

42/88
جمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

المكتبة - المكتبة
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

THEME

ANALYSE DES DENSITES SPECTRALES ENERGETIQUES
ET LEUR APPLICATION DANS L'IDENTIFICATION
DES SYSTEMES DYNAMIQUES
CAS DES PLOTS DE SUSPENSION DU MOTEUR
F4 L 912 DU CAMION K66

Proposé par : LMS

Etudié par :

Dirigé par :

Mr A. BELLACHE

MESSAOUD - NACER Nadhira

Mr M. KSIAZEK Marek

PROMOTION JUIN 1988

E.N.P. - 10, Avenue Hacén Badi - EL-HARRACH - ALGER

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

المكتبة - المكتبة
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

THEME

ANALYSE DES DENSITES SPECTRALES ENERGETIQUES
ET LEUR APPLICATION A L'IDENTIFICATION
DES SYSTEMES DYNAMIQUES
CAS DES PLOTS DE SUSPENSION DU MOTEUR
F4 L 912 DU CAMION K66

Proposé par :

Mr KSIAZEK Marek

Etudié par :

MESSAOUD - NACER Nadhira

Dirigé par :

Mr . KSIAZEK Marek

PROMOTION JUIN 1988

E.N.P. - 10, Avenue Hacén Badi - EL-HARRACH - ALGER

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مَنْ إِلَهٌ غَيْرُ اللَّهِ يَأْتِيكُمْ بِضِيَاءٍ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE.

وزارة التعليم العالي
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

Département: .. GENIE .. MECANIQUE ..

Promoteur: .. M^r .. KSIAZEK .. Marek

Elève Ingenieur: .. MESSAOUD: NACER .. Nadhira

مطالبة :

موجه :

تلميذ مهندس

- الموضوع : تحليل الكثافة الطيفية وتطبيقه في ميدان التعرف على هياكل الأجهزة الدينامية مثل مساند للمحرك F4L312 للشاحنة K66.
- الملخص : يهدف هذا الموضوع الى عرض طريقة للتعرف على هياكل الأجهزة الدينامية بواسطة دراسة مختلف الميزات والأماكنيات لتقييم الكثافة الطيفية.

Sujet: Analyse des densités spectrales énergétiques et leur application à l'identification des systèmes dynamiques.

Cas des plots de suspension du moteur F4L 912 du camion K66

Resumé: Il s'agit d'exposer une méthode d'identification de la structure d'un système dynamique à partir de l'analyse des propriétés et des possibilités d'approximation de la densité spectrale.

Subject: Spectral density analysis, its application to the identification of dynamic systems, case of suspension plots of an engine F4L 912 of a lorry K66.

Abstract: This project offers a method which identifies the structure of a dynamic system by means of the analysis of the different properties and approximation possibilities of the spectral density.

Medicines

A mes très chers parents,
A toute ma famille,
A mes amis.

Remerciements

Je remercie beaucoup mon promoteur M^{rs} M. Ksiagek pour m'avoir aidé dans l'élaboration de ce projet, mes très chers parents qui m'ont toujours encouragée dans mes études ainsi que tous les enseignants qui ont contribué à ma formation. Je remercie également M^{rs} S. Hamdan et R. Boulahia.

Sommaire

	Pages
CHAPITRE 1 : Généralités	
I- / Introduction - - - - -	1
II- / But de l'étude - - - - -	2
 CHAPITRE 2 : Notions de mathématiques utilisées dans le projet.	
I- / Signaux aléatoires - - - - -	3
II- / Moyennes statistiques et moyennes temporelles - - - - -	3
III- / Fonctions aléatoires stationnaires - - - - -	6
IV- / Intégrales de Fourier - - - - -	7
V- / Transformation de Fourier discrète (D.F.T) - - - - -	7
VI- / Transformation de Fourier rapide (F.F.T) - - - - -	8
VII- / Algorithme de Cooley-Tukey - - - - -	9
 CHAPITRE 3 : Définition de la densité spectrale. Systèmes à multiples entrées et sorties.	
I- / Définition et propriétés de la densité spectrale - - - - -	11

II- / Application de la FFT pour le calcul de la densité spectrale	13
- / Quelques exemples réels de la densité spectrale	
III- / Systèmes à multiples entrées et sorties.	17
1- / Cas particuliers.	18

CHAPITRE 4 : Les méthodes d'approximation de la courbe de la densité spectrale et l'application de l'une d'entre elles.

I- / Méthode d'approximation basé sur l'expansion en série de Fourier	22
II- / Méthode d'approximation basé sur l'application des fonctions de Laguerre.	25
III- / Méthode d'interpolation	27
IV- / Méthode d'approximation basé sur le remplacement de la courbe logarithmique de la densité spectrale par des segments de droite.	28
V- / Approximation par un polynôme de Newton	31
VI- / Remarques importantes	33
VII- / Application d'une méthode choisie.	38

CHAPITRE 5 : Densités spectrales énergétiques et structure d'un système

I-1/ Calcul de la densité spectrale énergétique de certains systèmes dynamiques.
 Calcul de la fonction de transfert. ----- 43

1-1/ Système à un degré de liberté excité cinématiquement ----- 43

2-1/ Système à deux degrés de liberté excité cinématiquement ----- 46

3-1/ Système à deux degrés de liberté soumis à deux excitations ----- 52

4-1/ Système à un degré et demi de liberté soumis à deux excitations ----- 54

II-1/ Problème de l'identification ----- 57

CHAPITRE 6 : Application d'une méthode d'identification aux plots de suspension du moteur F4L912 du camion K66.

I-1/ Propriétés des plots de suspension ----- 59

1-1/ Rôle ----- 59

2-1/ Nombre et position des points de fixation du moteur ----- 60

II-/Enoncé du problème de l'identification
 des plots ----- 63

III-/ Utilisation des résultats numériques d'une
 analyse déjà effectuée ----- 65

 1-/ Calcul des densités spectrales énergétiques
 au niveau des points de fixation des plots -- 65

 a-) asphalt goudronné ----- 68

 b-) route pavé ----- 69

 2-/ Résultats numériques et approximation ----- 70

IV-/ Analyse par bloc ----- 73

V-/ Identification des plots de suspension du moteur
 F4L 912 du camion K66 ----- 75.a.

CHAPITRE 7 : Conclusion ----- 81

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE

-1-

GENERALITES

I-/ INTRODUCTION :

De nos jours, dans l'industrie moderne, les vibrations des machines constituent l'un des problèmes les plus préoccupants. Souvent, il s'agit de phénomènes continus et stochastiques qui peuvent conduire à des conséquences très nuisibles. Pour atténuer leur effet, il est nécessaire de faire appel à la théorie des vibrations aléatoires.

On s'intéressera particulièrement aux plots de suspension sur lesquels reposent les moteurs à combustion interne de certains camions. La détermination d'une suspension 'élastique' constitue une étude très importante. Elle permet par exemple de donner les principes à suivre pour effectuer le choix d'un plot selon ses dimensions ses caractéristiques, son type et ses applications.

II/BUT DE LETUDE :

La présente étude a pour objet de mettre en évidence une méthode permettant d'identifier la structure d'un système dynamique en se basant sur les propriétés des densités spectrales énergétiques des signaux aléatoires. À ce titre, le travail effectué consiste en :

1- / L'étude des propriétés de la densité spectrale énergétique des signaux aléatoires ainsi que celle des méthodes de son approximation dans les cas réels.

2- / L'analyse des systèmes dynamiques de structures connues afin de déterminer les dépendances mutuelles entre les densités spectrales énergétiques d'entrée et de sortie de ces structures exprimées par des fonctions de transfert.

3- / La détermination d'une procédure à suivre pour l'obtention d'un modèle mathématique décrivant pour certains cas particuliers tels que les plots de suspension d'un moteur à combustion interne d'un camion, les propriétés du système considéré.

CHAPITRE

-2-

NOTIONS DE MATHÉMATIQUES UTILISÉES DANS LE PROJET

I-/SIGNALS ALÉATOIRES :

Un signal aléatoire est un processus se développant indéfiniment dans le temps gouverné au moins partiellement par des lois probabilistes.

Un processus stochastique est une fonction de deux variables $X(K, t) = X_K(t)$ où K prend ses valeurs dans un espace des épreuves, et t sur l'axe réel du temps.

II-/MOYENNES STATISTIQUES ET

MOYENNES TEMPORELLES:

Les signaux aléatoires ne peuvent être connus en détail. Pour les caractériser, on évalue leurs moyennes des différents ordres. Celles-ci sont décrites par les formules indiquées dans le tableau récapitulatif

- 1 - .

Type de moyennes	Moyennes statistiques ou moyennes d'ensembles	Moyennes temporelles.
1- Moyennes (moment du 1 ^{er} ordre)	$\langle x(t_1) \rangle = M \{ x(t_1) \}$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 w_1(x_1, t_1) dx_1$	$\bar{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x_k(t) dt$
2- Valeur quadratique moyenne (moment initial du deuxième ordre)	$\langle x^2(t_1) \rangle = M \{ x^2(t_1) \}$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 w_1(x_1, t_1) dx_1$	$\bar{x}^2(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x_k^2(t) dt$
3- Fonction d'autocorrélation (moment initial du deuxième ordre)	$M \{ x(t_1) \cdot x(t_2) \} =$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$	$R_{xx}(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)}$ $= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x(t+\tau) dt$
4- Fonction de corrélation mutuelle. (moment initial mixte du deuxième ordre) ou fonction d'intercorrélation.	$M \{ x(t_1), y(t_2) \} =$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 y_2 w(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dy_2$	$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t+\tau)}$ $= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)y(t+\tau) dt$

Tableau 1 - Moyennes

5 - Fonction de covariance (seulement pour les moyennes statistiques.)	$K_{xx}(t_1, t_2) = M_{12} \{ x(t_1) \cdot x(t_2) \}$ $= \overline{x(t_1)x(t_2)} - \overline{x(t_1)} \cdot \overline{x(t_2)}$	$R_{xx}(Z) - [\overline{x(t)}]^2$
	$K_{xy}(t_1, t_2) = M_{12} \{ x(t_1) y(t_2) \}$ $= \overline{x(t_1)y(t_2)} - \overline{x(t_1)} \cdot \overline{y(t_2)}$	$R_{xy}(Z) - \overline{x(t)} \cdot \overline{y(t)}$
6 - Variance (seulement pour les moyennes statistiques.)	$M_2 \{ x(t_1) \} = \overline{x^2(t_1)} - [\overline{x(t_1)}]^2 =$ $= \sigma^2(t_1)$	$[\overline{x(t)}]^2 - [\overline{x(t)}]^2$

Suite du Tableau - 1 - Moyennes.

Dans le cas des moyennes temporelles, on considère une réalisation particulière $x_k(t)$ et on fait sa moyenne dans le temps contrairement au cas des moyennes d'ensembles où l'on fait la moyenne sur l'ensemble des réalisations de $x(t)$, en des instants t_1, \dots, t_n choisis arbitrairement.

III-FONCTIONS ALEATOIRES

STATIONNAIRES :

Un signal dont les propriétés statistiques sont invariantes par rapport à un changement arbitraire de l'origine du temps est dit stationnaire :

$$W_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = W_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

Sa densité de probabilité ne dépend alors pas de τ . La moyenne et la variance ne dépendent pas du temps, tandis que leur moment initial du même ordre ne dépend que d'un intervalle de temps.

C'est à dire :

$$m_x(t) = \text{constante}$$

$$\sigma_x^2(t) = \text{constante}$$

$$K_x(t, t') = K_x(t+t_1, t'+t_1)$$

IV- INTEGRALES DE FOURIER :

Les fonctions satisfaisant la condition $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$ peuvent être représentées sous forme d'une intégrale de Fourier.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{j\omega t} d\nu \quad (1) \quad ; \quad \omega = 2\pi\nu$$

$$\text{ou } F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2)$$

$F(\nu)$ représente la transformée de Fourier directe de $f(t)$ tandis que $f(t)$ est la transformée inverse de $F(\nu)$.

V- TRANSFORMATION DE FOURIER

DISCRETE (D.F.T) :

La discrétisation permet le passage d'un signal analogique à un signal numérique. Une variable continue telle que le temps sera donc représentée par un

ensemble de données numériques prises à un intervalle de temps régulier T_1 appelé période d'échantillonnage du signal.

$$t = k t_1.$$

Ainsi, l'expression (2) devient :

$$F(j\omega) = \sum_{k=0}^{k=N-1} f(k T_1) e^{-j\omega k T_1}$$

En discrétisant aussi la fréquence $\omega = m' \omega_0 = \frac{m'}{T_0}$ avec $m' = 0, 1, \dots, N-1$ où $T_0 = N T_1$, et en posant $\frac{m'}{T_0} = m$ et $k T_1 = k$, on aboutit à l'expression suivante de la D.F.T :

$$F(m) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \exp(-j 2\pi m k / N) \quad (3)$$

VII-TRANSFORMATION DE FOURIER

RAPIDE (F.F.T) :

On peut obtenir le même résultat que celui de la D.F.T par une méthode beaucoup plus rapide appelée F.F.T (fast Fourier transform). Le but de la FFT est de transformer un signal représenté dans le domaine du temps vers une grandeur décrivant ce

signal dans le domaine des fréquences.

Il existe plusieurs algorithmes de la F.F.T. Dans cette étude l'algorithme utilisé est celui de Cooley-Tukey.

VII-ALGORITHME DE COOLEY-TUKEY:

En notation binaire : $k = (k_{r-1}, k_{r-2}, \dots, k_1, k_0)$

$$m = (m_{r-1}, m_{r-2}, \dots, m_1, m_0)$$

En notation décimale : $k = 2^{r-1} k_{r-1} + 2^{r-2} k_{r-2} + \dots + 2k_1 + k_0$

$$m = 2^{r-1} m_{r-1} + 2^{r-2} m_{r-2} + \dots + 2m_1 + m_0.$$

L'expression (3) devient donc :

$$F(m_{r-1}, m_{r-2}, m_{r-3}, \dots, m_1, m_0) = \sum_{k_0} \sum_{k_1} \dots \sum_{k_{r-1}} f(k_{r-1}, \dots, k_1, k_0) W_N^{mk}$$

où $W_N^{mk} = \exp(-j2\pi m k / N)$

$$W_N^{mN} = 1 \quad m: \text{entier.}$$

L'expression de la D.F.T d'un signal traité par la méthode Cooley-Tukey est :

$$F(m) = \sum_{k_0} \sum_{k_1} \dots \sum_{k_{r-1}} f(k_{r-1}, k_{r-2}, \dots, k_0) W_N^{k_0} \dots W_N^{k_{r-1}}$$

Il y a donc r signaux intermédiaires entre le signal et

son spectre.

$$F_1(m_0, k_{n-2}, \dots, k_1, k_0) = \sum_{k_{n-1}=0}^1 f(k_{n-1}, k_{n-2}, \dots, k_1, k_0) W_N^{C_0}$$

$$F_2(m_0, m_1, k_{n-3}, \dots, k_1, k_0) = \sum_{k_{n-2}=0}^1 F_1(m_0, k_{n-2}, \dots, k_1, k_0) W_N^{C_1}$$

$$\vdots$$
$$F_n(m_0, m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}) = \sum_{k_0=0}^1 F_{n-1}(m_0, m_1, \dots, k_0) W_N^{C_{n-1}}$$

$$\text{où } C_0 = m_0 2^{n-1} k_{n-1}$$

$$C_1 = (2m_1 + m_0) 2^{n-2} k_{n-2}$$

\vdots

$$C_{n-1} = (2^{n-1} m_{n-1} + \dots + 2m_1 + m_0) k_0$$

Ainsi, partant d'un signal temporel quelconque, on peut grâce à cet algorithme calculer sa transformée de Fourier.

CHAPITRE

-3-

DEFINITION DE LA DENSITE SPECTRALE: SYSTEMES A MULTIPLES ENTREES ET SORTIES

I-DEFINITION ET PROPRIETES DE LA DENSITE SPECTRALE :

Soit $x(t)$ un processus aléatoire. Sa puissance moyenne est donnée par :

$$P = \overline{x^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt \quad (1)$$

La transformée de Fourier de $x(t)$ est :

$$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(-j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

(1) s'écrit donc :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(-j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt.$$

En intervertissant les deux intégrations, on trouve :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \frac{1}{2\pi} X(-j\omega) d\omega \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}_{X(j\omega)}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(j\omega)|^2}{2T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega \quad (2)$$

$$\text{avec } S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(j\omega)|^2}{2T}$$

La relation (2) montre que $S(\omega)$ a la dimension d'une énergie. Cette fonction est appelée DENSITE SPECTRALE ENERGÉTIQUE du processus.

Soit $S_x(\omega)$ la densité spectrale de déplacement. On montre que la densité spectrale de vitesse s'obtient par la relation [] :

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$$

et la densité spectrale d'accélération est donnée par :

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega)$$

Si l'on considère la fonction de corrélation $K_x(\tau)$ du processus aléatoire $x(t)$ alors la densité spectrale est calculée par :

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Pour deux processus $x(t)$ et $y(t)$, on peut définir la densité spectrale mutuelle par :

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

II/APPLICATION DE LA FFT POUR LE CALCUL DE LA DENSITE SPECTRALE :

La méthode consiste à

- simuler un signal temporel
- le transformer par FFT
- Calculer sa densité spectrale et la tracer

Un programme a été établi à cet effet. On rappelle qu'il a été déjà exposé dans la référence [3] mais on l'a modifié quelque peu surtout au niveau de la simulation du signal.

