

11/89

وزارة التعليم العالي

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

rex

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ELABORATION D'UN LOGICIEL POUR LE CALCUL ET

LA PRIVISION DU COMPORTEMENT MECANIQUE

(élasticité et rupture)

DES MATERIAUX COMPOSITES STRATIFIES .

Proposé par :

N. BOUDJEMAA

Etudié par :

A. HOCINE

Dirigé par :

N. BOUDJEMAA

PROMOTION : JUIN 89

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : DE GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

Elaboration d'un logiciel pour
le calcul et la privision du
comportement mecanique
(élasticite et rupture) des
materiaux composites stratifies

Proposé par :

N. BOUDJEMAA

Etudié par :

A. HOCINE

Dirigé par :

N. BOUDJEMAA

PROMOTION :1988/89

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
فَلْيَعْمَلُوا فَلَاحًا
مُتَمَرِّضِينَ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail

- A mon père pour les soins qu'il a prêtés
à ma formation et à mon éducation,
lui qui m'a encouragé dans mes études.
- A ma mère qui s'est sacrifiée pour voir
atteindre ce but.
- A mes frères.
- A toute ma famille.
- A tous mes amis et étudiants de l'ENP.

HOCINE AHMED

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Je tiens à remercier vivement mon promoteur Mr. N. BOUJÉMAA d'avoir proposé et dirigé ce travail et pour tous ces conseils et son aide qu'il m'a prodigué durant l'étude de ce projet.

Que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce projet.

Que tous les enseignants ayant contribué à ma formation trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Yacine Hamel

A- COMPORTEMENT ELASTIQUE :

 I / INTRODUCTION

 A/ QU'EST CE QU'UN MATERIAU COMPOSITE .

 A-1 : LES REMFORTS .

 A-1,1 NATURE DE QUELQUES FIBRES .

 A-2 : LES MATRICES .

 A-2,1 NATURE DE QUELQUES MATRICES .

 B/ PRINCIPALES CARACTERISTIQUES DES MATERIAUX COMPOSITES ET AVANTAGES .

 C/ CLASSES DES MATERIAUX COMPOSITES .

 D/ CONVENTION DES REPERES .

 II/ MATERIAUX ISOTROPE 7

 III/ MATERIAUX COMPOSITES 9

 1/ HYPOTHESES .

 2/ COMPORTEMENT ELASTIQUE DU PLI ORTHOTROPE .

 3/ CONTRAINTE DANS LE PLAN DU PLI .

 4/ COMPORTEMENT ELASTIQUE DU STRATIFIE .

 B/ CRITERES DE RUPTURE DES MATERIAUX COMPOSITES 41

 I/ INTRODUCTION .

 II/ CRITERES DE RUPTURE QUADRATIQUE DE TSAI 46

 1/ DETERMINATIONS DES PARAMETRES QUADRATIQUES

 2/ RELATION DE TRANSFORMATION

 III/ RAPPORT DE CHARGES 54

 IV / CONCLUSION

 C/ PROGRAMATION 56

I 1/ ANALYSE PAR LA THEORIE DES STRATIFIE (ELASTICITE + RUPTURE)

 2/ ORGANIGRAMMA

II C/ CONCEPTION ASSISTES PAR ORDINATEURS

 * DOONES DU PROBLEME

 * DIFFERENTS CAS DE CHARGEMENT

 * SORTIES DU PROGRAMME

 * LES UNITES

D / BASE DE DONNEES

66

1°/ INTRODUCTION

2°/ GESTION DE FICHER MATERIAU *

3°/ EXEMPLE D'ENREGISTREMENT.

- INTRODUCTION -

Objectif:

C'est de présenter un logiciel facilitant le travail des étudiants en graduation et post-graduation (et spécialement ces derniers qui sont en période de recherche).

Je souhaite que les étudiants puissent trouver un intérêt particulier dans ce logiciel, qui leur facilitera surtout les calculs numériques et les orientera dans leurs travaux.

Le logiciel permet de créer des bases de données nécessaires au calcul, d'analyser le comportement d'un stratifié donné sous un certain nombre de sollicitations mécaniques, de concevoir un matériau pouvant répondre à une spécification de chargement mécanique donnée: optimisations des orientations des fibres pour une épaisseur donnée.

La théorie utilisée est largement développée dans ce polycopie. C'est la forme la plus simple que l'on puisse utiliser pour un matériau composite: relations linéaires en contraintes planes.

Les parties abordées dans ce projet sont:

- 1//Analyse par la théorie classique des stratifiés.
- 2//Conception et dimensionnement d'un stratifié (optimisation).
- 3//Elaboration des bases de données.

*
* COMPORTEMENT ELASTIQUE *
*

INTRODUCTION:

a) Qu'est qu'un Matériau Composite :

C'est un matériau formé d'au moins de deux corps, à savoir :

- les fibres (continues ou non): qui constitue la partie renfort du matériau .
- la résine : où sont noyées les fibres ; et constitue la matrice du matériau .

a-1: Les renforts fibreux sont constitués d'assemblage de filaments continus (Verre, Kevlar, Carbone, ...) présentés sous diverses formes (fils, nappes, tissus, ...) dont le diamètre varie de 5 à 100 micron mètre orienté ou aléatoire qui donnent ses propriétés de résistance et de rigidité mécanique au composite final .

a-1-1 : Nature de quelques fibres :

Elles sont en :

- * Verre .
- * Aramide (ou Kevlar), plus légères .
- * Carbone (module d'élasticité élevé) .
- * Bore .
- * Carbure de silicium (tenue en température) .

L'assemblage des fibres constituant le "renforts"; peut être :

- unidimensionnel : fibres unidirectionnelles .
- bidimensionnel : surfaces tissées (tissus) ou non tissées (feutre, "mats") .
- tridimensionnel : volumes préformés ou non, constitué par des fibres orientées suivant plusieurs directions (>2) de l'espace .

a-2 : LES MATRICES : sont dans la plus parts des cas, des résines thermodurcissable (epoxy, polimide,...) dont le rôle, à l'état solide, est de figer la forme finale de l'objet réalisé et de transmettre et répartir les efforts et déformations aux fibres.

a-2-2 : Les matrices : On distingue les :

- * matrices résineuses :
 - . famille des résines thermoplastiques .
 - . famille des résines thermodurcissables : polyesters, phénoliques, mélanines, silicones, epoxydes .
- * matrices minérales : carbures de silicium, carbone ; elles permettent d'atteindre de hautes températures .
- * matrices métalliques : alliages d'aluminium eutectiques orientés .

Remarque :

----- Dans certains cas, on est amené à ajouter des charges qui peuvent être :

- de polymères .
- de particules de carbures (améliore la conductibilité) .
- de particules minérales (augmente la résistance à l'abrasion) .
- ou des charges permettant de réduire la proportion de résines employé .

et qui améliore les caractéristiques mécaniques de la matrice et lui apporte des propriétés particulières : thermiques électriques .

a-3 : L'association matrice-éléments renforçant ne peut être quelconque ; elle dépend :

- de la compatibilité chimique des matériaux en contacts qui implique une interphase de transmission d'efforts où les liaisons peuvent être direct

- des procédés de mise en oeuvre choisis en relation avec la géométrie de la pièce et des séries envisagées .
- de la résistance mécanique, chimique, , attendus .
- des coûts de fabrications, produit de base, transformation et éventuellement complétés des coûts de contrôles .

b) Les principales caractéristiques des Matériaux Composites sont :

- Légèreté : gain de masse (schéma)
- Propriétés mécaniques spécifiques élevées : *Gap/8*
- Isolation électrique : bonne .
- Résistance à la fatigue : durée de vie augmentée implique économie sur l'amortissement .

Inconvénient : Les matériaux composites vieillissent sous l'action :

- de l'humidité .
- de la chaleur .

c) CLASSES des M.C :

Il est donc possible de définir des classes de matériaux composites ; soit en se référant à la nature des composantes : Métal, Carbone, Verre, Plastique, Céramique ... soit en regard des performances souvent rapportées à la densité .

Dans ce cas là on définit :

- * les Matériaux Composites à "Grande diffusion" : généralement fabriqués à base de fibre courte mais aussi à base de fibre longue, surtout les fibres de Verre et des résines à caractéristiques mécaniques modestes (Polyester Phenolique, Vinylester ...) ; ce genre là est à caractéristique mécanique modeste .

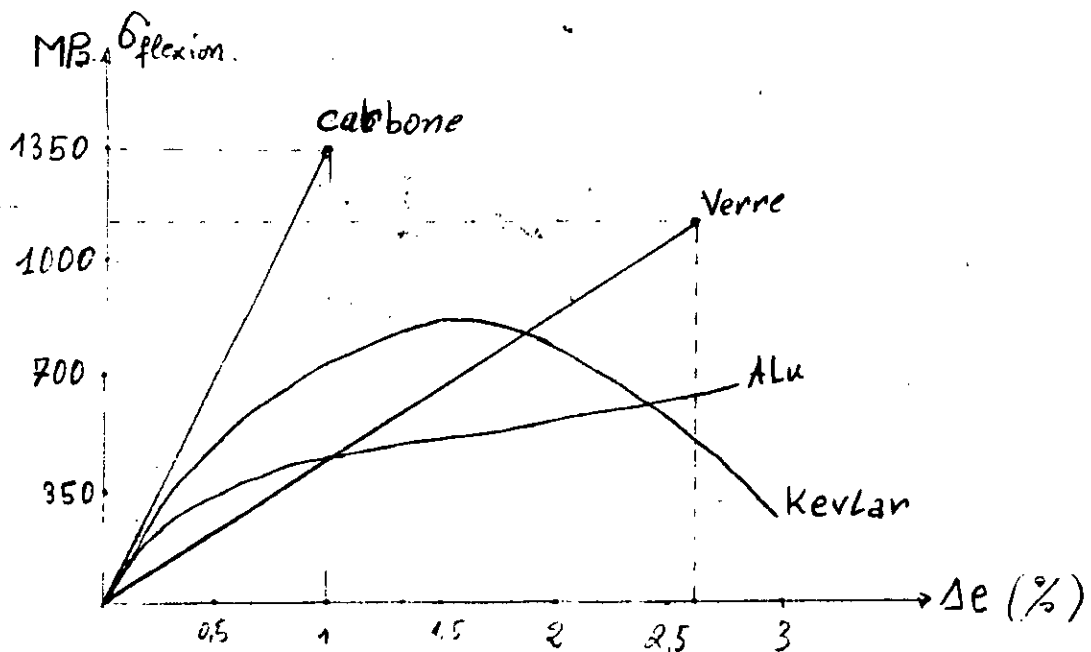
* les Matériaux Composites à "Haute Performance" avec des hautes caractéristiques mécaniques et constitués de fibres longues telles que :

- . Fibres réfractaires continues : de Bore , Carbone, ou de silicium ...
- . Fibres de Graphite ou de Carbone graphitisé : obtenu par pyrolyse ($T^{\circ} > 200^{\circ}\text{C}$) si le pourcentage de Graphite augmente alors le module de YOUNG (E) augmente et la résistance à la rupture R_r diminue .
- . Fibres d'aramides : (ou de Kevlar) : fibres artificielles (Polyamide aromatique) présentant des caractéristiques mécaniques exceptionnelles .

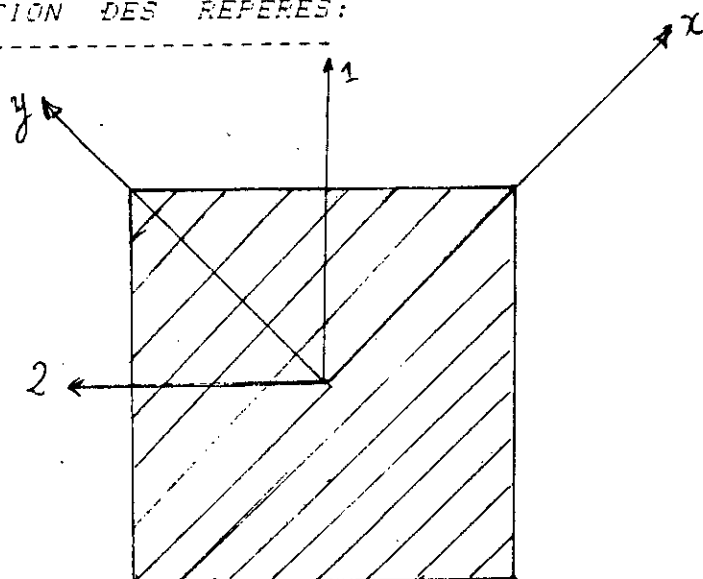
Toutes ces fibres possèdent des caractéristiques mécaniques importantes mais elles sont très chères et le plus souvent réservées à des applications très performantes ; telles que :

- Aéronautique.
- Aérospaciale.

et certains sont exclusivement développés à l'échelle de Prototype .



d) CONVENTION DES REPERES:



x, y : repère globale du Stratifié (ON-AXIS) .

$1, 2$: repère relatif à chaque couche caractérisée par l'orientation des fibres .

L'état de contrainte en un point peut être donné par un ensemble d'effort de membrane et d'efforts de flexion .

..... fin

En fin, on dira que l'utilisation d'un Matériau Composite comme matériau constitutif d'une pièce suppose que l'on soit capable de prévoir le comportement de ce matériau aussi bien pendant sa phase de fabrication que pendant son utilisation .

En particulier, son comportement mécanique (élasticité, rupture), pour la mesure des grandeurs élastiques du matériau et de ses limites à la rupture .

La théorie des Stratifiés est un outil simple permettant de connaître l'état des contraintes et déformations par le composite travaillant dans le domaine élastique .

