

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

3/94

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT: G.Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET
ETUDE THEORIQUE ET
NUMERIQUE D'UN ELEMENT
DE FLEXION A SIX NOEUDS
DRM

Proposé par :

M^r F. BELBLIDIA

Etudié par :

M^r F. BEKHOUCHA
M^r A. ZEDAM

Dirigé par :

M^r F. BELBLIDIA
M^r A. ANICHE

PROMOTION Juin 1994

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT: G. Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE THEORIQUE ET NUMERIQUE D'UN ELEMENT DE FLEXION A SIX NOEUDS DRM

Proposé par :

M^r F. BELBLIDIA

Etudié par :

M^r F. BEKHOUCHA
M^r A. ZEDAM

Dirigé par :

M^r F. BELBLIDIA
M^r A. AMICHE

PROMOTION Juin 1994

إلى هدا:

إلى أمي وأبي العزيزين الذين جهدا في رعايتي وتعليمي
إلى كل أخواتي وأخوتي كبيراً وصغيراً
إلى كل أساتذتي وأصدقائي الذين عرفتم، إلى إبراهيم
إلى كل من أحبهم قلبي
أهدي هذا العمل المتواضع

فرحات

DEDICACES

A ma mère et mon père,
à mes frères et mes soeurs,
à mon cousin Rabah et sa petite famille,
à toute la famille ZEDAM,
et à tous ceux qui sont chères à mon coeur,
je dédie ce travail.

Abdelouaheb

REMERCIEMENTS



Nous remercions tous les enseignants du département Génie Mécanique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger qui ont contribué à notre formation.

Nous remercions également notre promoteur M^r F.BELBLIDIA ainsi que M^r A.AMMICHE qui ont su nous soutenir dans les moments difficiles.

Nos remerciements vont aussi aux Messieurs les membres de jury qui ont accepté d'évaluer ce travail, et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet trouvent ici notre gratitude.

- ZEDAM

- BEKHOUCHA

الهدف: دراسة نظرية وعددية لعنصر صفيحي للإنحاء DRM

الملخص:

الهدف من هذا العمل هو تكوين مدقق لعنصر محدود صفيحي للإنحاء بستة عقود، إدخال هذا العنصر في برنامج معلوماتي "DLEARN" وكذلك دراسة عددية له من أجل تعيين خواصه وتصرفه في حساب الهياكل.

Sujet: Etude théorique et numérique d'un élément triangulaire plaque de flexion "DRM" (Discret Reissner-Mindlin).

Resumé:

L'objet de ce travail consiste à formuler en détail un élément fini triangulaire à six noeuds pour plaque en flexion, l'implanter dans un code de calcul "DLEARN" et à l'étudier numériquement afin d'analyser ces caractéristiques et son comportement dans le calcul des structures.

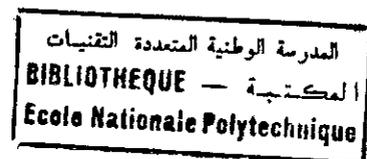
Subject: Theoretical and numerical study of triangular plate bending element "DRM" (Discret Reissner-Mindlin).

Abstract:

The purpose of this work is to formulate in details a plate bending element, triangular of six nodes, implement this element in the software "DLEARN" and to study him numerically in order to analyse their characteristics and his comportements in the structural calculs.

SOMMAIRE

CHAPITRE (0) INTRODUCTION-RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE	... (1)
CHAPITRE (I) PRESENTATION DE LA M.E.F :	
I-2/ La méthode des éléments finis;	... (5)
I-2/ Les versions dans la M.E.F;	... (6)
I-3/ Conditions de convergence, taux de convergence	... (7)
I-4/ Tests de convergence et de performance;	... (8)
I-5/ Elements isoparamétrique, intégration numérique.	... (11)
CHAPITRE (II) THEORIE DES PLAQUES :	
II-1/ Introduction;	... (14)
II-2/ Théorie des plaques épaisses de REISSNER-MINDLIN, les équations d'équilibre et le principe variationnel.	... (15)
II-3/ Theorie des plaques minces de KIRCHHOFF, (cas particulier)	... (21)
CHAPITRE (III) FORMULATION DE L'ELEMENT "DRM"	
III-1 Introduction	... (23)
III-2 Formulation du "DRM"	... (23)
CHAPITRE (IV) RESULTATS NUMERIQUES	
IV-1 Introduction	... (30)
IV-2 Tests de validation	... (30)
IV-3 Tests de précision	... (33)
IV-4 Remarques	... (44)
IV-5 Conclusion	... (49)
CONCLUSION GENERALE	... (50)
ANNEXE (A)	... (50)
ANNEXE (B)	... (52)
ANNEXE (C)	... (54)
ANNEXE (D)	... (61)



ABREVIATIONS

Dans notre mémoire on a utiliser les notations données ci-dessous et quelques autres seront définis dès leur apparition.

- DRM : Discret Reissner-Mindlin
 DKT : Discret Kirchhoff Théorie
 MEF : Méthode des Eléments Finis
 E : Module de Young
 G : Module de cisaillement transversal
 ν : Coefficient de Poisson
 [L] : Opérateur de dérivation
 h : Epaisseur de la plaque
 π : Energie potentielle
 W : Déplacement transversale
 β_x : Rotation selon l'axe X
 β_y : Rotation selon l'axe Y
 ϵ : Vecteur Déformations
 σ : Vecteur Contraintes
 ∇W : Gradient de W
 M_x : Moment selon l'axe X
 M_y : Moment selon l'axe Y
 M_{xy} : Moment dans le plan XY
 S_x : Effort tranchant selon X
 S_y : Effort tranchant selon Y
 K : Coefficient correcteur

 U_f : Energie de déformation de flexion
 U_c : Energie de déformation de cisaillement
 π^* : Energie potentielle complémentaire
 N_i : Fonctions de formes
 [J] : Jacobienne
 γ : Déformation de cisaillement
 F : Force concentrée
 q : Charge répartie
 [M] : Matrice masse
 [K] : Matrice de rigidité

**INTRODUCTION -
RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE****INTRODUCTION:**

La méthode des éléments finis, reste un très bon outil dans l'analyse des structures d'ingeneering, et surtout pour les problèmes qui n'ont pas des approches analytiques. Cependant, les praticiens de cette méthode dans le domaine des plaques en flexion, ont rencontré une difficulté dans la sélection des éléments. Car le non respect des conditions de convergence par élément, peut induire à des résultats erronés. Mais, ces conditions restent difficiles à assurer, c'est pourquoi des techniques numériques (patch-test) ont été développées pour vérifier si un élément peut être utilisé sans restriction.

L'étude (par recherche bibliographique) de ces éléments, peut être très bénéfique dans la compréhension de la formulation de ces éléments, car, malgré qu'ils ne respectent pas les conditions de convergence donnent des résultats assez intéressants et des fois, ils sont plus efficaces que ceux respectant les conditions de convergence.

Dans notre étude, nous proposons de formuler un élément de flexion utilisé sans considération de l'épaisseur des plaques, et de montrer son efficacité par rapport aux éléments existants dans la bibliographie.

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

Jusqu'à 1984, plus de 88 éléments plaques triangulaires et quadrilatères de flexion ont été publiés selon divers approches, théories et principes variationnels [9]. Cela, montre la difficulté rencontrée dans la recherche d'un élément qui doit regrouper les caractéristiques suivantes:

- Il ne se bloque pas dans le cas de plaque mince;
- Il doit converger sans restriction de maillage, et insensible aux distorsions géométriques;
- La formulation ne doit pas être basé sur des facteurs numériques adaptés;
- Qu'il soit simple à implanter dans les codes de calcul et simple à utiliser,

un tel élément est dit parfait.

Les éléments triangulaires présentent plus de souplesse dans la description des structures complexes que les éléments quadrilatères, cependant, leurs formulations est plus difficiles (type d'intégration, coordonnées d'aire). On peut citer (dans l'ordre chronologique) certains éléments triangulaires de classe C^0 et C^1 qui ont été laissés au profit d'autres éléments plus efficace.

1- Éléments triangulaires pour la modélisation des plaques minces:

Les premiers éléments développés, sont basés sur la théorie de Kirchhoff et le principe de minimisation de l'énergie potentielle, ayant 3ddl ($W, \theta_x=W,x, \theta_y=W,y$), où la continuité inter-éléments (compatibilité) exige une continuité C^1 . Les éléments (A) de Adini à 9ddl, (T) de Tocher à 9ddl et (T10) de Clough-Tocher à 10ddl, sont basés sur une interpolation cubique, leurs échecs sont dus aux divers raisons:

- Le premier (A) : pour son incomplétude, incompatibilité et la non-isotropie géométrique;
- Le deuxième (T) : pour l'incompatibilité, singularité dans certains orientations de l'élément;
- Le troisième (T10): L'incompatibilité et le Violé du Patch-Test car il ne vérifie pas la condition de déformation constante.

Le premier élément triangulaire compatible est le "HCT" à 9ddl, développé par Clough et Tocher. Cet élément est subdivisé en trois sous éléments, il a été pris comme un élément de référence pour sa convergence, mais, sa formulation nécessite des manipulations algébriques fatigantes et un calcul volumineux dans la partie numérique, en plus, il est très rigide.

L'élément BCIZ1 à 9ddl, développé par Bazely et al, ils ont utilisé les coordonnées d'aire afin d'éliminer le problème d'isotropie géométrique, mais, il n'est pas conforme. Cet élément a été repris avec d'autres fonctions de formes donnant BCIZ2, conforme, mais, il est très rigide et nécessite un ordre très élevé d'intégration numérique (16 points).

Afin d'éliminer le problème de conformité, d'autres éléments triangulaires dits hybrides, ont été développés, basés sur la théorie de Kirchhoff (Méthode mixte). Le plus efficace est le "HSM" "Hybride Stress Model", proposé par plusieurs auteurs, il donne des résultats acceptables, et il est simple à formuler.

Un autre élément remarquable, le "DKT" développé par Batoz et al (1980) à 9ddl, basé sur la même théorie de Kirchhoff imposée d'une façon discrète aux nœuds. Il donne de très bons résultats dans la modélisation des plaques minces, c'est pourquoi, il est devenu une référence bibliographique [8].

2- Éléments triangulaires pour la modélisation des plaques épaisses:

Les éléments vus auparavant, basés sur la théorie des plaques minces de Kirchhoff, ne convergeaient malheureusement pas dans le cas des plaques épaisses.

Pour cela, des éléments basés sur la théorie de Mindlin-Reissner, où l'effet de cisaillement devient important, ont été développés.

Un élément triangulaire de cette catégorie, est le "SRI" à 9ddl de Hughes et al, basé sur l'intégration sélective réduite, afin d'éliminer l'effet de blocage en cisaillement transversal, mais il donne des résultats inacceptables.

Dernièrement, une série d'éléments basés sur la même théorie des plaques épaisses, et des hypothèses discrètes de Kirchhoff en des points particuliers, comme les points d'intégration ou sous forme d'intégrale ont été développés. Cette idée a été introduite par Wempner et al, elle n'avait pas beaucoup de succès et la continuité C^0 n'est pas toujours préservée.

Suite à ces travaux, Zienkiewicz et al ont décidé de relier les hypothèses discrètes de Kirchhoff à une formulation mixte [7]. Il ont développé trois éléments triangulaires :

TRI-6 à six nœuds, 15ddl;

TRI-6R à six nœuds, 12ddl;

DRM à six nœuds et 12ddl.

Ces éléments passaient le Patch-Test avec succès, ainsi, ils ne se bloquent pas dans le cas des plaques minces. L'élément "DRM" est le plus efficace, le plus fiable et qu'il se comporte exactement comme le "DKT" dans le cas des plaques minces.

But du travail:

Le but de notre travail est de faire une étude détaillée, théorique et numérique de ce dernier élément "DRM" "Discret Reissner-Mindlin", développé en 1990 par Zeinkiwicz et al, de montrer ces caractéristique et d'éclaircir son succès. Pour cela, nous avons formulé et implanté cet élément dans le code de calcul des structures "DLEARN" utilisant la technique de stockage dynamique, permettant ainsi, le traitement d'exemples assez grandes tailles.

Pour atteindre ce but notre mémoire est structurée comme suit:

*** CHAPITRE I : Présentation de la Méthode des Eléments Finis**

Une présentation globale de la méthode des éléments finis, ces approches, ces conditions de convergence, les Patch-Tests et l'intégration numérique.

*** CHAPITRE II : Théories des Plaques**

Donne un rappel des deux théories des plaques, minces et épaisses et leurs particularités.

*** CHAPITRE III: Formulation de L'élément "DRM"**

Présente la formulation détaillée de l'élément "DRM", accompagné par les annexes A,B et C.

*** CHAPITRE IV : Résultats Numériques**

On présente les résultats des différents tests:

En première partie, les Patch-Tests qui informent sur la validité de l'élément;

En deuxième partie, les tests de précision (des exemples de plaques avec différentes géométries et différentes conditions de chargement).

*** CONCLUSION GENERALE**

CHAPITRE I
PRESENTATION DE LA METHODE
DES ELEMENTS FINIS

I-1. INTRODUCTION - OBJECTIFS:

Le développement et l'utilisation d'un élément fini, exigent le savoir des notions propres à la M.E.F. Ce chapitre a pour objectifs de:

- Définir la méthode des éléments finis comme étant une méthode d'approximation des équations différentielles ou E.D.P, et les versions utilisées en basant sur la version mixte;
- Donner les conditions de convergence sur un élément fini, utilisé dans la discrétisation d'un milieu continu;
- Présenter les tests de validation et de performance, l'influence de l'effet de bords (Modèle Reissner_Mindlin);
- Présenter l'utilité de l'élément isoparamétrique et l'utilisation de l'intégration numérique.

I-2. LA METHODE DES ELEMENTS FINIS:

La méthode des éléments finis, est un outil qui permet d'étudier le comportement d'un système physique (caractérisé par un domaine et un contour), géré le plus souvent par des équations aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites.

$$A(u) = 0 \quad . \quad \text{sur } \Omega \quad (1-1a)$$

$$B(u) = 0 \quad . \quad \text{sur } \Gamma \quad (1-1b)$$

u: variables inconnus

Elle consiste à faire une approximation simple des variables inconnus pour transformer ses équations aux dérivées partielles en équations algébriques, en passant par deux étapes:

- La formulation intégrale (Galerkin ou Rayleigh -Ritz):

L'approximation du champ déplacement est donnée par:

$$u = \bar{u} = N_i u_i$$

où ;

N_i : sont les fonctions de formes définies (1-2)
localement, par élément ou par
sous domaine .

u_i : les paramètres inconnus .

le système algébriques sera de la forme:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (1-3)$$

où

F : vecteur charge

K : matrice de rigidité

la solution de ce système est une approximation des équations

$$\begin{aligned} A(u) &= 0 & \text{sur } \Omega \\ B(u) &= 0 & \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

I-3. LES VERSIONS DANS LA M.E.F :

Pour traiter un problème donné, par éléments finis, il existe trois versions possibles:

1- version déplacement, basée sur la minimisation de l'énergie potentielle totale (π):

$$\delta(\pi) = \delta(u+w) = 0 \quad (1-4)$$

où u : l'énergie de déformation du système.

w : l'énergie potentielle des chargements externes.

2- Version contrainte, basée sur la minimisation de l'énergie potentielle complémentaire (π^*):

$$\delta(\pi^*) = \delta(u^*+w^*) = 0 \quad (1-5)$$

- 3- Version mixte, cette version est un mélange des deux premières, dont il y a différents principes variationnels.
(par exemple celui de Reissner - Hellinger)

Parmi les formulations mixtes utilisées dans le développement des éléments sans modes parasites, blocage en cisaillement transversal et permettant une évaluation précise des déplacements et fréquences propres; celles basées sur la théorie de Reissner-Mindlin.

Il y a deux approches qui semblent dominer actuellement:

- La première est celle basée sur l'utilisation des formes variationnelles mixtes ou hybrides.
- La seconde est celle où l'on utilise des techniques de résidus pondérés pour relier les efforts de cisaillement indépendants aux variables cinématiques W_{α} . C'est l'approche que nous devons utiliser dans le développement de notre élément DRM (Discret Reissner-Mindlin), car, elle permet de donner des éléments plus robustes que la première. [7]

I-4. CONDITIONS DE CONVERGENCES - TAUX DE CONVERGENCE:

Qu'entend t-on par convergence d'une approximation: C'est que la solution approximative polynomiale (u) doit tendre vers la solution exacte (u), quand la taille de l'élément (h) tend vers zéro et que l'erreur en un point donné, devienne:

$$|u - \bar{u}| = \partial(h^q) \leq ch^{k+1-m} |u_{,\alpha}| \quad (1-6)$$

$$q = k + 1$$

- où
- c : constante positive dépend de la position
 - h : taille de l'élément
 - k : degré du polynôme d'interpolation
 - m : ordre de dérivées apparaissant dans l'expression des variables nodales (1 pour C^0 , 2 pour C^1).

ceci doit être vérifié aussi pour tous les dérivées de (u).
Pour assurer la convergence, il faut que l'approximation accomplisse les conditions de conformité et de complétude.

La condition de conformité: assure que lorsque la taille de l'élément (h) tend vers zéro, le système algébrique (I-3) représente le système différentiel (I-1a,b). Elle est appelée aussi condition de complétude.

La condition de stabilité: c'est une nécessité pour que le système algébrique (I-3), donnera une solution unique, afin d'éliminer les modes parasites. ie : la matrice [K] est non singulière pour tous les assemblages d'éléments.

REMARQUE:

La condition de conformité est un problème douteux. car, il existe des éléments qui ne respectent pas cette condition et qui convergent (même plus rapide). Pour les versions mixtes, où les conditions de continuité sur les contraintes, sont prises sur les limites de l'élément d'une manière discrète, seul la continuité C^0 est requise dans l'interpolation.

I-5. TESTS DE CONVERGENCE ET DE PERFORMANCE:

I-5-1. Tests de convergence(Patch-Test):

Objectifs

L'objectif des tests de convergence (Patch-test), est de vérifier la formulation théorique, et d'évaluer les caractéristiques de convergence, d'efficacité et de précision. Il sont importantes aussi pour vérifier la mise en oeuvre informatique des modèles.

Il y a plusieurs formes de Patch-Test, et chacune a ces particularités et ces limites, parmi eux, on cite:

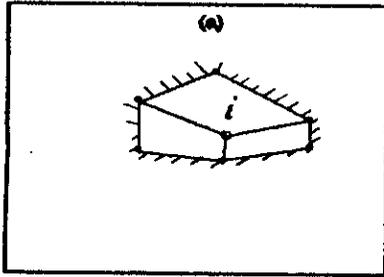
I-5-1-1. Patch-test simple (cinématique):

Ce patch-test permet, d'évaluer la condition de consistance des équations aux dérivées partielles, qui est une condition nécessaire, mais, pas suffisante, où les conditions aux limites sont introduites explicitement. Il existe deux formes de ce patch-test:

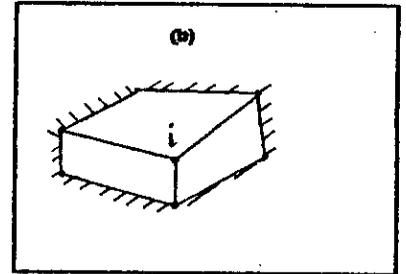
Forme A : on fixe les déplacements de tous les noeuds, et on vérifie l'équilibre s'il est atteint au noeud interne (i) fig(I-1a).

Forme B : on fixe les déplacements sur le contour, et on calcule le déplacement au noeud (i) fig(I-1b).

