P}{\partial x} + 2F(w_2 - w_1) \frac{\partial P}{\partial z} + 2P \frac{\partial h}{\partial t} \right\} dv - 2 \int_{\Gamma_2} qP \, dl
 \end{aligned}
 \tag{B.8}$$

ANNEXE C

APPROXIMATION HERMITIENNE DANS UN ELEMENT RECTANGULAIRE

L'approximation d'Hermite pour un élément rectangulaire peut être aisément obtenue à l'aide des fonctions de base pour un élément d'Hermite unidimensionnel à deux noeuds .

Pour un élément carré D_e (fig C.1) les fonctions de base au niveau de cette approximation unidimensionnelle développées au $n=1$ sont :

$$\begin{aligned} \rho_1(\xi) &= 1-3\xi^2+2\xi^3 = (2\xi+1)(\xi-1)^2 \\ \psi_1(\xi) &= \xi(\xi-1)^2 \\ \rho_1(\eta) &= 1-3\eta^2+2\eta^3 = (2\eta-1)(\eta-1)^2 \\ \psi_1(\eta) &= \eta(\eta-1)^2 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Ces équations sont identiques aux autres noeuds .A partir de ceci, les fonctions d'approximation d'Hermite en dimension deux sont obtenues par les produits croisés .Par exemple, les fonctions de base associées au noeud 1 sont :

$$\begin{aligned} H_1^1(\xi, \eta) &= \rho_1(\xi) \rho_1(\eta) \\ H_1^2(\xi, \eta) &= \psi_1(\xi) \rho_1(\eta) \\ H_1^3(\xi, \eta) &= \rho_1(\xi) \psi_1(\eta) \\ H_1^4(\xi, \eta) &= \psi_1(\xi) \psi_1(\eta) \end{aligned} \tag{C.2}$$

on peut faire de même pour les autres noeuds en utilisant les propriétés de symétrie de l'élément .

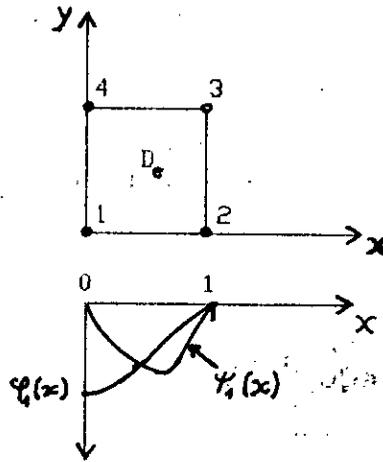


fig C.1

la représentation de deux de ces est donné en (fig C.1) les variables nodales qui correspondent aux quatre fonctions de base (C.2) sont :

$$u ; \frac{\partial u}{\partial \xi} ; \frac{\partial u}{\partial \eta} ; \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \quad (C.3)$$

en chaque noeud, l'expression de l'approximation nodale de la fonction $u(x,y)$ dans D est la suivante :

$$u = \sum_{n=1}^4 \left\{ H_n^1 u_n + H_n^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_n + H_n^3 \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_n + H_n^4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right\} \quad (C.4)$$

où $u_n ; \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_n ; \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_n$ et $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right)_n$ représentent la valeur de la fonction ainsi que ces dérivées en chaque noeud n .

Le problème est de savoir dans quelle classe de fonctions d'approximation rentre la fonction définie en (C.4), lorsque le terme en $\partial^2 u / \partial \xi \partial \eta$ est abandonné, c'est-à-dire les fonctions H^2_n .

L'approximation utilisée en (C.4) est de classe C^1 lorsque les quatre degrés de liberté sont utilisées et de classe C^0 lorsque le terme en $\partial^2 u / \partial \xi \partial \eta$ est abandonné.

Pour illustrer ceci, considérons une représentation hermitienne utilisant u ; $\partial u / \partial \xi$ et $\partial u / \partial \eta$ seulement en chaque sur l'élément défini sur la figure (C.1). sur le côté 1-2 on peut remarquer que l'approximation de la fonction u est cubique. Ceci nécessite la recherche de quatre constantes en l'occurrence :

$$u_1 ; \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_1 ; u_2 ; \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_2$$

Pour permettre ce type d'approximation.

Comme ces valeurs sont communes aux éléments adjacents, la continuité C^0 de u est vérifiée à la jointure de l'élément.

