

وزارة التعليم العالي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

2er

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

SOLLICITATIONS PLANES & FLEXIONNELLES
Avec TENTATIVES AUX VIBRATIONS
DES PLAQUES EN MATERIAUX COMPOSITES

Proposé par :

M^r Saïd RECHAK

Etudié par :

M^{ed} Réda ADIMI

Dirigé par :

M^r Saïd RECHAK

PROMOTION : Juin 1989.

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT *de* **GENIE MECANIQUE**

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

*Sollicitations Planes & Flexionnelles
avec tentative aux vibrations
des Plaques en Matériaux Composites*

Proposé par :
M^e Saïd RECHAK

Etudié par :
M^e Réda ADIMI

Dirigé par :
M^e Saïd RECHAK

PROMOTION : *Juin 1989*

Ministère de l'Enseignement supérieur
École Nationale Polytechnique
Département de Génie Mécanique
Promoteur : M^r Saïd RECHAK
Élève Ingénieur : M^{ed} Réda Adimi

وزارة التعليم العالي
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
داخلة الهندسة الميكانيكية
المشرف: السيد سعيد رشاق
الطالب مهندس : محمد رضا عظيمي

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

الموضوع : تأثيرات القوى السطحية والجانبيه مع محاوله لدراسة أنواع الإهتزازات
المؤثرة على (صفائح المكونة من المواد المركبة، غير المتجانسة

تأخير: تهدف هذه الدراسة إلى إجراء برامج معلوماتية، قصد تحديد
التغيرات التي تطرأ على صفائح غير معدنية، مكونة من مواد
غير متجانسة، مع محاولة لتحديد أنواع الإهتزازات (المؤثرة عليها

Sujet: Sollicitations planes et flexionnelles avec tentative
aux vibrations des plaques en Matériaux composites.

Résumé: Cette étude consiste à élaborer des programmes
de Calculs des déplacements, rotations, contraintes et modes
de vibrations des plaques en Matériaux composites, par
la méthode des Éléments finis.

Subject: In plane, flexural deformation and a tentative to vibrations
of Plates of composites materials.

Abstract: This study deals on the elaboration of programs to
calculate: Displacements, Deflexions, rotations, stresses and
vibration's modes of Material Composites plates by the
finite elements methode.

REMERCIEMENTS

A l'issue de cette étude, je tiens à remercier vivement mon promoteur M^{er} RECHAK Said ainsi que tout les enseignants qui ont contribué à ma formation .

Mes remerciements vont également à:

Mes Parents,

Mon Frère Bourhane Eddine,

Mon Ami Samy

Et Que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

S O M M A I R E

	Page
CHAPITRE 1	
INTRODUCTION	1
LES NOUVEAUX MATERIAUX	
LES MATERIAUX COMPOSITES.	
Quelques Exemples:	
CHAPITRE 2	
CONTRAINTES, DEFORMATIONS ET STRATIFICATIONS	
2.1 INTRODUCTION	4
2.2 RELATIONS DE TRANSFORMATIONS	4
2.3 LOI DE HOOKE GENERALISEE	10
2.3-1 MATERIAUX ISOTROPES	
2.3-2 MATERIAUX ANISOTROPES	
2.3-2 a DANS LES AXES D'ORTHOTROPIES	
2.3-2 b HORS AXES D'ORTHOTROPIES	
2.4 STRATIFICATION	15
2.4-1 THEORIE ELASTIQUE DU STRATIFIE	
2.4-2 RELATION ENTRE DEPLACEMENTS ET DEFORMATIONS	
2.5 EFFORTS IET MOMENTS RESULTANTS	19
2.6 RELATIONS CONSTITUTIVES D'UN STRATIFIE	21
2.6-1 LES EFFORTS RESULTANTS	
2.6-2 LES MOMENTS RESULTANTS	
2.6-3 RELATIONS USUELLES	
2.7 CAS PARTICULIERS	25
2.7-1 STRATIFIES SYMETRIQUES	
a/STRATIFIES EQUILIBRES	
b/STRATIFIES NON-EQUILIBRES	
2.7-2 STRATIFIES ANTI-SYMETRIQUES	
2.7-3 STRATIFIES NON-SYMETRIQUES	
2.7-4 TABLEAU RECAPITULATIF	
2.8 SIMPLIFICATION DUE A LA SYMETRIE PAIR-RAPPORT AU PLAN MEDIAN	27

CHAPITRE 3

SOLLICITATIONS PLANES DES PLAQUES EN MATERIAUX COMPOSITES

3.1	INTRODUCTION	28
3.2	ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE L'ELASTICITE PLANE	28
3.3	ENERGIE DE DEFORMATION	28
3.4	ELEMENTS TRIANGULAIRES A HUIT (8) DEGRES DE LIBERTES	29
3.4-1	FONCTIONS DE DEPLACEMENTS	
3.4-2	RELATIONS CONTRAINTES-DEPLACEMENTS	
3.4-3	DERIVATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE	
3.5	ELEMENTS TRIANGULAIRES A SIX (6) DEGRES DE LIBERTES	33
3.5-1	FONCTIONS DE DEPLACEMENTS	
3.5-2	RELATIONS CONTRAINTES-DEPLACEMENTS	
3.5-3	DERIVATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE	
3.5	APPLICATIONS AUX MATERIAUX COMPOSITES	35
3.6	ASSEMBLAGE DE LA MATRICE DE RIGIDITE GLOBALE ET VECTEUR FORCES GLOBAL	37
3.6-1	UTILISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES	
3.6-2	RESOLUTION	
3.6-2 a	DETERMINATION DES DEPLACEMENTS	
3.6-2 b	DETERMINATION DES CONTRAINTES	
3.7	EXEMPLES D'APPLICATIONS	40
1 ^{er}	cas : MATERIAUX ISOTROPES	
2 ^{eme}	cas : MATERIAUX ANISOTROPES	

CHAPITRE 4

FLEXION DES PLAQUES EN MATERIAUX COMPOSITES

4.1	INTRODUCTION	45
4.2	CONSIDERATIONS GENERALES	45
4.3	ELEMENTS TRIANGULAIRES A NEUF (9) DEGRES DE LIBERTE.	48
4.3-1	FONCTION DE DEPLACEMENTS	
4.3-2	RELATIONS DEPLACEMENTS-DEFORMATIONS	
4.3-3	DERIVATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE	
4.3-4	DERIVATION DU VECTEUR FORCES ELEMENTAIRES	

4.4	ELEMENTS RECTANGULAIRES A DOUZE (12) DEGRES DE LIBERTIES	54
4.4-1	FONCTION DE DEPLACEMENTS	
4.4-2	RELATIONS DEPLACEMENTS-DEFORMATIONS	
4.4-3	DERIVATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE	
4.4-4	DERIVATION DU VECTEUR FORCES ELEMENTAIRE	
4.5	APPLICATION AUX MATERIAUX COMPOSITES	57
4.6	ASSEMBLAGE DE LA MATRICE DE RIGIDITE GLOBALE ET DU VECTEUR FORCES GLOBAL	58
4.6-1	UTILISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES	
4.6-2	RESOLUTION	
4.7	EXEMPLES D'APPLICATIONS	60
1 ^{er}	cas : MATERIAUX ISOTROPES	
2 ^{eme}	cas : MATERIAUX ANISOTROPES	

CHAPITRE 5

VIBRATIONS DES PLAQUES EN MATERIAUX COMPOSITES

5.1	INTRODUCTION	65
5.2	EXPRESSION DE L'ENERGIE CINETIQUE	65
5.3	EQUATION DE MOUVEMENT -EQUATION DE LAGRANGE-	66
5.4	DERIVATION DE LA MATRICE MASSE	68
5.5	APPLICATION AUX MATERIAUX COMPOSITES	68
5.6	ASSEMBLAGE DE LA MATRICE MASSE GLOBALE	68
5.6-1	UTILISATION DES CONDITION AUX LIMITES	
5.6-2	RESOLUTION	
5.7	EXEMPLES D'APPLICATIONS	70
1 ^{er}	cas : MATERIAUX ISOTROPES	
2 ^{eme}	cas : MATERIAUX ANISOTROPES	

CHAPITRE 6

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

ANNEXE 1 : METHODES DE RESOLUTIONS NUMERIQUES.

ANNEXE 2 : ORGANIGRAMMES.

INTRODUCTION

Depuis une décennie l'industrie des matériaux est en pleine mutation. Les variations, importantes, du coût des matières premières ont conduit à intensifier les recherches.

Découvrir des matériaux nouveaux, améliorer ceux déjà connus conditionnent le progrès de certains programmes scientifiques et industriels. L'exploration de la mer, de l'espace, a confronté l'homme à des contraintes nouvelles jusqu'alors inconnues.

Aussi, les applications sont-elles vastes, et les formations variées.

La science des matériaux concerne de très nombreux secteurs industriels, depuis l'électricité, l'équipement électroménager, le bâtiment, le sport, l'automobile, jusqu'aux grands programmes comme le spatial ou le nucléaire...

LES NOUVEAUX MATERIAUX

Aujourd'hui, l'industrie utilise plusieurs types de matériaux : Les métaux, les matières plastiques, les céramiques et les composites.

Chaque produit a ses applications selon ses qualités propres : Résistance à la chaleur (ou au froid), à la corrosion (attaque des agents chimiques), résistance à certaines pressions, tractions...

LES MATERIAUX COMPOSITES.

Selon certains avis, les matériaux composites sont amenés à connaître un développement important et même privilégié dans les années qui viennent dûe à leurs propriétés qui peuvent être resumées par leur légèreté, bonne tenue à la fatigue, insensibilité aux produits chimiques, absence de corrosion,...

Qu'est ce qu'un matériau composite?

C'est un ensemble réunissant plusieurs éléments de base; en général deux (2), mais des recherches sont engagées sur des matériaux composites à trois (3) éléments.

Faisons un parallèle avec le béton armé, qu'on connaît tous, c'est du béton dans lequel on a « fait baigner » (avant qu'il ne se solidifie) de grandes tiges de fer. Une fois « pris », les

tiges sont prisonnières du béton, le nouveau produit, plus solide, possède des qualités supérieures à celles de chacun des deux premiers éléments.

La mise au point de ce matériau a permis des constructions plus audacieuses, de formes nouvelles tout à fait irréalisables auparavant. Le principe est le même pour les matériaux composites. Les fibres de verre, de carbone, ... comme les tiges de fer, vont baigner dans une matrice qui peut être un produit naturel comme le caoutchouc, une céramique, un métal comme l'aluminium ou des matières plastique comme les résines synthétiques (elles portent ce nom car leur consistance homogène et souple rappelle la résine des arbres) mais tout cela se passe à l'échelle microscopique; dans la matrice, les fibres sont si fines (\varnothing 5 à 15 μ m) qu'en on compte cent (100) ou mille (1000) par millimètre carré. Très courtes ou longues, les fibres sont disposés de manières différentes dans la matrice. Dans certain cas, on « empilera » les couches; on aura alors des composites lamifiés, d'autres combinaisons sont possibles.

Des industries variées sont concernées par les matériaux composites. Leur légèreté leur donne en particulier une place de choix dans l'espace et l'aéronautique.

Quelques Exemples:

Au début de l'histoire de l'aviation, nous ne connaissions pas encore les moteurs puissants permettant d'élever dans les airs plusieurs centaines de tonnes. Pour décoller et voler, les avions devaient être le plus léger possible. Aussi étaient-ils faits de structures de bois, sur lesquelles on tendait de la toile encollée. C'était léger mais fragile et inflammable. Aujourd'hui, on fait décoller n'importe quel engin quel que soit son poids. Pour diverses raisons, en particulier économiques, la légèreté: Sur certains mirages, et d'autres avions militaires, les freins à disques sont maintenant en matériaux composites (carbone-carbone); cela se développe aussi sur les avions de ligne. Les nouveaux freins à disque coûtent trois (3) fois plus cher que les freins traditionnels, alors quel est l'avantage de cette utilisation sachant qu'ils durent trois (3) fois plus longtemps. Mais pourquoi utiliser un matériau nouveau pour en arriver à un même résultat ? La réponse est simple : Cela entraîne sur Airbûs (le A310) une réduction de poids de 500kgs. En conséquence, l'avion, beaucoup

plus léger, dépense moins de carburant, d'où une économie permanente

Enfin pour conclure cette introduction, notre soucis est d'étudier les effets des différents modes de sollicitations sur des structures en matériaux composites tout en les comparant aux résultats trouvés pour les structures en matériaux ordinaires; pour cela on utilise la méthode des éléments finis qui nous permet la détermination des contraintes dans chaque région de la structure, les déplacements et les modes de vibrations de chaque noeud.

CHAPITRE 2

CONTRAINTES , DEFORMATIONS ET STRATIFICATIONS

2.1 INTRODUCTION

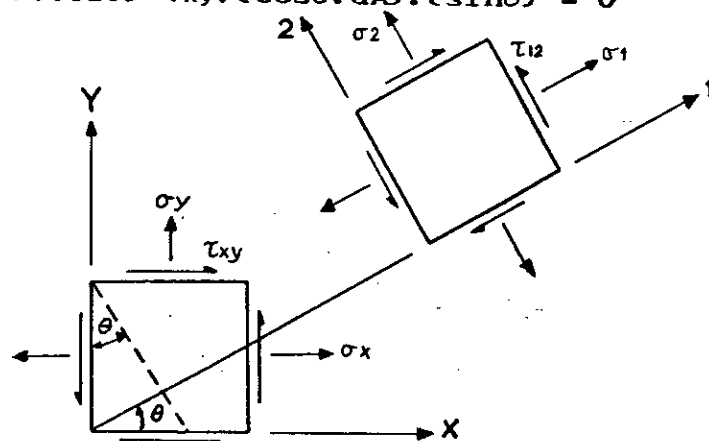
Dans ce chapitre on développera les principes des contraintes et déformations pour des plaques individuelles ou plis de stratifiés. Cette étude sera généralisée pour les plaques en matériaux isotropes, orthotropes ou anisotropes. Le développement au premier lieu sera avec les concepts généraux des contraintes et déformations, par application de la loi de Hooke généralisée; on procédera par la suite aux lois mécaniques spécifiques aux stratifiés.

2.2 RELATIONS DE TRANSFORMATIONS

Etablissons l'équation d'équilibre d'un élément de surface A dans la direction (1), d'après la figure 2-1:

$$\sum F_i = 0$$

$$\sigma_1 \cdot dA - \sigma_x \cdot (\cos\theta \cdot dA) \cdot (\cos\theta) - \sigma_y \cdot (\sin\theta \cdot dA) \cdot (\sin\theta) - \tau_{xy} \cdot (\sin\theta \cdot dA) \cdot (\cos\theta) - \tau_{xy} \cdot (\cos\theta \cdot dA) \cdot (\sin\theta) = 0 \quad (2-1a)$$



Contraintes et Déformations

Figure 2-1

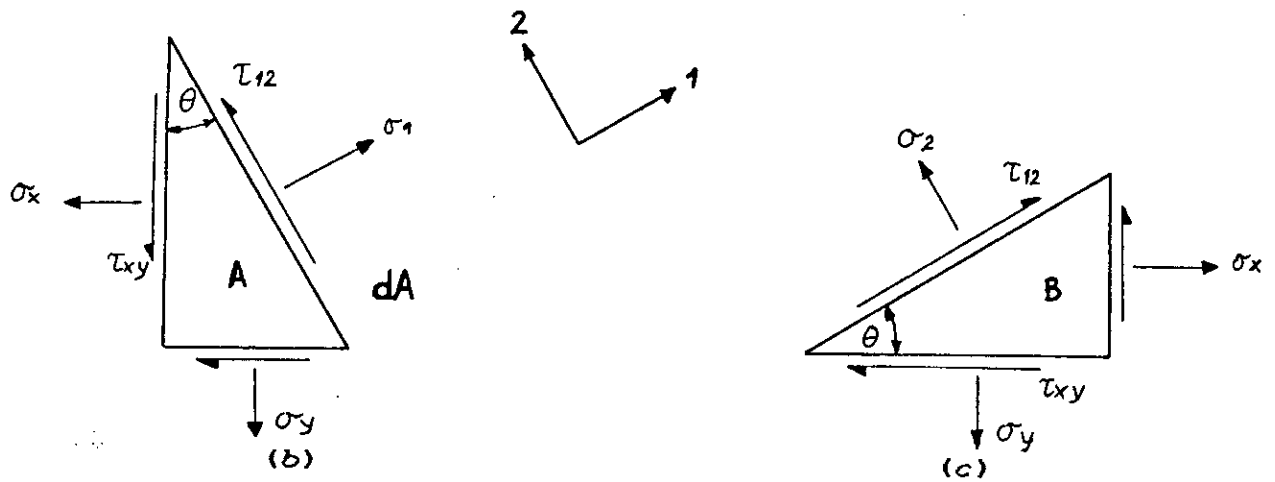


Figure 2-1

En arrangeant et simplifiant cette équation, une relation, entre la contrainte normale σ_1 et les composantes de contraintes prises par rapport au système de coordonnées X-Y, s'en découle :

$$\sigma_1 = \sigma_x(\cos^2 \theta) + \sigma_y(\sin^2 \theta) + \tau_{xy}(2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta) \quad (2-1b)$$

La sommation des forces agissant sur l'élément A dans la direction (2), nous donne la relation suivante :

$$\begin{aligned} & \tau_{12} \cdot dA + \sigma_x \cdot (\cos \theta \cdot dA) \cdot \sin \theta - \sigma_y \cdot (\sin \theta \cdot dA) \cdot \cos \theta \\ & - \tau_{xy} \cdot (\cos \theta \cdot dA) \cdot \cos \theta + \tau_{xy} \cdot (\sin \theta \cdot dA) \cdot \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (2-2a)$$

après arrangement et simplification on obtient:

$$\begin{aligned} \tau_{12} = & -\sigma_x \cdot (\sin \theta \cdot \cos \theta) + \sigma_y \cdot (\sin \theta \cdot \cos \theta) \\ & + \tau_{xy} \cdot (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (2-2b)$$

La sommation des forces suivant la direction (2) pour l'élément B :

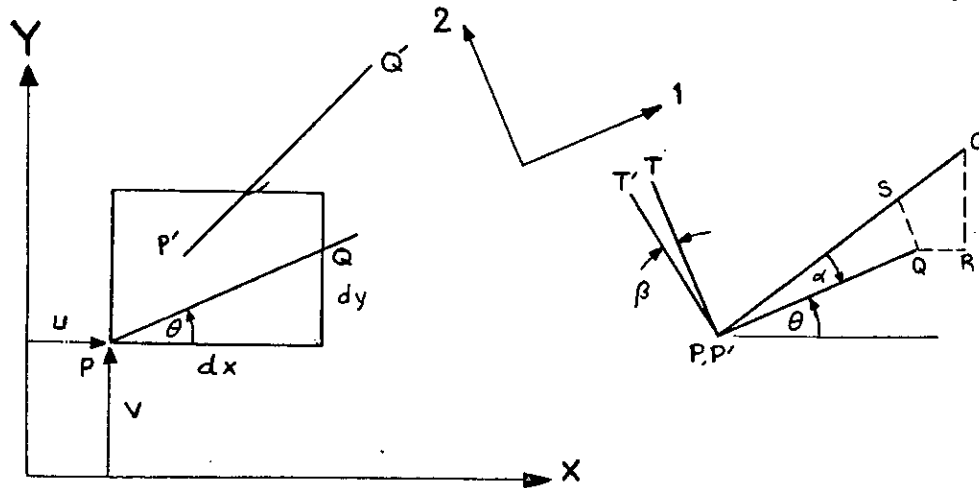
$$\begin{aligned} -\sigma_2 \cdot dA - \sigma_x \cdot (\sin \theta \cdot dA) \cdot \sin \theta + \tau_{xy} \cdot (\sin \theta \cdot dA) \cdot \cos \theta \\ + \tau_{xy} \cdot (\cos \theta \cdot dA) \cdot \sin \theta - \sigma_y \cdot (\cos \theta \cdot dA) \cdot \cos \theta = 0 \end{aligned} \quad (2-3a)$$

$$\sigma_2 = \sigma_x \cdot (\sin^2 \theta) + \sigma_y \cdot (\cos^2 \theta) - \tau_{xy} \cdot (2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta) \quad (2-3b)$$

La sommation des forces suivant la direction (1) sur l'élément B donne la même relation que pour l'élément A.

