الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

4/89

وزارة التعليم العالي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

1 ex

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

DEPLACEMENTS DES POINTS DE FIXATION DES MOTEURS EN V SOUS L'EFFET DES EXCITATIONS INTERNES

Proposé par : M. BOUKABACHE Mohamed

Etudié par : AMMICHE Ali

Dirigé par : M. BOUKABACHE Mohamed

PROMOTION : Juin 1989

E.N.P. 10 Avenue Hacen Badi – EL-HARRACH – ALGER

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

DEPLACEMENTS DES POINTS DE FIXATION DES MOTEURS EN V SOUS L'EFFET DES EXCITATIONS INTERNES

Proposé par : M. BOUKABACHE Mohamed

Etudié par : AMMICHE Ali

Dirigé par : M. BOUKABACHE Mohamed

PROMOTION : Juin 1989

E.N.P. 10 Avenue Hacen Badi – EL-HARRACH – ALGER

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE
PROMOTEUR : Med BOUKABACHE
ELEVE INGENIEUR : A. AMMICHE

وزارة التعليم العالي
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
دائرة الهندسة الميكانيكية
الموجه : محمد بوكعباش
الطالب المهندس : علي عميش

الموضوع : حساب مطال الإهتزازات مساند الإرتكاز لمحرك V تحت مفعول التحريضات الداخلية.

الملخص : تهدف هذه الدراسة إلى تحديد مطال الإهتزازات بدلالة خصائص مساند الإرتكاز ، ومن أجل ذلك قمنا بوضع المعادلات الديناميكية للمحرك أثناء العمل في الحالة العامة ، ثم تطرقنا إلى حل هذه المعادلات في حالة خاصة بغية معرفة تأثير سرعة دوران المحرك وجهاز الإخماد على مطال الإهتزازات.

Sujet : Deplacements des points de fixation des moteurs en V sous l'effet des excitations internes.

Resumé : Cette etude consiste à determiner les amplitudes des vibrations du moteur en fonction des caracteristiques des plots de suspension.
Pour cela, on a etabli les equations dynamiques du mouvement du moteur au cours de son fonctionnement dans le cas général, et on a procédé à leur resolution dans un cas particulier.

Subject : Moving of fixation points of the engine in V manner under the effect of internal excitations.

Abstract : This study consists of the determination of the vibrations amplitudes of the engine as a fonction "of its elastic" holders
The general dynamics equations of the movements of the engine in fonction were etablisched and the solution for a particular case was made.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement mon promoteur Mr Mohamed BOUKABACHE ainsi Mr Ali BEROUAKON pour l'aide qu'ils n'ont pas cessé de m'apporter quand à l'elaboration de ce travail

Que tous les professeurs, qui ont contribué à ma formation et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de cette etude, trouvent ici ma profonde gratitude et mes sincères remerciements.

SOMMAIRE

NOTATIONS UTILISEES

- Indices

m : manivelle
b1 : la première bielle
b2 : la deuxieme bielle
p1 : le premier piston
p2 : le deuxieme piston
V : valant
bm : bloc moteur

M : masse
I : moment d'inertie
σ : demi angle d'ouverture de V
θ : angle de rotation du vilebrequin
$\dot{\theta}$: vitesse rotation du moteur
$X, Y, Z, \theta_M, \varphi_M, \psi_M$: les coordonnées généralisées du bloc moteur
$\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{\theta}_M, \dot{\varphi}_M, \dot{\psi}_M, \ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}, \ddot{\theta}_M, \ddot{\psi}_M, \ddot{\varphi}_M$. ses derivees premieres et secondes.
Xi, Yi, Zi $i = 1, 4$ les deplacements des plots de suspension suivant les directions X, Y et Z.
r : rayon de la manivelle
L1, L2, entr'axe de la bielle 1 et 2
Lm : position de centre de gravité de la manivelle à partir du vilebrequin
Lb_1, Lb_2 : position de centre de gravité de bielle 1 et 2 à partir du point A

(b, a, z_g) : les composantes de centre de gravité du moteur
P_c : distance entre 2 pistons
P_V : distance entre le valant et l'origine du repère lie au vilebrequin.

K_1, K_2, K_3 : rigidité verticale

K_H, K_H' : rigidité horizontale.

α_v, α_v' :

$\vec{\omega}$: vitesse de rotation ou

$\vec{\varepsilon}$: accélération angulaire

$\vec{V}$: vitesse linéaire

a : accélération linéaire

$l_1, l_2, d_1, d_2, d_1', d_2', h, h'$, les dimension du moteur

D : energie de dissipation.

T : energie cinétique ou la force vive.

Q : force généralisée

t = le temps

1. INTRODUCTION

Dans toute machine alternative, les forces d'inertie sur le système "piston-bielle-manivelle" peuvent se manifester de manières differentes:

— sur le travail transmis,
— sur le couple transmis à chaque instant et sur sa régularité,
— sur les appuis du vilebrequin,
— sur les vibrations de torsion,
— sur le mouvement propre du centre de gravité du Carter socle.

En effet, le couple moteur et les forces et couples d'inertie se traduisent par des Contraintes sur les fixations. Si celles-ci sont rigides, les sollicitations périodiques créés par le fonctionnement du moteur peuvent à certains régimes, exciter, au voisinage, des vibrations résonnantes, d'amplitude dangereuses pour les parties qui en sont l'objet (vitres de l'autocar, tolerie du camion, etc...).

Si le moteur est monté sur des ressorts trés flexibles (moteur "flottant"), les fondations et leurs abords ne sont soumis qu'à des efforts faiblements ondulés, l'energie conférée par les variations cycliques des couples et forces de nature à produire des effets exterieurs se traduisent par des déplacements périodiques de la masse du moteur.

Ces deplacements, de nature plus ou moins complexes, possèdent, suivant la composition des forces, des amplitudes plus ou moins importantes.

Les liaisons élastiques absorbent elles mêmes une plus ou moins grande partie de l'energie degagée par les sollicitations cycliques. Si le moteur équipe des ensembles susceptibles d'être excités en vibrations résonnantes il peut s'ensuivre des déplacements alternés intolérables pour l'occupant et dangereuses pour les structures.

Le bloc moteur à suspension élastique exécute des mouvements de sens contraire à la résultante des parties internes du moteur qui se déplacent.

Il faut calculer les amplitudes des mouvements de l'ensemble suspendu élastiquement.

L'amplitude des mouvements ne doit pas dépasser, en égard aux liaisons existant avec l'extérieur et aux organes fixés sur le moteur, des limites bien déterminées si l'on veut : éviter tout bris, il ne faut pas que les déplacements d'ensemble conduisent à des accélérations supérieurs à la pesanteur.

Au total, on ne peut pas accepter une suspension trop souple, non plus qu'une liaison rigide.

Dans cette présente étude, nous considérons le moteur comme un corps rigide, donc possédant six degré de liberté et en commençant par l'analyse cinématique des éléments internes du moteur, nous formulons les équations différentielles donnant les déplacements des points de fixations du moteurs dans le but de déterminer les caractéristiques des plots de suspensions convenable pour vibro-isolation du moteur

2. GENERALITE

2.1. CAUSES DES VIBRATIONS

Les causes des vibrations trouvées dans les machines sont assez variées, depuis le processus technologique de fabrication ou le mode de fonctionnement de la machine jusqu'aux imprécisions d'exécution ou de montage, aux usures et aux défauts de fonctionnement ou d'autre facteurs extérieurs.

2.2. CAS DES MOTEURS

Une machine est soumise à une vibration lorsqu'elle subit des sollicitations périodiques alternées se traduisent lorsque la machine est suspendue élastiquement par oscillations plus ou moins importantes.

Et comme tout autre moteur, le moteur diesel est le siège d'effort à caractères cycliques alternés lors de son fonctionnement.

Ces efforts résultent des accélérations des organes constituant le moteur, car comme on le sait, les pistons bielles et manivelles sont animées de mouvements alternatifs, subissants donc des accélérations périodiques qui sont les sources de forces alternatives causant les vibrations. Les vibrations résultent donc de combinaisons d'efforts périodiques agissants sur les organes mobiles.

2.3 SUSPENSION ÉLASTIQUE

La suspension élastique d'une machine consiste à intercaler entre elle-même et son assises (chassis, plancher, etc...) des supports elastiques, le types des supports, leur nombre, leur répartition, leur disposition et leur caracteristiques individuelles seront fonction des caracteristiques d'ensemble à donner à la suspension pour obtenir les resultats cherchées.

2.4. IMPORTANCE DES PLOTS DE SUSPENSION

Les forces et les couples nés de la combustion et de l'inertie des pieces en mouvement provoquent au sein de la structure du moteur des contraintes élevées.

Par ailleurs, les inégularités de la route et les charges supportées provoquent elles aussi au sein du chassis des contraintes importantes. Il va donc de soi que la fixation du moteur sur ses supports ne doit introduire des contraintes venant se superposer aux contraintes propres du chassis, on prévoit donc une suspension elastique et des points de fixation aussi peu nombreux que possible.

2.5. TYPES DE SUSPENSION ELASTIQUE

2.5.1. SUSPENSION DIRECTE

On appelle suspension direct une suspension ayant pour but d'empêcher une machine vibrante de transmettre ses vibrations à son environnement.

2.5.2. SUSPENSION INDIRECTE

On appelle ainsi une suspension destinée à protéger une machine non vibrante contre les vibrations de l'environnement.

2.6. SUPPORTS ELASTIQUES

2.6.1 DEFINITION

Les supports elastiques sont des organes possédant, à la fois et à des degrés divers, des propriétés d'élasticités et d'amortissement.

2.6.2 ELASTICITE

L'elasticité est la faculté pour le support de se deformer avec une amplitude sensiblement proportionnelle à la charge et de manière reversible, au moins dans certaines limites.

2.6.3 AMORTISSEMENT

L'armotissement est un effort de freinage du mouvement, dont le principal effet est la reduction des amplitudes.

2.7 TYPES DE SUPPORTS

De nombreuse types sont proposés par les fabricants et pour chaque type de nombreuse modèles dimensionnels, ce qui rend pas le choise trés facile. (Voir fig. 2.1)

2.8 CHOIX DES SUPPORTS

Ce choise se fera :

– en fonction des possibilités et des facilités de

montages : il existe des supports comportant des armatures métalliques adhérées, avec des perçages permettant une fixation facile par vis ou boulons.
– en fonctions des charges appliquées à chaque supports. Les charges indiquées par les catalogues ne sont souvent que les charges statiques ; il faut tenir compte des surcharges dynamiques provenant de la vibration. Ces surcharges sont faibles en régime normal puisque c'est précisément le but de la suspension élastique, mais il y a presque toujours des régimes critiques à traverser.
– En fonction des caractéristiques élastiques à obtenir pour avoir une bonne isolation vibratoire.

2.9 NOMBRE ET EMPLACEMENT DES SUPPORTS

Le nombre et emplacement des supports sont souvent imposés par les pattes de fixation prévues sur la machine, mais malheureusement souvent non prévues pour les suspensions élastiques ; il en résulte une répartition inégale des charges aux différentes points de fixation, ce qui empêche d'utiliser des supports tous identiques

Si l'on a toute liberté, il y a intérêt à n'employer qu'un seul type de supports, et de disposer ceux-ci symétriquement par rapport à la verticale du centre de gravité (ou toute au moins de manière que le centre élastique de la suspension soit sur cette verticale).

Il vaut toujours mieux utiliser un petit nombre de gros supports plutôt qu'un grand nombre de petits, mais on est limité dans cette voie par la rigidité des machines qui peuvent ne pas tolérer des supports trop écartés et la capacités de charge des supports.

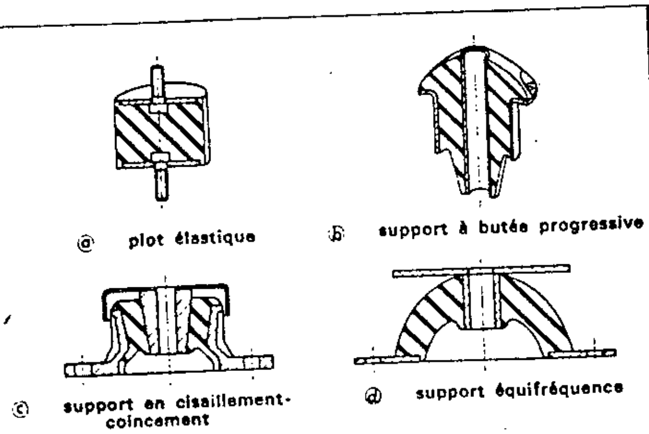


Fig. 6. — Types de supports.

Fig. 2.1

3. DONNEES DE BASE

31 PRESENTATION DU MOTEUR

Notre etude va porter sur le moteur Deutz F8L 413, placé sur le vehicule fabriqué en Algerie

La boite de vitesses est rigidement fixée au moteur, et c'est l'ensemble moteur plus boite de vitesses ainsi constitué qui vibre sur les plots de suspension.

32 CARACTERISTIQUES DU MOTEUR

321 CARACTERISTIQUES INTERNES

C'est un moteur à quatre temps à injection directe et refroidissement à air

- Nombre de cylindre : 8
- Alesage : 125 mm
- Course : 130 mm
- Cylindrée : 1,595 l
- Cylindrée globale : 12,763 l
- Regime de fonctionnement : [600 - 2500] tr/mm
- Vitesse moyenne du piston : 10,8 m/s
- Puissance moyenne : 188 kW.
- Couple maximal : 817 Nm à 1600 tr/mn

322 CARACTERISTIQUES EXTERNES

Voir fig. 31

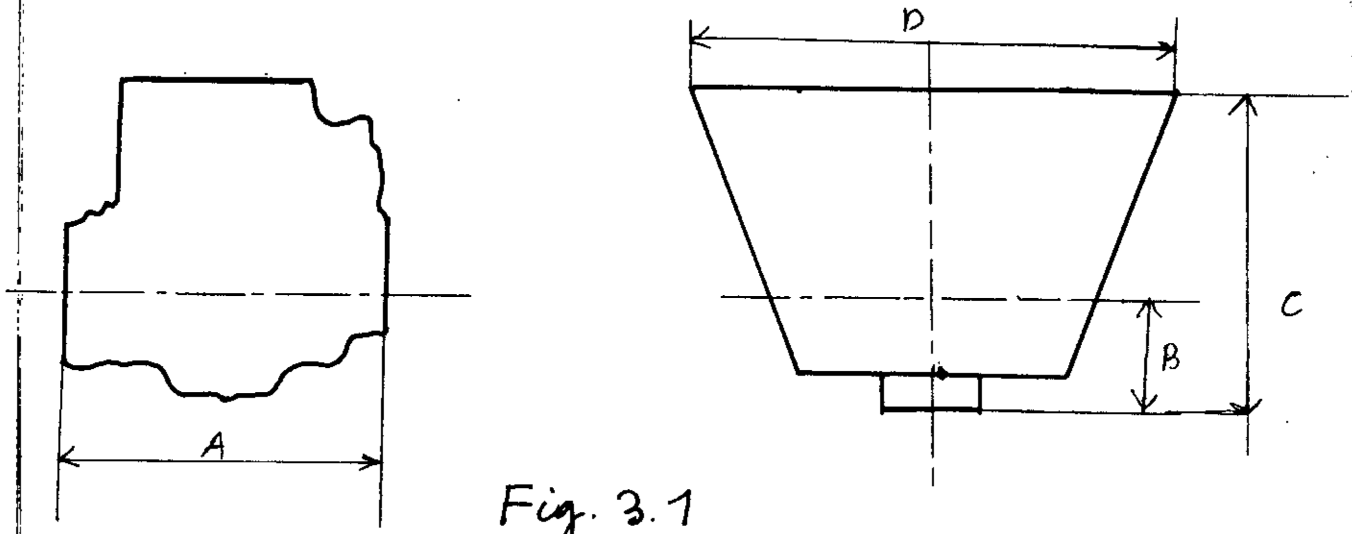


Fig. 3.1

$A = 1080\ mm$ $D = 1038\ mm$ $B = 340\ mm$
$C = 860\ mm$ $M = 830\ kg.$

33 CARACTERISTIQUES DU SYSTEME PISTON BIELLE MANIVELLE

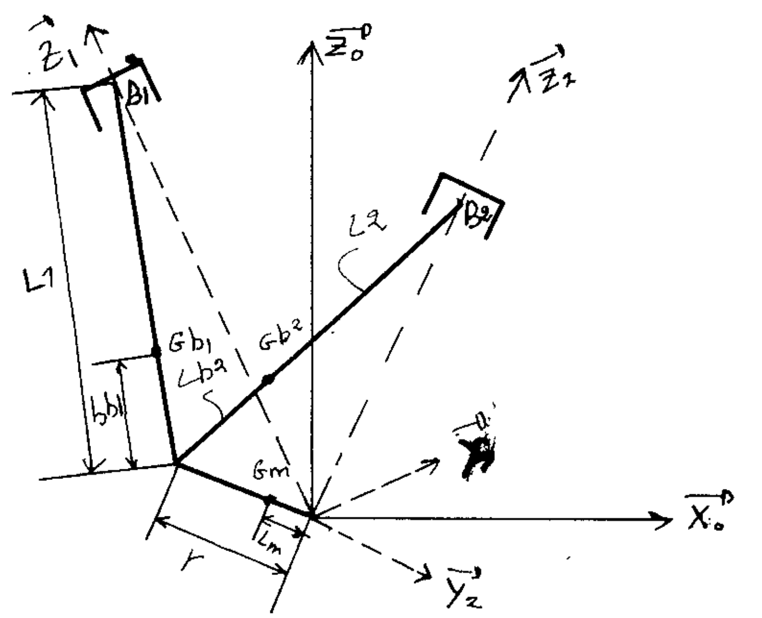


Fig. 3.2

$m p_1 = m p_2$ = masse du piston 1 et 2 : 3,720 kg.
$m b_1 = m b_2$: masse de la bielle 1 et 2 : 3,000 kg
$m v$ = masse du volant : 40,0 kg.
$m m$ = masse de la manivelle : —
$m cp$ = masse du contre poids : 5,650 kg.

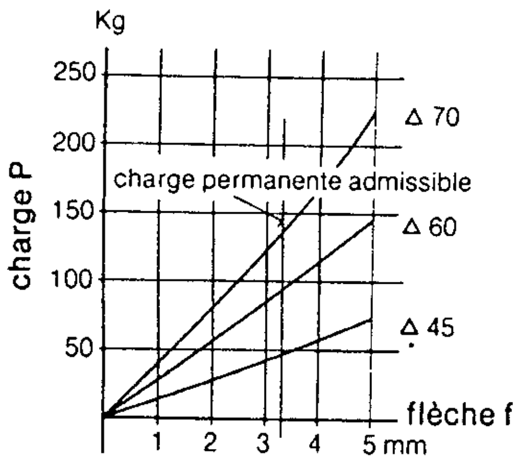
r = rayon de la manivelle : 65 mm
L1 = L2 : l'entraxe de bielle 1 et 2 : 237,5 mm

34 CARACTERISTIQUES DES PLOTS DE SUSPENSION

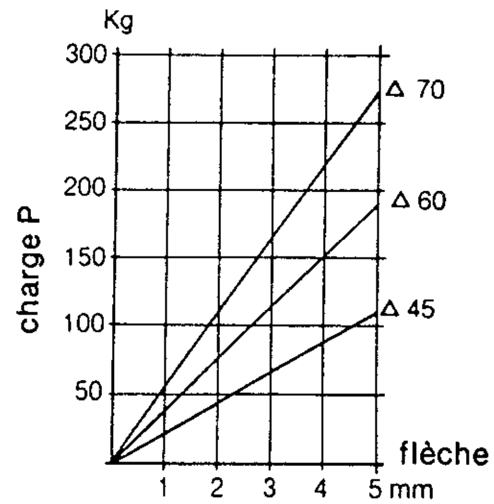
La fig. 3.3 presente les abaques d'elasticité du plot. Ces abaques nous permettent de calculer les rigidités verticales et horizontales des supports.

On remarque que la force de rappel vertical est non linéaire par contre la force de rappel horizontal est linéaire.

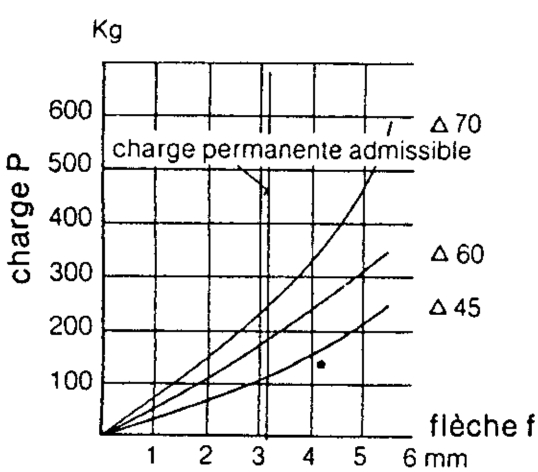
COMPRESSION



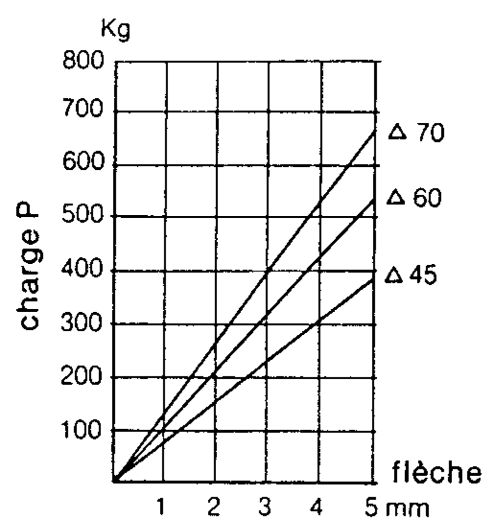
CISAILLEMENT



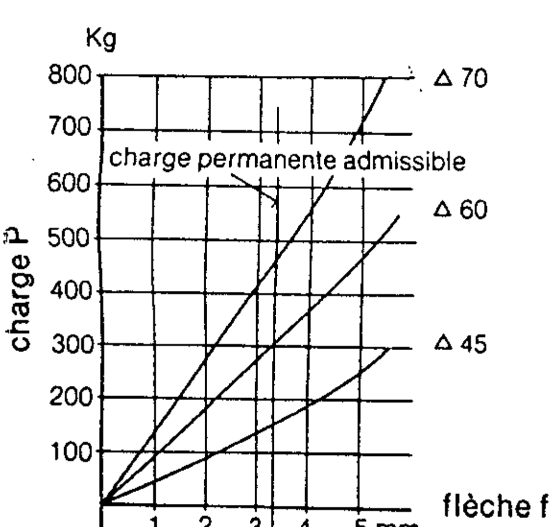
COMPRESSION



CISAILLEMENT



COMPRESSION



CISAILLEMENT

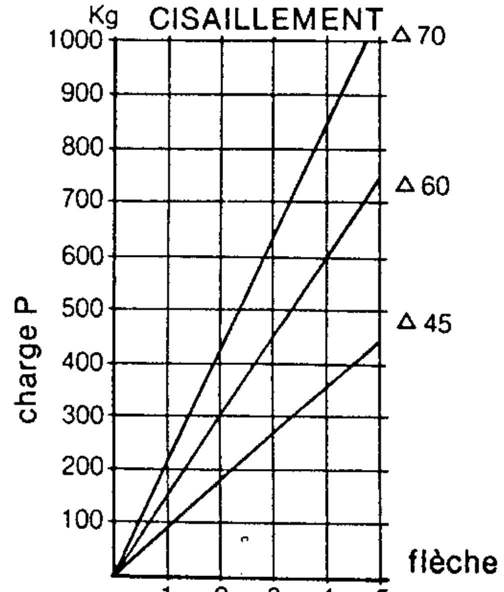


Fig. 23

4. ETUDE CINEMATIQUE DU SYSTEME PISTON-BIELLE-MANIVELLE

4.1. MISE EN PLACE DES REPERES ET DEFINITION DES POINTS

L'etude cinématique du système piston-bielle manivelle nécessite la mise en place de trois repères (Fig. 4.1) :

- Repère fixe : $(O, \vec{X_0}, \vec{Y_0}, \vec{Z_0})$
  O est le centre du vilebrequin
  $\vec{X_0}$ est l'axe du vilebrequin, le volant est placé sur $\vec{X_0}$ positifs
- Repères mobiles liés au vilebrequin :
  Il y a deux :
- Le premier : $(O, \vec{x_1}, \vec{Y_1}, \vec{Z_1})$
  $\vec{Z_1}$ est l'axe du cylindre 1
  $\vec{x_1}$ coincide avec $\vec{X_0}$
- Le deuxième : $(O, \vec{x_2}, \vec{Y_2}, \vec{Z_2})$
  $\vec{Z_2}$ est l'axe du cylindre 2.
  $\vec{X_2}$ coincide avec $\vec{X_0}$

Definition des points :

- Gm centre de gravité de la manivelle.
- A la tête des ~~2~~ deux bielles
- Gb1, Gb2 : Centres de gravité des deux bielles
- B1, B2 : pieds des bielles sur les axes $\vec{Z_1}$ et $\vec{Z_2}$ ou bien les pistons 1 et 2.