On peut observer qu'au niveau de chaque ligne $\eta = \text{cste}$, en particulier la ligne (1-2) la dérivée normale $\partial u / \partial \eta$ présente une variation cubique en fonction de x . Avec seulement la valeur aux noeuds (1,2) de $\partial u / \partial \eta$, la représentation cubique n'est pas possible et donc la fonction $\partial u / \partial \eta$ présente une discontinuité aux interfaces de l'élément.

Pour assurer une continuité C^1 de $\partial u / \partial \eta$, il est nécessaire d'ajouter un quatrième degré de liberté $\partial^2 u / \partial \xi \partial \eta$ en chaque noeud.

ANNEXE D

ELEMENT QUADRILATERAL DE TYPE HERMITE

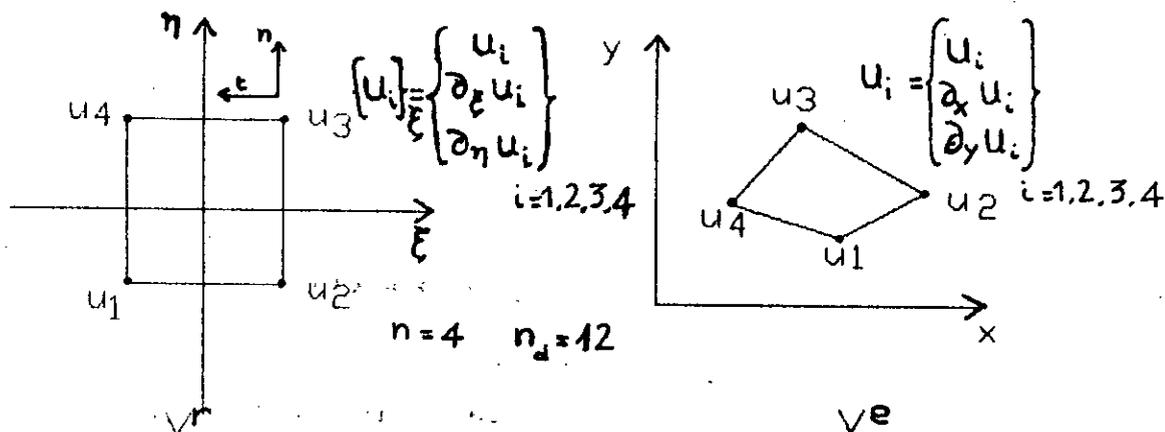


fig d.1

a) Approximation géométrique

Le polynôme d'approximation choisi est un polynôme complet :

$$\langle P \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \rangle$$

L'approximation est donc bi-linéaire .

Les fonctions de forme et leur dérivées sont les suivantes :

n	$1/c \{N\}$	$1/c \{\partial N/\partial \xi\}$	$1/c \{\partial N/\partial \eta\}$	c
1	$(1 - \xi)(1 - \eta)$	$-1 + \eta$	$-1 + \xi$	$1/4$
2	$(1 + \xi)(1 - \eta)$	$1 - \eta$	$-1 - \xi$	$1/4$
3	$(1 + \xi)(1 + \eta)$	$1 + \eta$	$+1 + \xi$	$1/4$
4	$(1 - \xi)(1 + \eta)$	$-1 - \eta$	$1 - \xi$	$1/4$

La matrice jacobienne s'exprime ainsi :

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

La transformation d'une intégrale sur l'élément s'écrit :

$$\int_{v^e} f(x) dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x(\xi)) |J| d\xi d\eta$$

b) Approximation de la fonction

L'approximation est cubique (quadrilatère, 4 noeuds, semi C¹). Le polynôme d'approximation est :

$$\langle P \rangle = \langle 1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi^3, \xi^2\eta, \xi\eta^2, \eta^3, \xi^3\eta, \xi\eta^3 \rangle$$