Quand les composantes de déformations ϵ_x, ϵ_y et γ_{xy} sont connus à un point, elles doivent être déterminées pour n'importe quelle autre orientation du système référentiel, ainsi on obtient la relation de transformation.

Le segment de droite PQ, de la figure 2-2 qui a une longueur infinitésimale, est détendu ou comprimé, tordu et translaté durant la déformation jusqu'à la position finale, P'Q'.



Déformations angulaires

Figure 2-2

Si la droite P'Q' est translaturée de façon à ce que le point P' coïncide avec le point P, alors, les déplacements relatifs du point Q par rapport au point P, après déformations, sont donnés par :

$$QR = (\Delta u / \Delta x) \cdot \Delta x + (\Delta u / \Delta y) \cdot \Delta y \quad (2-4a)$$

$$Q'R = (\Delta v / \Delta x) \cdot \Delta x + (\Delta v / \Delta y) \cdot \Delta y$$

Comme:

$$u = f(x, y)$$

$$v = g(x, y)$$

et le segment de droite PQ est infinitésimal (Δx et $\Delta y \rightarrow 0$), alors:

$$QR = (\partial u / \partial x) \cdot dx + (\partial u / \partial y) \cdot dy \quad (2-4b)$$

$$Q'R = (\partial v / \partial x) \cdot dx + (\partial v / \partial y) \cdot dy$$

Maintenant, dans le but de déterminer les déformations suivant le système d'axes 1-2, le déplacement relatif du point Q par rapport au point P doit être déterminé parallèlement et perpendiculairement au segment de droite PQ. De la petite trigonométrie, les déplacements relatifs peuvent être déterminés comme suit :

$$\begin{aligned} QS &= Q'R \cdot \cos\theta - QR \cdot \sin\theta \\ SQ' &= QR \cdot \cos\theta + Q'R \cdot \sin\theta \end{aligned} \quad (2-5)$$

Où, le petit angle α est négligé, en comparaison avec θ .

La déformation normale qui résulte dans la direction du segment de droite PQ est donnée par :

$$\epsilon_1 = SQ' / PQ \quad (2-6)$$

En substituant les équations (2-4b) et (2-5) dans (2-6) on obtient l'expression de la déformation normale suivant la direction (1) :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= ((\partial u / \partial x) \cdot (dx/ds) + (\partial u / \partial y) \cdot (dy/ds)) \cdot \cos\theta \\ &\quad + ((\partial v / \partial x) \cdot (dx/ds) + (\partial v / \partial y) \cdot (dy/ds)) \cdot \sin\theta \end{aligned} \quad (2-7a)$$

Ou bien :

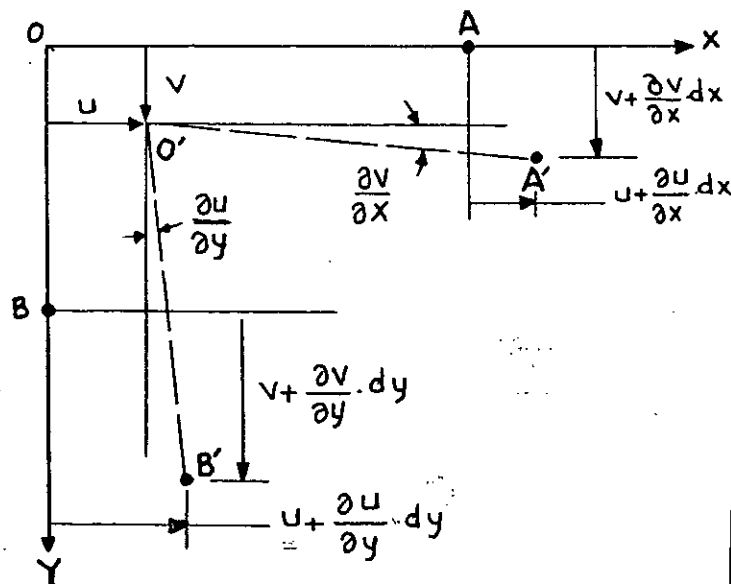
$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= (\partial u / \partial x) \cdot \cos^2\theta + (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \\ &\quad + (\partial v / \partial y) \cdot \sin^2\theta \end{aligned} \quad (2-7b)$$

En se référant à la figure 2-3 on voit que les expressions entre parenthèses sont les déformations normales et transversales en références aux axes X-Y.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= ((u + (\partial u / \partial x) \cdot dx) - u) / dx \\ \epsilon_x &= \partial u / \partial x \end{aligned} \quad (2-8a)$$

De façon similaire :

$$\epsilon_y = \partial v / \partial y \quad (2-8b)$$



Déformations planes

Figure 2-3

Comme la déformation transversale est le changement de l'angle droit AOB, alors :

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \quad (2-8c)$$

Alors l'équation (2-7) peut s'écrire sous la forme :

$$\epsilon_1 = \epsilon_x \cdot \cos^2 \theta + \epsilon_y \cdot \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \cdot (\sin \theta \cdot \cos \theta) \quad (2-9)$$

L'expression de la composante normale de déformation est obtenue en substituant θ par l'angle $\theta + 90^\circ$; ce qui donne :

$$\epsilon_2 = \epsilon_x \cdot \sin^2 \theta + \epsilon_y \cdot \cos^2 \theta - \gamma_{xy} \cdot (\sin \theta \cdot \cos \theta) \quad (2-10)$$

Pour déterminer la composante angulaire, le changement de l'angle droit entre PQ et PT doit être déterminé.

L'angle α avec lequel PQ est tordu -pour les petites déformations - est donné par :

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{longueur de l'arc} / \text{rayon de courbure} \\ \alpha &= QS / PQ \end{aligned} \quad (2-11)$$

En substituant (2-4) et (2-5) dans (2-11) on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha &= ((\partial v / \partial x) \cdot (dx / ds) + (\partial v / \partial y) \cdot (dy / ds)) \cdot \cos \theta \\ &\quad - ((\partial u / \partial x) \cdot (dx / ds) + (\partial u / \partial y) \cdot (dy / ds)) \cdot \sin \theta \end{aligned} \quad (2-12a)$$

Ou bien :

$$\begin{aligned} \alpha &= (\partial v / \partial x) \cdot \cos^2 \theta + (\partial v / \partial y - \partial u / \partial x) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \\ &\quad - (\partial u / \partial y) \cdot \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2-12b)$$

Pour la rotation du segment PT, elle est donnée par l'équation (2-12b) en remplaçant la valeur de θ par $\theta + 90^\circ$:

$$\begin{aligned} \beta &= (\partial v / \partial x) \cdot \sin^2 \theta - (\partial v / \partial y - \partial u / \partial x) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \\ &\quad - (\partial u / \partial y) \cdot \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (2-13)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = \alpha - \beta &= (\partial v / \partial y - \partial u / \partial x) \cdot 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \\ &\quad - (\partial v / \partial y + \partial u / \partial x) \cdot (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (2-14a)$$

Ou:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma_{12} = & -\epsilon_x \sin\theta \cos\theta + \epsilon_y \sin\theta \cos\theta \\ & + \gamma_{xy} / 2 \cdot (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{aligned} \quad (2-14b)$$

A présent il est plus convenable d'écrire les équations de transformations des contraintes et déformations sous forme matricielle .

les expressions (2-1b), (2-2b) et (2-3b) deviennent , alors :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \\ -\sin\theta \cdot \cos\theta & \sin\theta \cdot \cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (M 2-15a)$$

les expressions (2-9), (2-10) et (2-14b) deviennent alors :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \frac{1}{2} \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \\ -\sin\theta \cdot \cos\theta & \sin\theta \cdot \cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (M 2-16a)$$

les relations matricielles (M 2-15) et (M 2-16), sont les relations de transformations pour le tenseur contraintes et déformations respectivement, dans le plan à deux dimensions .

Ces équations sont notées comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (M 2-15b)$$

et

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \frac{1}{2} \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (M 2-16b)$$

2.3 LOI DE HOOKE GENERALISEE

2.3-1 MATERIAUX ISOTROPES

Pour un matériaux homogène et isotropique ,dans un état de contraintes unidimensionnelles,la loi de Hooke est donnée par la relation :

$$\sigma = E.\epsilon \quad (2-17.)$$

Où la constante de proportionalité E est le module de young ou module d'élasticité, donc une seule constante doit être déterminée. Dans le cas de contraintes bi- ou tri-dimensionnelles, une autre constante élastique est nécessaire à être déterminée, qui est la fraction de poisson. Ainsi, pour un état de contraintes planes les relations suivantes sont données :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (\epsilon_1 + \nu.\epsilon_2).E/(1-\nu^2) \\ \sigma_2 &= (\epsilon_2 + \nu.\epsilon_1).E/(1-\nu^2) \\ \tau_{12} &= \gamma_{12}.G \end{aligned} \quad (2-18)$$

Deux constantes élastiques apparaissent dans ces relations ,la troisième constante G (le module d'élasticité transversale) est une combinaison des deux autres ,E et ν , reliées par :

$$G = E/2.(1+\nu) \quad (2-19)$$

Donc ,pour un matériau isotrope, seulement deux constantes sont nécessaire pour écrire la loi de Hooke dans un état de contraintes planes; il est de même pour un état de contraintes tridimensionnel.

2.3-2. MATERIAUX ANISOTROPES

2.3-2 a DANS LES AXES D'ORTHOTROPIES

Pour un matériaux orthotrope ,unidirectionnel, la loi de Hooke, s'écrit alors ,suivant les axes d'orthotropies :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= Q_{11} \cdot \epsilon_1 + Q_{12} \cdot \epsilon_2 \\ \sigma_2 &= Q_{12} \cdot \epsilon_1 + Q_{22} \cdot \epsilon_2 \\ \tau_{12} &= Q_{66} \cdot \gamma_{12} \\ & \quad (2-20)\end{aligned}$$

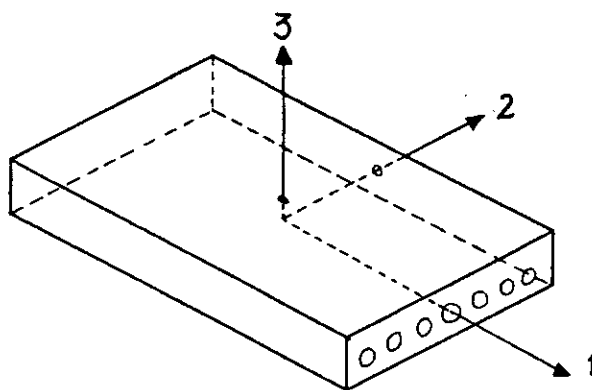


Figure 2-4 Configuration on Axis

Où sous une forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

(M 2-21a)

Cette équation est notée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (M 2-21b)$$

Où les éléments de la matrice de rigidité (Q) sont:

$$\begin{aligned}Q_{11} &= E_{11} / (1 - \nu_{21} \cdot \nu_{12}) \\ Q_{22} &= E_{22} / (1 - \nu_{21} \cdot \nu_{12}) \\ Q_{12} &= \nu_{21} \cdot E_{11} / (1 - \nu_{21} \cdot \nu_{12}) = \nu_{12} \cdot E_{22} / (1 - \nu_{21} \cdot \nu_{12}) \\ Q_{66} &= G_{12} \\ Q_{16} &= Q_{26} = 0\end{aligned} \quad (2-22)$$

D'ici on remarque qu'il y a quatre constantes élastiques indépendantes: les modules de Young dans les directions (1) et (2) (E_{11} et E_{22}), le module de cisaillement G_{12} , le coefficient de poisson ν_{12} ; la cinquième constante élastique est fonction des autres constantes, et peut être déterminée du fait que la matrice (Q) est symétrique :

$$\nu_{21} \cdot E_{11} = \nu_{12} \cdot E_{22} \quad (2-23a)$$

$$\nu_{21} = \nu_{12} \cdot E_{22} / E_{11} \quad (2-23b)$$

2.3-2 b HORS AXES D'ORTHOTROPIES

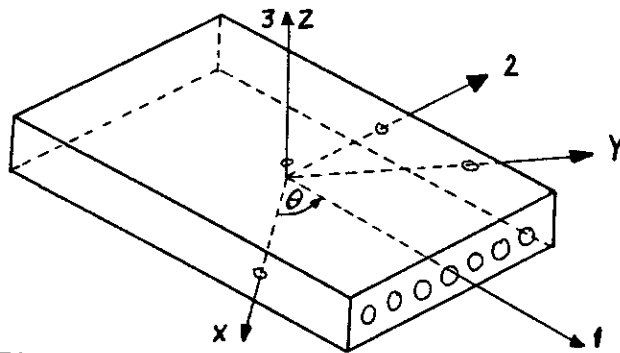


Figure 2-5 Configuration off Axis

En général, les axes principaux 1-2 ne coïncident pas avec les axes X-Y, pour cela on utilise les relations de transformations décrites :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_x \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

D'où :

$$[T] \cdot [T^{-1}] \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T^{-1}] \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (M 2-24)$$

La matrice de transformation (T) est donnée par :

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2 \cdot m \cdot n \\ n^2 & m^2 & -2 \cdot m \cdot n \\ -m \cdot n & m \cdot n & m^2 \cdot n^2 \end{bmatrix} \quad (M 2-25)$$

Où :

$$m = \cos \theta$$

$$n = \sin \theta$$

On note que l'inverse de (T) est obtenue en substituant θ par $-\theta$.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T^{-1}] [Q] [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (M 2-26)$$

$$[T^{-1}] = [T(-\theta)] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2.m.n \\ n^2 & m^2 & 2.m.n \\ m.n & -m.n & m^2-n^2 \end{bmatrix} \quad (M 2-27)$$

$$[T^{-1}] \cdot [Q] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2.m.n \\ n^2 & m^2 & 2.m.n \\ m.n & -m.n & m^2-n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \quad (M 2-28)$$

Ce qui donne le résultat suivant :

$$* = \begin{bmatrix} (m^2 \cdot Q_{11} + n^2 \cdot Q_{12}) & (m^2 \cdot Q_{12} + n^2 \cdot Q_{22}) & 2 \cdot (-2.m.n \cdot Q_{66}) \\ (n^2 \cdot Q_{11} + m^2 \cdot Q_{12}) & (n^2 \cdot Q_{12} + m^2 \cdot Q_{22}) & 2 \cdot (2.m.n \cdot Q_{66}) \\ (m.n \cdot Q_{11} + m.n \cdot Q_{12}) & (m.n \cdot Q_{12} - m.n \cdot Q_{22}) & 2 \cdot (m^2 - n^2) \cdot Q_{66} \end{bmatrix} \quad (M 2-29)$$

Où :

$$* = [T^{-1}] \cdot [Q]$$

En prémultipliant ce résultat par (T), sans oublier de multiplier le résultat obtenu par la matrice (R) on obtiendra :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (M 2-30a)$$

Sachant que (R) est la matrice de proportionnalité:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

avec

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Cette équation est notée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (M 2-30b)$$

Où les composantes de la matrice de rigidité (\bar{Q}) sont données par :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cdot \cos^4 \theta + 2 \cdot (Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + Q_{22} \cdot \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \cdot \sin^4 \theta + 2 \cdot (Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + Q_{22} \cdot \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4 \cdot Q_{66}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + Q_{12} \cdot (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2 \cdot Q_{12} - 2 \cdot Q_{66}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + Q_{66} \cdot (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2 \cdot Q_{66}) \cdot \sin \theta \cdot \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2 \cdot Q_{66}) \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot \sin \theta \cdot \cos^3 \theta \end{aligned}$$

Tsai et Pagano ont donné une autre écriture pour la matrice de rigidité (\bar{Q}), dont les composantes sont écrites de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= U_1 + U_2 \cdot \cos(2 \cdot \theta) + U_3 \cdot \cos(4 \cdot \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= U_1 - U_2 \cdot \cos(2 \cdot \theta) + U_3 \cdot \cos(4 \cdot \theta) \\ \bar{Q}_{12} &= U_4 - U_3 \cdot \cos(4 \cdot \theta) \\ \bar{Q}_{66} &= U_5 - U_3 \cdot \cos(4 \cdot \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= -1/2 \cdot U_2 \cdot \sin(2 \cdot \theta) - U_3 \cdot \sin(4 \cdot \theta) \\ \bar{Q}_{26} &= -1/2 \cdot U_2 \cdot \sin(2 \cdot \theta) - U_3 \cdot \sin(4 \cdot \theta) \end{aligned}$$

Où les invariants U_i sont donnés par :

$$\begin{aligned} U_1 &= (3 \cdot Q_{11} + 3 \cdot Q_{22} + 2 \cdot Q_{12} + 4 \cdot Q_{66}) / 8 \\ U_2 &= (Q_{11} - Q_{22}) / 2 \\ U_3 &= (Q_{11} + Q_{22} - 2 \cdot Q_{12} - 4 \cdot Q_{66}) / 8 \\ U_4 &= (Q_{11} + Q_{22} + 6 \cdot Q_{12} - 4 \cdot Q_{66}) / 8 \\ U_5 &= (Q_{11} + Q_{22} - 2 \cdot Q_{12} + 4 \cdot Q_{66}) / 8 \end{aligned}$$

2.4 STRATIFICATION

Un stratifié est constitué par la superposition de plusieurs couches élémentaires de matériaux composites appelées plis.