III / MATÉRIAUX ISOTROPES :

La loi de Hooke s'écrit : $\sigma = E \cdot \varepsilon$ (σ : contrainte appliquée)
(ε : déformation correspondante)
(E : module d'élasticité (de Young))

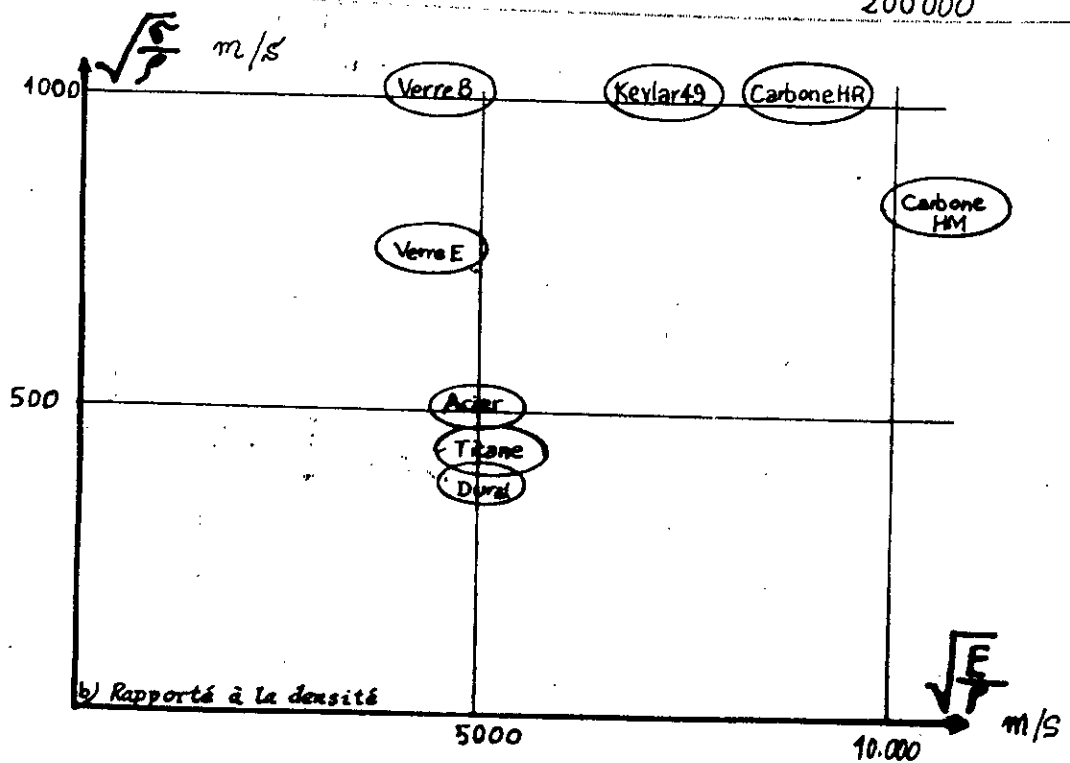
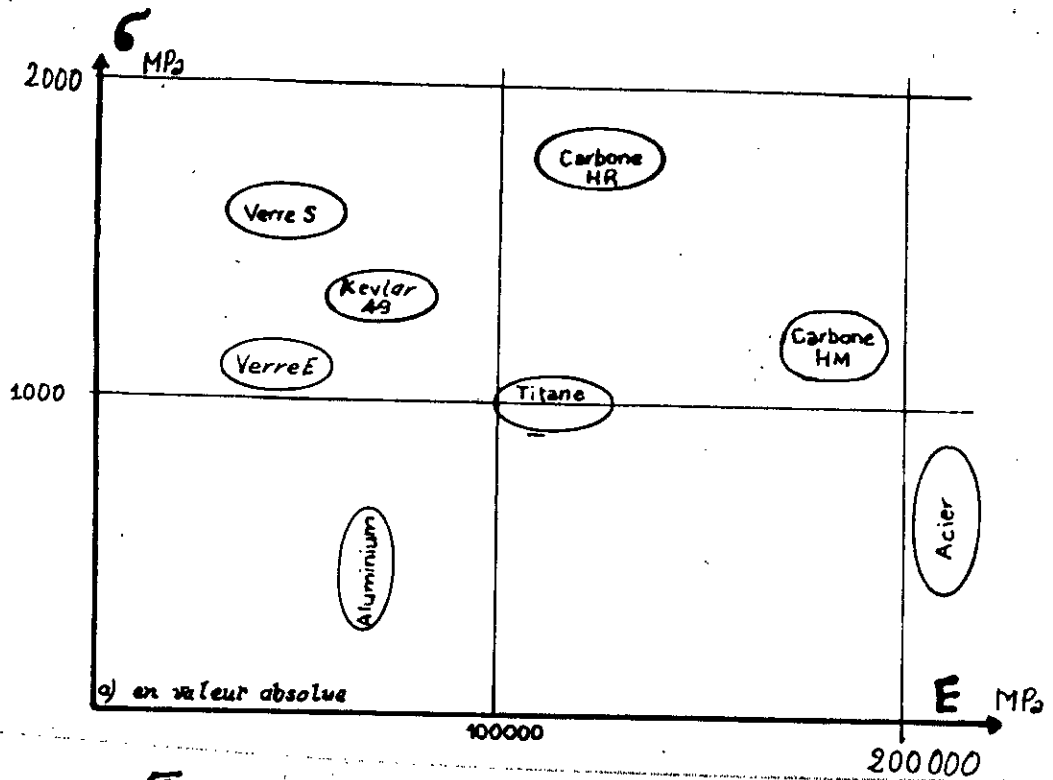
Pour un matériau isotrope et homogène, soumis à un état de contrainte bidimensionnelle, deux constantes sont nécessaires pour décrire le comportement élastique du corps.

E : module de Young (module d'élasticité)
 ν : coefficient de Poisson.

donc, on peut décrire le comportement (relation contrainte déformation) pour un état de contraintes bidimensionnelles ; soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \cdot E}{1 - \nu^2} \\ \sigma_y = \frac{(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \cdot E}{1 - \nu^2} \\ \tau_{xy} = \gamma_{xy} \cdot G \end{array} \right.$$

avec : $G = \frac{1}{2(1+\nu)} \cdot E$



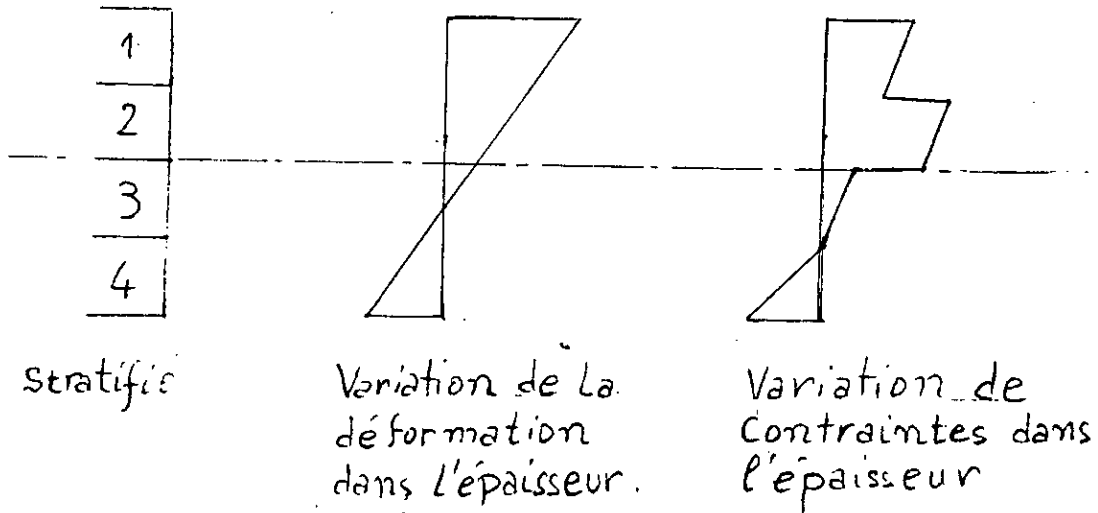
COMPARAISON COMPOSITES - METAUX

* Unidirectionnels 60% Fibres + Epoxyde

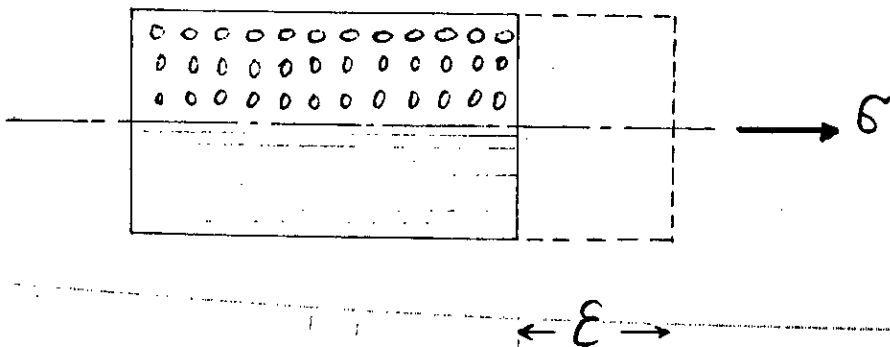
III/ MATÉRIAUX COMPOSITES:

1/ Hypotheses :

Dans l'étude suivante, des Matériaux Composites, on considèrera le composite à déformations et contraintes planes pour un matériau orthotrope et homogène, et que les déformations varient linéairement dans l'épaisseur du matériau, constante dans un chargement plan, et proportionnelle à l'épaisseur dans le cas de moments de flexions.

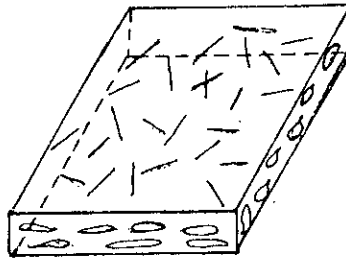


* Exemple de chargement Plan :

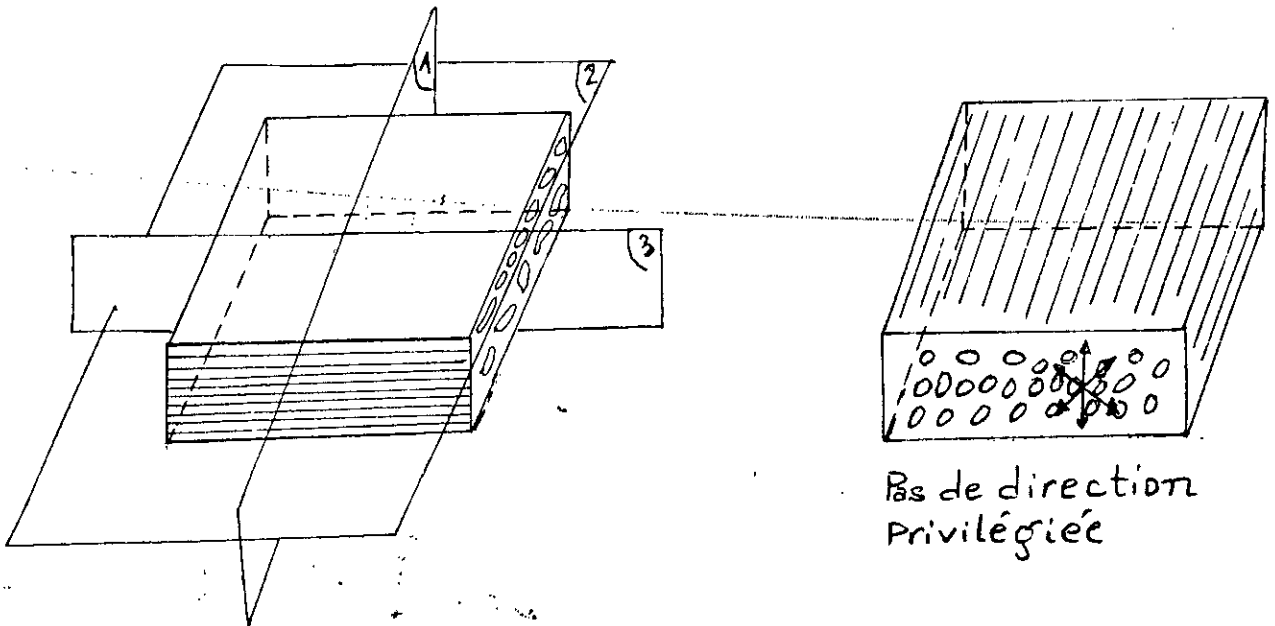


2/ Comportement Elastique du pli orthotrape (ou monocondre):

Ces plis sont constitués par une résine renforcée par des fibres unidirectionnelles de tissus ou de mats.



Les renforts unidirectionnels, dans une monocouche, ont un comportement orthotrape et de plus la distribution aléatoire des fibres dans l'épaisseur d'une couche permet en général, de les considérer comme ayant une isotropie Transverse.



ORTHOTROPIE :

3 Plan de Symétrie

ISOTROPIE

TRANSVERSE

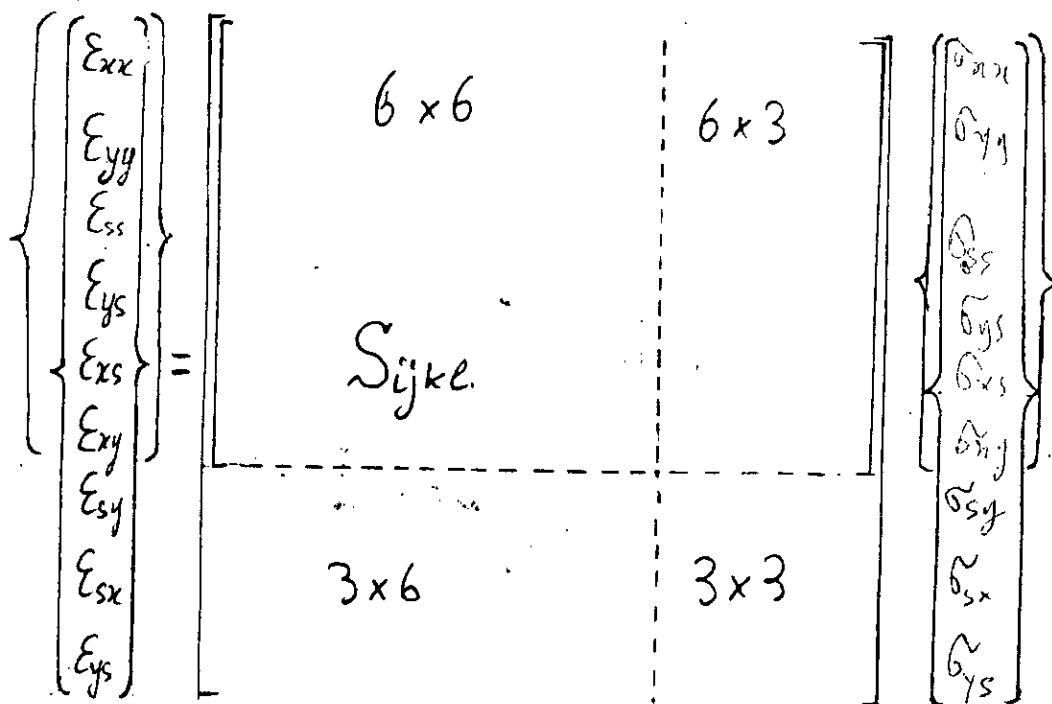
d'autre part, on sait que les matériaux Composites ont un comportement élastique et linéaire et dans ce cas, la loi de Hooke généralisée reliant les contraintes aux déformations s'écrit :

$$\sigma_{kl} = Q_{ijkl} \cdot \epsilon_{ij} \quad \text{ou} \quad \epsilon_{ij} = S_{ij'kl} \cdot \sigma_{kl}$$

car les déformations sont des fonctions linéaires et homogènes :

Ainsi, les grandeurs $S_{ij'kl}$ caractérisant le comportement élastique du milieu considéré ne sont pas des fonctions des points : elles sont les mêmes quelque soit l'endroit du milieu que l'on considère.