4.2. CINEMATIQUE DES DIFFERENTS POINTS

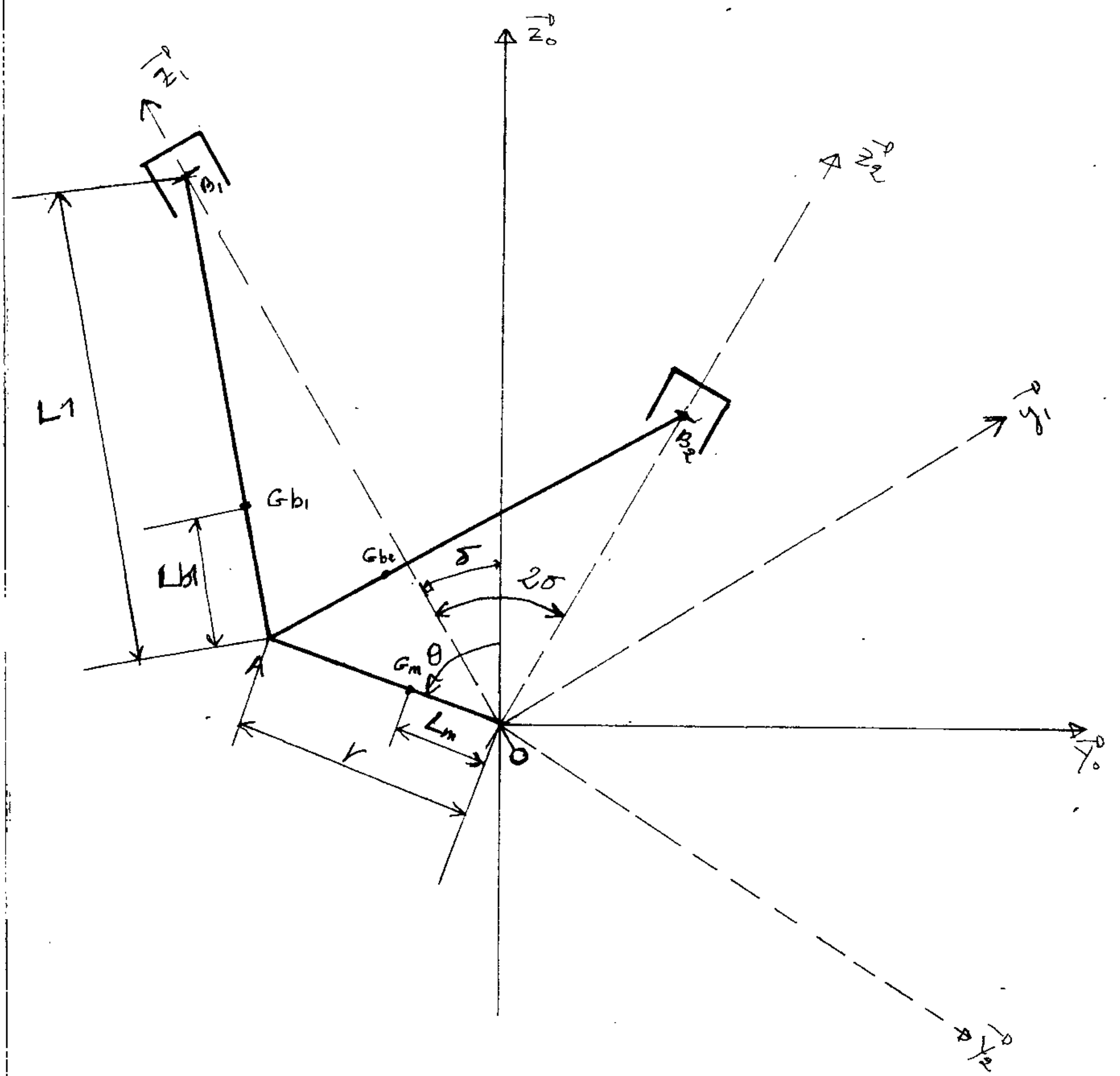


Fig. 4.1 Définition des repères d'un moteur en V

4.2.1 CINEMATIQUE DU POINT Gm

4.2.1.1 Position du point Gm

On a :

$$\overrightarrow{OG_m} = L_m \cos(\theta-\sigma)\vec{k_1} - L_m \sin(\theta-\sigma)\vec{j_1} \quad (4.1)$$

Le point Gm se deplace sur un cercle de centre O, de rayon Lm

4.2.1.2 Vitesse du point Gm.

On utilise la définition de la vitesse :

$$\vec{V}_{Gm} = \frac{d\overrightarrow{OG_m}}{dt} = -L_m\dot{\theta}\sin(\theta-\sigma)\vec{k_1} - L_m\dot{\theta}\cos(\theta-\sigma)\vec{j_1}$$

ou bien $\vec{V}_{Gm} = -L_m\dot{\theta}\left(\sin(\theta-\sigma)\vec{k_1} + \cos(\theta-\sigma)\vec{j_1}\right) \quad (4.2)$

4.2.1.3 Accélération du point Gm

On a :

$$\vec{a}_{Gm} = \frac{d\vec{V}_{Gm}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OG_m}}{dt^2}$$

d'où $\vec{a}_{Gm} = -L_m\left[\ddot{\theta}\sin(\theta-\sigma) + \dot{\theta}^2\cos(\theta-\sigma)\right]\vec{k_1} - L_m\left[\ddot{\theta}\cos(\theta-\sigma) - \dot{\theta}^2\sin(\theta-\sigma)\right]\vec{j_1} \quad (4.3)$

Si $\dot{\theta}$ = Constante, alors l'équation (4.3) s'écrit :

$$\vec{a}_{Gm} = -L_m\dot{\theta}^2\left[\cos(\theta-\sigma)\vec{k_1} - \sin(\theta-\sigma)\vec{j_1}\right] \quad (4.4)$$

On remarque que, si $\dot{\theta}$ = constante, le module de la vitesse et de l'accélération sont constant ($V_{Gm} = L_m\dot{\theta}$, $a_{Gm} = L_m\dot{\theta}^2$)

4.2.2 CINEMATIQUE DU POINT A

4.2.2.1 Position du point A

On a :

$$\vec{OA} = r(\cos(\theta-\sigma)\vec{k}_1 - \sin(\theta-\sigma))\vec{j}_1 \quad (4.5)$$

Le point A se déplace sur un cercle de centre O, de rayon r

4.2.2.2 Vitesse du point A.

On utilise la définition de la vitesse

$$\vec{V}_A = \frac{d\vec{OA}}{dt} = -r\dot{\theta}\left(\sin(\theta-\sigma)\vec{k}_1 + \cos(\theta-\sigma)\vec{j}_1\right) \quad (4.6)$$

4.2.2.3 Accélération du point A

Par définition, on a :

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{V}_A}{dt} = \frac{d^2\vec{OA}}{dt}$$

$$\vec{a}_A = -r\left[\ddot{\theta}\sin(\theta-\sigma) + \dot{\theta}^2\cos(\theta-\sigma)\right]\vec{k}_1 - r\left[\ddot{\theta}\cos(\theta-\sigma) - \dot{\theta}^2\sin(\theta-\sigma)\right]\vec{j}_1 \quad (4.7)$$

Si $\dot{\theta}$ = constante, alors on a :

$$\vec{a}_A = -r\dot{\theta}^2\left(\cos(\theta-\sigma)\vec{k}_1 - \sin(\theta-\sigma)\vec{j}_1\right) \quad (4.8)$$

423 CINEMATIQUE DU POINT Gb1

4.2.3.1 Position du point Gb1.

On a :

$$\vec{OGb_1} = \vec{OA} + \vec{AGb_1} \quad (4.9)$$

avec $\vec{OA} = r\left(\cos(\theta-\sigma)\vec{k}_1 - \sin(\theta-\sigma)\vec{j}_1\right) \quad (4.10)$

$\vec{AGb_1} = Lb1\cos\varphi\,\vec{k}_1 + Lb_1\sin\varphi\,\vec{j}_1 \quad (4.10)'$

d'après la loi des sinus appliquée au triangle OAB1 (voir fig. 4.2), on a.

$$\frac{\sin\varphi}{r} = \frac{\sin(\theta-\sigma)}{L_1}$$

d'où $\sin\varphi = \frac{r}{L_1}\sin(\theta-\sigma)$

Posons $k = \frac{r}{L_1}$, alors $\sin\varphi = k\sin(\theta-\sigma) \quad (4.11)$

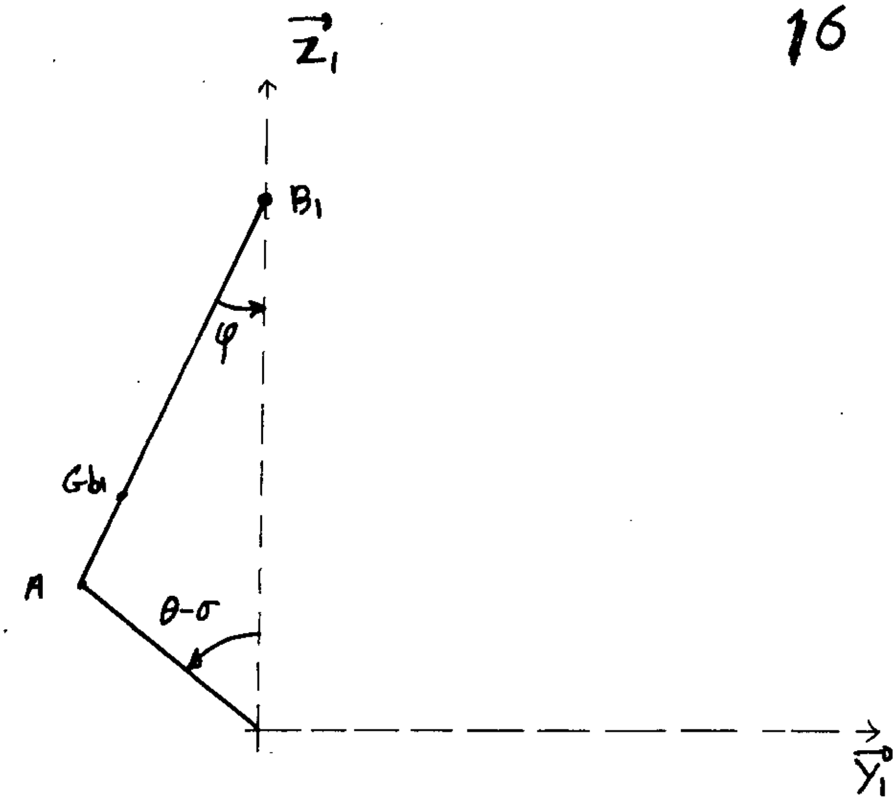


Fig. 4.2.

d'après la loi de cosinus, on a :

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

d'où
$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$$

en tenant compt de (4.11), on a :

$$\cos\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)} \qquad (4.12)$$

Finalement, on trouve, en tenant compt des relations (4.10), (4.10)', et (4.12) :

$$\vec{OG}_{b_1} = \left(r\cos(\theta-\sigma) + L_{b_1}\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}\right)\vec{k}_1 + \left(-r\sin(\theta-\sigma) + L_{b_1}k\sin(\theta-\sigma)\right)\vec{j}_1 \qquad (4.13)$$

4.2.3.2 Vitesse du point G_{b_1}

On utilise la définition, on trouve

$$\vec{V}_{G_{b_1}} = \frac{d\,\vec{OG}_{b_1}}{dt} = \left(-r\theta\sin(\theta-\sigma) - \frac{L_{b_1}k^2\sin(\theta-\sigma)\cos(\theta-\sigma)}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}}\right)\vec{k}_1 +$$

$$\left(-r\dot{\theta}\cos(\theta-\sigma)+Lb_1 k\,\dot{\theta}\cos(\theta-\sigma)\right)\vec{j_1} \qquad (4.14)$$

4.2.3.3 Accélération du point Gb1.

Par definition, on a:

$$\vec{a}_{Gb1}=\frac{d\vec{V}_{Gb1}}{dt}=\frac{d^2\,\vec{OG}_{b1}}{dt^2}=(r-Lb1k)\left(\dot{\theta}^2\sin(\theta-\sigma)-\ddot{\theta}\cos(\theta-\sigma)\right)\vec{j_1}+$$
$$\left(-r\ddot{\theta}\sin(\theta-\sigma)-r\dot{\theta}^2\cos(\theta-\sigma)-\frac{Lb_1k^2\ddot{\theta}\sin(\theta-\sigma)\cos(\theta-\sigma)}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}}-\right.$$
$$\left.\frac{Lb1k^2\dot{\theta}^2\cos^2(\theta-\sigma)}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}}+\frac{Lb_1k^2(1-k^2)\dot{\theta}^2\sin^2(\theta-\sigma)}{\left(1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)\right)^{3/2}}\right)\vec{k_1} \qquad (4.15)$$

Si $\dot{\theta}$ = constante, alors l'equation (4.15) devient:

$$\vec{a}_{Gb_1}=(r-Lb_1k)\,\dot{\theta}^2\sin(\theta-\sigma)\vec{j_1}+\left(-r\dot{\theta}^2\cos(\theta-\sigma)-\frac{Lb_1k^2\dot{\theta}^2\cos^2(\theta-\sigma)}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}}\right.$$
$$\left.+\frac{Lb1k^2(1-k^2)\dot{\theta}^2\sin^2(\theta-\sigma)}{\left(1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)\right)^{3/2}}\right)\vec{k_1} \qquad (4.16)$$

424 DETERMINATION DU CENTRE INSTANTANE DES VITESSES

Les triangles OB1P et ACP sont semblables, on a donc (voir fig. 4.3):

$$\frac{L_1\cos\varphi}{L_1\cos\varphi+r\cos(\theta-\sigma)}=\frac{PC}{PB1}=\frac{PA}{PA+r}$$

donc

$$\frac{PA+r}{PA}=\frac{L_1\cos\varphi+r\cos(\theta-\sigma)}{L_1\cos\varphi}=1+\frac{r}{L_1}\frac{\cos(\theta-\sigma)}{\cos\varphi}$$

ou bien

$$1+\frac{r}{PA}=1+k\frac{\cos(\theta-\sigma)}{\cos\varphi}$$

d'où finalement:
$$PA=\frac{r}{k}\frac{\cos\varphi}{\cos(\theta-\sigma)} \qquad (4.17)$$

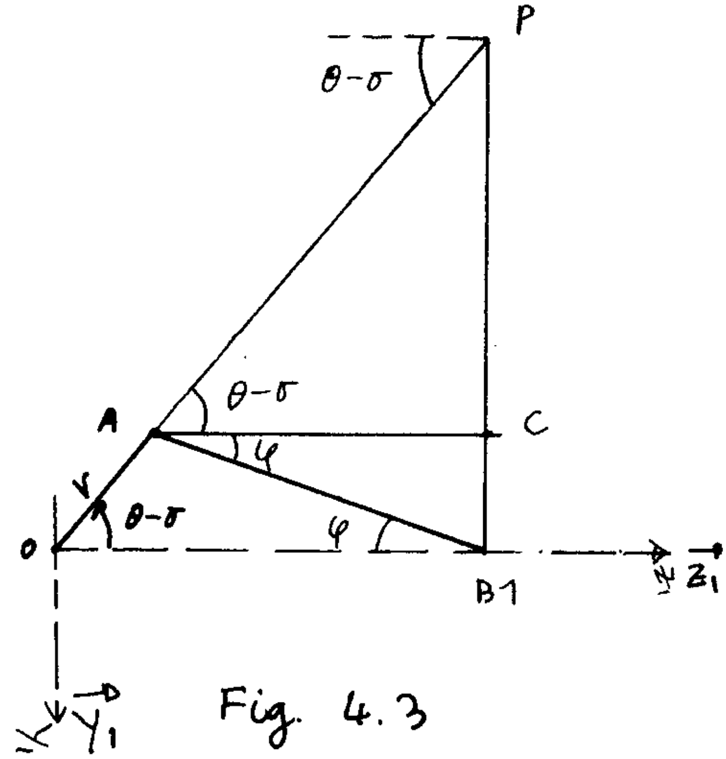


Fig. 4.3

En tenant compte des relations (4.11), (4.12), l'équation (4.17) s'écrit

$$PA = \frac{r\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}}{k\cos(\theta-\sigma)} \qquad (4.18)$$

De même, comme $PC = PA\sin(\theta-\sigma)$, on a:

$$PC = L1\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}\,.\,tg(\theta-\sigma) \qquad (4.19)$$

et $PB1 = PC + L1\sin\varphi = PC + r\sin(\theta-\sigma)$ donc

$$PB1 = L_1\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}\,tg(\theta-\sigma) + r\sin(\theta-\sigma) \qquad (4.20)$$

425 VITESSE ANGULAIRE DE LA PREMIERE BIELLE

Comme la bielle a un mouvement plan (dans le plan OYZ) alors sa vitesse angulaire est:

$$\vec{\omega}_{AB1} = \omega_{AB1}\,\vec{i}$$

et comme P est le centre instantané des vitesses, on a

$$\vec{V}_A = \vec{\omega}_{AB1} \wedge \vec{PA} \quad (4.21)$$

avec $\overrightarrow{PA} = \left(-\cos(\theta-\sigma)\vec{k}_1 + \sin(\theta-\sigma)\vec{j}_1\right)\dfrac{r\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}}{k\cos(\theta-\sigma)}$

d'où le produit vectoriel.

$$\overrightarrow{\omega_{AB1}} \wedge \overrightarrow{PA} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ \omega_{AB1} & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta-\sigma).PA & -\cos(\theta-\sigma)PA \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega_{AB1}} \wedge \overrightarrow{PA} = \omega_{AB1} PA\cos(\theta-\sigma)\vec{j}_1 + \omega_{BA1} PA\sin(\theta-\sigma)\vec{k}_1 \quad (4.22)$$

En tenant compt de (4.6), (4.21) et (4.22), on a.

$$-r\dot{\theta}\left(\sin(\theta-\sigma)\vec{k}_1 + \cos(\theta-\sigma)\vec{j}_1\right) = \omega_{AB1} PA\left(\cos(\theta-\sigma)\vec{j}_1 + \sin(\theta-\sigma)\vec{k}\right)$$

d'où $\omega_{AB1} PA = -r\dot{\theta}$

finalement : $$\omega_{AB1} = \frac{-r\dot{\theta}k\cos(\theta-\sigma)}{r\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}} \quad (4.23)$$

4.2.6 ACCELERATION ANGULAIRE DE LA PREMIERE BIELLE

Par definition, on a:

$$\overrightarrow{\varepsilon_{AB1}} = \frac{d\,\overrightarrow{\omega_{AB1}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{-\dot{\theta}k\cos(\theta-\sigma)}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}}\right]\vec{i}_1$$

d'où

$$\overrightarrow{\varepsilon_{AB1}} = \left(\frac{k(1-k^2)\dot{\theta}^2\sin(\theta-\sigma)}{(1-k^2\sin^2(\theta-\sigma))^{3/2}} - \frac{k\ddot{\theta}\cos(\theta-\sigma)}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}}\right)\vec{i}_1 \quad (4.24)$$

Si $\dot{\theta}$ = constante, on a.

$$\overrightarrow{\varepsilon_{AB1}} = \frac{k(1-k^2)\dot{\theta}^2\sin(\theta-\sigma)}{(1-k^2\sin^2(\theta-\sigma))^{3/2}}\ \vec{i}_1 \quad (4.25)$$

427 CINEMATIQUE DU POINT B1

4.2.7.1. Position du point B1

On a :

$$\overrightarrow{OB1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB1} = r\cos(\theta-\sigma)\vec{k}_1 - r\sin(\theta-\sigma)\vec{j}_1 +$$

$$L_1\cos\varphi\,\vec{k}_1 + L_1\sin\varphi\,\vec{j}_1$$

En tenant compt des relations (4.11) et (4.12), on obtient :

$$\overrightarrow{OB1} = \left(r\cos(\theta-\sigma) + L_1\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}\right)\vec{k}_1 \quad (4.26)$$

4.2.7.2 Vitesse du point B1

Par définition, on a :

$$\vec{V}_{B1} = \frac{d\overrightarrow{OB1}}{dt} = -\dot{\theta}\sin(\theta-\sigma)\left(r + \frac{L_1k^2\cos(\theta-\sigma)}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}}\right)\vec{k}_1$$

ou bien

$$\vec{V}_{B1} = -\dot{\theta}r\sin(\theta-\sigma)\left(1 + \frac{k\cos(\theta-\sigma)}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}}\right)\vec{k}_1 \quad (4.27)$$

en remplaçant k par $\frac{r}{L_1}$

4.2.7.3 l'accélération du point B1

Par définition, on a :

$$\vec{a}_{B1} = \frac{d\vec{V}_{B1}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OB1}}{dt^2} = -\left[\frac{L_1k^2(1-k^2)\dot{\theta}^2\sin^2(\theta-\sigma)}{(1-k^2\sin^2(\theta-\sigma))^{3/2}} - \left(r + \right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{L_1k^2\cos(\theta-\sigma)}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}}\right)\left(\dot{\theta}^2\cos(\theta-\sigma) + \ddot{\theta}\sin(\theta-\sigma)\right)\right]\vec{k}_1 \quad (4.28)$$

Si, de plus, $\dot{\theta}$ = Constante, on a :

$$\vec{a}_{B1} = \left[\frac{L_1 k^2 (1-k^2)\dot{\theta}^2 \sin^2(\theta-\sigma)}{(1-k^2\sin^2(\theta-\sigma))^{3/2}} - \left(r + \frac{L_1 k^2 \cos(\theta-\sigma)}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta-\sigma)}}\right)\dot{\theta}^2\cos(\theta-\sigma)\right]\vec{k_1}$$

(4.29)

4.2.8 CINEMATIQUE DU POINT Gb2*

4.2.8.1 Position du point Gb2

on a :

$$\vec{OGb_2} = \left(r\cos(\theta+\sigma) + Lb_2\sqrt{1-\lambda^2\sin^2(\theta+\sigma)}\right)\vec{k_2} +$$

$$\left(-r\sin(\theta+\sigma) + Lb_2\lambda\sin(\theta+\sigma)\right)\vec{j_2} \qquad (4.30)$$

4.2.8.2 Vitesse du point Gb2

on a :

$$\vec{V}_{Gb_2} = \left(-r\dot{\theta}\sin(\theta+\sigma) - Lb_2\lambda^2\frac{\dot{\theta}\sin(\theta+\sigma)\cos(\theta+\sigma)}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2(\theta+\sigma)}}\right)\vec{k_2}$$

$$+\left(-r\dot{\theta}\cos(\theta+\sigma) + Lb_2\lambda\dot{\theta}\cos(\theta+\sigma)\right)\vec{j_2} \qquad (4.31)$$

4.2.8.3 Accelération du point Gb2

on a :

$$\vec{a}_{Gb_2} = (r - Lb_2\lambda)\dot{\theta}^2\sin(\theta+\sigma)\vec{j_2} + \Big(-r\dot{\theta}^2\cos(\theta+\sigma) -$$

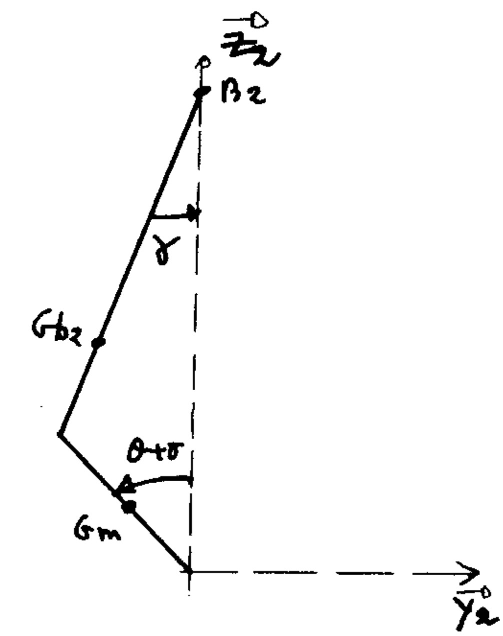
$$\frac{Lb_2\lambda^2\dot{\theta}^2\cos(\theta+\sigma)}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2(\theta+\sigma)}} + \frac{Lb_2\lambda^2(1-\lambda^2)\dot{\theta}^2\sin^2(\theta+\sigma)}{(1-\lambda^2\sin^2(\theta+\sigma))^{3/2}}\Big)\vec{k_2} \qquad (4.32)$$

avec $\dot{\theta}$ = constante. (voir fig. 4.4)

4.2.9 DETERMINATION DU CENTRE INSTANTANE DES VITESSES*

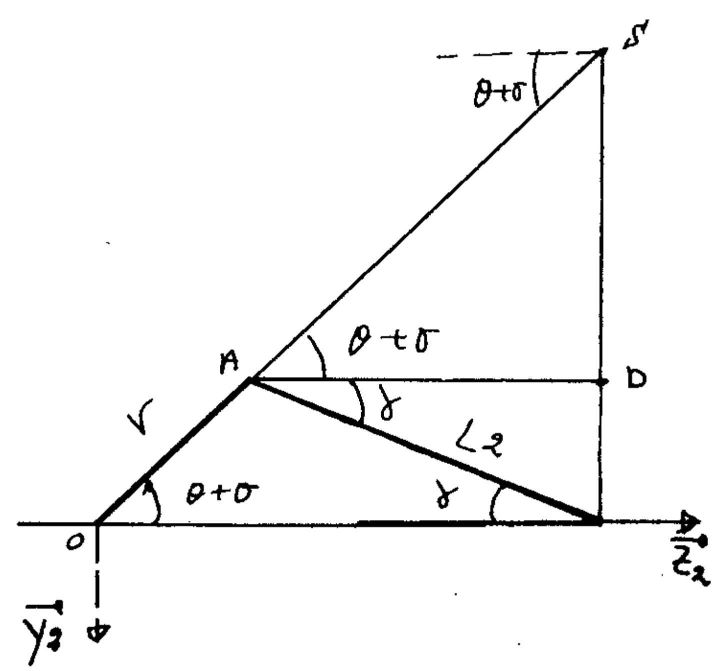
Voir fig. (4.5)

$$SA = \frac{r\sqrt{1-\lambda^2\sin^2(\theta+\sigma)}}{\lambda\cos(\theta+\sigma)} \qquad (4.33)$$



$\vec{z}_2$
B_2
γ
G_{b2}
$\theta+\sigma$
G_m
$\vec{y}_2$

Fig. 4.4.