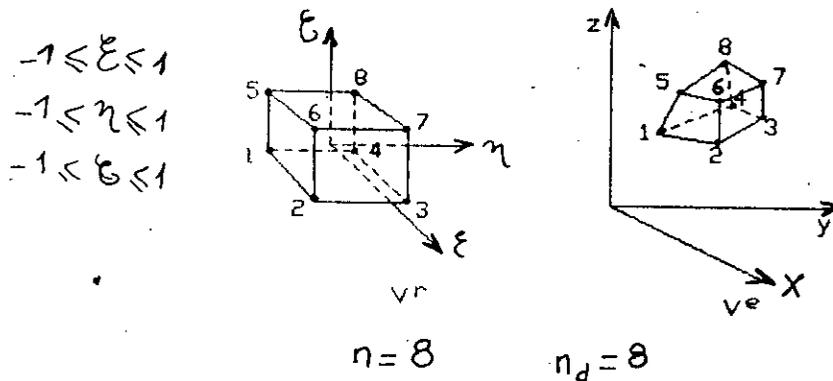
$1/e \{N\}$	$1/e \{ \partial N / \partial \xi \}$	$1/e \{ \partial N / \partial \eta \}$	e
$a(\alpha - \xi - \eta)$	$(1 - \eta)(-3 + 3\xi^2 + \eta^2 + \eta)$	$(1 - \xi)(-3 + 3\xi^2 + 3\eta^2 + \xi)$	1/8
$a(1 - \xi^2)$	$-a(1 + 3\xi)$	$(-1 + \xi)(1 - \xi)$	
$a(1 - \eta^2)$	$(-1 + \eta)(1 - \eta^2)$	$-a(1 + 3\eta)$	
$b(\alpha + \xi - \eta)$	$(1 - \eta)(3 - 3\xi^2 - \eta^2 - \eta)$	$(1 + \xi)(-3 - 3\xi^2 + 3\eta^2)$	
$b(1 - \xi^2)$	$-b(1 - 3\xi)$	$(1 + \xi)(1 - \xi)$	
$b(1 - \eta^2)$	$(1 - \eta)(1 - \eta^2)$	$-b(1 + 3\eta)$	
$c(\alpha + \xi + \eta)$	$(1 + \eta)(3 - 3\xi^2 - \eta^2 + \eta)$	$(1 + \xi)(3 + 3\xi^2 - 3\eta^2)$	
$-c(1 - \xi^2)$	$-c(1 - 3\xi)$	$(-1 - \xi)(1 - \xi)$	
$-c(1 - \eta^2)$	$(-1 - \eta)(1 - \eta^2)$	$-c(1 - 3\eta)$	
$d(\alpha - \xi + \eta)$	$(1 + \eta)(-3 + 3\xi^2 + \eta^2 - \eta)$	$(1 - \xi)(3 - 3\xi^2 - 3\eta^2)$	
$d(1 - \xi^2)$	$-d(1 + 3\xi)$	$(1 - \xi)(1 - \xi)$	
$-d(1 - \eta^2)$	$(1 + \eta)(1 - \eta^2)$	$-d(1 - 3\eta)$	

avec $a = (1 - \xi)(1 - \eta)$; $b = (1 + \xi)(1 - \eta)$; $c = (1 + \xi)(1 + \eta)$
 $d = (1 - \xi)(1 + \eta)$; $\alpha = 2 - \xi^2 - \eta^2$

Les fonctions $\langle N \rangle$ correspondent aux variables nodales $\{u_i\}$. Sur les côtés ; u et $\partial u / \partial t$ sont continues mais $\partial u / \partial n$ ne l'est pas. Par contre les valeurs de $\partial u / \partial x$ et $\partial u / \partial y$ en chaque noeud sont identiques pour tous les éléments reliés à ces noeuds.

ANNEXE E

ELEMENT D'APPROXIMATION POUR LE CHAMP THERMIQUE

ELEMENT TRI-LINEAIRE (HEXAEDRE, 8 NOEUDS, C⁰)

Cet élément comporte une variable u_i en chacun de ses 8 noeuds. Les noeuds géométriques sont confondus avec les noeuds d'interpolation [10].

$$\langle P \rangle = \langle 1 \ \xi \ \eta \ \zeta \ \xi\eta \ \eta\zeta \ \zeta\xi \ \xi\eta\zeta \rangle$$

Les fonctions N sont les produits de fonctions N de l'élément linéaire à une dimension [10].