D'où sous forme matricielle, la relation de comportement élastique (en termes de souplesses) :



- * Du fait de la symétrie des contraintes ($\sigma_{ke} = \sigma_{ek}$), les coefficients concernés sont identiques: $S_{ijkl} = S_{jikl}$
- * Du fait de la symétrie des déformations ($\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$), alors: $S_{ijkl} = S_{jikl}$.

Autrement dit; seule la connaissance des coefficients inclus dans la matrice 6×6 est nécessaire; soit 36 constantes.

Ces 36 coefficients ne sont pas toutes indépendants car: en appliquant le théorème des travaux virtuels.

On montrera aisément que les coefficients S_{ijkl} sont symétriques c'est-à-dire: $S_{ijkl} = S_{klij}$.

Soit deux états de contraintes Simples:

- états n°1: une seule contrainte, soit $(\sigma_{kl})_1$, qui induit, d'après la loi de comportement, des déformations: $(\epsilon_{ij})_1 = S_{ijkl} \cdot (\sigma_{kl})_1$.
- états n°2: $(\sigma_{pq})_2$ induit des déformations: $(\epsilon_{mn})_2 = S_{mnpq} \cdot (\sigma_{pq})_2$.

Démonstration: On écrit que, le travail des contraintes de l'état 1 dans le champ des déformations de l'état 2 est égale au travail des contraintes de l'état 2 dans le champ des déformations de l'état 1; soit:

$$(\sigma_{ke})_1 \cdot (\epsilon_{ke})_2 = (\sigma_{pq})_2 \cdot (\epsilon_{pq})_1$$

$$\text{c.à.d.} : (\sigma_{ke})_1 \cdot S_{kelpq} \cdot (\sigma_{pq})_1 = (\sigma_{pq})_2 \cdot S_{pqkcl} \cdot (\sigma_{ke})_1$$

$$\text{d'où la propriété: } S_{kelpq} = S_{pqkcl}$$

donc, la matrice 6×6 mise en évidence est bien symétrique :
le nombre des coefficients distincts qui y figure est :

$$\frac{6 \times (6+1)}{2} = 21 \text{ coefficients distincts } S_{ijkl}.$$

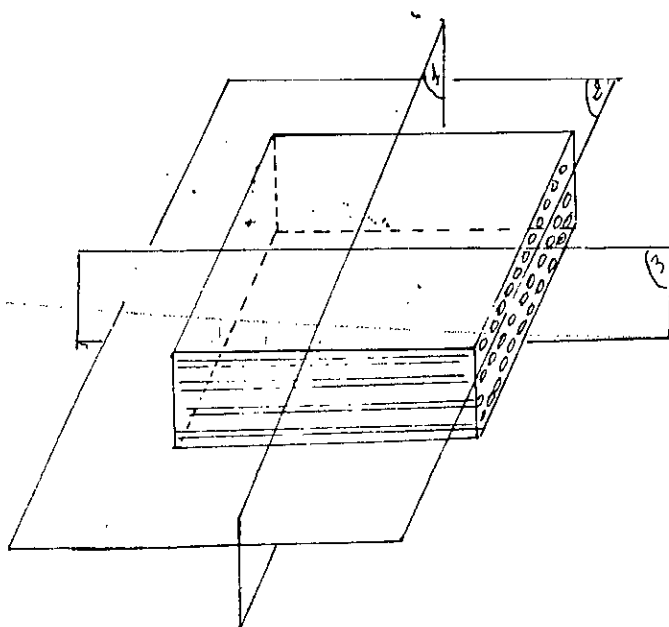
on pose $\gamma_{xy} = 2 \epsilon_{xy}$; $\gamma_{xs} = 2 \epsilon_{xs}$; $\gamma_{ys} = 2 \epsilon_{ys}$

et en termes de rigidité, la loi de comportement, sous la forme matricielle, s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{ss} \\ \hat{\epsilon}_{ys} \\ \hat{\epsilon}_{sx} \\ \hat{\epsilon}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ & & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ & & & Q_{44} & Q_{45} & Q_{55} \\ & & & & Q_{55} & Q_{56} \\ & & & & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{ss} \\ \gamma_{ys} \\ \gamma_{sx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Symétrique.

Matériaux orthotrope : (schéma)



3 Plan de Symétrie

Un matériau est dit orthotrope dans le cas où il existe trois plans de symétrie orthogonaux des propriétés du matériau, la loi de comportement (2) se simplifie, dans le repère particulier, et ne nécessite que 9 constantes indépendantes.

(orthotrope = contraction de orthogonal et anisotrope) et en)

Et en éliminant les termes-nuls, la relation (2) s'écrit alors (en termes de souplesse où on fait apparaître les modules d'élasticité et coefficients de Poissons de la façon suivante) :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xx}} & -\frac{\nu_{yx}}{E_{yy}} & -\frac{\nu_{zx}}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_{xx}} & \frac{1}{E_{yy}} & -\frac{\nu_{zy}}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_{xx}} & -\frac{\nu_{yz}}{E_{yy}} & \frac{1}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Conclusion:

un matériau orthotrope est défini par 9 constantes.

Matériau isotrope Transverse :

Un matériau isotrope Transverse est tel que tout plan passant par un axe privilégié soit un plan de symétrie mécanique.

Pour le cas de plis ou couche à renfort unidirectionnel, la répartition aléatoire des fibres dans la tranche perpendiculaire à la direction du renforcement définit une isotropie transverse à l'échelle macromécanique qui permet de réduire le nombre de constantes indépendantes nécessaire à 5.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_s \\ \gamma_{ys} \\ \gamma_{xs} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{yy} & S_{ys} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{ss} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{ys} & & \\ & & & & S_{xs} & \\ & & & & & \frac{(S_{xx}-S_{yy})}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \\ \tau_{ys} \\ \tau_{xs} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Symétrique

Remarque :

- * les tissus ne possèdent pas cette isotropie transverse .
- ... * les mats n'ont pas la direction préférentielle dans le plan .

3/ Contrainte dans le plan du pli :

- dans les axes d'ortotropie (ON-AXIS) .

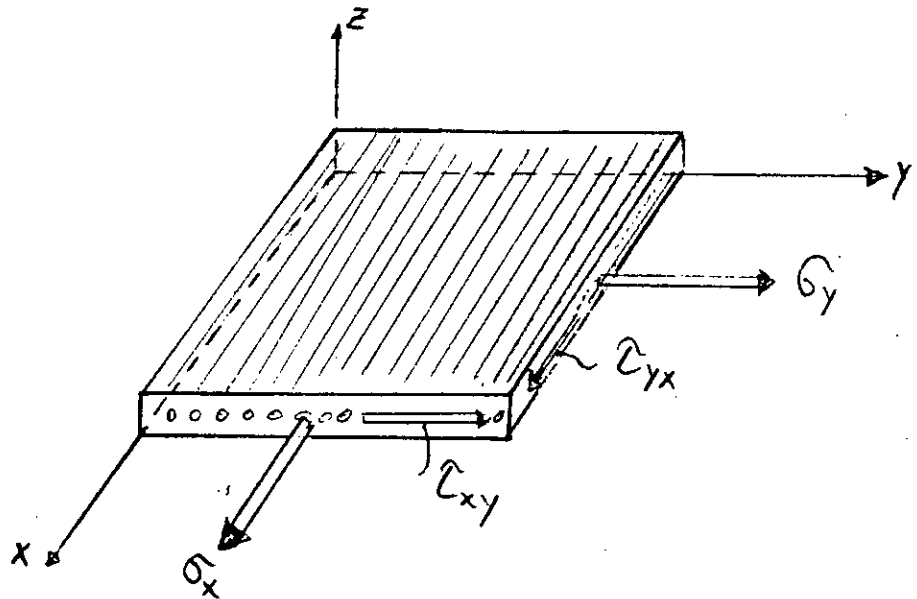
Pour un état de contrainte quelconque, le PLi (couche) serait soumis aux contraintes :

$$\epsilon_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{ys}, \tau_{sx}, \tau_{xy}$$

Pour un état de contrainte PLAN ; on a :

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} ;$$

x, y, z : repère lié au pli ou à la couche (ON - AXIS) .



et dans ce cas la loi de comportement a pour hypothèse :

- Domaine élastique linéaire
- Matériau orthotrope
- Contraintes planes .

Ces contraintes : sont la superposition des trois états élémentaires :

- Traction - Compression suivant x
- Traction - Compression suivant y
- Cisaillement dans le plan x,y

3-1- : Matrice de Souplesse dans les axes d'orthotropie

(ON - AXIS)

3-1-1 Sollicitation dans la direction des fibres
(Traction):

le champ de contrainte s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & 0 \\ S_{yx} & S_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sous l'effet de σ_x : on a :

— une déformation longitudinale (suivant x) :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_{xx}} \quad (\text{loi de Hooke}) \\ \epsilon_x &= S_{xx} \cdot \sigma_x \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{xx} = \frac{1}{E_{xx}}$$

ϵ_x : mesure (valeurs donnée par les jauges).

σ_x : contrainte appliquée.

— une déformation transversale (suivant y) :

$$S_{yx} = \frac{\epsilon_y}{\sigma_x} = \frac{\epsilon_y}{E_{xx} \cdot \epsilon_x} = - \left(\frac{1}{E_{xx}} \left(- \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \right) \right) = - \frac{\nu_{xy}}{E_{xx}}$$

$$\Rightarrow S_{yx} = - \frac{\nu_{xy}}{E_{xx}}$$

3-1-2 Sollicitation dans le sens transversale (Y)
(Traction).

l'état de contrainte est donné par :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & 0 \\ S_{yx} & S_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$* \quad \epsilon_x = S_{xy} \cdot \sigma_y \Rightarrow S_{xy} = \frac{\epsilon_x}{\sigma_y} = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_y} \frac{\epsilon_y}{\sigma_y} = \frac{1}{E_{yy}} (-\nu_{yx})$$

$$S_{xy} = -\frac{\nu_{yx}}{E_{yy}}$$

$$* \quad \epsilon_y = S_{yy} \cdot \sigma_y \Rightarrow S_{yy} = \frac{\epsilon_y}{\sigma_y} = \frac{1}{E_{yy}}$$

$$S_{yy} = \frac{1}{E_{yy}}$$

3-1-3 Essai de torsion (cisaillement selon x,y)

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & 0 \\ S_{yx} & S_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{xy} = S_{ss} \cdot \tau_{xy} \Rightarrow S_{ss} = \frac{\gamma_{xy}}{\tau_{xy}}$$

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} \cdot G_{xy}$$

$$\Rightarrow S_{ss} = \frac{1}{G_{xy}}$$

d'où la matrice de souplesse dans les axes d'orthotropie
(ON - AXIS)

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xx}} & -\frac{\nu_{yx}}{E_{yy}} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_{yy}} & \frac{1}{E_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix}$$

et vu que la matrice S est symétrique, alors :

$$\frac{\nu_{xy}}{E_{yy}} = \frac{\nu_{yx}}{E_{xx}} \Rightarrow \nu_{yx} = \nu_{xy} \cdot \frac{E_{yy}}{E_{xx}}$$

donc, pour définir la matrice de souplesse d'un matériau composite Transverse il faut connaître quatre paramètres indépendants : E_{xx} , E_{yy} , G_{xy} , ν_{xy} qui sont :

- déterminés par des essais pratiques
- et définie dans les axes d'orthotropie .

N.B : La matrice de souplesse nous permet de calculer (connaître) les déformations pour tout état de Contrainte (Plan).

3-2 Matrice de rigidité dans les axes d'orthotropie (ON-AXIS) : $[Q]$

La rigidité est l'inverse de la souplesse du matériau :

$$[Q] = [S]^{-1} ; \text{ soit : } [\sigma_i] = [Q_{ij}] \cdot [\epsilon_j]$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ Q_{yx} & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

avec :

$$Q_{xx} = m \cdot E_{xx} .$$

$$Q_{yy} = m \cdot E_{yy} .$$

$$Q_{xy} = m \cdot \nu_{xy} \cdot E_{yy} = m \cdot \nu_{yx} \cdot E_{xx} .$$

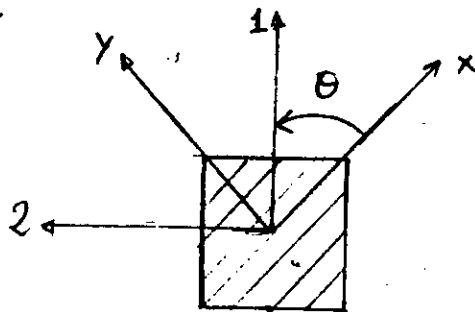
$$Q_{xy} = Q_{yx} \text{ (matrice symetrique) .}$$

$$Q_{ss} = G_{xy} .$$

$$\text{avec } m = \frac{1}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}}$$

3-4 Détermination de la matrice de rigidite hors des axes d'orthotropie (off-axis).

Connaissant la matrice de rigidite dans les axes d'orthotropie, on peut deduire la matrice de rigidite dans un systeme quelconque, sachant seulement l'angle "0" que fait le systeme d'axe de sollicitation avec le systeme d'axe du materiau .



Elements de [Q] :

ON-AXIS : $E_{xx}, E_{yy}, G_{xy}, \nu_{xy}$.

OFF-AXIS : $E_{11}, E_{22}, G_{12}, \nu_{12}$.