Bien que ces tests ne doivent être effectués que sur des blocs infinitésimal, pour la plupart des éléments dans lesquels les équations aux dérivées partielles sont à coefficients constants et (où) des polynômes d'interpolation utilisés, sont à jacobien constant, la taille du bloc est indifférente. [9]



Forme A: déplacement fixé
en tous points
 $k_{1j}a_j - f_1 = 0$ en i .



Forme B: déplacement
fixé sur le contour
 $a_1 = k_{11}\{f_1 - k_{1j}a_j\}$.

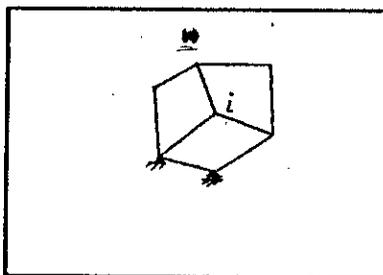
Fig I-1: patch-test cinématique

I-5-1-2. Patch-test forme C (Dynamique):

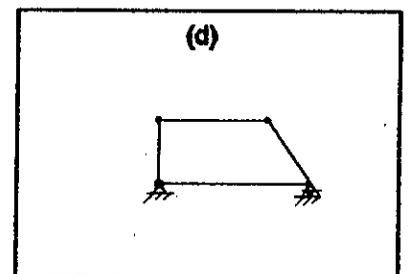
Ce test inclue la vérification des deux conditions; consistance et stabilité, ainsi, sa vérification sera une condition suffisante de convergence. Le bloc d'éléments est assemblé comme précédemment, mais, en fixant le nombre minimum de degré de liberté voir fig(I-2c)

Un patch-test à un seul élément est possible fig(I-2d), malgré que, sa satisfaction n'est pas une condition suffisante, elle reste nécessaire, car il arrive qu'un bloc plus grand ne révèle pas les instabilités inhérentes à un élément pris isolément, en outre, sa vérification nous informe sur la robustesse de l'élément fini.

Un élément est qualifié de robuste, si ses performances ne sont pas sensible aux paramètres physiques de l'équation aux DP (par exemple la valeur du coefficient de Poisson au voisinage de 0.5)



Patch-Test Dynamique



Patch-Test à un seul élément

Fig I-2: Patch-Test dynamique

I-5-2. Tests de performance:

Les performances des éléments sont classiquement évaluées, en comparant les solutions numériques obtenus par élément finis à des solutions théoriques, ou à des résultats expérimentaux.

Les quantités comparées sont par exemple:

- Un déplacement (flèche au centre ; rotation maximum ...)
- Une norme en déplacement

$$e_v^2 = \int_A (W_{of} - W_{ox})^2 dA \quad (1-7)$$

- Les efforts résultants en des points particuliers.
- L'énergie potentielle totale.
- Les modes est les fréquences propres ... etc.

Parfois une flèche au centre, ne permet pas de juger sur la performance de l'élément.

On peut déterminer le taux de convergence d'un élément, en utilisant une des deux méthodes suivantes:

* 1^{er} Méthode:

Dans ce test, il faut imposer une solution polynomiale de degré plus élevé. Le degré le plus haut des polynômes pour lesquels le patch-test est complètement satisfait, fournit le taux de convergence correspondant.

* 2^{eme} Méthode:

Puisque, l'énergie interne suit la même variation du déplacement, et à partir de l'équation (1-6), le taux de convergence sera:

$$\rho = \ln[u_{ex} - u_c] / \ln(h)$$

où u_{ex} : l'énergie interne exacte.

u_c : l'énergie interne calculée de la forme

$$u_c = \int_A q w dA \quad \text{avec } q: \text{ charge; } w: \text{ déplacement}$$

h : la taille de l'élément.

I-6. ELEMENTS ISOPARAMETRIQUES :

L'objectif de ce paragraphe est de trouver une formulation générale permettant de calculer tous les éléments d'une structure (qui sont engendrés par un élément de référence dit père) de façon simple.

Mathématiquement, cette méthode est applicable à condition que la transformation des coordonnées est une application bijective exprimée par la relation suivante. (repère adimensionnel)

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = f \begin{Bmatrix} r \\ s \\ t \end{Bmatrix} \quad (1-8)$$

où (r, s, t) : sont les coordonnées naturelles dans le repère local

(x, y, z) : les coordonnées dans le repère global

La manière la plus simple, pour déterminer l'opérateur f , est d'utiliser les fonctions de formes exprimées dans le repère local, pour une transformation isoparamétrique, on obtient:

$$\begin{aligned} x &= \sum N_i(r, s, t) x_i \\ y &= \sum N_i(r, s, t) y_i \\ z &= \sum N_i(r, s, t) z_i \end{aligned} \quad (1-9)$$

La bijection de (f) ne sera pas vérifiée, lors d'une distorsion excessive que nous devons l'éviter.

Lorsque les grandeurs inconnus sont définis par les mêmes fonctions de formes définition la géométrie, l'élément est dit isoparamétrique.

On peut montrer que, dans le cas d'une transformation bilinéaire, la condition nécessaire de bijectivité revient à ce qui, aucun angle interne ne soit supérieur à 180° . [6]

Afin de pouvoir calculer les matrices élémentaires, on a besoin de trouver une relation entre les opérateurs $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ et $(\partial/\partial r, \partial/\partial s, \partial/\partial t)$.

D'après la règle de différentiation générale, on a :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \quad (1-10)$$

similairement pour $\frac{\partial}{\partial s}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ on trouve :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1-11)$$

où [J] est la matrice jacobienne.

On définit le jacobien $J = \det[J]$.

Le jacobien peut ne pas être constant, et la transformation ne sera possible que si $J > 0$.

I-7. INTEGRATION NUMERIQUE :

Lorsque le calcul des matrices élémentaires est compliqué, on fait recours à l'intégration numérique. La méthode de quadrature de Gauss est la plus utilisée, car, elle nécessite le petit nombre d'évaluation de la fonction à intégrer, et avec n points d'intégration, elle permet d'intégrer exactement un polynôme jusqu'à l'ordre $(2n-1)$.

Ainsi, pour évaluer l'intégral d'une fonction $F(r,s)$ sur une surface S , on écrit :

$$\int_S F(r,s) dr ds = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_i \alpha_j F(r_i, s_j) \quad (1-12)$$

où ;
 $F(r_i, s_j)$: est la valeur de $F(r,s)$ au point (r_i, s_j)

α_i, α_j : coefficients (ou fonctions poids)

m : L'ordre d'intégration = nbre de points d'integration

Pour les éléments triangulaires, on utilise une variante de quadrature de Gauss établie pour la première fois par Hammer et al (1956).

Le choix de l'ordre d'intégration dépend du type d'élément utilisé et la matrice élémentaire que l'on doit calculer ($[k]$, $[m]$ ou $\{f\}$). En pratique, on choisit un nombre de points aussi faible que possible pour diminuer le volume de calcul. Mais, il existe pour chaque élément, un nombre minimum de points d'intégration, en dessous duquel la matrice $[k]$ reste singulière, malgré, l'introduction des conditions aux limites.

L'erreur de calcul sera de l'ordre $h^{(k+1-m)}$.

$$\text{où } m = \begin{cases} 1 & : \text{classe } C^0 \\ 2 & : \text{classe } C^1 \end{cases}$$

k : degré du polynôme d'interpolation.

L'avantage de l'intégration numérique, réside dans le souplesse d'emploi obtenue avec un seul programme de calcul, en outre la disponibilité des tables qui donnent les fonctions poids.

Après cette présentation de la MEF, et vue le but de notre sujet, on va illustrer dans le prochain chapitre la théorie des plaques.

CHAPITRE II
THEORIES DES PLAQUES

II-1. INTRODUCTION:

Avant d'aborder le développement de l'élément considéré, on introduit la théorie des plaques, pour plus de détails voir les Références [1],[4] et [5].

L'épaisseur de la plaque a une importance considérable dans la formulation des plaques en flexion, ainsi, les plaques sont classées en deux catégories:

- Les plaques minces, où on applique l'approche de 'Kirchhoff', qui néglige l'effet de cisaillement par rapport a celui de flexion. (ie: la rigidité en flexion est plus grande que celle en cisaillement)
- Les plaques épaisses, on utilise la théorie de 'Reissner-Mindlin', qui tient en compte l'effet de cisaillement.

Dans ce qui suit, nous présentons la théorie de Reissner-Mindlin, et on demontre que, la théorie de Kirchhoff n'est qu'un cas particulier.

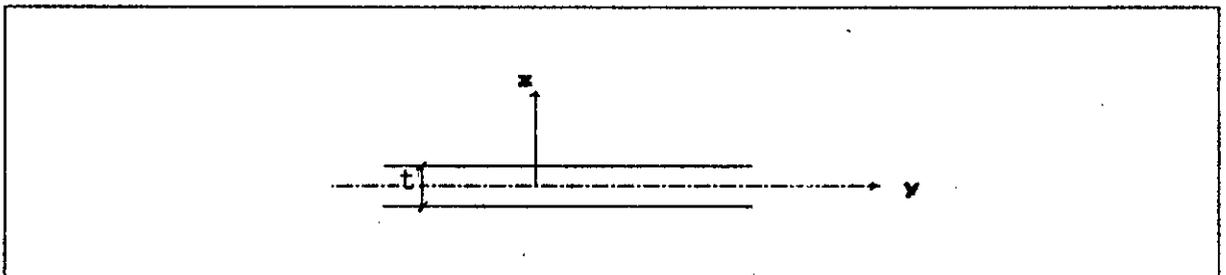


Fig II-1: Représentation d'une plaque .

En pratique on prend une valeur limite $t/a=0.01$

$t/a > 0.01$ plaque épaisse

$t/a \leq 0.01$ plaque mince.

avec t : l'épaisseur de la plaque.

a : petite taille de la plaque.

selon une étude faite par Babuska et Scapulla [11].

II-2. THEORIE DE REISSNER-MINDLIN:

Dans cet paragraphe, on introduit les hypothèses de bases, et on détermine les différentes relations qui seront utilisées dans le développement de notre élément. (relations déformations-déplacements; contraintes-déformations; les équations d'équilibre et le principe variationnel utilisé).

II-2-a. Hypothèses:

La théorie de Reissner-Mindlin est basée sur les hypothèses suivantes:

1- Les surfaces planes perpendiculaires à la surface médiane avant déformation, restent planes, mais, non nécessairement perpendiculaires et leurs état peut être représenté par la Fig(II-2a,b).

2- Le déplacement transversal est uniforme selon l'épaisseur de la plaque, ainsi, on écrit:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad W = W(x, y) \quad (2-1)$$

3- L'état de contrainte plane ie:

$$\sigma_{zz} = 0$$

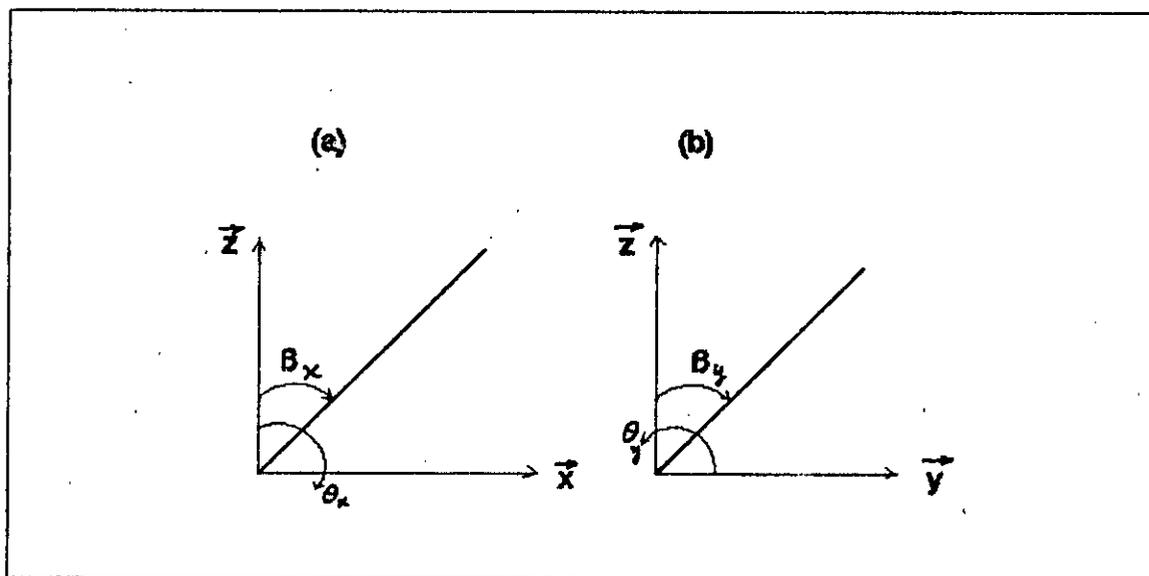


Fig II-2 Etat de déformation

II-2-b. Relation déformation-déplacement:

- Le champ de déplacement est constitué de trois composantes:
- Une flèche transversale $w = w(x,y)$.
 - Deux rotations $\beta_x(x,y)$ et $\beta_y(x,y)$.

On peut écrire:

$$\begin{aligned} u &= z\beta_x(x,y) \\ v &= z\beta_y(x,y) \\ W &= W(x,y) \end{aligned} \quad (2-2)$$

et le champ de déformation dans la plaque est :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = z\beta_{x,x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = z\beta_{y,y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2-3)$$

$$\gamma_{xy} = z(\beta_{x,y} + \beta_{y,x})$$

$$\gamma_{xz} = z(W_{,x} + \beta_y)$$

$$\gamma_{yz} = z(W_{,y} + \beta_x)$$

Les déformations peuvent être classées en deux parties :

* Déformations de flexion :

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} = z[L]\{\beta\} \quad (2-4)$$

Où [L] est un opérateur de dérivation défini par:

$$\left[L \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \left\{ \beta \right\} = \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad (2-5)$$

* Déformation de cisaillement:

$$\left\{ \gamma \right\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + W_{,x} \\ \beta_y + W_{,y} \end{Bmatrix} = \left\{ \beta \right\} + \left\{ \nabla W \right\} \quad (2-6)$$

$$\text{Ou : } \left\{ \nabla W \right\} = \begin{Bmatrix} W_{,x} \\ W_{,y} \end{Bmatrix}$$

II-2-c. Relation contrainte-déformation:

A partir du Loi de Hooke généralisée, pour un matériau isotrope et l'hypothèse (3), on a:

- Les contraintes de flexion:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \left[D \right] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-7)$$

- Les contraintes de cisaillement:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \end{Bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \end{Bmatrix} \quad (2-8)$$

ν : coefficient de poisson

E : module d'élasticité longitudinal (Yong)

G : module de cisaillement transversal et $G = \frac{E}{2} (1+\nu)^{-1}$

II-2-d. LES EQUATIONS D'EQUILIBRE ET LE PRINCIPE VARIATIONNEL:

D'abord, on doit définir les efforts résultants agissants sur la plaque:

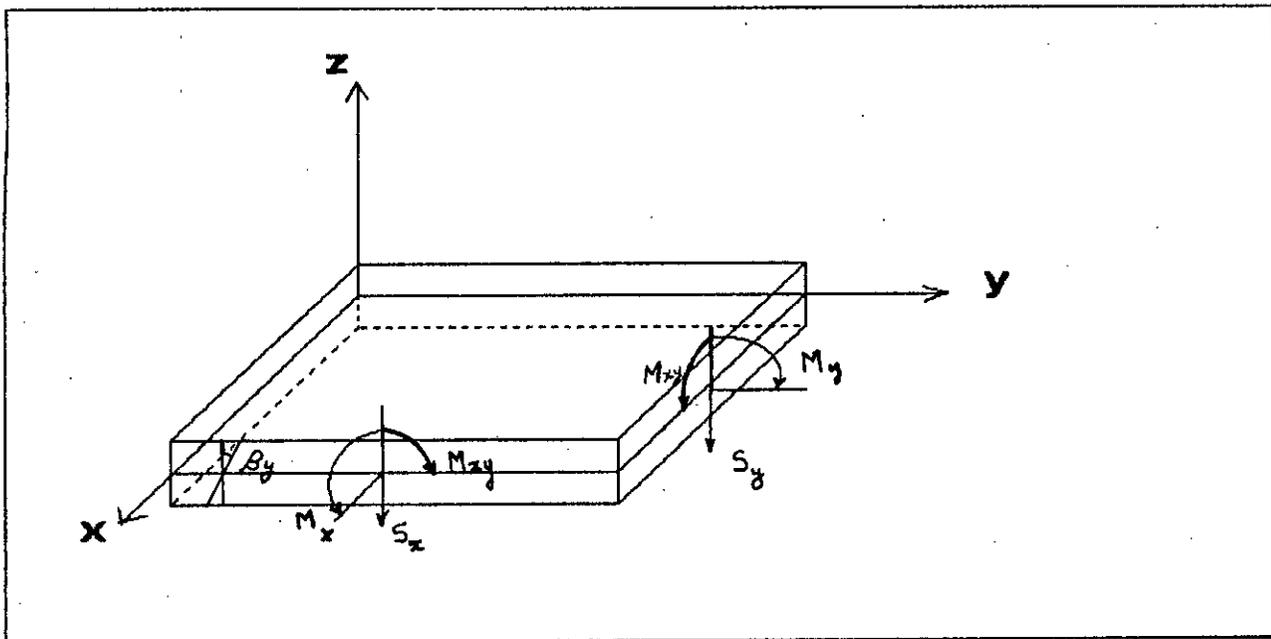


Fig II-3 représentation des efforts résultants

* Les efforts de cisaillement sont définis par:

$$S_x = K \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz = (KtG) (\beta_x + w_{,x}) \quad (2-9)$$

$$S_y = K \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz = (KtG) (\beta_y + w_{,y})$$

où : K est un coefficient correcteur qui dépend de la forme géométrique de la surface transversale, (pour un rectangle, il est pris égal à 5/6). [2], [8]

Si on pose $\alpha = K.G.t$, on peut écrire:

$$\{S\} = \alpha [\{\beta\} + \{\nabla w\}] \quad (2-9a)$$

$$\text{ou} \quad \frac{1}{\alpha} \{S\} = \{\beta\} + \{\nabla w\} \quad (2-9b)$$

* Les moments de flexion sont définis par:

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z dz \quad ; \quad M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} z dz \quad ; \quad (2-10)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} z dz$$

après intégration, on peut écrire :

$$\{M\} = [D] \{L\} \{\theta\} \quad \text{ou} \quad \left\{ M \right\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-11)$$

On peut maintenant écrire deux équations d'équilibre:

La première relie les forces de cisaillement aux moments de flexion.

$$[L]^T \{M\} + \{S\} = 0 \quad (2-12)$$

La deuxième donne l'état de l'équilibre latéral:

$$\{v\}^T \{S\} + q = 0 \quad \text{ou} \quad \{v\}^T = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2-13)$$

q : charge extérieure.

Les approximations sont faites à partir du système (2-9b), (2-12) et (2-13). Différentes possibilités existent pour garder les variables W , β_x , β_y et S .

Quand la forme du système obtenue est irréductible, l'équation (2-9b) peut être utilisée pour éliminer par exemple la variable S .