$1/c\{N\}$	$1/c\{\partial N/\partial \xi\}$	$1/c\{\partial N/\partial \eta\}$	$1/c\{\partial N/\partial \zeta\}$	c
$a_2 b_2 c_2$	$-b_2 c_2$	$-a_2 c_2$	$-a_2 b_2$	1/8
$a_1 b_2 c_2$	$b_2 c_2$	$-a_2 c_2$	$-a_1 b_2$	
$a_1 b_1 c_2$	$b_1 c_2$	$-a_2 c_2$	$-a_1 b_1$	
$a_2 b_1 c_2$	$-b_1 c_2$	$-a_2 c_2$	$-a_2 b_1$	
$a_2 b_2 c_1$	$-b_2 c_1$	$-a_2 c_2$	$a_2 b_2$	
$a_1 b_2 c_1$	$b_2 c_1$	$-a_2 c_2$	$a_1 b_2$	
$a_1 b_1 c_1$	$b_1 c_1$	$-a_2 c_2$	$a_1 b_1$	
$a_2 b_1 c_1$	$-b_1 c_1$	$-a_2 c_2$	$a_2 b_1$	

avec : $a_1=1+\xi$; $a_2=1-\xi$
 $b_1=1+\eta$; $b_2=1-\eta$
 $c_1=1+\zeta$; $c_2=1-\zeta$

Le passage de l'élément parent à l'élément réel se fait d'une manière identique à celle présentée en annexe C .

ANNEXE F

PASSAGE DE L'ELEMENT PARENT A L'ELEMENT REEL

F.1-ELEMENT DE REFERENCE :

Une manière de générer des éléments en même temps d'ailleurs que de simplifier leur définition est de partir d'une forme très simple dans un espace dit de référence .L'élément ainsi défini est l'élément de référence .Puis, l'espace de référence est transformé dans l'espace réel en même temps que l'élément .La transformation T (fig F.1) doit être telle que :

- il y'a bijection sur (V^e) et la frontière,
- il y'ait correspondance des noeuds géométriques et des frontières .

Ainsi T est différente pour chaque élément .

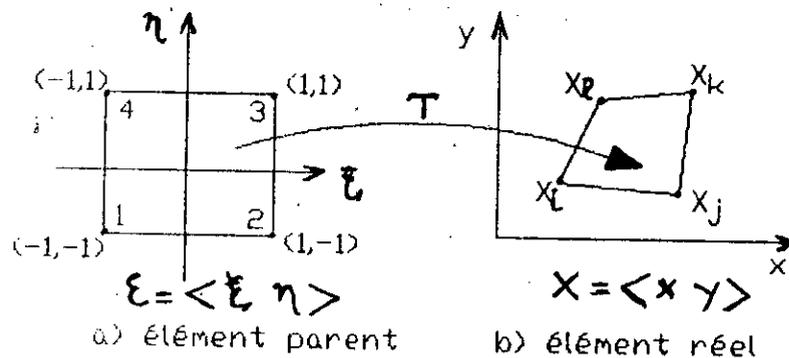


fig f.1 : transformation T

On peut écrire par conséquent :

$$T(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta) x_i + N_2(\xi, \eta) x_j + N_3(\xi, \eta) x_k + N_4(\xi, \eta) x_l \quad (F.1)$$

avec $T = \langle x, z \rangle$

Les éléments de référence sont appelés éléments "parents". L'ensemble des variables ξ, η peut être considéré comme système de coordonnées locales. Les fonctions N définies en annexe C sont les fonctions d'approximation géométriques.

Les quantités définies en (IV.15), (IV.16), (IV.17) sont toutes calculées sur l'élément de référence. On utilise la transformation T pour passer sur l'élément réel.

F.2-PASSAGE DE L'ÉLÉMENT PARENT A L'ÉLÉMENT REEL :

Nous allons illustrer cette technique en prenant l'exemple de la relation (IV.15).

$$K_{ij} = \int_{V^e} - \left\{ G \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + G \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} dx dz \quad (F.2)$$

En éléments finis, l'approximation sur l'élément réel est remplacée [10] par l'approximation correspondance sur l'élément de référence, c'est-à-dire :

$$P(\xi, \eta) = \langle N(\xi, \eta) \rangle \{P_n\}$$

avec

$$x(\xi, \eta) = \langle N(\xi, \eta) \rangle \{x_n\}$$

$$z(\xi, \eta) = \langle N(\xi, \eta) \rangle \{z_n\}$$

on peut écrire que :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x}(\xi, \eta) = \frac{\partial N_i}{\partial \xi}(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta}(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial z}(\xi, \eta) = \frac{\partial N_i}{\partial \xi}(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta}(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

ou matriciellement :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$\{a_x\} = [J] \{a_\xi\}$$

La relation (F.1) permet d'obtenir $[J]$ par transformation inverse.