Le passage d'un systeme d'axe a l'autre se fait par l'intermediaire d'une matrice de passage notee : [T]

où :

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2m.n \\ n^2 & m^2 & -2m.n \\ -m.n & m.n & m^2 - n^2 \end{bmatrix}$$

$$m = \cos(\theta).$$

$$n = \sin(\theta)$$

3-4-1 Contrainte :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

et inversement ; on a :

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} m = \cos(\theta) \\ n = \sin(\theta) \end{array}$$

en faisant : $\theta = -\theta$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_x \\ \tilde{\sigma}_y \\ \tilde{\tau}_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

ON-AXIS

OFF-AXIS

En generale, la direction des efforts ne change pas mais c'est l'orientation des fibres qui varie .

3-4-2 : Pour les déformations :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix}$$

3-4-3 : Etablissement de la matrice de rigidite :

a/ Contrainte :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec : } \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [Q] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \cdot [Q] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (A)$$

b/ Déformation

$$\text{soit : } [R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$[R]$: matrice de Reuter.

$$\text{et } \gamma_{12} = 2 \cdot \epsilon_{12}$$

Alors :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [T] [R] \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

$$(A) \Rightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [T] [R] \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (B)$$

$$\text{Avec : } \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = [R]^{-1} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

que l'on remplace dans l'équation (B) :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [R] [T] [R]^{-1} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

donc la matrice de rigidité en OFF-AXIS
(hors des axes d'orthotropie) ; est :

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [R] [T] [R]^{-1}$$

3-5 : Matrice de souplesse hors d'orthotropie (OFF-AXIS)

Par un raisonnement analogue ; on obtient :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [R] [T]^{-1} [R]^{-1} [S] [T] \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

avec : $[\bar{S}] = [R] [T]^{-1} [R]^{-1} [S] [T]$

ou $[\bar{S}]$ est la matrice de souplesse en OFF-AXIS
(hors des axes d'orthotropie) .

4/ DETERMINATION DES INVARIANTS :

=====

Ce sont des paramètres caractérisant la monocouche
anisotrope qui est la base d'un Composite Stratifié .

Ces invariants sont donnees dans les axes d'orthotropie
(ON - AXIS) .

4-1 : En termes de rigidite :

$$U1 = (3.Qxx + 3.Qyy + 2.Qxy + 4.Qss) / 8$$

$$U2 = (Qxx - Qyy) / 2$$

$$U3 = (Qxx + Qyy - 2.Qxy - 4.Qss) / 8$$

$$U4 = (Qxx + Qyy + 6.Qxy - 4.Qss) / 8$$

$$U5 = (Qxx + Qyy - 2.Qxy + 4.Qss) / 8$$

4-2 : En terme de souplesse

$$V1 = (3.Sxx + 3.Syy + 2.Sxy + Sss) / 8$$

$$V2 = (Sxx - Syy) / 2$$

$$V3 = (Sxx + Syy - 2.Sxy - Sss) / 8$$

$$V4 = (Sxx + Syy + 6.Sxy - Sss) / 8$$

$$V5 = (Sxx + Syy - 2.Sxy + Sss) / 2$$

4-3 : Elements de $[\bar{Q}]$: (OFF-AXIS)

$$\bar{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cdot \cos 20 + U_3 \cdot \cos 40$$

$$\bar{Q}_{12} = U_4 - U_3 \cdot \cos 40 \quad ; \quad Q_{21} = Q_{12}$$

$$\bar{Q}_{22} = U_1 - U_2 \cdot \cos 20 + U_3 \cdot \cos 40$$

$$\bar{Q}_{16} = (1/2) \cdot U_2 \cdot \sin 20 + U_3 \cdot \sin 40$$

$$\bar{Q}_{26} = (1/2) \cdot U_2 \cdot \sin 20 - U_3 \cdot \sin 40$$

$$\bar{Q}_{66} = U_5 - U_3 \cdot \cos 40$$

4-4 : Elements de $[\bar{S}]$: (OFF-AXIS)

$$\bar{S}_{11} = V_1 + V_2 \cdot \cos 20 + V_3 \cdot \cos 40$$

$$\bar{S}_{22} = V_1 - V_2 \cdot \cos 20 + V_3 \cdot \cos 40$$

$$\bar{S}_{12} = V_4 - V_3 \cdot \cos 40$$

$$\bar{S}_{16} = V_2 \cdot \sin 20 + 2V_3 \cdot \sin 40$$

$$\bar{S}_{26} = V_2 \cdot \sin 20 - 2 \cdot V_3 \cdot \sin 40$$

$$\bar{S}_{46} = V_5 - V_4 \cdot \cos 40$$

donc, puisqu'ici : tous les elements des matrices de rigidite et de souplesse, que ce soit ON-AXIS ou OFF-AXIS, sont bien definit

2/ COMPORTEMENT ELASTIQUE DU STRATIFIE

Relations deformation - déplacement:

Pour etudier cette partie on suppose que :

- a/_ La plaque en stratifie est mince et d'epaisseur constante : Cette hypothese permet de ramener le probleme reel a un modele a deux dimensions .

b/_ Le stratifié est constitué d'un empilement de couches orthotropes, parallèles, parfaitement liées les unes aux autres .

L'hypothèse d'assemblage parfait des couches se traduit physiquement par l'égalité des déplacements des points en regard de part et d'autre de l'interface et par la transmission des efforts à ce même interface .

c/_ Chaque couche a un comportement élastique linéaire .

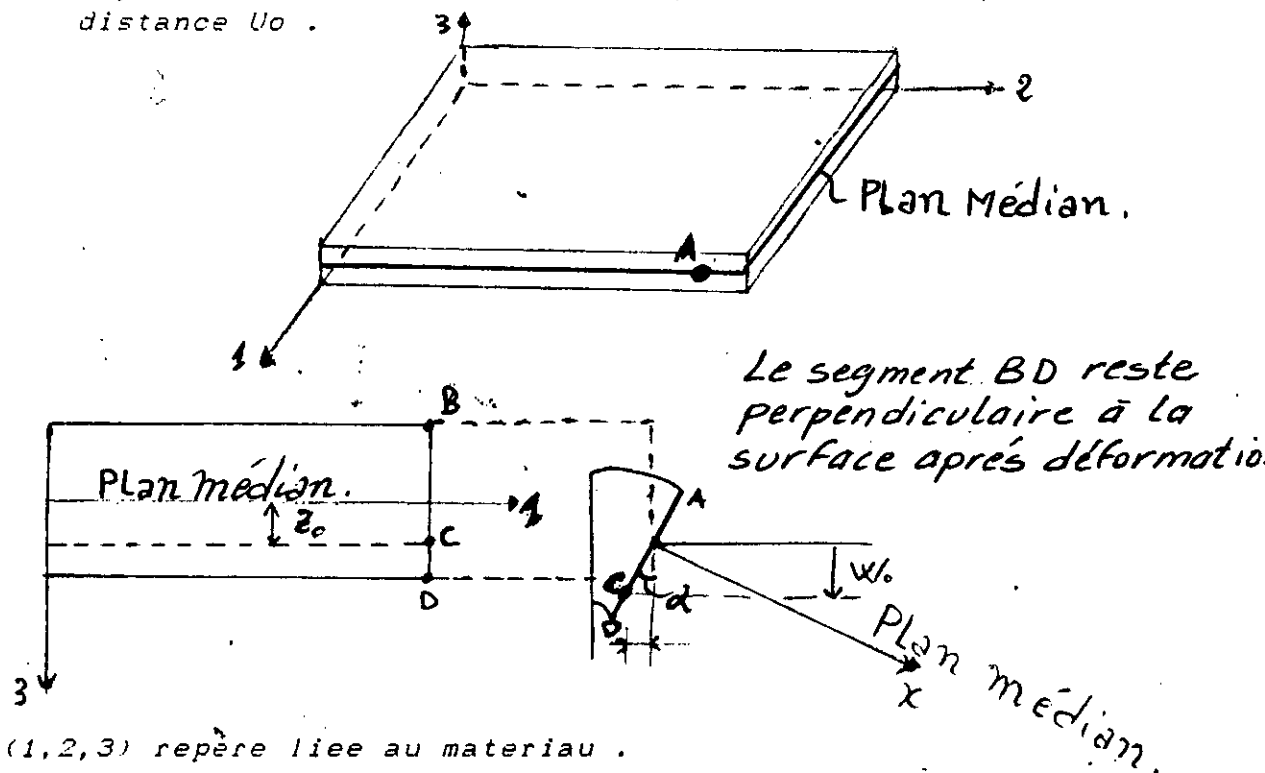
d/_ Les déplacements sont faibles .

e/_ Les déformations sont faibles .

f/_ Chaque couche se trouve dans un état de contrainte dans le plan (états de Contraintes Plans) .

g/_ On définit, dans un Composite Stratifié ou pli, un plan médian ou fibre neutre .

Et on considère un point A du plan médian qui se déplace dans la direction (1), du stratifié, d'une distance U_0 .



On supposera que les déplacements sont continus dans l'épaisseur du stratifié mince, et toute perpendiculaire à la surface reste perpendiculaire après déformation.

La figure ci-dessus schématise la déformation d'un segment ABCD. Le point A, milieu du stratifié, se déplace après déformation suivant 2, d'une distance U_0 et d'une distance V_0 selon (3).

Un raisonnement identique peut être fait dans la direction (1); il en résulte que le point A, milieu de l'épaisseur, se déplace dans l'espace des quantités: U_0, V_0, W_0 .

Donc; un point C quelconque de l'épaisseur se déplace en C' dont la position se déduit du déplacement du point B et de sa cote z par:

$$U_0 = -z \cdot \frac{W_0}{x}$$

$$V_0 = -z \cdot \frac{W_0}{y}$$

W_0 : déplacement du plan médian suivant Z puisque l'épaisseur reste constante.

tel que: $U_c = U_0 - z_c \cdot \text{tg} \alpha$ ($\text{tg} \alpha = \frac{dW}{dx}$: petite déformation)

$$V_c = V_0 - z_c \cdot \text{tg} \beta$$

$$= V_0 - z_c \cdot \frac{dW}{dy}$$

$W_c = W_a$: puisque W_c est relatif au déplacement de A (W_a).

Deformations:

L'état des déformations, se résume par la

connaissance en tout point des trois "déformations planes" : ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy}

Ces déformations sont reliées aux déplacements par :

(sachant que : $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$)

$$\epsilon_1 = \frac{\partial}{\partial x} (u_0 - z_c \cdot \frac{\partial w}{\partial x}) = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\partial}{\partial y} (v_0 - z_c \cdot \frac{\partial w}{\partial y}) = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z_c \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

si on pose :

$\epsilon_1^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}$: déformation du plan matériau suivant x .

$\epsilon_2^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}$; " " " " " "

$\gamma_{12}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$; " " " " " "

$k_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$; $k_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$; $k_{12} = -2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

en notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_{12} \end{bmatrix}$$

avec:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{bmatrix}$$

: representent les deformations du point B, milieu de l'epaisseur, ce sont les deformations du plan median .

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_{12} \end{bmatrix}$$

: representent les courbures de la surface au point B ou les courbures du plan moyen .

Enfin, la connaissance des deformations et des courbures du plan moyen du stratifie : $[\varepsilon^0]$ et $[K]$ definit complètement l'etat de deformation de tout point pris dans l'epaisseur de la plaque par la relation matricielle :

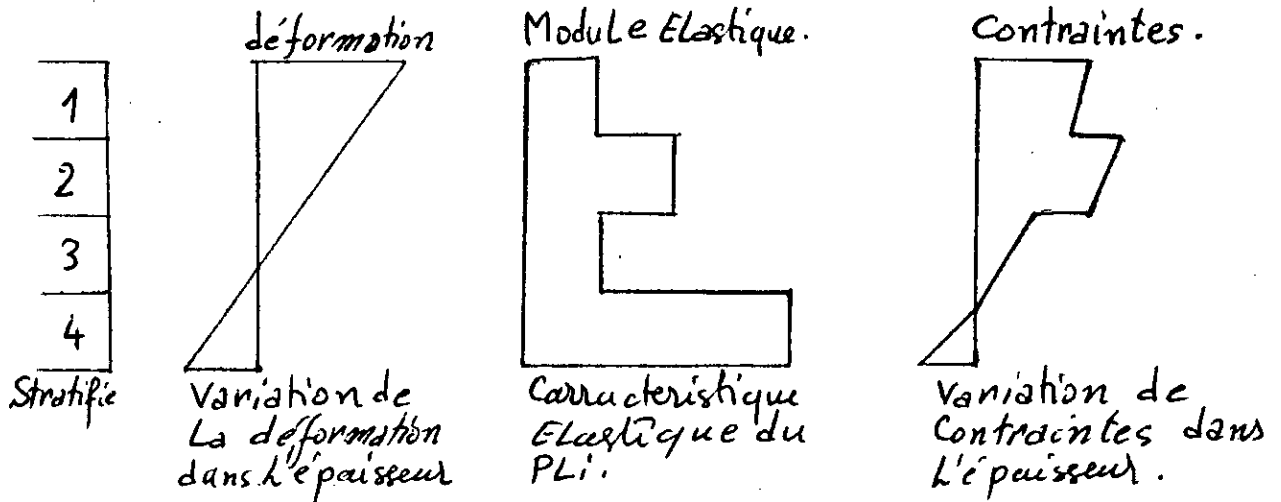
$$[\varepsilon(z)] = [\varepsilon^0] + z \cdot [K]$$

ou Z est la cote du point considere a partir du plan median.

DISCONTINUITÉ DES CONTRAINTES :

Vu que les caracteristiques elastiques sont differantes suivant les couches : en consequence, les contraintes vont subir des discontinuites .

Schema de la repartition des efforts dans le stratifié avec des hypotheses formulées .



Connaissant : — les deformations dans chaque couche .
 — les caracteristiques mecaniques (E, G, ν.)

les contraintes s'endéduisent par :

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \right\}$$

où : $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$: Contraintes ON-AXIS .

\bar{Q}_{ij} : Matrice de rigidite OFF-AXIS du pli .

z : Côte de la couche k choisie a partir du plan moyen .