En effet, on a préféré calculer la densité spectrale de signaux tout à fait aléatoires ressemblant à ceux mesurés à partir du microprofil de la route pour se rapprocher un peu plus du cas réel.

Soit S le signal simulé

$N = 2^k$, N étant le nombre total d'échantillons.

K : le nombre de sinusoides contenues dans le signal.

F_E : la fréquence d'échantillonnage du signal

$F(I)$: la fréquence du signal introduit.

$B(I)$: l'amplitude " " " " " "

T_E : la période d'échantillonnage

$T_0 = N \cdot T_E$: temps d'observation du signal

F_N : la fréquence de Nyquist. $F_N = \frac{F_E}{2}$

Sur la représentation graphique de la densité spectrale, on constate la présence de dix graduations. Chaque graduation vaut $F_N/10$ [Hz]

Si F est une fréquence quelconque du signal considéré alors $\omega = 2\pi F$

Remarques:

- Les pics des densités spectrales tracées correspondent exactement aux fréquences introduites dans le signal temporel
- La plus grande fréquence lue sur le graphe représentant le spectre est la fréquence de Nyquist valant $F_E/2$. Analogiquement, le maximum de points sur le graphe est égal à $N/2$. Chaque graduation du spectre correspond donc à $N/20$
- Le signal simulé s'écrit: $S = \sin(2\pi F(I) T) B(I) \times RND$ (1)
où RND est une fonction aléatoire dépendant de plusieurs paramètres et $I = 1$ à K

Cependant, on remarque que dans le programme, on a calculé le signal (1) de façon à ce qu'il présente une

```

10 CLS 0
15 CHOIX=1
20 '***** SIMULATION DU SIGNAL *****
30 SCREEN 3
40 KEY OFF
50 /INPUT "NOMBRE D'ECHANTILLONS DU SIGNAL : N=2^R :R=";R
60 /INPUT "FREQUENCE D'ECHANTILLONNAGE : FE=";FE
70 PI=3.14159
80 N=2^R
90 T1=1/FE : DIM XR(N),XI(N)
100 INPUT "NOMBRE DE SINUSOIDES DANS LE SIGNAL K=";K
110 FOR I=1 TO K
120 PRINT "F("I")=";:INPUT F(I)
130 PRINT "AMPLITUDE DU SIGNAL B("I")=";:INPUT B(I)
140 NEXT I
145 RANDOMIZE
150 FOR I=0 TO N-1
160 S=0
170 FOR II=1 TO K
180 S=S+SIN(2*PI*F(II)*I*T1)*B(II)*RND
190 NEXT II
192 A=RND
195 IF A<.85 THEN 160
200 XR(I)=S
210 XI(I)=0
220 NEXT I
222 OPEN "R",#1,"a:fich2",4
223 FIELD #1,4 AS XR$
224 FOR I=1 TO N
225 LSET XR$=MKS$(XR(I))
226 PUT #1,I
227 NEXT I
228 CLOSE #1
230 CHAIN"a:fft ",5 ,ALL,DELETE 10-228

```

```

5 CLS
6 LOCATE 10,28 :PRINT "SUBROUTINE F.F.T"
10 '.....PROGRAMME F.F.T.....
16 DIM V(N),IOX(R),WK(2,2),A(2,2),Q(2,2)
20 CHOIX=-1*CHOIX
22 PRINT"VALEURS DE XR(I) ET DE XI(I) AVANT FFT"
25 FOR I=0 TO N-1 :PRINT" XR(";I;")=";XR(I),"XI(";I;")=";XI(I):NEXT I
30 FOR I=1 TO R
40 IOX(I)=2^(R-I)
50 NEXT I

```

```

10 FOR MP1=1 TO R
20 MEX2=2^(MP1-1)
30 NMEX2=N/MEX2
40 MOIT=NMEX2/2
50 L=0
60 FOR JOO=1 TO MEX2
70 FL=L
80 NNP=N
90 V=CHOIX*2*3.1415 *FL/NNP
100 AC=COS(V)
110 AS=SIN(V)
120 WK(1,1)=AC
130 WK(1,2)=AS
140 WK(2,1)=-AS
150 WK(2,2)=AC
160 JO=NMEX2*(JOO-1)
170 FOR I=1 TO MOIT
180 J1=JOO+I
190 J2=J1+MOIT
200 A(1,1)=XP(J2)
210 A(1,2)=XI(J2)
220 A(2,1)=-XI(J2)
230 A(2,2)=XR(J2)
240 Q(1,1)=A(1,1)*WK(1,1)+A(1,2)*WK(2,1)
250 Q(1,2)=A(1,1)*WK(1,2)+A(1,2)*WK(2,2)
260 Q(2,2)=Q(1,1)
270 Q(2,1)=-Q(1,2)
280 XR(J2)=XR(J1)-Q(1,1)
290 XI(J2)=XI(J1)-Q(1,2)
300 XR(J1)=XR(J1)+Q(1,1)
310 XI(J1)=XI(J1)+Q(1,2)
320 NEXT I
330 FOR I=2 TO R
340 II=I
350 IF L-IOX(I)<0 THEN 430
360 L=L-IOX(I)
370 NEXT I
380 L=L-IOX(II)
390 NEXT JOO
400 NEXT MP1
410 L=0
420 FOR J= 1 TO N
430 IF L-J<0 THEN 550
440 RES1=XR(J)
450 RES2=XI(J)
460 XR(J)=XR(L+1)
470 XI(J)=XI(L+1)
480 XR(L+1)=RES1
490 XI(L+1)=RES2
500 FOR I=1 TO R
510 II=I
520 IF L-IOX(I)<0 THEN 600
530 L=L-IOX(I)
540 NEXT I

```

```

600 L=L+IOX(II)
610 NEXT J
620 IF CHOIX>=0 THEN 670
630 FOR I=1 TO N
640 XR(I)=XR(I)/NNP
650 XI(I)=XI(I)/NNP
660 NEXT I
670 ERASE V,IOX,WK,A,Q
710 CLS
800 CHAIN "a:propp",4,ALL,DELETE -710
810 CHAIN "a:tra",420,ALL,DELETE -800
820 CHAIN"a:tra",770,ALL,DELETE -810
830 ERASE G:CHAIN "a:propp",260,ALL,DELETE -820

```

```

4 DIM G(N)
7 LOCATE 10,28 :PRINT "CALCUL DU SPECTRE "
10 FOR I=1 TO N
20 G(I-1)=(XR(I)^2+XI(I)^2)*2*T1/N
30 NEXT I
35 FOR I=0 TO N-1:PRINT"XR(";I;")=";XR(I),"XI(";I;")=";XI(I)
37 PRINT"G(";I;")=";G(I):NEXT I
40 OPEN "R",#1,"a:fich3",4 :FIELD#1,4 AS G$:FOR I=1 TO N
41 LSET G$=MKS$(G(I))
42 PUT #1,I :NEXT I:CLOSE #1
70 CHAIN"a:tra",10,ALL,DELETE -42

```

```

10 OPEN "R",#1,"a:fich2",4
12 FIELD #1,4 AS XR$
13 FOR I=1 TO N
14 GET #1,I
15 XR(I)=CVS(XR$)
16 NEXT I
17 CLOSE #1
24 FM=ABS(XR(0))
25 FOR I=1 TO +-1
30 IF FM < ABS (XR(I)) THEN FM = ABS(XR(I))
40 NEXT I
50 CLS : KEY OFF :SCREEN 3
80 LINE (0,0)-(639,310),1,B
90 LOCATE 2,2 PRINT "f(k)"
100 LOCATE 12,2:PRINT "G(n)"
110 LOCATE 5,18:PRINT "k"
120 LOCATE 17,19:PRINT "n"
130 LOCATE 17,19:PRINT "FIG 1 : Signal d'entrée"

```

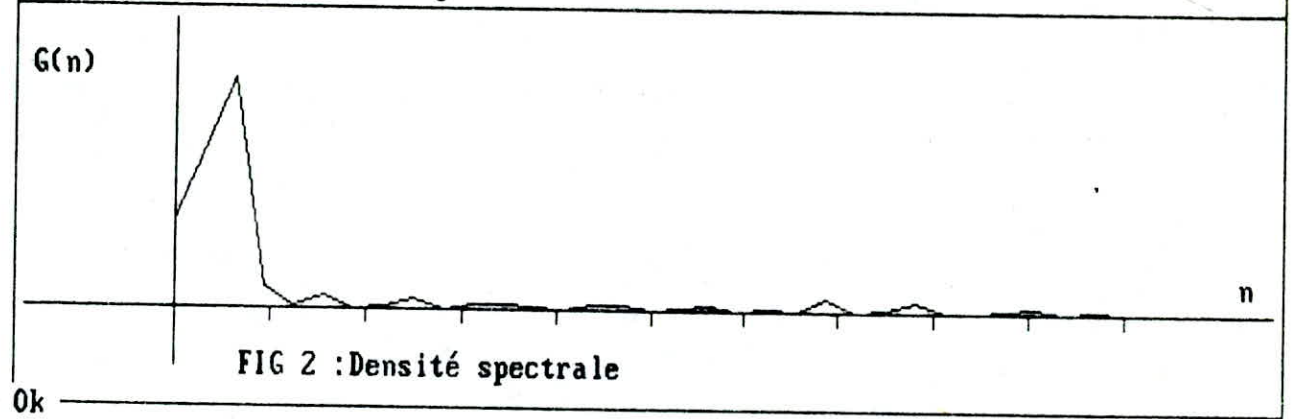
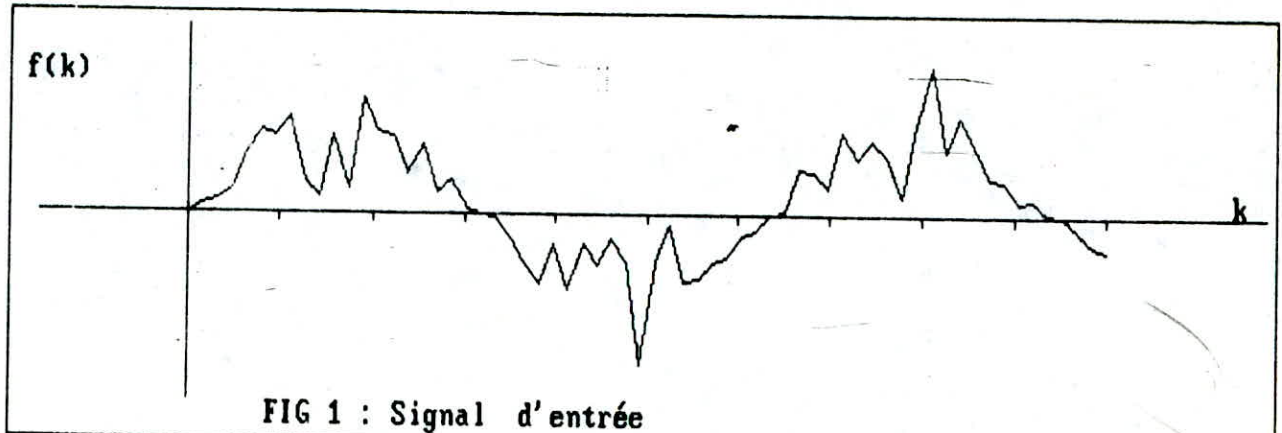
```

140 LOCATE 19,15:PRINT "FIG 2 :Densité spectrale de puissance  "
150 LINE (0,0)-(639,310),1,B
160 LINE (1,160)-(638,160)
170 VIEW (15,5)-(634,145)
180 WINDOW (-10,-1.25*FM)-(N+10,1.25*FM)
190 LINE (-10,0)-(N+10,0)
200 LINE (0,-1.25*FM)-(0,1.25*FM)
210 FOR I=0 TO N-2
220 LINE (I,XR(I))-(I+1,XR(I+1))
230 NEXT I
240 FOR I=0 TO N-1 STEP (N-1)/10
250 LINE(I,0)-(I,-FM/20)
260 NEXT I
270 B=ABS(G(0))
280 FOR I=1 TO N-1
290 IF B >= ABS(G(I)) THEN 310
300 B=ABS(G(I))
310 NEXT I
320 VIEW (5,165)-(634,295)
330 WINDOW (-5,-.25*B)-(N/2+5,1.25*B)
340 LINE (-5,0)-(N/2+5,0)
350 LINE (0,-.25*B)-(0,1.25*B)
360 FOR I=0 TO N/2-1
370 LINE (I,G(I))-(I+1,G(I+1))
380 NEXT I
390 FOR I=0 TO (N/2+1) STEP (N/2 )/10
400 LINE(I,0)-(I,-B/20)
410 NEXT I
412 END
421 OPEN "R",#1,"a:fich3",4:FIELD #1,4 AS G$:FOR I=1 TO N :GET #1,I:G(I)=CVS(G$)
:NEXT I:CLOSE #1
422 FOR I=0 TO N-1 :G(I)=G(I+1):NEXT I
425 B=ABS(G(0))
430 FOR I=1 TO N-1
430 FOR I=1 TO N-1
440 IF B<ABS(G(I)) THEN B=G(I)
450 NEXT I
480 KEY OFF
490 SCREEN 0:SCREEN 3
500 LINE (0,0)-(639,299),1,B
510 LOCATE 2,2:PRINT "G(n)"
530 LOCATE 7,72:PRINT "n"
540 LOCATE 17,72:PRINT "n"
" " 550 LOCATE 9,16 :PRINT " Densité spectrale de puissance  "
570 LINE (0,0)-(639,299),1,B
580 LINE (1,155)-(638,155)
590 VIEW(15,5)-(634,145)
600 WINDOW (-10,-.25*B)-(N/2+5,1.25*B)
610 LINE (-10,0)-(N+10,0)
620 LINE (0,-1.25*B)-(0,1.25*B)
630 FOR I=0 TO N/2-1
640 LINE(I,G(I))-(I+1,G(I+1))
650 NEXT I
770 FM=ABS(XR(1))
780 FOR I=2 TO N
790 IF FM < ABS (XR(I)) THEN FM=ABS (XR(I))

```



```
800 NEXT I
810 CLS
820 KEY OFF
830 SCREEN 3
840 LINE (0,0)-(639,399),1,B
850 PP=1 : LOCATE 2,4:PRINT "G(n)"
870 LOCATE 7,72:PRINT "n"
891 LINE (0,0)-(639,399),1,B
892 LINE (1,205)-(638,205)
893 VIEW (15,5)-(634,165)
894 WINDOW (-10,-.25*FM)-(N/2+5,1.25*FM)
895 LINE (-5,0)-(N/2+5,0)
896 LINE (0,-.25*FM)-(0,1.25*FM)
897 FOR I=1 TO N/2-1
898 LINE (I,XR(I))-(I+1,XR(I+1))
899 NEXT I
900 OPEN "R",#1,"a:fich3",4:FIELD #1,4 AS G$:FOR I=1 TO N:GET #1,I:G(I)=CVS(G$):
NEXT I:CLOSE #1
1079 FOR I=0 TO N-1:G(I)=G(I+1):NEXT I
1080 B=ABS(G(0))
1081 FOR I=0 TO N-1
1082 IF B >= ABS(G(I)) THEN 1084
1083 B=ABS(G(I))
1084 NEXT I
1085 VIEW (5,210)-(634,375)
1087 WINDOW (-5,-.25*B)-(N/2+5,1.25*B)
1089 LINE (-5,0)-(N/2+5,0)
1090 LINE (0,-.25*B)-(0,1.25*B)
1092 FOR I=0 TO N/2-1
1093 LINE (I,G(I))-(I+1,G(I+1))
1095 NEXT I
1100 END
1210 CHAIN"a:propp",80,ALL,DELETE -1200
6004 WINDOW (-10,-.25*B)-(N/2+5,1.25*B) .
```