Le système précédent est interprété comme une minimisation de l'énergie potentielle totale exprimée par :

$$\pi = U + W \quad (2-14)$$

où

-U: Energie de déformation, qui est égale à la somme des énergies de flexion et de cisaillement (principe de superposition).

$$U = U_f + U_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \epsilon d\Omega \quad (2-15)$$

$$U_f = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ([L] \{ \beta \})^T [D] ([L] \{ \beta \}) d\Omega \quad (2-16)$$

$$U_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ \gamma \}^T \alpha^{-1} \{ \gamma \} d\Omega$$

de l'équation (2-9a), on peut écrire :

$$U_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ s \}^T \alpha^{-1} \{ s \} d\Omega \quad (2-17)$$

- W: le travail des forces extérieures .

$$W = - \int_{\Omega} w q d\Omega \quad (2-18)$$

pour une charge distribuée q

Ainsi, l'énergie potentielle s'écrit :

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} ([L] \{ \beta \})^T [D] ([L] \{ \beta \}) d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ s \}^T \alpha^{-1} \{ s \} d\Omega - \int_{\Omega} w q d\Omega \end{aligned} \quad (2-19)$$

II-3. THEORIE DE KIRCHHOFF:

Dans le cas des plaques minces, la valeur de $\alpha = K.G.t$ devient très large; (ie: résistance au cisaillement très grande) et tend vers l'infini dans le cas parfait, l'équation (2-9b) devient;

$$\{\beta\} + \{vW\} = 0 \quad (2-20)$$

ce qui garanti que, pendant la déformation, la normal au plan médian de la plaque reste normal. fig (I-7) ça donne la première hypothèse. Cependant, les deux hypothèses (2) et (3) présentées auparavant, restent applicables.

Par conséquent, les relations constitutives et les équations d'équilibre restent les mêmes, en éliminant seulement les termes qui contiennent $1/a$

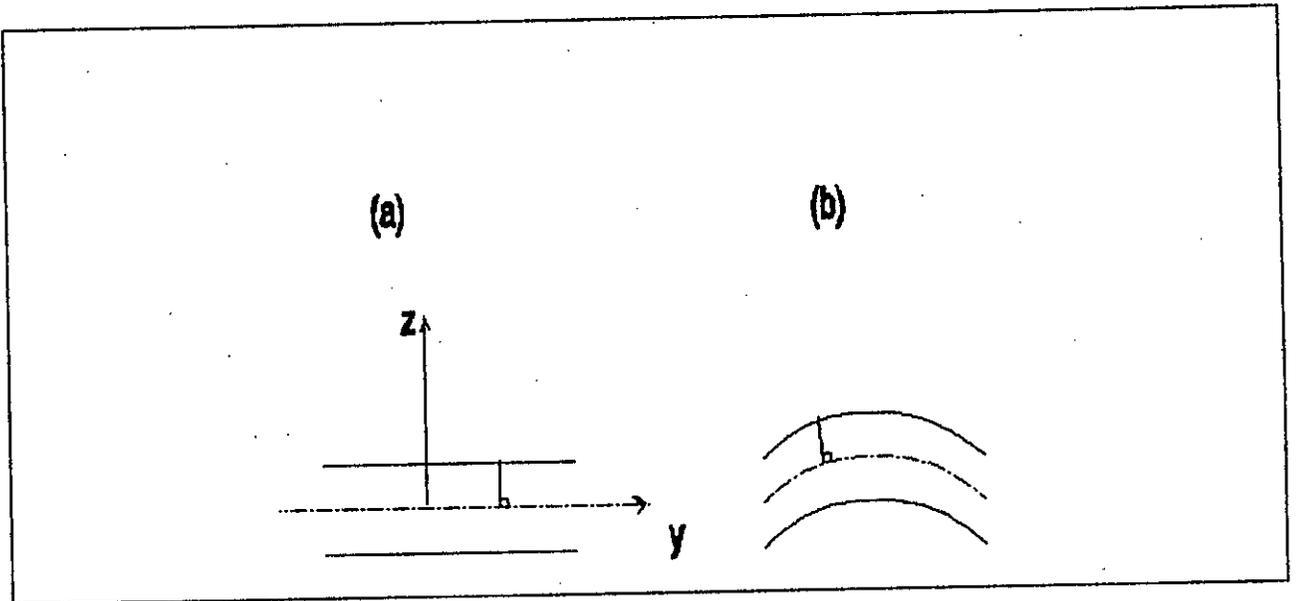


Fig II-4 Déformation de la normale -plaque mince-

On conclut que la théorie de Kirchhoff est un cas particulier de la théorie de Reissner-Mindlin.

Le principe variationnel devient:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [[L]](\beta)^T [D] [[L]](\beta) d\Omega - \int_{\Omega} w q d\Omega \quad (2-21)$$

REMARQUE :

La présence des efforts de cisaillement font diminuer les déformations angulaires, ceci est du fait, que les efforts internes sont développés pour permettre au corps d'être dans un état le plus stable possible, c-à-d ayant la plus petite énergie de déformation.

CHAPITRE III
FORMULATION DE L'ELEMENT "DRM"

III-1. INTRODUCTION:

Face au problème de blocage en cisaillement transversal, qui apparait dans les éléments basés sur la théorie de Reissner-Mindlin, ils ont utilisé la technique d'intégration réduite sélective (IRS), qui a donné de bons résultats. Toute fois, elle génère des modes parasites ou modes supérieur d'énergie nuls. Une autre alternative de cette technique, a été utilisée; l'utilisation des hypothèses de Kirchhoff sous forme discrètes (formulation déplacement), elle a donné des résultats comparatifs à la méthode (IRS).

Dans ce chapitre, on a utilisé une extension de ces deux techniques dans le développement de notre élément "DRM": C'est une formulation mixte, basé sur la théorie des plaques épaisses (Reissner-Mindlin) et les hypothèses discrètes introduites par intégrale sur les côtés.

III-2. FORMULATION DE L'ELEMENT "DRM": [7]

On considère l'élément triangulaire "DRM", de côtés droits, représenté sur la fig [III-1a,b] à 12 degrés de liberté (3ddl par noeud de sommet et 1ddl par noeud médian ie; au milieu du coté).

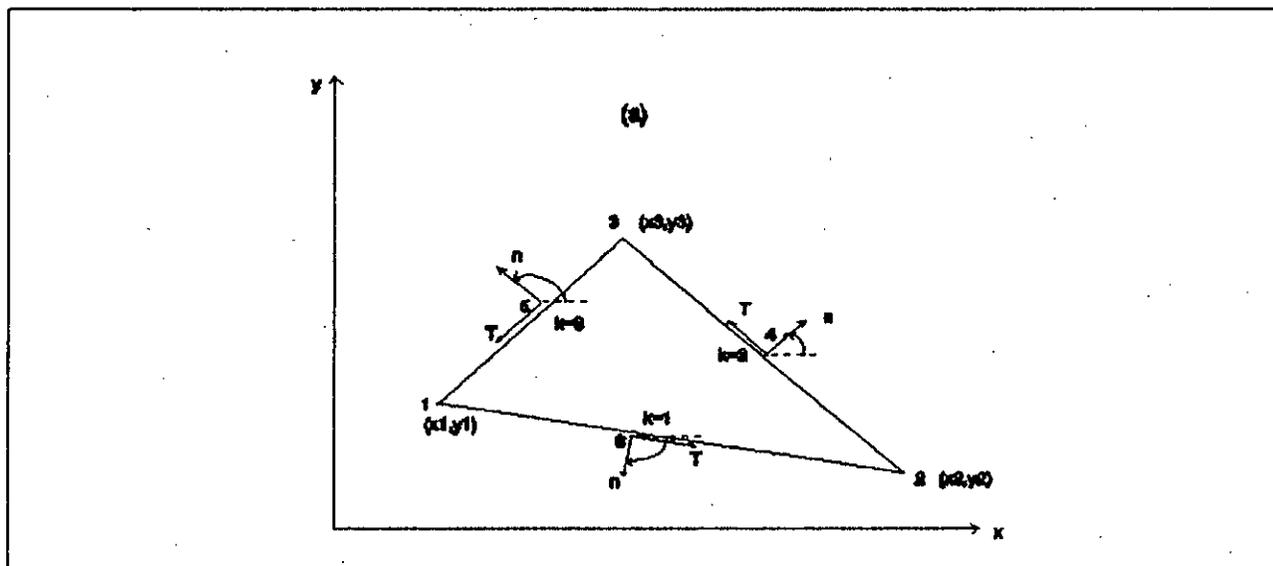


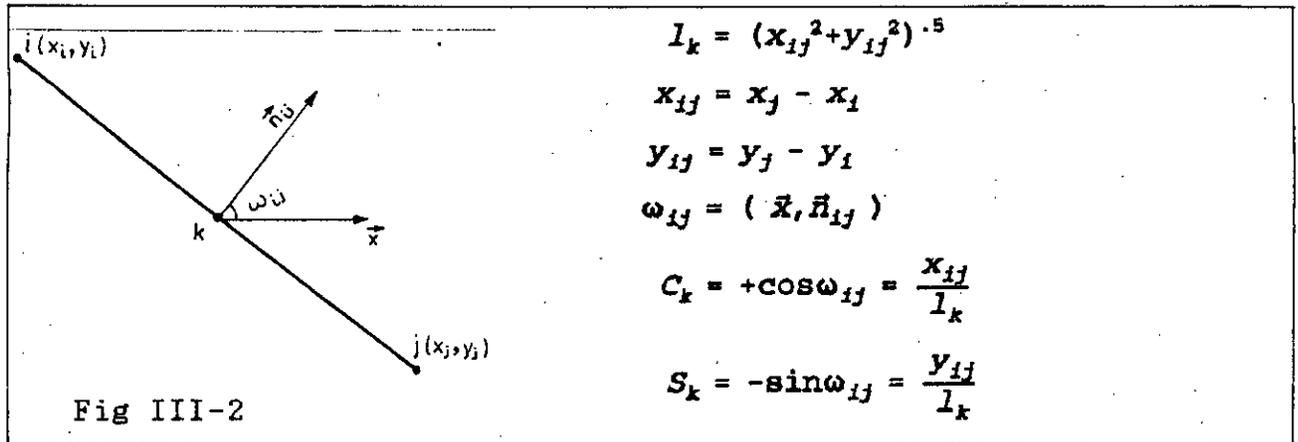
Fig III-1a: Élément DRM

Le vecteur déplacement pour cet élément est:

$$U^T = \langle W_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}, W_2, \beta_{x2}, \beta_{y2}, W_3, \beta_{x3}, \beta_{y3}, \Delta\beta_1, \Delta\beta_2, \Delta\beta_3 \rangle$$

Notations:

On utilise les notations spéciales suivantes:



III-2-a. Hypothèses:

La formulation de l'élément "DRM" est basée sur les considérations suivantes:

1- Les rotations ' β_x ', ' β_y ' varient quadratiquement à l'intérieur de l'élément tel que:

$$\beta_x = \sum_{i=1}^3 L_i \beta_{x_i} + \sum_{i=1}^3 4L_i L_j \Delta\beta_k \quad (3-1a)$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^3 L_i \beta_{y_i} + \sum_{i=1}^3 4L_i L_j \Delta\beta_k \quad (3-1b)$$

où L_i : coordonnées d'aire, les fonctions de forme.

(voir Annexe A)

$(\beta_{x1}) \Delta\beta_{k1}$: Les paramètres hiérarchiques des rotations tangentiellles des noeuds médians.

β_{xi}, β_{yi} : Rotations des noeuds de sommets.

et: $i=1, 3$

$$j=i-(i/3)*3+1$$

(3-2)

$$k=j-(j/3)*3+1$$

Ces interpolations confèrent la continuité C^0 à l'approximation.

voir §(I-1)

2- Le déplacement transversal 'W', varie linéairement sur l'élément, on remarque par ailleurs, que son type de variation n'affecte pas sur la dérivation de la matrice de rigidité.

(voir remarques)

$$W = \sum_{i=1}^3 L_i \bar{W}_i \quad (3-3)$$

3- La composante du cisaillement transversal 'S' supposée variée linéairement dans chaque élément.

$$\left\{ S \right\} = \left\{ \begin{matrix} S_x \\ S_y \end{matrix} \right\} = \sum_{i=1}^3 L_i \left\{ \begin{matrix} \bar{S}_x^i \\ \bar{S}_y^i \end{matrix} \right\} = \sum_{i=1}^3 L_i \left\{ \bar{S}_i \right\} \quad (3-4)$$

où {s} est déterminé en fonction des résultantes tangentielle de cisaillement sur le côté 'k' (k=1,2,3). (Voir Annexe B)

4- Les hypothèses discrètes, introduites par intégrale curviligne, sont imposées sur chaque côté aux noeuds médians, (i,j,k) définis auparavant.

Après intégration, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{S}_{kk}}{\alpha} &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \beta_t \right) dt \\ &= dp \frac{\bar{W}_j - \bar{W}_i}{L_k} + \frac{1}{2} [c_k (\bar{P}_x^i + \bar{P}_x^j + s_k (\bar{P}_y^i + \bar{P}_y^j))] + \frac{2}{3} \Delta \beta_k \quad (3-5a) \end{aligned}$$

dp=±1, dépend du sens d'intégration (+1; sens trigonométrique)

ainsi, l'équation (2-9b) sera approximée sous forme discrète comme:

$$\frac{1}{\alpha} \bar{S} = [Q] \left(\frac{P}{W} \right) = [Q_p] \bar{P} + [Q_w] \bar{W} \quad (3-6)$$

où [Q_p], [Q_w] et [Q]: des opérateurs évalués en (Annexe C).

Ceci, permet d'éliminer le paramètre 'S' des équations d'équilibre (2-12) et (2-13) et l'équation de l'énergie potentielle (2-19).

Avant de commencer la dérivation de la matrice de rigidité, on note que ces considérations conduisent à une variation quadratique de β_t , et linéaire de β_n , données par;

$$\beta_t = (1-\xi) \beta_{t_i} + \xi \beta_{t_j} + \xi(1-\xi) \Delta \beta_k \quad (3-7a)$$

$$\beta_n = (1-\xi) \beta_{n_i} + \xi \beta_{n_j} \quad (3-7b)$$

Pour plus de détails voir (Annexe B).

III-2-b. Matrice de rigidité:

Pour dériver la matrice de rigidité, on utilise le principe variationnel eq (2-19).

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{e})^T (\boldsymbol{\sigma}) dV - \int_V (\mathbf{U})^T (\mathbf{f}_v) dV - \int_s (\mathbf{U}^s)^T (\mathbf{f}_s) ds$$

Ce qui conduit à la forme suivante de l'énergie potentielle :

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ([L] [\beta])^T [D] [L] [\beta] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [S]^T \alpha^{-1} [s] d\Omega - \int_{\Omega} W q d\Omega \quad (3-8)$$

On insert les équation (3-1a,b), (3-3), (3-6), qui peuvent être écrites sous la forme:

$$\begin{aligned} [\beta] &= [N_p] [\bar{\beta}] \\ [W] &= [N_w] [\bar{w}] \\ [s] &= [N_s] [\bar{s}] = \alpha [N_s] ([Q_p] [\bar{\beta}] + [Q_w] [\bar{w}]) \end{aligned} \quad (3-9)$$

avec:

$$\begin{aligned} [\beta]^T &= (\beta_{x_1}, \beta_{y_1}, \beta_{x_2}, \beta_{y_2}, \beta_{x_3}, \beta_{y_3}, \Delta \beta_1, \Delta \beta_2, \Delta \beta_3) \\ [W]^T &= (w_1, w_2, w_3) \end{aligned}$$

Les matrices $[N_p]$, $[N_w]$, $[Q_w]$ sont déduites au (Annexe C)
On obtient:

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} ([L] [N_p] [\bar{\beta}])^t [D] ([L] [N_p] [\bar{\beta}]) d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} ([N_s] [Q_p] [\bar{\beta}] + [N_s] [Q_w] [\bar{w}])^t \\ & + \alpha ([N_s] [Q_p] [\bar{\beta}] + [Q_w] [\bar{w}]) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} ([N_w] [\bar{w}])^t d\Omega \end{aligned} \quad (3-10)$$

et en minimisant l'énergie potentielle (π), on obtient:

$$\begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pw} \\ K_{wp} & K_{ww} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\beta} \\ \bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (3-11)$$

avec :

$$\begin{aligned} (K_{pp}) &= \int_{\Omega} (([L] [N_p])^T [D] ([L] [N_p]) + ([N_s] [Q_p])^T \alpha ([N_s] [Q_w])) d\Omega \\ (K_{pw}) &= \int_{\Omega} ([N_s] [Q_p])^T \alpha ([N_s] [Q_w]) d\Omega \\ (K_{ww}) &= \int_{\Omega} ([N_s] [Q_w])^T \alpha ([N_s] [Q_w]) d\Omega \end{aligned}$$

On admet les notions suivantes :

$$\begin{aligned} [L] [N_p] &= [B_f] \\ [N_s] [Q_p] &= [B_{fc}] \\ [N_s] [Q_w] &= [B_c] \end{aligned} \quad (3-12)$$

ainsi:

$$\begin{aligned} [K_{pp}] &= \int_{\Omega} ([B_f]^T [D] [B_f] + [B_{fc}]^T \alpha [B_{fc}]) d\Omega \\ [K_{pw}] &= \int_{\Omega} [B_{fc}]^T \alpha [B_c] d\Omega = [K_{wp}]^T \\ [K_{ww}] &= \int_{\Omega} [B_c]^T \alpha [B_c] d\Omega \end{aligned} \quad (3-19)$$

Les matrices $[B_f]$, $[B_{fc}]$ et $[B_c]$ seront développées en (Annexe C).

Si l'épaisseur et les propriétés physiques du matériau sont constantes, trois points de Gauss conduisent à l'intégration exacte, car, les résultantes de flexion et de cisaillement transversal varient linéairement dans chaque élément.

III-2-c. Détermination du vecteur charge:

L'énergie potentielle externe pour une charge répartie uniforme, est donnée par:

$$W^e = P_r \int_A W dx dy = (U_n)^T (f^e) \quad (3-14)$$

La variation linéaire de 'W' prouve que :

$$(f^e) = \frac{P_r A}{3} (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (3-15)$$

et de plus; l'erreur dans l'évaluation de l'énergie est de l'ordre $O(h^2)$, h: la taille de l'élément.

III-2-d. Détermination de la matrice masse:

Si on néglige les inerties de rotation, l'énergie cinétique est:

$$\begin{aligned} W_m^e &= \int_A W^e \rho_m \bar{W} dA \\ &= (U_n^e)^T [M] (U_n) \end{aligned}$$

ce qui donne:

$$[M] = \int_A [N_w]^T \rho_m [N_w] dA \quad (3-16)$$

pour une interpolation linéaire de 'W', la matrice masse est de la forme:

$$[M] = \frac{m}{3} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\beta} \\ \bar{W} \end{pmatrix} \quad (3-17)$$

où : m la masse totale de l'élément $m = \rho \cdot A \cdot t$

III-2-e. Calculs des déformations, contraintes et efforts:

Une fois les différents déplacements sont connus, on peut calculer:

- Les déformations de flexion:

$$[\kappa] = [B_r] [\bar{\beta}] \quad (3-18)$$

- Les déformations de flexion:

$$[\kappa] = [B_f] [\beta] \quad (3-18)$$

- Les Moments de flexion:

$$[M] = [D] [\kappa] = [D] [B_f] [\bar{\beta}] \quad (3-19)$$

- Les contraintes planes:

$$[\sigma] = Z [M] \quad (3-20)$$

- les forces de cisaillement:

$$\{\bar{S}\} = \alpha \{ [B_{cf}] \{\bar{\beta}\} + [B_c] \{\bar{w}\} \} = \begin{Bmatrix} \bar{S}_x \\ \bar{S}_y \end{Bmatrix} \quad (3-21)$$

III-2-f. Remarques:

- 1- D'autres formes existent pour introduire les hypothèses discrètes, l'une est la substitution à partir des équations (2-12) et (2-13), et ainsi, la réduction des variables. L'autre est l'utilisation des paramètres de Lagrange discrets. Les deux procédures donneraient les mêmes résultats. [7]
Il y a une autre forme semblable à celle utilisée, c'est la technique de "collocation par points".
- 2- On peut supposer que la variation de 'W' est quadratique, l'équation (3-5a) prouve qu'elle n'affecté pas sur l'intégration de S_{κ} , ie: il y aura un changement seulement dans l'évaluation du vecteur force et la matrice masse, et ainsi, l'erreur dans l'évaluation de l'énergie potentielle sera de l'ordre $\partial(h^3)$.