S
$\theta+\sigma$
A
$\theta+\sigma$
D
γ
r
L_2
$\theta+\sigma$
γ
O
$\vec{z}_2$
$\vec{y}_2$

Fig. 4.5.

S est le centre instantané des vitesses.

$$PD = L2\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2(\theta+\sigma)} \quad (4.34)$$

$$PB2 = L2\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2(\theta+\sigma)}\, tg(\theta+\sigma) + r \sin(\theta+\sigma) \quad (4.35)$$

4.2.10 VITESSE ET ACCELERATION ANGULAIRES DE LA DEUXIEME BIELLE*

On a : $$\vec{\omega}_{AB2} = \frac{-\dot{\theta}\lambda \cos(\theta+\sigma)}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2(\theta+\sigma)}}\, \vec{i_2} \quad (4.36)$$

et $$\vec{\varepsilon}_{AB2} = \frac{\lambda(1-\lambda^2)\dot{\theta}^2 \sin(\theta+\sigma)}{(1-\lambda^2 \sin^2(\theta+\sigma))^{3/2}}\, \vec{i_2} \quad (4.37)$$

4.2.11 CINEMATIQUE DU POINT B2*

4.2.11.1 Position du point B2

on a :
$$\vec{OB_2} = \left(r\cos(\theta+\sigma) + L2\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2(\theta+\sigma)}\right)\vec{k_2} \quad (4.38)$$

4.2.11.2 Vitesse du point B2

On a :
$$\vec{V}_{B2} = -\dot{\theta} r \sin(\theta+\sigma)\left(1 + \frac{\lambda\cos(\theta+\sigma)}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2(\theta+\sigma)}}\right)\vec{k_2}$$
(4.39)

4.2.11.3 Accélération du point B2

on a :

$$\vec{a}_{B2} = \left[\frac{L2\lambda^2(1-\lambda^2)\dot{\theta}^2 \sin^2(\theta+\sigma)}{(1-\lambda^2 \sin^2(\theta+\sigma))^{3/2}} - \left(r + \frac{L2\lambda^2 \cos(\theta+\sigma)}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2(\theta+\sigma)}}\right)\cdot \dot{\theta}^2\right.$$
$$\left. \cos(\theta+\sigma)\right]\vec{k_2} \quad (4.40)$$

43 FORMULES DE PASSAGE ENTRE REPERES

Le passage du repère $(0, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ au repère $(0, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ se fait par la projection des axes $\vec{z_1}, \vec{y_1}$ sur $\vec{z_0}, \vec{y_0}$ donc on a :

$$\begin{cases} \vec{i_1} = \vec{i_0} \\ \vec{j_1} = \cos\sigma \, \vec{j_0} + \sin\sigma \, \vec{k_0} \\ \vec{k_1} = -\sin\sigma \, \vec{j_0} + \cos\sigma \, \vec{k_0} \end{cases} \qquad (4.41)$$

de même, pour le passage du repère $(0, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ au repère $(0, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ se fait par la projetion des axes $\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2}$ sur $\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}$ d'où on a :

$$\begin{cases} \vec{i_2} = \vec{i_0} \\ \vec{j_2} = \cos\sigma \, \vec{j_0} - \sin\sigma \, \vec{k_0} \\ \vec{k_2} = \sin\sigma \, \vec{j_0} + \cos\sigma \, \vec{k_0} \end{cases} \qquad (4.42)$$

44 RELATIONS CINEMATIQUES DES Gm A, Gb1, B1, Gb2 ET B2 DANS LE REPERE (O, X_0, Y_0, Z_0).

- Position du Gm.

$$\vec{OG_m} = L_m (\cos\theta \, \vec{k_0} - \sin\theta \, \vec{j_0}) \qquad (4.43)$$

- Vitesse du Gm

$$\vec{V_{Gm}} = -L_m \dot{\theta} (\cos\theta \, \vec{j_0} + \sin\theta \, \vec{k_0}) \qquad (4.44)$$

avec $\dot{\theta}$ = constante.

- Accélération du Gm.

$$\vec{a_{Gm}} = -L_m \dot{\theta}^2 (\cos\theta \, \vec{k_0} - \sin\theta \, \vec{j_0}) \qquad (4.45)$$

avec $\dot{\theta}$ = constante.

- Position du point A :

$$\overrightarrow{OA} = r(\cos\theta\,\vec{k_0} - r\sin\theta\,\vec{j_0}) \qquad (4.46)$$

- Vitesse du point A :

$$\overrightarrow{V_A} = -r\dot{\theta}(\sin\theta\,\vec{k_0} + \cos\theta\,\vec{j_0}) \qquad (4.47)$$

- Accélération du point A :

$$\overrightarrow{a_A} = -r\dot{\theta}^2(\cos\theta\,\vec{k_0} - \sin\theta\,\vec{j_0}) \qquad (4.48)$$

- Position du point Gb1 :

$$\overrightarrow{OGb_1} = (zb_1\cos\sigma + yb_1\sin\sigma)\vec{k_0} + (yb_1\cos\sigma - zb_1\sin\sigma)\vec{j_0} \qquad (4.49)$$

- Vitesse du point Gb1 :

$$\overrightarrow{V_{Gb_1}} = (\dot{z}b_1\cos\sigma + \dot{y}b_1\sin\sigma)\vec{k_0} + (\dot{y}b_1\cos\sigma - \dot{z}b_1\sin\sigma)\vec{j_0} \qquad (4.50)$$

- Accélération du point Gb1 :

$$\overrightarrow{a_{Gb_1}} = (\ddot{z}b_1\cos\sigma + \ddot{y}b_1\sin\sigma)\vec{k_0} + (\ddot{y}b_1\cos\sigma - \ddot{z}b_1\sin\sigma)\vec{j_0} \qquad (4.51)$$

- Position du point B1 :

$$\overrightarrow{OB_1} = ZB1(\cos\sigma\,\vec{k_0} - \sin\sigma\,\vec{j_0}) \qquad (4.52)$$

- Vitesse du point B1 :

$$\overrightarrow{V_{B_1}} = \dot{Z}B1(\cos\sigma\,\vec{k_0} - \sin\sigma\,\vec{j_0}) \qquad (4.53)$$

- Accélération du point B1 :

$$\overrightarrow{a_{B_1}} = \ddot{Z}B1(\cos\sigma\,\vec{k_0} - \sin\sigma\,\vec{j_0}) \qquad (4.54)$$

- Position du point Gb2 :

$$\overrightarrow{OG_{b2}} = (z_{b2}\cos\sigma - y_{b2}\sin\sigma)\overrightarrow{k_0} + (z_{b2}\sin\sigma + y_{b2}\cos\sigma)\overrightarrow{j_0}$$
(4.55)

- Vitesse du point G_{b2} :

$$\overrightarrow{V_{Gb2}} = (\dot{z}_{b2}\cos\sigma - \dot{y}_{b2}\sin\sigma)\overrightarrow{k_0} + (\dot{z}_{b2}\sin\sigma + \dot{y}_{b2}\cos\sigma)\overrightarrow{j_0}$$
(4.56)

- Accélération du point G_{b2} :

$$\overrightarrow{a_{Gb2}} = (\ddot{z}_{b2}\cos\sigma - \ddot{y}_{b2}\sin\sigma)\overrightarrow{k_0} + (\ddot{z}_{b2}\sin\sigma + \ddot{y}_{b2}\cos\sigma)\overrightarrow{j_0}$$
(4.57)

- Position du point $B2$:

$$\overrightarrow{OB2} = z_{B2}(\cos\sigma\,\overrightarrow{k_0} + \sin\sigma\,\overrightarrow{j_0}) \quad (4.58)$$

- Vitesse du point $B2$:

$$\overrightarrow{V_{B2}} = \dot{z}_{B2}(\cos\sigma\,\overrightarrow{k_0} + \sin\sigma\,\overrightarrow{j_0}) \quad (4.59)$$

- Accélération du point $B2$:

$$\overrightarrow{a_{B2}} = \ddot{z}_{B2}(\cos\sigma\,\overrightarrow{k_0} + \sin\sigma\,\overrightarrow{j_0}) \quad (4.60)$$

5. FORMULATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENE

51. GEOMETRIE DU MOTEUR ET SUSPENSION.

Nous prenons comme centre de cordonnée le point G coincidant avec le centre de gravité du moteur en position d'équilibre statique, et comme axes de coordonnées les axes GX, GY, GZ respectivement axes longitudinal, transversal et vertical (Fig. 51).

Les deplacements possibles correspondants sont alors :

- translation suivant GX : mouvement longitudinal (X) (avance)
- translation suivant GY : mouvement transversal (Y) (ballant)
- translation suivant GZ : mouvement vertical (Z) (Rebondissement)
- rotation autour de GX : mouvement de roulis (θ_m)
- rotation autour de GY : mouvement de galop (ψ_m)
- rotation autour de GZ : mouvement de lacet (φ_m)

Le moteur est suspendu sur des plots (elements elastiques avec amortissement) en quatre points A, B, C et D situés dans un plan appelé plan de suspension les cordonnées de ces point sont :

$$\begin{aligned} &A(l_1, d_1, -h) \quad , \quad B(l_1, -d_2, -h) \\ &C(-l_2, d_1', -h') \quad , \quad D(-l_2, -d_2', -h') \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Les plots sont deux à deux identiques, en A et B (plot avant) et C et D (plots arrière). Leurs rigidités et amortissement principaux sont orientés parallèlement aux axes de coordonnées (Fig. 5.2) et on les note par:

K_h et λ_h pour les plots avant } suivant les axes x et y
K'_h et λ'_h pour les plots arrières } (direction horizontale)

K_1, K_2, K_3 et λ_v pour les plots Avant } suivant la direction verticale
K'_1, K'_2, K'_3 et λ'_v pour les plots arrière } (axe Gz)

REMARQUES

- Les plots admettent une force non linéaire suivant z tel que

$$f(z) = k_3 z^3 + k_2 z^2 + k_1 z$$

- Les rigidités torsionnelles sont nulles $c_x = c_y = c_z = 0$.

5.2 DEPLACEMENT DES POINTS DE FIXATION PAR RAPPORT AU CHASSIS

On considère un système à six degrés de liberté $x, y, z, \varphi_m, \theta_m$, et ψ_m. Les déplacements de chaque point en fonction des coordonnées généralisées sont (voir Fig. 5.1, 5.2) :

$$A \begin{cases} x_1 = x - h\,\psi_m - d_1\,\varphi_m \\ y_1 = y + h\,\theta_m + l_1\,\varphi_m \\ z_1 = z + d_1\,\theta_m - l_1\,\psi_m \end{cases} \qquad (5.2)$$

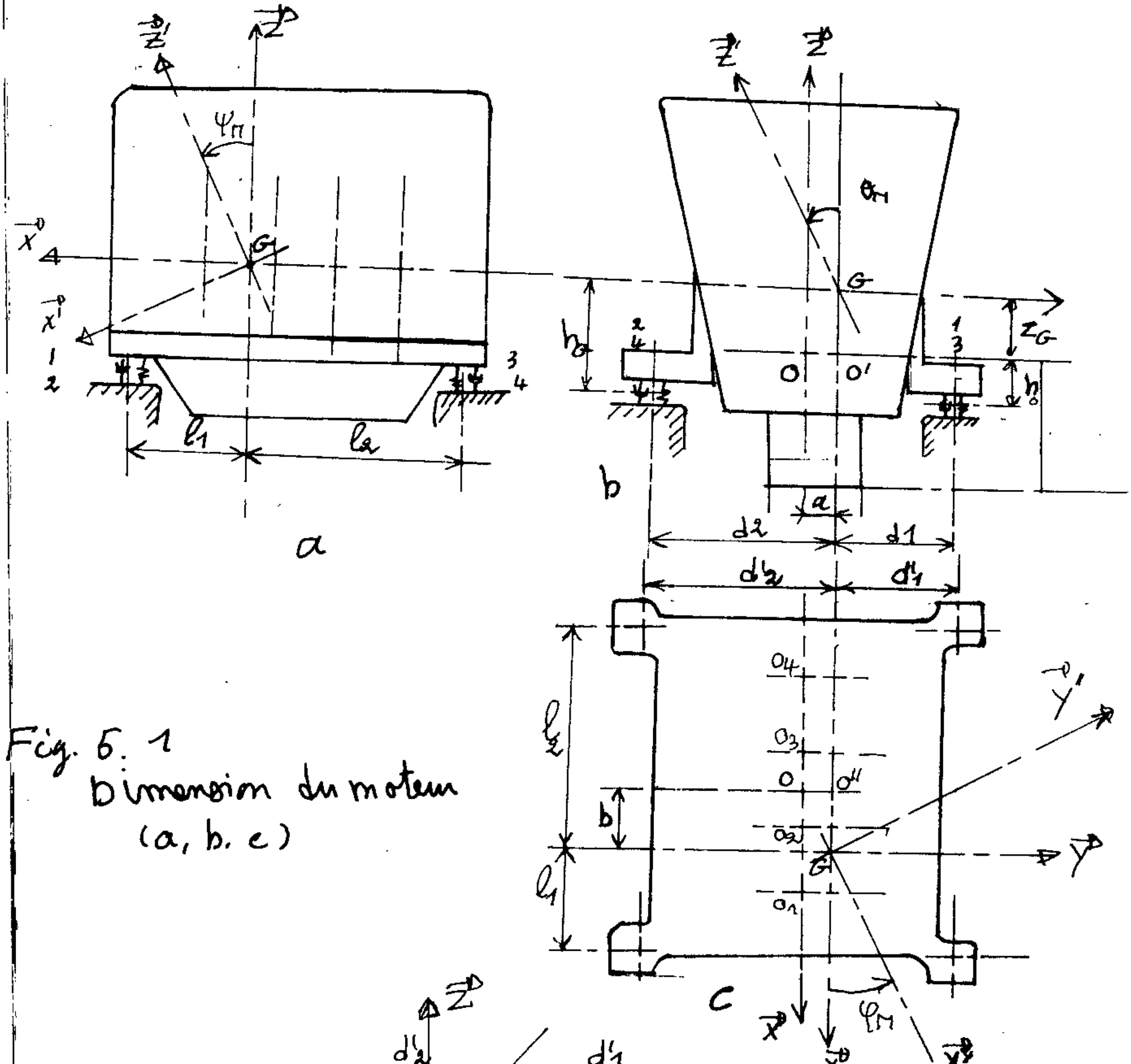


Fig. 5. 1
Dimension du moteur
(a, b. c)

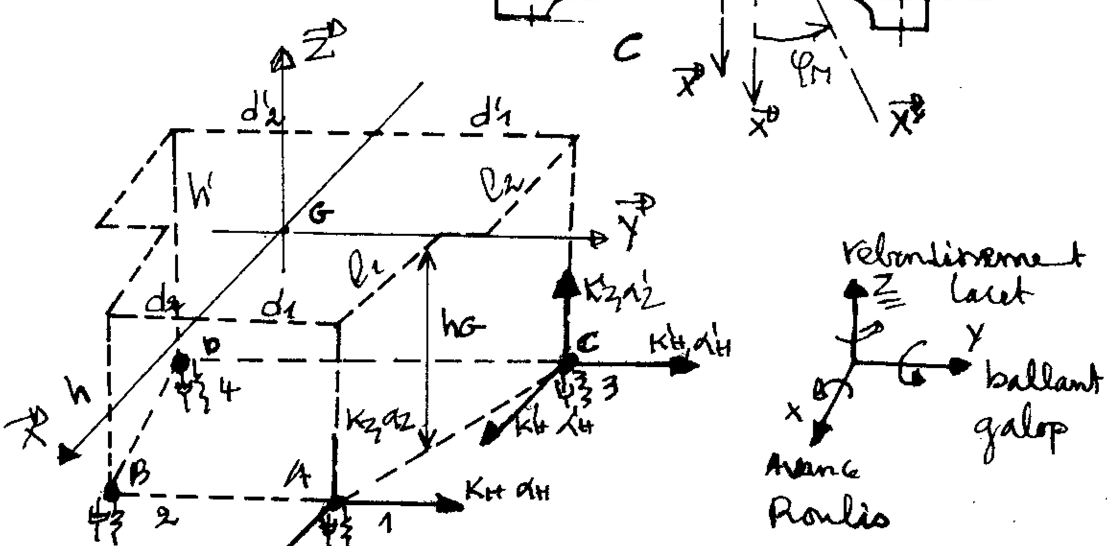


Fig. 5. 2 . Geometrie du moteur avec
la suspension (moteur non figuré)

$$B \quad \begin{cases} x_2 = x - h\psi_M - d_2\varphi_M \\ y_2 = y + h\theta_M + l_1\varphi_M \\ z_2 = z - d_2\theta_M - l_1\varphi_M \end{cases} \qquad (5.3)$$

$$C \quad \begin{cases} x_3 = x - h'\psi_M - d_1'\varphi_M \\ y_3 = y + h'\theta_M - l_2\varphi_M \\ z_3 = z + d_1'\theta_M + l_2\varphi_M \end{cases} \qquad (5.4)$$

$$D \quad \begin{cases} x_4 = x - h'\psi_M + d_2\varphi_M \\ y_4 = y + h'\theta_M - l_2\varphi_M \\ z_4 = z - d_1'\theta_M + l_2\varphi_M \end{cases} \qquad (5.5)$$

5.3. ENERGIE DE DISSIPATION

L'énergie de dissipation s'écrit

$$D = \frac{1}{2}\alpha_H(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}\alpha_H'(\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2) + \frac{1}{2}\alpha_H(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}\alpha_H'(\dot{y}_3^2 + \dot{y}_4^2) + \frac{1}{2}\alpha_V(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2}\alpha_V'(\dot{z}_3^2 + \dot{z}_4^2) \qquad (5.6)$$

ou bien

$$D = \frac{1}{2}\alpha_H\left[(\dot{x} - h\dot{\psi}_M - d_1\dot{\varphi}_M)^2 + (\dot{x} - h\dot{\psi}_M + d_2\dot{\varphi}_M)^2\right] + \frac{1}{2}\alpha_H'\left[(\dot{x} - h'\dot{\psi}_M - d_1'\dot{\varphi}_M)^2 + (\dot{x} - h'\dot{\psi}_M + d_2'\dot{\varphi}_M)^2\right] + \frac{1}{2}\alpha_H\left[(\dot{y} + h\dot{\theta}_M + l_1\dot{\varphi}_M)^2 + (\dot{y} + h\dot{\theta}_M + l_1\dot{\varphi}_M)^2\right] + \frac{1}{2}\left[(\dot{y} + h'\dot{\theta}_M - l_2\dot{\varphi}_M)^2 + (\dot{y} + h'\dot{\theta}_M - l_2\dot{\varphi}_M)^2\right]\alpha_H' + \frac{1}{2}\alpha_V\left[(\dot{z} + d_1\dot{\theta}_M - l_1\dot{\varphi}_M)^2 + (\dot{z} - d_2\dot{\theta}_M - l_1\dot{\varphi}_M)^2\right] + \frac{1}{2}\alpha_V'\left[(\dot{z} + d_1'\dot{\theta}_M + l_2\dot{\varphi}_M)^2 + (\dot{z} - d_1'\dot{\theta}_M + l_2\dot{\varphi}_M)^2\right]$$

$$(5.7)$$

Derivons l'energies dissipative par rapport aux vitesse, alors on a.

$$\bullet\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 2(\lambda_h+\lambda'_h)\dot{x} - 2(\lambda_h h + \lambda'_h h')\dot{\varphi}_M + \left[\lambda_h(d_2-d_1) + \lambda'_h(d'_2-d'_1)\right]\dot{\varphi}_M \qquad (5.8)$$

$$\bullet\ \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = 2(\lambda_h+\lambda'_h)\dot{y} + 2(\lambda_h h + \lambda'_h h')\dot{\theta}_M + 2(l_1\lambda_h - l_2\lambda'_h)\dot{\varphi}_M \qquad (5.9)$$

$$\bullet\ \frac{\partial D}{\partial \dot{z}} = 2(\lambda_v+\lambda'_v)\dot{z} + \left[\lambda_v(d_1-d_2) + \lambda'_v(d'_1-d'_2)\right]\dot{\theta}_M - 2(\lambda_v l_1 - \lambda'_v l_2)\dot{\psi}_M \qquad (5.10)$$

$$\bullet\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_M} = 2(\lambda_h h + \lambda'_h h')\dot{y} + \left[\lambda_v(d_1-d_2) + \lambda'_v(d'_1-d'_2)\right]\dot{z} + \left[2(\lambda_h h^2 + \lambda'_h h'^2) + \lambda_v(d_1^2+d_2^2) + \lambda'_v(d_1'^2+d_2'^2)\right]\dot{\theta}_M + 2(\lambda_h h l_1 - \lambda'_h h' l_2)\dot{\varphi}_M - \left[l_1(d_1-d_2)\lambda_v - l_2(d'_1-d'_2)\lambda'_v\right]\dot{\psi}_M \qquad (5.11)$$

$$\bullet\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\psi}_M} = -2(\lambda_h h + \lambda'_h h')\dot{x} - 2(\lambda_v l_1 - \lambda'_v l_2)\dot{z} - \left[l_1\lambda_v(d_1-d_2) - l_2\lambda'_v(d'_1-d'_2)\right]\dot{\theta}_M + \left[\lambda_h h(d_1-d_2) + \lambda'_h h'(d'_1-d'_2)\right]\dot{\varphi}_M + 2\left[\lambda_h h^2 + \lambda'_h h'^2 + \lambda_v l_1^2 + \lambda'_v l_2^2\right]\dot{\psi}_M \qquad (5.12)$$

$$\bullet\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_M} = -\left[\lambda_h(d_1-d_2) + \lambda'_h(d'_1-d'_2)\right]\dot{x} + 2\left[\lambda_h l_1 - \lambda'_h l_2\right]\dot{y} + 2(h l_1\lambda_h - h' l_2\lambda'_h)\dot{\theta}_M + \left[\lambda_h h(d_1-d_2) + h'\lambda'_h(d'_1-d'_2)\right]\dot{\psi}_M + \left[\lambda_h(d_1^2+d_2^2+2l_1^2) + \lambda'_h(d_1'^2+d_2'^2+2l_2^2)\right]\dot{\varphi}_M \qquad (5.13)$$

54 FORCES GENERALISEES

Les forces et couples exterieures agissant sur le moteur sont :

- le poids propre Mg qui va s'equilibrer à l'etat statique.
- Couple de renversement naturel – Cm
- les forces dues à l'elasticité des plots : reaction des appuis (horizontales et verticales)

On pourra donc definir les forces généralisées correspondantes aux deplacements considérés.