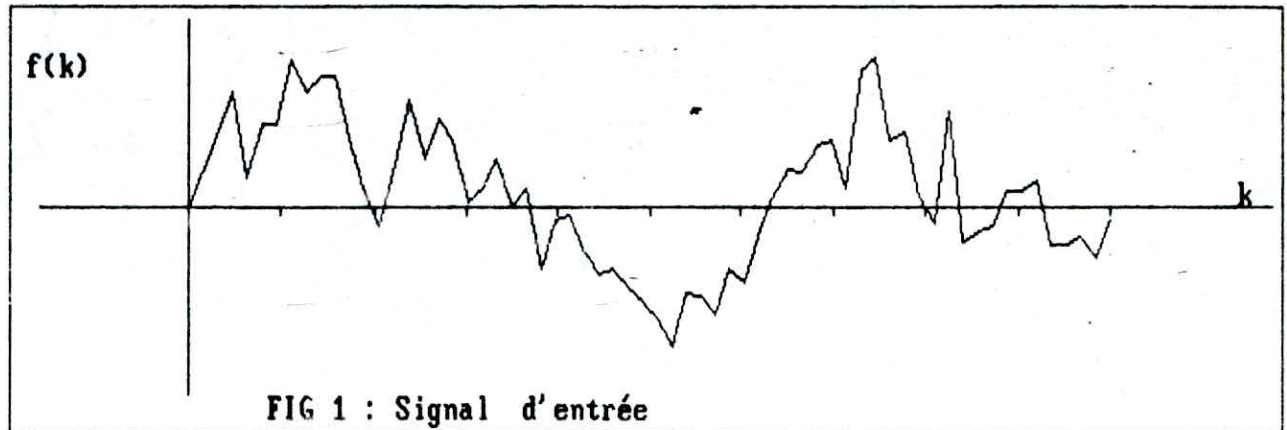


FIG 1 : Signal d'entrée

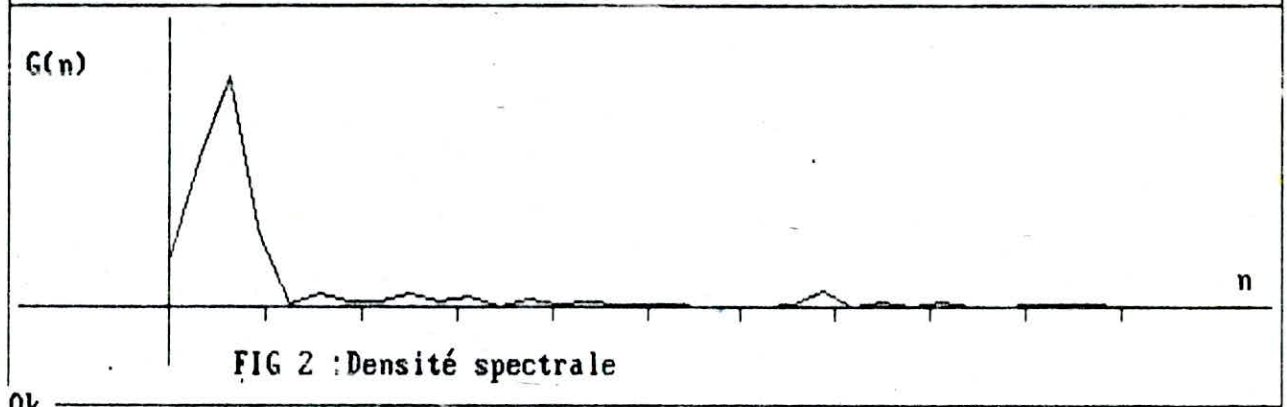
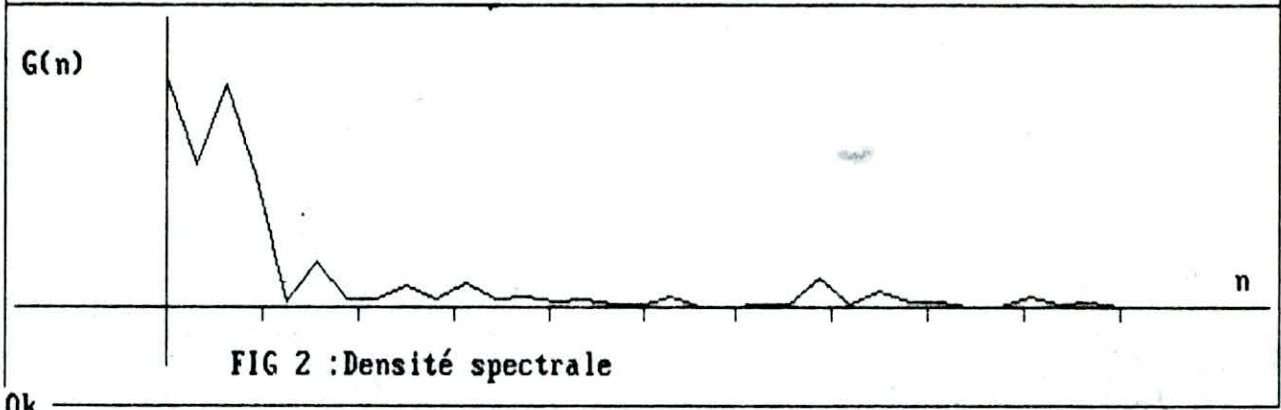
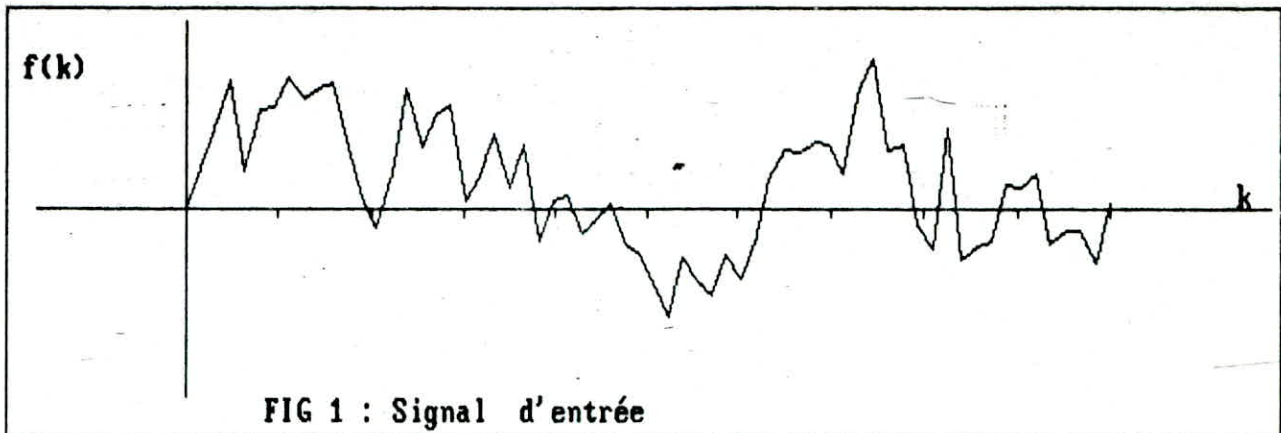


FIG 2 : Densité spectrale



Ok

- III -

erreur relative $\frac{\Delta S}{S} \leq 0,15$ par rapport à un signal
(2) non aléatoire.

$$S1 = \sin(2\pi F(I) T1) B(I) \quad (2)$$

L'introduction d'un signal aléatoire correspondant à

1°/ $K=1$ $F_E = 800 \text{ Hz}$ $R=6$ $F(1) = 20 \text{ Hz}$ $B(1) = 7 \text{ mm}$

permet d'obtenir la représentation graphique de la page -I-

2°/ $K=2$ $F_E = 800 \text{ Hz}$ $R=6$ $F(1) = 20 \text{ Hz}$ $B(1) = 9 \text{ mm}$

$F(2) = 40 \text{ Hz}$ $B(2) = 4 \text{ mm}$

(voir page -II-)

3°/ $K=5$ $F_E = 800 \text{ Hz}$ $F(1) = 1 \text{ Hz}$ $B(1) = 9 \text{ mm}$

$F(2) = 10 \text{ Hz}$ $B(2) = 7 \text{ mm}$

$F(3) = 20 \text{ Hz}$ $B(3) = 9 \text{ mm}$

$F(4) = 40 \text{ Hz}$ $B(4) = 6 \text{ mm}$

$F(5) = 60 \text{ Hz}$ $B(5) = 4 \text{ mm}$

(voir page -III-)

QUELQUES EXEMPLES REELS DE LA

DENSITE SPECTRALE :

L'exemple de la figure - 1 - page 16 représente la densité spectrale énergétique des vibrations verticales au niveau du châssis et des roues d'une voiture légère lorsqu'elle

roule sur une route goudronnée à une vitesse $V = 120$ [Km/h].

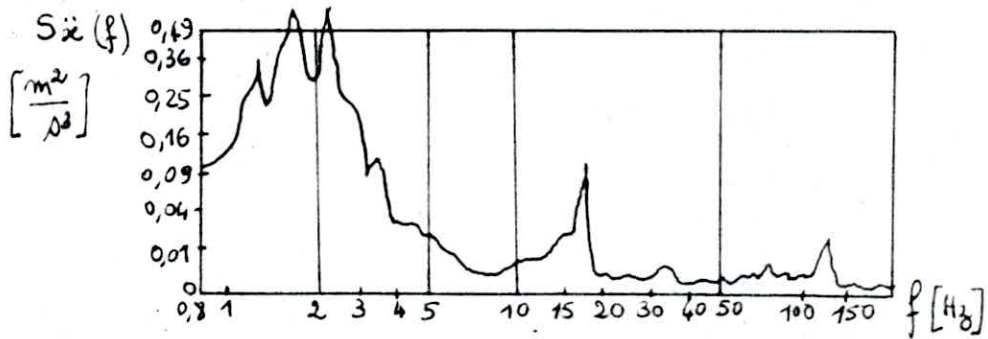


fig - 1 -

La figure - 2 - représente aussi la densité spectrale $S_{\ddot{x}}(f)$ pour une même voiture roulant sur une route goudronnée à $V = 70$ [Km/h] puis à $V = 45$ [Km/h]

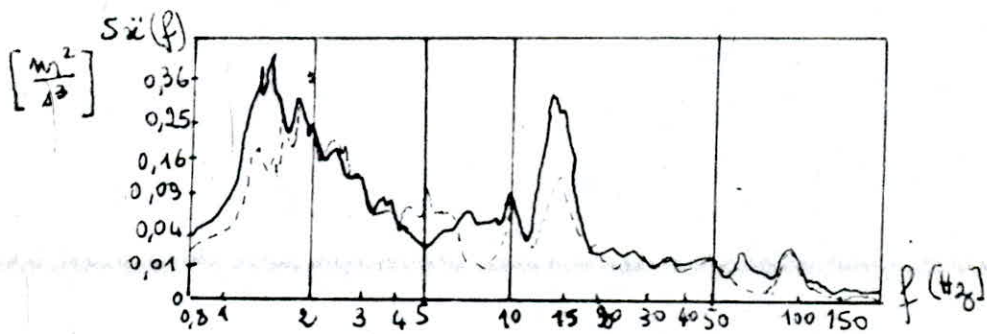


fig - 2 -

— $V = 70$ [Km/h]

--- $V = 45$ [Km/h]

III- / SYSTEMES A MULTIPLES ENTREES ET

SORTIES :

Soit le système à plusieurs entrées et sorties illustré par la figure 1- :

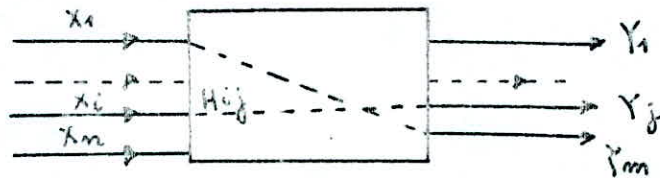


fig - 1-

L'expression de la densité spectrale d'un point quelconque à la sortie s'écrit [] :

$$S_{Y_k}(\omega) = \sum_{j=1}^m \sum_{\nu=1}^m H_{kj} \cdot H_{k\nu}^* S_{x_j x_\nu}(\omega) \quad (1)$$

Les densités spectrales croisées se calculent par :

$$S_{Y_k Y_g}(\omega) = \sum_{j=1}^m \sum_{\nu=1}^m H_{kj} \cdot H_{g\nu}^* S_{x_j x_\nu}(\omega) \quad (2)$$

Dans le cas particulier où :

$$S_{x_j x_\nu}(\omega) = \begin{cases} 0 & j \neq \nu \\ S_{x_j} & j = \nu \end{cases}$$

Les expressions (1) et (2) deviennent :

$$S_{Y_k}(w) = \sum_{j=1}^m H_{kj} \cdot H_{kj}^* S_{x_j}(w)$$

$$= \sum_{j=1}^m |H_{kj}|^2 S_{x_j}(w) \quad (3)$$

et $S_{Y_k Y_s}(w) = \sum_{j=1}^m H_{kj} \cdot H_{sj}^* S_{x_j}(w) \quad (4)$

III-1/Cas particuliers :

a-/ Systèmes à deux entrées et une sortie:

Pour ce type de systèmes (figure - 2 -), l'expression de la densité spectrale de sortie se déduit à partir de la formule (3) :

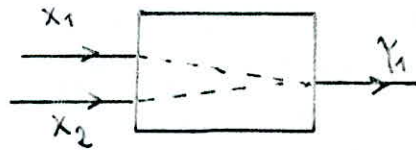


fig - 2-

$$S_{Y_1}(w) = |H_{11}|^2 S_{x_1}(w) + |H_{12}|^2 S_{x_2}(w) \quad (5)$$

b-/ Systèmes à deux entrées et deux sorties:

Dans ce cas (fig - 3 -) les formules (3) et (4) s'écrivent:

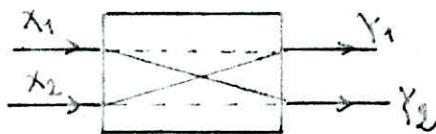


fig - 3-

$$\left. \begin{aligned} S_{Y_1}(\omega) &= |H_{11}|^2 S_{X_1}(\omega) + |H_{12}|^2 S_{X_2}(\omega) \\ S_{Y_2}(\omega) &= |H_{21}|^2 S_{X_1}(\omega) + |H_{22}|^2 S_{X_2}(\omega) \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\text{et } S_{Y_1 Y_2}(\omega) = H_{11} H_{21}^* S_{X_1}(\omega) + H_{12} H_{22}^* S_{X_2}(\omega) \quad (7)$$

c- / Systèmes à une entrée et une sortie:
C'est le cas le plus simple dans lequel on a:

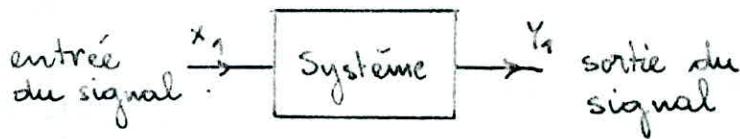


fig - 4 -

$$S_{Y_1}(\omega) = |H_{11}|^2 S_{X_1}(\omega) \quad (8)$$

En effet, l'équation différentielle établie pour le système de la fig - 4 - permet de lier l'entrée à la sortie :

$$\frac{d^m Y_1(t)}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1} Y_1(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_n Y_1(t) = b_0 \frac{d^m X_1(t)}{dt^m} + \dots + b_m X_1(t) \quad (m \geq n)$$

qui se réduit à :

$$Q_m(p) \cdot Y_1(t) = P_m(p) \cdot X_1(t) \quad \text{où } p = \frac{d}{dt}$$

Ainsi, on peut écrire (fig - 5 -) que :

$$Q_m(p) Y(t) = P_m(p) X(t) \quad \text{où} \quad p = \frac{d}{dt}$$

$X(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire.

Ainsi, on peut lier l'entrée et la sortie du système de la fig - 2 - par leurs densités spectrales respectives:

$$S_Y(\omega) = \frac{|P_m(j\omega)|^2}{|Q_m(j\omega)|^2} \cdot S_X(\omega). \quad (1)$$

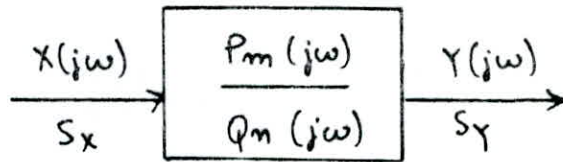


fig - 5 -

On définit la fonction $H_{11}(j\omega) = \frac{P_m(j\omega)}{Q_m(j\omega)}$

H_{11} est appelé fonction de transfert du système considéré

-Hypothèses nécessaires:

- Pour un système passif, toutes les racines de $Q_m(j\omega)$ ont leurs pôles réels négatifs.
- Si la fonction de transfert H_{11} a des pôles sur l'axe imaginaire, ils doivent être simples.
- Le nombre de zéros de la fonction de transfert H_{11}

d'un système stable doit être inférieur, ou tout au plus égal au nombre de pôles.

CHAPITRE

-4-

LES METHODES D'APPROXIMATION DE LA COURBE DE LA DENSITE SPECTRALE ET L'APPLICATION DE L'UNE D'ENTRE ELLES

En pratique, très souvent la densité spectrale n'est connue que par sa représentation graphique. Ainsi, pour trouver l'expression analytique qui lui correspond, il faut avoir recours aux diverses méthodes d'approximation d'une courbe par une fonction analytique.

D'autre part, généralement la densité spectrale se présente sous forme d'une fraction rationnelle à coefficients constants. Il s'agit donc de traiter un problème non linéaire. Le présent chapitre a pour but d'exposer certaines méthodes permettant d'aboutir à la détermination de ces coefficients [1].