Ce paragraphe concerne les propriétés des stratifiés, en utilisant ceux de chaque couche, le constituant, qui agissent en même temps, comme une seule couche.

2.4-1 THEORIE ELASTIQUE DU STRATIFIE

Comme il a été déjà mentionné dans le paragraphe précédent, un matériau orthotrope, dans un état de contraintes planes est régi par la relation suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

(M 2-31)

En utilisant l'équation de transformations, on obtient la relation entre contraintes et déformations, dans n'importe quel système d'axes X-Y-Z :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

(M 2-32)

On note l'équation (M 2-32) pour la couche k comme suit:

$$(\sigma)_k = [\bar{Q}]_k (\epsilon)_k \quad (2-33)$$

dans le système d'axes X-Y.

2.4-2 RELATION ENTRE DEPLACEMENTS ET DEFORMATIONS

La relation qui relie les déformations aux déplacements en

n'importe quel point d'un stratifié , sera développée dans cette section , en fonction des déplacements du plan médian du stratifié (u_0, v_0) et le déplacement dans la direction des Z (w) .

On considère une section d'un stratifié dans le plan X-Y, figure 2-6, qui est déformée sous l'effet d'un certain chargement.

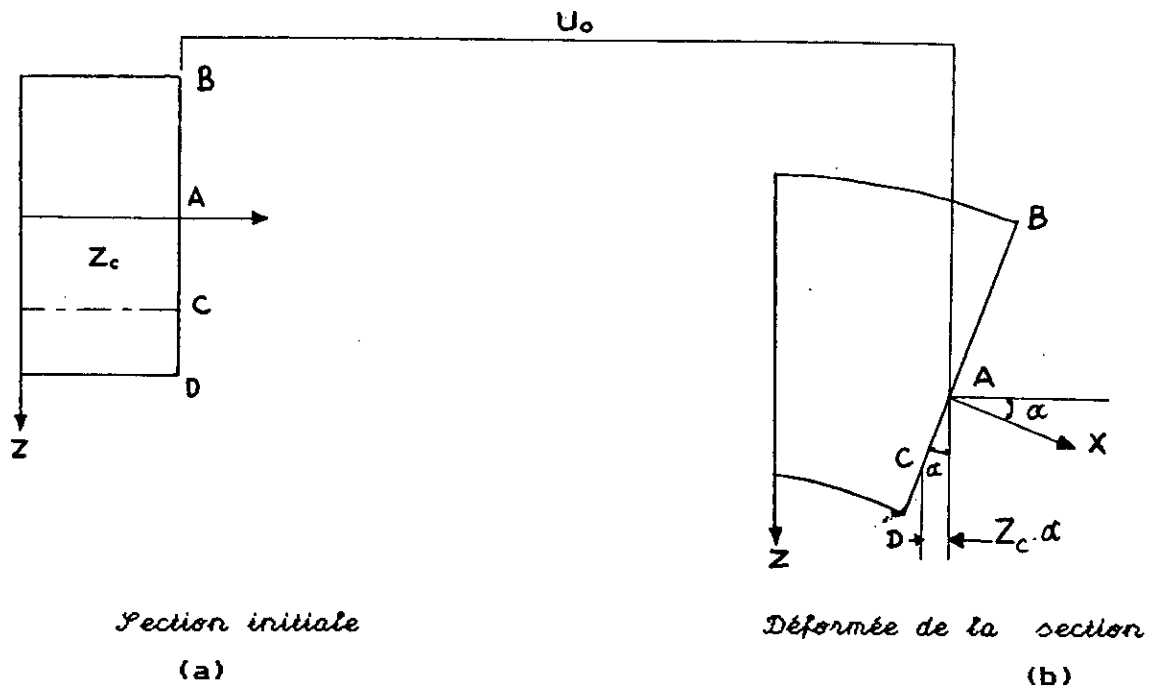


Figure 2-6 Déformations du plan médian

On suppose que le point A du plan médian subit un déplacement u_0 dans la direction des X , et que la ligne BAD reste droite et normale à la déformée du plan médian - cela est équivalent à négliger les déformations angulaires dans les plans X-Z et Y-Z , qui sont $(\gamma_{xz}$ et $\gamma_{yz})$ -; de ces suppositions, on tire la relation donnant le déplacement de n'importe quel point C, de la normale BAD , dans la direction des X :

$$u_c = u_0 - Z_c \cdot \alpha \quad (2-34)$$

Où Z_c est la cote du point C sur l'axe Z , mesurée à partir du plan médian , et α est l'angle de déviation de la normale BAD par-rapport de sa position initiale. D'autre part, en utilisant la similitude des triangles, α est aussi définie comme étant la déviation du plan médian par-rapport à l'axe Z :

$$\alpha = \partial w / \partial x \quad (2-35)$$

Ainsi, le déplacement de tout point de côte Z dans le stratifié s'écrit :

$$u = u_0 - Z \cdot \partial w / \partial x \quad (2-36)$$

et d'une façon analogue, le déplacement v, dans la direction Y sera donné par :

$$v = v_0 - Z \cdot \partial w / \partial y \quad (2-37)$$

Où, v_0 est le déplacement du plan médian suivant la direction Y. A ce stade il est nécessaire de considérer le déplacement w. Si la ligne BAD de la figure 2-6 reste droite alors le seul déplacement dans la direction Z, est le déplacement du plan médian w_0 . Les déformations ϵ_x, ϵ_y et γ_{xy} de n'importe quel point du stratifié peuvent être, à présent, déterminées en fonction des déplacements u_0, v_0 et w_0 .

Sachant que la déformation normale dans la direction X est définie par, la variation de la longueur par-rapport à la longueur initiale .

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u / \Delta x = \partial u / \partial x \quad (2-38a)$$

et en utilisant les expressions (2-36) et (2-38), on aboutit aux relations (Déplacements-Déformations) suivantes:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \partial u / \partial x = \partial / \partial x (u_0 - Z \cdot \partial w / \partial x) \\ &= \partial u_0 / \partial x - Z \cdot \partial^2 w / \partial x^2 \end{aligned} \quad (2-38b)$$

d'une manière analogue, selon la direction Y, on trouve :

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= \partial v / \partial y = \partial / \partial y (v_0 - Z \cdot \partial w / \partial y) \\ &= \partial v_0 / \partial y - Z \cdot \partial^2 w / \partial y^2 \end{aligned} \quad (2-39)$$

quant à la déformation angulaire d'un point arbitraire elle est définie comme suit:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (\Delta u / \Delta y + \Delta v / \Delta x) \\ &= \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{aligned} \quad (2-40a)$$

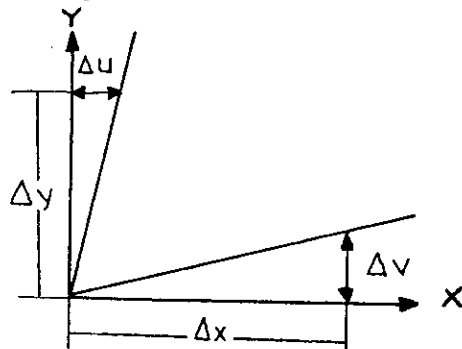


Figure 2-7 Déformations Angulaires

et en utilisant les expressions (2-36) et (2-38), on aboutit a

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \partial / \partial y (u_0 - Z \cdot \partial w / \partial x) + \partial / \partial x (v_0 - Z \cdot \partial w / \partial y) \\ &= \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x - 2 \cdot Z \cdot (\partial^2 w / (\partial x \cdot \partial y)) \end{aligned} \quad (2-40b)$$

Les expressions (2-38), (2-39) et (2-40) sont les relations (Déplacements-Déformations) de n'importe quel point du stratifié. On peut également les écrire en fonction des déformations du plan médian $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$ et γ_{xy}^0 et les courbures de la plaque k_x, k_y et k_{xy} comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + Z \cdot k_x \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + Z \cdot k_y \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + Z \cdot k_{xy} \end{aligned} \quad (2-41a)$$

où:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \partial u_0 / \partial x & k_x &= -\partial^2 w / \partial x^2 \\ \varepsilon_y^0 &= \partial v_0 / \partial y & k_y &= -\partial^2 w / \partial y^2 \\ \gamma_{xy}^0 &= \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x & k_{xy} &= -2 \cdot (\partial^2 w / (\partial x \cdot \partial y)) \end{aligned} \quad (2-42)$$

sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + Z \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (M 2-41b)$$

A partir des expressions (2-33) et (M 2-41b) l'état de contraintes de la k^{ieme} couche peut s'écrire, en fonction des déformations du plan médian, des courbures de la plaque, de la côte Z et des rigidités de la plaque:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + Z \cdot \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

(M 2-43a)

ou bien:

$$(\sigma)_k = [\bar{Q}]_k (\varepsilon^0) + Z \cdot [\bar{Q}]_k (k) \quad (M 2-43b)$$

2.5 EFFORTS ET MOMENTS RESULTANTS

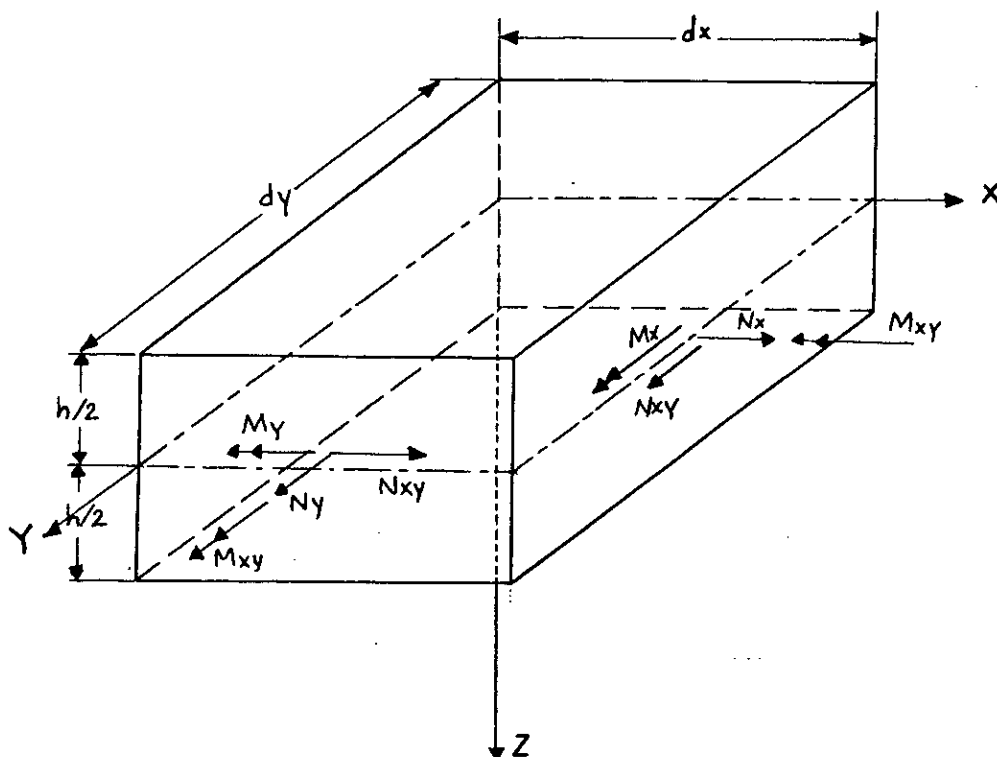


Figure 2-8 Efforts et moments résultants

Les efforts et moments résultants forment un système statique équivalent au système de contraintes subit par le stratifié appliqué a son plan médian.

Chaque effort résultant est défini comme étant la somme des contraintes que subit la face considérée, suivant la direction Z :

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot dZ$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot dZ \quad (2-44)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot dZ$$

quant aux moments résultants ils sont donnés par :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot Z \cdot dZ$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot Z \cdot dZ \quad (2-45)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot Z \cdot dZ$$

En résumé :

- N_x est l'effort résultant dans la direction X par unité de largeur, suivant Y

- N_y est l'effort résultant dans la direction Y par unité de largeur, suivant X

- N_{xy} est le cisaillement par unité de largeur.

- M_x est le moment fléchissant d'axe X, dû aux contraintes σ_x par unité de largeur suivant la direction Y.

- M_y est le moment fléchissant d'axe Y, dû aux contraintes σ_y par unité de largeur suivant la direction X.

- M_{xy} (M_{yx}) est le moment de torsion d'axe X (Y) dû aux contraintes τ_{xy} par unité de largeur suivant la direction Y (X).

2.6 RELATIONS CONSTITUTIVES D'UN STRATIFIÉ

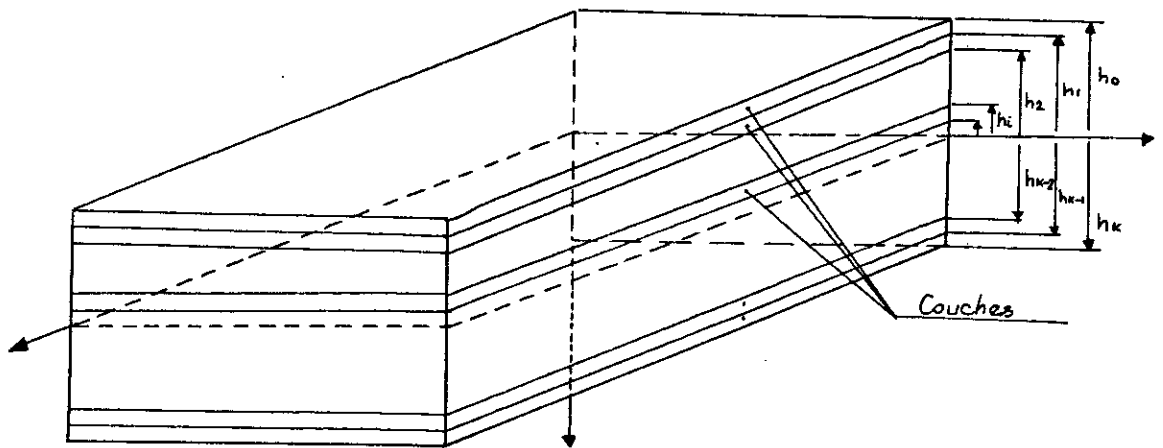


Figure 2-9 Stratifié multicouches

2.6-1 LES EFFORTS RESULTANTS

Sous forme matricielle, la relation (2-45) s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dZ \quad (M 2-46a)$$

Si on décompose, cette intégrale continue, en des intégrales autour de chaque couche, en utilisant la notation de la figure 2-9; on aura :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dZ \quad (M 2-46b)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} dZ \right.$$

$$\left. + \int_{h_{k-1}}^{h_k} Z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} dZ \right\}$$

(M 2-46c)

Ces intégrales, peuvent facilement être calculées, du fait que $[\varepsilon^0]$ et $[k]$ sont indépendantes de la variable Z , $[\bar{Q}]_k$ l'est aussi. donc:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left[[\bar{Q}]_k [\varepsilon^0] \int_{h_{k-1}}^{h_k} dZ + [\bar{Q}]_k [k] \int_{h_{k-1}}^{h_k} Z \cdot dZ \right] \quad (M 2-46d)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (M 2-46e)$$

ou bien

$$[N] = [A] [\varepsilon^0] + [B] [k] \quad (M 2-46f)$$

où

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k \cdot (h_k - h_{k-1}) \quad (2-47)$$

et

$$B_{ij} = 1/2 \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k \cdot (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (2-48)$$

2.6-2 LES MOMENTS RESULTANTS

Sous forme matricielle, la relation (2-35) s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} Z \cdot dZ \quad (M 2-49a)$$

Si on décompose, cette intégrale continue, en des intégrales autour de chaque couche, en utilisant la notation de la figure 2-9; on aura:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} Z \cdot dZ \quad (M 2-49b)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[\int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} Z \cdot dZ \right.$$

$$\left. + \int_{h_{k-1}}^{h_k} Z^2 \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} dZ \right]$$

(M 2-49c)

Ces intégrales, peuvent facilement être calculées, du fait que $[\epsilon^0]$ et $[k]$ sont indépendante de la variable Z , $[\bar{Q}]_k$ l'est aussi.

donc:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left[[\bar{Q}]_k [\epsilon^0] \int_{h_{k-1}}^{h_k} Z \cdot dZ + [\bar{Q}]_k [k] \int_{h_{k-1}}^{h_k} Z^2 \cdot dZ \right]$$

(M 2-49d)

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

(M 2-49e)

Ou:

$$[M] = [B] [\epsilon^0] + [D] [k] \quad (M 2-49f)$$

où

$$B_{ij} = 1/2 \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k \cdot (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (2-50)$$

$$D_{ij} = 1/3 \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k \cdot (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (2-51)$$

2.6-3 RELATIONS USUELLES

Si on combine les relations (M 2-46f) et (M 2-49f) on aura la relation constitutive de la plaque qui est donnée par:

$$\begin{Bmatrix} N \\ \vdots \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ \vdots & \vdots \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \vdots \\ k \end{Bmatrix} \quad (M 2-52)$$

De la relation (M 2-46f) on tire:

$$(\varepsilon^0) = [A^{-1}] (N) - [A^{-1}][B] (k) \quad (M 2-53)$$

en substituant cette expression dans (M 2-49f), on obtient:

$$(M) = [B][A^{-1}](N) - \left[[D] - [B][A^{-1}][B] \right] (k) \quad (M 2-54)$$

pour simplifier cette expression on utilise la notation suivante:

$$\begin{aligned} [A^*] &= [A^{-1}] \\ [B^*] &= [A^{-1}][B] \\ [C^*] &= [B][A^{-1}] \\ [D^*] &= [D] - [B][A^{-1}][B] \end{aligned}$$

d'où de (M 2-54) il vient:

$$(k) = [D^{*-1}](M) - [D^{*-1}][C^*](N) \quad (M 2-55)$$

en substituant cette expression dans (M 2-53) on obtient:

$$(\epsilon^0) = [B^*][D^{*-1}](M) + \left[[A^*] - [B^*][D^{*-1}][C^*] \right] (N)$$

(M 2-56)

sous forme matricielle , les relations (M 2-53) et (M 2-56) s'écrivent:

$$\begin{pmatrix} \epsilon^0 \\ \text{---} \\ k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A' & | & B' \\ \text{---} & | & \text{---} \\ B' & | & D' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N \\ \text{---} \\ M \end{pmatrix}$$

(M 2-57)

Où:

$$\begin{aligned} [A'] &= [A^*] - [B^*][D^{*-1}][C^*] \\ [B'] &= [B^*][D^{*-1}] \\ [C'] &= -[D^{*-1}][C^*] \\ [D'] &= [D^{*-1}] \end{aligned}$$

2.7 CAS PARTICULIERS

Pour chaque cas de simplification qui suit, on considère que toutes les couches ont la même épaisseur.