CHAPITRE IV

RESULTATS NUMERIQUES

IV-1. INTRODUCTION

Ce chapitre regroupe les différents résultats numériques des tests, qui permettent de juger l'aptitude de notre élément "DRM". Ces tests ont été fréquemment utilisés dans la littérature, et correspondent à des propositions de plusieurs spécialistes:

- Dans la première partie, on présente les résultats des tests de validation, "Patch-Tests".
- Dans la deuxième partie, on présente ceux des tests de performance, "Précision".

Pour atteindre ce but, nous avons formulé et implanté notre élément dans un code de calcul des structures "DLEARN", où les calculs sont en double précision, en outre, nous avons utilisé le compilateur "F7713" afin de pouvoir analyser des structures de grandes tailles. (voir annexe D)

IV-2. TESTS DE VALIDATION:

Ce type de tests permet de vérifier la formulation théorique et d'évaluer les caractéristiques de convergence. Dans la version mixte il y a deux méthodes pour appliquer le Patch-Test:

- Patch-Test numérique, si la démonstration est numérique.
- Patch-Test variationnel, si la démonstration est théorique.

IV-2-a. Patch-Test numérique:

Cette méthode non seulement permet de vérifier la convergence de l'élément, mais, de vérifier de plus la mise en oeuvre informatique du modèle. Selon les suggestions de "ROBINSON", pour l'évaluation des éléments plaques en flexion, on considère le problème de Patch-Test (forme C), défini dans la figure (IV-1), où quatre éléments "DRM" sont assemblés avec un noeud interne.

Le chargement et les conditions aux limites sont choisis de façon que, théoriquement conduisent à un état de déformation constant dans toute la structure.

- Conditions aux limites
($W=0, \theta_x=0, \theta_y=0$) aux noeuds 1, 3 et 11

- Caractéristiques de la structure:
 $E=10E+4, \nu=0.3, t=1$

- Le chargement:
 $M_x = 10$ aux noeuds 3, 13
 $M_x = -10 \sim 1, 11$
 $M_y = 20 \sim 11, 13$
 $M_y = -20 \sim 1, 3$
 $P_z = -2$ aux noeud 13

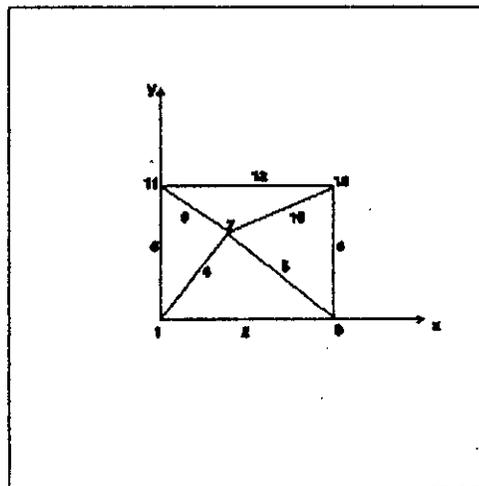


fig IV-1: Patch-Test

-Résultats:

$M_x=M_y=M_{xy} = 1$ constant dans la structure

$W = 12,69$ pour $\nu = 0.3$; et $W = 9.51$ pour $\nu = 0.0$

Les moments M_x, M_y, M_{xy} sont trouvés constants dans toute la structure, ceci confirme que l'élément est compatible, en outre il est robuste, car, la variation de ν n'a pas d'influence sur son comportement.

IV-2-b. Patch-Test variationnel:

Dans la formulation mixte qu'on a utilisé dans le développement de notre élément, on a approximé toutes les variables pour que la solution soit capable de converger dans les deux cas de plaques, minces et épaisses, aussi:

$$\theta = N_\theta \cdot \bar{\theta} ; W = N_w \cdot \bar{W} ; S = N_s \cdot \bar{S} \tag{IV-1}$$

où;

N_θ, N_w, N_s : sont les fonctions de formes.

θ, W, S : sont les paramètres.

$\bar{\theta}, \bar{W}, \bar{S}$: les variables nodales.

Le système d'équation sera toujours de la forme:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & 0 \\ A_2^T & \frac{A_3}{\alpha} & A_4 \\ 0 & A_4^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{S} \\ \bar{W} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{IV-2}$$

avec:

F_1, F_2, F_3 : les composantes du vecteur charge.

A_i : des blocs de la matrice de rigidité.

Il est nécessaire algébriquement que :

$$n_{\theta} + n_{s} \geq n_e \quad (\text{IV-3a})$$

$$n_{\theta} + n_w \geq n_s \quad (\text{IV-3b})$$

$$n_s \geq n_w \quad (\text{IV-3c})$$

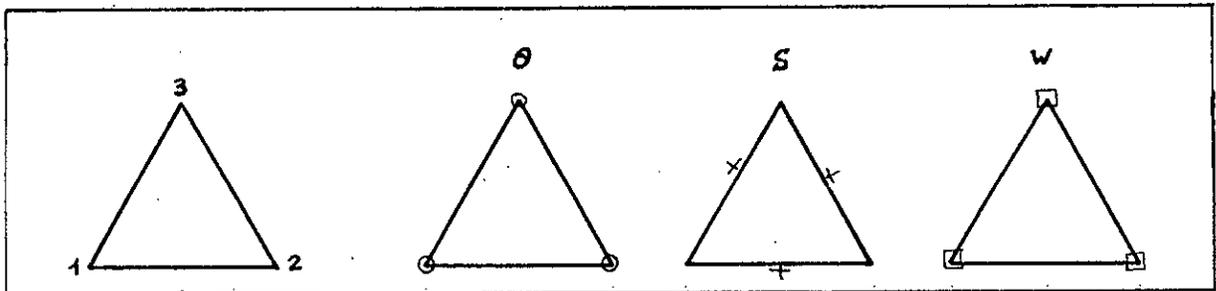
où; n_e, n_w, n_s représentent le nombre de variables pour chaque paramètres θ, W, S respectivement.

La première inéquation est évidente, cependant, les inéquations (IV-3b) et (IV-3c) doivent être vérifiées comme une condition nécessaire (de stabilité), pour les différents assemblages d'éléments.

On présente par suite deux types de tests (même forme C):

- 1- Test1: sur la représentation des mouvements de corps rigide, où trois ddl seulement sont éliminés: w_1, θ_1, θ_2
- 2- Test2: sur la représentation d'un état de déformation constant, où tous les ddl de contour sont éliminés.

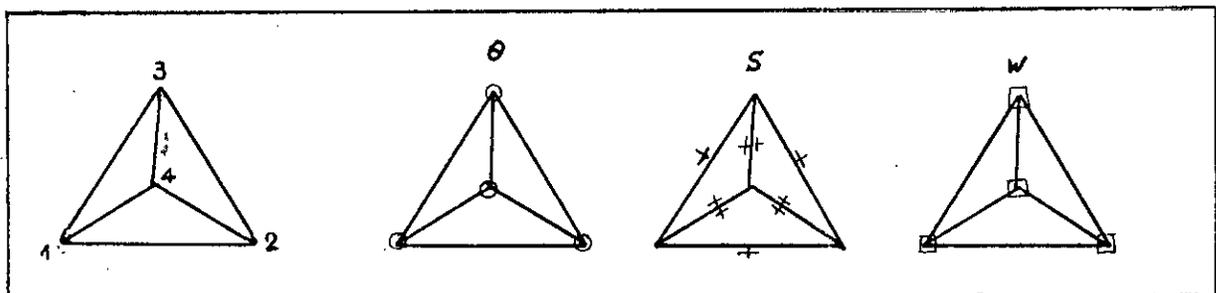
* Pour un seul élément, $w_1=0, \theta_{x1}=\theta_{y1}=0$



Test1: $n_{\theta} = 6 - 2 = 4$; $n_s = 3$; $n_w = 3 - 1 = 2$

Test2: $n_e = 0$; $n_s = 0$; $n_w = 0$

* Pour un assemblage d'éléments:



Test1: $n_{\theta} = 8 - 2 = 6$; $n_s = 6$; $n_w = 4 - 1 = 3$

Test2: $n_e = 2$; $n_s = 3$; $n_w = 1$

Dans les deux cas d'assemblage, les inéquations précédentes sont vérifiées pour les deux tests, test1 et test2, ce qui permet de conclure, que l'élément "DRM" possède les caractéristiques suivantes:

- Peut représenter les mouvements de corps rigide, et l'état de déformation constant;
- L'inexistence des modes parasites;
- Il est robuste ie: les Caractéristiques de la structure n'affecte pas sur le comportement de l'élément.

IV-3. TESTS DE PERFORMANCE "PRECISION":

Après qu'on a assuré la conformité de l'élément, par le passage avec succès des patch-tests, il nous reste qu'à visualiser sa performance en comparaison avec d'autres éléments. Pour atteindre ce but, on va traiter des exemples avec différentes sollicitations et conditions aux limites.

On cite les éléments de comparaison:

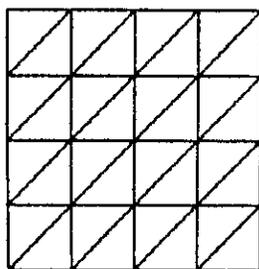
- * DKT: Élément de Kirchhoff triangulaire à 3 noeuds et 3 ddl par noeud.
- * DKQ: Élément de Kirchhoff quadratique à 4 noeuds
- * TRI-6: Élément triangulaire à 6 noeuds avec interpolation quadratique des déplacements et rotations, et linéaire pour l'effort tranchant.
- * TRI-6R: Le même que TRI-6 sauf une interpolation quadratique pour l'effort tranchant

Différentes situations ont été considérées, selon plusieurs facteurs:

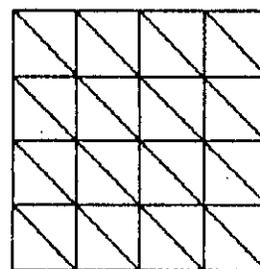
- La forme géométrique de la structure (carrée, circulaire, losange...)
- L'épaisseur de la plaque (épaisse, mince et très mince)
- Le type de chargement (charge uniforme, concentrée)
- Le type des conditions aux limites (encastrée, simplement supportée souple $W=0$, simplement supportée rigide $W=0$ $\theta_s=0$)
- Le type de maillage; il y a deux types (A) et (B) voir fig(IV-2)..

Néanmoins, on testera le comportement de l'élément aux maillages irréguliers et aux structures non standards.

Les quantités comparées dans ce qui suit, sont le déplacement transversale du centre de la plaque et l'énergie de déformations, pour faciliter la comparaison, on a présenté les résultats sous formes de graphes.



Maillage A



Maillage B

FIG IV-2: types de maillages

IV-3-1. Plaque carrée:

A cause de la symétrie, un quart d'une plaque carrée est discrétisé en différents maillages par l'élément "DRM" FIG(IV-3) et ayant les propriétés structurelles suivantes:

$E = 10.92$; $\nu = 0.3$; $a = 10$

t : épaisseur de la plaque variable.

a. Charge uniforme:

On testera en premier lieu, la convergence de l'élément "DRM" dans deux cas extrêmes et standards, plaque mince et épaisse avec des élancements ($t/a = 0.01$ et 0.1) respectivement.

* Comparaison dans le cas d'une plaque mince:

les figures (IV-3) et (IV-4) montrent les résultats obtenus du déplacement transversal du centre d'une plaque simplement supportée avec des conditions aux limites rigides et souples respectivement.

Les résultats indiquent que l'élément "DRM" converge plus rapidement que les autres éléments, mais, la monotonité de convergence n'est pas stricte. On en déduit que l'énergie potentielle suit le même cheminement.

On remarque aussi, qu'il est plus flexible dans le cas de CL souples ce qui est évident, quand on applique des CL rigides l'élément devient plus rigide.

* Comparaison dans le cas d'une plaque épaisse:

De même façon que précédemment, on a fait une comparaison dans le cas des plaques épaisses. Les résultats reportés sur les figures (IV-5) et (IV-6) (pour des conditions aux limites rigides et souples respectivement) indiquent bien l'effet du cisaillement transversal sur l'élément "DRM", cependant, sa compétence est remarquable, car, il converge plus rapidement Fig(IV-8).

* Influence de type de maillage:

Dans ce test, on examine les deux types de maillages Fig(IV-2) afin d'illustrer leurs influences sur les résultats. Pour cela, on a choisi une plaque carrée chargée uniformément avec l'application de divers conditions aux limites. Comme il y a deux types de conditions aux limites, dans le cas d'une plaque simplement supportée, on a essayé en bénéficiant de ce test de répondre à la question suivante: Avec quel type de conditions aux limites (souples ou rigides), l'élément "DRM" se comporte comme le "DKT" pour une plaque mince ? Pour bien juger, on doit considérer une plaque très mince où la convergence de l'élément "DKT" est assurée. On prend un élancement $t/a = 0.001$; c'est pratiquement un cas limite.

Les figures (IV-7) et (IV-8) regroupent les résultats pour les cas souples et rigides respectivement. La Fig (IV-9) pour le cas d'encastrement.

Ces trois figures indiquent bien les gradients importants entre les résultats correspondants aux deux types de maillage (A) et (B). On remarque que le type (A) est plus convenable dans le cas d'une plaque simplement supportée.

Concernant le "DKT", les résultats montrent qu'il est exactement atteint, en appliquant des conditions aux limites rigides ie:

$$\text{DRM(S.S, rigide)} = \text{DKT(S.S)}.$$

b. Charge concentrée:

De même façon que précédemment, seulement ici, une charge concentrée est appliquée aux centre de la plaque ($P_2 = 1.0$). C'est un problème pour lequel la solution exacte selon la théorie des plaques épaisses (Reissner-Mindlin) est infinie; cependant, selon la théorie des plaques minces est finie [7]. Pour cela, l'élancement est pris ($t/a = 0.01$).

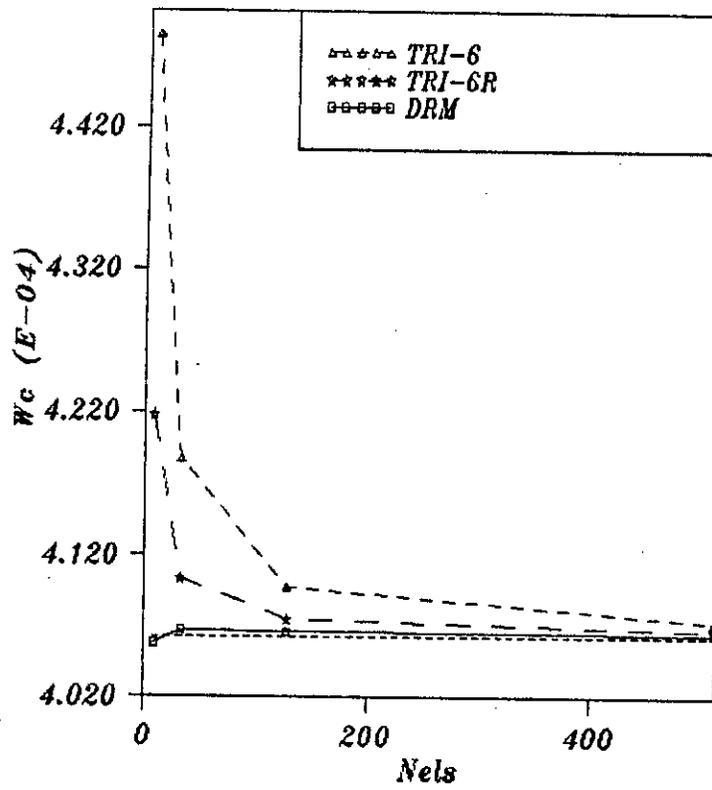


FIG IV-3 : Déplacement du centre d'une plaque carrée, (S.S), (CL rigide), charge uniforme, élanement $t/a = 0.01$

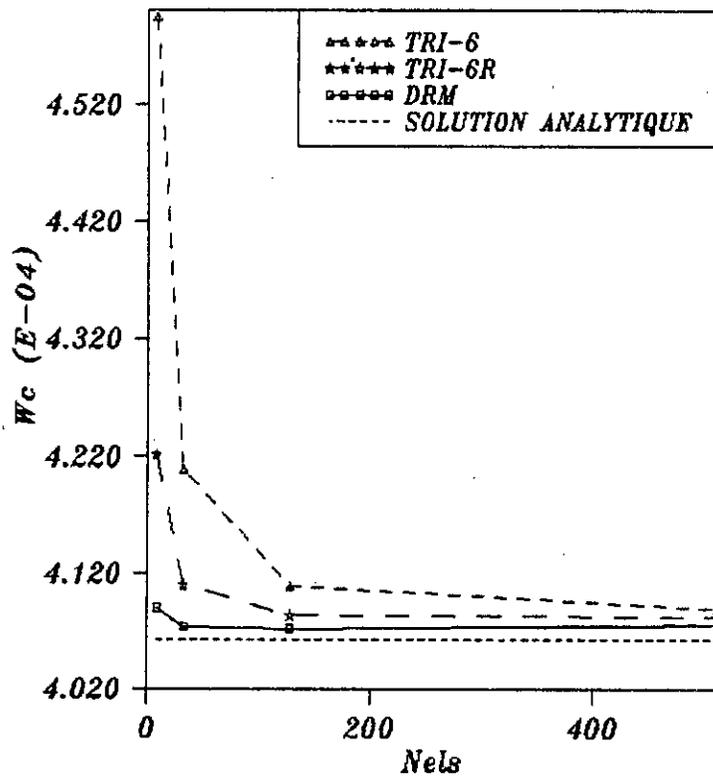


FIG IV-4 : Déplacement du centre d'une plaque carrée, (S.S), (CL souple), charge uniforme, élanement $t/a = 0.01$

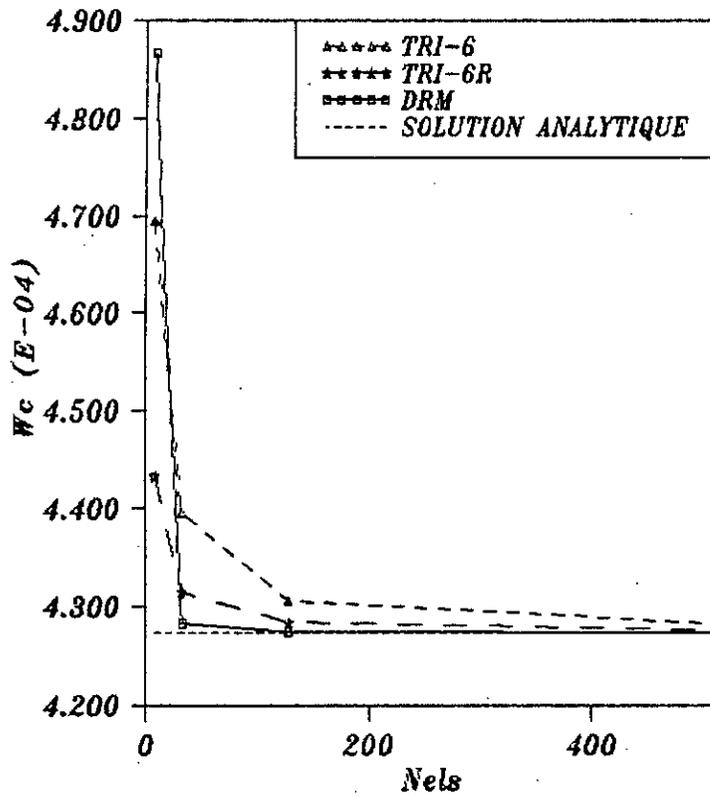


FIG IV -5 : Déplacement du centre d'une plaque carrée, (S.S), (CL rigide), charge uniforme, élancement $t/a = 0.10$