I-/METHODE D'APPROXIMATION BASEE SUR

L'EXPANSION EN SERIE DE FOURIER :

On suppose avoir une courbe $F(\omega)$. On peut l'approximer par une fraction rationnelle.

$$S(\omega) = \frac{b_0 + b_1 \omega^2 + \dots + b_m \omega^{2m}}{a_0 + a_1 \omega^2 + \dots + a_n \omega^{2n}} \quad (1)$$

$m \geq n$

en procédant selon les étapes suivantes :

1°/ On pose $\omega = \operatorname{tg} \varphi/2$ (2)

$\Rightarrow \varphi = \operatorname{Arctg} \omega$

alors $\omega \in]-\infty, +\infty[\Rightarrow \varphi \in]-\pi, +\pi[$

A la différence de $F(\omega)$, le graphe $F(\varphi)$ est périodique de période 2π .

2°/ Comme $F(\varphi)$ est périodique, la série de Fourier correspondante est :

$$F(\varphi) = C_0 + C_1 \cos \varphi + \dots + C_k \cos k\varphi \quad (3)$$

A partir de quelques valeurs des ordonnées de la courbe, on peut avoir la forme de $F(\varphi)$.

3°/ En posant dans l'expression (3) $u = \cos \varphi$ (4)

alors l'expression $V_r(\varphi) = \cos r\varphi$ devient

$$V_r(u) = \cos(r \arccos u) \quad (5)$$

Où le polynôme de Tchebychev de première sorte s'écrit :

$$T_r(u) = \frac{\cos r\varphi}{2^{r-1}} \quad \text{où } u = \cos \varphi$$

et $r = 1, 2, \dots$

Donc l'expression (5) devient :

$$V_r(u) = 2^{r-1} T_r(u)$$

Par suite, l'expression (3) s'écrit :

$$F(u) = C_0 + C_1 u + C_2 2 T_2(u) + C_3 2^2 T_3(u) + \dots + C_k 2^{k-1} T_k(u) \quad (6)$$

où $T_1(u) = u$

$$T_2(u) = \frac{\cos 2\varphi}{2} = \frac{2 \cos^2 \varphi - 1}{2} = u^2 - \frac{1}{2}.$$

$T_3(u), \dots, T_k(u)$ peuvent être calculés par récurrence à partir de la formule polynomiale de Tchebychev donnée par :

$$T_{n+1}(u) = u T_n(u) - \frac{1}{4} T_{n-1}(u)$$

$$n=2, 3, 4, \dots$$

En remplaçant chaque polynôme par sa valeur dans l'expression (6), on obtient :

$$F(u) = \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \dots + \alpha_k u^k.$$

4°) Des équations (2) et (4) on a :

$$u = \frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2} \quad (7)$$

En mettant l'expression (7) dans (6), on aboutit à :

$$S(\omega) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2} \right) + \alpha_2 \left(\frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2} \right)^2 + \dots + \alpha_k \left(\frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2} \right)^k \quad (8)$$

En réduisant au même dénominateur, on trouve :

$$S(\omega) = \frac{b_0 + b_1 \omega^2 + \dots + b_m \omega^{2k}}{(1 + \omega^2)^k} \quad (9)$$

Conclusion :

Cette méthode permet d'approximer une courbe donnée par une fonction analytique à partir de l'expansion en série de Fourier. Cependant, elle ne sera pas utilisée dans cet ouvrage car elle requiert un grand nombre de changements de variables et par conséquent beaucoup d'opérations à effectuer. Elle nécessiterait donc un temps très long de calcul sur ordinateur.

II-/METHODE D'APPROXIMATION BASEE SUR L'APPLICATION DES FONCTIONS DE LAGUERRE :

Cette méthode consiste à utiliser directement le signal temporel sans avoir recours au graphe de la densité spectrale. On suppose avoir la courbe d'une fonction aléatoire stationnaire représentée à l'intérieur de l'intervalle $[0, 2T]$.

$$m_T(t) = \begin{cases} m(t) & 0 \leq t \leq 2T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Sa transformée de Fourier est :

$$M_T(j\omega) = \int_0^{2T} m_T(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

et sa densité spectrale est :

$$S_{m_T}(\omega) = \frac{1}{2T} |M_T(j\omega)|^2 \quad (2)$$

$m_T(t)$ peut s'écrire en série de fonctions de Laguerre.

$$m_T(t) = \sum_{v=0}^N C_v L_v(t) \quad (3)$$

$$\text{où } C_v = \int_0^{2T} L_v(t) m_T(t) dt \quad (4)$$

La transformation de Fourier des deux membres de l'équation (3) donne :

$$M_T(j\omega) = \sum_{v=0}^N C_v l_v(j\omega) \quad (5)$$

Par conséquent :

$$S_{m_T}(\omega) = \frac{1}{2T} \left| \sum_{v=0}^N C_v l_v(j\omega) \right|^2$$

$$\Leftrightarrow S_{m_T}(\omega) = \frac{1}{2T} \left[\sum_{v=0}^N C_v l_v(j\omega) \right] \left[\sum_{v=0}^N C_v l_v^*(j\omega) \right] \quad (6)$$

où $l_v^*(j\omega)$ représente le conjugué de $l_v(j\omega)$.

Conclusion :

Cette méthode permet d'obtenir la forme analytique de la

densité spectrale directement à partir du signal temporel. Cependant, le calcul de C_v est très fastidieux. Pour réduire le nombre des coefficients C_v dans l'équation (3), il est nécessaire de spécifier la précision de calcul. L'échelle de temps doit être choisie de façon que la quantité T soit proche de l'unité, mais même dans ce cas, la convergence de la série (3) est très lente. C'est pour cela que l'on n'appliquera pas cette méthode dans notre étude.

III-METHODE D'INTERPOLATION :

On suppose avoir la courbe de la densité spectrale $F(\omega)$. On peut l'approximer par une fraction rationnelle telle que :

$$S(\omega) = \frac{b_0 + b_1 \omega^2 + b_2 \omega^4 + \dots + b_m \omega^{2m}}{a_0 + a_1 \omega^2 + \dots + a_n \omega^{2n}} \quad m \geq n$$

$$\Leftrightarrow (b_0 + b_1 \omega^2 + \dots + b_m \omega^{2m}) - S(\omega)(a_0 + a_1 \omega^2 + \dots + a_n \omega^{2n}) = 0 \quad (1)$$

On choisit $(m+n+2)$ points parmi ceux qui ont servi à tracer la courbe originale $S(\omega)$. On remplace dans (1), on obtient alors un système d'équations linéaires de la forme :

$$(2) \begin{cases} (b_0 + b_1 \omega_1^2 + \dots + b_m \omega_1^{2m}) - S(\omega_1) (a_0 + a_1 \omega_1^2 + \dots + a_m \omega_1^{2m}) = 0 \\ \dots \\ (b_0 + b_1 \omega_{n+m+2}^2 + \dots + b_m \omega_{n+m+2}^{2m}) - S(\omega_{n+m+2}) (a_0 + a_1 \omega_{n+m+2}^2 + \dots + a_m \omega_{n+m+2}^{2m}) = 0 \end{cases}$$

La résolution du système (2) permet la détermination des coefficients a_0, a_1, \dots, a_m ; b_0, b_1, \dots, b_m .

L'inconvénient que présente cette méthode est qu'il est impossible de savoir si l'erreur d'approximation, c'est à dire la différence $\Delta = F(\omega) - S(\omega)$ est suffisamment faible aux points où les deux courbes ne coïncident pas. En effet, entre les points d'interpolation choisis, la fraction rationnelle trouvée peut osciller assez violemment. Dans ce cas, elle n'approximerait pas fidèlement la courbe $F(\omega)$.

IV - METHODE D'APPROXIMATION BASEE SUR LE REMPLACEMENT DE LA COURBE LOGARITHMIQUE DE LA DENSITE SPECTRALE PAR DES SEGMENTS DE DROITE :

L'application de cette méthode nécessite le passage par les étapes suivantes :

1/ A partir de la courbe de la densité spectrale $S(\omega)$, on trace

sur du papier semi-logarithmique le graphe $L(\omega)$ où il y aura les correspondances suivantes:

$$\begin{aligned} S(\omega) &\rightarrow L(\omega) = 10 \log_{10} S(\omega) \quad (1) \\ \omega &\rightarrow 10 \log_{10} \omega \end{aligned}$$

2/ On essaie d'approcher la courbe logarithmique obtenue par des segments de droite où chacun d'entre eux serait approximé par une fonction:

$$B_{2k} \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right) = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^{2k} \quad (2) \quad k \text{ entier relatif}$$

ω_i est le point d'intersection de deux segments tracés l'un à la suite de l'autre.

On peut alors poser: $\rho = \frac{\omega}{\omega_i}$

(a) devient: $B_{2k}(\rho) = 1 + (\rho)^{2k}$

$$A_{2k}(\rho) = 10 \log (1 + \rho^{2k})$$

Il est facile de voir que:

$$A_{2k}(\rho) \approx 0 \quad \text{pour } \rho \ll 1$$

$$A_{2k}(\rho) = 20k \log \rho \quad \text{pour } \rho \gg 1$$

$$A_{2k}(\rho) = 10 \log 2 \approx 3 \quad \text{pour } \rho = 1$$

On constate que $A_{2k} \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right) = 10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^{2k} \right)$ a exactement les mêmes propriétés que $A_{2k}(\rho)$.

Chaque segment de droite a une pente de $6K$ dB/octave. Si l'un des segments a une pente de $6 \times K'$ dB/octave où K' n'est pas entier, alors on décompose ce segment en trois autres ayant respectivement pour pentes $6K$ dB/octave, $6(K-1)$ dB/octave, $6K$ dB/octave. La valeur de K est déduite à partir du calcul de pente des divers segments tracés. Au niveau des points d'inflexion des courbes, les pentes sont négatives.

3/ L'expression finale de $L(\omega)$ s'obtient en additionnant les fonctions correspondant aux segments de droite de pentes positives et en soustrayant celles correspondant aux segments de pentes négatives. Le passage vers $S(\omega)$ se fait à partir de l'équation (1)

En pratique l'application de cette méthode est beaucoup plus simple que celle des autres. On note que dans le cas où le graphe de $L(\omega)$ est constitué par plusieurs pics, l'expression de $S(\omega)$ aura des degrés très élevés au numérateur et au dénominateur.

Généralement, l'erreur d'approximation obtenue pour cette méthode est de l'ordre de 1%.

V- / APPROXIMATION PAR UN POLYNÔME

DE NEWTON :

L'approximation d'une courbe par un polynôme de Newton nécessite le choix d'un certain nombre de points. Ceux-ci doivent être bien sélectionnés (on prend toujours le point initial, les extrêmes, et les points d'inflexion.). Ces points de subdivision x_i ne sont pas forcément équidistants. Le polynôme de Newton si obtenu est de la forme :

$$P_m(x) = f(x_0) + (x-x_0) f(x_1, x_0) + (x-x_0)(x-x_1) f(x_2, x_1, x_0) + \dots \\ \dots + (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{m-1}) f(x_m, x_{m-1}, \dots, x_0)$$

où les différences divisées sont calculées à partir de :

$$f(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad x_1 \neq x_0$$

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0} \quad \text{etc}$$

Un programme permettant de calculer ces différences divisées et donc d'obtenir le polynôme $P_m(x)$ a été établi.

Cependant, la méthode présente certains inconvénients :

```

10 CLS : KEY OFF
20 DIM X(1000),P(1000),A(1000),B(1000)
30 LOCATE 1,15
35 PRINT"APPROXIMATION DE LA COURBE PAR UN POLYNOME DE NEWTON"
40 LOCATE 2,15
45 PRINT"-----"
50 LOCATE 5,1
51 INPUT "NOMBRE DE POINTS D'APPROXIMATION ( D>1 ) : D= ";D
60 FOR L=0 TO (D-1)
70 PRINT"X(";L;")="";:INPUT X(L)
80 PRINT"P(";X(L);")="";:INPUT P(X(L))
90 NEXT L
100 FOR L=0 TO (D-1)
110 A(L)=(P(X(L+1))-P(X(L)))/(X(L+1)-X(L))
120 NEXT L
125 IF (D=2) THEN 530
130 FOR L=0 TO (D-2)
140 B(L)=(A(L+1)-A(L))/(X(L+2)-X(L))
150 NEXT L
155 IF (D=3) THEN 520
160 FOR L=0 TO (D-3)
170 C(L)=(B(L+1)-B(L))/(X(L+3)-X(L))
180 NEXT L
185 IF (D=4) THEN 510
190 FOR L=0 TO (D-4)
200 D(L)=(C(L+1)-C(L))/(X(L+4)-X(L))
210 NEXT L
215 IF (D=5) THEN 500
220 FOR L=0 TO (D-5)
230 E(L)=(D(L+1)-D(L))/(X(L+5)-X(L))
240 NEXT L
245 IF (D=6) THEN 490
250 FOR L=0 TO (D-6)
260 M(L)=(E(L+1)-E(L))/(X(L+6)-X(L))
270 NEXT L
275 IF (D=7) THEN 480
280 FOR L=0 TO (D-7)
290 N(L)=(M(L+1)-M(L))/(X(L+7)-X(L))
300 NEXT L
305 IF (D=8) THEN 470
310 FOR L=0 TO (D-8)
320 Q(L)=(N(L+1)-N(L))/(X(L+8)-X(L))
330 NEXT L
335 IF (D=9) THEN 460
340 FOR L=0 TO (D-9)
350 R(L)=(Q(L+1)-Q(L))/(X(L+9)-X(L))
360 NEXT L
365 IF (D=10) THEN 450
370 FOR L=0 TO (D-10)
380 T(L)=(R(L+1)-R(L))/(X(L+10)-X(L))
390 NEXT L
395 IF (D=11) THEN 440
400 FOR L=0 TO (D-11)

```

```

410 U(L)=(T(L+1)-T(L))/(X(L+11)-X(L))
420 NEXT L
430 PRINT "P(";X(11);", ";X(10);", ";X(9);", ";X(8);", ";X(7);", "
435 PRINT X(6);", ";X(5);", ";X(4);", ";X(3);", ";X(2);", ";X(1)
437 PRINT ", ";X(0);")=";U(0)
440 PRINT "P(";X(10);", ";X(9);", ";X(8);", ";X(7);", ";X(6);", "
445 PRINT X(5);", ";X(4);", ";X(3);", ";X(2);", ";X(1);", ";X(0)
447 PRINT ")=";T(0)
450 R(L)=(Q(L+1)-Q(L))/(X(L+9)-X(L))
460 PRINT "P(";X(8);", ";X(7);", ";X(6);", ";X(5);", "
465 PRINT X(4);", ";X(3);", ";X(2);", ";X(1);", ";X(0);")=";Q(0)
470 PRINT "P(";X(7);", ";X(6);", ";X(5);", ";X(4);", "
475 PRINT X(3);", ";X(2);", ";X(1);", ";X(0);")=";N(0)
480 PRINT "P(";X(6);", ";X(5);", ";X(4);", ";X(3);", "
485 PRINT X(2);", ";X(1);", ";X(0);")=";M(0)
490 PRINT "P(";X(5);", ";X(4);", ";X(3);", ";X(2);", "
495 PRINT X(1);", ";X(0);")=";E(0)
500 PRINT "P(";X(4);", ";X(3);", ";X(2);", ";X(1);", "
505 PRINT X(0);")=";D(0)
510 PRINT "P(";X(3);", ";X(2);", ";X(1);", ";X(0);")=";C(0)
520 PRINT "P(";X(2);", ";X(1);", ";X(0);")=";B(0)
530 PRINT "P(";X(1);", ";X(0);")=";A(0)
540 END

```


Exemple :

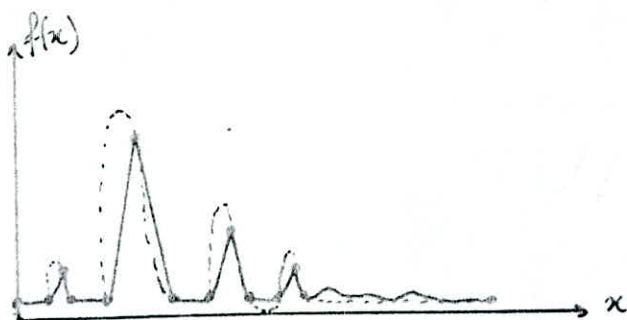


fig - 2 -

- courbe expérimentale (1)
- courbe théorique $[P_n(x)]$ (2)
- point de subdivision.

En examinant la fig - 2 - on remarque que le polynôme $P_n(x)$ passe effectivement par tous les points de subdivision. Cependant, il peut aussi s'écarter beaucoup de la courbe expérimentale (1) en d'autres points. Ceci est à redouter surtout au niveau des maxima de la courbe (1).

En vue d'améliorer cette méthode, on pourrait par exemple lui ajouter d'autres conditions qui limiteraient les extremums de $P_n(x)$ à ceux de la courbe expérimentale (1). En ces points remarquables on aura :

$$\begin{cases} P'_n(x) = 0 \\ P''_n(x) < 0 & \text{pour les maxima} \\ P''_n(x) > 0 & \text{pour les minima.} \end{cases}$$

VI-REMARQUES IMPORTANTES:

1- / Les formes analytiques obtenues après approximation doivent toujours satisfaire les conditions de stabilité.

$$\text{Soit : } f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (1)$$

La stabilité est assurée selon le critère de Routh - Hurwitz si :

$x/a_0 > 0$ et tous les mineurs principaux de la matrice (2) sont

positifs :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -a_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

* / Toutes les racines de (1) ont leurs parties réelles négatives.