2.7-1 STRATIFIES SYMETRIQUES

Quand un stratifié est symétrique -symétrie miroir en épaisseurs, orientations et propriétés des couches- la matrice (B) est nulle et les relations (M 2-46f) et (M 2-49f) se simplifient à :

$$(N) = [A] (\epsilon^0)$$

$$(M) = [D] (k)$$

a/STRATIFIES EQUILIBRES

On appelle un stratifié équilibré un stratifié dont la somme des angles d'orientation de ses couches est nulle.

$$\sum_{k=1}^n \theta_k = 0$$

donc:

$$A_{1\sigma} = A_{2\sigma} = 0$$

$$B_{ij} = 0$$

b/STRATIFIES NON-EQUILIBRES

Les stratifiés non équilibrés sont caractérisés par:

$$A_{1\sigma} \neq 0$$

$$A_{2\sigma} \neq 0$$

$$B_{ij} = 0$$

2.7-2 STRATIFIES ANTI-SYMETRIQUES

Un stratifié anti-symétrique est caractérisé par le fait que les angles d'orientations des fibres dans ses plis sont de signes opposés, de part et d'autre du plan médian. Un anti-symétrique est toujours équilibré.

$$A_{1\sigma} = A_{2\sigma} = 0$$

$$D_{1\sigma} = D_{2\sigma} = 0$$

2.7-3 STRATIFIES NON-SYMETRIQUES

Ce sont des stratifiés équilibrés caractérisés par :

$$A_{1\sigma} = A_{2\sigma} = 0$$

2.7-4 TABLEAU RECAPITULATIF

ANGLE PLY	STRATIFIE NON-EQUILIBRE	STRATIFIE EQUILIBRE
SYMETRIQUE PAR-RAPPORT AU PLAN MEDIAN	$A_{ij} \neq 0$ $B_{ij} = 0$ $D_{ij} \neq 0$	$B_{ij} = 0$ $A_{1\sigma} = 0 \quad A_{2\sigma} = 0$ $D_{ij} \neq 0$
SYMETRIQUE + θ / - θ	/ /	$D_{ij} \neq 0 \quad D_{1\sigma} = 0 \quad D_{2\sigma} = 0$ $A_{1\sigma} = 0 \quad A_{2\sigma} = 0$
NON- SYMETRIQUE	PAS DE SIGNIFICATION	$A_{1\sigma} = 0 \quad A_{2\sigma} = 0$

2.8 SIMPLIFICATION DUE A LA SYMETRIE PAR-RAPPORT AU
PLAN MEDIAN

Lorsqu'un stratifié est symétrique par-rapport au plan médian, la plaque se comporte en membrane (ou contraintes planes) si elle ne subit que les efforts N_x, N_y et N_{xy} , alors:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = 1/h \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{1\sigma} \\ A_{12} & A_{22} & A_{2\sigma} \\ A_{1\sigma} & A_{2\sigma} & A_{\sigma\sigma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

(M 2-58)

Et si elle ne subit que la flexion on a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = 12/h^3 \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{1\sigma} \\ D_{12} & D_{22} & D_{2\sigma} \\ D_{1\sigma} & D_{2\sigma} & D_{\sigma\sigma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

(M 2-59)

Où h est l'épaisseur totale du stratifié.

CHAPITRE 3

SOLLICITATIONS PLANES DES PLAQUES EN MATERIAUX COMPOSITES

3.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre on considère les problèmes de l'élasticité plane pour les matériaux isotropes on fera par la suite une application aux matériaux anisotropes -Matériaux composites-.

Cela en décrivant les plaques en éléments finis rectangulaires puis triangulaires.

3.2 ELEMENTS FINIS POUR L'ETUDE DE L'ELASTICITE PLANE

Pour l'étude de l'élasticité plane on a recours à la Méthode des éléments finis qui consiste à résoudre les problèmes de l'élasticité plane en se basant sur les relations développées au chapitre précédent -contraintes & déformations-.

Le choix de la nature des éléments (triangulaires ou rectangulaires) a pour conséquence l'augmentation de la précision en augmentant le nombre d'éléments d'une structure.

3.3 ENERGIE DE DEFORMATION

L'énergie de déformation dans un état de contraintes planes est donnée par la relation suivante:

$$U = 1/2 \cdot \int_V (\epsilon)^T \cdot (\sigma) \cdot dv \quad (3-1a)$$

Où

(ϵ) est le vecteur déformations (3 composantes).

(σ) est le vecteur contraintes (3 composantes).

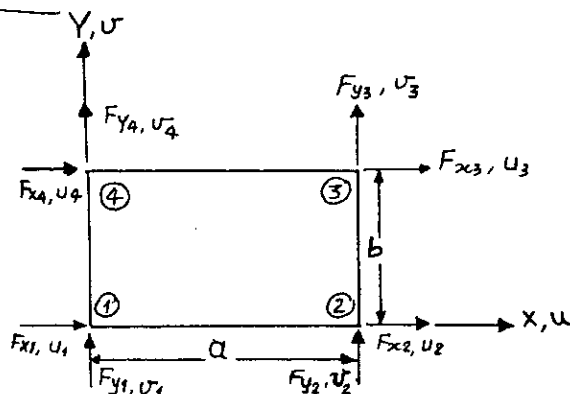
En utilisant la loi de Hooke, cette expression prend la forme :

$$U = 1/2 \cdot \int_V ((1/2 \cdot E) \cdot (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - (\nu/E) \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y + (1/(2 \cdot G)) \cdot \tau_{xy}^2) \cdot dv \quad (3-1b)$$

3.4 ELEMENTS TRIANGULAIRES A HUIT (8) DEGRES DE LIBERTES

L'élément le plus simple pour l'étude de l'élasticité plane, est l'élément rectangulaire à huit d.d.l.

La figure ci-contre montre un élément rectangulaire à huit d.d.l; chaque noeud est supposé subir deux déplacements, u et v suivant les directions X et Y respectivement.



Élément rectangulaire à 8 d d l

Figure 3-1

3.4-1 FONCTIONS DE DEPLACEMENTS

Les fonctions d'interpolations pour les déplacements u et v peuvent être données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot y + c_4 \cdot x \cdot y \\ v(x, y) &= c_5 + c_6 \cdot x + c_7 \cdot y + c_8 \cdot x \cdot y \end{aligned} \quad (3-2)$$

En tenant compte des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u &= u_1 \quad \text{et} \quad v = v_1 && \text{pour} && (0, 0) \\ u &= u_2 \quad \text{et} \quad v = v_2 && \text{pour} && (a, 0) \\ u &= u_3 \quad \text{et} \quad v = v_3 && \text{pour} && (a, b) \\ u &= u_4 \quad \text{et} \quad v = v_4 && \text{pour} && (0, b) \end{aligned} \quad (3-3)$$

Les fonctions de déplacements prennent la forme:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= f_1(x, y) \cdot u_1 + f_2(x, y) \cdot u_2 + f_3(x, y) \cdot u_3 + f_4(x, y) \cdot u_4 \\ v(x, y) &= f_1(x, y) \cdot v_1 + f_2(x, y) \cdot v_2 + f_3(x, y) \cdot v_3 + f_4(x, y) \cdot v_4 \end{aligned} \quad (3-4a)$$

Où :

$$f_1(x, y) = (1-x/a).(1-y/b)$$

$$f_2(x, y) = x/a.(1-y/b)$$

$$f_3(x, y) = x.y/(a.b)$$

$$f_4(x, y) = (1-x/a).y/b$$

(3-4b)

3.4-2 RELATIONS CONTRAINTES-DEPLACEMENTS

On a déjà vu que les déformations sont données par :

$$\epsilon_x = \partial u / \partial x$$

$$\epsilon_y = \partial v / \partial y$$

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$$

(3-5)

En utilisant ces relations , (3-4a) et (3-4b), on aboutit à la relation matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & -a_3 & 0 & -a_4 & 0 & a_4 & 0 & a_3 \\ -a_3 & -a_1 & -a_4 & a_1 & a_4 & a_2 & a_3 & -a_2 \end{bmatrix} . (q) \quad (M 3-5a)$$

avec:

$$a_1 = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{y}{b} \right)$$

$$a_3 = \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{a} \right)$$

$$a_2 = -\frac{y}{a b}$$

$$a_4 = -\frac{x}{a b}$$

et

$$(q) = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4]$$

Où:

$$(\epsilon) = [L] . (q)$$

(M 3-5b)

et

$$(\sigma) = [C] . (\epsilon)$$

(M 3-6a)

Où la matrice (C), est la matrice d'élasticité, et est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{1\sigma} \\ C_{12} & C_{22} & C_{2\sigma} \\ C_{1\sigma} & C_{2\sigma} & C_{\sigma\sigma} \end{bmatrix}$$

En substituant (M 3-5b) dans (M 3-6a), on obtient :

$$(\sigma) = [C]. [L]. (q) \quad (M 3-6b)$$

3.4-3 DERIVATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE

Sachant que l'énergie de déformation prend la forme :
suivante:

$$U = 1/2 \cdot \int \int \int \begin{matrix} a & b & h \\ (\varepsilon)^T \cdot (\sigma) \cdot dz \cdot dy \cdot dx \\ o & o & o \end{matrix} \quad (3-7)$$

De (M 3-5b) on a :

$$(\varepsilon)^T = (q)^T \cdot [L]^T \quad (3-8)$$

L'énergie de déformation devient :

$$U = h/2 \cdot (q)^T \left[\int \int \begin{matrix} a & b \\ [L]^T \cdot [C] \cdot [L] \cdot dy \cdot dx \\ o & o \end{matrix} \right] \cdot (q) \quad (3-9)$$

Le théorème de Castigliano nous donne :

$$F_i = \partial U / \partial q_i \quad (3-10)$$

On obtient :

$$(F) = [K]. (q) \quad (3-11)$$

Où :

$$(F) = (F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{x3} \quad F_{y3} \quad F_{x4} \quad F_{y4}) \quad (3-11a)$$

et

$$(q) = (u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4) \quad (3-11b)$$

la matrice de rigidité s'écrit alors:

$$[K] = h \cdot \int \int_{\Omega} [L]^T \cdot [C] \cdot [L] \cdot dy \cdot dx \quad (3-12)$$

Après multiplications et intégrations ,on trouve pour un matériaux isotrope :

$$[K] = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & -C_1/2 & -C_2 & C_7 & -C_5 \\ & C_3 & -C_5 & C_6 & -C_2 & -C_3/2 & C_5 & C_8 \\ & & C_1 & -C_2 & C_7 & C_5 & -C_1/2 & C_2 \\ & & & C_3 & C_5 & C_8 & C_2 & -C_3/2 \\ & & & & C_1 & C_2 & C_4 & C_5 \\ & & \text{Sym} & & & C_3 & -C_5 & C_6 \\ & & & & & & C_1 & -C_2 \\ & & & & & & & C_3 \end{bmatrix}$$

où :

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (M 3-13a)$$

et

$$C_1 = (b/(3 \cdot a) + (1-\nu)/8 \cdot a/b) \cdot E \cdot h/(1-\nu^2)$$

$$C_2 = (\nu/4 + (1-\nu)/8) \cdot E \cdot h/(1-\nu^2)$$

$$C_3 = (a/(3 \cdot b) + (1-\nu)/6 \cdot a/b) \cdot E \cdot h/(1-\nu^2)$$

$$C_4 = (-b/(3 \cdot a) + (1-\nu)/12 \cdot a/b) \cdot E \cdot h/(1-\nu^2)$$

$$C_5 = (\nu/4 - (1-\nu)/8) \cdot E \cdot h/(1-\nu^2)$$

$$C_6 = (a/(6 \cdot b) - (1-\nu)/6 \cdot b/a) \cdot E \cdot h/(1-\nu^2)$$

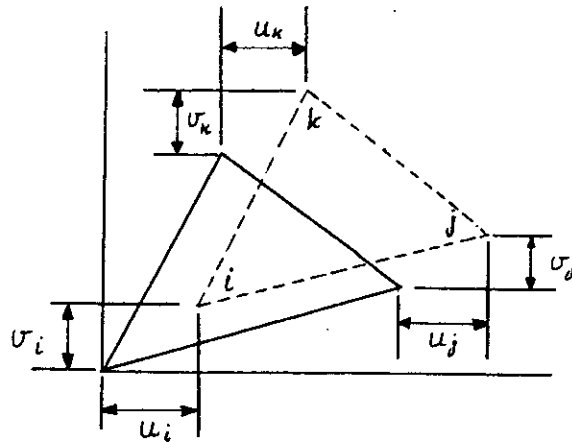
$$C_7 = (b/(6 \cdot a) - (1-\nu)/6 \cdot a/b) \cdot E \cdot h/(1-\nu^2)$$

$$C_8 = (-a/(3 \cdot b) + (1-\nu)/12 \cdot b/a) \cdot E \cdot h/(1-\nu^2)$$

3.5 ELEMENTS TRIANGULAIRES A SIX (6) DEGRES DE LIBERTIES

Un autre élément pour l'étude de l'élasticité plane qui est l'élément triangulaire à six d.d.l .

La figure ci-après montre un élément triangulaire à six d.d.l; chaque noeud possède deux déplacements, u et v suivant les directions X et Y respectivement.



(a)

(b)

Élément triangulaire à 6 d d l

Figure 3-2

3.5-1 FONCTIONS DE DEPLACEMENTS

Les fonctions d'interpolations pour les déplacements u et v peuvent être données par les relations suivantes :

$$u(x, y) = u_i + c_1 \cdot x + c_2 \cdot y$$

$$v(x, y) = v_i + c_3 \cdot x + c_4 \cdot y$$

En se référant à la figure 3-2
au noeud j .

$$\begin{cases} x = a_j \\ y = b_j \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_j = u_i + c_1 \cdot a_j + c_2 \cdot b_j \\ v_j = v_i + c_3 \cdot a_j + c_4 \cdot b_j \end{cases}$$

au noeud k

$$\begin{cases} x = a_k \\ y = b_k \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_k = u_i + c_1 \cdot a_k + c_2 \cdot b_k \\ v_k = v_i + c_3 \cdot a_k + c_4 \cdot b_k \end{cases}$$

sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = 1/(2 \cdot \Delta) \begin{bmatrix} b_j - b_k & 0 & b_k & 0 & -b_j & 0 \\ a_k - a_j & 0 & -a_k & 0 & a_j & 0 \\ 0 & b_j - b_k & 0 & b_k & 0 & -b_j \\ 0 & a_k - a_j & 0 & -a_k & 0 & a_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

(M 3-16)

Où Δ est la surface du triangle considéré

$$\Delta = a_j \cdot b_k - b_j \cdot a_k$$

et

$$a_j = x_j - x_i$$

$$b_j = y_j - y_i$$

$$a_k = x_k - x_i$$

$$b_k = y_k - y_i$$

3.5-2 RELATIONS CONTRAINTES-DEPLACEMENTS

De la même manière que pour l'élément rectangulaire et en utilisant les relations (3-5) et (M 3-6) on aboutit à :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = 1/(2 \cdot \Delta) \begin{bmatrix} b_j - b_k & 0 & b_k & 0 & -b_j & 0 \\ 0 & a_k - a_j & 0 & -a_k & 0 & a_j \\ a_k - a_j & b_j - b_k & -a_k & b_k & a_j & -b_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

(M 3-17a)

Où :

$$(\varepsilon) = [L] \cdot (q)$$

(M 3-17b)

Comme il a été déjà vu :

$$(\sigma) = [C].(\varepsilon)$$

Donc :

$$(\sigma) = [C][L].(q) \quad (M 3-18)$$

3.5-3 DERIVATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE

Comme pour l'élément rectangulaire la matrice de rigidité est donnée par la formule suivante :

$$[K] = h. \int \int [L]^T. [C]. [L]. dy. dx$$

Mais on remarque que les matrices (L) et (C) sont indépendantes des variables x et y, ce qui implique la facilité de l'intégration selon un contour triangulaire.

$$[K] = h. [L]^T. [C]. [L]. \Delta \quad (3-19)$$

Le calcul de la matrice de rigidité d'un élément triangulaire est donc facile à calculer et cela en utilisant un petit programme de produit matriciel....

3.5 APPLICATIONS AUX MATERIAUX COMPOSITES

L'application de la théorie des contraintes planes aux matériaux composites diffère peu de son application aux matériaux ordinaires -du fait de l'anisotropie et l'hétérogénéité de ces premiers-.

Une plaque en matériaux composites soumise à des sollicitations planes subit une déformation dans le plan et une autre transversale (contraintes planes + flexion), dans le cas d'un stratifié non symétrique ou anti-symétrique, par contre, dans le cas

d'un stratifié symétrique la flexion est éliminée. Pour simplifier les calculs, nous ne considérons que des stratifiés symétriques -d'ailleurs c'est le cas de la majorité des constructions en matériaux composites - nous allons donc reconstruire la matrice de rigidité, cette fois-ci pour des matériaux composites.

D'après l'expression (3-12) la matrice de rigidité de n'importe quel élément est donnée par :

$$[K] = h \int \int_{\Omega} [L]^T [C] [L] dy dx$$

Où seule la matrice (C) -la matrice d'élasticité qui relie les déformations aux contraintes- dépend de la nature du matériaux.

On a vu au chapitre 2 :

$$\{N\} = [A] \{\varepsilon^0\} + [B] \{k\}$$

Où :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij}) \cdot (h_k - h_{k-1})$$

$$B_{ij} = 1/2 \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij}) \cdot (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_x \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz$$

D'après le tableau récapitulatif, dans le cas d'un stratifié symétrique, la matrice (B) est nulle, ce qui nous simplifie énormément les calculs de la matrice de rigidité. La relation d'élasticité s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = 1/h \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{1\sigma} \\ A_{12} & A_{22} & A_{2\sigma} \\ A_{1\sigma} & A_{2\sigma} & A_{\sigma\sigma} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

La substitution de cette relation dans l'expression de la matrice de rigidité nous donne :

$$[K] = \int \int_s [L]^T . [A] . [L] . dy . dx \quad (M 3-20)$$

a/ Pour l'élément rectangulaire on doit faire le produit matriciel de :

$$[L]^T . [A] . [L]$$

puis intégrer le résultat selon un contour rectangulaire .

b/ Pour l'élément triangulaire on se sert de l'expression (3-19) donnant la matrice de rigidité d'un matériaux isotrope .

$$[K] = h . [L]^T . [C] . [L] . \Delta$$

et cela en substituant à la place de la matrice (C) , la matrice reliant les contraintes aux déformations dans le cas d'un matériau composite . De cette opération on trouve la matrice de rigidité d'un élément triangulaire en matériaux composites :

$$[K] = [L]^T . [A] . [L] . \Delta \quad (3-21)$$

Cette expression est facile à calculer à l'aide d'un simple programme informatique .

A ce stade il nous reste que d'assembler la matrice de rigidité globale et le vecteur forces global de la structure considérée .