541 FORCES GENERALISEES SUIVANT(X)

Soit un déplacement virtuel (δx) suivan x

on a. $Q_x \cdot \delta x = \Sigma W_{Ext} = [F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) + F(x_4)]\,\delta x$.

donc $Q_x = F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) + F(x_4)$

$Q_x = K_h x_1 + K_h x_2 + K'_h x_3 + K'_h x_4$

d'où $Q_x = 2(K_h + K'_h)x - 2(K_h h + K'_h h')\varphi_M + [K_h(d_2 - d_1) + K'_h(d'_2 - d'_1)]\,\varphi_M$. (5.14)

542 FORCES GENERALISEES SUIVANT (Y)

Soit un deplacement virtuel δy suivant (y) alors

on a. $Q_y \, \delta y = \Sigma W_{Ext\,y} = (F(y_1) + F(y_2) + F(y_3) + F(y_4))\,\delta y$

d'où $Q_y = K_h y_1 + K_h y_2 + K'_h y_3 + K'_h y_4$.

d'où $Q_y = 2(K_h + K_h) y + 2(K_h h + K'_h h')\,\theta_M + 2(l_1 K_h - l_2 K'_h)$

$\cdot \varphi_M$ (5.15)

543 FORCES GENERALISEES SUIVANT (Z)

Soit un deplacement vertuel δz suivant (z)

On a: $Q_z \delta z = \sum W(F_{ext})$

$$Q_z \delta z = \left(F(z_1) + F(z_2) + F(z_3) + F(z_4) \right) \delta z$$

d'où $Q_z = F(z_1) + F(z_2) + F(z_3) + F(z_4)$

$$Q_z = k_3 z_1^3 + k_2 z_1^2 + k_1 z_1 + k_3 z_2^3 + k_2 z_2^2 + k_1 z_2 + k'_3 z_3^3 + k'_2 z_3^2$$

$$+ k'_1 z_3 + k'_3 z_4^3 + k'_2 z_4^2 + k'_1 z_4$$

$$Q_z = k_3 \left(z_1^3 + z_2^3 \right) + k'_3 \left(z_3^3 + z_4^3 \right) + k_2 \left(z_1^2 + z_2^2 \right) + k'_2 \left(z_3^2 + z_4^2 \right) +$$

$$k_1 (z_1 + z_2) + k'_1 (z_3 + z_4) \qquad (5.16)$$

544 FORCES GENERALISEES SUIVANT (θ_M)

Soit un deplacement vertuel $\delta \theta_M$

On a $\sum W(M(F_{ext})) = Q_{\theta_M} \cdot \delta \theta_M$.

$$\sum M(F_{ext}) = \left(F(z_1) d_1 + F(z_3) d'_1 - F(z_2) d_2 - F(z_4) d'_2 + K_h (y_1 + y_2) h \right.$$

$$\left. + K'_h (y_3 + y_4) h' - C_m \right)$$

alors

$$Q_\theta = K_3(d_1 z_1^3 - d_2 z_2^3) + k_3'(d_1' z_3^3 - d_2' z_4^3) +$$

$$k_2(d_1 z_1^2 - d_2 z_2^2) + k_2'(d_1' z_3^2 - z_4^2 d_2') + K_h(y_1 + y_2)h +$$

$$K_h'(y_3 + y_4)h' - C_m. \qquad (5\,17)$$

545FORCES GENERALISEES SUIVANT (ψ_M)

Soit un deplacement vertuel $\delta\psi_M$ suivant ψ_M

on a : $Q_{\psi_M} . \delta\psi_M = \sum W(M(F_{ext}))$

$$Q_{\psi_M} = [F(z_3) + F(z_4)]\,l_2 - [F(z_1) + F(z_2)]\,l_1$$

$$-[F(x_1) + F(x_2)]\,h - [F(x_3) + F(x_4)]\,h'$$

d'où

$$Q_{\psi_M} = [k_3'(z_3^3 + z_4^3) + k_2'(z_3^2 + z_4^2)]\,l_2 - [k_3(z_1^3 + z_2^3) +$$

$$k_2(z_1^2 + z_2^2)]\,l_1 - 2(K_h h + K_h' h')X + 2(k_1' l_2 - k_1 l_1)Z +$$

$$(k_1' l_2(d_1' - d_2') - k_1 l_1(d_1 - d_2))\,\theta_M + (2(k_1' l_2^2 - k_1 l_1^2) + 2(K_h h^2 +$$

$$K_h' h'^2))\,\psi_M - [K_h h(d_2 - d_1) + K_h' h'(d_2' - d_1')]\,\varphi_M \quad (5.\,18)$$

546FORCES GENERALISEES SUIVANT (φ_M)

Soit un deplacement vertuel $\delta\varphi_M$, on a donc

$$Q_{\varphi_M} . \delta\varphi_M = \sum W(M(F_{ext}))$$

d'où $Q_{\varphi_M} = [F(y_1) + F(y_2)]\,l_1 - [F(y_3) + F(y_4)]\,l_2$

$$+ F(x_2)d_2 + F(x_4)d'_2 - F(x_1)d_1 - F(x_3)d'_1$$

d'où
$$Q\varphi_M = \left[K_h(d_2-d_1)+K'_h(d'_2-d'_1)\right]X + 2(K_h l_1 - K'_h l_2)Y$$
$$+2(K_h l_1 h - K'_h l_2 h')\theta_M + \left[K_h(d_1 h - d_2 h) + K'_h h'(d'_1 - d'_2)\right]\varphi_M$$
$$+\left[2(K_h l_1^2 + K'_h l_2^2) + K_h(d_2^2 + d_1^2) + K'_h(d_2'^2 + d_1'^2)\right]\varphi_M.$$

(5 19)

55 ENERGIE CINETIQUE

551 RAPPEL

L'energie cinétique du corps dans le mouvement general.

O : est le pole

$\vec{r}$: rayon position de la masse dm.

$\vec{r}_0$: rayon position du pole O

$\vec{\rho}$: rayon position relatif du point materiel dm

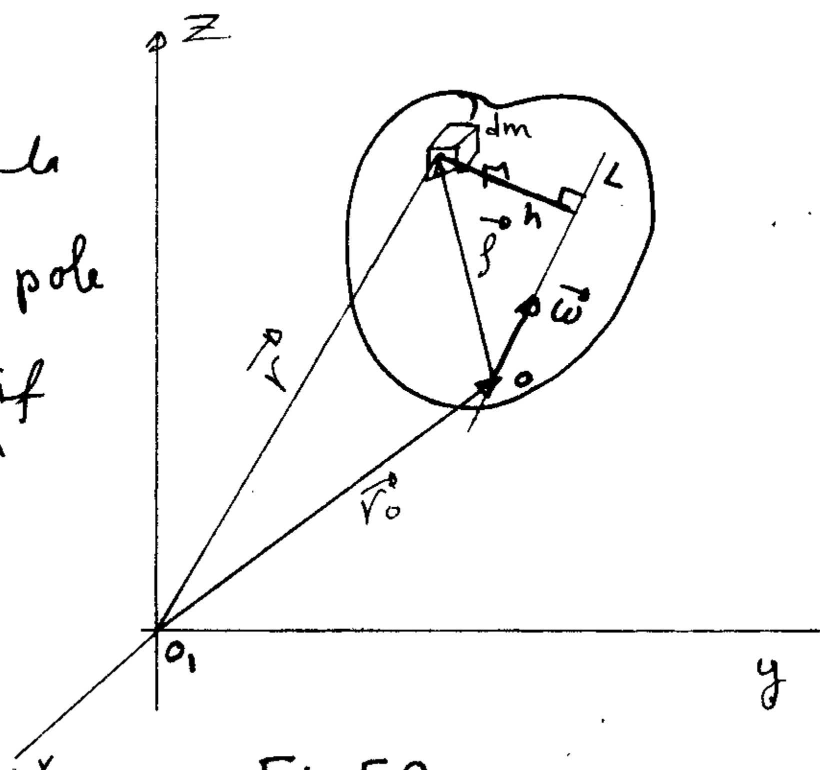


Fig 5.3.

Par définition, l'energie cinique du point materiel M de masse dm est :

$$dT = \frac{1}{2} V^2 dm. \quad (5.20)$$

On a : $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

avec $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}$

d'où $\vec{V} = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{\rho}$

$$V^2 = \dot{r}_0^2 + 2.\dot{\vec{r}}_0 . (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho}) + (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho})^2$$

On pose $\vec{V}_0 = \dot{\vec{r}}_0$

alors l'équation (5.20) devient

$$dT = \frac{1}{2} V_0^2 dm + \vec{V}_0 . (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho})\, dm + \frac{1}{2} (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho})^2 dm$$

alors l'énergie cinétique du système est :

$$T = \int_{(m)} dT = \frac{1}{2} m V_0^2 + \vec{V}_0 . \int_m (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho})\, dm + \frac{1}{2} \int_m (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho})^2 dm$$

ou bien

$$T = \frac{1}{2} m V_0^2 + \vec{V}_0 . \int_m (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho})\, dm + \frac{1}{2} \omega^2 \int_m h^2\, dm$$

d'où $T = \frac{1}{2} m V_0^2 + \vec{V}_0 . \int_m (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho})\, dm + \frac{1}{2} \omega^2 J_L \quad (5.21)$

avec J_L moment d'inertie de la masse par rapport à l'axe instantané de rotation.

Mais, nous appliquons le théorème de Koenig qui s'énonce comme suit :

"L'énergie cinétique d'un solide dans son mouvement absolu est égale à l'énergie cinétique dans le mouvement autour du centre d'inertie augmentée de l'énergie cinétique du centre d'inertie affecté de la masse totale

Il se tra duit par.

$$E_c^{\circ} = E_c^{\circ *} + \frac{1}{2} m V^{\circ 2}(G)$$

ou bien $E_c^{\circ} = \frac{1}{2} m V^{\circ 2}(G) + \frac{1}{2} \vec{\omega}^{t} \cdot [I] \cdot \vec{\omega}^{\circ}$ (5.22)

où $V^{\circ}(G)$ est la vitesse absolue du centre de gravité de l'element Considéré.

Ce théorème est le cas particulier de la relation (5.21) en faisant $O = S$ = centre de masse alors.

$$\vec{V_0} \cdot \int (\bar{\omega} \wedge \bar{\rho}_s)\, dm = \bar{V}_0 \wedge \bar{\omega} \wedge \int_m \bar{\rho}_s\, dm = 0$$

Car $\int \bar{\rho}\, dm$ = centre de masse.

donc $T = \frac{1}{2} m V_s^2 + \frac{1}{2} \omega^2 J_L$.

Donc on a besoin des vitesses absolues des differents points.

552 CALCUL DES VITESSES ABSOLUES _DU BLOC MOTEUR

Elle est donnée par.

$$\vec{V}^{\circ}_{bm} = \dot{x}\,\vec{i}^{\circ} + \dot{y}\,\vec{j}^{\circ} + \dot{z}\,\vec{k} \quad (5.23)$$

la vitesse de rotation est :

$$\vec{\omega}^{\circ}_{bm} = \dot{\theta}_M\,\vec{i}^{\circ} + \dot{\varphi}_M\,\vec{j}^{\circ} + \dot{\varphi}_M\,\vec{k} \quad (5.24)$$

DE LA MANIVELLE

On a : $\overrightarrow{GG_m} = \overrightarrow{GO_i^\circ} + \overrightarrow{O_i^\circ G_m}$

$\overrightarrow{GO_i^\circ} = \overrightarrow{GO'} + \overrightarrow{O'O''} + \overrightarrow{O''O} + \overrightarrow{OO_i}$ (voir Fig 5.4)

Fig 5.4) donc

$\overrightarrow{GO_i^\circ} = [-Z_G \sin\psi_M + (P_i^\circ - b)\cos\psi_M + (P_i^\circ - b)\cos\psi_M + a\sin\psi_M]\vec{i} + [Z_G \sin\theta_M + (P_i^\circ - b)\sin\psi_M - a\cos\theta_M]\vec{j} + [-Z_G\cos\theta_M - Z_G\cos\psi_M - (P_i^\circ - b)\sin\psi_M - a\sin\theta_M - a\cos\psi_M]\vec{k}$

$\overrightarrow{O_i^\circ G_m} = L_m \cos\theta\, \vec{k'} - L_m \sin\theta\, \vec{j'}$

avec (A)
$$\begin{cases} \vec{j'} = -\sin\psi_M\,\vec{i} + (\cos\theta_M + \sin\theta_M)\vec{j} + \sin\psi_M)\vec{k} \\ \vec{k'} = \sin\psi_M\,\vec{i} - \sin\theta_M\,\vec{j} + (\cos\theta_M + \sin\psi_M)\vec{k} \end{cases}$$

(voir ANNEX)

d'où on a :

$\overrightarrow{O_i^\circ G_m} = L_m[\cos\theta\sin\psi_M + \sin\theta\sin\psi_M]\vec{i} - L_m[\cos\theta\sin\theta_M + \sin\theta\cos\theta_M]\vec{j} + L_m[\cos\theta(\cos\theta_M + \cos\psi_M) - \sin\theta(\sin\theta_M + \cos\psi_M)]\vec{k}$

d'où la vitesse du point G_m

$$\vec{V}_{Gm} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \frac{d\overrightarrow{GG_m}}{dt}$$

$\vec{V}_{Gm} = [\dot{x} + \dot{\psi}_M(-Z_G\cos\psi_M - (P_i^\circ - b)\sin\psi_M + L_m\cos\theta\cos\psi_M)$

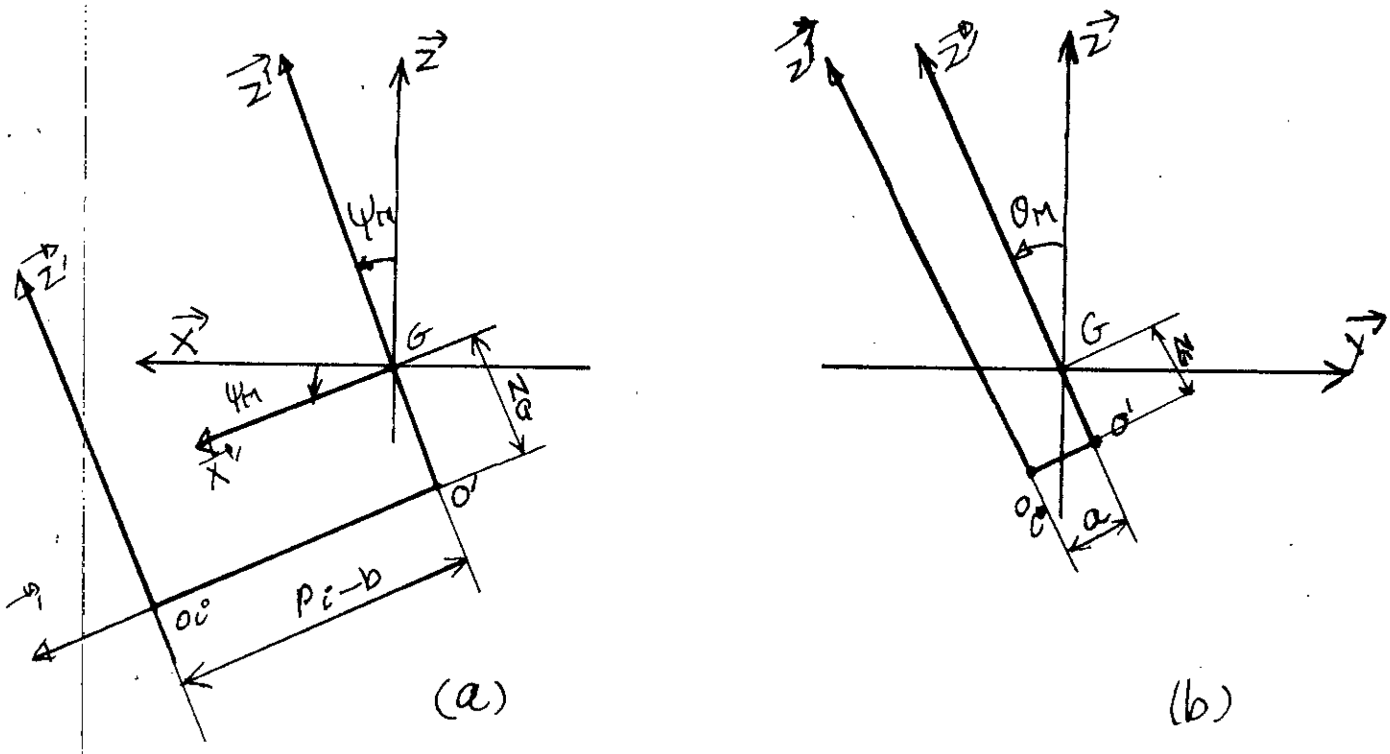
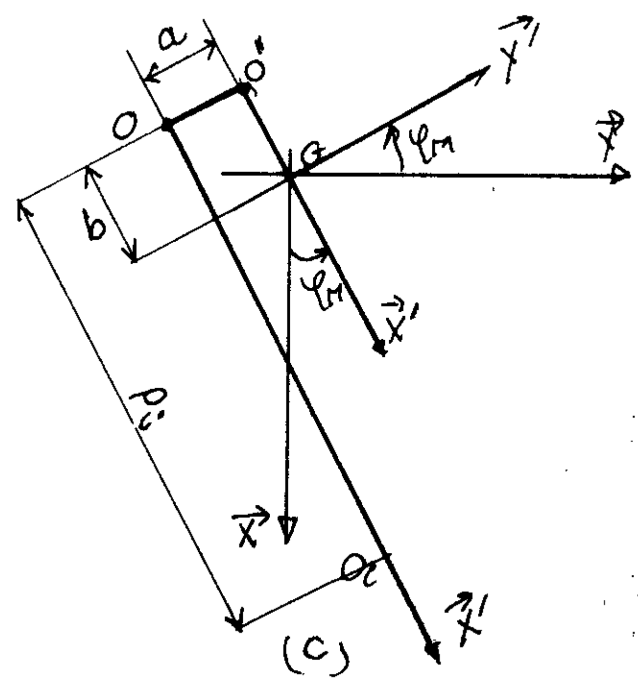


Fig. 54
Définition des mouvements
et des repères.
a/ mouvement de galop (ψ_M)
b/ mouvement de Roulis (θ_M)
c/ mouvement de lacet (φ_M)



$+ \dot{\varphi}_M\left(-(\rho_{i^\circ}-b)\sin\varphi_M + a\cos\varphi_M + L_m\sin\theta\cos\varphi_M\right) + \dot{\theta}\left(-L_m\right.$ $\left.\sin\theta\sin\varphi_M + L_m\cos\theta\sin\varphi_M\right)\Big]\vec{i} + \Big[\dot{y} + \dot{\theta}_M\left(Z_G\cos\theta_M + a\right.$ $\sin\theta_M - L_m\cos\theta\cos\theta_M + L_m\sin\theta\sin\theta_M\big) + \dot{\varphi}_M\,(\rho_{i^\circ}-b)\cos\varphi_M$ $+ \dot{\theta}\left(L_m\sin\theta\sin\theta_M - L_m\cos\theta\cos\theta_M\right)\Big]\vec{j} + \Big[\dot{z} + \dot{\theta}_M\big(Z_G\sin\theta_M -$ $a\cos\theta_M - L_m\cos\theta\sin\theta_M - L_m\sin\theta\cos\theta_M\big) + \dot{\varphi}_M\big(Z_G\sin\varphi_M$ $-(\rho_{i^\circ}-b)\cos\varphi_M - L_m\cos\theta\sin\varphi_M\big) + \dot{\varphi}_M\big(a\sin\varphi_M + L_m\sin\theta$ $\sin\varphi_M\big) + \dot{\theta}\big(-L_m\sin\theta(\cos\theta_M + \cos\varphi_M) - L_m\cos\theta(\sin\theta_M$ $+\cos\varphi_M)\big)\Big]\vec{k}$ (5.25)

_ DE LA PREMIERE BIELLE

On a : $\overrightarrow{GG_{b1}} = \overrightarrow{GO_{i^\circ}} + \overrightarrow{O_{i^\circ}G_{b1}}$

$\overrightarrow{O_{i^\circ}G_{b1}} = (z_{b1}\cos\sigma + y_{b1}\sin\sigma)\vec{k}' + (y_{b1}\cos\sigma - z_{b1}\sin\sigma)\vec{j}'$

En tenant compte des relations (A), on obtient

$\overrightarrow{O_{i^\circ}G_{b1}} = \big[(z_{b1}\cos\sigma + y_{b1}\sin\sigma)\sin\varphi_M - (y_{b1}\cos\sigma - z_{b1}\sin\sigma)\sin\varphi_M\big]\vec{i}$ $+\big[(y_{b1}\cos\sigma - z_{b1}\sin\sigma)\cos\theta_M - (z_{b1}\cos\sigma + y_{b1}\sin\sigma)\sin\theta_M\big]\vec{j}$ $+\big[(z_{b1}\cos\sigma + y_{b1}\sin\sigma)(\cos\theta_M + \cos\varphi_M) + (y_{b1}\cos\sigma - z_{b1}\sin\sigma)\cdot$ $(\sin\theta_M + \cos\varphi_M)\big]\vec{k}$

d'où la vitesse

$$\vec{V}_{G_{b1}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \frac{d\overrightarrow{GG_{b1}}}{dt}$$

$$\vec{V}_{Gb1} = \Big[\dot{x} + \dot{\psi}_M\big(-z_G\cos\psi_M - (P_{io}-b)\sin\psi_M\big) + \dot{\varphi}_M\big(-(P_{io}-b)\sin\varphi_M + a\cos\varphi_M\big) + (\dot{z}_{b1}\cos\sigma + \dot{y}_{b1}\sin\sigma)\sin\psi_M + (z_{b1}\cos\sigma + y_{b1}\sin\sigma)\dot{\psi}_M \cos\psi_M - (\dot{y}_{b1}\cos\sigma - \dot{z}_{b1}\sin\sigma)\sin\varphi_M - (y_{b1}\cos\sigma - z_{b1}\sin\sigma)\dot{\varphi}_M . \cos\varphi_M\Big]\vec{i} + \Big[\dot{y} + \dot{\theta}_M\big(z_G\cos\theta_M + a\sin\theta_M - (z_{b1}\cos\sigma + y_{b1}\sin\sigma). \cos\theta_M - (y_{b1}\cos\sigma - z_{b1}\sin\sigma)\sin\theta_M\big) + \dot{\varphi}_M\big((P_{io}-b)\cos\varphi_M\big) - (\dot{z}_{b1}\cos\sigma + y_{b1}\sin\sigma)\sin\theta_M + (\dot{y}_{b1}\cos\sigma - \dot{z}_{b1}\sin\sigma)\cos\theta_M\Big]\vec{j} + \Big[\dot{z} + \dot{\theta}_M\big(z_G\sin\theta_M - a\cos\theta_M - (z_{b1}\cos\sigma + y_{b1}\sin\sigma)\sin\theta_M + (y_{b1}\cos\sigma - z_{b1}\sin\sigma)\cos\theta_M\big) + \dot{\psi}_M\big(z_G\sin\psi_M - (P_{io}-b)\cos\psi_M - (z_{b1}\cos\sigma + y_{b1}\sin\sigma)\sin\psi_M\big) + \dot{\varphi}_M\big(a\sin\varphi_M - (y_{b1}\cos\sigma - z_{b1}\sin\sigma)\cos\varphi_M\big) + (\dot{z}_{b1}\cos\sigma + \dot{y}_{b1}\sin\sigma)(\cos\theta_M + \cos\varphi_M) + (\dot{y}_{b1}\cos\sigma - \dot{z}_{b1}\sin\sigma)(\sin\theta_M + \cos\varphi_M)\Big]\vec{k} \quad (5.26)$$

– DU PREMIER PISTON

On a : $\vec{GB} = \vec{GO_{io}} + \vec{O_{io}B}$

$$\vec{O_{io}B} = ZB1(\cos\sigma\sin\psi_M + \sin\sigma\sin\varphi_M)\vec{i} - ZB1(\cos\sigma.\sin\theta_M + \sin\sigma\cos\theta_M)\vec{j} + ZB1\big(\cos\sigma(\cos\theta_M + \cos\varphi_M) - \sin\sigma(\sin\theta_M + \cos\varphi_M)\big)\vec{k}$$

d'où la vitesse

$$\vec{V}_{B1} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \frac{d\vec{GB}}{dt}$$

$$\vec{V_{B1}} = \Big[\dot{x} + \dot{\psi}_M(-Z_G \cos\psi_M - (\rho_i - b)\sin\psi_M - Z_{B1}\cos\sigma\cos\psi_M) + \dot{\varphi}_M(-(\rho_i - b)\sin\varphi_M + Z_{B1}\sin\sigma\cos\varphi_M + a\cos\varphi_M) + \dot{Z}_{B1}\cos\sigma\sin\psi_M + \dot{Z}_{B1}\sin\sigma\sin\varphi_M\Big]\vec{i} + \Big[\dot{y} + \dot{\theta}_M(Z_G\cos\theta_M + a\sin\theta_M - Z_{B1}\cos\sigma\cos\theta_M + Z_{B1}\sin\sigma\sin\theta_M) + \dot{\varphi}_M(\rho_i - b)\cos\varphi_M - \dot{Z}_{B1}\cos\sigma\sin\theta_M - \dot{Z}_{B1}\sin\sigma\cos\theta_M\Big]\vec{j} + \Big[\dot{z} + \dot{\theta}_M(Z_G\sin\theta_M - a\cos\theta_M - Z_{B1}\cos\sigma\sin\theta_M - Z_{B1}\sin\sigma\cos\theta_M) + \dot{\psi}_M(Z_G\sin\psi_M - (\rho_i - b)\cos\psi_M - Z_{B1}\cos\sigma\sin\psi_M) + \dot{\varphi}_M(a\sin\varphi_M + Z_{B1}\sin\sigma\sin\varphi_M) + \dot{Z}_{B1}\cos\sigma(\cos\theta_M + \cos\psi_M) - \dot{Z}_{B1}\sin\sigma(\sin\theta_M + \cos\psi_M)\Big]\vec{k} \quad (5.27)$$