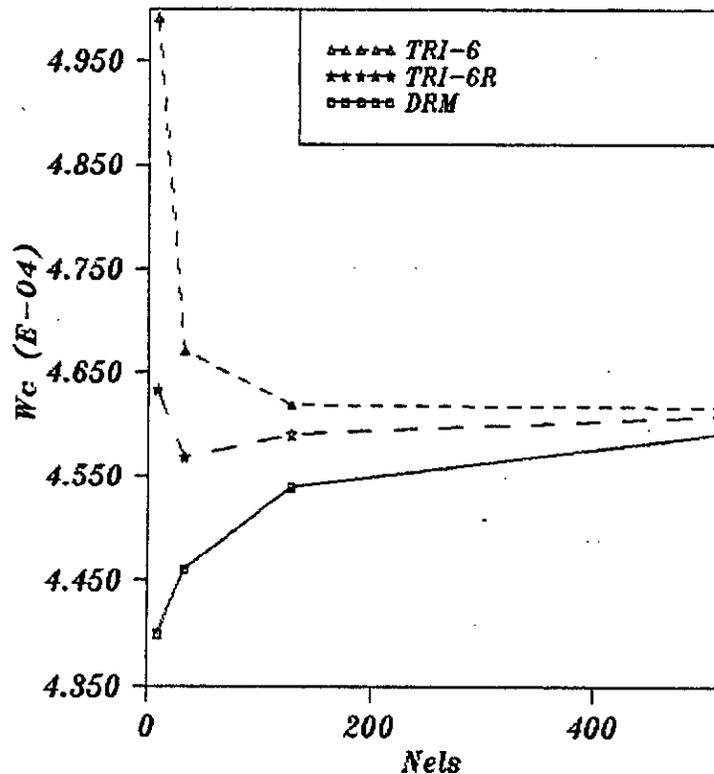


FIG IV -6 : Déplacement du centre d'une plaque carrée, (S.S), (CL souple), charge uniforme, élancement $t/a = 0.10$

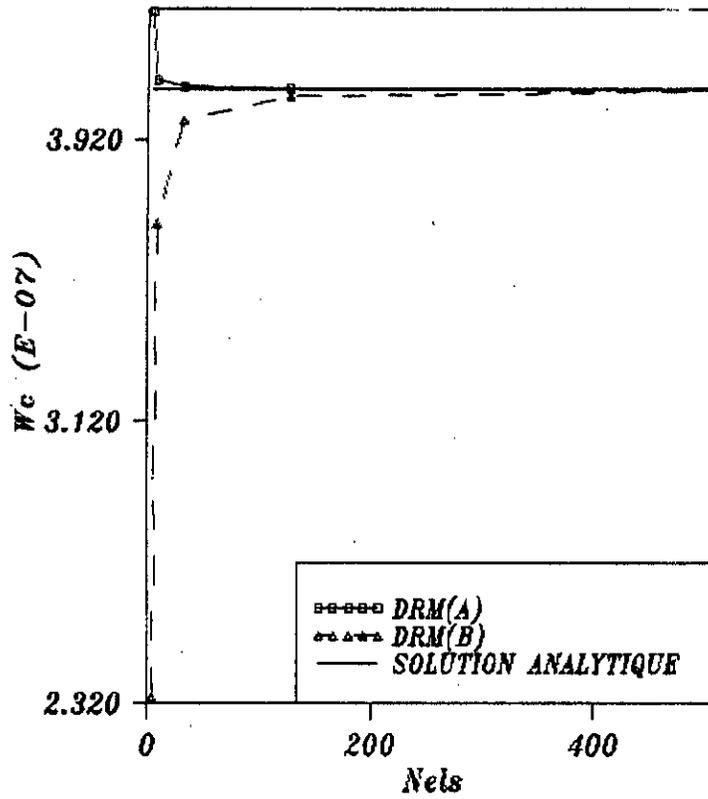


FIG IV-7: Déplacement du centre d'une plaque carrée, (S.S), (CL souple), charge uniforme, élancement $t/a = 0.001$

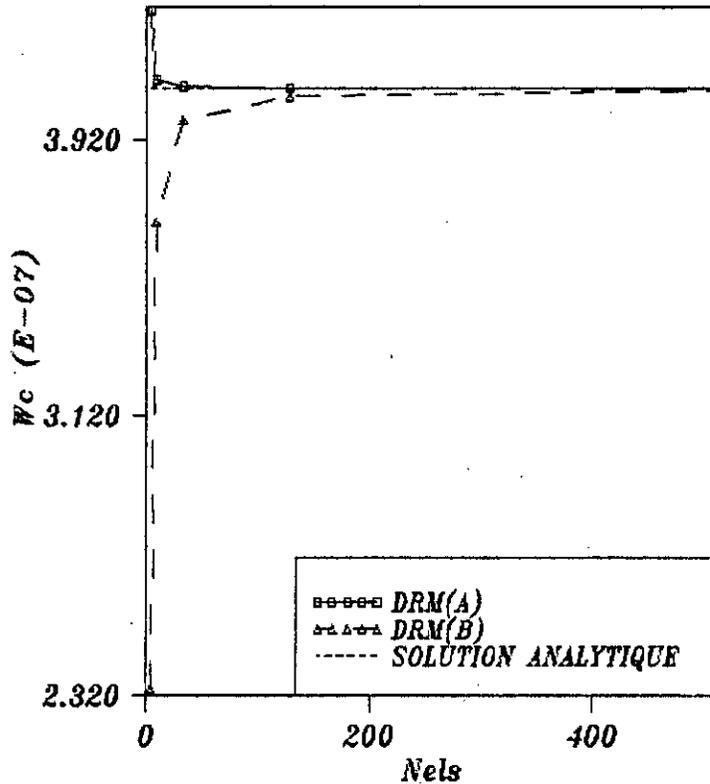


FIG IV-8: Déplacement du centre d'une plaque carrée, (S.S), (CL rigide), charge uniforme, élancement $t/a = 0.001$

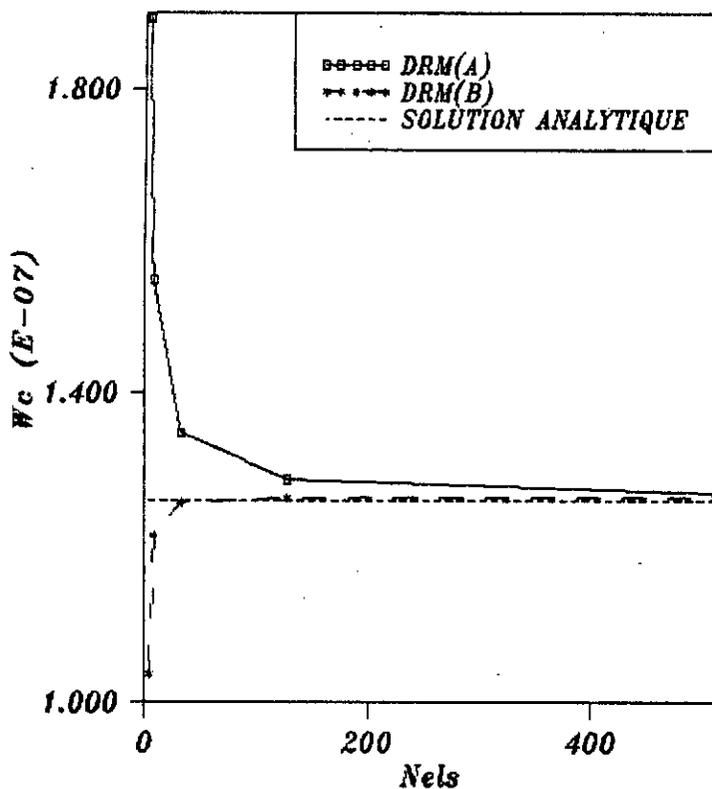


FIG IV-9: Déplacement du centre d'une plaque carrée, (ENCAST), charge uniforme. $t/a = 0.001$

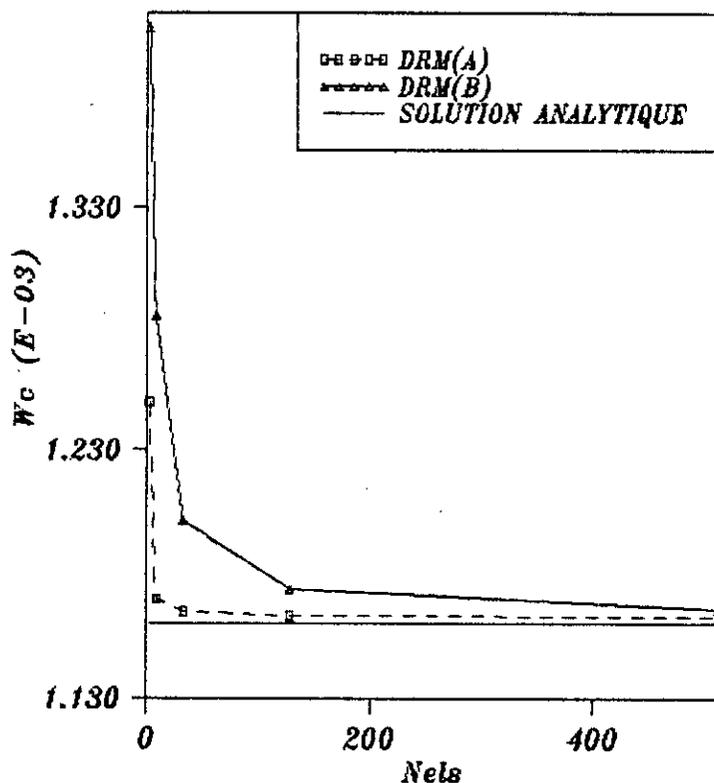


FIG IV-10: Déplacement du centre d'une plaque carrée, (S.S), (CL souple), charge concentrée, $t/a = 0.01$
 Influence du type de maillage

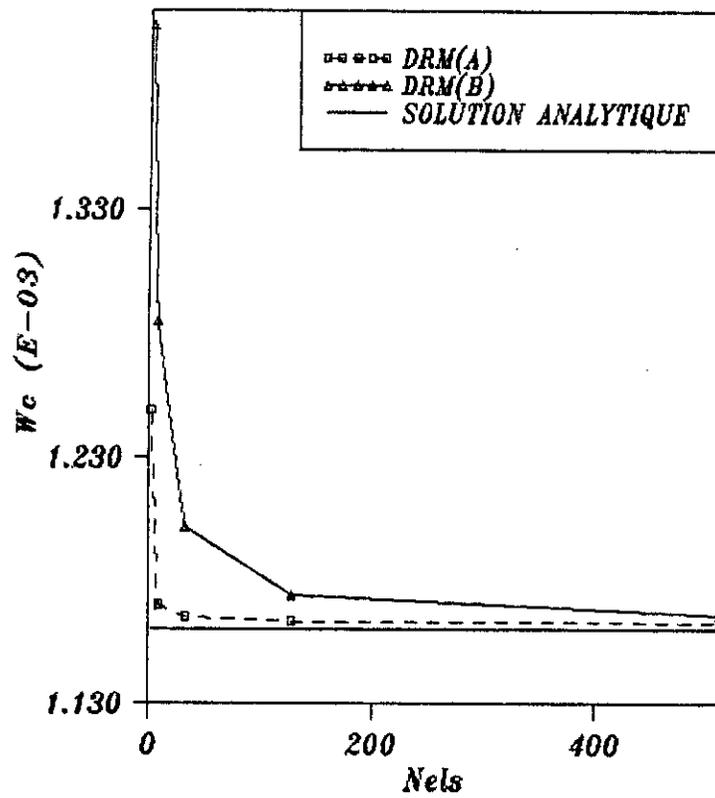


FIG IV-11: Déplacement du centre d'une plaque carrée, (S.S), (CL rigide), charge concentrée, $t/a = 0.01$. Influence du type de maillage

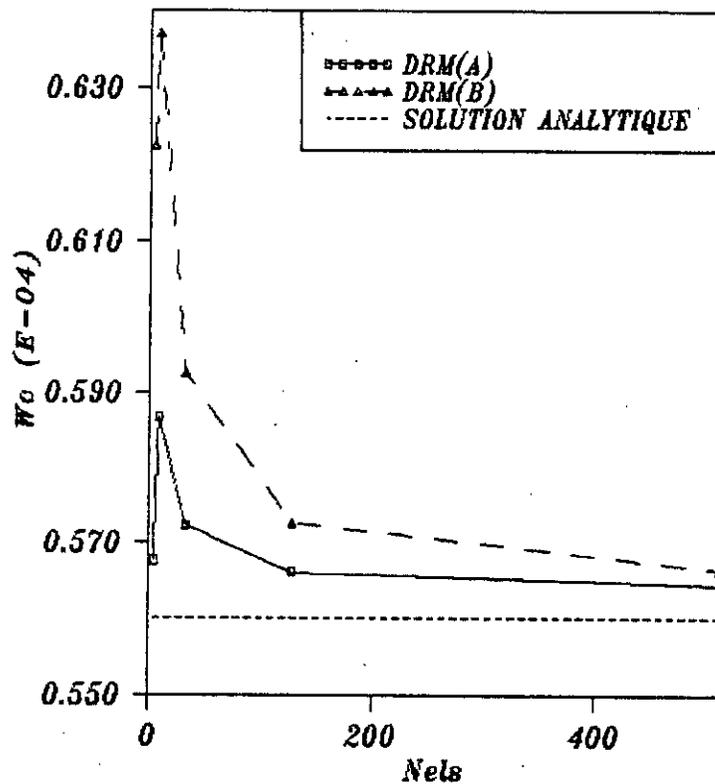


FIG IV-12: Déplacement du centre d'une plaque carrée, (ENCAST), charge concentrée, $t/a = 0.01$

Les figures (IV-10) et (IV-11) montrent le déplacement transversal du centre de la plaque obtenu dans le cas de CL simplement supportée souple et rigide respectivement. Dans ces deux tests, on montre la convergence de l'élément "DRM" en l'absence des autres éléments, qui leurs résultats ne sont pas disponibles.

On remarque que le maillage de type (A) est le plus convenable, mais, en général, l'élément "DRM" a une bonne aptitude pour les deux types de maillage, en outre, sa convergence est monotone.

La figure (IV-12) montre le comportement de l'élément "DRM" dans le cas d'une plaque encastree. On remarque ici de plus que le type de maillage (A) est le plus convenable et que l'élément est flexible, mais, sa convergence n'est pas monotone.

IV-3-2. Plaque circulaire:

A cause de la symétrie un quart d'une plaque circulaire est discrétisée avec différents maillages, la figure (IV-13) montre le modèle du maillage utilisé. La structure a les propriétés suivantes:
 $E = 10.92$; $\nu = 0.3$; $R=5$

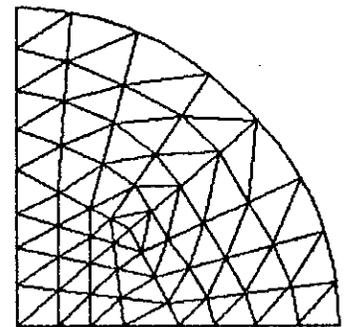


fig IV-13; Modèle du maillage utilisé pour une plaque circulaire

Les figures (IV-14) et (IV-15) montre le déplacement transversal du centre d'une plaque mince et épaisse respectivement, avec un chargement uniforme et des conditions aux limites de type simplement supportée (souples et rigides). Les résultats sont comparés aux solutions analytiques.

On remarque bien la convergence monotone de l'élément dans les deux cas.

Les figures (IV-16) et (IV-17) montrent le comportement de l'élément "DRM" pour une plaque encastree chargée uniformément mince et épaisse respectivement.

On remarque que ni la flexibilité ni la monotonité de convergence est préservée, cependant, la convergence est assurée.

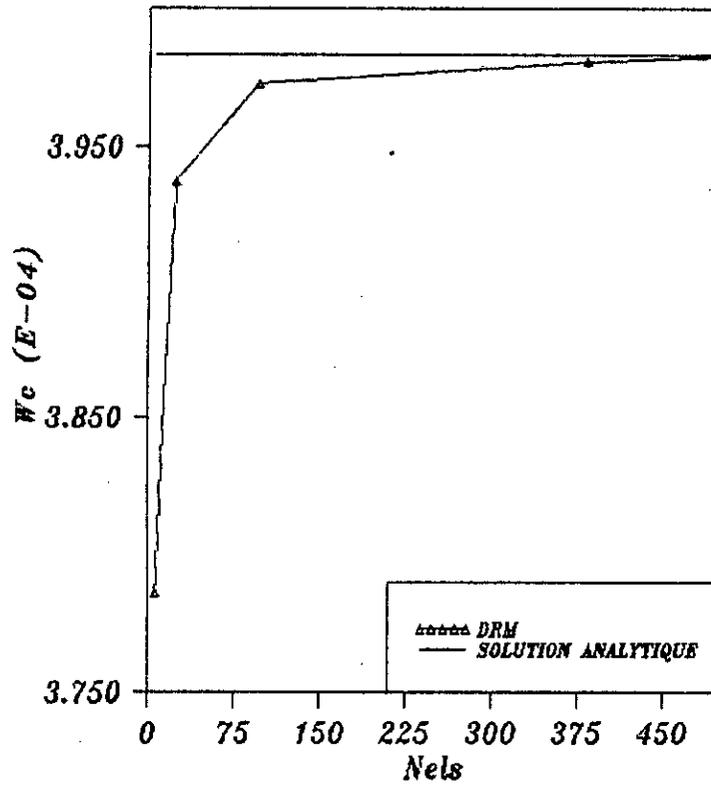


FIG IV -14: Déplacement du centre d'une plaque circulaire, (S.S), (CL souple et rigide), charge uniforme, $t/R = 0.02$

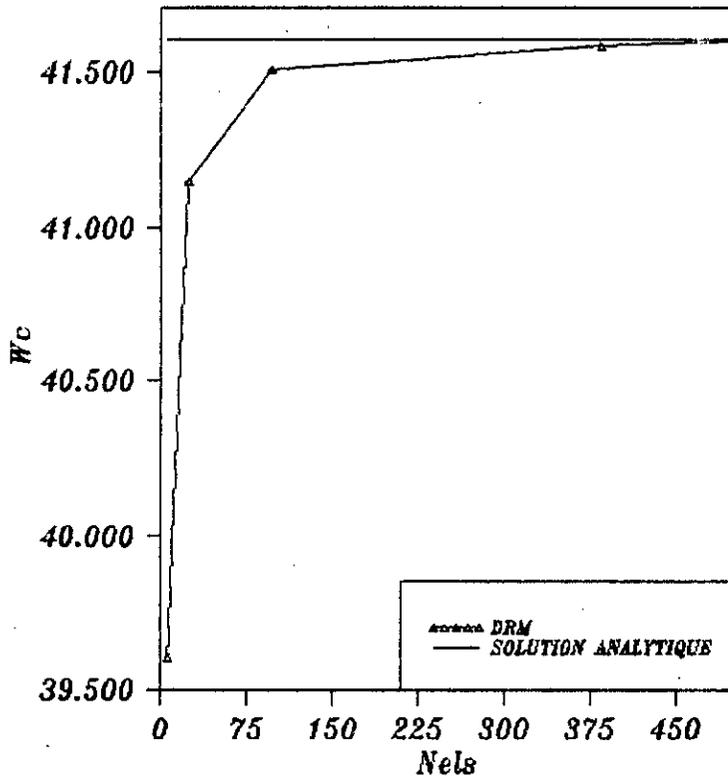


FIG IV -15: Déplacement du centre d'une plaque circulaire, (S.S), (CL souple et rigide), charge uniforme, $t/R = 0.20$