C'est à dire que les déterminants suivants doivent être positifs :

$$\Delta_1 = a_1 > 0 \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \quad \dots \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix} > 0$$

Ainsi, dans le cas de l'application des méthodes d'approximation par un polynôme cités dans les paragraphes précédents, on détermine dans une première étape les coefficients du polynôme, puis dans une seconde étape, on lui applique les conditions de stabilité de Routh - Hurwitz. Si celles-ci ne sont pas vérifiées, on doit alors revenir sur le calcul des coefficients lors de la première étape

et procéder à une correction de ses coefficients. Ceci ne peut se réaliser qu'en accordant au polynôme d'approximation une certaine liberté de se mouvoir à l'intérieur d'un intervalle δ fixé (voir fig - 3 -)

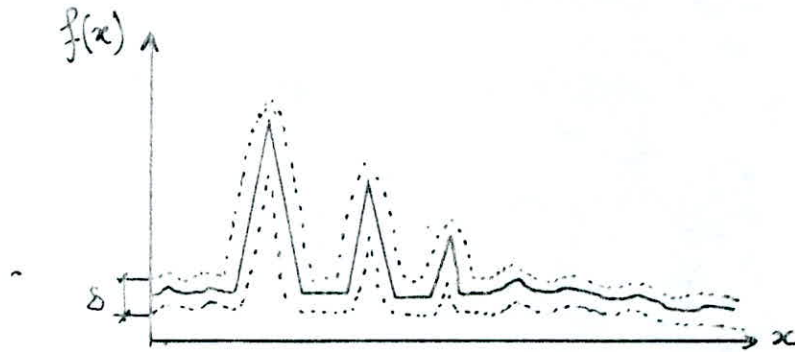


fig - 3 -

La programmation des méthodes d'approximation avec les conditions de stabilité devient assez délicate d'une part et d'autre part, elle nécessite un temps de calcul très long sur ordinateur.

2- / Dans le cas de l'approximation de la courbe par un polynôme, on peut procéder à l'identification du système par application de la formule :

$$S_y(\omega) = \frac{|N(j\omega)|^2}{|D(j\omega)|^2} \cdot S_x(\omega)$$

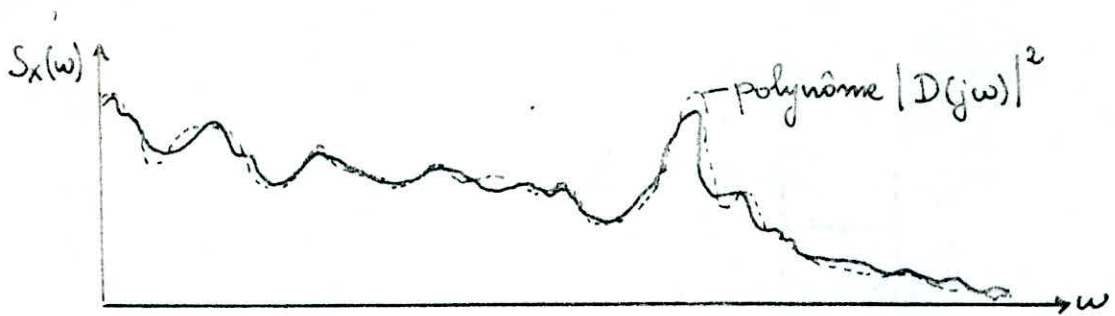


fig - 4 -

Le polynôme $|D(j\omega)|^2$ est obtenu après approximation de la courbe $S_x(\omega)$. (voir fig - 4 -)

Le polynôme $|N(j\omega)|^2$ est obtenu après approximation de la courbe $S_y(\omega)$. (voir fig - 5 -)

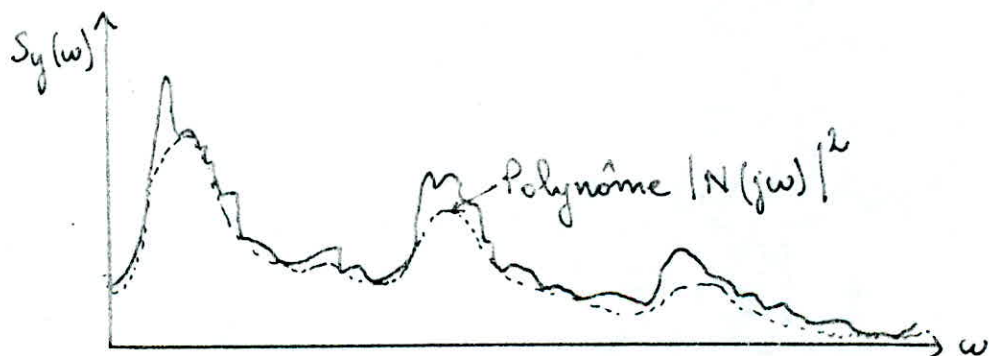


fig - 5 -

Par conséquent,

$$\frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)} = \left| \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \right|^2 = |H(j\omega)|^2$$

$$= \frac{a_n \omega^{2n} + a_{n-1} \omega^{2(n-1)} + \dots + a_0}{b_m \omega^{2m} + b_{m-1} \omega^{2(m-1)} + \dots + b_0}$$

$$= \frac{N(j\omega) \cdot N(-j\omega)}{D(j\omega) \cdot D(-j\omega)}$$

Le degré de $|D(j\omega)|^2$ doit être plus grand que celui de $|N(j\omega)|^2$. De plus, toutes les autres conditions de stabilité citées doivent être satisfaites, sinon $H(j\omega)$ obtenue décrira un système actif.

3- Dans le cas où l'on approxime la courbe de la densité spectrale par une fraction rationnelle alors :

$$S_x(\omega) = \frac{a_k \omega^{2k} + a_{k-1} \omega^{2(k-1)} + \dots + a_0}{b_r \omega^{2r} + b_{r-1} \omega^{2(r-1)} + \dots + b_0} \quad r > k$$

$$S_y(\omega) = \frac{c_m \omega^{2m} + c_{m-1} \omega^{2(m-1)} + \dots + c_0}{d_l \omega^{2l} + d_{l-1} \omega^{2(l-1)} + \dots + d_0} \quad l > m$$

$$\frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)} = \frac{(c_m \omega^{2m} + c_{m-1} \omega^{2(m-1)} + \dots + c_0)(b_r \omega^{2r} + b_{r-1} \omega^{2(r-1)} + \dots + b_0)}{d_l \omega^{2l} + d_{l-1} \omega^{2(l-1)} + \dots + d_0} \frac{a_k \omega^{2k} + a_{k-1} \omega^{2(k-1)} + \dots + a_0}{a_k \omega^{2k} + a_{k-1} \omega^{2(k-1)} + \dots + a_0}$$

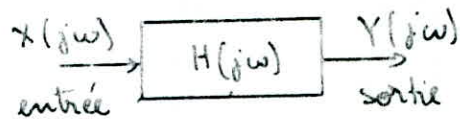
où $l+k \geq m+r$

Exemple: $S_x(\omega) = \frac{1}{2+\omega^2} \quad \begin{matrix} k=0 \\ r=1 \end{matrix} ; S_y(\omega) = \frac{1}{3+\omega^2+2\omega^4} \quad \begin{matrix} m=0 \\ l=2 \end{matrix}$

$$\frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)} = \frac{2+\omega^2}{3+\omega^2+2\omega^4} = |H(j\omega)|^2$$

C'est à dire qu'il faut faire l'approximation pour l'entrée et pour la sortie. On obtient alors deux fractions rationnelles.

4-/Soit



$X(j\omega)$ et $Y(j\omega)$ sont des séries de nombres complexes obtenues après transformation des signaux temporels $x(t)$ et $y(t)$ par passage de la FFT.

Cette méthode s'utilise dans le domaine fréquentiel par application de la formule :

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

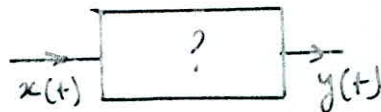
où $Y(j\omega) \xleftrightarrow{\text{FFT}} y(t)$

$$X(j\omega) \longleftrightarrow x(t)$$

$$H(j\omega) \longleftrightarrow h(t) \quad (\text{fonction impulsive, fonction de pondération ou fonction de Green})$$

Cependant, on remarque que toutes les fonctions considérées sont complexes, ce qui constitue une difficulté supplémentaire. Il faut donc passer au calcul des modules.

5-/Soit



On peut aussi travailler uniquement dans le domaine du temps. La fonction de transfert $h(z)$ peut être trouvée.

à partir de la résolution de l'équation intégrale :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau) d\tau$$

où $x(t-\tau)$ est le signal d'entrée
et $y(t)$ est le signal de sortie
Ces deux signaux étant connus.

VII/APPLICATION DUNE METHODE CHOISIE :

Approximation basé sur le remplacement de

la courbe logarithmique de la densité spectrale

par des segments de droite :

Après considération de toutes les méthodes proposées, on a opté pour celle-ci car elle peut s'appliquer beaucoup plus facilement que les autres tout en présentant une erreur d'approximation jugée assez faible généralement.

On se propose d'approximer la courbe de la figure - 2 - page . On la remplace alors par une suite de segments de droite ayant différentes pentes. (voir fig - 1 -)
Ainsi, on obtient le tableau suivant :

$$S_{\ddot{x}} \left(\frac{m^2}{s^3} \right)$$

$$V = 70 \text{ m/s}$$

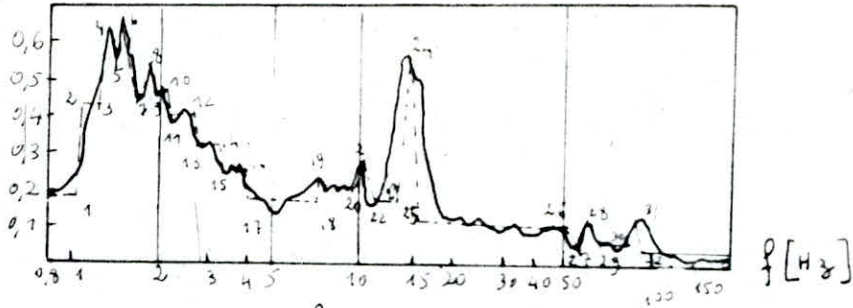


fig - 1 -

Soient i : les points représentés sur la fig-1-

f : les fréquences [Hz]

K : les pentes calculées pour les divers segments tracés.

i	f [Hz]	K
1	1,1	+1
2	1,15	+1
3	1,3	-1
4	1,35	+1
5	1,5	-1
6	1,6	+2
7	1,65	-2
8	1,8	+1
9	1,85	-1
10	2,05	-1
11	2,3	+1
12	2,5	-1
13	2,6	+1

i	f [Hz]	K
14	3	-1
15	3,1	+1
16	3,90	-1
17	4	+1
18	8	-1
19	8,5	+1
20	9,5	-1
21	10	+1
22	11	-1
23	13,5	-1
24	14,5	+1
25	15	-1
26	50	-1

i	f [Hz]	K
27	60	+1
28	65	+1
29	67	-1
30	85	-1
31	90	+1
32	95	-1

Ainsi, la forme de $S(f)$ est déduite à partir de l'équation

(1) page :

$$\begin{aligned}
 S(f) = & \frac{\left[1 + \left(\frac{f}{1,1}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{1,15}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{1,35}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{1,6}\right)^4\right] \left[1 + \left(\frac{f}{1,8}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{f}{1,3}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{1,5}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{1,65}\right)^4\right] \left[1 + \left(\frac{f}{1,85}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{2,05}\right)^2\right]} \times \\
 & \times \frac{\left[1 + \left(\frac{f}{2,3}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{2,6}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{3,1}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{4}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{3,5}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{f}{2,5}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{3}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{3,9}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{8}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{9,5}\right)^2\right]} \times \\
 & \frac{\left[1 + \left(\frac{f}{10}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{14,5}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{60}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{65}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{90}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{f}{11}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{13,5}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{15}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{50}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{67}\right)^2\right]} \times \\
 & \times \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{f}{85}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{95}\right)^2\right]}
 \end{aligned}$$

On remarque que cette expression est très longue car elle correspond à l'approximation d'une courbe comprenant un nombre très élevé de pics. Par conséquent, on peut la simplifier au maximum en ne considérant que les

pics les plus importants.

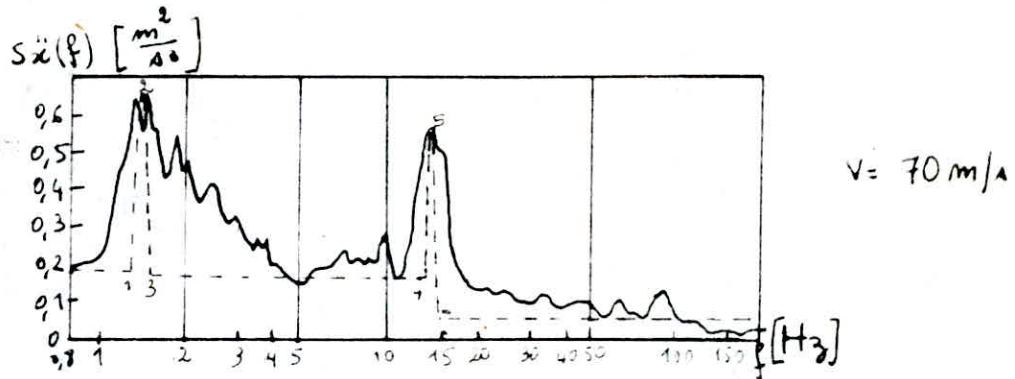


fig - 2 -

La figure 2- représente la courbe d'approximation la plus simplifiée.

i	$f [Hz]$	K
1	1.30	+1
2	1.65	+1
3	1.60	-2
4	14	-1
5	14.5	+1
6	15	-2

l'expression analytique de $S(f)$ est donc :

$$S(f) = \frac{\left[1 + \left(\frac{f}{1,3}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{1,45}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{14,5}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{f}{1,60}\right)^4\right] \left[1 + \left(\frac{f}{14}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{f}{15}\right)^4\right]}$$

On constate qu'effectivement cette dernière forme de la densité spectrale obtenue est beaucoup plus simple et moins précise que la première.

CHAPITRE

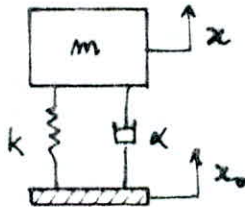
-5-

DENSITE SPECTRALE ENERGETIQUE ET STRUCTURE D'UN SYSTEME

I-CALCUL DE LA DENSITE SPECTRALE ENERGETIQUE DE CERTAINS SYSTEMES DYNAMIQUES.

-CALCUL DE LA FONCTION DE TRANSFERT :

1- Système à un degré de liberté excité cinématiquement :



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad V = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$$

$$R = \frac{1}{2} \alpha (\dot{x} - \dot{x}_0)^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow m \ddot{x} + k(x - x_0) + \alpha(\dot{x} - \dot{x}_0) = 0$$

En appliquant la transformation de Laplace ($p = j\omega$) et en supposant les conditions initiales nulles, on aura :

$$m X p^2 + k(X - X_0) + \alpha p(X - X_0) = 0$$

$$X(m p^2 + k + \alpha p) = X_0(k + \alpha p) = 0$$

$$\Rightarrow H \frac{x}{x_0}(j\omega) = \frac{k + j\omega \alpha}{-m\omega^2 + j\omega \alpha + k} \quad ; \text{ sachant que :}$$

$$S_x(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{x_0}(\omega)$$

On calcule :

$$\left| H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega) \right|^2 = \frac{(k + j\alpha\omega)(k - j\alpha\omega)}{(-m\omega^2 + j\alpha\omega + k)(-m\omega^2 + k - \alpha j\omega)}$$

$$\left| H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega) \right|^2 = \frac{k^2 + \alpha^2\omega^2}{m^2\omega^4 + k^2 - 2m\omega^2k + \alpha^2\omega^2}$$

En posant : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$; $\frac{\alpha}{m} = 2\omega_0\eta$ on aura :

$$\left| H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega) \right|^2 = \frac{\omega^4 + 4\omega_0^2\eta^2\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\omega_0^2\eta^2}$$

Ainsi

$$S_x(\omega) = \frac{4\omega_0^2\eta^2\omega^2 + \omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\omega_0^2\eta^2} \cdot S_{x_0}(\omega) \quad (1)$$

Cas particuliers :

A/ $S_{x_0}(\omega) = S_0 = \text{constante}$ (bruit blanc)

En remplaçant dans l'expression (1), on trouve :

$$S_x(\omega) = \frac{4\omega_0^2 \eta^2 \omega^2 + \omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2 \omega_0^2 \eta^2} \cdot S_0$$

'''''''' d'où en général :

$$S_x(\omega) = \frac{a_0 + a_1 \omega^2}{b_0 + b_1 \omega^2 + b_2 \omega^4}$$

où les coefficients a_0, a_1, b_0, b_1 et b_2 sont constants.