DE LA DEUXIEME BIELLE

De même, on a :

$$\vec{GG_{b2}} = \vec{G\delta_i} + \vec{a_i G_{b2}}$$

$$\vec{a_i G_{b2}} = \Big[(Z_{b2}\cos\sigma - Y_{b2}\sin\sigma)\sin\psi_M - (Z_{b2}\sin\sigma + Y_{b2}\cos\sigma)\sin\varphi_M\Big]\vec{i} + \Big[(Z_{b2}\sin\sigma + Y_{b2}\cos\sigma)\cos\theta_M - (Z_{b2}\cos\sigma - Y_{b2}\sin\sigma)\sin\theta_M\Big]\vec{j} + \Big[(Z_{b2}\cos\sigma - Y_{b2}\sin\sigma)(\cos\theta_M + \cos\psi_M) + (Z_{b2}\sin\sigma + Y_{b2}\cos\sigma)(\sin\theta_M + \cos\psi_M)\Big]\vec{k}$$

d'où la vitesse

$$\vec{V_{Gb2}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \frac{d\vec{GG_{b2}}}{dt}$$

$$\vec{V}_{Gb2} = \Big[\dot{x} + \dot{\psi}_M\big(-z_G\cos\psi_M - (\rho_{i^\circ} - b)\sin\psi_M + (z_{b2}\cos\sigma - y_{b2}\sin\sigma).\cos\psi_M\big) + \dot{\varphi}_M\big(-(\rho_{i^\circ} - b)\sin\varphi_M + a\cos\varphi_M - (z_{b2}\sin\sigma + y_{b2}\cos\sigma).\cos\varphi_M\big) + (\dot{z}_{b2}\cos\sigma - \dot{y}_{b2}\sin\sigma)\sin\psi_M - (\dot{z}_{b2}\sin\sigma + \dot{y}_{b2}\cos\sigma).\sin\varphi_M\Big]\vec{i} + \Big[\dot{y} + \dot{\theta}_M\big(z_G\cos\theta_M + a\sin\theta_M - (z_{b2}\cos\sigma - y_{b2}\sin\sigma).\cos\theta_M - (z_{b2}\sin\sigma + y_{b2}\cos\sigma)\sin\theta_M\big) + \dot{\varphi}_M\big((\rho_{i^\circ} - b)\cos\varphi_M\big) - (\dot{z}_{b2}\cos\sigma - \dot{y}_{b2}\sin\sigma)\sin\theta_M + (\dot{z}_{b2}\sin\sigma + \dot{y}_{b2}\cos\sigma)\cos\theta_M\Big]\vec{j}_M + \Big[\dot{z} + \dot{\theta}_M\big(z_G\sin\theta_M - a\cos\theta_M - (z_{b2}\cos\sigma - y_{b2}\sin\sigma)\sin\theta_M + (z_{b2}\sin\sigma + y_{b2}\cos\sigma)\cos\theta_M\big) + \dot{\psi}_M\big(z_G\sin\psi_M - (\rho_{i^\circ} - b)\cos\psi_M - (z_{b2}\cos\sigma - y_{b2}\sin\sigma)\sin\psi_M\big) + \dot{\varphi}_M\big(a\sin\varphi_M - (z_{b2}\sin\sigma + y_{b2}\cos\sigma)\sin\varphi_M\big) + (\dot{z}_{b2}\cos\sigma - \dot{y}_{b2}\sin\sigma)(\cos\theta_M + \cos\psi_M) + (\dot{z}_{b2}\sin\sigma + \dot{y}_{b2}\cos\sigma)(\sin\theta_M + \cos\varphi_M)\Big]\vec{k} \qquad (5.28)$$

_ DU DEUXIEME PISTON

De même, on a : $\vec{GB2} = \vec{GO_{i^\circ}} + \vec{O_{i^\circ}B2}$

d'où la vitesse, $\vec{V}_{B2} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \dfrac{d\vec{GB2}}{dt}$

$$\vec{V}_{B2} = \Big[\dot{x} + \dot{\psi}_M\big(-z_G\cos\psi_M - (\rho_{i^\circ} - b)\sin\psi_M - z_{B2}\cos\sigma\cos\psi_M\big) + \dot{\varphi}_M\big(-(\rho_{i^\circ} - b)\sin\varphi_M + a\cos\varphi_M - z_{B2}\sin\sigma\cos\varphi_M\big) + \dot{z}_{B2}\cos\sigma\sin\psi_M - \dot{z}_{B2}\sin\sigma\sin\varphi_M\Big]\vec{i} + \Big[\dot{y} + \dot{\theta}_M\big(z_G\cos\theta_M + a\sin\theta_M$$

$$-Z_{B2}\cos\sigma\cos\theta_M - Z_{B2}\sin\sigma\sin\theta_M) + \dot{\varphi}_M(P_i^0 - b)\cos\varphi_M -$$
$$\dot{Z}_{B2}\cos\sigma\sin\theta_M + \dot{Z}_{B2}\sin\sigma\cos\theta_M\Big]\vec{j} + \Big[\dot{Z} + \dot{\theta}_M\big(Z_G\sin\theta_M$$
$$- a\cos\theta_M - Z_{B2}\cos\sigma\sin\theta_M + Z_{B2}\sin\sigma\cos\theta_M\big) + \dot{\psi}_M\big(Z_G\sin\psi_M$$
$$-(P_i^0 - b)\cos\psi_M - Z_{B2}\cos\sigma\sin\psi_M\big) + \dot{\varphi}_M\big(a\sin\varphi_M - Z_{B2}\sin\sigma$$
$$\sin\varphi_M\big) + \dot{Z}_{B2}\cos\sigma\big(\cos\theta_M + \cos\psi_M\big) + \dot{Z}_{B2}\sin\sigma\big(\sin\theta_M +$$
$$\cos\varphi_M\big)\Big]\vec{k} \qquad (5.29)$$

553 ENERGIE CINETIQUE DE LA MANIVELLE

La vitesse de rotation de la manivelle est:

$$\vec{\omega}_{Gm} = \theta\vec{i}' \quad \text{avec } \vec{i}' = (\cos\psi_M + \cos\varphi_M)\vec{i} + \sin\varphi_M\vec{j}$$
$$+ (\sin\varphi_M - \sin\psi_M)\vec{k}$$

d'où

$$\vec{\omega}_{Gm} = \dot{\theta}(\cos\psi_M + \cos\varphi_M)\vec{i} + \dot{\theta}\sin\varphi_M\vec{j} + \dot{\theta}(\sin\varphi_M - \sin\psi_M)\vec{k}$$

alors on a:

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}_{Gm}^t.[J].\vec{\omega}_{Gm} = \frac{1}{2}\Big[I_{mx}(\cos\psi_M + \cos\varphi_M)^2 + I_{my}\sin^2\varphi_M$$
$$+ I_{mz}(\sin\varphi_M - \sin\psi_M)^2\Big]\dot{\theta}^2 \quad \text{(voir annexe B)}$$

d'où l'energie cinétique

$$T_m = \frac{1}{2}m_m\Big[\Big(\dot{X} + \dot{\psi}_M(-Z_G\cos\psi_M - (P_i^0 - b)\sin\psi_M + L_m\cos\theta\cos\psi_M)$$
$$+ \dot{\varphi}_M(-(P_i^0 - b)\sin\varphi_M + a\cos\varphi_M + L_m\sin\theta\cos\varphi_M) + \dot{\theta}(-L_m\sin\theta\sin\psi_M +$$

$+ L_m \cos\theta \sin\varphi_M))^2 + (\dot{y} + \dot{\theta}_M (Z_G \cos\theta_M + a \sin\theta_M - L_m \cos\theta \cos\theta_M +$

$L_m \sin\theta \sin\theta_M) + \dot{\varphi}_M (P_i^o - b) \cos\varphi_M + \dot{\theta}(L_m \sin\theta \sin\theta_M - L_m \cos\theta$

$\cos\theta_M))^2 + (\dot{z} + \dot{\theta}_M (Z_G \sin\theta_M - a \cos\theta_M - L_m \cos\theta \sin\theta_M - L_m$

$\sin\theta \cos\theta_M) + \dot{\psi}_M (Z_G \sin\psi_M - (P_i^o - b) \cos\psi_M - L_m \cos\theta \sin\psi_M)$

$+ \dot{\varphi}_M (a \sin\varphi_M + L_m \sin\theta \sin\varphi_M) + \dot{\theta}(-L_m \sin\theta (\cos\theta_M + \cos\psi_M) -$

$L_m \cos\theta (\sin\theta_M + \cos\varphi_M)))^2 \Big] + \frac{1}{2} \Big[I_{mx} (\cos\psi_M + \cos\varphi_M)^2 + I_{my} \sin^2\varphi_M$

$+ I_{mz} (\sin\varphi_M - \sin\psi_M)^2 \Big] \dot{\theta}^2 \qquad (5.30)$

5.5.4. ENERGIE CINETIQUE DE LA PREMIERE BIELLE

La vitesse de rotation est :

$$\vec{\omega}_{AB1} = \omega_{AB1} \vec{i'} = \omega_{AB1} (\cos\psi_M + \cos\varphi_M) \vec{i} + \omega_{AB1} \sin\varphi_M \vec{j} + (\sin\varphi_M - \sin\psi_M) \omega_{AB1} \vec{k}$$

d'où $\frac{1}{2} \vec{\omega}_{AB1}^{t} . [J] . \vec{\omega}_{AB1} = \frac{1}{2} \omega_{AB1}^2 \Big[(\cos\psi_M + \cos\varphi_M)^2 I_{b1x} + \sin^2\varphi_M I_{b1y} + (\sin\varphi_M - \sin\psi_M)^2 I_{b1z} \Big]$

alors l'energie cinétique est :

$T_{b1} = \frac{1}{2} M_{b1} \Big[(\dot{x} + \dot{\psi}_M (-Z_G \cos\psi_M - (P_i^o - b) \sin\psi_M + (Z_{b1} \cos\sigma + y_{b1} \sin\sigma) \cos\psi_M$

$+ (\dot{z}_{b1} \cos\sigma + \dot{y}_{b1} \sin\sigma) \sin\psi_M - (\dot{y}_{b1} \cos\sigma - \dot{z}_{b1} \sin\sigma) \sin\varphi_M)^2 + (\dot{y} + \dot{\theta}_M ($

$Z_G \cos\theta_M + a \sin\theta_M - (Z_{b1} \cos\sigma + y_{b1} \sin\sigma) \cos\theta_M - (y_{b1} \cos\sigma - Z_{b1} \sin\sigma).$

$\sin\theta_M) + \dot{\varphi}_M (P_i^o - b)\cos\varphi_M - (\dot{z}_{b1}\cos\sigma + \dot{y}_{b1}\sin\sigma)\sin\theta_M + (\dot{y}_{b1}\cos\sigma -$

$\dot{z}_{b1}\sin\sigma)\cos\theta_M)^2 + (\dot{z} + \dot{\theta}_M(z_G\sin\theta_M - a\cos\theta_M - (z_{b1}\cos\sigma + y_{b1}\sin\sigma).$

$\sin\theta_M + (y_{b1}\cos\sigma - z_{b1}\sin\sigma)\cos\theta_M + \dot{\psi}_M(z_G\sin\psi_M - (P_i^o - b)\cos\psi_M -$

$(z_{b1}\cos\sigma + y_{b1}\sin\sigma)\sin\psi_M) + \dot{\varphi}_M(a\sin\varphi_M - (y_{b1}\cos\sigma - z_{b1}\sin\sigma)\sin\varphi_M)$

$+ (\dot{z}_{b1}\cos\sigma + \dot{y}_{b1}\sin\sigma)(\cos\theta_M + \cos\psi_M) + (\dot{y}_{b1}\cos\sigma - \dot{z}_{b1}\sin\sigma)(\sin\theta_M$

$+ \cos\psi_M))^2\Big] + \frac{1}{2}\omega_{1B1}^2\Big[(\cos\psi_M + \cos\varphi_M)^2 I_{b1x} + I_{b1y}\sin^2\varphi_M + I_{b1z}($

$\sin\varphi_M - \sin\psi_M)^2\Big]. \qquad (5.31)$

5.5.5 ENERGIE CINETIQUE DU PREMIER PISTON

La vitesse de rotation du piston est nulle alors

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}^t [J] \vec{\omega}^0 = 0$$

d'où l'energie cinétique:

$T_{p1} = \frac{1}{2} M_{p1}\Big[(\dot{x} + \dot{\psi}_M(-z_G\cos\psi_M - (P_i^o - b)\sin\psi_M - z_{p1}\cos\sigma\cos\psi_M) +$

$\dot{\varphi}_M(-(P_i^o - b)\sin\varphi_M + a\cos\varphi_M + z_{B1}\sin\sigma\cos\varphi_M) + \dot{z}_{B1}\cos\sigma\sin\psi_M$

$+ \dot{z}_{B1}\sin\sigma\sin\varphi_M)^2 + (\dot{y} + \dot{\theta}_M(z_G\cos\theta_M + a\sin\theta_M - z_{B1}\cos\sigma\cos\theta_M$

$+ z_{B1}\sin\sigma\sin\theta_M) + \dot{\varphi}_M(P_i^o - b)\cos\varphi_M - \dot{z}_{B1}\cos\sigma\sin\theta_M - \dot{z}_{B1}\sin\sigma\cos$

θ_M

$\theta_M)^2 + (\dot{z} + \dot{\theta}_M(z_G\sin\theta_M - a\cos\theta_M - z_{B1}\cos\sigma\sin\theta_M - z_{B1}\sin\sigma$

$\cos\theta_M) + \dot{\psi}_M(z_G\sin\psi_M - (P_i^o - b)\cos\psi_M - z_{B1}\cos\sigma\sin\psi_M) +$

$\dot{\varphi}_M \left(a \sin\varphi_M + z_{B1} \sin\sigma \sin\varphi_M \right) + \dot{z}_{B1} \cos\sigma \left(\cos\theta_M + \cos\psi_M \right) -$

$\dot{z}_{B1} \sin\sigma \left(\sin\theta_M + \cos\psi_M \right) \Big)^2 \Big]$ (5.32)

5.5.6 ENERGIE CINETIQUE DE LA DEUXIEME BIELLE

La vitesse de rotation de la deuxième bielle est:

$$\vec{\omega}_{AB2} = \omega_{AB2}\vec{\iota} = \omega_{AB2} \left(\cos\psi_M + \cos\varphi_M \right) \vec{\iota} + \omega_{AB2} \sin\varphi_M \vec{j} + \left(\sin\varphi_M - \sin\psi_M \right) \omega_{AB2} \vec{k}$$

d'où $\frac{1}{2} \vec{\omega}^{\,t}_{AB2} [J] \vec{\omega} = \frac{1}{2} \omega^2_{AB2} \left[\left(\cos\psi_M + \cos\varphi_M \right)^2 I_{b2x} + I_{b2y} \sin^2\varphi_M + \left(\sin\varphi_M - \sin\psi_M \right)^2 I_{b2z} \right]$

Donc l'energie cinétique est:

$$T_{b2} = \frac{1}{2} M_{b2} \Big[\Big(\dot{X} + \dot{\psi}_M \big(-z_G \cos\psi_M - (P_{i0} - b) \sin\psi_M + (z_{b2} \cos\sigma - y_{b2} \sin\sigma) \cos\psi_M \big) + \dot{\varphi}_M \big(-(P_{i0} - b) \sin\varphi_M + a \cos\varphi_M - (z_{b2} \sin\sigma + y_{b2} \cos\sigma) \cos\varphi_M \big) + (\dot{z}_{b2} \cos\sigma - \dot{y}_{b2} \sin\sigma) \sin\psi_M - (\dot{z}_{b2} \sin\sigma + \dot{y}_{b2} \cos\sigma) \sin\varphi_M \Big)^2$$

$$+ \Big(\dot{Y} + \dot{\theta}_M \big(z_G \cos\theta_M + a \sin\theta_M - (z_{b2} \cos\sigma - y_{b2} \sin\sigma) \cos\theta_M - (z_{b2} \sin\sigma + y_{b2} \cos\sigma) \sin\theta_M \big) + \dot{\psi}_M \big((P_{i0} - b) \cos\psi_M \big) - (\dot{z}_{b2} \cos\sigma - \dot{y}_{b2} \sin\sigma) \sin\theta_M + (\dot{z}_{b2} \sin\sigma + \dot{y}_{b2} \cos\sigma) \cos\theta_M \Big)^2 + \Big(\dot{Z} + \dot{\theta}_M \big(z_G \sin\theta_M - a \cos\theta_M - (z_{b2} \cos\sigma - y_{b2} \sin\sigma) \sin\theta_M + (z_{b2} \sin\sigma + y_{b2} \cos\sigma) \cos\theta_M \big) +$$

$$\dot{\psi}_M \big(z_G \sin\psi_M - (P_{i0} - b) \cos\psi_M - (z_{b2} \cos\sigma - y_{b2} \sin\sigma) \sin\psi_M \big)$$

$$+\dot{\varphi}_M\left(a\sin\varphi_M-(z_{b2}\sin\sigma+y_{b2}\cos\sigma)\sin\varphi_M\right)+(\dot{z}_{b2}\cos\sigma-\dot{y}_{b2}\sin\sigma)(\cos\theta_M+\cos\varphi_M)+(\dot{z}_{b2}\sin\sigma+\dot{y}_{b2}\cos\sigma)(\sin\theta_M+\cos\varphi_M)\Big)^2\Big]$$

$$+\frac{1}{2}\omega_{AB2}^2\left[(\cos\psi_M+\cos\varphi_M)^2 I_{b2x}+\sin^2\varphi_M I_{b2y}+(\sin\varphi_M-\sin\psi_M)^2 I_{b2z}\right] \qquad (5.33)$$

5.5.7 ENERGIE CINETIQUE DU DEUXIEME PISTON

Elle est donnée par :

$$T_{p2}=\frac{1}{2}M_{p2}\Big[\Big(\dot{x}+\dot{\psi}_M(-z_G\cos\psi_M-(R_0-b)\sin\psi_M-z_{B2}\cos\sigma\cos\psi_M)+\dot{\varphi}_M(-(R_0-b)\sin\varphi_M+a\cos\varphi_M-z_{B2}\sin\sigma\cos\varphi_M)+\dot{z}_{B2}\cos\sigma\sin\psi_M-\dot{z}_{B2}\sin\sigma\sin\varphi_M\Big)^2+\Big(\dot{y}+\dot{\theta}_M(z_G\cos\theta_M+a\sin\theta_M-z_{B2}\cos\sigma\cos\theta_M-z_{B2}\sin\sigma\sin\theta_M)+\dot{\varphi}_M(R_0-b)\cos\varphi_M-\dot{z}_{B2}\cos\sigma\sin\theta_M+\dot{z}_{B2}\sin\sigma\cos\theta_M\Big)^2+\Big(\dot{z}+\dot{\theta}_M(z_G\sin\theta_M-a\cos\theta_M-z_{B2}\cos\sigma\sin\theta_M+z_{B2}\sin\sigma\cos\theta_M)+\dot{\psi}_M(z_G\sin\psi_M-(R_0-b)\cos\psi_M-z_{B2}\cos\sigma\sin\psi_M)+\dot{\varphi}_M(a\sin\varphi_M-z_{B2}\sin\sigma\sin\varphi_M)+\dot{z}_{B2}\cos\sigma(\cos\theta_M+\cos\psi_M)+\dot{z}_{B2}\sin\sigma(\sin\theta_M+\cos\varphi_M)\Big)^2\Big] \qquad (5.34)$$

5.5.8 ENERGIE CINETIQUE DU BLOC MOTEUR

La vitesse de rotation est egale :

$$\vec{\omega}_{bm}=\dot{\theta}_M\vec{i}+\dot{\psi}_M\vec{j}+\dot{\varphi}_M\vec{k}$$

d'où $\frac{1}{2}\vec{\omega}^{t}.[J].\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(I_{bmx}\dot{\theta}_M^2 + I_{bmy}\dot{\psi}_M^2 + I_{bmz}\dot{\varphi}_M^2\right)$

alors l'energie cinétique est egale:

$$T_{bm} = \frac{1}{2} M_{bm}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) + \frac{1}{2}\left(I_{bmx}\dot{\theta}_M^2 + I_{bmy}\dot{\psi}_M^2 + I_{bmz}\dot{\varphi}_M^2\right) \qquad (5.35)$$

5.5.9 ENERGIE CINETIQUE DU VOLANT

La vitesse du rotation du valant est egale à celle du moteur donc

$$\vec{\omega_V} = \dot{\theta}\vec{i'} = \dot{\theta}\left[(\cos\psi_M + \cos\varphi_M)\vec{i} + \sin\varphi_M\vec{j} + (\sin\varphi_M - \sin\psi_M)\vec{k}\right]$$

d'où son energie cinétique:

$$T_V = \frac{1}{2} M_V\Big[\big(\dot{x} + \dot{\psi}_M(-z_G\cos\psi_M - (P_V-b)\sin\psi_M) + \dot{\varphi}_M(-(P_V-b)\sin\varphi_M + a\cos\varphi_M)\big)^2 + \big(\dot{y} + \dot{\theta}_M(z_G\cos\theta_M + a\sin\theta_M) + \dot{\varphi}_M(P_V-b)\cos\varphi_M\big)^2 + \big(\dot{z} + \dot{\psi}_M(z_G\sin\psi_M - (P_V-b)\cos\psi_M) + \dot{\varphi}_M\, a\sin\varphi_M + \dot{\theta}_M(z_G\sin\theta_M - a\cos\theta_M)\big)^2\Big] + \frac{1}{2}\left[I_{Vx}(\cos\psi_M + \cos\varphi_M)^2 + I_{Vy}\,\dot{\theta}^2\sin^2\varphi_M + I_{Vz}(\sin\varphi_M - \sin\psi_M)^2\right]\dot{\theta}^2 \qquad (5.36)$$

5.5.10. ENERGIE CINETIQUE DE L'AMORTISSEUR ET DE LA POULIE

On considère l'amortisseur et la poulie comme un seul corps et l'expression de son energie cinétique

est identique à celle du volant en substituant Pv par Pa.
alors on a :

$$T_a = T_{v,P_a} \qquad (5.37)$$

5511 ENERGIE CINETIQUE TOTALE

L'energie cinétique totale du moteur monocylindrique est la somme de toutes les energies calculées - c'est à dire

$$T_t = T_m + T_{b1} + T_{p1} + T_{b2} + T_{p2} + T_{bm} + T_v + T_a \qquad (5.38)$$

Pour un moteur polycylindrique, on ajoutera les energies cinétiques de chaque manivelle, piston et bielle en tenant compte de l'angle de calage du vilebrequin.

56. SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Pour trouver ce systeme d'equation, on applique les equations de Lagrange qui sont applicable car il n'existe pas de relations entre les parametre ; on peut donc deduire le systeme differentiel du second ordre, à coefficient variable, avec second membre.

Pour cela, il faut deriver la force vive totale (energie cinétique totale) par rapport aux coordonnées généralisées, et vitesses généralisées. En plus, les derivées par rapport aux vitesses généralisées doivent être aussi dérivées par rapport au temps.

Les equations de Lagranges sont

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_t}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j - \frac{\partial P}{\partial q_j} \qquad (5.39)$$

avec T_t : energie cinétique totale

Q_j : force généralisée suivant q_i

D : l'energie de dissipation

q_j : coordonnées généralisées

$\dot{q}_j$: vitesses généralisées.