Sous forme matricielle :

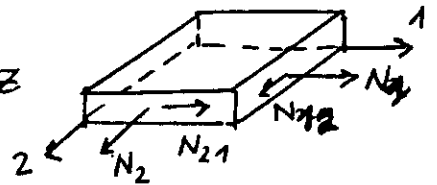
$$[\sigma]_i = [\bar{Q}]_i \cdot [\varepsilon] = [\bar{Q}]_i \cdot ([\varepsilon^0] + z [k])$$

pour une couche d'indice : i

// DEFINITION DES CONTRAINTES ET DES MOMENTS RESULTANTS:

a/ Les contraintes resultantes sont donnees par :

$$N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 dz; \quad N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 dz; \quad N_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12} dz$$

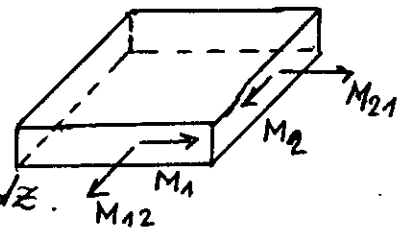


N_1, N_2, N_{12} : force par unite de longueur .

h : hauteur du stratifie (epaisseur totale)

b/ Moments resultants :

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 z dz; \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 z dz; \quad M_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12} z dz$$



M_1, M_2, M_{12} : moments

et sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} z \cdot dz$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} z \cdot dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} z \cdot dz$$

Remarque : Vu que le Composite Stratifié présente une discontinuité au niveau de chaque couche (ou interface), l'intégration directe sur l'épaisseur du Stratifié n'est possible .

Alors, on procède, après discrétisation du Stratifié en élément couche, à une intégration sur une couche, repérée par l'indice k , et une sommation des " n " couches formant le Stratifié .

Et sachant que :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [\bar{Q}]_k \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_3^0 \end{Bmatrix} + [\bar{Q}]_k \cdot z \cdot \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_{12} \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left([\bar{Q}]_k \cdot [\varepsilon^0] + [\bar{Q}]_k \cdot [K] \cdot z \right) dz$$

ou sous forme condensée:

$$[N] = \sum_{k=1}^n \left(\int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}]_k \cdot [\epsilon^0] \cdot dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}]_k \cdot [K] \cdot z \cdot dz \right)$$

$$[N] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \cdot [\epsilon^0] (h_k - h_{k-1}) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} [\bar{Q}]_k \cdot [K] (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

Et on pose: $A_{ij} = R T_{ij} = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k \cdot (h_k - h_{k-1})$

$$B_{ij} = R C_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k \cdot (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

où: A_{ij} : Rigidité de traction ou en membrane.

B_{ij} : Rigidité de couplage.

Alors:

$$[N] = [A] \cdot [\epsilon^0] + [B] \cdot [K]$$

Et sous forme développée:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_1^0 \\ \epsilon_2^0 \\ \epsilon_3^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_{12} \end{Bmatrix}$$

Notation matricielles:

$$N_i = A_{ij} \cdot \epsilon_j^0 + B_{ij} \cdot K_j$$

N.B: Pour un stratifié symétrique:

$$B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^0 \bar{Q}_{ij} \cdot z \cdot dz + \int_0^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} \cdot z \cdot dz = - \int_0^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} \cdot z \cdot dz + \int_0^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} \cdot z \cdot dz$$

MOMENTS RESULTANTS:

$$[M] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma] \cdot z \cdot dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \cdot z \cdot dz$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left([\bar{Q}]_k \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{Bmatrix} z + [\bar{Q}]_k \cdot \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_{12} \end{Bmatrix} \cdot z^2 \right) \cdot dz$$

$$\Rightarrow [M] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \cdot [\varepsilon^0] (h_k^2 - h_{k-1}^2) + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \cdot [K] (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

On pose :

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \cdot [\varepsilon^0] \cdot (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \cdot [K] \cdot (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

d'où :

$$\boxed{[M] = [B] \cdot [\varepsilon^0] + [D] \cdot [K]}$$

Récapitulation :

$$N_i = A_{ij} \cdot \varepsilon_j^0 + B_{ij} \cdot K_j$$

$$M_i = B_{ij} \cdot \varepsilon_j^0 + D_{ij} \cdot K_j$$

On a, donc, 6 équations représentant les relations Contraintes-déformations.

et sous forme condensée :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \end{bmatrix} \text{ Relation Fondamentale utilisée dans l'étude des stratifiés.}$$

Et inversement :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b^T & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad \text{avec: } a = A^{-1} \\ b = B^{-1} \quad \text{et } b^T = [B^{-1}]^T \\ d = D^{-1}$$

Remarque : Si le stratifié est symétrique, alors: $[B] = [0]$

donc, à partir de :

$$\begin{cases} [N] = [A] \cdot [\varepsilon^0] + [B] \cdot [\kappa] \\ [M] = [B] \cdot [\varepsilon^0] + [D] \cdot [\kappa] \end{cases} \quad (a)$$

Sous forme développée :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

Vu que, $[N], [M], [A], [B], [D]$: sont connues.

(contraintes, moments exercés et caractéristiques du matériau).

Notation matricielle :

$A, B, D, N, M, a, b, d, \varepsilon^0$ et κ étant des matrices alors : on peut écrire le système (a) comme suit :

$$\begin{cases} N = A \cdot \varepsilon^0 + B \cdot \kappa \\ M = B \cdot \varepsilon^0 + D \cdot \kappa \end{cases}$$

d'où on peut tirer :

$$\varepsilon^0 = A^{-1} \cdot N - A^{-1} \cdot B \cdot \kappa = a \cdot N - a \cdot B \cdot \kappa \quad \text{où: } a = A^{-1}$$

$$M = B \cdot \varepsilon^0 + D \cdot \kappa = B \cdot (a \cdot N - a \cdot B \cdot \kappa) + D \cdot \kappa$$

$$= B \cdot a \cdot N - B \cdot a \cdot B \cdot \kappa + D \cdot \kappa = B \cdot a \cdot N + (D - B \cdot a \cdot B) \cdot \kappa$$

$$\Rightarrow K = (D - B \cdot a \cdot B)^{-1} \cdot (M - B \cdot a \cdot N)$$

$$K = (D - B \cdot a \cdot B)^{-1} \cdot M - (D - B \cdot a \cdot B)^{-1} \cdot B \cdot a \cdot N$$

$$K = - (D - B \cdot a \cdot B)^{-1} \cdot B \cdot a \cdot N + (D - B \cdot a \cdot B)^{-1} \cdot M$$

$$\varepsilon^0 = a \cdot N - a \cdot B \cdot K = [a + a \cdot B \cdot (D - B \cdot a \cdot B)^{-1}] N - a \cdot B \cdot (D - B \cdot a \cdot B)^{-1} \cdot M$$

d'où la relation contrainte-déformation en termes de souplesses:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + a \cdot B \cdot (D - B \cdot a \cdot B)^{-1} \cdot B \cdot a & -a \cdot B \cdot (D - B \cdot a \cdot B)^{-1} \\ -(D - B \cdot a \cdot B)^{-1} \cdot B \cdot a & (D - B \cdot a \cdot B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$$

$$\text{et: } \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -a \cdot B \\ B \cdot a & D - B \cdot a \cdot B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$$

dont les unités sont:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{G \cdot N} & \frac{1}{M \cdot N} \\ \frac{1}{M \cdot N} & \frac{1}{K \cdot N \cdot m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$$

Rq: Si le stratifié est symétrique, alors: $B = 0$

$$\text{et: } \varepsilon^0 = a \cdot N = A^{-1} \cdot N$$

$$K = d \cdot M = D^{-1} \cdot M$$

Evaluation des composantes des modules :

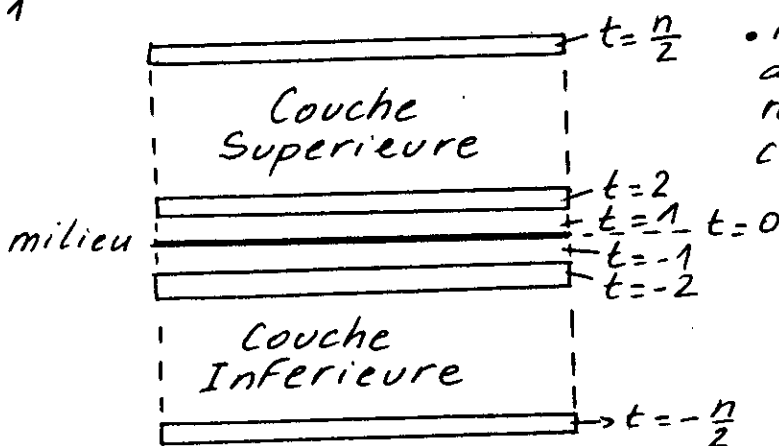
$$[A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_{ij}] (1, z, z^2) \cdot dz.$$

Cette équation est écrite de telle manière que chaque terme de gauche lui correspond son terme de droite.
 Pour un stratifié, les limites d'intégration sont de $-h/2$ à $h/2$.
 Chaque pli (couche) est considéré comme un matériau homogène.
 On peut remplacer le terme intégral par un terme de sommation comme suit :

$$A_{ij} = h_0 \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k [t - (t-1)].$$

$$B_{ij} = \frac{h_0^2}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k [t^2 - (t-1)^2].$$

$$D_{ij} = \frac{h_0^3}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k [t^3 - (t-1)^3].$$



• Nomenclature d'un stratifié relatif à chaque couche.

Donc, le module du stratifié est proportionnel au module de chaque pli, en le multipliant par le facteur entre crochets.

Exemple:

Relation Contrainte-déformation pour un stratifié non symétrique à Cross-ply (0/90) et équilibre:

	ϵ_1^0	ϵ_2^0	ϵ_6^0	K_1	K_2	K_6
N_1	A_{11}	A_{12}	0	B_{11}	0	0
N_2	A_{21}	A_{22}	0	0	B_{22}	0
N_6	0	0	A_{66}	0	0	0
M_1	B_{11}	0	0	D_{11}	D_{12}	0
M_2	0	B_{22}	0	D_{21}	D_{22}	0
M_6	0	0	0	0	0	D_{66}

matrice non-symétrique
et équilibre \Rightarrow
 $B_{ij} \neq 0$ et $A_{16} = A_{26} = 0$

	N_1	N_2	N_6	M_1	M_2	M_6
ϵ_1^0	a_{11}	a_{12}	0	b_{11}	0	0
ϵ_2^0	a_{21}	a_{22}	0	0	b_{22}	0
ϵ_6^0	0	0	a_{66}	0	0	0
K_1	b_{11}	0	0	d_{11}	d_{12}	0
K_2	0	b_{22}	0	d_{21}	d_{22}	0
K_6	0	0	0	0	0	d_{66}

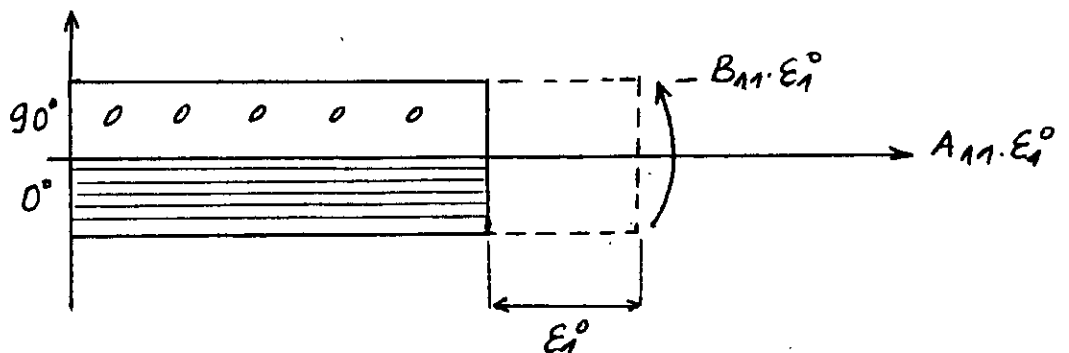
2/ Material: Anti-Symétrique.

Cas type: $[-45/+45]$ (équilibre $\Rightarrow A_{16} = A_{26} = 0$)

	E_1^0	E_2^0	E_6^0	K_1	K_2	K_6
N_1	A_{11}	A_{12}	0	0	0	B_{16}
N_2	A_{21}	A_{22}	0	0	0	B_{26}
N_6	0	0	A_{66}	B_{16}	B_{26}	0
M_1	0	0	B_{16}	D_{11}	D_{12}	0
M_2	0	0	B_{26}	D_{21}	D_{22}	0
M_6	B_{16}	B_{26}	0	0	0	D_{66}

	N_1	N_2	N_6	M_1	M_2	M_6
E_1^0	a_{11}	a_{12}	0	0	0	b_{16}
E_2^0	a_{21}	a_{22}	0	0	0	b_{26}
E_6^0	0	0	a_{66}	b_{61}	b_{62}	0
K_1	0	0	b_{16}	d_{11}	d_{12}	0
K_2	0	0	b_{26}	d_{21}	d_{22}	0
K_6	b_{16}	b_{26}	0	0	0	d_{66}

Application: Stratifié non-symétrique: Cross-ply.



Pour un matériau isotrope en contrainte plane (bidimensionnel) et sans le terme de cisaillement : le critère de rupture de VON-MISES est donné par :

$$(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)^2 + (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_3)^2 + (\hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_3)^2 = 2 \cdot \hat{\sigma}_e^2$$

$$\text{on pose : } \hat{\sigma}_e = X_y.$$

$$\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_1$$

$$\hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}_2.$$

ou : X_y : contrainte équivalente de VON-MISES (de rupture) correspondant aux contraintes principales.

$\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$: Contrainte principales.

et pour un état de contrainte plan

le critère de Von-Mises, s'écrit :

$$\left(\frac{\hat{\sigma}_1}{X_y}\right)^2 - \left(\frac{\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2}{X_y^2}\right) + \left(\frac{\hat{\sigma}_2}{X_y}\right)^2 = 1.$$

III / MATERIAUX COMPOSITES ORTHOTROPES :

Il est important, pour un prédimensionnement, de connaître la charge de rupture définie par un début d'endommagement du matériau composite en étude.

Pour les matériaux composites orthotropes, on s'intéressera au critère de rupture applicable à des plis unidirectionnels.

Le critère le plus adéquat est celui de TSAI-WU ; car il est :

- Analytiquement simple à résoudre.
- Applicable couche par couche.
- Analogue au critère de VON-MISES pour les matériaux isotropes.
- Fait intervenir l'interaction mutuelle des contraintes et des déformations.

Et il peut nous expliquer le mécanisme de rupture du stratifié.

Donc : ce critère permet de calculer la charge limite (à rupture) de chaque pli et grâce à la combinaison de toutes les charges limites on pourra faire une prévision sur le premier pli qui va se rompre.