B- / $S_{x_0}(\omega) = S_0 \cdot \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2}$; β paramètre fixé

l'expression (1) devient :

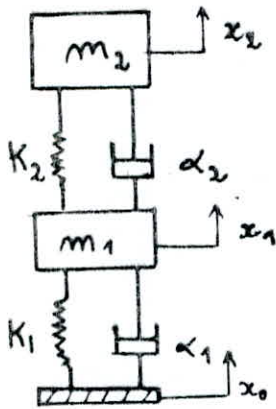
$$S_x(\omega) = \frac{4\omega_0^2 \eta^2 \omega^2 + \omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2 \omega_0^2 \eta^2} \cdot S_0 \cdot \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2}$$

'''''''' d'où en général :

$$S_x(\omega) = \frac{a'_0 + a'_1 \omega^2}{b'_0 + b'_1 \omega^2 + b'_2 \omega^4 + b'_3 \omega^6}$$

où les coefficients $a'_0, a'_1, b'_0, \dots, b'_3$ sont constants.

Système à deux degrés de liberté excité cinématiquement :



$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} K_1 (x_1 - x_0)^2$$

$$L = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2} K_1 (x_1 - x_0)^2$$

$$R = \frac{1}{2} \alpha_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} \alpha_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_0)^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow m_2 \ddot{x}_2 + K_2 (x_2 - x_1) + \alpha_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow m_1 \ddot{x}_1 + K_2 (x_2 - x_1) + K_1 (x_1 - x_0) - \alpha_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \alpha_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_0) = 0$$

La transformation de Laplace donne : (conditions initiales nulles.)

$$\begin{cases} m_2 X_2 p^2 + K_2 (X_2 - X_1) + \alpha_2 p (X_2 - X_1) = 0 \\ m_1 X_1 p^2 - K_2 (X_2 - X_1) + K_1 (X_1 - X_0) - \alpha_2 p (X_2 - X_1) + \alpha_1 p (X_1 - X_0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_2 (m_2 p^2 + K_2 + \alpha_2 p) = X_1 (K_2 + \alpha_2 p) \\ X_1 (m_1 p^2 + K_2 + K_1 + \alpha_2 p + \alpha_1 p) = X_2 (K_2 + \alpha_2 p) + X_0 (K_1 + \alpha_1 p) \end{cases}$$

donc :

$$H_{\frac{X_2}{X_1}}(j\omega) = \frac{X_2(j\omega)}{X_1(j\omega)} = \frac{K_2 + j\omega\alpha_2}{-m_2\omega^2 + j\omega\alpha_2 + K_2} ; p = j\omega \quad (2)$$

Pour calculer $H_{\frac{X_2}{X_0}}(j\omega)$ et $H_{\frac{X_1}{X_0}}(j\omega)$; il faut d'abord trouver les relations liant X_2 à X_0 et X_1 à X_0 .

$$X_2 = \frac{K_2 + \alpha_2 p}{m_2 p^2 + \alpha_2 p + K_2} \cdot X_1$$

$$X_1 (m_1 p^2 + K_2 + K_1 + \alpha_2 p + \alpha_1 p) = \frac{(K_2 + \alpha_2 p)^2}{m_2 p^2 + p\alpha_2 + K_2} + X_0 (K_1 + \alpha_1 p)$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$D_{10}(p) \cdot X_1 = (K_1 + \alpha_1 p)(m_2 p^2 + p\alpha_2 + K_2) \cdot X_0$$

$$\text{avec } D_{10}(p) = m_1 m_2 p^4 + (m_1 \alpha_2 + m_2 \alpha_1 + m_2 \alpha_2) p^3 + (m_1 K_2 + \alpha_1 \alpha_2 + m_2 K_1 + m_2 K_2) p^2 + (\alpha_1 K_2 + \alpha_2 K_1) p + K_1 K_2$$

$$\text{Donc } H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega) = \frac{x_1(j\omega)}{x_0(j\omega)} = \frac{[\alpha_1(j\omega) + K_1][m_2(j\omega)^2 + \alpha_2(j\omega) + K_2]}{D_{10}(j\omega)} \quad (3)$$

De la même façon, on calcule $H_{\frac{x_2}{x_0}}(j\omega)$
 Pour cela, on établit la relation liant x_2 à x_0
 à partir des équations (2) et (3), on trouve :

$$(K_2 + j\omega\alpha_2)(K_1 + j\omega\alpha_1) \cdot x_0 = D_{20}(j\omega) \cdot x_2$$

$$\text{donc } H_{\frac{x_2}{x_0}}(j\omega) = \frac{x_2(j\omega)}{x_0(j\omega)} = \frac{[\alpha_1(j\omega) + K_1][\alpha_2(j\omega) + K_2]}{D_{20}(j\omega)}$$

$$\begin{aligned} \text{où } D_{20}(j\omega) &= m_1 m_2 (j\omega)^4 + (m_1 \alpha_2 + m_2 \alpha_1 + m_2 \alpha_2) (j\omega)^3 + \\ &+ (m_1 K_2 + \alpha_1 \alpha_2 + m_2 K_1 + m_2 K_2) (j\omega)^2 + \\ &+ (\alpha_1 K_2 + \alpha_2 K_1) (j\omega) + K_1 K_2 \\ &= D_{10}(j\omega) = D(j\omega) \end{aligned}$$

On voit alors que :

$$H_{\frac{x_2}{x_0}}(j\omega) = H_{\frac{x_2}{x_1}}(j\omega) \cdot H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega)$$

Cas particuliers :

$$A- / S_{x_0}(\omega) = S_0 = \text{constante (bruit blanc)}$$

$$S_{x_1}(\omega) = \left| H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega) \right|^2 S_{x_0}(\omega) \quad (4)$$

Donc

$$S_{x_1}(\omega) = \left| \frac{[\alpha_1(j\omega) + K_1][m_2(j\omega)^2 + \alpha_2(j\omega) + K_2]}{D(j\omega)} \right|^2 \cdot S_0$$

D'où en général :

$$S_{x_1}(\omega) = \frac{a_{10} + a_{11}\omega^2 + a_{12}\omega^4 + a_{13}\omega^6}{b_{10} + b_{11}\omega^2 + b_{12}\omega^4 + b_{13}\omega^6 + b_{14}\omega^8}$$

$$S_{x_2}(\omega) = \left| H_{\frac{x_2}{x_0}}(j\omega) \right|^2 S_{x_0}(\omega) \quad (5)$$

donc

$$S_{x_2}(\omega) = \left| \frac{(\alpha_1(j\omega) + K_1)(\alpha_2(j\omega) + K_2)}{D(j\omega)} \right|^2 \cdot S_0$$

D'où en général

$$S_{x_2}(\omega) = \frac{a_{20} + a_{21}\omega^2 + a_{22}\omega^4}{b_{10} + b_{11}\omega^2 + b_{12}\omega^4 + b_{13}\omega^6 + b_{14}\omega^8}$$

$S_{x_2}(\omega)$ peut aussi être présentée sous la forme :

$$S_{x_2}(\omega) = \left| H_{\frac{x_2}{x_1}}(j\omega) \cdot H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega) \right|^2 \cdot S_{x_0}(\omega)$$

$$S_{x_2}(\omega) = \left| H_{\frac{x_2}{x_1}}(j\omega) \right|^2 \cdot \left| H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega) \right|^2 \cdot S_{x_0}(\omega)$$

or $S_{x_1}(\omega) = \left| H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega) \right|^2 \cdot S_{x_0}(\omega)$

Donc

$$\left| H_{\frac{x_2}{x_1}}(j\omega) \right|^2 = \frac{S_{x_2}(\omega)}{S_{x_1}(\omega)} = \frac{a_{20} + a_{21}\omega^2 + a_{22}\omega^4}{a_{10} + a_{11}\omega^2 + a_{12}\omega^4 + a_{13}\omega^6} \quad (6)$$

Dans le cas de cet exemple (2 degrés de liberté) on peut appliquer $\left| H_{\frac{x_2}{x_1}}(j\omega) \right|^2 = H_{\frac{x_2}{x_1}}(j\omega) \cdot H_{\frac{x_2}{x_1}}(-j\omega)$ pour décomposer le numérateur et le dénominateur de la fraction (6). On trouve alors l'expression de la fonction de transfert. Dans l'exemple qu'on a considéré, elle est déjà bien connue, mais généralement, il faut la trouver analytiquement comme il a été expliqué auparavant.

$$B- / S_{x_0}(\omega) = S_0 \cdot \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2} \quad (7)$$

L'expression (4) devient :

$$S_{x_1}(\omega) = \frac{(\alpha_1(j\omega) + K_1)(m_2(j\omega)^2 + \alpha_2(j\omega) + K_2)}{D(j\omega)} S_0 \cdot \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2}$$

avec $D(j\omega) = m_1 m_2 (j\omega)^4 + (m_1 \alpha_2 + m_2 \alpha_1 + m_2 \alpha_2)(j\omega)^3 + (m_1 K_2 + \alpha_2 \alpha_1 + m_2 K_1 + m_2 K_2)(j\omega)^2 + (\alpha_1 K_2 + \alpha_2 K_1)(j\omega) + K_1 K_2$.

d'où en général :

$$S_{x_1}(\omega) = \frac{a'_{10} + a'_{11}\omega^2 + a'_{12}\omega^4 + a'_{13}\omega^6}{b'_{10} + b'_{11}\omega^2 + b'_{12}\omega^4 + b'_{13}\omega^6 + b'_{14}\omega^8 + b'_{15}\omega^{10}}$$

On calcule la densité spectrale correspondant à $H_{\frac{x_2}{x_0}}(j\omega)$ en mettant l'expression (7) dans la relation (5), on obtient :

$$S_{x_2}(\omega) = \frac{(\alpha_1(j\omega) + K_1)(\alpha_2(j\omega) + K_2)}{D(j\omega)} S_0 \cdot \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2}$$

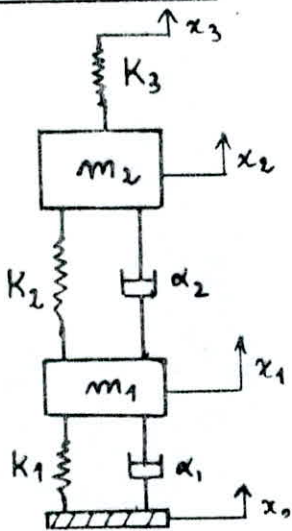
où

$$D(j\omega) = m_1 m_2 (j\omega)^4 + (m_1 \alpha_2 + m_2 \alpha_1 + m_2 \alpha_2)(j\omega)^3 + (m_1 K_2 + \alpha_1 \alpha_2 + m_2 K_1 + m_2 K_2)(j\omega)^2 + (\alpha_1 K_2 + \alpha_2 K_1)(j\omega) + K_1 K_2$$

Donc $S_{x_2}(\omega)$ a pour expression :

$$S_{x_2}(\omega) = \frac{a_{20} + a_{21}\omega^2 + a_{22}\omega^4}{b_{20} + b_{21}\omega^2 + b_{22}\omega^4 + \dots + b_{25}\omega^{10}}$$

Système à deux degrés de liberté soumis à deux excitations:



$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_3 (x_3 - x_2)^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} K_1 (x_1 - x_0)^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} K_3 (x_3 - x_2)^2 - \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2} K_1 (x_1 - x_0)^2$$

$$R = \frac{1}{2} \alpha_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_0)^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow m_1 \ddot{x}_1 - K_2 (x_2 - x_1) + K_1 (x_1 - x_0) + \alpha_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_0) - \alpha_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow m_2 \ddot{x}_2 - K_3(x_3 - x_2) + K_2(x_2 - x_1) + \alpha_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0$$

la transformée de Laplace donne: (conditions initiales nulles.)

$$\begin{cases} m_1 p^2 X_1 - K_2(X_2 - X_1) + K_1(X_1 - X_0) + \alpha_1 p(X_1 - X_0) \\ -\alpha_2 p(X_2 - X_1) = 0 \\ m_2 p^2 X_2 - K_3(X_3 - X_2) + K_2(X_2 - X_1) + \alpha_2 p(X_2 - X_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 [m_1 p^2 + K_2 + K_1 + \alpha_1 p + \alpha_2 p] = X_2 (K_2 + \alpha_2 p) + X_0 (K_1 + \alpha_1 p) \\ X_2 (m_2 p^2 + K_3 + K_2 + \alpha_2 p) = K_3 X_3 + X_1 (K_2 + \alpha_2 p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 (K_2 + \alpha_2 p) = X_1 [m_1 p^2 + K_2 + K_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) p] - X_0 (K_1 + \alpha_1 p) \quad (2) \\ X_2 (m_2 p^2 + K_3 + K_2 + \alpha_2 p) = X_1 (K_2 + \alpha_2 p) + K_3 X_3 \quad (1) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{m_2 p^2 + K_3 + K_2 + \alpha_2 p}{K_2 + \alpha_2 p} = \frac{X_1 (K_2 + \alpha_2 p) + K_3 X_3}{X_1 [m_1 p^2 + K_2 + K_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) p] - X_0 (K_1 + \alpha_1 p)}$$

or $p = j\omega$

$$\frac{-m_2 \omega^2 + K_3 + K_2 + \alpha_2 j\omega}{K_2 + \alpha_2 j\omega} = \frac{X_1 (K_2 + \alpha_2 j\omega) + K_3 X_3}{X_1 [-m_1 \omega^2 + K_2 + K_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) j\omega] - X_0 (K_1 + \alpha_1 j\omega)}$$

On pose :

$$A = \frac{-m_2 \omega^2 + K_3 + K_2 + \alpha_2 j\omega}{K_2 + \alpha_2 j\omega}$$

$$B = -m_1 \omega^2 + K_2 + K_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) j\omega$$

Donc

$$A = \frac{X_1 [(K_2 + \alpha_2 j\omega) + K_3 X_3]}{X_1 B - X_0 (K_1 + \alpha_1 j\omega)}$$

On obtient finalement les 3 équations suivantes :

$$\begin{cases} X_1 (K_2 + \alpha_2 j\omega - AB) + K_3 X_3 + A (K_1 + \alpha_1 j\omega) X_0 = 0 & (1) \\ X_1 B = X_2 (K_2 + \alpha_2 j\omega) + X_0 (K_1 + \alpha_1 j\omega) & (2) \\ X_2 A (K_2 + \alpha_2 j\omega) = X_3 K_3 + X_1 (K_2 + \alpha_2 j\omega) & (3) \end{cases}$$

De (1) on tire :

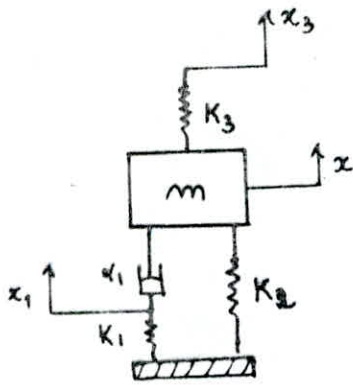
$$X_1 = \frac{K_3 X_3 + A (K_1 + \alpha_1 j\omega) X_0}{-K_2 - \alpha_2 j\omega + AB} \quad (1')$$

On porte (1') dans (2) :

$$\frac{K_3 X_3 + A [K_1 + \alpha_1 j\omega] X_0}{AB - K_2 - \alpha_2 j\omega} \cdot B = X_2 (K_2 + \alpha_2 j\omega) + X_0 (K_1 + \alpha_1 j\omega)$$

$$\Leftrightarrow BK_3 X_3 + X_2 [(K_2 + \alpha_2 j\omega)^2 - AB(K_2 + \alpha_2 j\omega)] + X_0 [(K_1 + \alpha_1 j\omega)(K_2 + \alpha_2 j\omega)] = 0 \quad (4)$$

Systeme à un degré et demi de liberté soumis à deux excitations :



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_3 (x_3 - x)^2 + \frac{1}{2} K_2 (x - x_0)^2 + \frac{1}{2} K_1 (x_1 - x_0)^2$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K_3 (x_3 - x)^2 - \frac{1}{2} K_2 (x - x_0)^2 - \frac{1}{2} K_1 (x_1 - x_0)^2$$

$$R = \frac{1}{2} \alpha_1 (\dot{x} - \dot{x}_1)^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow m \ddot{x} - K_3 (x_3 - x) + K_2 (x - x_0) + \alpha_1 (\dot{x} - \dot{x}_1) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow K_1 (x_1 - x_0) - \alpha_1 (\dot{x} - \dot{x}_1) = 0$$