3.6 ASSEMBLAGE DE LA MATRICE DE RIGIDITE GLOBALE / VECTEUR FORCES GLOBAL

Une fois on a trouver les matrices de rigidité /vecteurs forces/ élémentaires , il est nécessaire de les assembler dans une

matrice globale /vecteur global/ qui est la matrice de rigidité /vecteur forces/ de toute la structure .

Cette nouvelle matrice /ce nouveau vecteur/ contient $(X.n)$ lignes et $(X.n) / (1) /$ colonnes où n est le nombre de noeuds total de la structure et X correspond au nombre de degrés de libertés par noeud (dans ce premier cas -solicitations planes- $X = 2$) .

Cette matrice /vecteur/ globale est la somme des contributions des matrices de rigidité /vecteurs forces/ des éléments indépendants .

3.6-1 UTILISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES

En général, la structure s'appuie sur plusieurs noeuds pour lesquels certains déplacements sont interdits .Pour cela la matrice de rigidité /vecteur force/ globale se réduit à une nouvelle matrice /vecteur/ dont les $(X.n)$ lignes et $(X.n) / (1) /$ colonnes se réduisent à $(X.n-m)$ lignes et $(X.n-m) / (1) /$ colonnes, où m est le nombre de déplacements interdits -Ceci revient à éliminer les lignes et colonnes correspondants aux déplacements interdits - dans la matrice de rigidité globale et dans le vecteur forces on élimine les forces correspondantes .

3.6-2 RESOLUTION

Une fois la matrice de rigidité globale et le vecteur forces global ,assemblés ,il ne nous reste que déterminer les déplacements et contraintes inconnus dans les noeuds et éléments de la structure respectivement

3.6-2 a DETERMINATION DES DEPLACEMENTS

La détermination des déplacements revient à résoudre le système statique donné par l'expression (3-11):

$$(F) = [K] . (q)$$

Où :

- (F) est le vecteur forces global .
- [K] est la matrice de rigidité globale .
- (q) est le vecteur déplacements global recherché .

La résolution d'un tel système doit être fait par utilisation des méthodes de résolution numériques . Pour notre cas nous utiliserons la méthode d'élimination de Gauss ^(*)

3.6-2 b DETERMINATION DES CONTRAINTES

Après qu'on ait déterminé les déplacements de chaque noeuds on déterminera les contraintes dans les éléments constituant la structure d'après la formule (M 3-6)

$$(\sigma)^e = [C] \cdot [L] \cdot (q)^e$$

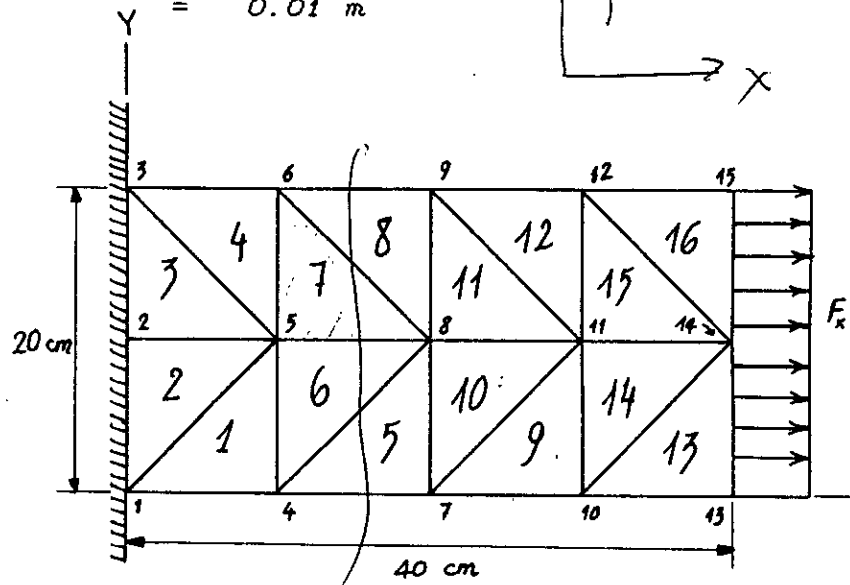
Où le vecteur $(q)^e$ est le vecteur de déplacements élémentaire ; en utilisant un programme de produit matriciel .

^(*)Cf ANNEXE 1.

3.7 EXEMPLES D'APPLICATIONS

NOMBRE D'ELEMENTS = 16
 NOMBRE DE NOEUDS = 15
 NOMBRE DE NOEUDS AUX LIMITES = 3
 EPAISSEUR = 0.01 m

N° ELTS	CONNECTIONS		
	I	J	K
1	1	4	5
2	1	5	2
3	2	5	3
4	5	6	3
5	4	7	8
6	4	8	5
7	5	8	6
8	8	9	6
9	7	10	11
10	7	11	8
11	8	11	9
12	11	12	9
13	10	13	14
14	10	14	11
15	11	14	12
16	14	15	12



DONNEES NODALES

N° Nds	COORDONNEES		CHARGES		d. d. l	
	X (m)	Y (m)	Fx (N)	Fy (N)	1	2
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0	0
2	0.0000000	0.1000000	0.0000000	0.0000000	0	0
3	0.0000000	0.2000000	0.0000000	0.0000000	0	0
4	0.1000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1	1
5	0.1000000	0.1000000	0.0000000	0.0000000	1	1
6	0.1000000	0.2000000	0.0000000	0.0000000	1	1
7	0.2000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1	1
8	0.2000000	0.1000000	0.0000000	0.0000000	1	1
9	0.2000000	0.2000000	0.0000000	0.0000000	1	1
10	0.3000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1	1
11	0.3000000	0.1000000	0.0000000	0.0000000	1	1
12	0.3000000	0.2000000	0.0000000	0.0000000	1	1
13	0.4000000	0.0000000	5000.0000	0.0000000	1	1
14	0.4000000	0.1000000	10000.000	0.0000000	1	1
15	0.4000000	0.2000000	5000.0000	0.0000000	1	1

CONDITIONS AUX LIMITES

ND	TYPE	ANGLE
1	0	0.0000
2	0	0.0000
3	0	0.0000

1^{er} cas : MATERIAUX ISOTROPES

DONNEES DU MATERIAU.

E = 2.2E+11 Pa ν = 0.25

RESULTATS

N° NDs	DEPLACEMENTS NODAUX (m)	
	X-DEPLACEMENT	Y-DEPLACEMENT
1	0.000000E+00	0.000000E+00
2	0.000000E+00	0.000000E+00
3	0.000000E+00	0.000000E+00
4	0.473421E-04	0.127929E-04
5	0.431625E-04	0.112550E-10
6	0.473421E-04	-0.127929E-04
7	0.935344E-04	0.141333E-04
8	0.917147E-04	0.245564E-10
9	0.935344E-04	-0.141332E-04
10	0.140568E-03	0.142542E-04
11	0.139864E-03	0.145519E-10
12	0.140568E-03	-0.142542E-04
13	0.188090E-03	0.143828E-04
14	0.187600E-03	-0.354703E-10
15	0.188090E-03	-0.143829E-04

N° ELTS	CONTRAINTES		
	σ_x (Pa)	σ_y (Pa)	τ_{xy} (Pa)
1	0.100394E+08	325317.	695694.
2	0.996058E+07	0.298817E+07	0.909057
3	0.996058E+07	0.298817E+07	0.909057
4	0.100394E+08	325318.	-695692.
5	0.968131E+07	-63587.6	-38717.9
6	0.103187E+08	409095.	-337580.
7	0.103187E+08	409096.	337582.
8	0.968132E+07	-63588.4	38720.5
9	0.986700E+07	-33273.3	-47042.6
10	0.101330E+08	71917.1	-146976.
11	0.101330E+08	71915.0	146977.
12	0.986701E+07	-33272.3	47046.8
13	0.997086E+07	-29139.9	-29135.3
14	0.100291E+08	15370.3	-56810.8
15	0.100291E+08	15366.1	56810.0
16	0.997087E+07	-29142.0	29138.4

2^{ème} cas : MATERIAUX ANISOTROPES

DONNEES DU MATERIAU
 STRATIFIES EN VERRE/EPOXY
 EPAISSEUR TOTALE = 0.01 m
 NOMBRE DE PLIS = 8

E ₁₁ (Pa)	E ₂₂ (Pa)	G ₁₂ (Pa)	ν_{12}	h (m)
40.E09	8.25E09	4.13E09	.25	-0.00375
40.E09	8.25E09	4.13E09	.25	-0.00250
40.E09	8.25E09	4.13E09	.25	-0.00125
40.E09	8.25E09	4.13E09	.25	0.00000
40.E09	8.25E09	4.13E09	.25	0.00125
40.E09	8.25E09	4.13E09	.25	0.00250
40.E09	8.25E09	4.13E09	.25	0.00375
40.E09	8.25E09	4.13E09	.25	0.00500

a/ Stratifiés [0,0,45,45] s RESULTATS

N° NDs	DEPLACEMENTS NODAUX (m)	
	X-DEPLACEMENT	Y-DEPLACEMENT
1	0.000000E+00	0.000000E+00
2	0.000000E+00	0.000000E+00
3	0.000000E+00	0.000000E+00
4	0.177262E-04	-0.160397E-05
5	0.193336E-04	-0.925806E-05
6	0.198319E-04	-0.149797E-04
7	0.341143E-04	-0.616830E-05
8	0.413070E-04	-0.173781E-04
9	0.381586E-04	-0.248113E-04
10	0.469750E-04	-0.124962E-04
11	0.666515E-04	-0.271152E-04
12	0.540555E-04	-0.318788E-04
13	0.487725E-04	-0.485840E-04
14	0.997327E-04	-0.428135E-04
15	0.599000E-04	-0.240511E-04

2 fois moins
 0,177262 · 10⁸
 Element
 N° 14
 0,4704160 · 10⁸
 0,047041 · 10⁸

N° ELTS	CONTRAINTES · 10 ²		
	σ_x (Pa)	σ_y (Pa)	τ_{xy} (Pa)
1	47041.6	94.6133	4049.76
2	52276.2	7142.84	682.359
3	52276.2	7142.84	682.359
4	48405.9	-2051.45	-5414.42
5	42222.9	-4185.99	4092.46
6	56724.4	-137.328	768.873
7	57364.6	1908.08	696.487
8	43688.0	-4500.19	-5557.77
9	34398.4	-6254.90	9510.61
10	66085.0	-1232.18	3732.05
11	64051.8	-519.127	-2665.50
12	35464.7	-5109.77	-10577.1
13	14424.4	14424.4	14424.4
14	89198.3	1341.12	10463.3
15	81768.0	1077.48	-10278.3
16	14609.3	14609.4	-14609.4

element 8
 0,968 · 10⁷
 0,93688 · 10⁷
 2 fois moins

b/ Stratifiés [-45,-45,45,45] s

N° NDs	DEPLACEMENTS NODAUX (m)	
	X-DEPLACEMENT	Y-DEPLACEMENT
1	0.000000E+00	0.000000E+00
2	0.000000E+00	0.000000E+00
3	0.000000E+00	0.000000E+00
4	0.371322E-04	0.184808E-04
5	0.300390E-04	-0.409841E-10
6	0.371324E-04	-0.184809E-04
7	0.745552E-04	0.242844E-04
8	0.725455E-04	-0.130967E-09
9	0.745554E-04	-0.242846E-04
10	0.113254E-03	0.288936E-04
11	0.119247E-03	-0.246473E-09
12	0.113254E-03	-0.288941E-04
13	0.121684E-03	-0.843081E-05
14	0.179029E-03	-0.366072E-09
15	0.121685E-03	0.843008E-05

N° ELTS	CONTRAINTES $\times 10^2$		
	σ_x (Pa)	σ_y (Pa)	τ_{xy} (Pa)
1	47041.6	94.6133	4049.76
1	47723.8	1787.43	12729.2
2	52276.2	27464.0	-0.458128E-01
3	52276.2	27464.0	-0.458128E-01
4	47724.0	1787.49	-12729.2
5	42923.6	-8046.76	4240.83
6	57076.4	6700.94	-7929.03
7	57076.4	6700.89	7928.96
8	42923.7	-8046.75	-4240.82
9	40929.4	-14902.0	11851.4
10	59070.6	436.264	-2246.66
11	59070.6	436.219	2246.61
12	40929.5	-14902.0	-11851.4
13	22379.2	22379.1	22379.2
14	77620.9	4374.31	6698.91
15	77620.8	4374.25	-6698.91
16	22379.2	22379.1	-22379.2

COMMENTAIRES

A l'issue de cet exemple ,il est facile de voir l'importance des matériaux composites qui d'après les résultats obtenus,résiste plus aux sollicitations planes que les matériaux ordinaires,cela est dûe à leur modules d'élasticité relativement élevés par rapport a ceux des matériaux ordinaires.

Ces déplacements peuvent être plus réduits en utilisant des matériaux composites dont les constantes élastiques sont plus importantes comme c'est le cas pour les stratifiés en carbone/Epoxy qui sont caractérisés par :

$$E_{11} = 188E+09 , E_{22} = 10.3E+09 , G_{12} = 7.17E+09 , \nu_{12} = 0.28$$

Ou encore en Borre/Epoxy dont les caractéristiques sont:

$$E_{11} = 204E+09 , E_{22} = 18.5E+09 , G_{12} = 5.59E+09 , \nu_{12} = 0.23$$

CHAPITRE 4

FLEXION DES PLAQUES EN MATERIAUX COMPOSITES

4.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre on va considérer la flexion pour des plaques minces en matériaux isotropes et qu'on appliquera par la suite aux matériaux anisotropes -Matériaux composites-, et cela en décrivant la plaque en éléments finis triangulaires puis rectangulaires pour les petites déformations de la même façon qu'au chapitre précédent .

4.2 CONSIDERATIONS GENERALES

Chaque élément possède trois (3) ou quatre (4) noeuds suivant le cas triangulaire ou rectangulaire; Chaque noeud subit trois (3) mouvements:

w : déflexion verticale.

θ_x : rotation autour de l'axe X $\theta_x = \partial w / \partial y$

θ_y : rotation autour de l'axe Y $\theta_y = \partial w / \partial x$

donc , sous forme matricielle, chaque noeud possède un vecteur déplacements, noté comme suit:

$$(q_i) = \begin{Bmatrix} (w)_i \\ (\theta_x)_i \\ (\theta_y)_i \end{Bmatrix} \quad (M 4-1)$$

Les forces nodales correspondantes à ces déplacements, sont :

$$(F_i) = \begin{Bmatrix} (F_z)_i \\ (F\theta)_{x,i} \\ (F\theta)_{y,i} \end{Bmatrix} \quad (M 4-2)$$

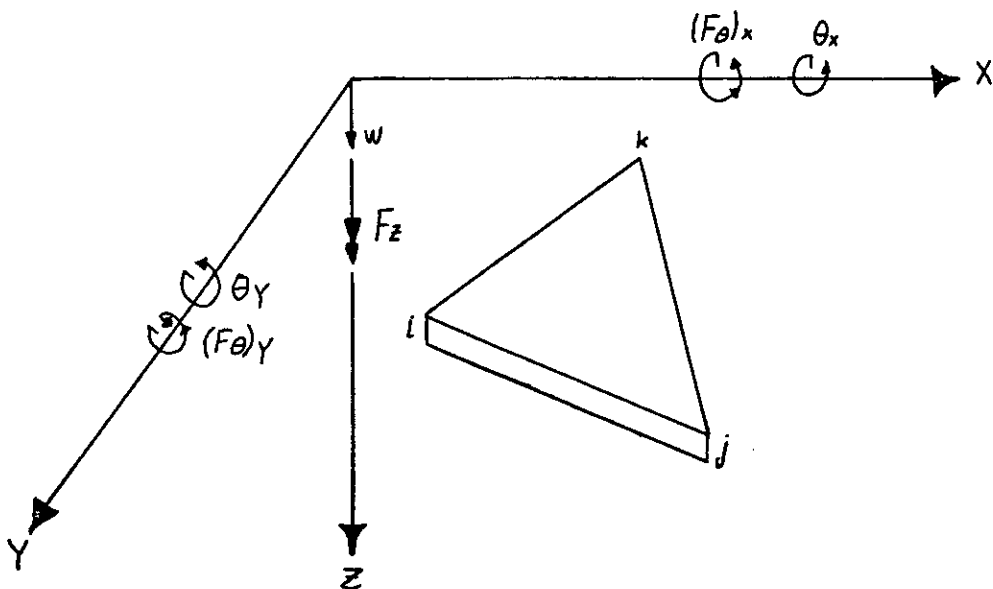
avec:

$(F\theta)_x$ moment suivant l'axe X

$(F\theta)_y$ moment suivant l'axe Y

(F_z) force de cisaillement dans la direction de l'axe Z.

Ces moments et forces forment le système statique et équivalent aux charges externes subit par la plaque.



Déplacements et forces nodaux

Figure 4-1

Les déformations que subit la plaque, sont caractérisées par deux courbures dans les directions X et Y en plus d'une torsion

"Twist" autour de l'axe Z. Ce vecteur déformations sera noté:

$$(\varepsilon) = \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ -2. \partial^2 w / \partial x. \partial y \end{Bmatrix} \quad (M 4-3)$$

Dans la résolution des problèmes de flexion des plaques, les contraintes internes sont réellement les moments de flexion et de torsion agissants sur la plaque. Ainsi l'état de contraintes peut être représenté par les trois (3) composantes M_x , M_y et M_{xy} comme suit:

$$(\sigma) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (M 4-4)$$

L'application de la loi de Hooke pour les plaques nous donne:

$$\begin{aligned} M_x &= E. h^3 / (12. (1-\nu^2)) . (-\partial^2 w / \partial x^2 - \nu. \partial^2 w / \partial y^2) \\ M_y &= E. h^3 / (12. (1-\nu^2)) . (-\partial^2 w / \partial y^2 - \nu. \partial^2 w / \partial x^2) \\ M_{xy} &= E. h^3 . (1-\nu) / (12. (1-\nu^2)) . (-\partial^2 w / \partial x. \partial y) \end{aligned} \quad (M 4-5a)$$

Du :

$$(\sigma) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [C] . (\varepsilon) = [C] . \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ -2. \partial^2 w / \partial x. \partial y \end{Bmatrix} \quad (M 4-5b)$$

En comparant les expressions (M 4-5a) et (M 4-5b), on trouve:

$$[C] = E. h^3 / (12. (1-\nu^2)) . \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) / 2 \end{bmatrix} \quad (M 4-6)$$

4.3 ELEMENTS TRIANGULAIRES A NEUF (9) DEGRES DE LIBERTE.

4.3-1 FONCTION DE DEPLACEMENTS

On considère une décritisation en éléments triangulaires à neuf degrés de libertés ; donc la déflexion doit être représentée par un polynôme contenant neuf termes .