Une fois le premier pli s'est rompu, le chargement est repris par le stratifié (en supposant que le pli rompu n'a pas d'influence sur le stratifié), on calculera le deuxième pli qui cédera à son tour et successivement pli à pli jusqu'à la rupture totale du stratifié.

Mais, néanmoins, il est à noter qu'il existe plusieurs critères visant à déterminer si le matériau a atteint sa limite ou non. On citera les critères suivants :

- critère de contrainte et déformation maximale
- critère de TSAI-HILL (complexité moyenne, très utilisé).
- critère de TSAI-WU (complet, et à potentialité intéressante).

et suivant les auteurs, la limite est soit :

- la limite d'élasticité .
- la limite de résistance .

1/ CRITERES DE CONTRAINTE ET DEFORMATION MAXIMUM:

a) CRITERE DE CONTRAINTE MAXIMUM :

Dans ce critère, les contraintes, dans le repère principal du matériau, doivent être inférieures à une limite à rupture donnée.

Soit dans le cas de contraintes biaxiales :

$$-X_c < \sigma_x < X_t \quad , \quad \text{pour une compression: } \sigma_x < 0$$

$$-Y_c < \sigma_y < Y_t \quad , \quad \text{pour une compression } \sigma_y < 0$$

$$|\tau_{xy}| < S .$$

Avec : X_t : limite de traction dans le sens des fibres
(valeur mesurée) .

X_c : limite en compression dans le sens des fibres
(valeur mesurée) .

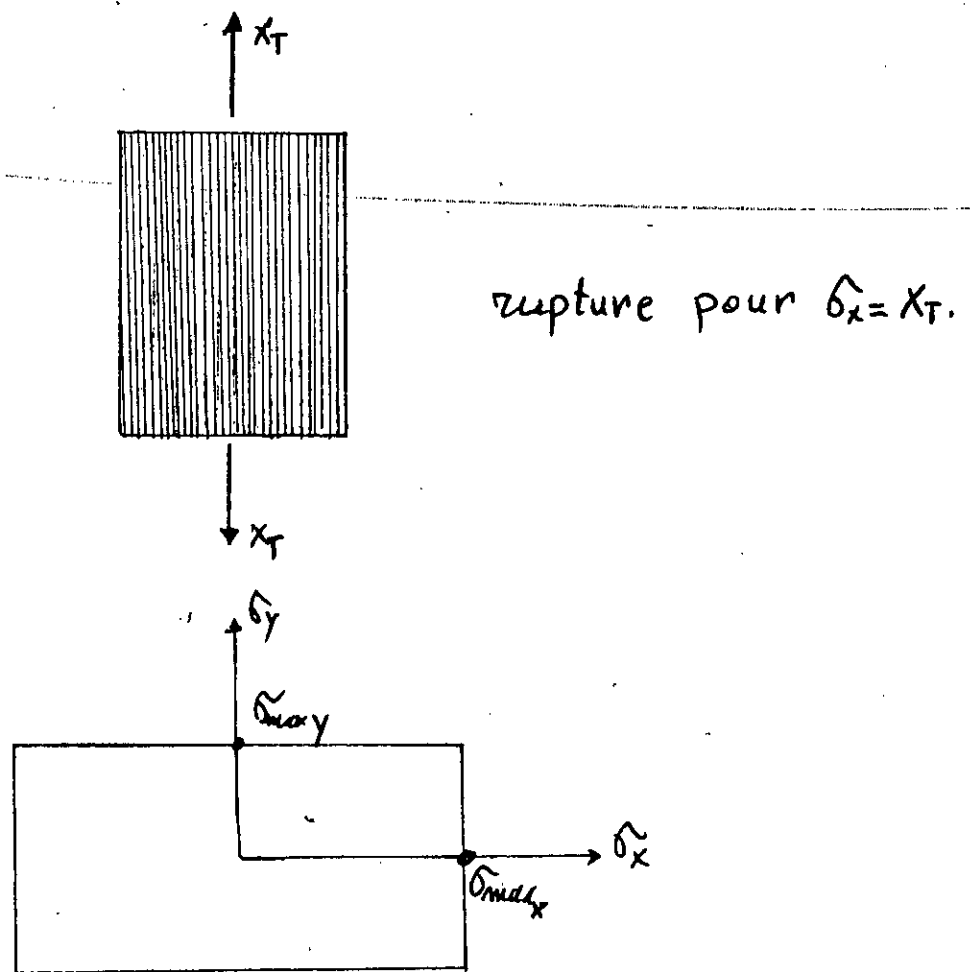
Y_t : limite de traction dans le sens transversale
(valeur mesurée) .

Y_c : limite en compression dans le sens transversale
(valeur mesurée) .

S : limite en cisaillement (valeur mesurée) .

une fois la contrainte limite est atteinte, le pli est rompu.

N.B : Avant d'appliquer ce critere ; il faut connaitre les contraintes dans le repere principal du pli (d'où la necessite de faire un changement de repere) .



b) CRITERE DE DEFORMATION MAXIMUM :

En considerant que les deformation sont lineaires et en appliquant la relation de HOOKE , on obtien les relation suivantes :

$$\epsilon_x < (\sigma_t / E_x) \quad \text{ou} \quad \epsilon_x < (\sigma_c / E'_x) .$$

$$\epsilon_y < (\sigma_t / E_y) \quad \text{ou} \quad \epsilon_y < (\sigma_c / E'_y) .$$

$$\epsilon_{xy} < \sigma_{xy} / G_{xy} .$$

où E' : est le module d'élasticité en compression .

On a rupture du pli quand sa déformation atteint le seuil limite définie par les équations précédentes .

2 / CRITERE DE RUPTURE QUADRATIQUE D'INTERACTION DE TSAI-WU

Sous forme condensé , le critère de rupture de TSAI-WU s'écrit :

$$F_{ij} \sigma_i \sigma_j + F_i \sigma_i = 1$$

dans le cas d'un état de contraintes bidimensionnelle et dans le repère principale du matériau (ON-AXIS) le critère s'écrit alors :

$$F_{xx} \sigma_x^2 + 2 F_{xy} \sigma_x \sigma_y + F_{yy} \sigma_y^2 + F_{ss} \sigma_s^2 + F_x \sigma_x + F_y \sigma_y = 1 \quad (E)$$

ou : $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_s$: contraintes appliquées.

S = cisaillement .

- $F_{xx}, F_{yy}, F_{xy}, F_{ss}$:parametres quadratique
de deuxieme degre analogues aux
quatre constantes independantes .

- F_x, F_y :parametres quadratiques lineaires
decrivant la difference de comportement
entre la traction et la compression .

Cinque des six parametres quadratiques peuvent etre mesure
par de simple tests de performance .

Le sixieme parametre quadratique (F_{xy}) decrit
l'interaction entre les deux contraintes normales (traction -
compression) .

a) DETERMINATION DES PARAMETRES QUADRATIQUES :

** Test de traction longitudinal :

$$\sigma_x = X_T, \quad \sigma_y = \sigma_s = 0 .$$

Apres substitution dans l'equation (E) :

$$(E) \Rightarrow F_{xx} \cdot X_T^2 + F_x \cdot X_T = 1 \quad (1)$$

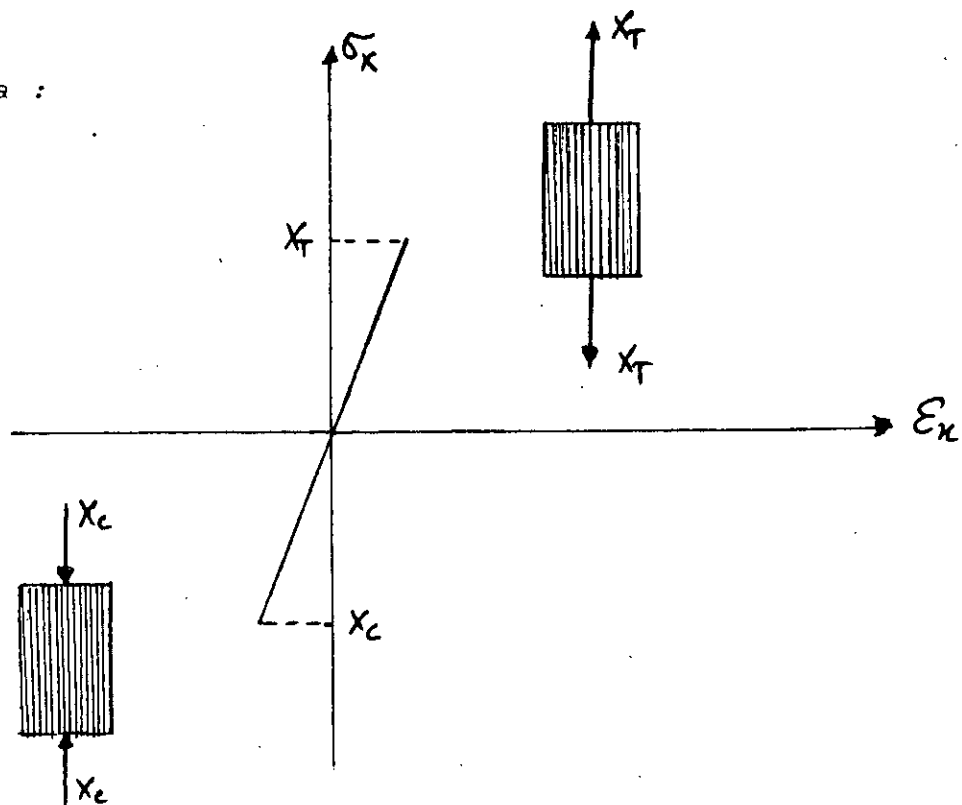
** Test de compression longitudinal :

$$\sigma_x = -X_c, \quad \sigma_y = \sigma_s = 0$$

de meme :

$$(E) \Rightarrow F_{xx} \cdot X_c^2 - F_x \cdot X_c = 1 \quad (2)$$

schema :



Tests de traction et compression longitudinale

En resolvant le systeme d'equation forme par (1) et (2):

$$(1) \text{ et } (2) \implies \begin{cases} F_{xx} = \frac{1}{X_T \cdot X_c} \\ F_x = \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_c} \end{cases}$$

** Test de traction transversale:

$$\sigma_y = Y_T \quad ; \quad \sigma_x = \sigma_z = 0$$

Après substitution dans (E) :

$$(E) \implies F_{yy} \cdot Y_T^2 + F_y \cdot Y_T = 1 \quad (3)$$

** Test de compression transversale :

$$\hat{\sigma}_y = -Y_c \quad , \quad \hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_z = 0.$$

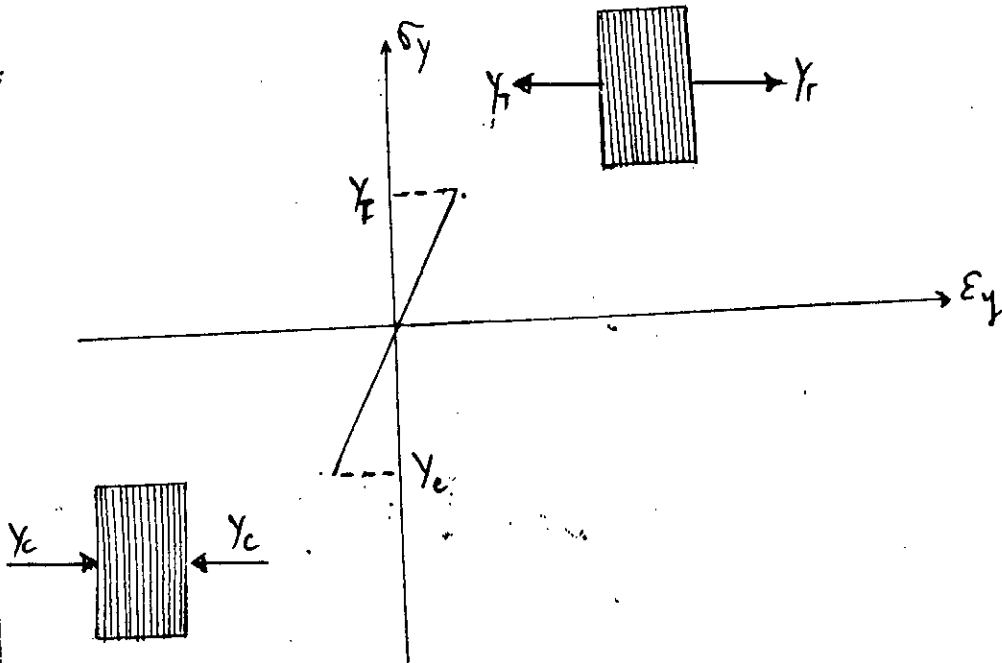
de meme :

$$(E) \Rightarrow F_{yy} \cdot Y_c^2 - F_y \cdot Y_c = 1 \quad (4)$$

résolution du systeme formé par (3) et (4) :

$$(3) \text{ et } (4) \Rightarrow F_{yy} = \frac{1}{Y_T \cdot Y_c} \quad \text{et} \quad F_y = \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_c}.$$

schema :



test de traction et compression transversale.

**** Test de cisaillement :**

$S =$ charge a rupture en cisaillement .

$$\sigma_s = S \quad , \quad \sigma_x = \sigma_y = 0.$$

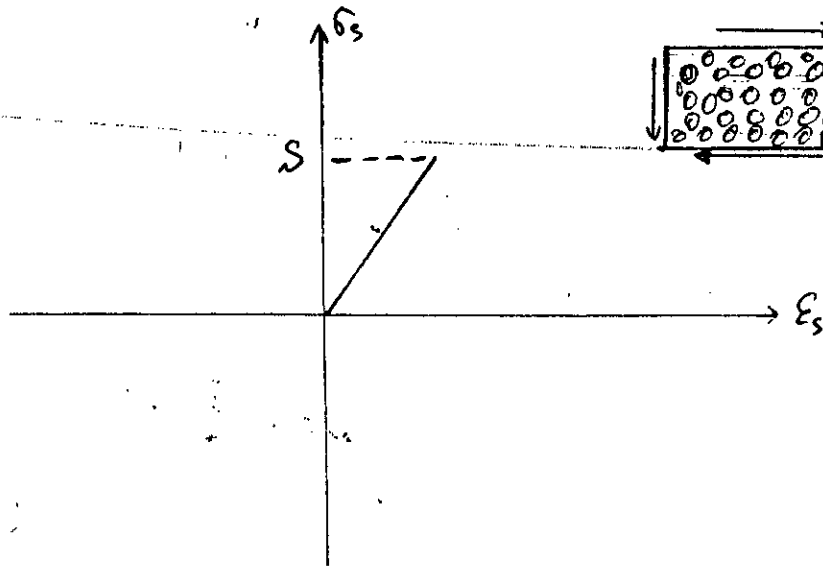
Après substitution dans l'équation (E) :

$$(E) \Rightarrow F_{ss} \cdot S^2 = 1$$

d'où :

$$F_{ss} = \frac{1}{S^2}$$

schema :



test de cisaillement.