La transformation de Laplace donne (conditions initiales nulles):

$$\begin{cases} m p^2 X - K_3 (X_3 - X) + K_2 (X - X_0) + \alpha_1 p (X - X_1) = 0 \\ K_1 (X_1 - X_0) - \alpha_1 p (X - X_1) = 0 \end{cases} \quad p = j\omega$$

$$(-m\omega^2 + K_3 + K_2 + \alpha_1 j\omega) X = K_3 X_3 + K_2 X_0 + \alpha_1 j\omega X_1 \quad (2')$$

$$X_1 (K_1 + \alpha_1 j\omega) = K_1 X_0 + \alpha_1 j\omega X \quad (1)$$

De (1) on a:

$$X_1 = \frac{K_1 X_0 + \alpha_1 j\omega X}{K_1 + \alpha_1 j\omega} \quad (1')$$

On porte (1') dans (2') on obtient:

$$(-m\omega^2 + K_3 + K_2 + \alpha_1 j\omega) X = K_3 X_3 + K_2 X_0 + \frac{\alpha_1 j\omega (K_1 X_0 + \alpha_1 j\omega X)}{K_1 + \alpha_1 j\omega}$$

$$\Leftrightarrow AX = X_3 K_3 (K_1 + \alpha_1 j\omega) + X_0 B \quad (2)$$

$$\text{où } A = -\alpha_1 m \omega^3 j - K_1 \omega^2 m + \alpha_1 j\omega (K_1 + K_2 + K_3) \\ + K_1 K_2 + K_1 K_3$$

$$\text{et } B = K_1 K_2 + \alpha_1 j\omega (K_2 + K_1)$$

De (2) on a :

$$X_0 = \frac{AX - X_3 K_3 (K_1 + j\omega \alpha_1)}{B} \quad (2')$$

On remplace dans (1), on trouve :

$$X_1 (K_1 + \alpha_1 j\omega) = K_1 \left[\frac{AX - X_3 K_3 (K_1 + \alpha_1 j\omega)}{K_1 K_2 + \alpha_1 j\omega (K_2 + K_1)} \right] + \alpha_1 j\omega X$$

$$\Leftrightarrow X (K_1 A + \alpha_1 j\omega B) = X_1 B (K_1 + \alpha_1 j\omega) + K_1 K_3 X_3 (K_1 + \alpha_1 j\omega) \quad (3)$$

En divisant membre à membre les équations (3) et (2), on obtient :

$$\frac{(3)}{(2)} \Rightarrow \frac{K_1 A + \alpha_1 j\omega B}{A} = \frac{X_1 B (K_1 + \alpha_1 j\omega) + K_1 K_3 (K_1 + \alpha_1 j\omega) X_3}{X_3 K_3 (K_1 + \alpha_1 j\omega) + X_0 B}$$

$$(K_1 A + \alpha_1 j\omega B) (X_3 K_3 (K_1 + \alpha_1 j\omega) + X_0 B) = X_1 AB (K_1 + \alpha_1 j\omega) \\ + AK_1 K_3 (K_1 + \alpha_1 j\omega) X_3$$

$$\Leftrightarrow X_3 [K_3 (K_1 + \alpha_1 j\omega) (K_1 A + \alpha_1 j\omega B) - AK_1 K_3 (K_1 + \alpha_1 j\omega)] = \\ = X_0 B (K_1 A + \alpha_1 j\omega B) + X_1 AB (K_1 + \alpha_1 j\omega) \quad (4)$$

II.-/PROBLEME DE L'IDENTIFICATION :

Comme il a été déjà dit au chapitre 3, pour un système à multiples entrées et sorties la densité spectrale énergétique s'exprime par :

$$S_{Y_k}(w) = \sum_{j=1}^m |H_{kj}|^2 S_{x_j}(w) \quad (1)$$

$$S_{Y_k Y_p}(w) = \sum_{j=1}^m H_{kj} H_{pj}^* S_{x_j}(w) \quad (2)$$

Par conséquent, pour identifier un système donné, on doit :

- tout d'abord choisir l'entrée et la sortie du système.
- trouver les allures des densités spectrales à l'entrée et à la sortie considérées et éventuellement les densités spectrales mutuelles.

- Approximer les courbes des diverses densités spectrales énergétiques afin d'attribuer à chacune d'entre elles la forme analytique qui la décrit le mieux possible.

Puis, après avoir calculé les densités spectrales correspondantes, on peut établir $|H_{ki}(jw)|^2$ grâce aux formules (1) et (2).

La décomposition de ce module permet d'obtenir la fonction de transfert $H_{ki}(jw)$ du système considéré. Celle-ci sera comparée aux fonctions de transfert calculées pour certains

exemples de systèmes à structures connues (Chapitre 5, paragraphe 1), ce qui permet l'identification du système étudié.

Une fois que le modèle physique correspondant à la fonction de transfert $H_{ki}(p)$ est connu (ressorts et amortisseurs) on peut :

- agir sur ses caractéristiques : coefficients d'amortissement et de raideur de façon à optimiser le système étudié,
- passer à la réalisation pratique du système trouvé.

CHAPITRE

-6-

APPLICATION D'UNE METHODE D'IDENTIFICATION AUX PLOTS DE SUSPENSION DU MOTEUR F4L 912 DU CAMION K66

I- PROPRIETES DES PLOTS DE SUSPENSION

Un plot de suspension est une pièce comportant du caoutchouc. Il présente toujours de l'élasticité pure et de l'amortissement visqueux (tel celui donné par les amortisseurs hydrauliques).

- L'élasticité est la faculté pour le support de se déformer avec une amplitude sensiblement proportionnelle à la charge et de manière réversible.
- L'amortissement visqueux consiste à réduire les amplitudes des vibrations par un effort de freinage. Il dépend de la vitesse relative de l'ensemble suspendu par rapport à la partie fixe.

Un plot de suspension d'un véhicule peut donc être remplacé par différents organes travaillant en parallèle où la suspension élastique serait assurée par des ressorts et l'amortissement par des amortisseurs hydrauliques.

1- / Role:

Les plots de suspension n'empêchent pas le

moteur de vibrer mais ils atténuent la transmission des vibrations vers les autres organes du véhicule. Ils constituent ainsi une suspension directe. De plus, en enlevant les plots et en fixant le moteur rigidement au châssis, on obtient un système hyperstatique. Un plot de suspension permet donc une meilleure répartition des charges statiques.

2-/Nombre et position des points de

fixation du moteur :

Un moteur à combustion interne est suspendu sur ses plots en différents points de fixation.

- S'ils ne sont pas imposés, on détermine leur nombre et leur position de façon que la charge de chaque support soit la même pour tous les points de fixation.

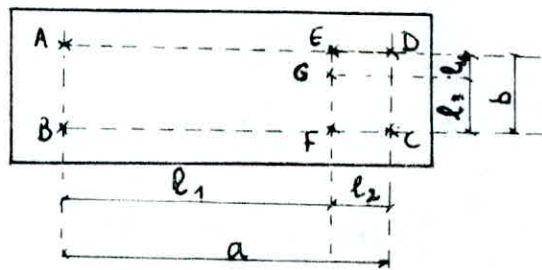
Exemple : Si $n = 6$ points de fixation

$$\Rightarrow \text{charge par point} = \frac{\text{Poids total de l'ensemble suspendu}}{6}$$

- Si le nombre de points de fixation est imposé, alors il faut déterminer la charge supportée par chacun

des plots.

Exemple :



Soient A, B, C et D les quatre points de fixation imposés.

P: la charge totale

G: le centre de gravité de l'ensemble suspendu.

- Calcul des charges concentrées en A, B, C et D.

Le poids total se trouve concentré en G. Tout d'abord, on le répartit sur E et sur F.

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_{ext} = 0 \Rightarrow P_E + P_F - P = 0 \\ \sum M/G = 0 \Rightarrow P_E l_2 - P_F l_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} P_E = \frac{Pl_2}{b} \\ P_F = \frac{Pl_1}{b} \end{cases}$$

Par un calcul analogue, on répartit P_F sur les fixations A et D :

$$P_A = \frac{P_F l_2}{a}$$

$$P_D = \frac{P_F l_1}{a}$$

Puis on répartit P_F sur les fixations B et C :

$$P_B = \frac{P_F \cdot l_2}{a}$$

$$P_C = \frac{P_F \cdot l_1}{a}$$

Ainsi, en remplaçant P_E et P_F par leurs valeurs respectives, on obtient :

$$P_A = \frac{l_3 \cdot l_2}{b \cdot a} \cdot p$$

$$P_B = \frac{l_4 \cdot l_2}{b \cdot a} \cdot p$$

$$P_D = \frac{l_3 \cdot l_1}{b \cdot a} \cdot p$$

$$P_C = \frac{l_4 \cdot l_1}{b \cdot a} \cdot p$$

Cette étude nous permet de remarquer que :

- Si P_A , P_B , P_C et P_D sont très différents, il faut théoriquement choisir quatre supports différents donnant la même flèche sous les dites charges.
- Souvent, les moteurs sont fixés en quatre points pour leur assurer un maximum de stabilité. Toutefois, ils peuvent être fixés seulement par trois points (moteurs américains par exemple.)

Dans ce cas, une fixation se trouve sur le plan vertical passant par l'axe $x'x$ et les deux autres points sont de part et d'autre de G (voir fig-2-)

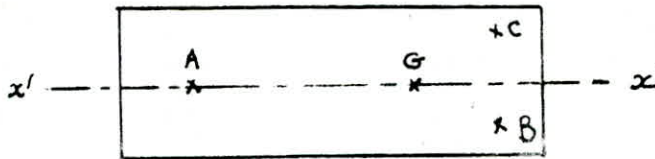


fig - 2 -

- Si le moteur est fixé en plus de quatre points, il est préférable que la symétrie par rapport à un plan vertical passant par $x'x$ soit respectée (voir fig - 3 -)

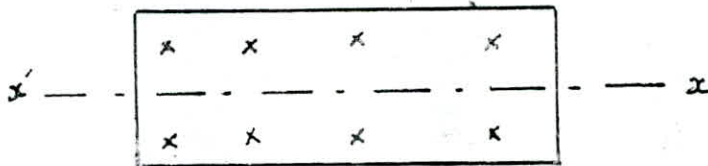


fig - 3 -

II- ENONCE DU PROBLEME DE L'IDENTIFICATION DES PLOTS :

Dans le cas réel, un plot de suspension a une structure absolument inconnue. Il constitue une "boite noire" (voir figure - 4 -). Pour l'identifier, il suffit de procéder selon la méthode exposée au chapitre 5 paragraphe 2. C'est à dire qu'il faut mesurer la

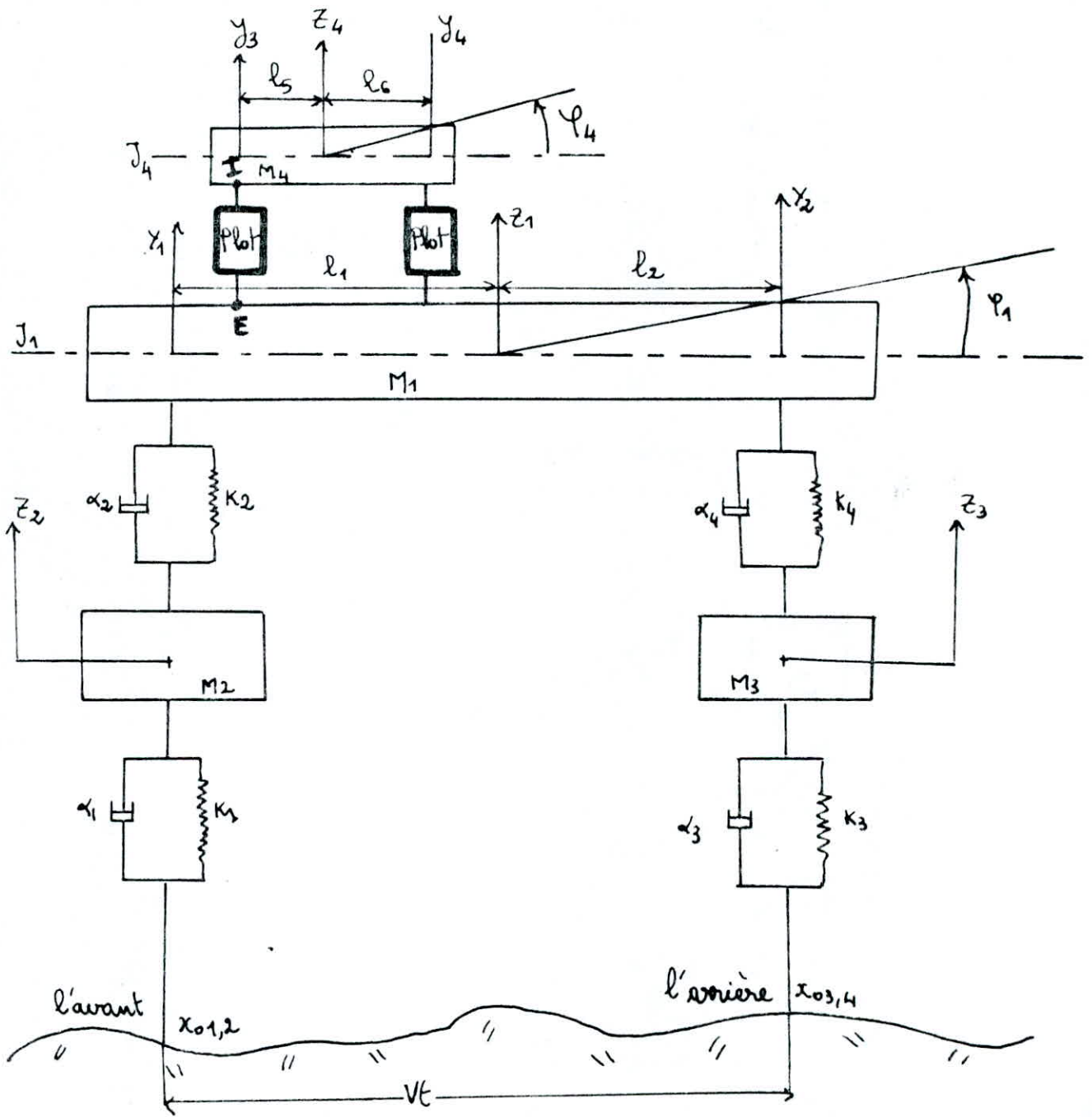


fig - 4 -

densité spectrale à l'entrée (au point E) puis à la sortie (au point I). Après approximation de celles-ci, on peut par application de la formule (8) page trouver la fonction de transfert du plot.

Cependant, dans le cadre de notre projet, cette méthode n'a pas pu être appliquée car la mesure des densités spectrales aux points de fixation des plots n'a pas été réalisée à cause du manque de matériel nécessaire à cette expérience

III- / UTILISATION DES RESULTATS NUMERIQUE -

1- / Calcul des densités spectrales énergétiques au niveau des points de fixation des plots :

Afin de pouvoir faire le calcul des densités spectrales aux points de fixation du moteur, on a supposé le modèle physique de la fig- 5-. Ainsi, on peut établir les équations de mouvement du système. Celles-ci se réduisent après transformation de Laplace au système matriciel suivant :

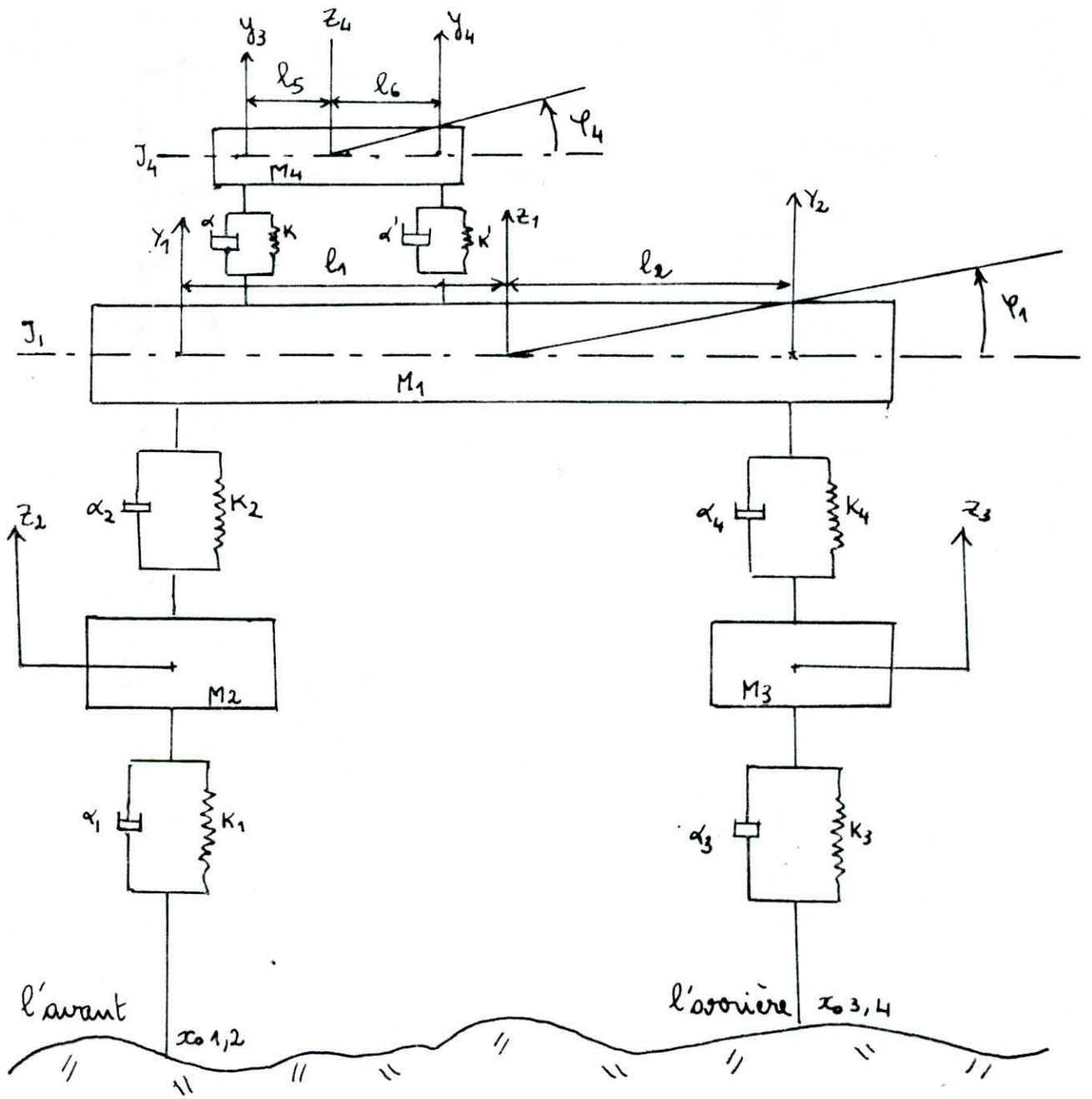


fig - 5 -

$$A\bar{q} = \bar{x}_{01} b_1 + \bar{x}_{02} b_2 \quad (1)$$

où x_{01} et x_{02} sont les excitations au niveau du sol
et où les coefficients des matrices A , b_1 , et b_2 sont
complètement définis.