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot x^2 + \alpha_5 \cdot x \cdot y + \alpha_6 \cdot y^2 + \alpha_7 \cdot x^3 + \alpha_8 \cdot (x^2 \cdot y + x \cdot y^2) + \alpha_9 \cdot y^3 \quad (M 4-7)$$

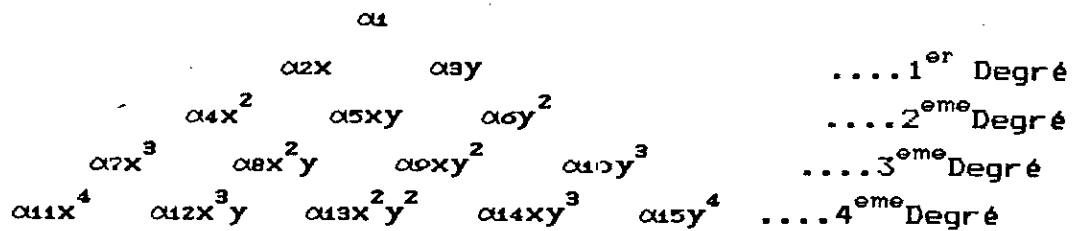


Figure 4-2 Triangle de Pascal

Ce polynôme n'est pas conforme car il n'est pas complet, d'après la règle de Pascal un élément à trois noeuds devrait contenir dix termes . Néanmoins , cette formulation peut donner d'assez bon résultats pourvu qu'on n'ait pas deux cotés d'un même élément qui soient parallèles aux axes globaux X et Y en même temps.

L'application de ce polynôme aux noeuds , nous donne :
au noeud i .

$$w_i = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x_i + \alpha_3 \cdot y_i + \alpha_4 \cdot x_i^2 + \alpha_5 \cdot x_i \cdot y_i + \alpha_6 \cdot y_i^2 + \alpha_7 \cdot x_i^3 + \alpha_8 \cdot (x_i^2 \cdot y_i + x_i \cdot y_i^2) + \alpha_9 \cdot y_i^3 \quad (M 4-8a)$$

Sous forme matricielle :

$$(w)_i = [1, x_i, y_i, x_i^2, x_i \cdot y_i, y_i^2, x_i^3, (x_i^2 \cdot y_i + x_i \cdot y_i^2), y_i^3] (\alpha) \quad (M 4-8b)$$

D'une façon similaire on trouve pour $(\theta_x)_i$:

$$(\theta_x)_i = [0, 0, 1, 0, x_i, 2.y_i, 0, (x_i^2 + 2.x_i.y_i), 3.y_i^2] \quad (\alpha) \quad (M 4-8c)$$

enfin:

$$(\theta_y)_i = [0, -1, 0, -2.x_i, -y_i, 0, -3.x_i^2, (-2.x_i.y_i - y_i^2), 0] \quad (\alpha) \quad (M 4-8d)$$

Avec :

$$(\alpha) = \{ \alpha_i, i = 1, 9 \} \quad (M 4-8e)$$

En général, on a pour le noeud i:

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ (\theta_x)_i \\ (\theta_y)_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i.y_i & y_i^2 & x_i^3 & (x_i^2.y_i + x_i.y_i^2) & y_i^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_i & 2.y_i & 0 & (x_i^2 + 2.x_i.y_i) & 3.y_i^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2.x_i & -y_i & 0 & -3.x_i^2 & (-2.x_i.y_i - y_i^2) & 0 \end{bmatrix} (\alpha) \quad (M 4-9)$$

Alors on a pour tout les noeuds :

$$(\mathbf{q}) = [\mathbf{L}].(\alpha) \quad (M 4-10)$$

où la matrice (L) est donnée par:

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i.y_i & y_i^2 & x_i^3 & (x_i^2.y_i + x_i.y_i^2) & y_i^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_i & 2.y_i & 0 & (x_i^2 + 2.x_i.y_i) & 3.y_i^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2.x_i & -y_i & 0 & -3.x_i^2 & (-2.x_i.y_i - y_i^2) & 0 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j.y_j & y_j^2 & x_j^3 & (x_j^2.y_j + x_j.y_j^2) & y_j^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_j & 2.y_j & 0 & (x_j^2 + 2.x_j.y_j) & 3.y_j^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2.x_j & -y_j & 0 & -3.x_j^2 & (-2.x_j.y_j - y_j^2) & 0 \\ 1 & x_k & y_k & x_k^2 & x_k.y_k & y_k^2 & x_k^3 & (x_k^2.y_k + x_k.y_k^2) & y_k^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_k & 2.y_k & 0 & (x_k^2 + 2.x_k.y_k) & 3.y_k^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2.x_k & -y_k & 0 & -3.x_k^2 & (-2.x_k.y_k - y_k^2) & 0 \end{bmatrix} \quad (M 4-11)$$

De (M 4.10) on a :

$$(\alpha) = [L^{-1}].(q) \quad (M 4-12)$$

4.3-2 RELATIONS DEPLACEMENTS-DEFORMATIONS

Maintenant on va former le vecteur déformations, à partir de l'expression (M 4-3) :

$$(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6.x & -2.y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2.x & -6.y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4.(x+y) & 0 \end{bmatrix} (\alpha)$$

(M 4-13a)

Ou bien :

$$(\varepsilon) = [H].(\alpha) \quad (M 4-13b)$$

Avec :

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6.x & -2.y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2.x & -6.y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4.(x+y) & 0 \end{bmatrix}$$

(M 4-13c)

de (M 4-12) et (M 4-13) on a :

$$(\varepsilon) = [H].[L^{-1}].(q) \quad (M 4-14a)$$

posons :

$$[S] = [H].[L^{-1}] \quad (M 4-15)$$

on obtient :

$$(\varepsilon) = [S].(q) \quad (M 4-14b)$$

4.3-3 DERIVATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE

On a vu aux chapitres précédents -formule (3-1)- que l'énergie de déformation est donnée par :

$$U = 1/2 \int_V (\epsilon)^T \cdot (\sigma) dv$$

Et d'après (M 4-14) et (M 4-5)

$$(\epsilon)^T = (q)^T \cdot [S]^T \quad (M 4-14b)$$

$$(\sigma) = [C] \cdot [S] \cdot (q) \quad (M 4-5c)$$

La substitution de ces expressions dans celle de l'énergie de déformation , nous donne :

$$U = 1/2 \cdot \int \int (\epsilon)^T \cdot [S]^T \cdot [C] \cdot [S] \cdot (q) dx \cdot dy$$

sachant que :

$$F_i = \partial U / \partial q_i$$

et

$$(F) = [K] \cdot (q)$$

on peut dériver la matrice de rigidité élémentaire à partir de l'énergie de déformation ;

$$[K] = \int \int [S]^T \cdot [C] \cdot [S] \cdot dx \cdot dy \quad (M 4-16a)$$

ou bien :

$$[K] = \iint_S [L^{-1}]^T [H]^T [C] [H] [L^{-1}] dx dy$$

(M 4-16b)

Cette intégration est très complexe ,pour cela on a recours aux intégrations numériques qui nous facilitent cette tâche .

On remarque dans l'expression ,que seule la matrice (H) dépend de x et y

Pour cela on cherche des matrices (HC),(HCX) et (HCY) indépendantes des variables x et y,de telle sorte qu'on ait une formulation nous permettant de programmer l'expression de la matrice de rigidité.Pour cela on prend (H) sous la forme :

$$[H] = [HC] + [HCX] .x + [HCY] .y \quad (M 4-17)$$

4.3-4 DERIVATION DU VECTEUR FORCES ELEMENTAIRES

Le vecteur force (F) est obtenue d'après la formule ci-après :

$$(F) = \iint_S p(x,y) [N]^T dx dy + \sum_i (Q_i) [N(x_i, y_i)]^T$$

(M 4-18)

Où :

$p(x,y)$ est la charge répartie sur la plaque.

Q_i les forces appliquées aux noeuds.

et $[N]$ est le vecteur ligne reliant la déflexion w au vecteur déplacements (q) .

d'ou:

$$w = [N] \cdot (q) \quad (M 4-19)$$

D'après l'expression (4-7) on trouve :

$$(w) = [1, x, y, x^2, x \cdot y, y^2, x^3, (x^2 \cdot y + x \cdot y^2), y^3] (\alpha)$$

et de (4-12)

$$(\alpha) = [L^{-1}] \cdot (q)$$

La combinaison de (4-7) et (4-12) , nous donne :

$$(w) = [1, x, y, x^2, x \cdot y, y^2, x^3, (x^2 \cdot y + x \cdot y^2), y^3] \cdot [L^{-1}] \cdot (q)$$

(M 4-20)

La comparaison de (M 4-19) et (M 4-20) , nous donne :

$$[N] = [1, x, y, x^2, x \cdot y, y^2, x^3, (x^2 \cdot y + x \cdot y^2), y^3] \cdot [L^{-1}]$$

(M 4-21)

4.4 ELEMENTS RECTANGULAIRES A DOUZE (12) DEGRES DE LIBERTES

4.4-1 FONCTION DE DEPLACEMENTS

Le polynôme caractéristique d'un tel élément, contient douze termes et qui est aussi incomplet ; la fonction de déplacement est donnée par :

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot x^2 + \alpha_5 \cdot x \cdot y + \alpha_6 \cdot y^2 + \alpha_7 \cdot x^3 + \alpha_8 \cdot x^2 \cdot y + \alpha_9 \cdot x \cdot y^2 + \alpha_{10} \cdot y^3 + \alpha_{11} \cdot x^3 \cdot y + \alpha_{12} \cdot x \cdot y^3$$

(4-23a)

4.4-2 RELATIONS DEPLACEMENTS-DEFORMATIONS

En procédant de la même manière qu'on a fait pour l'élément triangulaire, on obtient, pour chaque noeud :

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ (\theta_x)_i \\ (\theta_y)_i \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i \cdot y_i & y_i^2 & x_i^3 & x_i^2 \cdot y_i & x_i \cdot y_i^2 & y_i^3 & x_i^3 \cdot y_i & x_i \cdot y_i^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_i & 2 \cdot y_i & 0 & x_i^2 & 2 \cdot x_i \cdot y_i & 3 \cdot y_i^2 & x_i^3 & 3 \cdot x_i \cdot y_i^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \cdot x_i & -y_i & 0 & -3 \cdot x_i^2 & -2 \cdot x_i \cdot y_i & -y_i^2 & 0 & -3 \cdot x_i^2 \cdot y_i & -y_i^3 \end{bmatrix}$$

.(α)

(M 4-24)

Où :

$$(\alpha)_i = \{ \alpha_i, i = 1, 12 \}$$

(M 4-23b)

De la même façon, on trouve pour tout l'élément :

$$(\mathbf{q}) = [\mathbf{L}] \cdot (\alpha)$$

(M 4-25)

avec:

$$[L] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i.y_i & y_i^2 & x_i^3 & x_i^2.y_i & x_i.y_i^2 & y_i^3 & x_i^3.y_i & x_i.y_i^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_i & 2.y_i & 0 & x_i^2 & 2.x_i.y_i & 3.y_i^2 & x_i^3 & 3.x_i.y_i^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2.x_i & -y_i & 0 & -3.x_i^2 & -2.x_i.y_i & -y_i^2 & 0 & -3.x_i^2.y_i & -y_i^3 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j.y_j & y_j^2 & x_j^3 & x_j^2.y_j & x_j.y_j^2 & y_j^3 & x_j^3.y_j & x_j.y_j^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_j & 2.y_j & 0 & x_j^2 & 2.x_j.y_j & 3.y_j^2 & x_j^3 & 3.x_j.y_j^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2.x_j & -y_j & 0 & -3.x_j^2 & -2.x_j.y_j & -y_j^2 & 0 & -3.x_j^2.y_j & -y_j^3 \\ 1 & x_k & y_k & x_k^2 & x_k.y_k & y_k^2 & x_k^3 & x_k^2.y_k & x_k.y_k^2 & y_k^3 & x_k^3.y_k & x_k.y_k^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_k & 2.y_k & 0 & x_k^2 & 2.x_k.y_k & 3.y_k^2 & x_k^3 & 3.x_k.y_k^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2.x_k & -y_k & 0 & -3.x_k^2 & -2.x_k.y_k & -y_k^2 & 0 & -3.x_k^2.y_k & -y_k^3 \\ 1 & x_l & y_l & x_l^2 & x_l.y_l & y_l^2 & x_l^3 & x_l^2.y_l & x_l.y_l^2 & y_l^3 & x_l^3.y_l & x_l.y_l^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_l & 2.y_l & 0 & x_l^2 & 2.x_l.y_l & 3.y_l^2 & x_l^3 & 3.x_l.y_l^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2.x_l & -y_l & 0 & -3.x_l^2 & -2.x_l.y_l & -y_l^2 & 0 & -3.x_l^2.y_l & -y_l^3 \end{bmatrix}$$

(M 4-26)

Le tenseur déformations s'exprime alors :

$$(\varepsilon) = \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ -2. \partial^2 w / \partial x. \partial y \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6.x & -2.y & 0 & 0 & -6.x.y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2.x & -6.y & 0 & -6.x.y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4.x & -4.y & 0 & -6.x^2 & -6.y^2 \end{bmatrix} (\alpha)$$

(M 4-27a)

Ou :

$$(\varepsilon) = [H]. (\alpha) \quad (M 4-27b)$$

Comme pour l'élément triangulaire on trouve :

$$(\varepsilon) = [H]. [L^{-1}]. (q)$$

$$[S] = [H]. [L^{-1}]$$

4.4-3 DERIVATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE

Finalement, on peut construire la matrice de rigidité élémentaire à partir des expressions (M 4-16) :

$$[K] = \int \int_s [S]^T [C] [S] dx dy$$

ou bien :

$$[K] = \int \int_s [L^{-1}]^T [H]^T [C] [H] [L^{-1}] dx dy$$

comme la matrice (HD) contient les variables $x, y, x.y, x^2$ et y^2 on essaiera de trouver une formulation qui nous permet de calculer la matrice de rigidité à l'aide d'un programme .

Pour cela , on adopte l'écriture suivante , de la matrice (HD) :

$$[H] = [HC] + [HX].x + [HY].y + [HX2].x^2 + [HXY].x.y + [HY2].y^2$$

(M 4-28)

4.4-4 DERIVATION DU VECTEUR FORCES ELEMENTAIRE

Le vecteur force (F) est obtenue d'après la formule (M 4-18)

$$(F) = \int \int_s p(x,y) [N]^T dx dy + \sum_i (Qi) [N(x_i, y_i)]^T$$

Où :

$p(x,y)$ est la charge répartie sur la plaque.

Q_i les forces appliquées aux noeuds.

et $[N]$ est le vecteur ligne reliant la déflexion w au vecteur déplacements (q) -formule (M 4-19)-.

d'où:

$$w = [N] \cdot (q) \quad (M 4-29)$$

D'après l'expression (4-23) on trouve :

$$(w) = [1, x, y, x^2, x \cdot y, y^2, x^3, x^2 \cdot y, x \cdot y^2, y^3, x^3 \cdot y, x \cdot y^3] (\alpha) \quad (M 4-23c)$$

et de (4-12)

$$(\alpha) = [L^{-1}] \cdot (q)$$

La combinaison de (4-23) et (4-29) , nous donne :

$$(w) = [1, x, y, x^2, x \cdot y, y^2, x^3, x^2 \cdot y, x \cdot y^2, y^3, x^3 \cdot y, x \cdot y^3] \cdot [L^{-1}] \cdot (q) \quad (M 4-30)$$

La comparaison de (M 4-29) et (M 4-30) , nous donne :

$$[N] = [1, x, y, x^2, x \cdot y, y^2, x^3, x^2 \cdot y, x \cdot y^2, y^3, x^3 \cdot y, x \cdot y^3] \cdot [L^{-1}] \quad (M 4-31)$$

4.5 APPLICATION AUX MATERIAUX COMPOSITES

Comme il a été dit avant , les matériaux composites remplacent de plus en plus les matériaux ordinaires , aussi bien que la méthode des éléments finis devient de plus en plus généralisée dans le domaine de calcul des structures ; mais l'hétérogénéité des matériaux composites nous oblige d'apporter quelques modifications sur la théorie des éléments finis afin qu'on puisse l'appliquer sur des structures en composites.

On a vu au chapitre 2 que le cas de chargement transverse de plaques en matériaux composites, entraîne une flexion de ces dernières par-rapport à un plan perpendiculaire à celui du chargement et des déformations planes dans le plan de ce dernier ,

celà pour le cas de stratifiés non symétriques ou anti symétriques. Tandis que pour les stratifiés symétriques il n'y a que la flexion. Pour notre cas ,dans le but de simplifier les calculs on ne considérera que le cas de la symétrie miroir .

Pour former la matrice de rigidité d'une plaque en matériaux composites on se sert des relations (3-1) qui nous donne l'énergie de déformation, (M 4-16b) qui donne l'expression de la matrice de rigidité de n'importe quel élément et de la matrice d'élasticité d'un stratifié symétrique -symétrie miroir- .

Donc la combinaison de ces relations nous donne la matrice de rigidité d'un stratifiés en flexion :

$$[K] = \int \int_S [L^{-1}]^T [H]^T [D] \cdot [H] \cdot [L^{-1}] \cdot dx \cdot dy$$

avec:

$$D_{ij} = 1/3 \cdot \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k \cdot (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

Cette relation est déduite d'après l'utilisation des expressions (M 2-49f) , (2-51) , (M 4-3) et (M4-4)

On utilisera , dans le cas des éléments triangulaires les formules (M 4-11) , (M 4-13) et (M 4-17) pour le calcul des matrices (L) et (H)

Les expressions (M 4-26) , (M 4-27) et (M 4-28) sont utilisées pour le calcul des matrices de rigidité des éléments rectangulaires.

4.6 ASSEMBLAGE DE LA MATRICE DE RIGIDITE GLOBALE ET DU VECTEUR FORCES GLOBAL

L'assemblage de la matrice de rigidité globale et du vecteur forces global se fait de la même façon que celle décrite au paragraphe 3.6 du chapitre 3 .

4.6-1 UTILISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES

L'utilisation des conditions aux limites se fait de la même manière que celle du chapitre 3 paragraphe 3.7 avec la seule différence de ce dernier cas du nombre de degrés de liberté par noeuds -dans ce cas là on a trois mouvements possibles et trois forces appliquées pour chaque noeud ($X = 3$)-.