** Détermination du terme quadratique faisant intervenir l'interaction des contraintes ; F_{xy} :

Généralisation du critère de VON-MISES :

Soit le changement de variable :

$$x = \frac{\sigma_x}{X_y} \quad ; \quad y = \frac{\sigma_y}{Y}$$

le critère de VON-MISES s'écrit alors :

$$x^2 - xy + y^2 = 1 \quad (B)$$

Et si l'on choisit le coefficient F_{xy} de telle sorte que l'équation (E), critère de TSAI-WU, se mette sous la forme de l'équation (B).

Alors, le critère quadratique obtenu sera considéré comme une généralisation du critère de VON-MISES.

Et de manière à assurer que le critère décrit une courbe fermée (en locurrence une Ellipse) et qu'il soit analogue au critère de VON-MISES.

alors, on prend :

$$F_{xy}^* = \frac{F_{xy}}{\sqrt{F_{xx} \cdot F_{yy}}} = F_{xy} \cdot \sqrt{x_c \cdot y_c} = -\frac{1}{2}$$

=> le terme d'interaction des contraintes principales vaut :

$$\dots F_{xy} = -\frac{1}{2} \sqrt{F_{xx} \cdot F_{yy}}$$

Et le critere de rupture de TSAI de l'equation (E) s'ecrit:

$$\frac{\tilde{\sigma}_x^2}{X_T \cdot X_C} + \frac{\tilde{\sigma}_y^2}{Y_T \cdot Y_C} + \frac{\tilde{\sigma}_s^2}{S^2} + \left(\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} \right) \tilde{\sigma}_x + \left(\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) \tilde{\sigma}_y - \frac{\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}{\sqrt{X_T \cdot X_C \cdot Y_T \cdot Y_C}}$$

 - RELATION DE TRANSFORMATION DU -
 - CRITERE DE RUPTURE -
 - QUADRATIQUE -

Vu que les criteres , relations , precedents ne sont valable que dans les axes d'orthotropie (ON-AXIS) du PLI considere , alors , il est necessaire d'ecrire ce critere hors des axes d'orthotropie puisque chaque pli (couche) analyse possede son propre repere d'orientation des fibres .

* Les contraintes et les parametres de charges lineaire et quadratiques sont notes :

ON-AXIS :

$$\begin{array}{l} \tilde{\sigma}_x , \tilde{\sigma}_y , \tilde{\sigma}_s \\ F_{xx} , F_{yy} , F_{ss} , F_{xy} \\ F_x , F_y \end{array}$$

OFF-AXIS :

$$\begin{array}{l} \tilde{\sigma}_1 , \tilde{\sigma}_2 , \tilde{\sigma}_c \\ F_{11} , F_{22} , F_{cc} , F_{12} \\ F_1 , F_2 \end{array}$$

et le passage de ON-AXIS ver OFF-AXIS se fait par l'intermediaire de la matrice de passage:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}$$

En substituant $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ par leurs expressions correspondantes, dans l'equation (E) et en reaarangeant les termes quadratiques et lineaires .on obtien:

* Transformation des parametres quadratiques de charges:

$$\begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{22} \\ F_{12} \\ F_{\sigma\sigma} \\ F_{\sigma} \\ F_{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4 + n^4 & -m^2n^2 \\ 4m^2n^2 & 4m^2n^2 & -8m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \\ 2m^3n & -2mn^3 & 2(mn^3 - m^3n) & mn^3 - m^3n \\ 2mn^3 & -2m^3n & 2(m^3n - mn^3) & m^3n - mn^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xx} \\ F_{yy} \\ F_{xy} \\ F_{\sigma\sigma} \\ F_{\sigma} \\ F_{\sigma} \end{bmatrix}$$

* transformations des parametres de charges lineaire :

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 \\ m^2 & m^2 \\ 2mn & -2mn \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \text{ RAPPORT DE CHARGE } \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \text{ R } \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

Ce rapport permet de définir la marge de sécurité et de calculer le chargement donnant la première rupture du pli; soit:

$$\tilde{\sigma}_{iu} = R \cdot \hat{\sigma}_i \quad \text{ou} \quad R = \frac{\tilde{\sigma}_{iu}}{\hat{\sigma}_i} \quad (1)$$

Avec: $\hat{\sigma}_i$ = contrainte appliquée.
 $\tilde{\sigma}_{iu}$ = contrainte ultimum (de rupture).

La condition de rupture est donné par le critère d'interaction de TSAI-WU :

$$F_{ij} \cdot \tilde{\sigma}_{iu} \cdot \tilde{\sigma}_{ju} + F_i \tilde{\sigma}_{iu} = 1 \quad (2)$$

En substituant (1) dans (2); on obtient :

$$(F_{ij} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j) R^2 + (F_i \hat{\sigma}_i) R - 1 = 0.$$

Equation du second degré dont la solution est :

$$R_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} < 0.$$

$$R_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} > 0.$$

où : $a = F_{ij} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j$, $b = F_i \hat{\sigma}_i$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque:

le rapport R peut prendre differente valeurs:

- * si la contrainte appliquee : $\sigma_i = 0 \implies R = \infty$
- * Si $\sigma_i < \sigma_{iu} \implies R > 1$
- * si la charge de rupture est atteinte : $\sigma_i = \sigma_{iu} \implies R = 1$
- * R ne peut etre inferieur a l'unite (pas de sens physique).

$$\sigma_i > \sigma_{iu}..$$

Donc ce rapport R , nous definit, non seulement la valeur de charge ultimim de rupture ($R=1$), mais aussi la quantite de la marge de securite restante.

Exemple : si $R=2.5$.

sa veut dire que pour rompre le materiau il faut exercer une contrainte 2.5 fois la valeur de la contrainte appliquee precedamment (σ_i).

CONCLUSION :

Le critère de rupture quadratique de TSAI-WU est recommandé pour l'étude et le predimensionnement des matériaux composites stratifiés. Pour l'analyse d'une structure, il est plus intéressant de résoudre le critère qui est fonction du rapport de charge car il est facile à résoudre et donne des résultats très explicites, à savoir, ce rapport R nous permet :

- de fixer la charge maximale supportée par le composite stratifié.
- de prévoir le premier pli (couche) qui va se rompre sous cette charge :
(FPF : first ply failure).

*
* PROGRAMMATION *
*

1) ANALYSE PAR LA THEORIE DES STRATIFIES

Remarque:

----- Le rappels de la theorie est largement aborde dans la partie theorique du projet.

L'objet de cette partie est la programmation des parties:

- (stratification):elasticite
- rupture du stratifie.

Les chargements sont donnees dans le REPERE GLOBAL du STRATIFIE(x,y,s) ou "s" designe le cisaillement (grandeurs vectorielles contractees pour les contraintes planes) et peut etre de membrane ou de flexion.

Les deformations mecanique obtenus sont, :

- dans le repere du stratifie (on-axis).
- dans le repere global de chaque couche (off-axis)

La valeur de rupture du materiau peut etre obtenu suivant le criteres de rupture quadratique de TSAI-WU et le critere de rupture quadratique de deformation maximale

Le resultat est donnee pour chaque couche sous la forme de rapport de resistance sur contrainte.

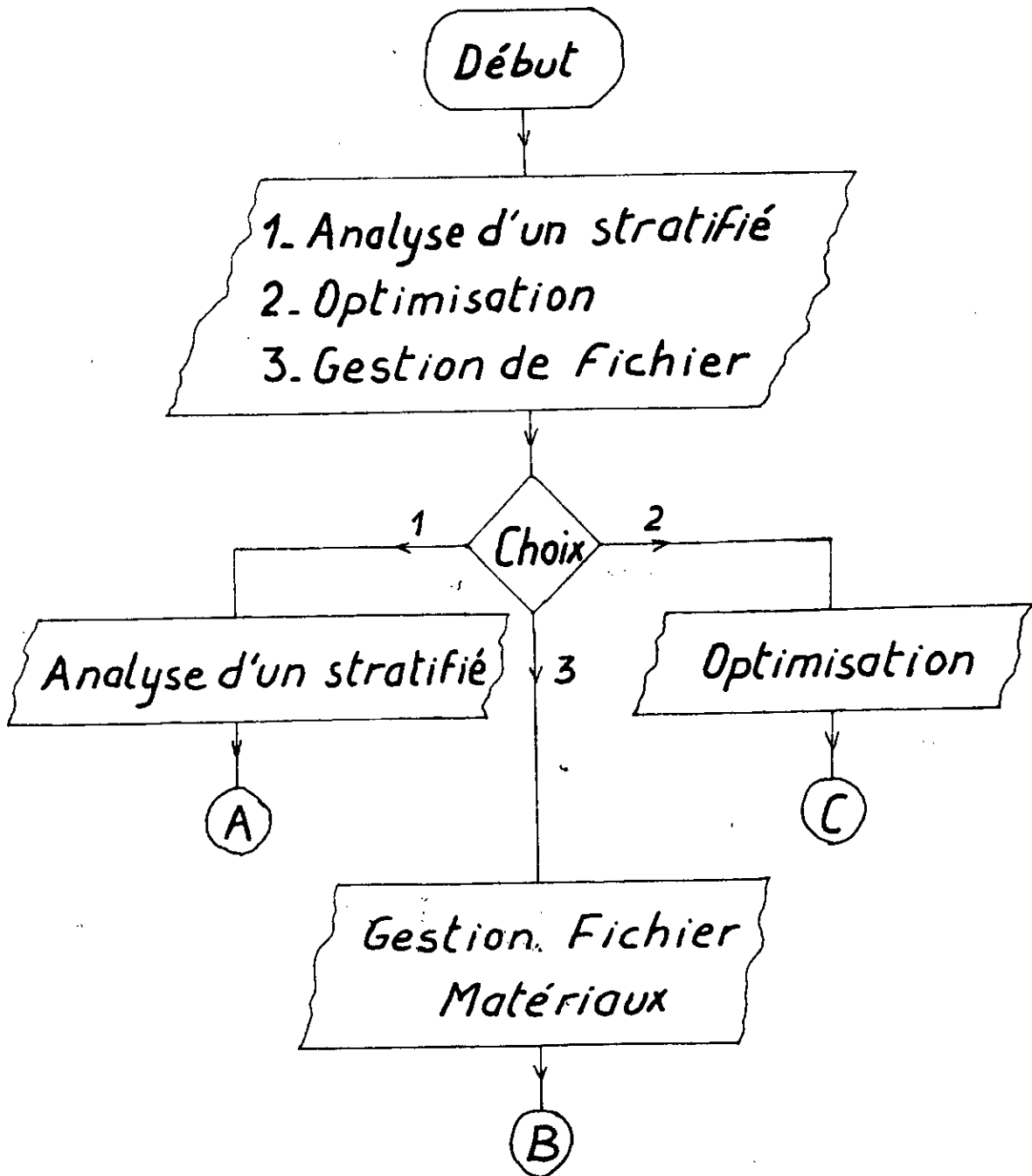
Ce rapport est facile a interpreter car il correspond au coefficient de securite de la couche vis a vis de la rupture .

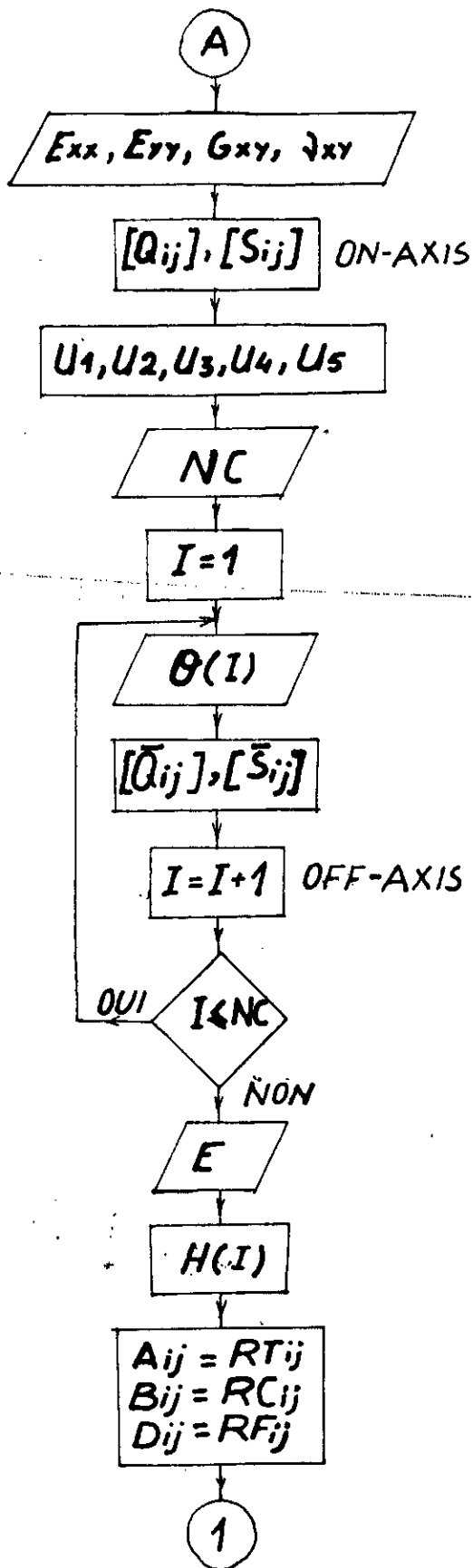
R = 1 : la couche est a la limite de rupture .