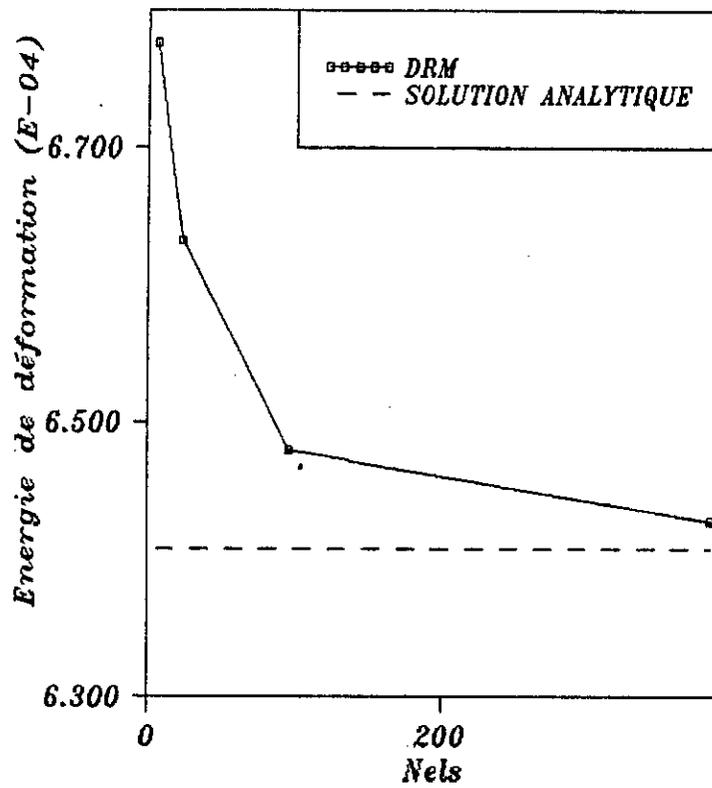


FIG IV -16: Energie de déformation d'une plaque circulaire (ENCASTRÉE), charge uniforme, élançement $t/R = 0.02$

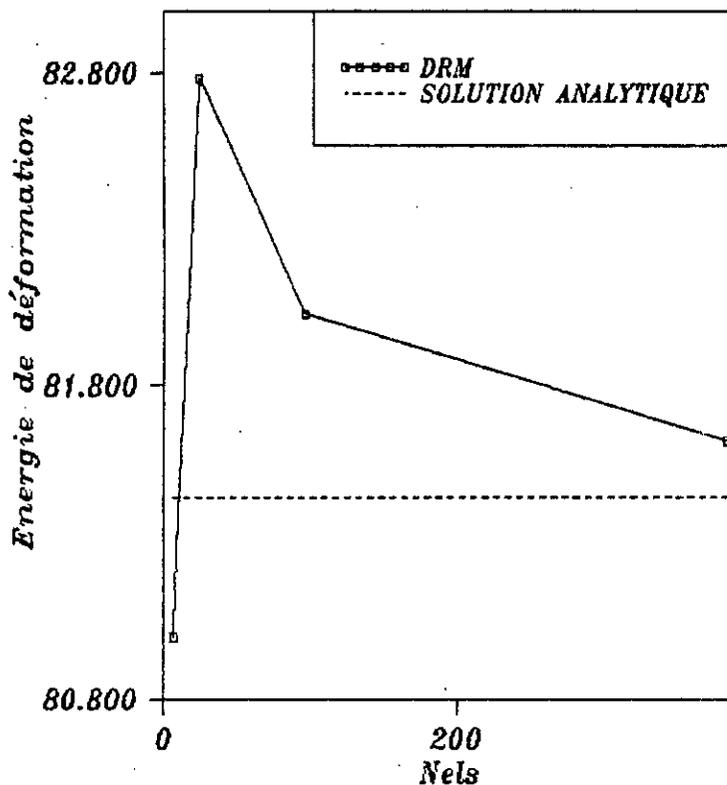


FIG IV -17: Energie de déformation d'une plaque circulaire (ENCASTRÉE), charge uniforme, élançement $t/R = 0.20$

IV-3-3. Plaque losange:

Deux tests ont été fait, sur une plaque losange de 30° Fig (IV-18) discrétisée en différents maillages réguliers et de même type (A),

simplement supportée de type souple, soumise à une charge uniforme.

Les propriétés structurales sont comme suit: $E = 10E+7$; $\nu = 0.3$; $a = 100$
chargement $q = 1.0$

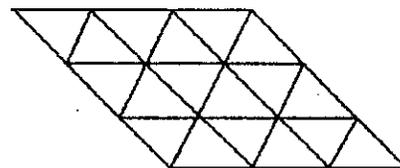


fig IV-18 Plaque losange

Ces tests, permettent de visualiser l'influence de l'élançement sur le comportement de l'élément, les résultats sont comparés aux solution analytiques et aux autres éléments.

Pour cela, on considère deux cas;

plaque mince ($t/a = 0.01$) et plaque épaisse ($t/a = 0.1$). Les résultats sont représentés sur les figures (IV-19) et (IV-20) respectivement.

On remarque que l'élément "DRM" a une convergence et une flexibilité plus meilleurs et plus monotone que les autres éléments et que ces propriétés ne sont pas influencées par l'effet de l'élançement, ainsi, on confirme une fois encore que, l'effet de blocage en cisaillement transversal n'existe plus.

IV-4. Remarques:*** Taux de convergence:**

Le taux de convergence d'un élément dans la M.E.F, est une grandeur importante, il aide à estimer et localiser l'erreur commise dans l'analyse de n'importe quelle structure. Pour cela, on a choisi une plaque carrée simplement supportée discrétisée en différents maillages de type (A), chargée uniformément avec des conditions aux limites de type rigides.

Les figures (IV-22) et (IV-23) montrent la convergence de l'énergie de déformation pour les élançements $t/a = 0.001$ et 0.1 respectivement.

A partir de ces résultats, on peut calculer le taux de convergence, c'est la pente de $\ln (U_{ex} - U_{cal})$ en fonction de $\ln (h)$ où:

- U_{ex} : L'énergie de déformation (solution analytique)
- U_{cal} : L'énergie de déformation calculée numériquement.

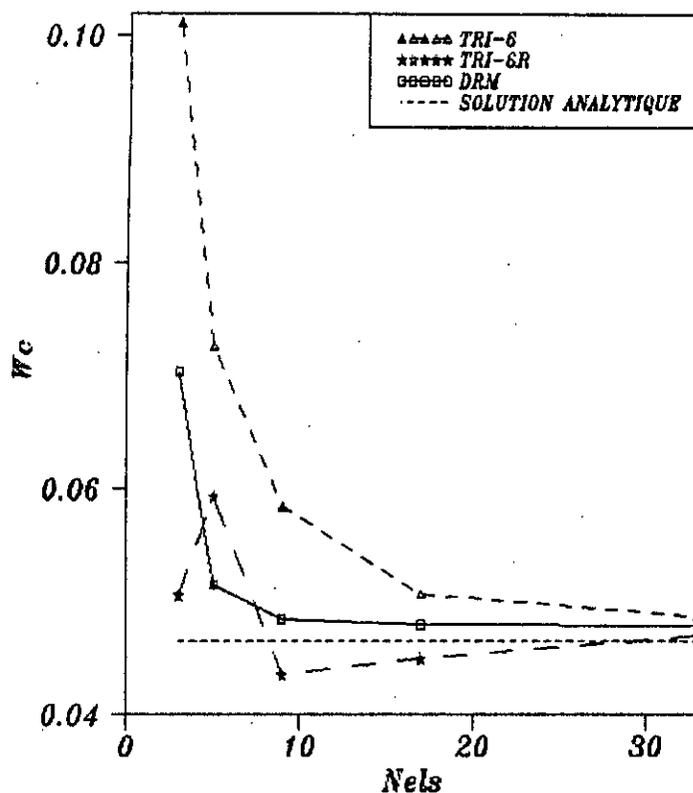


FIG IV -19: Déplacement du centre d'une plaque losange, (S.S), (CL souple), charge uniforme, $t/a = 0.01$.

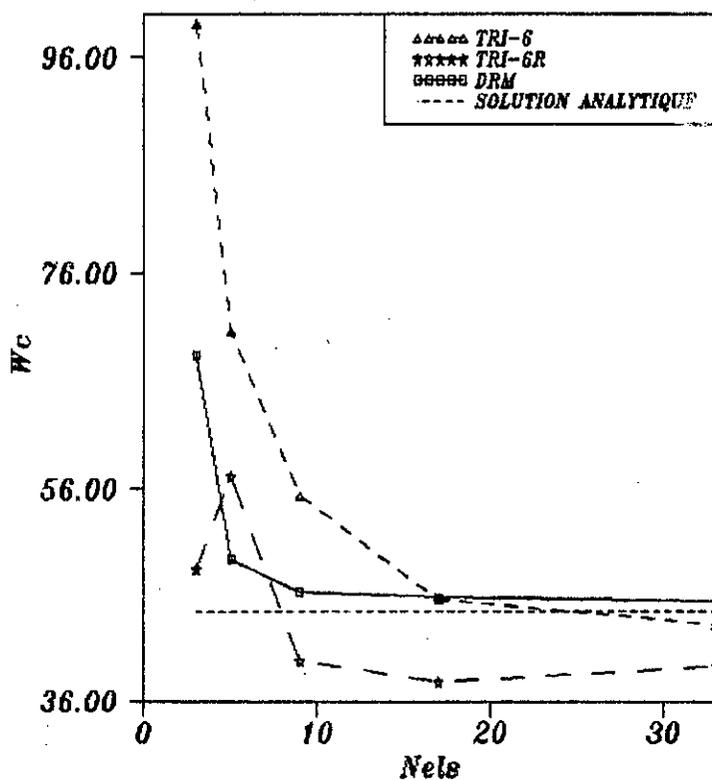


FIG IV -20: Déplacement du centre d'une plaque losange, (S.S), (CL souple), charge uniforme, $t/a = 0.001$.

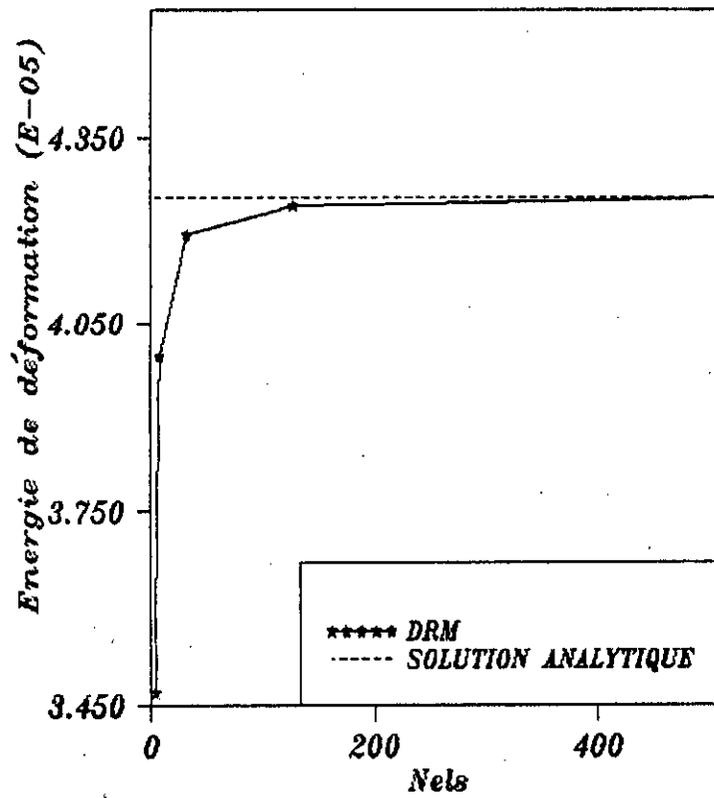


FIG IV-21. Energie de déformation d'une plaque carrée, (S.S), (CL rigide), charge uniforme, élançement $t/a = 0.001$

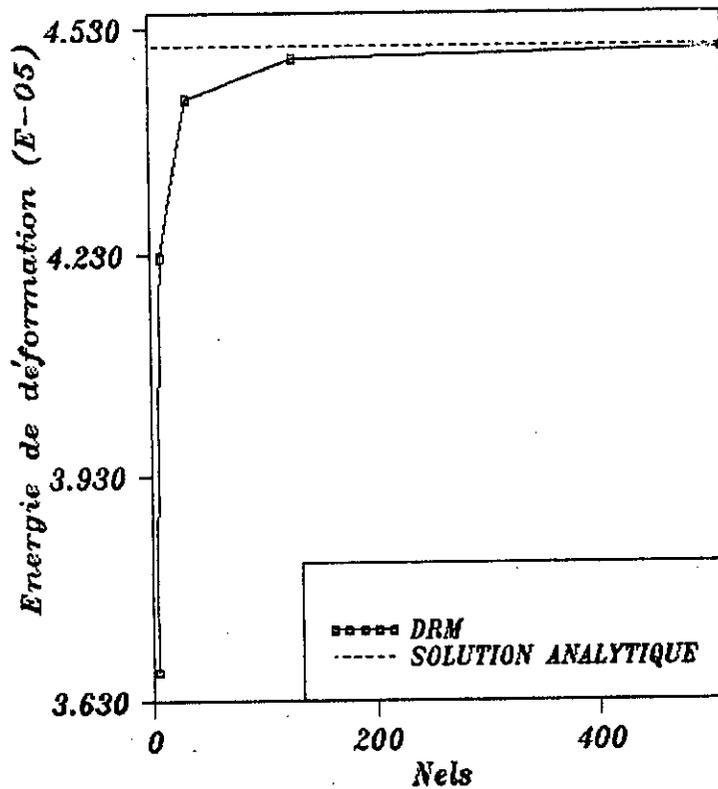


FIG IV-22. Energie de déformation d'une plaque carrée, (S.S), (CL rigide), charge uniforme, élançement $t/a = 0.10$

On rappelle que le calcul de l'énergie est fait à partir de la formule suivante:

$$U_{\text{cal}} = \int_{\Omega} q w d\Omega$$

La valeur calculée est légèrement grande de (2); c'est la valeur que donne la théorie. Ce résultat confirme une autre fois la mise en oeuvre informatique du modèle.

*** Influence du verouillage géométrique:**

Dans ce test, on essaye de voir la sensibilité de l'élément aux distorsions géométriques. Pour cela, on choisit une plaque carrée chargée uniformément, discrétisée en quatre maillages, figure (IV-23), deux maillages réguliers (a) et (b) et deux autres irréguliers (c) et (d). Les déplacements transversaux du centre W_c de (c) et (d) sont comparés aux ceux de (a) et (b) respectivement pour différents épaisseurs et conditions aux limites.

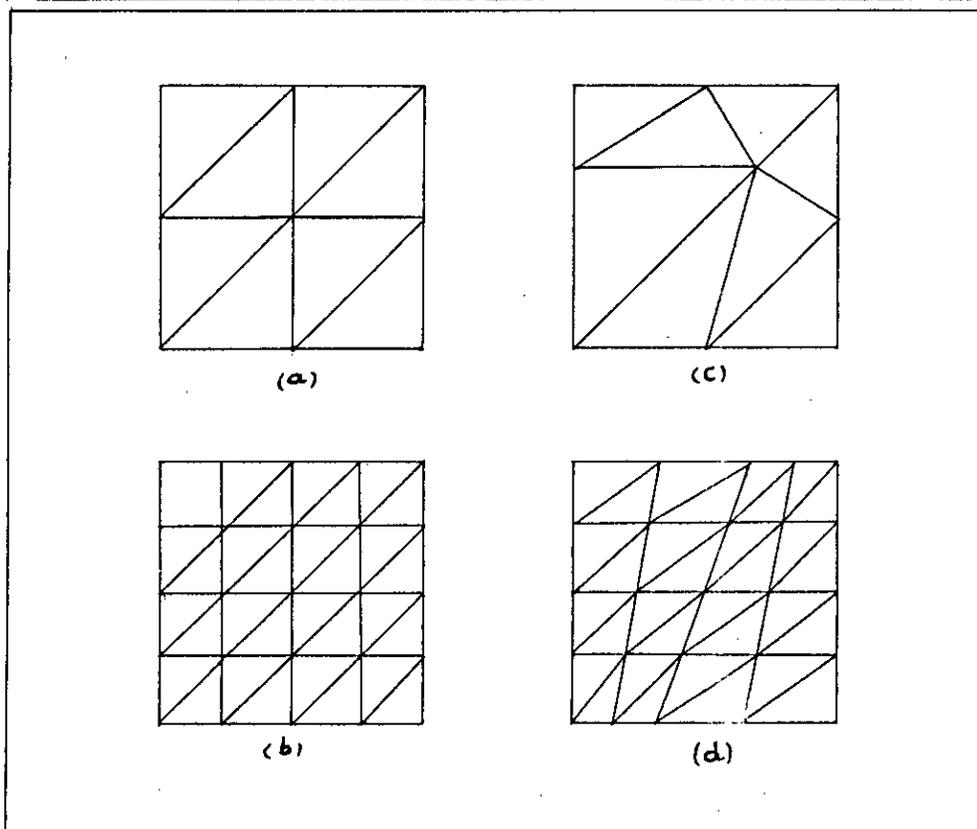


Fig IV-23 maillages irréguliers

Le tableau (IV-1) donne le pourcentage de différents résultats qui sont calculés à partir de la formule:

$$\text{Err} = \frac{W_{\text{rés}} - W_{\text{irrés}}}{W_{\text{rés}}}$$

t/a	0.001			0.01			0.1		
	Rig	Soup	Enca	Rig	Soup	Enc	Rig	Soup	Enc
Err(c) %	0.75	0.85	0.99	0.76	0.84	1.01	0.59	0.47	0.49
Err(d) %	0.68	0.80	3.20	0.68	0.88	3.10	0.73	0.97	2.90

Tableau IV-1: Distorsion géométrique

les résultats montrent que l'erreur est considérable seulement, dans le cas des plaques encastrees (de l'ordre de: 3%), qui reste une valeur acceptable, ainsi, l'élément "DRM" est insensible aux distorsions géométriques.

***Remarque sur l'influence du type de maillage:**

Dans le paragraphe (IV-3-1a) on a vu que le type de maillage influe de façon importante sur les résultats. Au début, on a pensé que cela peut être du aux différences de longueurs de côtés des éléments de façon que dans un maillage de type (A), la disposition des éléments induit une flexibilité dans la structure. Alors, nous avons pris une plaque losange de 60° simplement supportée de type rigide avec un chargement uniforme et discrétisée en 4*4 avec des éléments équilatéraux et en gardant les mêmes conditions aux limites les même numérotations des noeuds et des éléments.

(fig IV-24)

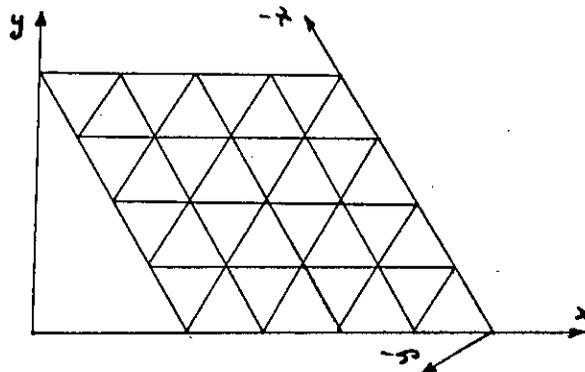


Fig IV-24: Influence du type de maillage

Le déplacement transversal du centre de la plaque selon les repères (x,y) et (x',y') sont reportés dans la table (IV-2).

	0.01	0.1	1.0
(x,y)	7.5960 10^5	7.9308 10^2	1.6867
(x',y')	5.3717 10^5	5.4328 10^2	1.0214

Tableau IV-2: L'influence du type de maillage

On remarque que les gradients restaient relativement importants, ce qui permet de conclure que cet effet n'est pas dû à ce qu'une côte soit plus grande que l'autre et le problème reste posé.