REMARQUES

_ Pour ne pas encombrer le présent chapitre par des formules nous avons eviter d'ecrire les derivées citées ci-dessus, et nous avons présenté les equations du mouvements (5. 49)

_ Pour des raisons de calcul et de simplification, nous avons supposé que le moteur effectue des petites amplitude soit en translation ou en rotation, par consequent les termes suivant sont négligeables:

$$q_j^n , q_j q_i , \dot{q}_j^n , \dot{q}_j \dot{q}_i , \dot{q}_j \cdot q_i$$

et $\sin q_j \simeq q_j \qquad \cos q_j \simeq 1$

5.7 FONCTION DE NON LINEARIT

La fonction de non linéarité due à des forces elastiques verticales non linéaires est:

$$\{C\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ k_3(z_1^3 + z_2^3) + k_3'(z_3^3 + z_4^3) + k_2(z_1^2 + z_2^2) + k_2'(z_3^2 + z_4^2) \\ k_3(z_1^3 d_1 - z_2^3 d_2) + k_3'(z_3^3 d_1' - z_4^3 d_2') + k_2(z_1^2 d_1 - z_2^2 d_1') + k_2'(z_3^2 d_2 - z_4^2 d_2') \\ 0 \\ -k_3(z_1^3 + z_2^3)\,l_1 + k_3'(z_3^3 + z_4^3)\,l_2 - k_2(z_1^2 + z_2^2)\,l_1 + k_2'(z_3^2 + z_4^2)\,l_2 \end{array} \right.$$

$$\ddot{X}\left[m_m+m_{b1}+m_{p1}+m_{b2}+m_v+m_{bm}\right]+\ddot{\psi}_M\left[m_m\left(-z_G+L_m\cos\theta\right)+m_{b1}\left(-z_G+\right.\right.$$

$$\left.z_1\cos\sigma+y_1\sin\sigma\right)+m_{p1}\left(-z_G-z_{B1}\cos\sigma\right)+m_{b2}\left(-z_G+z_2\cos\sigma-y_2\sin\sigma\right)+m_{p2}\left(-z_G-z_{B2}\cos\sigma\right)-$$

$$\left.m_v z_G\right]+\ddot{\varphi}_M\left[m_m\left(n+L_m\sin\theta\right)+m_{b1}\left(n-y_1\cos\sigma+z_1\sin\sigma\right)+m_{p1}\left(n+z_{B1}\sin\sigma\right)+m_{b2}\right.$$

$$\left.\left(n-z_2\sin\sigma-y_2\cos\sigma\right)+m_{p2}\left(n-z_{B2}\sin\sigma\right)+m_V n\right]=-2\left(\alpha_H+\alpha'_H\right)\dot{X}+\left[2\left(\alpha_H h+\alpha'_H h'\right)\right.$$

$$-\left(2m_m\dot{\theta}L_m\sin\theta+2m_{bi}\left(\dot{z}_1\cos\sigma+\dot{y}_1\sin\sigma\right)+2m_{bi}\left(-\dot{y}_1\cos\sigma+\dot{z}_1\sin\sigma\right)-2m_{pi}\dot{z}_{B1}\sin\sigma-\right.$$

$$\left.2m_{b2}\left(\dot{z}_2\sin\sigma+\dot{y}_2\cos\sigma\right)+2m_{p2}\dot{z}_{B2}\sin\sigma\right]\dot{\varphi}_M+2\left(K_H+K'_H\right)x+\left[m_m\dot{\theta}^2L_m\cos\theta-\right.$$

$$m_{b1}\left(\ddot{z}\cos\sigma+\ddot{y}_1\sin\sigma\right)-m_{pi}\ddot{z}_{B1}\cos\sigma-m_{b2}\left(\ddot{z}_2\cos\sigma-\ddot{y}_2\sin\sigma\right)-m_{p2}\ddot{z}_{B2}\cos\sigma-$$

$$\left.2\left(K_H h+K'h'\right)\right]\psi_M+\left[m_m\dot{\theta}^2L_m\sin\theta-m_{b1}\left(\ddot{z}_1\sin\sigma-\ddot{y}_1\cos\sigma\right)-m_{p1}\ddot{z}_{B1}\sin\sigma-m_{b2}\right.$$

$$\left.\left(\ddot{z}_2\sin\sigma+\ddot{y}_2\cos\sigma\right)+m_{p2}\ddot{z}_{B2}\sin\sigma-K_H\left(d_1-d_2\right)+K'_H\left(d'_1+d'_2\right)\right]\varphi_M$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{X}}\right)-\frac{\partial T}{\partial X}=\varphi_x-\frac{\partial P}{\partial\dot{X}}\qquad(1)\qquad(5.49)$$

$$\ddot{Y}\left[m_m + m_{b1} + m_{p1} + m_{b2} + m_{p2} + m_V + m_{bm}\right] + \ddot{\theta}_M\left[m_m(Z_G - L_m\cos\theta) + m_{b1}(Z_G - Z_1\cos\theta - y_1\sin\theta) + m_{p1}(Z_G - Z_{B1}\cos\theta) + m_{b2}(Z_G - Z_2\cos\theta + y_2\sin\theta) + m_{p2}(Z_G - Z_{B2}\cos\theta) + m_V Z_G\right] + \ddot{\varphi}_M\left[m_m(P_i - b) + m_{bi}(P_i - b) + m_{pi}(P_i - b) + m_{b2}(P_i - b) + m_{p2}(P_i - b) + m_V(P_V - b)\right] = -2(\alpha_H + \alpha'_H)\dot{Y} + \left[2m_{b1}(\dot{Z}_1\cos\theta + \dot{y}_1\sin\theta) - 2m_m\dot{\theta}L_m\sin\theta + 2m_{p1}\dot{Z}_{B1}\cos\theta - 2m_{b2}(\dot{y}_2\sin\theta - \dot{Z}_2\cos) + 2m_{p2}\dot{Z}_{B2}\cos\theta - 2(\alpha_H h + \alpha'_H h')\right]\dot{\theta}_M + 2(\alpha_H l_2 - \alpha_H l_i)\dot{\varphi}_M + 2(K_H + K'_H)Y + \left[2(K_H h + K_H h') - m_m\dot{\theta}^2 L_m\cos\theta + m_{b1}(\ddot{Z}_i\cos\theta + \ddot{y}_1\sin\theta) + m_{p1}\ddot{Z}_{B1}\cos\theta + m_{b2}(\ddot{Z}_2\cos\theta - \ddot{y}_2\sin\theta) + m_{p2}\ddot{Z}_{B2}\cos\theta\right]\theta_M + 2(K_H P_i - K_i + K_2)\varphi_M + \left[m_{pi}\ddot{Z}_{B1}\sin\theta - m_m\dot{\theta}_2 L_m\sin\theta - m_{bi}(\ddot{y}_1\cos\theta - \ddot{Z}_1\sin\theta) - m_{b2}(\ddot{Z}_2\sin\theta + \ddot{y}_2\cos\theta) - m_{p2}\ddot{Z}_{B2}\sin\theta\right]$$

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial Y} = \varphi_Y - \frac{\partial D}{\partial \dot{Y}} \quad \text{---} \quad (2) \qquad (5\text{-}49)$$

$$\ddot{z}\left[m_m + m_{b1} + m_{p_1} + m_{b2} + m_{p_2} + m_v + m_{bm}\right] + \ddot{\theta}_m\Big[-m_m(r + l_m \sin\theta) + m_{bi}(-a$$

$$+ y_1 \cos\theta - z_i \sin\theta) - m_{pi}(r + z_{B1}\sin\theta) + m_{b2}(-a + z_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta) + m_{p_2}(-r + z_{B_2}\cdot$$

$$\sin\theta - m_v a\Big] + \ddot{\psi}_M\Big[-m_m(P_i^{\circ} - b) - m_{b1}(P_1 - b) - m_{pi}(P_i^{\circ} - b) - m_{b2}(P_i^{\circ} - b) - m_{p_2}(P_i^{\circ} - b) - m_v$$

$$(P_v - B) - m_v(P_v - b)\Big] = -2(\alpha_v + \alpha_v')\dot{z} + \Big[\alpha_v(d_2 - d_1) + \alpha_v'(d_2' - d_1') + 2m_m\dot{\theta}l_m\cos\theta - 2m_{b1}$$

$$(y_1\cos\theta - \dot{z}_1\sin\theta) + 2m_{p_1}\dot{z}_{Bi}\sin\theta - 2m_{b2}(\dot{z}_2\sin\theta + \dot{y}_2\sin\theta) - 2m_{p_2}\dot{z}_{B_2}\sin\theta\Big]\dot{\theta}_M + 2$$

$$(\alpha_v P_i - \alpha_v' P_2)\dot{\psi}_M + 2(K_1 + K_1') \quad + \Big[K_1(d - d_2) + K_1'(d_1' - d_2') - m_m\dot{\theta}_0^2 l_m \sin\theta - m_{b1}(\ddot{y}_1\cos\theta$$

$$- \ddot{z}_1\sin\theta) + m_{p_1}\ddot{z}_{B1}\sin\theta \; \cancel{+ m_{p_2}}\,(\ddot{z}_2\sin\theta + \ddot{y}_2\cos\theta) - m_{p_2}\ddot{z}_{B_2}\sin\bar{\theta}\Big]\theta_M + 2(K_1' P_2 - P_1 K_1)$$

$$\psi_M + \Big[-m_m\dot{\theta}^2 l_m(2\cos\theta + \sin\theta) - 2m_{b1}(\ddot{z}_1\cos\theta + \ddot{y}_1\sin\theta) - m_{b1}(\ddot{y}_1\cos\theta - \ddot{z}_i\sin\theta) - m_{p_1}\ddot{z}_{B_1}$$

$$(2\cos\theta - \sin\theta) - 2m_{b2}(\ddot{z}_2\cos\theta - \ddot{y}_2\sin\theta) - m_{b2}(\ddot{z}_2\sin\theta + \ddot{y}_2\cos\theta) - m_{p_2}\ddot{z}_{B2}(2\cos\theta + \sin\theta)\Big]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial T}{\partial z} = \varphi_z - \frac{\partial D}{\partial z} \quad \cdots \quad (3) \qquad (5.49)$$

$$\ddot{Y}\Big[m_m(Z_a - L_m\cos\theta) + m_{b1}(Z_a - Z_1\cos\sigma - y_1\sin\sigma) + m_{p1}(Z_a - Z_{B1}\cos\sigma) + m_{b2}$$

$$(Z_a - Z_2\cos\sigma + y_2\sin\sigma) + m_{p2}(Z_a - Z_{B2}\cos\sigma) + m_v Z_a\Big] + \ddot{Z}\Big[-m_m(a + L_m\sin\theta) + m_{b1}$$

$$(-a + y_1\cos\sigma - Z_1\sin\sigma) - m_{p1}(a + Z_{B1}\sin\sigma) + m_{b2}(-a + Z_2\sin\sigma + y_2\cos\sigma) + m_{p2}(-a +$$

$$Z_{B2}\sin\sigma) - m_v a\Big] + \ddot{\theta}_M\Big[m_m\left((Z_a - L_m\cos)^2 + (a + L_m\sin\theta)^2\right) + I_{mx} + m_{b1}\Big((Z_a - Z_1\cos\sigma$$

$$-y_1\sin\sigma)^2 + (-a + y_1\cos\sigma - Z_1\sin\sigma)^2\Big) + I_{ab1x} + m_{p1}\left((Z_a - Z_{B1}\cos\sigma)^2 + (a + Z_{B1}\sin\sigma)^2\right)$$

$$+ m_{b2}\left((Z_a - Z_2\cos\sigma + y_2\sin\sigma)^2 + (-a + Z_2\sin\sigma + y_2\cos\sigma)^2\right) + I_{ab2x} + m_{p2}\Big((Z_a -$$

$$Z_{B2}\cos\sigma)^2 + (-a + Z_{B2}\sin\sigma)^2\Big) + m_v(Z_a^2 + a^2) + I_{avx} + I_{abmx}\Big] + \ddot{\psi}_M\Big[m_m(\rho_i^\circ - b)$$

$$(Z_a - L_m\cos\theta) + m_{b1}(\rho_i^\circ - b)(Z_a - Z_1\cos\sigma - y_1\sin\sigma) + m_{p1}(\rho_i^\circ - b)(Z_a - Z_{B1}\cos\sigma) + m_{b2}$$

$$(\rho_i^\circ - b)(Z_a - Z_2\cos\sigma + y_2\sin\sigma) + m_{p2}(\rho_i^\circ - b)(Z_a - Z_{B2}\cos\sigma) + m_v(\rho_v - b)Z_a\Big] + \dot{\psi}_M$$

$$\Big[m_m(\rho_i^\circ - b)(a + L_m\sin\theta) + m_{b1}(\rho_i^\circ - b)(-a + y_1\cos\sigma - Z_1\sin\sigma) + m_{p1}(\rho_i^\circ - b)(a + Z_{B1}$$

$$\sin\sigma) - m_{b2}(\rho_i^\circ - b)(a + Z_2\sin\sigma + y_2\cos\sigma) - m_{p2}(\rho_i^\circ - b)(-a + Z_{B2}\sin\theta)$$

$$-m_r(P_v^\circ - b)\,a\Big] = -2(\alpha H h + \alpha'_H h')\dot{Y} + \Big[2 m \rho_2 \dot{Z}_{B_2} \sin\sigma - \alpha v(d_1 - d_2) - \alpha' v(d_1' - d_2')\Big]\dot{Z}$$

$$\ddot{X}\Big[-m_m(Z_u - L_m \cos\theta) + m_{b1}(-Z_u + Z_1\cos\sigma + y_1 \sin\sigma) - m_{\rho_1}(Z_u + Z_{B_1}\cos\sigma) + m_{b_2}(-Z_u +$$

$$Z_2\cos\sigma - y_2\sin\sigma) - m_{\rho_2}(Z_u + Z_{B_2}\cos\sigma) - m_v Z_u\Big] + \ddot{Z}\Big[-m_m(P_1^\circ - b) - m_{b1}(P_1^\circ - b) - m_{\rho_1}$$

$$(P_1^\circ - b) - m_{b_2}(P_1^\circ - b) - m_{\rho_2}(P_1^\circ - b) - m_v(P_v - b)\Big] + \ddot{\theta}_M\Big[(m_m(P_1^\circ - b)(a + L_m \sin\theta) + m_{b1}(P_1^\circ - b)$$

$$(a - Z_{B_2}\sin\sigma) + m_v a(P_v - b)\Big] + \ddot{\varphi}_M\Big[m_m((-Z_u + L_m\cos\theta)^2 + (P_1^\circ - b)^2) + I_{umy} + m_{b1}((-Z_u +$$

$$Z_1\cos\sigma + y_1\sin\sigma)^2 + (P_1^\circ - b)^2) + J_{ubiy} + m_{\rho_1}((Z_u - Z_{B_1}\cos\sigma)^2 + (P_1^\circ - b)^2) + m_{b_2}((Z_u + Z_2$$

$$\cos\sigma - y_2\sin\sigma)^2 + (P_1^\circ - b)^2) + I_{Gb2y} + m_{\rho_2}((Z_u + Z_{B_2}\cos\sigma)^2 + (P_1^\circ - b)^2) + m_v(Z_u^2 + (P_v - b)^2)$$

$$+ I_{uvy} + I_{ubmy}\Big] + \ddot{\varphi}_M\Big[m_m(-Z_u + L_m\cos\theta)(a + L_m\sin\theta) + m_{b1}(a - y_1\cos\sigma + Z_1\sin\sigma)$$

$$(-Z_u + Z_1\cos\sigma + y_1\sin\sigma) - m_{\rho_1}(a + Z_{B_1}\sin\sigma)(Z_u + Z_{B_1}\cos\sigma) + m_{b_2}(a - Z_2\sin\sigma - y_2$$

$$\cos\sigma)(-Z_u + Z_2\cos\sigma - y_2\sin\sigma) - m_{\rho_2}(Z_u + Z_{B_2}\cos\sigma)(a - Z_{B_2}\sin\sigma) - m_v Z_u a\Big] =$$

$$\dot{X}\Big[2(d_H h + d'_H h')m n \dot\theta L m(\sin\theta + \cos\theta) - m b_1\big((\dot z_1\cos\sigma + \dot y_1\sin\sigma) + (\dot y_1\cos\sigma - \dot z_1\sin\sigma)\big)$$

$$+\dot z_{B1}\sin\sigma\, m p_1 + \dot z_{B1}\cos\sigma\, m p_1 - m b_2\big((\dot z_2\cos\sigma - \dot y_2\sin\sigma) - (\dot z_2\sin\sigma + y_2\cos\sigma)\big) +$$

$$\Big[-2(d_H h^2 + d'_H h'^2) - d v(b_1^2 + b_2^2) - d\dot v(d_1'^2 + d_2'^2) - 2 m n\dot\theta L m\, a\cos\theta + 2 m n\dot\theta L m z_a$$

$$\sin\theta - 2 m n\dot\theta L^2 m\sin\theta\cos\theta + m n\dot\theta L m(-2z_a + 2Lm\cos\theta)\, m b_1(z_a - z_1\cos\sigma\, y_1$$

$$\sin\sigma)(\dot z_1\cos\sigma + \dot y_1\sin\sigma) - m b_1(-a + y_1\cos\sigma - z_1\sin\sigma)(\dot y_1\cos\sigma - \dot z_1\sin\sigma) - m p_1(z_a$$

$$- z_{B1}\cos\sigma)\dot z_{B1}(\sin\sigma - 3\cos\sigma) - 2 m p_1 \dot z_{B1}(a - z_{B1}\sin\sigma)\sin\sigma - m p_1\dot z_{B1} - z_{B1}$$

$$(2 - 3\cos^2\sigma + \cos\sigma\sin\sigma) - m p_1\dot z_{B1} z_a(\cos\sigma - \sin\sigma) + 2 m b_2(z_a - z_2\cos\sigma + y_2\sin\sigma)$$

$$(\dot z_2\cos\sigma - \dot y_2\sin\sigma) - m b_2(-a + z_2\sin\sigma + y_2\cos\sigma)(\dot z_2\sin\sigma + \dot y_2\cos\sigma) - m p_2(z_a - z_{B2}$$

$$\cos\sigma)\dot z_{B2}(\sin\sigma - 2\cos\sigma)\, 3 m p_2(-a + z_{B2}\sin\sigma)\dot z_{B2}\sin\sigma\Big]\dot\theta_M + \Big[l_v(d_1 - d_2)K v - l$$

$$- l_v(d_1' - d_2')d\dot v - 2 m b_1(p_1 - b)(\dot y_1\cos\sigma - \dot z_1\sin\sigma) - m p_1(p_1 - b) - m p_1(p_1 - b)\dot z_{B1}\sin\sigma\Big]$$

$$\dot{\psi}_M + \left[-2\left(d_H h l_1 - d'_H h' l_2\right) + 2 m_{b1}\left(\rho_1^0 - b\right)\dot{z}_1 \cos\sigma\right]\dot{\varphi}_M + \left[R_1\left(d_1 - d_2\right) + \delta R'_1\left(d'_1 - d'_2\right)\right] z + \theta_M$$

$$\left[m_m \dot{\theta}_0^2 L_m^2 \sin^2\theta - m_m \dot{\theta}^2 L_m\left(z_u\left(\sin\theta - \cos\theta\right) + L_m\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\right) - m_{b1}\left(z_u - z_1\cos\sigma - y_1 \sin\theta\right)\right.$$

$$\left(\ddot{z}_1\left(\cos\sigma - \sin\sigma\right) + \ddot{y}_1\left(\sin\sigma + \cos\sigma\right) - m_{p1}\dot{z}_{B1}^2\left(2 - 2\cos^2\sigma\right) - m_{p1}\ddot{z}_{B1}\left(z_{B1}\left(2 - 3\cos^2\sigma +\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\sin\sigma\cos\sigma\right) + z_u\left(\cos\sigma - \sin\sigma\right)\right) - m_{b2}\left(z_u - z_2\cos\sigma + y_2\sin\sigma\right)\left(2\left(\dot{z}_2\cos\sigma - \dot{y}_2\sin\sigma\right) + \left(\ddot{z}_2\right.\right.$$

$$\left.\left.\sin\sigma + \ddot{y}_2\cos\sigma\right)\right) + \left(\dot{z}_2\cos\sigma - \dot{y}_2\sin\sigma\right)\left(2\cos\sigma - \dot{y}_2\sin\sigma\right) m_{b2} - m_{p2}\dot{z}_{B2}^2\left(\sin^2\sigma -\right.$$

$$\left.\sin\sigma\cos\sigma\right) - m_{p2}\left(\ddot{z}_{B2}\left(z_u - z_{B2}\cos\sigma\right)\left(\cos\sigma + 2\sin\sigma\right) + \ddot{z}_{B2}\sin\sigma\right.$$

$$\left.\left.\left(-a + z_{B2}\sin\sigma\right)\right) - m_m\theta^2 L^2_m\left(\sin\theta + \cos\theta\sin\theta\right)\right]\left[-m_m\theta^2 L_m\left(z_u\sin\theta + a\left(2\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\cos\theta - \sin\theta\right) + L_m\left(\sin\theta\cos\theta - 2\cos\theta - \sin^2\theta\right)\right)\right) m_{b1}\left(\left(\ddot{y}_1\cos\sigma - \ddot{z}_1\sin\sigma\right)\right.$$

$$\left(z_u - z_1\cos\sigma - y_1\sin\sigma\right) + \left(-a + y_1\cos\sigma - z_1\sin\sigma\right)\left(2\left(\dot{z}_1\cos\sigma + \dot{y}_1\sin\sigma\right) + \left(\ddot{y}_1\cos\sigma - \ddot{z}_1\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\sin\sigma\right)\right)\right)\alpha I_{GB1} \times \varepsilon_{AB1} - m_{p1}\left(\dot{z}_{B1}^2\sin\theta\cos\sigma - \ddot{z}_{B1}\sin\sigma\left(z_u - z_{B1}\cos\sigma\right) - \ddot{z}_{B1}\right.$$

$$-\dot{Z}_{B1}\sin\sigma\left(2\dot{Z}_{B1}\cos\sigma-\dot{Z}_{B1}\sin\sigma\right)-\left(a+Z_{B1}\sin\sigma\right)\left(2\ddot{Z}_{B1}\cos\sigma-\ddot{Z}_{B1}\sin\sigma\right)\Big)+m_{p1}$$

$$\dot{Z}^2_{B1}\cdot\left(\sin^2\sigma-3\cos\sigma\right)-m_{b2}\Big[\left(\ddot{Z}_2\sin\sigma+\ddot{y}_2\cos\sigma\right)\left(Z_c-Z_2\cos\sigma+y_2\sin\sigma\right)+\left(-a+Z_2\right.$$

$$\left.\sin\sigma+y_2\cos\sigma\right)\left(2\left(\dot{Z}_2\cos\sigma-\dot{y}_2\sin\sigma\right)+\left(\ddot{Z}_2\sin\sigma+\ddot{y}_2\cos\sigma\right)\right)\Big)+2I_{cb2}\times$$

$$\varepsilon_{AB2}-m_{p2}\left(\ddot{Z}_{B2}\left(-a+Z_{B2}\sin\sigma\right)\left(2\cos\sigma+\sin\sigma\right)+\ddot{Z}_{B2}\sin\sigma\left(Z_c-Z_{B2}\cos\sigma\right)\right)\Big]$$

$$+Z\left[k_1\left(d_1-d_2\right)+k_1\left(d'_1-d'_2\right)\right]+2\left(k_H h+k'_H h'\right)y+\Big[k_1\left(d_1^2-d_1d_2\right)+k'_1$$

$$\left(d'^2_1-d'_1d'_2\right)+2\left(k_H h^2+k'_H h'^2\right)\Big]\theta_M+2\left(k_H h\,l_1-k'_H h'\,l_2\right)\varphi_M$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta_M}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta_M}=Q_{\theta M}-\frac{\partial D}{\partial \theta_M}\;---\;(4)\qquad(5\text{-}49)$$

$$\ddot{X}\Big[-m_m(Z_a - L_m\cos\theta) + m_{b1}(-Z_a + Z_1\cos\sigma + y_1\sin\sigma) - m_{p1}(Z_a + Z_{B1}\cos\sigma) + m_{b2}$$

$$(-Z_a + Z_2\cos\sigma - y_2\sin\sigma) - m_{p2}(Z_a + Z_{B2}\cos\sigma) - m_v Z_\sigma\Big] + \ddot{Z}\Big[-m_m(P_i^\circ - b) - m_{b1}\cdot$$

$$(P_i^\circ - b) - m_{p1}(P_i^\circ - b) - m_{b2}(P_i^\circ - b) - m_{p2}(P_i^\circ - b) - m_v(P_v - b)\Big] + \ddot{\theta}_M\Big[m_m(P_i^\circ - b)\cdot(a + L_m$$

$$\sin\sigma) + m_{b1}(P_i^\circ - b)(a - y_1\cos\sigma + Z_1\sin\sigma) + m_{p1}(P_i^\circ - b)(a + Z_{B1}\sin\sigma) + m_{b2}(P_i^\circ - b)$$

$$(a - Z_2\sin\sigma - y_2\cos\sigma) + m_{p2}(P_i^\circ - b)(a - Z_{B2}\sin\sigma) + m_v a(P_v - b)\Big] + \ddot{\psi}_M\Big[m_m\big((-Z_a$$

$$+ L_m\cos\theta)^2 + (P_i^\circ - b)^2\big) + J_{Gmy} + m_{b1}\big((-Z_a + Z_1\cos\sigma + y_1\sin\sigma)^2 + (P_i^\circ - b)^2\big) + J_{Gb1y} + m_{p1}$$

$$\big((Z_a - Z_{B1}\cos\sigma)^2 + (P_i^\circ - b)^2\big) + m_{b2}\big((-Z_a + Z_2\cos\sigma - y_2\sin\sigma)^2 + (P_i^\circ - b)^2\big) + I_{Gb2y} +$$

$$m_{p2}\big((Z_a + Z_{B2}\cdot\cos\sigma)^2 + (P_i^\circ - b)^2\big) + m_v\big(Z_a^2 + (P_v - b)^2\big) + J_{Gvy} + J_{Gbmy}\Big] + \ddot{\varphi}_M$$

$$\Big[m_m(-Z_a + L_m\cos\sigma)(a + L_m\sin\theta) + m_{b1}(a - y_1\cos\sigma + Z_1\sin\sigma)(-Z_a + Z_1\cos\sigma +$$

$$y_1\sin\sigma) - m_{p1}(a + Z_{B1}\sin\sigma)(Z_a + Z_{B1}\cos\sigma) + m_{b2}(a - Z_2\sin\sigma - y_2\cos\sigma)(-Z_a$$

$$+z_2\cos\sigma - y_2\sin\sigma) - mp_2(z_a + z_{B2}\cos\sigma)(a - z_{B2}\sin\sigma) - m v z_a a\Big] = \ddot{X}\Big[2$$

$$(d_H h + d'_H h') + 2m\dot{\theta}L_m\sin\theta + 2mp_1\dot{z}_{B1}\cos\sigma + 2mp_2\dot{z}_{B2}\cos\sigma\Big] + \dot{\theta}M\Big[-2m_m\dot{\theta}L_m$$

$$+\left[2(d_H h \ldots d'_H h'_\ldots)\right]\dot{z}$$

$$\cos\theta(P_i^o - b) + 2mb_1(P_i^o - b)(\dot{y}_1\cos\sigma - \dot{z}_1\sin\sigma) - 2mp_1(P_i^o - b)\dot{z}_{B1}\sin\sigma + 2mb_2(P_i^o - b)$$

$$(\dot{z}_2\sin\sigma + \dot{y}_2\cos\sigma) + 2mp_2(P_i^o - b)\dot{z}_{B2}\sin\sigma + l_1 d_v(d_r - d_2) - l_2 d'_v(d'_1 - d'_2)\Big] + \dot{\psi}\Big[-2(h^2 d_H - h'^2 d'_H +$$

$$l_1^2 d_v + l_2^2 d'_v) - 2m_m L_m\dot{\theta}(z_a - L_m\cos\theta)\sin\theta + 2mb_1(z_a - z_1\cos\sigma - y_1\sin\sigma)(\dot{z}_1\cos\sigma +$$

$$y_1\sin\sigma) + mp_1\dot{z}_{B1}(\cos\sigma\, z_a - 3z_{B1}\cos\sigma) - \sin\sigma(z_a - z_{B1}\cos\sigma) - 3z_a\cos\sigma) - mb_2(z_a -$$

$$z_2\cos\sigma + y_2\sin\sigma)(\dot{y}_2\sin\sigma - \dot{z}_2\cos\sigma) - mp_2\dot{z}_{B2}(4\cos^2\sigma\, z_{B2} - \sin\sigma(z_a - z_{B2}\cos\sigma)\Big]$$

$$+\dot{\varphi}M\Big[-m_m\dot{\theta}L_m(2\theta - z_a + L_m\cos\theta)) + mb_1(2(\dot{y}_1\cos\sigma - \dot{z}_1\sin\sigma)(z_a - z_1\cos\sigma$$