D'autre part [10] :

$$dx dz = \det([J]^{-1}) d\xi d\eta$$

ce qui nous permet de transformer (F.2) qui devient :

$$\begin{aligned} K_{ij} = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 - (G(J_{11}N_{i,\xi} + J_{12}N_{i,\eta}) \langle J_{11}N_{j,\xi} + J_{12}N_{j,\eta} \rangle + \\ & + G(J_{21}N_{i,\xi} + J_{22}N_{i,\eta}) \langle J_{21}N_{j,\xi} + J_{22}N_{j,\eta} \rangle) \det([J]^{-1}) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (F.3)$$

Si l'on appelle l'expression entre parenthèses $f(\xi, \eta)$ alors (F.3) sera calculée en utilisant une intégration numérique de type GAUSS (méthode produit) [10]. Ceci nous permet d'écrire :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \det([J]^{-1}) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} w_i w_j f(\xi_i, \eta_j)$$

r_1 et r_2 représentent le nombre de points d'intégration dans les deux directions ξ, η .

w_1, w_2 les poids des points d'intégration.

ξ_i, η_i leurs coordonnées sur l'élément parent.

ANNEXE G

INTEGRATION DE LA FONCTION DE DISSIPATION A TRAVERS L'ÉPAISSEUR
DU FILM

soit à calculer : $\int_0^h \phi \, dy$

où

$$\phi = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]$$

et

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} \left(I - I_2 \frac{J}{J_2} \right) + \frac{u_2 - u_1}{J_2} J + u_1$$

$$w = \frac{\partial P}{\partial z} \left(I - I_2 \frac{J}{J_2} \right) + \frac{w_2 - w_1}{J_2} J + w_1$$

avec

$$I = \int_0^y \frac{\xi}{\mu} \, d\xi \quad J = \int_0^y \frac{d\xi}{\mu}$$

$$I_2 = \int_0^h \frac{y}{\mu} \, dy \quad J_2 = \int_0^h \frac{dy}{\mu}$$

occupons nous du premier terme $\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{\partial I}{\partial y} - \frac{I_2}{J_2} \frac{\partial J}{\partial y} \right) + \frac{u_2 - u_1}{J_2} \frac{\partial J}{\partial y}$$

or

$$\frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{\xi}{\mu} \, d\xi = \frac{y}{\mu}$$

et

$$\frac{\partial J}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{d\xi}{\mu} = \frac{1}{\mu}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 \left[\frac{y^2}{\mu} + \left(\frac{I_2}{J_2} \right)^2 \frac{1}{\mu} - 2 \frac{I_2}{J_2} \frac{y}{\mu} \right] + \left(\frac{u_2 - u_1}{J_2} \right)^2 \frac{1}{\mu} + \\ &+ 2 \left(\frac{u_2 - u_1}{J_2} \right) \left(\frac{y}{\mu} - \frac{I_2}{J_2} \frac{1}{\mu} \right) \frac{\partial P}{\partial x} \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} \int_0^h \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 \left[\int_0^y \frac{y^2}{\mu} dy + \left(\frac{I_2}{J_2} \right)^2 \int_0^h \frac{dy}{\mu} - 2 \frac{I_2}{J_2} \int_0^h \frac{y}{\mu} dy \right. \\ &+ \left. \left(\frac{u_2 - u_1}{J_2} \right)^2 \int_0^h \frac{dy}{\mu} + 2 \frac{u_2 - u_1}{J_2} \frac{\partial P}{\partial x} \left(\int_0^h \frac{y}{\mu} dy - \frac{I_2}{J_2} \int_0^h \frac{dy}{\mu} \right) \right] \end{aligned}$$

Le troisième terme de cette expression est nul pour un fluide incompressible. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^h \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 \left[\int_0^h \frac{y^2}{\mu} dy - \frac{I_2^2}{J_2} \right] + \frac{(u_2 - u_1)^2}{J_2} \\ &= G \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \frac{(u_2 - u_1)^2}{J_2} \end{aligned}$$

De même, on utilisant la même démarche on peut écrire :

$$\int_0^h \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy = G \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 + \frac{(w_2 - w_1)^2}{J_2}$$

d'où finalement :

$$\int_0^h \phi dy = G \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + G \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 + \frac{(u_2 - u_1)^2}{J_2} + \frac{(w_2 - w_1)^2}{J_2}$$