IV-4. CONCLUSION

Les résultats des différents tests vus auparavant, nous permettent de conclure que:

- L'élément "DRM" est compatible avec un système d'équations stable et aucun mode parasite existe.
- La convergence de l'élément est assurée pour n'importe quel élanement, c à d pas de blocage en cisaillement transversal.
- Le type de maillage (A) est le plus convenable pour les plaques simplement supportée et le (B) pour les plaques encastrées, cependant, cet effet est plus localisé lorsque cet élanement tend vers zéro.
- La convergence de l'élément n'est plus sensible aux distorsions géométriques.
- L'ordre de convergence est (2) et il est plus meilleurs que d'autres éléments TRI-6, TRI-6R.
- On remarque aussi, que l'élément "DRM" est plus rigide dans le cas d'une plaque épaisse, ce qui est justifié par l'existante de l'effet de cisaillement qui augmenté avec l'épaisseur.

CONCLUSION GENERALE

Dans cette thèse, nous avons fait une étude théorique et numérique d'un élément plaque de flexion à six noeuds, basé sur une formulation mixte, on utilisant la théorie des plaques épaisses de Reissner-Mindlin et des hypothèses sous forme discrètes sur chaque côté.

De point de vue théorique, cet élément présente plus de simplicité dans sa formulation (utilisation des fonctions de formes standards) et une souplesse dans les manipulations algébriques.

De point de vue numérique, on peut conclure que:

- Cet élément converge plus que d'autres éléments compétents sans considération de l'épaisseur;
- Il se comporte exactement comme le DKT dans le cas des plaques minces;
- Il est insensible aux distorsions géométriques ;
- Il est robuste;
- Des gradients importants apparaissent entre les résultats en utilisant les deux types de maillages (A) et (B), pour cela on conseille d'utiliser le type (A) pour les plaques simplement supportées et le type (B) pour les plaques encastrees;
- Un volume de calcul relativement faible que d'autre éléments utilisant l'approche tridimensionnel;
- Un taux de convergence d'ordre deux, avec une interpolation linéaire du déplacement transversale.

Nous proposons suite à ce modeste travail, de reformuler cet élément en utilisant une interpolation quadratique des déplacements transversals afin d'augmenter sa précision. Néanmoins, de lui passer des tests de précisions en dynamique. Nous pensions aussi que, cet élément se comporte bien pour les problèmes de plasticité.

LES COORDONNÉES D'AIRE.

Pour établir les fonctions de forme des éléments triangulaires et tétraédriques, il est commode d'utiliser les coordonnées d'aire (ou de surface) notées par L_1, L_2, L_3 . fig(A-1) Le système relativement à un triangle, est défini par les relations linéaires suivantes:

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \quad (A-1)$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3$$

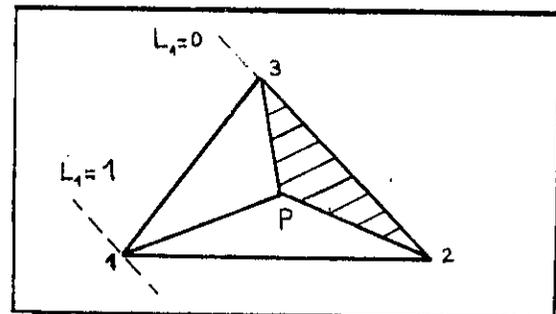


Fig A-1: Définition des coordonnées d'aire

En résolvant ce système on obtient:

$$L_1 = (a_1 + b_1 x + c_1 y) / 2\Delta$$

$$L_2 = (a_2 + b_2 x + c_2 y) / 2\Delta$$

$$L_3 = (a_3 + b_3 x + c_3 y) / 2\Delta$$

(A-2a)

avec:

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \text{Aire } 123$$

(A-2b)

et:

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$b_1 = y_2 - y_3$$

$$c_1 = x_3 - x_2$$

(A-3)

Les autres paramètres sont déterminés par permutation circulaire des indices (1-2-3-1).

Il est facile de voir que les courbes $L_1 = \text{cste}$ représentent une série de droites parallèles à (2-3), où $L_1=0$ sur ce coté et $L_1=1$ au point "1" fig (A-1). D'une autre façon, elle consiste à définir un point P tel que:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\text{Aire P23}}{\text{Aire 123}} \\ L_2 &= \frac{\text{Aire P13}}{\text{Aire 123}} \\ L_3 &= \frac{\text{Aire P12}}{\text{Aire 123}} \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

Dans un repère local de référence fig(A-2), les coordonnées d'aire sont définis par:

$$\begin{aligned} L_1 &= 1 - r - s \\ L_2 &= r \\ L_3 &= s \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

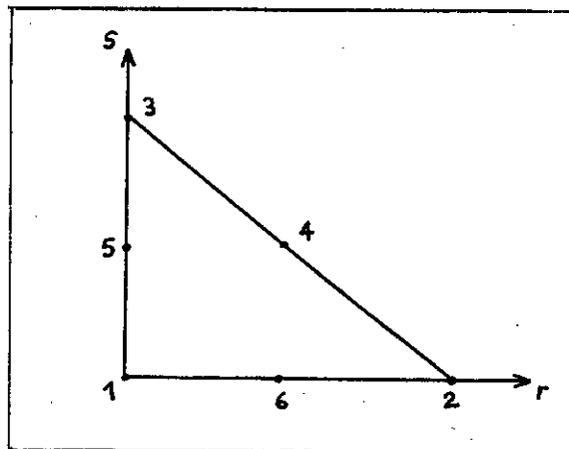


Fig A-2: Coordonnées d'aire dans le repère local

INTRODUCTION DES HYPOTHESES DISCRETES:

La détermination de l'effort tranchant, repose sur la satisfaction de la condition que: la composante tangentielle est constante sur le côté "k".

Alors la résultante tangentielle de cisaillement "S_t" sur le côté "k" du triangle, (ie: L_k=0) est donnée par:

$$\bar{S}_{tk} = \bar{\theta}_k \bar{S}_1$$

$$\bar{S}_1 = \begin{pmatrix} \bar{S}_{x1} \\ \bar{S}_{y1} \end{pmatrix}$$

où:

$$\bar{\theta}_k = \begin{pmatrix} c_k \\ s_k \end{pmatrix}$$

De même façon:

$$\bar{S}_{tj} = \bar{\theta}_j \bar{S}_1$$

$$\bar{\theta}_j = \begin{pmatrix} c_j \\ s_j \end{pmatrix}$$

Alors:

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_{tk} \\ \bar{S}_{tj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_k & s_k \\ c_j & s_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{x1} \\ \bar{S}_{y1} \end{Bmatrix}$$

et on a:

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_{x1} \\ \bar{S}_{y1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta_1} \begin{bmatrix} -s_k & s_j \\ c_k & -c_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{tk} \\ \bar{S}_{tj} \end{Bmatrix} \quad (B-1)$$

où:

$$\Delta_1 = c_k s_j - s_k c_j$$

Il reste à trouver S_{tk} et S_{tj} en fonction des paramètres des noeuds de sommets, pour cela, on considère un élément de référence.

voir fig (B-1) où sont représentés les deux repères: locale (r,s) et (T,N) coïncidant avec la tangente au coté (1-2).

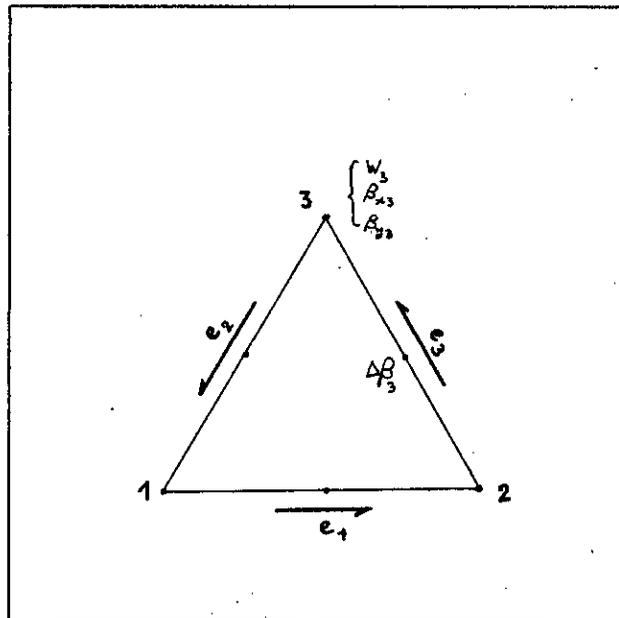


Fig B-1 Elément de référence

D'après l'équation (3-1a,b) on a:

$$\beta_x|_{12} = (1-t)\bar{\beta}_{x1} + t\bar{\beta}_{x2} + 4t(1-t)c_1\Delta\bar{\beta}_1$$

$$\beta_y|_{12} = (1-t)\bar{\beta}_{y1} + t\bar{\beta}_{y2} + 4t(1-t)s_1\Delta\bar{\beta}_1$$

Les rotations β_t (tangentielle) et β_n (normale) dans le repère (T,N) sont tel que:

$$\begin{pmatrix} \beta_t \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_k & s_k \\ s_k & -c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix} \quad (\text{B-2})$$

ce qui donne:

$$\beta_t = (1-t)\beta_{t1} + t\beta_{t2} + 4t(1-t)\Delta\bar{\beta}_1$$

$$\beta_n = (1-t)\beta_{n1} + t\beta_{n2}$$

En générale, sur le côté "k" on a:

$$\beta_t = (1-t)\beta_{t1} + t\beta_{tj} + 4t(1-t)\Delta\bar{\beta}_k \quad (\text{B-3a})$$

$$\beta_n = (1-t)\beta_{n1} + t\beta_{nj} \quad (\text{B-3b})$$

On remarque que, les variations de β_t et β_n sont quadratique et linéaire respectivement, figure suivante:

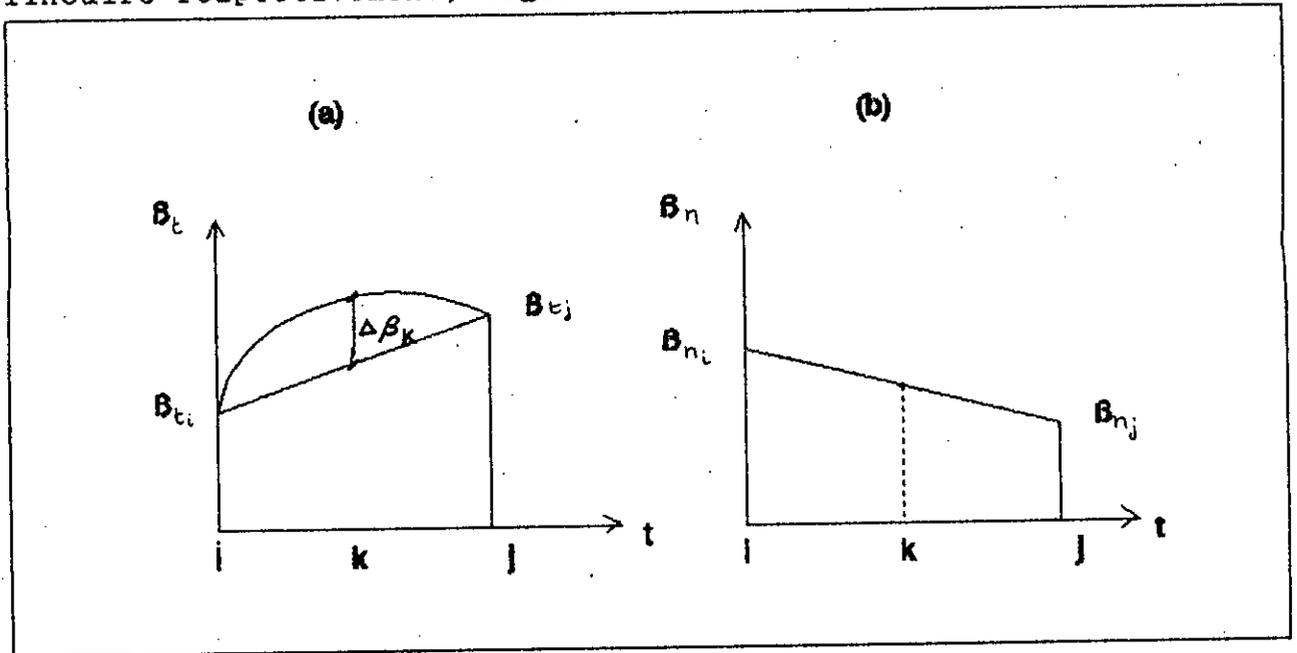


Fig B-2: variations des rotations β_t et β_n

Les hypothèses discrètes sont imposées sur chaque côté de type intégrale curviligne comme suit:

$$\frac{1}{\alpha} \int_{\Gamma_k} (s_t - \bar{s}_{tk}) dt = 0$$

$$\frac{s_t}{\alpha} = \frac{\partial W}{\partial t} + \beta_t$$

$$\bar{s}_{tk} = \text{cste} \quad \text{sur } \Gamma_k$$

A partir de l'équation (B-1), on obtient:

$$l_k \frac{\bar{s}_{tk}}{\alpha} = \int_{\Gamma_k} \frac{\partial W}{\partial t} dt$$

$$+ l_k \int_0^1 [(1-\epsilon) \bar{\beta}_{ti} + \epsilon \bar{\beta}_{tj} + 4\epsilon(1-\epsilon) \Delta \bar{\beta}_k] d\epsilon$$

$$0 < \epsilon = \frac{t}{l_k} < 1$$

donc;

$$\frac{\bar{s}_{tk}}{\alpha} = \pm \frac{W_j - W_i}{l_k} + (\bar{\beta}_{ti} + \bar{\beta}_{tj}) + \frac{2}{3} \Delta \bar{\beta}_k$$

$$\frac{\bar{s}_{tk}}{\alpha} = \pm \frac{W_j - W_i}{l_k} + \frac{1}{2} [c_k \beta_{xi} + s_k \beta_{yi} + c_k \beta_{xj} + s_k \beta_{yj}] + \frac{2}{3} \Delta \beta_k$$

Pour enlever l'ambiguïté de signe (\pm), on doit définir un sens d'intégration sur chaque côté. Pour cela, on choisit celui donné par la croissance des numéros des noeuds extrêmes et le sens trigonométrique comme positif:

$$\frac{\bar{s}_{tk}}{\alpha} = dp \cdot \frac{\bar{W}_j - \bar{W}_i}{l_k} + \frac{1}{2} [c_k (\beta_{xi} + \beta_{xj}) + s_k (\beta_{yi} + \beta_{yj})] + \frac{2}{3} \Delta \beta_k$$

sens trigonométrique $dp=+1$.

DERIVATION DES DIFFERENTES MATRICES

A partir des équations (3-1a), (3-1b) et (3-9), on a les relations suivantes:

$$\left\{ \beta \right\} = \left\{ \begin{matrix} \beta_x \\ \beta_y \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} \sum_{i=1}^3 L_i \bar{\beta}_{xi} + \sum_{i=1}^3 4L_i L_j \Delta \bar{\beta}_k \\ \sum_{i=1}^3 L_i \bar{\beta}_{yi} + \sum_{i=1}^3 4L_i L_j \Delta \bar{\beta}_k \end{matrix} \right] \quad (C-1a)$$

$$= \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 & 4L_2L_3 & 4L_1L_3 & 4L_1L_2 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 4L_2L_3 & 4L_1L_3 & 4L_1L_2 \end{bmatrix} \left\{ \bar{\beta} \right\}$$

Où:

$$\begin{aligned} (\bar{\beta})^T &= (\beta_{x1}, \beta_{y1}, \beta_{x2}, \beta_{y2}, \beta_{x3}, \beta_{y3}, \Delta\beta_1, \Delta\beta_2, \Delta\beta_3) \\ (\beta) &= [N_\beta] (\bar{\beta}) \end{aligned} \quad (C-1-b)$$

On peut maintenant calculer la matrice [B_r]:

$$[B_r] = [L] [N_\beta] \quad (C-2a)$$

Où [L]: opérateur de dérivation donné par l'équation (2-5).
Ainsi [B_r] sera de la forme :

$$[B_r]_{3 \times 9} = \begin{bmatrix} j_{11}L_{i,r} + j_{12}L_{i,s} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & j_{21}L_{i,s} + j_{22}L_{i,t} & i=1,2,3 & \dots & \dots \\ j_{21}L_{i,s} + j_{22}L_{i,t} & (j_{11}L_{i,s} + j_{12}L_{i,t}) & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (C-2b)$$

$$\begin{bmatrix} j_{11}(4L_iL_jC_k)_{,r} + j_{12}(4L_iL_jC_k)_{,s} \\ j_{21}(4L_iL_jS_k)_{,r} + j_{22}(4L_iL_jS_k)_{,s} \\ j_{21}(4L_iL_jC_k)_{,r} + j_{22}(4L_iL_jC_k)_{,s} \\ + j_{11}(4L_iL_jS_k)_{,r} + j_{12}(4L_iL_jS_k)_{,s} \end{bmatrix}$$

pour les trois dernières colonnes :

$$\begin{aligned} i &= 2, 3, 1 \\ j &= i-(i/3)3+1 \\ k &= j-(j/3)3+1 \end{aligned}$$

D'après les équations (3-4), (3-6) on a :

$$S_x = \sum_{i=1}^3 L_i \bar{S}_x^i \quad (C-3a)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^3 L_i \bar{S}_y^i$$

Ainsi $[N_e]$ est défini par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_{x1} \\ S_{x2} \\ S_{x3} \\ S_{y1} \\ S_{y2} \\ S_{y3} \end{pmatrix} \\ &= [N_e] \begin{pmatrix} S_{x1} \\ S_{x2} \\ S_{x3} \\ S_{y1} \\ S_{y2} \\ S_{y3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (C-3b)$$

D'autre part; d'après l'équation (3-5) on a :

$$\begin{aligned}\frac{\bar{S}_{t1}}{\alpha} &= dP_1 \cdot \frac{\bar{W}_3 - \bar{W}_2}{L_1} + \frac{1}{2} [C_1 \bar{\beta}_{x2} + S_1 \bar{\beta}_{y2} + C_1 \bar{\beta}_{x3} + S_1 \bar{\beta}_{y3}] + \frac{2}{3} \Delta \bar{\beta}_1 \\ \frac{\bar{S}_{t2}}{\alpha} &= dP_2 \cdot \frac{\bar{W}_1 - \bar{W}_3}{L_2} + \frac{1}{2} [C_2 \bar{\beta}_{x1} + S_2 \bar{\beta}_{y2} + C_2 \bar{\beta}_{x3} + S_2 \bar{\beta}_{y3}] + \frac{2}{3} \Delta \bar{\beta}_2 \\ \frac{\bar{S}_{t3}}{\alpha} &= dP_3 \cdot \frac{\bar{W}_2 - \bar{W}_1}{L_3} + \frac{1}{2} [C_3 \bar{\beta}_{x1} + S_3 \bar{\beta}_{y1} + C_3 \bar{\beta}_{x2} + S_3 \bar{\beta}_{y2}] + \frac{2}{3} \Delta \bar{\beta}_3\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_{t1} \\ \bar{S}_{t2} \\ \bar{S}_{t3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{C_1}{2} & \frac{S_1}{2} & \frac{C_1}{2} & \frac{S_1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{C_2}{2} & \frac{S_2}{2} & 0 & 0 & \frac{C_2}{2} & \frac{S_2}{2} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{C_3}{2} & \frac{S_3}{2} & \frac{C_3}{2} & \frac{S_3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{dP_1}{L_1} & \frac{dP_2}{L_1} \\ \frac{dP_2}{L_2} & 0 & -\frac{dP_3}{L_2} \\ -\frac{dP_3}{L_3} & \frac{dP_3}{L_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{W} \end{Bmatrix}$$