$-y_1\sin\sigma) + 2(u - y_1\cos\sigma + z_1\sin\sigma)(\dot z_1\cos\sigma + \dot y_1\sin\sigma)) - (I_{Eh1} + I_{ab1z})W_{AB1} + m_{p1}$

$\dot z_{B1}(2\sin\sigma(z_a + z_{B1}\cos\sigma) + 2(u + z_{B1}\sin\sigma)\cos\sigma) - 2m_{b2}(\dot z_2\sin\sigma + \dot y_2\cos\sigma)(z_u - z_2$

$\cos\sigma + y_2\sin\sigma) - (I_{ab2y} + I_{ab2z})W_{AB2} - m_{p2}\dot z_{B2}(2\sin\sigma(z_a + z_{B2}\cos\sigma)$

$-2\cos\sigma(u - z_{B2}\sin\sigma)) - I_{avy}\dot\theta\Big] + X\Big[-2(k_H h + k'_H h')\Big] + Z\Big[2(k_1 l_2 - k_1 l_1)\Big]$

$+\theta_M\Big[+M_m(p_i^o - b)\theta^2 L_m\sin\theta + m_{b1}(p_i^o - b)(\ddot y_1\cos\sigma - \ddot z_1\sin\sigma) - m_{p1}\ddot z_{B1}\sin\sigma$

$(p_i^o - b) + m_{b2}(p_i^o - b)(\ddot z_2\sin\sigma + \ddot y_2\cos\sigma) + m_{p2}(p_i^o - b)\ddot z_{B2}\sin\sigma\Big] + \psi_M\Big[2(k_1 l_2^2 -$

$k_1 l_1^2 + k_H h^2 - k'_H h'^2) + m_m\dot\theta^2 L_m(z_u - L_m\cos\theta)(\cos\theta - \sin\theta) - m_{b1}(z_u - z_1\cos\sigma$

$-y_1\sin\sigma)(\ddot z_1\cos\sigma + \ddot y_1\sin\sigma) + (\ddot y_1\cos\sigma - \ddot z_1\sin\sigma)) + m_{p1}(\ddot z_{B1}\cos\sigma(z_u + z_{B1}\cos\sigma) + \dot z_{B1}^2$

$\cos\sigma\sin\sigma) - m_{b2}(z_u - z_2\cos\sigma + y_2\sin\sigma)(\ddot z_2\cos\sigma - \ddot y_2\sin\sigma) + (\ddot z_2\sin\sigma + \ddot y_2\cos\sigma))$

$$+ m_{p2}\left(\ddot{z}_{B2}\cos\sigma\left(z_u - z_{B2}\cos\sigma\right) + \dot{z}^2_{B2}\left(4\cos^2\sigma - \cos\sigma\sin\sigma\right)\right) + \dot{\theta}^2\left(I_{umz} - 2I_{umx}\right)$$

$$+ W^2_{AB}\left(I_{ub1z} - 2I_{ub1x}\right) + W^2_{AB2}\left(I_{ub2z} - 2I_{ub2x}\right) + \left(I_{uvz} - 2I_{uvx}\right)\dot{\theta}^2\Big]$$

$$+ \varphi_M\Big[-\left(K_H h(d_2 - d_1) + K'_H h'(d'_2 - d'_1)\right) - m_m\dot{\theta}^2 L_m\left(\sin\theta(z_u - L_m\cos\theta) - 2L_m\cos\theta\right.$$

$$\left.\sin\sigma\right) - m_{b1}\left(\ddot{y}_1\cos\sigma - \ddot{z}_1\sin\sigma\right)\left(z_u - z_1\cos\sigma - y_1\sin\sigma\right) + m_{p1}\left(2\dot{z}^2_{B1}\sin\sigma\cos\sigma + (z_u\right.$$

$$\left. + z_{B1}\cos\sigma)\ddot{z}_{B1}\sin\sigma\right) + m_{b2}\left(\left(\ddot{z}_2\sin\sigma + \ddot{y}_2\cos\sigma\right)\left(-z_u + z_2\cos\sigma - y_2\sin\sigma\right) + 2\left(\right.\right.$$

$$\left.\left.\dot{z}_2\sin\sigma + \dot{y}_2\cos\sigma\right)\left(\dot{z}_2\cos\sigma - \dot{y}_2\sin\sigma\right)\right) - m_{p2}\left(\ddot{z}_{B2}\sin\sigma\left(z_u + z_{B2}\cos\sigma\right)\right.$$

$$\left. + 2\dot{z}_{B2}\sin\sigma\cos\sigma\right) - I_{ub2y}\,\varepsilon_{AB2} - I_{ub1z}W^2_{AB1} + I_{ub2z}W^2_{AB2} - I_{uvz}\ddot{\theta}$$

$$+ I_{umz}\dot{\theta}^2\Big] + \Big[-m_m(P_i^\circ - b)\left(2\cos\theta - \sin\theta\right)\dot{\theta}^2 L_m + m_{b1}(P_i^\circ - b)\left(2(\ddot{z}_1\cos\sigma + \right.$$

$$\left.\ddot{y}_1\sin\sigma) + (\ddot{y}_1\cos\sigma - \ddot{z}_1\sin\sigma)\right) + m_{p1}(P_i^\circ - b)\left(2\ddot{z}_{B1}\cos\sigma - \ddot{z}_{B1}\sin\sigma\right) + m_{b2}$$

$$(P_i^\circ - b)\left(2(\ddot{z}_2\cos\sigma - \ddot{y}_2\sin\sigma) + (\ddot{z}_2\sin\sigma + \ddot{y}_2\cos\sigma)\right) - m_{p2}\left\{\left(2\ddot{z}_{B2}\cos\sigma + \right.\right.$$

$$+\dot{z}_{B2}\sin\sigma)(z_a - z_{B2}\cos\sigma - P\rho + b) - 2(\cos\sigma + \sin\sigma)\dot{z}^2_{B2}\cos\sigma)]$$

$$[2(\alpha_v l_1 - \alpha'_v l_2)]\dot{z}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_\psi - \frac{\partial D}{\partial \dot{\psi}} \quad --- (5) \qquad (5.49)$$

$$\ddot{X}\Big[m_m(a+L_m\sin\theta)+m_{b1}(a-y_1\cos\sigma+z_1\sin\sigma)+m_{p1}(a+z_{B1}\sin\sigma)+m_{b2}(a-z_2$$

$$\cos\sigma-y_2\sin\sigma)+m_{p2}(a-z_{B2}\sin\sigma)+m_v a\Big]+\ddot{y}\Big[m_m(P_i^o-b)+m_{b1}(P_i^o-b)+m_{p1}(P_i^o-b)$$

$$+m_{b2}(P_P-b)+m_{p2}(P_P-b)+m_v(P_v-b)\Big]+\ddot{\theta}_M\Big[m_m(P_i^o-b)(z_u-L_m\cos\theta)+m_{b1}(P_i^o-b)$$

$$(z_u-z_1\cos\sigma-y_1\sin\sigma)+m_{p1}(z_u-z_{B1}\cos\sigma)(P_P-b)+m_{b2}(P_P-b)(z_u-z_2\cos\sigma+y_2$$

$$\sin\sigma)+m_{p2}(P_P-b)(z_u-z_{B2}\cos\sigma)+m_v z_u(P_v-b)\Big]+\ddot{\varphi}_M\Big[m_m(a+L_m\sin\theta)(-z_u$$

$$+L_m\cos\theta)+m_{b1}(-z_u+z_1\cos\sigma+y_1\sin\sigma)(a-y_1\cos\sigma+z_1\sin\sigma)-m_{p1}(z_u+z_{B1}$$

$$\cos\sigma)(a+z_{B1}\sin\sigma)+m_{b2}(-z_u+z_2\cos\sigma-y_2\sin\sigma)(a-z_2\cos\sigma-y_2\sin\sigma)$$

$$-m_{p2}(z_u+z_{B2}\cos\sigma)(a-z_{B2}\sin\sigma)-m_v z_u a\Big]+\ddot{\varphi}_M\Big[m_m\big((a+L_m\sin\sigma)^2+$$

$$(P_i^o-b)^2\big)+I_{umz}+m_{b1}\big((a-y_1\cos\sigma+z_1\sin\sigma)^2+(P_i^o-b)^2\big)+I_{ub1z}+m_{p1}\big((a+z_{B1}$$

$$\sin\sigma)^2+(P_P-b)^2\big)+m_{b2}\big((a-z_2\sin\sigma-y_2\cos\sigma)^2+(P_i^o-b)^2\big)+I_{ub2z}+m_{p2}$$

$$\left((a - z_{B2}\sin\sigma)^2 + (p_i^{\circ} - b)^2\right) + m_v\left(a^2 + (p_v - b)^2\right) + I_{ubmz}\Big] = \dot{X}\Big[\alpha_H(d_1 - d_2) + \alpha'_H$$

$$(d'_1 - d'_2) + m_{b2}\left((\dot{z}_2\cos\sigma + \dot{y}_2\sin\sigma) + (\dot{z}_2\sin\sigma + \dot{y}_2\cos\sigma)\right] + \dot{Y}\Big[2(\alpha'_H l_2 - \alpha_H l_1)\Big] + \dot{\theta}_m\Big[2$$

$$(h' l_2 \alpha'_H - h\, l_1 \alpha_H) - 2m_m \dot{\theta} L_m \sin\theta(p_i^{\circ} - b) + 2m_{b1}(p_i^{\circ} - b)(\dot{z}_1\cos\sigma + \dot{y}_1\sin\sigma) + 2m_{p1}$$

$$\dot{z}_{B1}\cos\sigma(p_i^{\circ} - b) + 2m_{b2}(p_i^{\circ} - b)(\dot{z}_2\cos\sigma\ \dot{y}_2\sin\sigma) + 2m_{p2}\dot{z}_{B2}\cos\sigma(p_i^{\circ} - b)\Big] +$$

$$\dot{\Psi}_m\Big[\alpha_H h(d_2 - d_1) + h'\alpha'_H(d'_2 - d'_1) + 2m_m\dot{\theta}L_m(a + L_m\sin\theta)\sin\theta + I_{umz}\dot{\theta} + I_{umy}$$

$$\dot{\theta} - m_{b1}(a - y_1\cos\sigma + z_1\sin\sigma)(\dot{z}_1\cos\sigma + \dot{y}_1\sin\sigma) + I_{ub1z}W_{AB1} + I_{ub1y}W_{AB1} -$$

$$m_{b2}\left(2(\dot{z}_2\cos\sigma - \dot{y}_2\sin\sigma)(a - z_2\cos\sigma\ y_2\sin\sigma)\right) + I_{ub2}W_{AB2} + I_{ub2z}W_{AB2} +$$

$$I_{uvz}\dot{\theta} + I_{uvy}\dot{\theta}\Big] + \dot{\Psi}_m\Big[-\alpha_H\left((d_1^2 - d_2^2) + 2l_1^2\right) - \alpha'_H\left((d_1'^2 - d_2'^2) + 2l_2^2\right) - 2m_m\dot{\theta}L_m$$

$$(a + L_m\sin\theta)(2\sin\theta + \cos\theta) + m_{b1}(a - y_1\cos\sigma + z_1\sin\sigma)(\dot{y}_1\cos\sigma - \dot{z}_1\sin\sigma) 2m_{p1}$$

$$\dot{z}_{B1}(a + z_{B1}\sin\sigma)\sin\sigma + 4m_{b2}(a - z_2)\sin\sigma - y_2\cos\sigma)(\dot{z}_2\sin\sigma + \dot{y}_2\cos\sigma)$$

$$+2m_{p2}\ddot{z}_{B2}\sin\sigma\,(a-z_{B2}\sin\sigma)+I_{ubzz}W_{AB2}+I_{avz}\dot{\theta}+I_{ub2z}W_{AB2}\Big]+X\Big[R_H$$

$$(d_2-d_1)+b'_H(d'_2-d'_1)\Big]+Y\Big[2(R_H l_1-R'_H l_2)\Big]+\theta_M\Big[2(R_H l_1 b-R'_H l_2 b')-m_m\theta^2 L_m$$

$$\cos\theta(P_i^o-b)+m_{b1}(P_i^o-b)(\ddot{z}_1\cos\sigma+\ddot{y}_1\sin\sigma)+m_{p1}\ddot{z}_{B1}\cos\sigma\,(P_i^o-b)+m_{b2}(\ddot{z}_2\cos\sigma+\ddot{y}_2$$

$$\sin\sigma)(P_i^o-b)+m_{p2}\ddot{z}_{B2}\cos\sigma\,(P_i^o-b)\Big]+\Psi_M\Big[R_H h(d_1-d_2)+R'_H h'(d'_1-d'_2)+m_m$$

$$\ddot{\theta}L_m^2\sin\theta\cos\theta+m_m\dot{\theta}^2 L_m a\cos\theta-I_{cmz}\dot{\theta}^2-m_{b1}(a-y_1\cos\sigma+z_1\sin)(\ddot{z}_1\cos\sigma+$$

$$\ddot{y}_1\sin\sigma)+I_{ub1z}\mathcal{E}_{AB1}-I_{ub1z}W_{AB1}^2-m_{p1}\ddot{z}_{B1}(a+z_{B1}\sin\sigma)\cos\sigma-m_{p2}(\ddot{z}_{B2}$$

$$\cos\sigma\,(a-z_{B2}\sin\sigma)-\dot{z}_{B2}^2\cos\sigma\sin\sigma+\dot{z}_{B2}^2\sin\sigma)-I_{avz}\dot{\theta}^2\Big]+\varphi_M\Big[R_H(2l_1^2+d_1^2+d_2^2)$$

$$+R'_H(d_2'^2+d_1'^2+l_2^2)-2m_m\dot{\theta}^2 L_m(3L_m\sin\theta\cos\theta+a\cos\theta)-2m_{b1}((\dot{z}_1\cos\sigma+\dot{y}\sin\sigma)-$$

$$2\dot{z}_1\sin\sigma)+(a-y_1\cos\sigma+z_1\sin\sigma)(\ddot{y}_1\cos\sigma+\ddot{z}_1\sin\sigma))-2m_{p2}(a+z_{B1}\sin\sigma)\ddot{z}_{B1}\cos\sigma-$$

$$2m_{b2}((\dot{z}_2\sin\sigma+\dot{y}_2\cos\sigma)(\dot{z}_2\sin\sigma+\dot{y}_2\cos\sigma).(\ddot{z}_2\cos\sigma-\ddot{y}_2\sin\sigma))-2m_{p2}\ddot{z}_{B2}$$

$$\cos\sigma(1-Z_{B2}\sin\sigma)+I_{ab2z}\,\varepsilon_{AB2}+I_{ab1z}\,\varepsilon_{AB1}+\dot{\theta}^2(-2I_{amx}+I_{amy}+I_{amz})$$

$$-(2I_{ab1m}-I_{ab1y}-I_{ab1z})W^2_{AB1}+(I_{ab2z}+I_{ab2y}-2I_{ab2x})W^2_{AB2}+(I_{avz}-2$$

$$I_{avm}+I_{avy})\dot{\theta}^2\Big]+\Big[-m_m\dot{\theta}^2 L_m\sin\theta\,(P_i^\circ-b)-m_{b1}(P_i^\circ-b)(\ddot{y}_1\cos\sigma-\ddot{Z}_1\sin\sigma)+m_{p1}$$

$$\ddot{Z}_{B1}\sin\sigma(P_i^\circ-b)-m_{b2}(\ddot{Z}_2\sin\sigma+\ddot{y}_2\cos\sigma)(P_i^\circ-b)-m_{p2}\ddot{Z}_{B2}\sin\sigma(P_i^\circ-b)\Big]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=\Phi_\varphi-\frac{\partial P}{\partial\dot{\varphi}}\quad---\quad(6)\qquad(5.49)$$

6. RESOLUTION NUMERIQUE

61 SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

L'application des equations de Lagrange aux elements du moteur donnerant un système de six equations non linéaire, du second ordre à coefficients variables regissant le mouvement du bloc moteur sur sa suspension élastique.

On ecrira le système d'equations obtenu sous la forme maticielle suivante :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{C\} = \{B\} \qquad (6.1)$$

avec $[M]$: matrice d'inertie du système 6×6

$[D]$: matrice d'amortissement du système 6×6

$[K]$: matrice de rigidité du système 6×6

$\{B\}$: matrice colonne des forces et des couples d'excitations 6 elements.

$\{C\}$: matrice colonne de non linéarité en fonction de q^2 et q^3

$\{q\}$, $\{\dot{q}\}$ et $\{\ddot{q}\}$: matrices colonnes des coordonnées généralisées, de leurs derivées premières et secondes.

6.2 CHOIX D'UNE METHODE DE RESOLUTION

Le systeme d'equation differentielles obtenu ne peut pas être resolu analytiquement, il est donc nécessaire d'utiliser une methode numerique nous permettant de trouver une solution convenable.

La methode de Runge-Kutta d'ordre 4 s'adapte facilement pour ce genre d'equations, car elle donne l'evolution de la solution au cours du temps, et ne nécessite pas de grandes transformations avec une précision accéptable. Le calculateur utilisé étant puissant, le système à resoudre est de sixe equations seulement, ce qui rend donc cette methode plus pratique.

6.3 METHODE DE RUNGE-KUTTA-4

La methode de Runge-Kutta d'ordre 4 est donc choisie pour la resolution du système d'equations differentielle non lineaire, à coefficients variables de seconde ordre avec seconde membre.

6.3.1 POSITION DU PROBLEME

Le système d'equations differentielle à résoudre est donné sous la forme suivante:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_s, \ldots, y_n) \\
\frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_s, \ldots, y_n) \\
&\ldots \\
\frac{dy_s}{dt} &= f_s(t, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_s, \ldots, y_n) \\
&\ldots \\
\frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_s, \ldots, y_n)
\end{aligned}
\qquad (6.2)
$$

avec les conditions initiales :

$$
\begin{aligned}
y_{1,0} &= y_1(t_0) = \alpha_1 \\
y_{2,0} &= y_2(t_0) = \alpha_2 \\
y_{3,0} &= y_3(t_0) = \alpha_3 \\
&\text{-- -- -- -- -- --} \\
y_{s,0} &= y_s(t_0) = \alpha_s \\
&\text{-- -- -- -- -- --} \\
y_{n,0} &= y_n(t_0) = \alpha_n
\end{aligned}
\qquad (6.3)
$$

L'algorithme Runge-Kutta permettrait, à base d'un developpement de Taylor, de retrouver les solutions $y(t_i+h)$ en connaissant ces mêmes solutions à l'instant t_i. (où h est le pas de calcul)

L'ordinateur tracera donc un tableau donnant les valeurs des divers y_s pour les valeurs de la variables :

$$
\begin{aligned}
t &= t_0 + h \\
t &= t_0 + 2h \\
t &= t_0 + 3h \\
&\text{-- -- -- -- --} \\
t &= t_0 + jh \\
&\text{-- -- -- --} \\
t &= t_0 + Mh
\end{aligned}
\qquad (6.4)
$$

632 EXPOSE DE L'ALGORITHME

Connaissant $y_{1,i}, y_{2,i}, y_{3,i}, ---, y_{s,i}, ---, y_{n,i}$ correspondant à $t = t_0 + i\,h = t_i$, on détermine, $y_{1,i+1}, y_{2,i+1}, y_{3,i+1}, ---$ $y_{s,i+1}, ---, y_{n,i+1}$ correspondant à $t = t_0 + (i+1)h = t_{i+1}$ par les formules

$$y_{1,i+1} = y_{1i} + \frac{1}{6}\left(K_{11} + 2K_{12} + 2K_{13} + K_{14}\right)$$

$$y_{2,i+1} = y_{2i} + \frac{1}{6}\left(K_{21} + 2K_{22} + 2K_{23} + K_{24}\right)$$

$$\text{— — — — — — — — —} \qquad (6\text{-}5)$$

$$y_{s\,i+1} = y_{si} + \frac{1}{6}\left(K_{s1} + 2K_{s2} + 2K_{s3} + K_{s4}\right)$$

$$\text{— — — — — — — — —}$$

$$y_{n\,i+1} = y_{ni} + \frac{1}{6}\left(K_{n1} + 2K_{n2} + 2K_{n3} + K_{n4}\right)$$

avec

$$K_{s1} = h * f_s(t, y_{1i}, y_{2i}, y_{3i}, ---, y_{si}, ---, y_{ni})$$

$$K_{s2} = h * f_s(t + h/2, y_{1i} + K_{11}/2, y_{2i} + K_{21}/2, ---, y_{si} + K_{s1}/2, --- , y_{ni} + K_{n1}/2)$$

$$K_{s3} = h * f_s(t + h/2, y_{1i} + K_{12}/2, y_{2i} + K_{22}/2, ---, y_{si} + K_{s2}/2, ---, y_{ni} + K_{n2}/2)$$

$$K_{s4} = h * f_s(t + h, y_{1i} + K_{13}, y_{2i} + K_{23}, y_{3i} + K_{33}, ---, y_{si} + K_{s3}, ---, y_{ni} + K_{n3}) \qquad (6.7)$$

$K_{s1}, K_{s2}, K_{s3}, K_{s4}$ sont les coefficients de Runge-Kutta. Ce sont des vecteurs qui devraient être calculés pour chaque itérations et forment les fonctions approximatives de la fonction étudiée.

REMARQUE

On constate tout de suite que la difficulté de cette methode réside dans le choix du pas d'intégration h. Si on ne le prend pas assez faible, les formules d'approximation ci-dessus ne sont plus valables et si on le prend trop faible, le temps de calcul serait prohibitif.