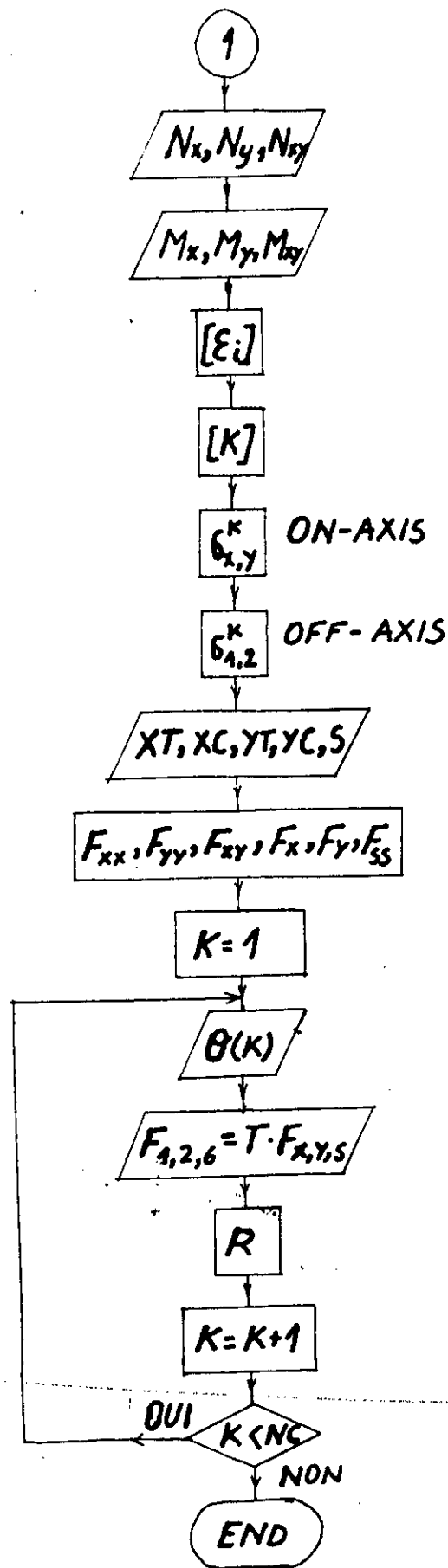
R > 1 : le chargement est admissible .

R < 1 : le chargement entraine la rupture de la couche.

ORGANIGRAMME







3// - CONCEPTION ASSISTEE PAR ORDINATEUR:

Cette procédure de conception de stratifié composite a été programmée sur micro-ordinateur afin que le domaine d'utilisation de ce logiciel soit le plus large possible.

Ce logiciel permet à l'utilisateur d'examiner rapidement plusieurs types de configurations (pour chaque configuration proposée, le programme recherche l'optimum local), et d'obtenir rapidement la solution la plus appropriée au problème de l'utilisateur.

3-1: Les données du problème:

Les données que l'utilisateur doit transmettre sont de deux types: il s'agit d'une part de décrire les efforts qui s'exercent localement sur le stratifié, et d'autre part de décrire la configuration souhaitée du stratifié.

a/ Les cas de chargements :

Le programme peut traiter simultanément autant de cas de charge que de nombre d'enregistrement existant dans la base de données. Un cas de chargement est constitué de trois efforts de membrane (N_x, N_y, N_{xy}) donnés dans le repère global du stratifié et de trois efforts de flexion (M_x, M_y, M_{xy}), ces efforts agissent sur le matériau en même temps.

si les M_i sont nuls, l'effort est de membrane.

si les N_i sont nuls, l'effort est de flexion pure.

b / la configuration du stratifié :

Les données de configuration du stratifié permettent de restreindre les choix possibles et de faire examiner l'influence d'un paramètre bien précis.

De plus, le stratifié composite doit être constitué d'un seul matériau qui est choisi par l'utilisateur dans une base de données constituant le fichier matériaux.

Les enregistrements fournis avec le programme sont relative aux matériaux suivants:

- Carbone / epoxy : T300/5208 .
- Bore / epoxy : B(4)/5505 .
- Carbone / epoxy : AS / 3501 .
- Verre / epoxy : SCOTCHPLY 1002 .
- Aramid / epoxy : KEVLAR 49 .
- Aluminum .

L'utilisateur doit spécifier les orientations de fibres (car il s'agit de variable discrète) qui peuvent être utilisées par le programme, et ceci en faisant introduire :

- L'orientation d'iteration initiale .
- L'orientation d'iteration finale .
- L'increment d'angle (pas d'iteration) .

Plus l'increment d'angle est petit, plus le nombre d'angle à prendre en compte est grand et cela peut conduire à des temps de calcul prohibitifs .

c) Sortie du programme :

Lorsque le programme parvient à une solution fiable ($R > 1$), il s'arrête et donne :

- Le rapport R .
- Le nombre de couche .
-
-

e/ Les UNITES ;utilisees dans le programme sont issue du
systeme SI :

- Variable de raideur en Gpa .
- Les contraintes..... en Mpa .
- Les epaisseurs en mm .

- CONCEVOIRE UN MATERIAU COMPOSITE -
- PAR LA THEORIE DE LA -
- STRATIFICATION -
-
- ** Optimisation ** -

Pour realiser un stratifie composite ,on dispose a priorie d'une infinite d'orientations possibles pour chaque couche .
Cependant, la technologie peut restreindre ce domaine de choix à quelques angles :

On dispose alors d'un ensemble discret de solutions.

On construira le stratifie couche par couche à partir de cette ensemble.

La premiere couche est choisie en considerant toutes les orientations possible et en calculant pour chaque cas de chargement les deformations et les contraintes qui en resultent .

En utilisant la notion de coefficient de securite (strength ratio), qui est un facteur par le quel il faudrait multiplier le chargement pour obtenir la limite de rupture du stratifie ,on compare les differents rapports de charges et un chargement admissible se traduit donc par un coefficient de securite superieur a l'unite dans chaque couche du materiau .

pour chaque orientation, nous calculerons le coefficient de securite du materiau et nous choisirons l'orientation donnant le plus grand coefficient sur le chargement le plus penalisant (qui n'est pas forcement le meme d'une orientation a une autre).

Donc nous choisirons pour la premiere orientation celle qui est la plus efficace pour supporter l'ensemble des chargement envisagees .

La deuxieme couche - ainssi que les suivantes - sera choisie en ajoutant a la premiere couche - qui demeure fixee - une autre couche pouvant prendre toutes les orientations envisageable .

Nous considerons ,ainssi , une famille de stratifie a deux couches et nous retenons le stratifie dont le coefficient de securite est le plus grand vis a vis de tout les chargements .

Ce processus se poursuit jusqu'à ce que le coefficient de sécurité soit plus grand que un .

Nous avons alors un stratifié répondant à l'objectif cherché.

On notera qu'un matériau symétrique élimine les effets de couplage entre les efforts de flexion et les efforts de membrane.

Cette restriction ne diminue pas réellement l'efficacité du processus de conception car l'effet de couplage a pour conséquence d'accroître la souplesse du stratifié et de diminuer le coefficient de sécurité du stratifié .

L'apport de nouvelles couches est fait en les disposant à l'extérieur du stratifié afin d'apporter une efficacité maximale à chaque étape puisque la contribution en rigidité est proportionnelle au cube de la distance au plan moyen du stratifié, et de manière à ne pas modifier l'importance relative des couches déjà choisies.

2// - CONVERGENCE DU PROCESSUS :

On peut se demander si cette technique de dimensionnement conduit à un matériau optimale vis à vis d'un critère de poids.

Il convient tout d'abord de remarquer que les variables utilisées sont discrètes aussi bien les orientations des différentes couches que le nombre de couches pour chaque orientation qui doit être un entier.

D'autre part, le choix de la n-ième couche modifie la répartition des contraintes dans les autres couches précédemment déterminées non seulement en intensité (comme ce serait le cas pour un matériau isotrope), mais également en direction en raison de l'anisotropie du stratifié.

ETUDE ANALYTIQUE DU PROCESSUS

Les équations analytiques utilisées pour calculer les coefficients de sécurité des couches d'un stratifié à chaque étape du processus de dimensionnement sont tirées de l'ouvrage de S.W. TEAL et T. HANN intitulé "INTRODUCTION TO COMPOSITE MATERIALS".

*Calcul des rigidites:

A chaque étape du processus, nous devons calculer la variation de rigidite du stratifié lorsqu'on lui rajoute une nouvelle couche.

(Ou l'indice k designe la k -ième étape du processus).

$$A_{ij}(k+1) = A_{ij}(k) + e * Q_{ij} \text{ (nouvelle couche)}$$

$$D_{ij}(k+1) = D_{ij}(k) + [(t-e)^3 - e^3] * Q_{ij} \text{ (nouvelle couche)}$$

t : designe l'épaisseur totale du stratifié

e : designe l'épaisseur de la couche rapportée.

Les rigidites de contraintes planes A_{ij} dependent a la fois de l'orientation de la couche et des propriétés mécaniques du matériau.

*Calcul de la resistance:

A partir des matrices de rigidites A_{ij} et D_{ij} - les B_{ij} sont nuls si l'on se limite à une solution symétrique - on calcule la déformation totale du stratifié.

$$\epsilon_i^c = \epsilon_i^o(\text{Plan}) + \epsilon_i^c(\text{flexion}) \quad \text{ou} \quad \epsilon_i^o(\text{plan}) = [A_{ij}]^{-1} * [N_j]$$

$$\epsilon_i^c(\text{flexion}) = [D_{ij}]^{-1} * [M_j] \quad i, j = 1, 2, 6$$

Comme critère de rupture, on utilise le critère de rupture quadratique de TSAI-WU.

$$(F_{ij} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j) R^2 + (F_i \tilde{\sigma}_i) R = 1$$

$$\text{ou} : R = \frac{\tilde{\sigma}_u}{\tilde{\sigma}_i}$$

$\tilde{\sigma}_u$ = Contrainte ultimum (de rupture)

$\tilde{\sigma}_i$ = Charge (Contrainte) appliqué.

R = rapport de charge.

BASE DE DONNEES :

FICHIER MATERIAUX

INTRODUCTION :

Le Basic gère deux types de fichiers :

- Fichier à accès séquentiel .
- Fichier à accès directe .

1/ Les fichiers à accès séquentiel :

Ils sont relativement simple à créer et à consulter , ceci est due notamment a ce que les instructions de lecture ou d'écriture (en locurence input # et print#) sont comparable à celles utilisées pour écrire sur l'écran ...

En contre parti , l'accès purement séquentiel à de tel fichiers impose de severes contraintes.

- La recherche d'un enregistrement est relativement longue.
- La mise à jour nécessite la création d'un nouveau fichier.

2) Fichier à accès directe :

à priori, la nature des disques ou des disquettes autorise l'accès (presque) directe à un enregistrement donnée. car les dispositifs (têtes) de lecture ou d'écriture se place rapidement sur une piste donnée .

De plus , chaque enregistrement est indexé par un numéro, ce qui facilite l'accès direct dans notre cas.

GESTION DE FICHER

Le but de cette partie est de fournir a l'utilisateur une base de données lui facilitant le choix entre les differents materiaux existant dans ce fichier .

dans ce programme, nous avons les possibilites de gerer plusieurs fichier diferencier par le nom du fichier.

Chaque fichier gere plusieurs enregistrements (en curence: les differents materiaux).

Et chaque enregistrement est repere par la numero qui lui a ete attribue .

D 'ou la facilite de consultation d'enregistrement en ces directes.

Notre fichier materiaux offre a l'utilisateur les possibilites suivantes :

- Listing des enregistrements deja existants .
- Consultation d'un enregistrement .
- Ajout d'enregistrement .
- Extension fichier .
- Supression d'enregistrement .
- Correction d'enregistrement .

Ce programme de gestion de fichier est directement reliee au programme principale et a chaque execution de ce dernier, il accede aux enregistrements et affiche tout les enregistrement nom et code des diffirents materiaux existant dans le fichier.

et chaque enregistrement possede les donnees suivantes:

- Numero:
- Nom du materiau:
- Code du materiau:
- Exx: Module de Young longitudinale(GPa)
- Eyy: Module de Young transversale(GPa)
- Gxy: Module de cisaillement(GPa)
- NUxy: Coefficient de Poisson longitudinale
- HO: mm
- XT: Resistance longitudinale en traction(GPa)
- XC: Resistance longitudinale en compression(GPa)
- YT: Resistance transverse a la traction(GPa)
- YC: Resistance transverse en compression(GPa)
- S : Resistance au cisaillement(GPa)

Les donnees des materiaux sont contenues dans des enregistrements differents d'un fichier stocke sur disquette(s).

Exemple : Enregistrement Numero:1, contient :

Nom du materiau: Carbone / Epoxy
Code : T300 / 5208
Exx = 181 Gpa
Eyy = 10.3 Gpa
Gxy = 7.17 Gpa
NUxy = 0.25
HO = 0.125 mm
XT = 1.5 Gpa
XC = 1.5 Gpa
YT = 0.04 Gpa
YC = 0.246 Gpa
S = 5.80000E-02 Gpa

Ces donnees sont des valeurs determinees experimentalement.

CONCLUSION :

Après avoir initié et approfondi nos connaissances sur les matériaux composites et leur comportement dans le domaine élastique et de la rupture, nous avons pu élaborer un logiciel permettant de faire cette analyse (élasticité et rupture).

Ce logiciel comprend une base de données permettant à l'utilisateur de choisir un des matériaux qui lui sont offerts dans un tableau qui peut être enrichie par d'autres enregistrements supplémentaires.

C'est un moyen de calcul performant pour l'obtention des caractéristiques mécaniques d'un matériau composite stratifié, à savoir :

- calcul des contraintes et déformations dans chaque couche (pli).

- Rupture de la première couche (pli).

et ceci en fonction du chargement donné.

Par la suite nous avons entamé un autre programme d'optimisation de la structure du matériau composite ; à savoir :

- optimisation des orientations des fibres et de l'épaisseur du stratifié.

et permettant de répondre à une spécification de chargement bien précise.

Ce que nous espérons faire aussi, pour compléter ce travail, c'est de calculer le gain de poids entre une pièce en matériaux composites et la même pièce en aluminium.

A la fin de ce projet de fin d'étude, nous avons acquis une bonne connaissance sur les matériaux composites, de point de vue comportement mécanique (élasticité et rupture), surtout que cette matière n'est pas encore introduite dans le cursus de la formation de l'ingénieur en génie mécanique et parallèlement nous avons approfondi nos connaissances en informatique.

— 00 —

H.A

* BIBLIOGRAPHIE *

I // INTRODUCTION TO COMPOSITE MATERIALS par W.TSAI

II // CETIM : MATERIAUX COMPOSITE

III // LA CARACTERISATION MECANIQUE DES
MATERIAUX COMPOSITES U.T.C

IV //