(C-4a)

on note;

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_{t1} \\ \bar{S}_{t2} \\ \bar{S}_{t3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} MB \\ MB \\ MB \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} MB \\ MB \\ MB \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{W} \end{Bmatrix} \quad (C-4b)$$

où :

$$\{\bar{\beta}\}^T = (\beta_{x1}, \beta_{x2}, \beta_{x3}, \beta_{y1}, \beta_{y2}, \beta_{y3}, \Delta\beta_1, \Delta\beta_2, \Delta\beta_3)$$

$$\{\bar{W}\}^T = (W_1, W_2, W_3)$$

de plus d'après l'équation (B-1), on a :

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_{x1} \\ \bar{S}_{y1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta_1} \begin{bmatrix} -S_k & S_j \\ C_k & -C_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{tk} \\ \bar{S}_{tj} \end{Bmatrix} \quad (\text{C-5a})$$

$$\text{Avec } \Delta_1 = C_k S_j - S_k C_j$$

On trouve :

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_{x1} \\ \bar{S}_{x2} \\ \bar{S}_{x3} \\ \bar{S}_{y1} \\ \bar{S}_{y2} \\ \bar{S}_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{S_3}{\Delta_1} & -\frac{S_1}{\Delta_1} \\ -\frac{S_3}{\Delta_2} & 0 & -\frac{S_1}{\Delta_2} \\ \frac{S_2}{\Delta_3} & -\frac{S_1}{\Delta_3} & 0 \\ 0 & -\frac{C_3}{\Delta_1} & \frac{C_2}{\Delta_1} \\ \frac{C_3}{\Delta_2} & 0 & -\frac{C_1}{\Delta_2} \\ -\frac{C_2}{\Delta_3} & \frac{C_1}{\Delta_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{t1} \\ \bar{S}_{t2} \\ \bar{S}_{t3} \end{Bmatrix} \quad (\text{C-5b})$$

$$= \begin{bmatrix} M_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_{t1} \\ \bar{S}_{t2} \\ \bar{S}_{t3} \end{Bmatrix}$$

Donc ;

$$[Q_M] = [M_S] [M_W] \quad (\text{C-6a})$$

$$\text{Ainsi } [B_{fc}] = [N_s] [Q_p]$$

tel que les $B_{fc}(i,j)$ sont donnés par

$$B_{fc}(1, l) = \frac{1}{2} \left(\frac{L_j}{\Delta_j} c_k s_k - \frac{L_k}{\Delta_k} c_j s_j + L_l \right)$$

$$B_{fc}(2, l) = \frac{1}{2} \left(\frac{L_k}{\Delta_k} c_i c_j - \frac{L_j}{\Delta_j} c_i c_j \right)$$

$$B_{fc}(1, m) = \frac{1}{2} \left(\frac{L_j}{\Delta_j} s_i s_k - \frac{L_k}{\Delta_k} s_i s_j \right)$$

$$B_{fc}(2, m) = \frac{1}{2} \left(L_l - \frac{L_j}{\Delta_j} c_i s_k + \frac{L_k}{\Delta_k} c_i c_j \right)$$

C-6b)

$$B_{fc}(1, n) = \frac{2}{3} \left(\frac{L_k}{\Delta_k} s_k - \frac{L_j}{\Delta_j} s_k \right)$$

$$B_{fc}(2, n) = \frac{2}{3} \left(\frac{L_j}{\Delta_j} c_k - \frac{L_k}{\Delta_k} s_j \right)$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } i &= 1, 3 & ; l &= 2.i - 1 \\ j &= i - (i/3) \cdot 3 + 1 & ; m &= 2.i \\ k &= j - (j/3) \cdot 3 + 1 & ; n &= i + 6 \end{aligned}$$

Ainsi pour $[B_c]$;

$$[B_c] = [N_e] [Q_c]$$

tel que les $B_c(i,j)$ sont donnés par :

$$B_c(1, i) = \frac{L_i}{\Delta_i} \left(\frac{dP_i}{l_j} s_k + \frac{dP_k}{l_k} s_j \right) - s_i \frac{dP_j}{l_j} \frac{L_k}{\Delta_k} - \frac{dP_k}{l_k} \frac{L_j}{\Delta_j} s_j$$

C-6c)

$$B_c(2, i) = \frac{L_i}{\Delta_i} \left(-\frac{dP_i}{l_i} c_k - \frac{dP_k}{l_k} c_j \right) + \frac{dP_j}{l_j} \frac{L_k}{\Delta_k} c_i + \frac{dP_k}{l_k} \frac{L_j}{\Delta_j} c_i$$

LE CODE "DLEARN"

Le code "DLEARN" est d'un style pédagogique, destiné aux calculs des structures (statiques et dynamiques). Sa bibliothèque contient seulement deux éléments:

- TRUSS un élément barre dans l'espace et 3ddl par noeud.
- QUAD un élément quadratique à 4 noeuds et 2ddl par noeud.

Afin d'enrichir sa bibliothèque, nous avons inséré l'élément "DRM" sous forme de plusieurs sous-routines, selon les tâches "tasks", (SDRENT1, SDRMT2, SDRMT3, SDRMT5) qui sont appelés par SDRMS. La structure de ces sous-routines est faite de la façon que ceux des éléments QUAD et TRUSS, afin de pouvoir utiliser un même fichier de données et permettant le calcul statique et dynamique des structures en flexion. Concernant à SDRMT4 qui normalement fait le calcul des contraintes, nous l'avons éliminé car les contraintes de flexion sont proportionnelles à la coordonnée transversale (z) qui sont nulles dans le plan médian (pour $z=0$).

La difficulté rencontrée dans l'implantation de cet élément, réside dans la non-homogénéité des noeuds, trois ddl dans chaque noeud de sommet, et un seul ddl dans les noeuds médians. Ce qui nous a obligé de deviser chaque vecteur afin d'économiser l'espace mémoire (par exemple: vecteur déplacement '(d,d1)', vecteur vitesse '(v,v1)', vecteur des conditions aux limites '(ID, ID1)'... etc).

La réservation de l'espace mémoire (allocation) de ces vecteurs secondaires, se fait seulement dans le cas du "DRM" et d'une façon similaire que pour les vecteurs primaires, pour cela, deux fonctions IFUNCT1, IFUNCT2 ont été introduites pour identifier les vecteurs dans une sous-routine donnée. Heureusement aussi, cette technique n'a pas influé sur le caractère du vecteur de coordination "LM", qui est dimensionné pour chaque élément comme suit; LM(3,4), la dernière colonne regroupe les ddl des noeuds intermédiaires, ainsi, le vecteur IDIAG, la procédure d'assemblage et de résolution restent exactement les mêmes.

Nous avons ajouté à ce code le calcul de l'énergie de déformation, à partir du vecteur charge et vecteur déplacement qui peut être utilisée aussi pour les autres éléments TRUSS et QUAD.

La sous-routine SDRMT4, fait le calcul des moments de flexion et des efforts de cisaillement pour cela, il faut définir l'élément et le point d'intégration (parmi les 7 points).

Utilisateur de DLEARN:

Le fichier données est gardé presque comme il est dans [3] (partie du DLEARN, 'Users DLEARN'), à part quelques changements qui dans le cas statique sont comme suit:

- 1- Dans 'CONTROL Card', il faut ajouter dans une deuxième ligne en gardant la même format d'écriture;
 - * nvertx: nbre de noeuds de sommets (I5)
 - * ienerg: 1 calculer l'énergie, 0 non.
- 2- Les conditions aux limites:

Pour décrire 'ID1' des noeuds intermédiaires, il faut procéder de la même façon que 'ID', seulement ici on a un seul ddl.

On note que, s'il n'y a pas de conditions aux limites sur les noeuds médians, il faut laisser un blanc ce qui permet le passage à la lecture de ce qui reste de données.
- 3- Il ne faut pas appliquer des charges sur les noeuds médians, car, même physiquement elles n'ont pas de sens contre des rotations hiérarchiques.
- 4- La structure de la carte des matériaux est comme suit:
 - ntype: pour l'élément "DRM" = 3
 - nelem: nombre d'éléments.
 - ng : nbre de groupe de matériaux.
 - nsurf: nbre de charge surfacique (uniforme), si toute la structure est chargée uniformément, nsurf = 1.
- 5- Les propriétés matériels de la structure doivent être introduites comme précédemment.
- 6- Génération des éléments:

Le sens de rotation spécifié Fig(D-1) de l'élément "DRM" nous impose d'utiliser des techniques un peut spéciales, afin d'aboutir à une génération correcte. Nous montrons par exemple, un cas d'une plaque carrée décritisée en un maillage de type (A). Fig (D-2), pour avoir des incréments INC et INCEL, constants dans les deux directions (D1) et (D2), on devise la discrétisation en deux, une d'elle est hachurée (I) et l'autre (II). Si on prend les éléments (1) et (2) comme éléments de références, les incréments pour (I) et (II) sont:

	D1		D2	
	INC	INCEL	INC	INCEL
I	2	2	10	4
II	2	2	10	4

Tableau D-1: Incréments

7- Les charges surfaciques:

Les données numel et Disl sont introduites pour chaque élément chargé.

numel: numéro de l'élément chargé (I5)

Disl : la charge q (F10.0)

Si toute la structure est chargée, on met seulement une fois avec numel= 0, et la valeur de (q). voir fichier de données

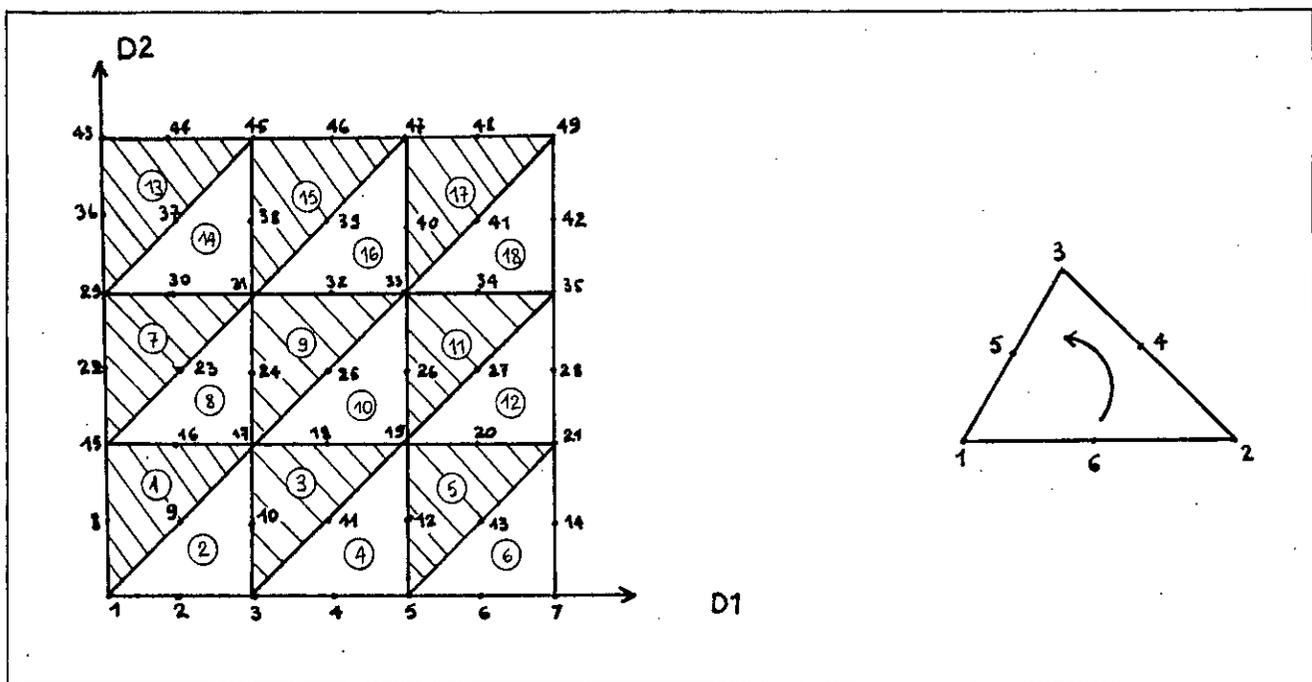
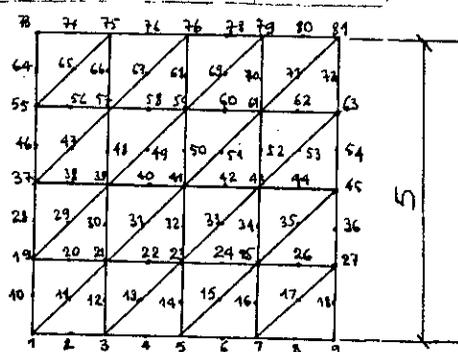


Fig D-1: Plaque carrée 3*3

On donne à titre d'exemple, un fichier de données d'une plaque carrée modélisée en (4*4), de type (A), chargée uniformément et simplement supportée.

La discrétisation est comme suit:



0														
" DRM " : plaque charge uniformement 4*4														
1	1	0	0	0	0	1	0	2	81	3	0	0	0	1
25	1													
1	1	1	1	0	1	0.0	0.0	0.0	1.0					
1	4	0.	0.											
9	0	5.	0.											
81	0	5.	5.											
73	0	0.	5.											
4	2	4	18	0	0									
1	0	0	1	0	0									
3	7	2	1	0	0									
9	0	0	1	1	0									
19	55	18	1	0	0									
73	0	0	1	0	1									
27	63	18	0	1	0									
75	79	2	0	0	1									
81	0	0	0	1	1									
3	32	1	1	0	0	0	0	3	0	0				
1		10.92		.30	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10					
1	1	1	21	19	20	10	11	1						
4	2	2	4	8	18									
2	1	1	3	21	12	11	2	1						
4	2	2	4	8	18									
0	1.000	} Distributed load												
*end														

Tableau D-2: Fichier de données

FICHER DE RESULTATS

displacements

step number = 1

time = 1.000E+00

node no.	dof1	dof2	dof3
3	0.00000000E+00	0.00000000E+00	-5.43383745E+03
5	0.00000000E+00	0.00000000E+00	-9.73976855E+03
7	0.00000000E+00	0.00000000E+00	-1.24169845E+04
9	0.00000000E+00	0.00000000E+00	-1.33211536E+04
19	0.00000000E+00	-5.43383745E+03	0.00000000E+00
21	6.57401121E+03	-4.89339174E+03	-4.89339174E+03
23	1.18148624E+04	-3.57068023E+03	-8.75861861E+03
25	1.51073627E+04	-1.91006709E+03	-1.12062424E+04
27	1.61527344E+04	0.00000000E+00	-1.19984903E+04
37	0.00000000E+00	-9.73976855E+03	0.00000000E+00
39	1.18148624E+04	-8.75861861E+03	-3.57068023E+03
41	2.13413583E+04	-6.36228773E+03	-6.36228773E+03
43	2.73631821E+04	-3.31598477E+03	-8.15197925E+03
45	2.93494397E+04	0.00000000E+00	-8.78102370E+03
55	0.00000000E+00	-1.24169845E+04	0.00000000E+00
57	1.51073627E+04	-1.12062424E+04	-1.91006709E+03
59	2.73631821E+04	-8.15197925E+03	-3.31598477E+03
61	3.51602818E+04	-4.25032665E+03	-4.25032665E+03
63	3.77892520E+04	0.00000000E+00	-4.57378489E+03
73	0.00000000E+00	-1.33211536E+04	0.00000000E+00
75	1.61527344E+04	-1.19984903E+04	0.00000000E+00
77	2.93494397E+04	-8.78102370E+03	0.00000000E+00
79	3.77892520E+04	-4.57378489E+03	0.00000000E+00
81	4.06708974E+04	0.00000000E+00	0.00000000E+00

displacements "midside"

step number = 1

time = 1.000E+00

node no.	dof1	dof2	dof3	dof4	dof5	dof6	
11	-3.83775077E+02	30	6.32622031E+01	49	-5.67382563E+02	68	1.05835902E+02
12	-1.37005168E+02	31	-5.86543273E+02	50	3.68723039E+01	69	-3.36246747E+02
13	-5.98466935E+02	32	-8.40135124E+01	51	-4.65011523E+02	70	3.51874849E+01
14	-2.93915518E+02	33	-5.67382563E+02	52	-4.98542529E+01	71	-1.66269865E+02
15	-6.90042927E+02	34	-1.79870017E+02	53	-3.36246747E+02	72	-2.49077322E+01
16	-3.98968481E+02	35	-4.67320600E+02	54	-1.05858305E+02	74	-3.82660724E+02
17	-7.49353445E+02	36	-2.41739212E+02	56	-3.98968481E+02	76	-2.41739212E+02
18	-3.82660724E+02	38	-2.93915518E+02	58	-1.79870017E+02	78	-1.05858305E+02
20	-1.37005168E+02	40	-8.40135124E+01	60	-4.98542529E+01	80	-2.49077322E+01
22	6.32622031E+01	42	3.68723039E+01	62	3.51874849E+01		
24	1.62266446E+02	44	1.05835902E+02	65	-7.49353445E+02		
26	1.80484060E+02	47	-6.90042927E+02	66	1.80484060E+02		
29	-5.98466935E+02	48	1.62266446E+02	67	-4.67320600E+02		

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.L.BATOZ G.DHATT.
"Modélisation des structures par éléments finis"
Compiègne 1990 vol 1 & 2
- [2] G. DHATT G. TOUZOUT.
"Une presentation de la méthode des éléments finis"
2^{ème} édition Compiègne 1981 vol 1 & 2
- [3] T.J.R HUGHES.
"The finite element method. Linear static and dynamique
finite element analysis"
1^{ère} Edition Printice-Hal. Inc 1987
- [4] S. TIMOSHENKO.
"Théorie des plaques et coques"
- [5] O.C.ZIENKIEWICZ R.L.TAYLOR.
"La méthode des éléments finis. Formulation de base et
problèmes linéaires" Mc.Graw Hill 1 & 2 1991
- [6] K.J.BATHE et WILSON
"Numerical mathodes in finite element analysis"
Prentice-Hall 1976
- [7] O.C.ZIENKIWICZ R.L.TAYLOR.
"Plate bending element with discrete constraints:
new triangular elements"
Computers & Structures Vol 35 N°4 pp 506-522 1990
- [8] J.L.BATOZ.
"A study of three node triangular plate bending elements"
Inter. Jour. Num. Meth. Eng. Vol 21 pp 367-383 1985
- J.L.BATOZ - BEN TAHAR
"Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending
element"
Inter. Jour. Num. Meth. Eng. Vol 18 pp 1655-1677 1982

- [9] M.M.HRABOK et T.M.HRUDEY
"A review and catalogue of plate bending finite elements"
Computers & Structures Vol 19 N°3 pp 479-495 1984
- [10] R.L.TAYLOR et O.C. ZEINKIEWICZ
"The patch-test a condition for assessing F.E.M
convergence"
Inter. Jour. Num. Meth. Eng. Vol 22 pp 39-62 1986
- [11] I.BABUSKA et T.SCAPOLLA
"Benchmark computation and performance evaluation for a
rhombic plate bending problem". 1989
Inter. Jour. Num. Meth. Eng. Vol 27 pp 155-179 1989
- [12] F.BELBLIDIA - K.REDJDAL.
"Formulation de l'élément de flexion DKT"
PFE ENP Mécanique juin 1992
- [13] F.BELBLIDIA - A.OUYED - F.BAIRI
"Analyse dynamique des structures par la M.E.F"
PFE ENP Mécanique juin 1993
- F.BELBLIDIA - M.ZEKKOUR
"Comparative study of eigenvalue method: Subspace and
Lanczos" 4th I M M S Tlemcen Algiers 1993