4-6-2 RESOLUTION

Une fois la matrice de rigidité et le vecteur forces , assemblés on procède à la résolution du système statique :

$$[K] \cdot (q) = (F)$$

C'est un système linéaire ,qui peut être résolu par utilisation d'un Algorithme de résolution,comme celui de Gauss-Jordan , Gauss-Seidel ou par la méthode des éliminations.^(*)

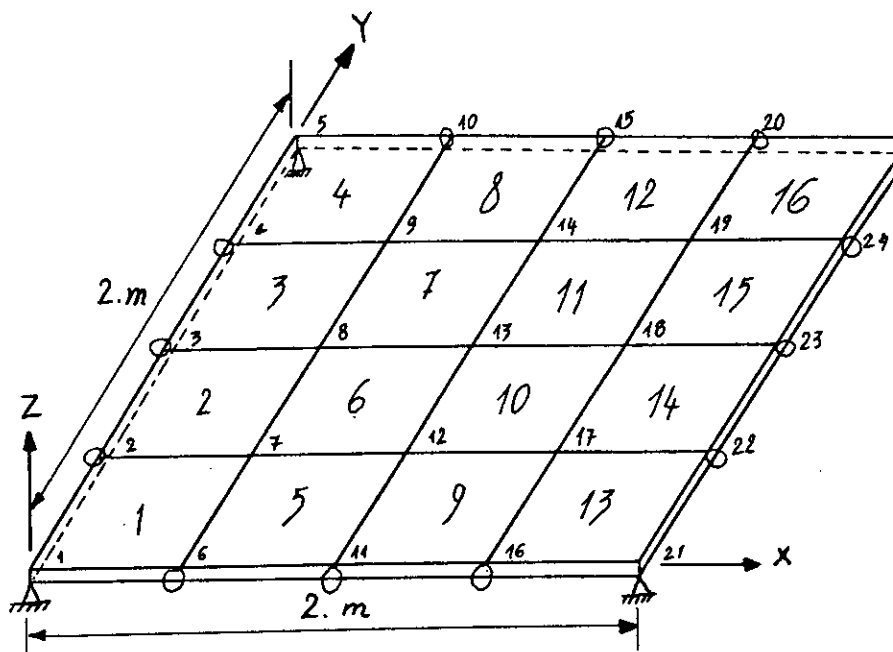
^(*) Cf ANNEXE1.

4.7 EXEMPLES D'APPLICATIONS

DONNEES GEOMETRIQUES

NOMBRE D'ELEMENTS = 16
 NOMBRE DE NOEUDS = 25
 EPAISSEUR = 0.01 m

N° Et	d. d. l			coord	
	1	2	3	X	Y
1	0	0	0	0.0	0.0
2	0	0	1	0.0	0.5
3	0	0	1	0.0	1.0
4	0	0	1	0.0	1.5
5	0	0	0	0.0	2.0
6	0	1	0	0.5	0.0
7	1	1	1	0.5	0.5
8	1	1	1	0.5	1.0
9	1	1	1	0.5	1.5
10	0	1	0	0.5	2.0
11	0	1	0	1.0	0.0
12	1	1	1	1.0	0.5
13	1	1	1	1.0	1.0
14	1	1	1	1.0	1.5
15	0	1	0	1.0	2.0
16	0	1	0	1.5	0.0
17	1	1	1	1.5	0.5
18	1	1	1	1.5	1.0
19	1	1	1	1.5	1.5
20	0	1	0	1.5	2.0
21	0	0	0	2.0	0.0
22	0	0	1	2.0	0.5
23	0	0	1	2.0	1.0
24	0	0	1	2.0	1.5
25	0	0	0	2.0	2.0



N° Et	Connections			
	I	J	K	L
1	1	6	7	2
2	2	7	8	3
3	3	8	9	4
4	4	9	10	5
5	6	11	12	7
6	7	12	13	8
7	8	13	14	9
8	9	14	15	10
9	11	16	17	12
10	12	17	18	13
11	13	18	19	14
12	14	19	20	15
13	16	21	22	17
14	17	22	23	18
15	18	23	24	19
16	19	24	25	20

LES CONTRAINTES

EN (Pa)

Elt	SIGx	SIGy	TAUxy
1	91.06820	-91.06815	0.0000000E+00
2	-174.3102	-115.8572	-157.3364
3	-315.6581	-78.91452	-216.3215
4	-300.6722	-2.888412	-157.3364
5	-102.5927	-121.2519	58.98511
6	-230.4478	-230.4478	23.75328
7	-230.4477	-230.4477	-23.75334
8	-102.5926	-121.2519	-58.98508
9	-102.5927	-121.2519	-58.98517
10	-230.4477	-230.4477	-23.75329
11	-230.4477	-230.4477	23.75327
12	-102.5927	-121.2519	58.98515
13	-55.40743	-55.40741	-157.3363
14	-121.2519	-102.5926	-58.98512
15	-121.2519	-102.5926	58.98517
16	-55.40744	-55.40744	157.3364

CALCUL DES DEPLACEMENTS POUR LA FLEXION DE LA PLAQUE
CONSIDEREE EN MATERIAUX ISOTROPES

NO Nd	Wz	Qx	Qy
1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
2	0.000E+00	0.000E+00	0.172E-03
3	0.000E+00	0.000E+00	0.234E-03
4	0.000E+00	0.000E+00	0.172E-03
5	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
6	0.000E+00	-0.172E-03	0.000E+00
7	-0.745E-04	-0.110E-03	0.110E-03
8	-0.102E-03	0.143E-10	0.152E-03
9	-0.745E-04	0.110E-03	0.110E-03
10	0.000E+00	0.172E-03	0.000E+00
11	0.000E+00	-0.234E-03	0.000E+00
12	-0.102E-03	-0.152E-03	0.909E-12
13	-0.142E-03	0.239E-10	0.364E-11
14	-0.102E-03	0.152E-03	-0.546E-11
15	0.000E+00	0.234E-03	0.000E+00
16	0.000E+00	-0.172E-03	0.000E+00
17	-0.745E-04	-0.110E-03	-0.110E-03
18	-0.102E-03	0.136E-10	-0.152E-03
19	-0.745E-04	0.110E-03	-0.110E-03
20	0.000E+00	0.172E-03	0.000E+00
21	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
22	0.000E+00	0.000E+00	-0.172E-03
23	0.000E+00	0.000E+00	-0.234E-03
24	0.000E+00	0.000E+00	-0.172E-03
25	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00

2^{ème} cas : MATERIAUX ANISOTROPES

DONNEES DU MATERIAU

STRATIFIES EN VERRE/EPOXY

EPAISSEUR TOTALE = 0.01 m

CHARGE REPARTIT = -40.0 N/m²

NOMBRE DE PLIS = 8

E ₁₁ (Pa)	E ₂₂ (Pa)	G ₁₂ (Pa)	ν ₁₂	h (m)
40.E09	8.25E09	4.13E09	.25	-0.00375
40.E09	8.25E09	4.13E09	.25	-0.00250
40.E09	8.25E09	4.13E09	.25	-0.00125
40.E09	8.25E09	4.13E09	.25	0.00000
40.E09	8.25E09	4.13E09	.25	0.00125
40.E09	8.25E09	4.13E09	.25	0.00250
40.E09	8.25E09	4.13E09	.25	0.00375
40.E09	8.25E09	4.13E09	.25	0.00500

RESULTATS

a/ Strtifiés [0,0,45,45]°

N° NOEUD	DEPLACEMENTS		
	wz	θ _x	θ _y
1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
2	0.000E+00	0.000E+00	1.068E-02
3	0.000E+00	0.000E+00	1.436E-02
4	0.000E+00	0.000E+00	1.068E-02
5	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
6	0.000E+00	-1.151E-01	0.000E+00
7	-4.596E-03	-5.004E-03	6.744E-03
8	-5.844E-03	2.544E-03	9.000E-03
9	-4.332E-03	6.324E-03	6.840E-03
10	0.000E+00	9.444E-03	0.000E+00
11	0.000E+00	-1.512E-02	0.000E+00
12	-6.240E-03	-8.184E-03	-3.792E-02
13	-8.196E-03	2.496E-10	9.840E-10
14	-6.240E-03	8.184E-03	3.748E-04
15	0.000E+00	1.512E-04	0.000E+00
16	0.000E+00	-9.300E-03	0.000E+00
17	-4.332E-03	-6.324E-03	-6.840E-03
18	-5.844E-03	-2.544E-04	-9.000E-03
19	-4.596E-05	5.652E-03	-6.715E-03
20	0.000E+00	1.368E-03	0.000E+00
21	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
22	0.000E+00	0.000E+00	-9.420E-03
23	0.000E+00	0.000E+00	-1.308E-03
24	0.000E+00	0.000E+00	-1.063E-02
25	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00

N° ELT	CONTRAINTES.		
	σ_x (Pa)	σ_y (Pa)	τ_{xy} (Pa)
1	284.8430	-16.83294	0.1157360
2	-482.3842	-78.10297	-113.2257
3	-831.0956	-86.83094	-150.6084
4	-880.4312	-60.07411	-120.0876
5	-236.5251	-48.38929	12.86735
6	-529.0513	-67.25915	-15.40115
7	-517.5386	-76.12537	-39.59912
8	-236.3816	-59.15641	-57.56070
9	-236.3816	-59.15643	-57.56070
10	-517.5387	-76.12537	-39.59912
11	-529.0513	-67.25912	-15.40114
12	-236.5251	-48.38927	12.86734
13	-121.7404	-49.27214	-98.49848
14	-235.0386	-43.38021	-45.45946
15	-254.0031	-22.46572	12.60777
16	-98.77950	4.099512	86.58691

b/ Stratifiés [-45,-45,90,90]s

N° NOEUD	DEPLACEMENTS		
	wz	θ_x	θ_y
1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
2	0.000E+00	0.000E+00	3.984E-03
3	0.000E+00	0.000E+00	9.396E-03
4	0.000E+00	0.000E+00	1.086E-03
5	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
6	0.000E+00	-3.984E-03	0.000E+00
7	-2.808E-03	-5.520E-03	5.520E-03
8	-4.512E-03	-1.174E-02	6.540E-03
9	-3.588E-03	4.644E-03	4.644E-03
10	0.000E+00	1.086E-03	0.000E+00
11	0.000E+00	-9.396E-03	0.000E+00
12	-4.512E-03	-6.540E-03	1.174E-03
13	-6.264E-03	0.000E+00	-5.208E-11
14	-4.512E-03	6.540E-03	-1.174E-02
15	0.000E+00	1.086E-03	0.000E+00
16	0.000E+00	-1.086E-03	0.000E+00
17	-3.488E-03	-4.644E-03	-4.644E-03
18	-4.512E-03	1.174E-03	-6.540E-03
19	-2.808E-03	5.520E-03	-5.520E-03
20	0.000E+00	3.984E-03	0.000E+00
21	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
22	0.000E+00	0.000E+00	-1.086E-02
23	0.000E+00	0.000E+00	-9.396E-03
24	0.000E+00	0.000E+00	-3.984E-03
25	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00

N° ELT	CONTRAINTES		
	σ_x (Pa)	σ_y (Pa)	τ_{xy} (Pa)
1	38.92297	-38.92290	-7.63E-06
2	24.13374	43.63451	-166.2195
3	-13.91335	66.85516	-198.7045
4	-51.99908	40.74890	-109.3879
5	-142.9752	-132.1570	156.3224
6	-210.0812	-210.0812	134.8214
7	-196.5970	-196.5970	91.81262
8	-91.80553	-103.5166	24.85003
9	-91.80551	-103.5166	24.85007
10	-196.5970	-196.5969	91.81250
11	-210.0812	-210.0812	134.8215
12	-142.9753	-132.1571	156.3224
13	55.71538	55.71540	-180.0891
14	-103.5167	-91.80560	24.85006
15	-132.1571	-142.9752	156.3224
16	-107.0964	-107.0964	181.0006

COMMENTAIRES

A l'issue de cet exemple ,il est facile de voir l'importance des matériaux composites qui d'après les résultats obtenus,résiste de la même manière à la flexion que les matériaux ordinaires,Comme on peut avoir des résultats meilleurs en utilisant d'autres genres de stratifiés conçus spécialement pour travailler à la flexion.

CHAPITRE 5

VIBRATION DES PLAQUES EN MATERIAUX COMPOSITES

5.1 INTRODUCTION

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des structures à l'équilibre statique, il sera plus intéressant donc de faire rentrer la notion dynamique des structures, vu son importance dans la vie pratiques des ingénieurs de structures mécaniques. Vibration veut dire l'étude des mouvements oscillatoires, le but de cette étude consiste à déterminer les effets des vibrations sur les performances et les états des structures en mouvement; et cela en tirant les modes de vibrations -fréquences propres et vecteurs propres des structures-. Pour notre cas, on va considérer tout d'abord les vibrations des plaques en matériaux isotropes et on fera, par la suite leurs applications aux plaques en matériaux composites.

5.2 EXPRESSION DE L'ENERGIE CINETIQUE

L'énergie cinétique d'un corps quelconque est donnée par l'expression suivante :

$$T = m \cdot \dot{q}^2 / 2 \quad (5-1)$$

Où :

m : est la masse du corps considéré.

\dot{q} : est sa vitesse de déplacement.

L'énergie cinétique d'un système continue sera donnée par :

$$T = \rho \cdot h / 2 \int \int \dot{w}^2 dx \cdot dy \quad (5-2)$$

où

ρ : la masse volumique du matériau utilisé.

h : l'épaisseur de la plaque.

w : l'expression de la déflexion ou polynôme caractéristique.

5.3 EQUATION DE MOUVEMENT -EQUATION DE LAGRANGE-

L'équation de mouvement peut s'obtenir en utilisant l'équation de Lagrange :

$$d/dt (\partial T/\partial \dot{q}_i) + \partial U/\partial q_i = F_i \quad (5-3)$$

avec:

t : variable temps

U : l'énergie de déformation du système considéré

le terme $\partial U/\partial q_i$ nous donne la matrice de rigidité comme il a été déjà mentionné dans les chapitres précédents .

le terme $\partial T/\partial \dot{q}_i$ nous donne la matrice masse .

La substitution de l'expression (5-1) dans (5-3) nous donne -en supposant,absent,le terme de l'énergie de déformation-:

$$m_i \ddot{q}_i = F_i \quad (5-4)$$

qui n'est autre que la première loi de Newton.

avec:

\ddot{q} : la composante d'accélération.

sous forme matricielle l'expression (5-3) s'écrit :

$$(F) = [K].(q) + [M].(\ddot{q}) \quad (M 5-5)$$

Si on suppose que le mouvement est sinusoidal avec une fréquence naturelle ω :

$$(q) = (q_{max}).\sin \omega.t \quad (M 5-6a)$$

alors :

$$(\dot{q}) = \omega .(q_{max}).\cos \omega.t \quad (M 5-6b)$$

et:

$$(\ddot{q}) = -\omega^2.(q_{max}).\sin \omega.t \quad (M 5-6c)$$

d'où:

$$(\ddot{q}) = -\omega^2.(q) \quad (M 5-6d)$$

si de plus on suppose que l'on a un système en vibration libre -sans forces d'amortissements-; l'expression (M 5-5) devient

alors:

$$(0) = \{ [K] - \omega^2 . [M] \} .(q) \quad (M 5-7)$$

où:

ω : sont les valeurs propres ou fréquences propres,

(q) : les vecteurs propres correspondants .

5.4 DERIVATION DE LA MATRICE MASSE

La matrice masse peut être calculée à partir de l'expression (5-2), sachant que :

$$[M] = \partial T / \partial \dot{q}_i$$

et

$$w = [N] \cdot (q)$$

comme suit:

$$[M] = \rho \cdot h \int \int_s [N]^T \cdot [N] dx \cdot dy \quad (5-8)$$

où la matrice (N) est donnée par les formules :

(M 4-21) dans le cas des éléments triangulaires ,

(M 4-31) dans le cas des éléments rectangulaires .

5.5 APPLICATION AUX MATERIAUX COMPOSITES

La matrice masse pour une plaque en matériau composite ne diffère pas de celle d'un matériaux isotropes , cela peut être facilement vérifié d'après la formulation de la matrice masse élémentaire qui ne contient pas de termes dépendants de la nature du matériau, sauf la masse volumique ρ qui est considérée constante pour un matériau donné .

5.6 ASSEMBLAGE DE LA MATRICE MASSE GLOBALE

L'assemblage de la matrice masse globale est similaire à celui de la matrice de rigidité globale -il a été déjà développé aux paragraphes 3.6 et 4.6 des chapitres 3 et 4 respectivement .

5.6-1 UTILISATION DES CONDITION AUX LIMITES

L'utilisation des conditions aux limites pour la matrice masse globale (assemblée) se fait ,aussi ,de la même façon que

pour la matrice de rigidité globale.

5.6-2 RESOLUTION

Une fois ,les matrices de rigidité et masse assemblées on procède à la résolution du système dynamique donné par l'expression (M 5-7) ,qui consiste à rechercher les valeurs et vecteurs propres correspondants ; cela peut se faire en se servant d'un Algorithme de résolution des systèmes dynamiques comme l'Algorithme de la puissance itérée , Rustishauser ou Jacobi.Pour notre cas on utilisera l'Algorithme de Jacobi^(*).

^(*) Cf ANNEXE 1.

CHAPITRE 6

CONCLUSIONS & RECOMMANDATIONS

Cette étude m'a permis de me familiariser avec les calculs des structures en se servant de la Méthode des Eléments Finis et l'appliquer aux Matériaux composites, de voir une des applications où l'on ne peut pas s'en passer de l'outil informatique, de faire une recherche bibliographique variée

L'objectif de ce travail était d'élaborer des programmes, d'usage courant, tant aux élèves ingénieurs qu'aux industriels, où l'on peut s'en servir pour la détermination des déplacements, contraintes et les modes de vibrations, des structures en matériaux composites et de vérifier les résultats obtenus en les comparant à ceux des matériaux classiques.

Les résultats obtenus aux chapitres 4, 5, nous donne une information générale sur l'intérêt de l'utilisation des matériaux composites dans plusieurs domaines notamment le domaine de l'Aéro-spatial et cela est dû à leur propriétés physiques -modules d'élasticités élevés, petites déformations, ...-

Pour conclure, il est intéressant de donner quelques recommandations relatives à l'enrichissement de ce travail et cela en proposant d'avantages sujets dans le même contexte que le présent; en considérant une discrétisation conforme des structures - éléments triangulaires à 10 d.d.l, rectangulaires à 16 d.d.l et des éléments poutres pour l'étude des treillis et des structures en barres - et de prendre en considération l'effet de la température sur le matériau durant son travail. Une telle étude n'aura de valeurs réelles qu'après avoir été vérifiée par l'expérimentation.

ANNEXE 1

METHODES DE RESOLUTIONS NUMERIQUES

1 SYSTEMES STATIQUES

Parmi les méthodes de résolution des systèmes statique du type :

$$[K] \cdot (q) = (F)$$

on a choisit la méthode d'élimination de Gauss qui est constituée de deux étapes importantes :

"La triangularisation & la résolution".

a/ TRIANGULARISATION

Cette étape consiste à modifier le système d'équations considéré , de manière à éliminer toutes les composantes inconnues du vecteur déplacements (q) ;sauf la dernière composante , dans le cas où on veut obtenir une matrice triangulaire inferieure contrairement au cas où on veut avoir une matrice triangulaire superieure , où on ne laisse que la dernière composante du vecteur déplacements .

b/ RESOLUTION

Une fois la matrice triangularisée , il est trées facile de déterminer les composantes inconnues du vecteur (q) .