633 TRANSFORMATION DU SYSTEME D'EQUATIONS

Le système étudié est sous la forme :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{C\} = \{B\} \qquad (6.8)$$

Pour appliquer l'algorithme de Runge-Kutta, on devrait multiplier ce système de part et d'autre par la matrice d'inertie inverse $[M]^{-1}$, on obtient

$$\{\ddot{q}\} = -[M]^{-1}[D]\{\dot{q}\} - [M]^{-1}[K]\{q\} - [M]^{-1}\{C\} + [M]^{-1}\{B\} \qquad (6.9)$$

on pose $\{\dot{q}\} = \{p\}$ (6.10)

alors $\{\ddot{q}\} = \{\dot{p}\}$ (6.11)

l'expression (6-9) s'écrit donc :

$$\{\dot{p}\} = [D1]\{p\} + [K1]\{q\} + [C1]\{C\} + \{B1\} \qquad (6.12)$$

avec $[D1] = -[M]^{-1}[D]$.

$[K1] = -[M]^{-1}[K]$

$[C1] = -[M]^{-1}$

$\{B1\} = [M]^{-1}\{B\}$.

donc le système d'ordre M se transforme en système d'ordre 2×M.

64. PROGRAMME

641. RESULTATS RECHERCHES

Pour toutes les vitesses de rotation ω de moteur appartenant à la plage de fonctionnement, il est intéressant de connaître :

- l'amplitude d'oscillation de moteur pour faire une vérification expérimentale ou pour juger de la perturbation produite dans les mécanismes entraînés.
- déplacement et vitesse maximales de chaque plot de suspension afin de calculer les forces transmises à l'environnement,

Le temps de calcul est très grand, donc il est indiqué de ne faire imprimer par l'ordinateur que les résultats strictement nécessaires.

642. ALGORITHME DU CALCUL

Les données nécessaires au calcul sont :

- Les caractéristiques d'élasticité et d'amortissement dans toutes les directions des plots de suspensions.
- Géométrie de la suspension
- Les données statiques et dynamiques du moteur
- Le pas, le nombre de valeurs et les conditions initiales

Pour le temps $t = t_{i+1}$, on calcule :

- La matrice d'inertie
- La matrice d'amortissement
- La matrice de rigidité
- La matrice colonne d'excitation
- La fonction de non linéarité

pour t_i, $t_i + h/2$, $t_i + h$, afin de calculer K_{s1}, K_{s2}, K_{s3} et K_{s4}

- Les coordonnées et vitesses généralisées qui sont données par :

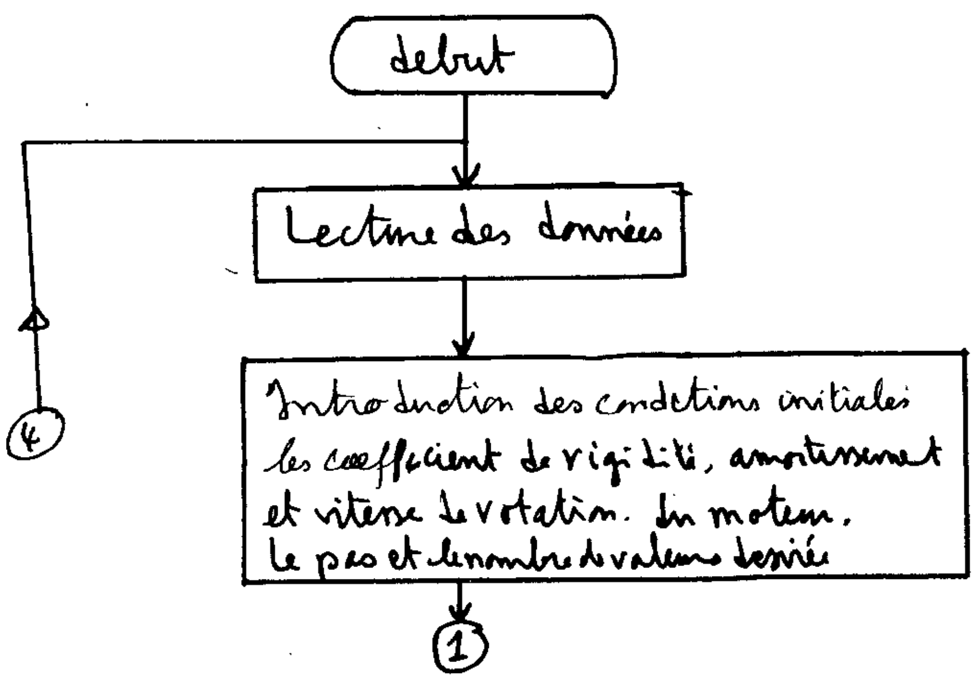
$$y_{s\,i+1} = y_{s\,i} + \frac{1}{6}\left(K_{s1} + 2K_{s2} + 2K_{s3} + K_{s4}\right) \qquad (6.12)$$

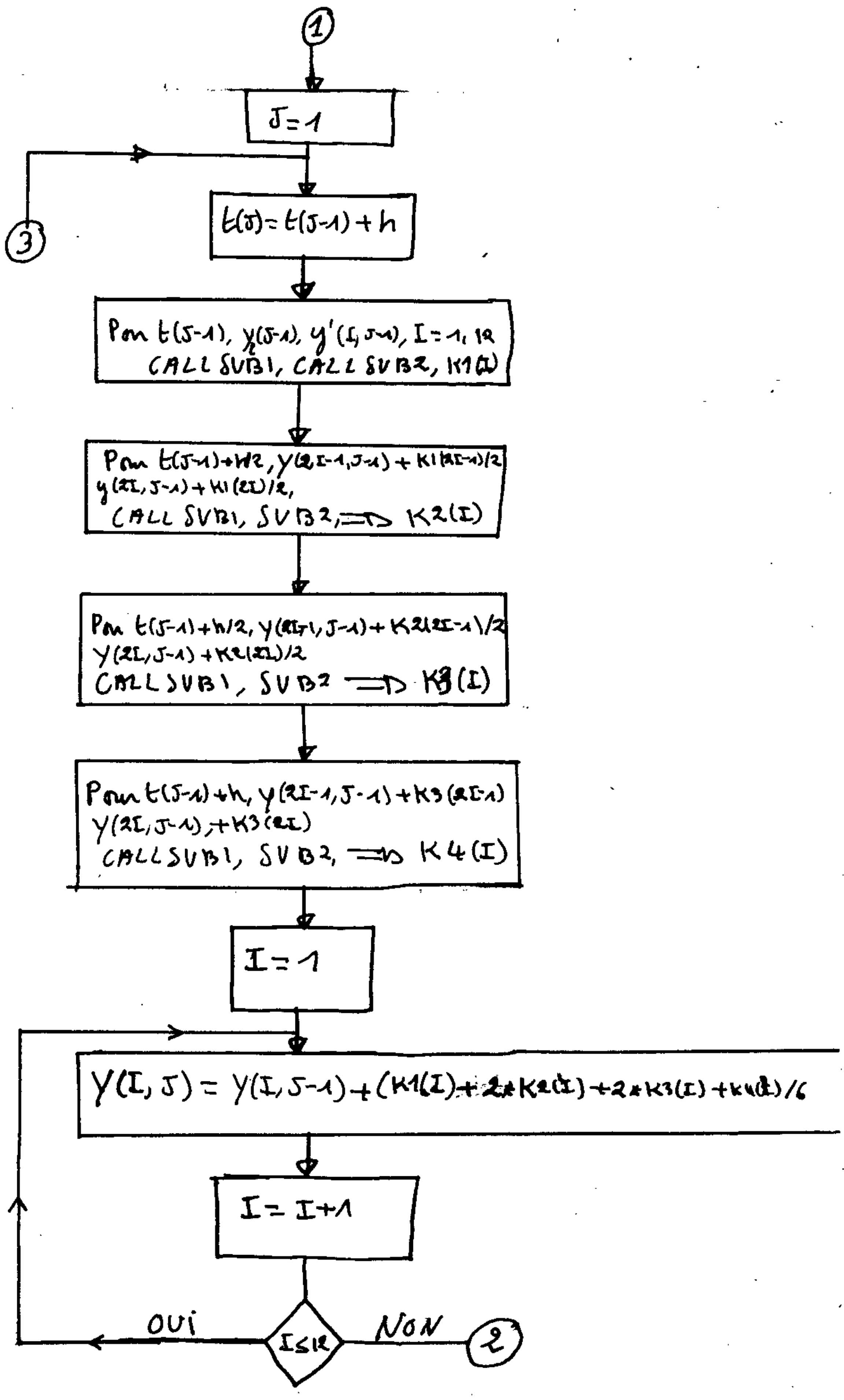
- Les déplacements des plots de suspension qui sont données par les formules. (5.2) (5.3), (5.4) et (5.5)

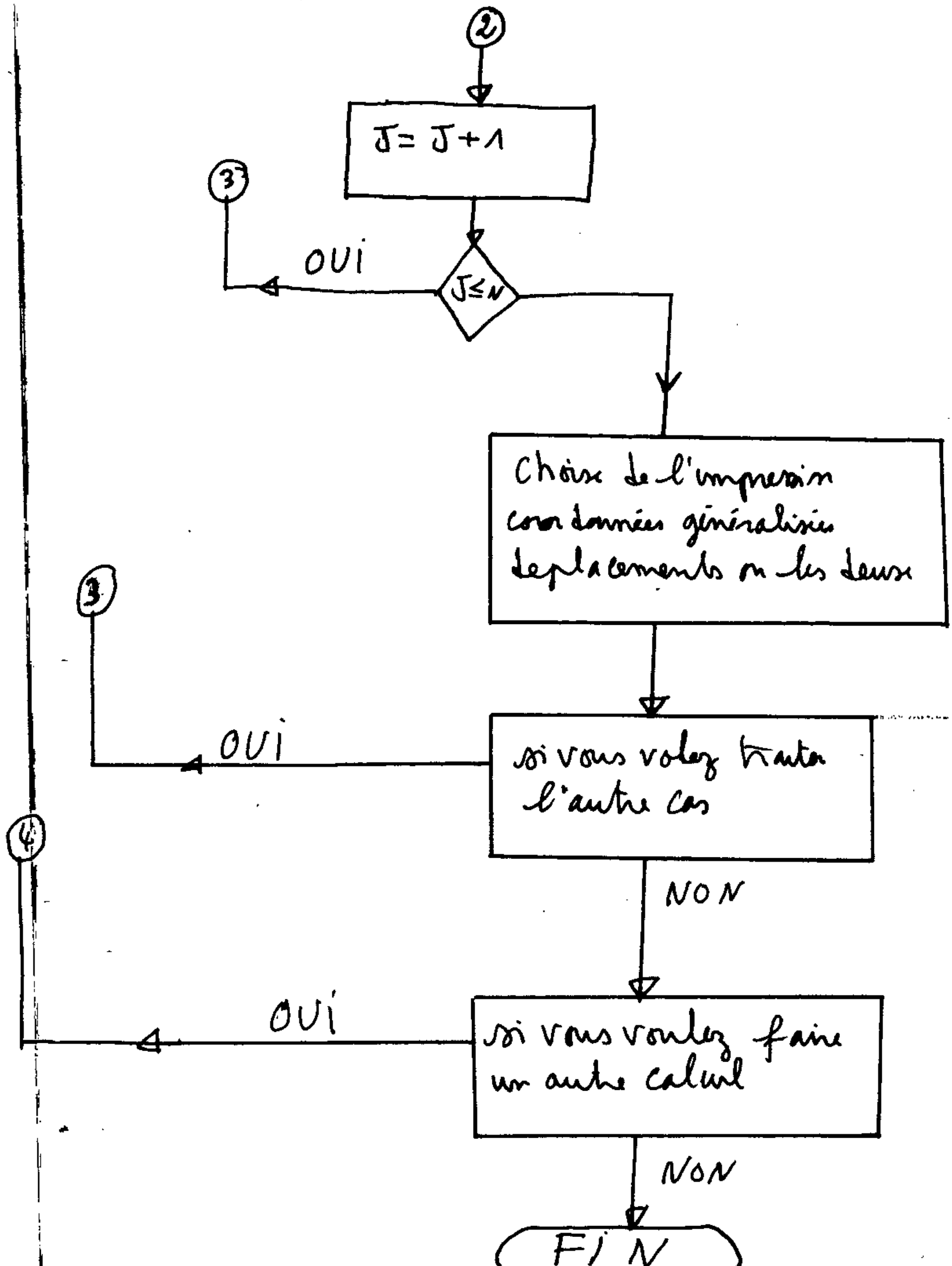
La solution du problème serait déterminée point par point pour deux tours du vilebrequin pour les moteurs à quatre temps soit

$$t \in \left[0, \frac{4\pi}{\omega}\right] \qquad (6.13)$$

643.ORGANIGRAMME




1
J = 1
3
t(J) = t(J-1) + h
Pour t(J-1), y(J-1), y'(I, J-1), I = 1, 12
CALL SUB1, CALL SUB2, K1(I)
Pour t(J-1)+h/2, y(2I-1,J-1) + K1(2I-1)/2
y(2I, J-1) + K1(2I)/2,
CALL SUB1, SUB2, ⟹ K2(I)
Pour t(J-1)+h/2, y(2I-1, J-1) + K2(2I-1)/2
y(2I, J-1) + K2(2I)/2
CALL SUB1, SUB2 ⟹ K3(I)
Pour t(J-1)+h, y(2I-1, J-1) + K3(2I-1)
y(2I, J-1) + K3(2I)
CALL SUB1, SUB2, ⟹ K4(I)
I = 1
Y(I, J) = y(I, J-1) + (K1(I) + 2*K2(I) + 2*K3(I) + K4(I))/6
I = I+1
OUI
I≤12
NON
2


2
J = J + 1
3
OUI
J ≤ N
Choix de l'impression coordonnées généralisées déplacements ou les deux
3
OUI
si vous volez traiter l'autre cas
NON
4
OUI
si vous voulez faire un autre calul
NON
FIN

* Sous programme SUB1

Le sous programme SUB1 contient plusiems sous programme nous permettant de calculer:

- La matrice d'inertie CALL MX
- La matrice de rigidité CALL KX
- La matrice d'amortissement CALL DX
- La matrice colonne d'excitation CALL BX
- La matrice colonne de non liniarité si le cas. CALL NL
- La matrice inverse d'inertie CALL INV
- Le produit de toutes ces matrice par la matrice inverse d'inertie. CALL PRO

* Sous programme SUB2.

Le sous programme SUB2, lui aussi, contient plusieurs sous programme nous permettons de calculer:

- Le produit de la matrice colonne de vitesses par la matrice d'amortissement. CALL PROO
- Le produit de deplacement par la matrice de rigidité CALL PROO
- Les coeffitient de Runge-Kutta K1, K2, K3, et K4. CALL TT

7. RESOLUTION DANS UN CAS PARTICULIER

On tiendra compte seulement de mouvement de rebondissement c-à-d mouvement de translation suivant l'axe z donc le moteur a un degré de liberté suivant l'axe z.

71. EQUATION DIFFERENTIELLE

L'equation differentielle de mouvement est :

$$M\ddot{z} + 4\lambda_v \dot{z} - 4k_1 z - 4k_2 z^2 - 4k_3 z^3 = F(t) \qquad (7.1)$$

ou

$$\ddot{z} + \frac{4\lambda_v \dot{z}}{M} - \frac{4k_1}{M} z - \frac{4k_2}{M} z^2 - \frac{4k_3}{M} z^3 = f(t) \qquad (7.2)$$

ou bien

$$\ddot{z} + 2\xi\omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z + A z^2 + B z^3 = f(t) \qquad (7.3)$$

avec

$f(t)$ force d'excitation par unité de masse

ω_0 : fréquence propre de mouvement.

$$\omega_0^2 = -\frac{4k_1}{M} \quad \text{avec } k_1 \text{ negatif}$$

ξ : coefficient d'amortissement.

$$2\xi\omega_0 = \frac{4\lambda_v}{M}$$

On remarque que la valeur de ξ ou λ_v est inconnue donc on va faire varier cette valeur et voir son influence sur l'amplitude des vibration et ainsi l'influence de la variation de la vitesse de rotation du moteur.

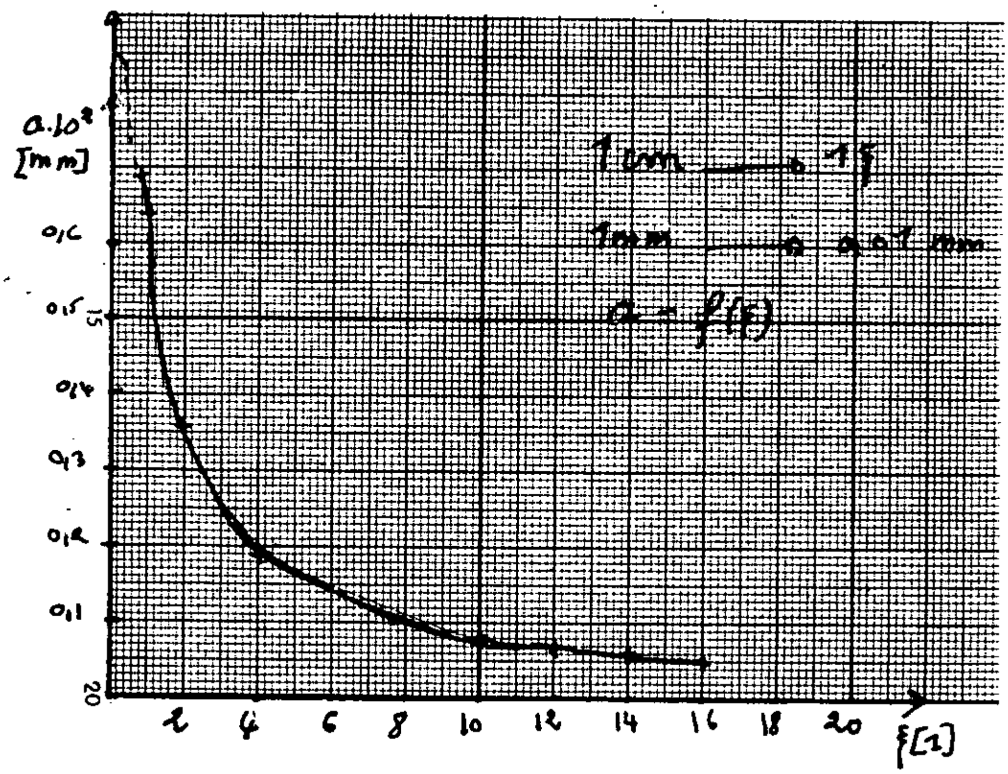
72. RESULTATS

Pour chaque valeur de ξ et ω, on mesure l'amplitude des vibrations et on les place dans le tableau suivant pour pouvoir tirer différentes conclusions.

ξ \ ω tr/mn	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2500
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3,2157832	3,2215652
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2,1555386
0,100	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2,6932354	2,8096500
0,200	2,0324892	2,1142798	[illegible]	2,3906304	2,5067327
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1,7723772
1,000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1,6916952	1,7080902
2,000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1,2532246
4,000	[illegible]	0,3936744	0,5754883	0,7372521	0.7623958
10,000	0,0810237	0,1626362	[illegible]	[illegible]	0.3377436
12,000	0,0678317	0,1370126	0,2053594	0,2725420	0.2836015
14,000	0,0582431	0,1177203	0,1765675	0,2246668	0.2442604
16,000	0,0511800	0,1031830	0,1548256	0,2059578	0.2144234

Amplitude maximale en (mm)

7.3. INTERPRETATION GRAPHIQUE DES RESULTATS


a.10²
[mm]
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
ξ[1]
1cm → 1ξ
a = f(ξ)

8. CONCLUSION

L'etablissement des equations differentielles du mouvement et l'élaboration d'un programme de resolution de ces equations constituent l'etape principale dans le dimensionnement des plots de suspension.

Cette étude est très importante car la suspension élastique des machines est maintenant une pratique courante, mais sa mise en oeuvre n'est pas aussi simple qu'on pourrait penser, et son efficacité ne peut resulter que d'une etude serieuse.

Pour conclure, je souhaite que cette etude sera d'un apport appréciable aux étudiants qui travailleront sur ce sujet.

ANNEXE A

Rotation de θ_M : autour de $\vec{i}$
(Fig. 1)

$$\left\{\begin{aligned} \vec{i}\,' &= \vec{i} \\ \vec{j}\,' &= \cos\theta_M\,\vec{j} + \sin\theta_M\,\vec{k} \\ \vec{k}\,' &= -\sin\theta_M\,\vec{j} + \cos\theta_M\,\vec{k} \end{aligned}\right.$$

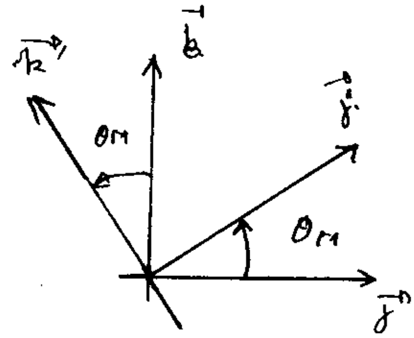


Fig. 1

Rotation de ψ_M : autour $\vec{j}$
(Fig. 2)

$$\left\{\begin{aligned} \vec{i}\,' &= \cos\psi_M\,\vec{i} - \sin\psi_M\,\vec{k} \\ \vec{j}\,' &= \vec{j} \\ \vec{k}\,' &= \sin\psi_M\,\vec{i} + \cos\psi_M\,\vec{k} \end{aligned}\right.$$

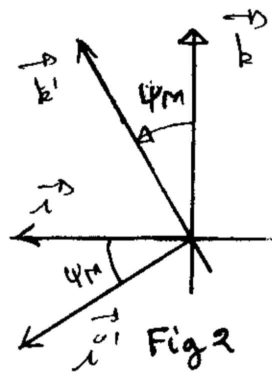


Fig 2

Rotation de φ_M : autour de $\vec{k}$
(Fig. 3)

$$\left\{\begin{aligned} \vec{i}\,' &= \cos\varphi_M\,\vec{i} + \sin\varphi_M\,\vec{j} \\ \vec{j}\,' &= -\sin\varphi_M\,\vec{i} + \cos\varphi_M\,\vec{j} \\ \vec{k}\,' &= \vec{k} \end{aligned}\right.$$

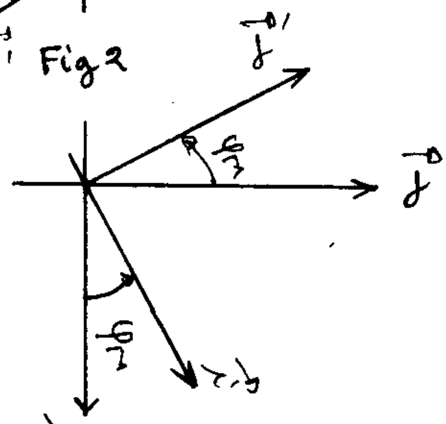


Fig 3

ANNEXE B

On definit le tenseur d'inertie du solide (S) par rapport à son centre de gravité G, exprimé dans un repère est par :

$$[J] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -D & -D & C \end{bmatrix}$$

A, B et C sont les moments d'inertie

D, E et F sont les produit d'inertie

Si un solide possède deux plans de symetrie : les trois produits d'inertie sont nuls. donc on a :

$$[J] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

Le vecteur vitesse angulaire instantanée est :

$$\{\vec{\omega}\} = \begin{bmatrix} \omega_x \vec{i} \\ \omega_y \vec{j} \\ \omega_z \vec{k} \end{bmatrix}$$

On a donc : $\{\vec{\omega}\}^t = [\omega_x \vec{i} \ \ \omega_y \vec{j} \ \ \omega_z \vec{k}]$

d'où le produit

$$\vec{\omega}^t . [J] . \vec{\omega} = [\omega_x \vec{i} \ \ \omega_y \vec{j} \ \ \omega_z \vec{k}] \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega}^{t} \cdot [J] \cdot \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x A \vec{i} & \omega_y B \vec{j} & \omega_z C \vec{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \vec{i} \\ \omega_y \vec{j} \\ \omega_z \vec{k} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}^{t} \cdot [J] \cdot \vec{\omega} = A \omega_x^2 + \omega_y^2 B + \omega_z^2 C$$

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

1. M. A. JULIEN. Dynamique de l'automobile

ed. Technip

2. B. SWOBODA. Mécaniques des moteurs alternatifs

ed. Technip

3. R. BRUN. Science et Technique du moteur diesel industriel et de transport

ed. Technip.

4. ABED MERIEM et M. KSIASEK. Comportement dynamique d'un moteur F4L912 sous l'effet des excitations internes

ENP JUIN 87.

5. Technique de l'ingenieur

B.595 Isolation antivibratoire et antichocs.
Jean MORLON.

A 1220 Methodes numériques de base

B 5772 Etude des vibrations forcées.

6. J. P. PELLETIER. Technique numeriques appliquées au calcul scientifique

MASSON. m.

7. TIMOSHENKO: Théorie des vibrations

8. F. SCHEID. Analyse numérique. Cours et problèmes serie schaum