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \dots & 0 \\ k_{12} & k_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

SUPERIEURE

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ 0 & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

MATRICES TRIANGULAIRES

INFERIEURE

La première composante du vecteur déplacements -dans le cas de matrice triangulaire inferieure - est déterminée à partir de la première ligne :

$$k_{11}.q_1 = F_1$$

d'où :

$$q_1 = F_1 / k_{11}$$

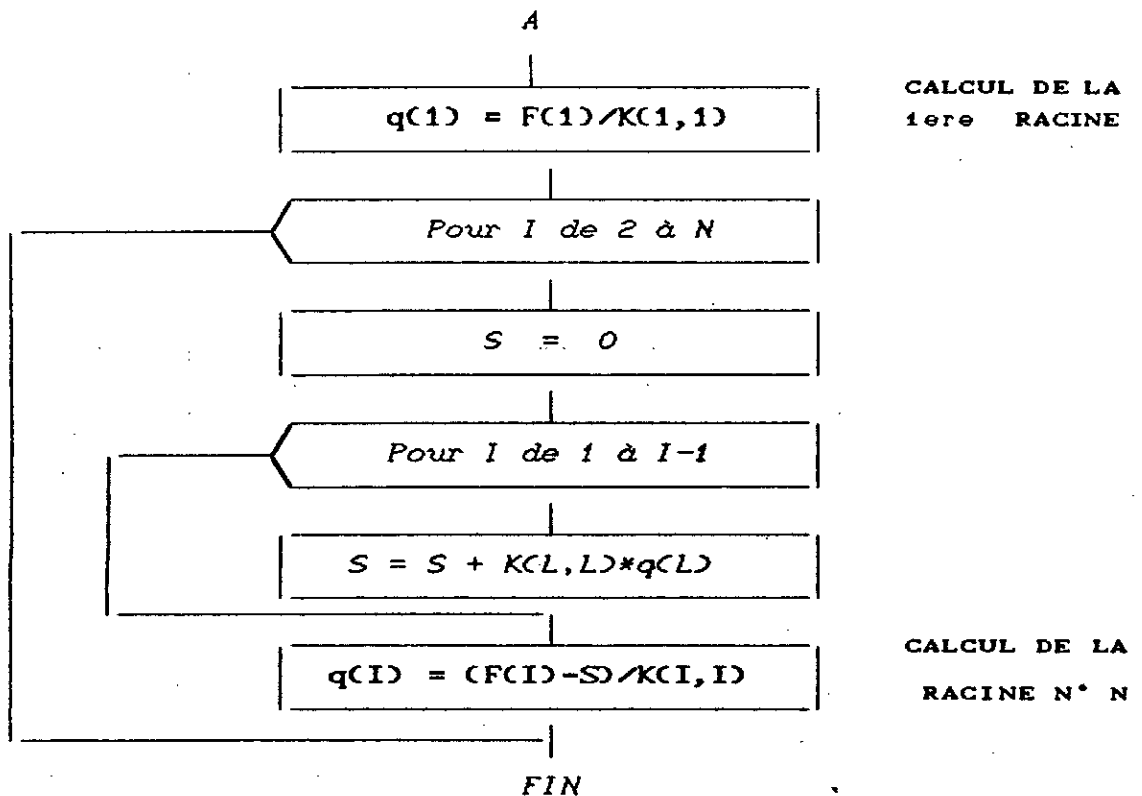
en reportant cette valeur dans la deuxième ligne on obtient :

$$k_{22}.q_2 = F_2 - k_{21}.q_1$$

q_2 est calculée sans difficulté :

$$q_2 = (F_2 - k_{21}.q_1) / k_{22}$$

de la même manière on peut calculer tout le reste du vecteur .
l'organigramme ci-après montre les différentes étapes qu'effectue notre programme .



2 SYSTEMES DYNAMIQUES

Pour la résolution des problèmes des systèmes dynamiques du type :

$$\left\{ [K] - \omega^2 [M] \right\} = (q)$$

on a utilisé la méthode de Jacobi , qui est une des méthodes les plus utilisées pour le calcul des valeurs et vecteurs propres ; pour des matrices symétriques et définies positives (c'est à dire que les matrices (K) et (M) ne doivent pas contenir des termes diagonaux négatifs ou nuls). Cette méthode consiste à appliquer aux matrices (K) et (M) une succession de transformations permettant d'obtenir de nouvelles matrices équivalentes aux deux premières mais , cette fois-ci les matrices sont diagonales . Une fois les matrices diagonalisées , il est facile de déterminer les valeurs propres , solutions du système considéré :

$$\lambda_i = k_{ii} / M_{ii}$$

où :

λ_i est la i ème valeur propre

Les pulsations propres sont données par la racine des valeurs propres :

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$$

les périodes sont :

$$T_i = 2 \cdot \pi / \omega_i$$

quant aux fréquences propres , elles sont obtenues par :

$$F_i = 1 / T_i$$

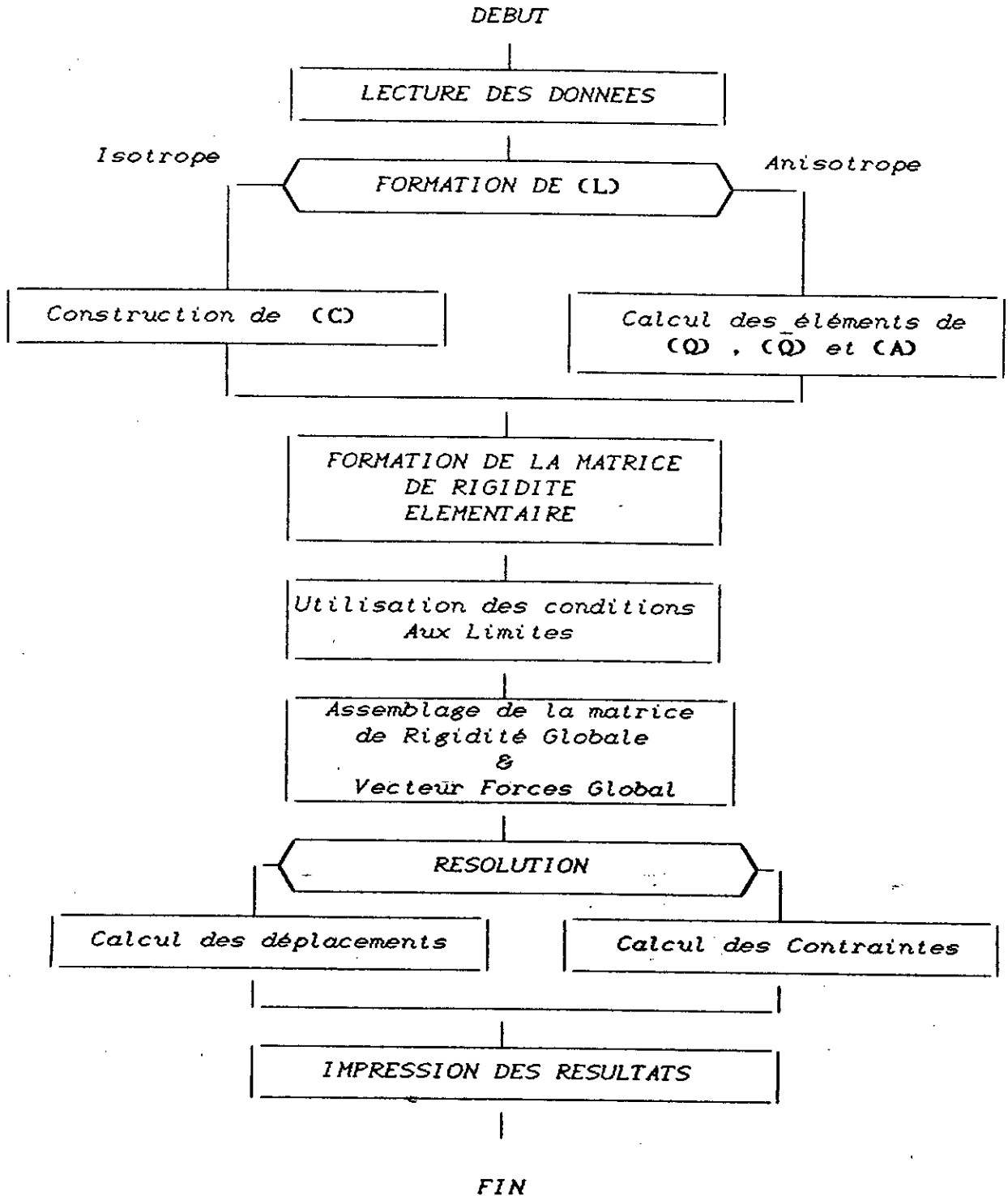
les vecteurs propres sont obtenus par substitution des valeurs propre , déjà calculées , dans le système considéré , en donnant une valeur initiale pour la première composante du vecteur propre et ensuite déterminer les autres composantes et ainsi de suite jusqu'à l'obtention de toutes les composantes des vecteurs correspondant aux valeurs propres obtenues auparavant .

ANNEXE 2

ORGANIGRAMMES & PROGRAMMES

1 SOLLICITATIONS PLANES

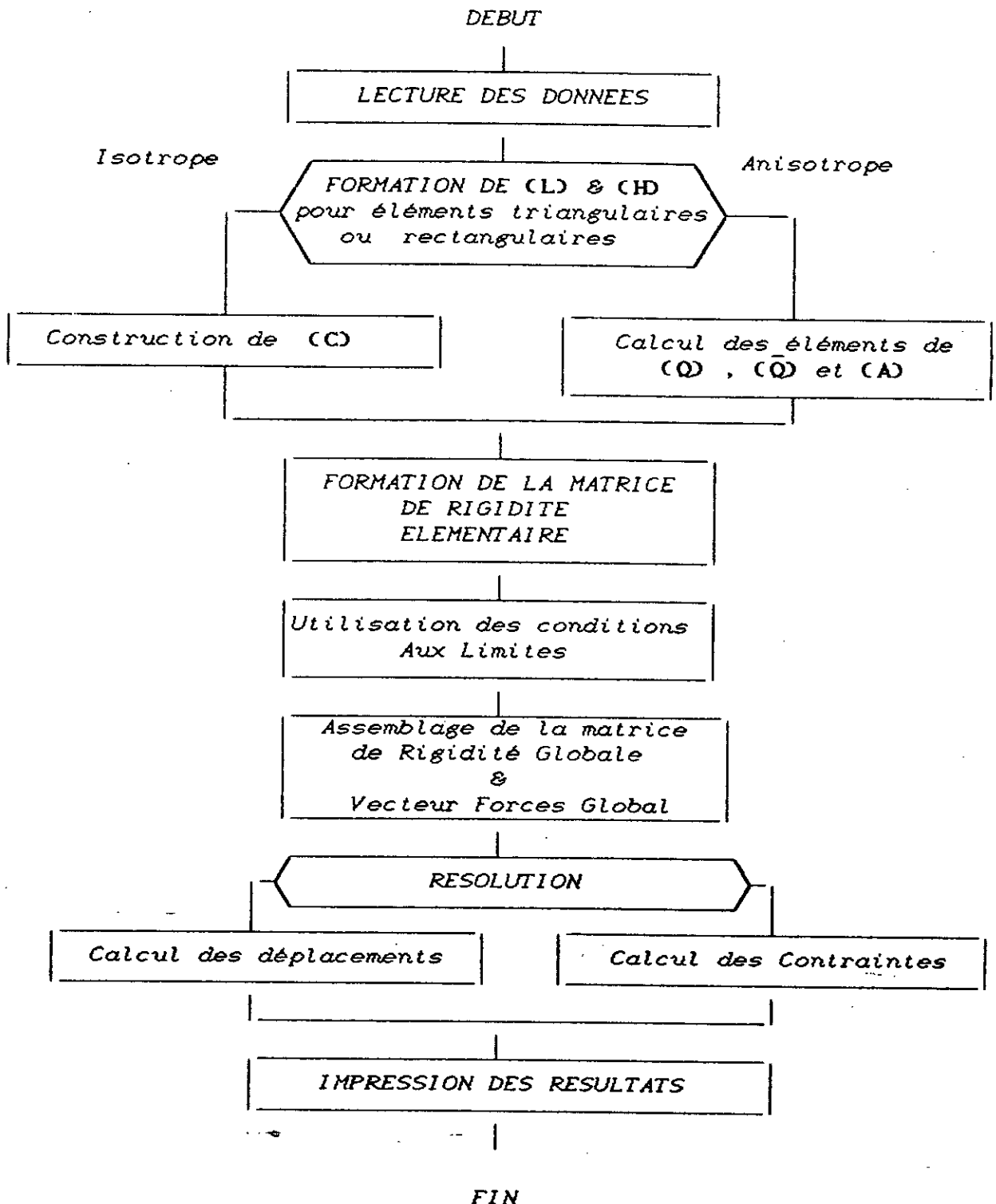
1. a ORGANIGRAMME



ORGANIGRAMMES & PROGRAMMES

2 SOLLICITATIONS FLECTIONNELLES

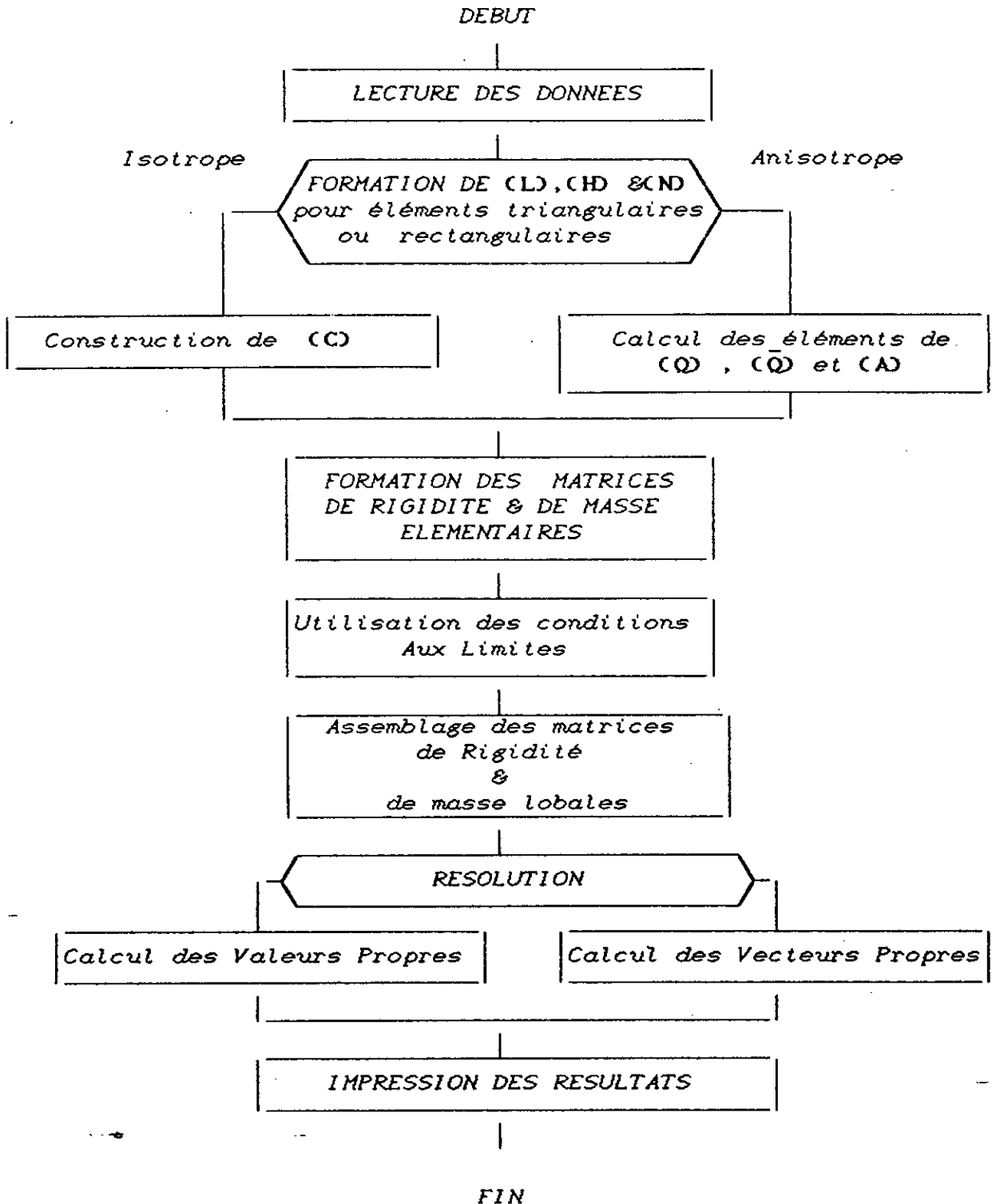
2. a ORGANIGRAMME



ORGANIGRAMMES & PROGRAMMES

3 VIBRATIONS PLANES

3. a ORGANIGRAMME



BIBLIOGRAPHIE

- J.E. ASHTON *PRIMER ON COMPOSITE MATERIALS: ANALYSIS.*
1969 Stamford TECHNOMIC PUBLICATION
- R.M. CHRISTENSEN *MECHANICS OF COMPOSITE MATERIALS.*
A. WILEY INTERSCIENCE PUBLICATION
- D. GAY *MATERIAUX COMPOSITES.*
1987 Paris EDITONS HERMES
- C. NOWAKOWSKI *METHODES DE CALCUL NUMERIQUE*
1984 Paris EDITIONS DU P. S. I
- K.C. ROCKEY *INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.*
1979 Paris EDITIONS EYROLLES
- I.H. SHAMES *ENERGY AND FINITE ELEMENT METHODS IN STRUCTURAL.
MECHANICS*
1985 W. N-Y. L HEMISPHERE PUBLISHING CORPORATION
- F.S. TSE *MECHANICAL VIBRATIONS Theory and Applications.*
1978 Boston ALLYN AND BACON, INC.
- T.Y. YANG *FINITE ELEMENT STRUCTURAL ANALYSIS.*
N. M. NEWMARK AND WILLIAM J. HALL, EDITORS
- O.C. ZIENKIEWICZ *THE FINITE ELEMENT METHOD IN ENGINEERING
SCIENCE.*
1971 London Mc GRAW-HILL PUBLISHING COMPANY LIMITED

Imprimé sur: Amstrad Pc 1512 SD
Imprimante Dmp 3160

Logiciel: CHIWRITER
Version 2.50 Française

- Juin 1989 -