Le système (1) se décompose en la somme des solutions
respectives des deux systèmes d'équations suivants:

$$\left. \begin{array}{l} A\bar{q} = b_1 \bar{x}_{01} \\ A\bar{q} = b_2 \bar{x}_{02} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \left(\frac{\bar{q}}{\bar{x}_{01}} \right) = b_1 \\ A \left(\frac{\bar{q}}{\bar{x}_{02}} \right) = b_2 \end{array} \right.$$

$$\text{où } \frac{\bar{q}}{\bar{x}_{01}} = H_1 \quad \frac{\bar{q}}{\bar{x}_{02}} = H_2$$

H_1 et H_2 sont des fonctions de transfert liant la coordonnée
 q_i avec les excitations au niveau du sol.

Ainsi l'application de la formule page permet d'écrire:

$$S_E = H_1^2 S_{x_{01}} + H_2^2 S_{x_{02}} \quad (1)$$

$$S_I = H_1'^2 S_{x_{01}} + H_2'^2 S_{x_{02}} \quad (2)$$

E et I étant les points de fixation du plot.

$S_{x_{01}}$ et $S_{x_{02}}$ sont les densités spectrales correspondant
respectivement aux excitations x_{01} et x_{02} .

$$H_1 = \frac{x_E}{x_{01}}$$

$$H_2 = \frac{x_E}{x_{02}}$$

$$H_1' = \frac{x_I}{x_{01}}$$

$$H_2' = \frac{x_I}{x_{02}}$$

Les calculs effectués sur les plots de suspension du moteur F4L 912 du camion K66 produit par la SNVI de Rouiba pour un véhicule à vide ayant des densités spectrales égales au niveau des deux roues, donnent:

$$S_{x_{01}}(\omega) = S_{x_{02}}(\omega) = S_h(\omega)$$

avec

$$\text{où } S_h(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{a \cdot v}{\omega^2 + a^2 v^2} \quad [\quad]$$

où a est un paramètre fixé
et σ^2 est la dispersion

Les caractéristiques des plots sont:

Amortissement : $\alpha = 30\,000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$.

Raideur : $K = 500\,000 \text{ N}/\text{m}$.

Les calculs sont effectués pour deux types de routes:

a- / Asphalt goudronné :

$$S_h(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \cdot \frac{a \cdot v}{\omega^2 + a^2 v^2}$$

avec $\sigma^2 = 9 \text{ [mm}^2\text{]}$

$a = 0,15 \text{ [1/m]}$

$v = 10, 20, 30, 40, 50 \text{ [m/s]}$

L'application des formules (1) et (2) permet de trouver les

-PROG1-

```
10 SCREEN 3
20 KEY OFF
30 CLS
35 LOCATE 12,18 :PRINT"CALCULS EN COURS ,PATIENTEZ S.V.P"
40 DIM W(150)
50 DIM SH1(5,150)
60 DIM WH2(5,150)
70 DIM SE(5,150)
80 DIM SI(5,150)
90 DIM SEA(5,150)
100 DIM SIA(5,150)
110 OPEN "I",#1,"A:RPF1.DAT"
120 FOR IV=1 TO 5
130 FOR IW=1 TO 150
140 INPUT #1,W(IW),SH1(IV,IW),WH2(IV,IW),SE(IV,IW),SI(IV,IW)
150 NEXT IW
160 NEXT IV
170 CLOSE
180 FOR IV=1 TO 5
190 FOR IW=1 TO 150
200 SEA(IV,IW)=(W(IW)^4)*SE(IV,IW)
210 SIA(IV,IW)=(W(IW)^4)*SI(IV,IW)
220 NEXT IW
230 NEXT IV
240 'SEM =SE(1,1)
250 'SIM =SI(1,1)
260 'SEAM=SEA(1,1)
270 'SIAM=SIA(1,1)
280 'FOR IV=1 TO 5
290 'FOR IW=1 TO 150
300 'IF (SEM < SE(IV,IW)) THEN SEM=SE(IV,IW)
310 'IF (SIM < SI(IV,IW)) THEN SIM=SI(IV,IW)
320 'IF (SEAM < SEA(IV,IW)) THEN SEAM=SEA(IV,IW)
330 'IF (SIAM < SIA(IV,IW)) THEN SIAM=SIA(IV,IW)
340 'NEXT IW
350 'NEXT IV
355 'PRINT " SEM SIM SEAM SIAM"
356 'PRINT SEM,SIM,SEAM,SIAM
358 'IF INKEY$ <>" " THEN 358
359 CLS
360 VIEW(0,0)-(300,180)
370 WINDOW(-10,-.8)-(50,2)
380 LINE(-10,-.8)-(50,2),,B
390 LINE(0,0)-(40,0)
400 LINE(38,-.06)-(40,0)
410 LINE(38,.06)-(40,0)
420 LINE(0,0)-(0,1.8)
430 LINE(-.7,1.7)-(0,1.8)
440 LINE(.7,1.7)-(0,1.8)
450 FOR I=5 TO 35 STEP 5
460 LINE(I,-.06)-(I,.06)
470 NEXT I
```



```

480 FOR I=0 TO 1.8 STEP .5
490 LINE(-.7,I)-(.7,I)
500 NEXT I
510 LOCATE 2,2 :PRINT "SE"
520 LOCATE 2,8 :PRINT "mm2.s"
530 LOCATE 10,10:PRINT " 10    20    30  rd/s"
540 LOCATE 11,2 :PRINT " 1/ Dsit  spctrlé de deplt du pt E "
550 LOCATE 7,3 :PRINT ".5"
560 LOCATE 5,4:PRINT "1"
570 LOCATE 3,17:PRINT "v=10 m/s"
580 LOCATE 4,17:PRINT "v=20 m/s"
590 LOCATE 5,17:PRINT "v=30 m/s"
600 LOCATE 6,17:PRINT "v=40 m/s"
610 LOCATE 7,17:PRINT "v=50 m/s"
620 FOR IV=1 TO 5
630 FOR IW=1 TO 35
640 LINE(W(IW),SE(IV,IW))- (W(IW+1),SE(IV,IW+1))
650 NEXT IW
660 NEXT IV
670 VIEW(320,0)-(620,180)
680 WINDOW(-15,-.8)-(50,2)
690 LINE(-15,-.8)-(50,2),,B
700 LINE(0,0)-(40,0)
710 LINE(0,0)-(0,1.9)
720 LINE(38,-.05)-(40,0)
730 LINE(38,.05)-(40,0)
740 LINE(-.8,1.85)-(0,1.9)
750 LINE(.8,1.85)-(0,1.9)
760 FOR I=0 TO 40 STEP 10
770 LINE(I,-.05)-(I,.05)
780 NEXT I
790 FOR I=0 TO 1.9 STEP .5
800 LINE(-.8,I)-(.8,I)
810 NEXT I
820 FOR IV=1 TO 5
830 FOR IW=1 TO 40
840 LINE(W(IW),SI(IV,IW))- (W(IW+1),SI(IV,IW+1))
850 NEXT IW
860 NEXT IV
870 LOCATE 5,46:PRINT "1"
880 LOCATE 2,50:PRINT "mm2.s"
890 LOCATE 7,45:PRINT ".5"
900 LOCATE 10,54:PRINT " 10    20    30  rd/s"
910 LOCATE 11,44 :PRINT " 2/ Dsit  spctrlé de dplt du pt I "
920 LOCATE 2,71 :PRINT "5"
930 LOCATE 3,71 :PRINT "4"
940 LOCATE 4,71 :PRINT "3"
950 LOCATE 5,71 :PRINT "2"
960 LOCATE 7,71 :PRINT "1"
970 VIEW(0,210)-(300,379)
// // //980 WINDOW(-15,-20000)-(70,50000!)
990 LINE(-15,-20000)-(70,50000!),,B
1000 LINE(8.9,8689.980,0)

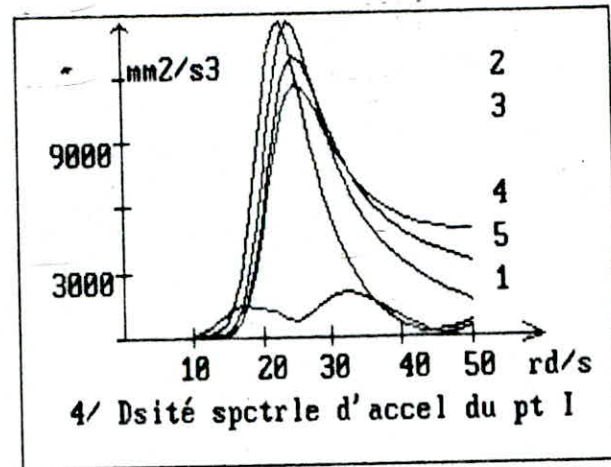
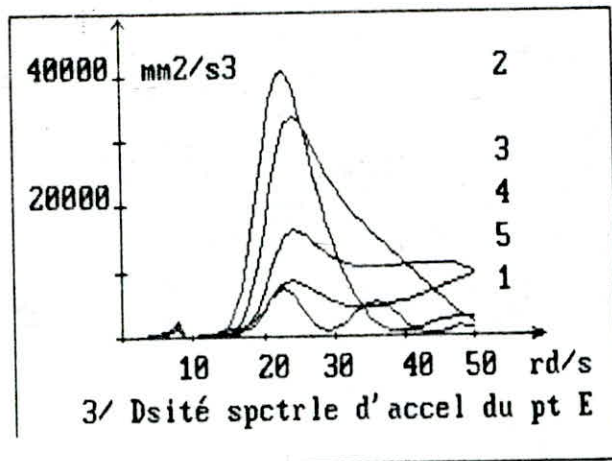
```

```

1020 LINE(58,800)-(60,0)
1030 LINE(0,0)-(0,49000!)
1040 LINE(-.8,48000!)-(0,49000!)
1050 LINE(.8,48000!)-(0,49000!)
1060 FOR I=0 TO 50 STEP 10
1070 LINE(I,-500)-(I,500)
1080 NEXT I
1090 FOR I=1 TO 49000! STEP 10000
1100 LINE(-.8,I)-(.8,I)
1110 NEXT I
1120 LOCATE 22,10:PRINT " 10  20  30  40  50 rd/s"
1130 LOCATE 23,5 :PRINT "3/ Dsit  spctrle d'accel du pt E"
1140 LOCATE 15,2:PRINT "40000"
1150 LOCATE 18,2:PRINT "20000"
1160 LOCATE 15,9:PRINT "mm2/s3"
1170 FOR IV=1 TO 5
1180 FOR IW=1 TO 49
1190 LINE(W(IW),SEA(IV,IW))-(W(IW+1),SEA(IV,IW+1))
1200 NEXT IW
1210 NEXT IV
1220 LOCATE 15,31:PRINT "2"
1230 LOCATE 17,31:PRINT "3"
1240 LOCATE 18,31:PRINT "4"
1250 LOCATE 19,31:PRINT "5"
1260 LOCATE 20,31:PRINT "1"
1270 VIEW(320,210)-(620,379)
1280 WINDOW(-15,-8000)-(70,15000)
1290 LINE(-15,-8000)-(70,15000),,B
1300 LINE(0,0)-(60,0)
1310 FOR I=10 TO 50 STEP 10
1320 LINE(I,-400)-(I,400)
1330 LINE(0,0)-(0,14600)
1340 NEXT I
1342 LINE(57,-400)-(60,0)
1344 LINE(57,400)-(60,0)
1346 LINE(-1.2,14200)-(0,14600)
1348 LINE(1.2,14200)-(0,14600)
1350 LOCATE 22,50:PRINT " 10  20  30  40  50 rd/s"
1360 FOR I=0 TO 14000 STEP 3000
1370 LINE(-1.2,I)-(1.2,I)
1380 NEXT I
1390 LOCATE 23,44 :PRINT "4/ Dsit  spctrle d'accel du pt I"
1400 LOCATE 17,43:PRINT "9000"
1410 LOCATE 20,43:PRINT "3000"
1420 LOCATE 15,48 :PRINT "mm2/s3"
1430 FOR IV=1 TO 5
1440 FOR IW=10 TO 49
1450 LINE(W(IW),SIA(IV,IW))-(W(IW+1),SIA(IV,IW+1))
1460 NEXT IW
1470 NEXT IV
1480 LOCATE 15,71:PRINT "2"
1490 LOCATE 18,71:PRINT "3"
1500 LOCATE 18,71:PRINT "4"
1510 LOCATE 19,71:PRINT "5"

```

1520 LOCATE 20,71:PRINT "1"
1530 LOCATE 12,4 |
1540 END



- 1 $\rightarrow V = 10 \text{ m/s}$
 2 $\rightarrow V = 20 \text{ m/s}$
 3 $\rightarrow V = 30 \text{ m/s}$
 4 $\rightarrow V = 40 \text{ m/s}$
 5 $\rightarrow V = 50 \text{ m/s}$

- CAS DE L'ASPHALTE GOUDRONNE

valeurs des densités spectrales aux points de fixation des plots.

Sachant que :

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega)$$

on peut alors calculer aussi les densités spectrales d'accélération au niveau des deux points E et I.

Le programme (1) a été établi pour le tracé de celles-ci,

b/ Route pavée :

$$S_h(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \cdot \frac{a \cdot v}{\omega^2 + a^2 v}$$

$$\text{avec } \sigma^2 = 300 \quad [\text{mm}^2]$$

$$a = 0,45 \quad [\text{m}^{-1}]$$

$$v = 5, 10, 15, 20, 25, 30 \quad [\text{m/s}]$$

Pour les calculs, on procède de la même façon que dans le cas a) ce qui permet d'obtenir les densités spectrales aux points E et I. Leur tracé est effectué par le programme (2)

- PROG 2 -

```
10 SCREEN 3
20 KEY OFF
30 CLS
35 LOCATE 12,20 :PRINT"CALCULS EN COURS,PATIENTEZ S.V.P "
40 DIM W(150)
50 DIM SH1(5,150)
60 DIM WH2(5,150)
70 DIM SE(5,150)
80 DIM SI(5,150)
90 DIM SEA(5,150)
100 DIM SIA(5,150)
110 OPEN "I",#1,"A:PF2.DAT"
120 FOR IV=1 TO 5
130 FOR IW=1 TO 150
140 INPUT #1,W(IW),SH1(IV,IW),WH2(IV,IW),SE(IV,IW),SI(IV,IW)
150 NEXT IW
160 NEXT IV
170 CLOSE
180 FOR IV=1 TO 5
190 FOR IW=1 TO 150
200 SEA(IV,IW)=(W(IW)^4)*SE(IV,IW)
210 SIA(IV,IW)=(W(IW)^4)*SI(IV,IW)
220 NEXT IW
230 NEXT IV
231 'FOR IW =1 TO 150 :PRINT " SEA(5,";IW;")=";SEA(5,IW)
232 'PRINT"SIA(5,";IW;")=";SIA(5,IW)
233 'NEXT IW
240 'SEM =SE(1,1)
250 'SIM =SI(1,1)
260 'SEAM=SEA(1,1)
270 'SIAM=SIA(1,1)
280 'FOR IV=1 TO 5
290 'FOR IW=1 TO 150
300 'IF (SEM < SE(IV,IW)) THEN SEM=SE(IV,IW)
310 'IF (SIM < SI(IV,IW)) THEN SIM=SI(IV,IW)
320 'IF (SEAM < SEA(IV,IW)) THEN SEAM=SEA(IV,IW)
330 'IF (SIAM < SIA(IV,IW)) THEN SIAM=SIA(IV,IW)
340 'NEXT IW
350 'NEXT IV
355 'PRINT " SEM SIM SEAM SIAM"
358 'PRINT SEM,SIM,SEAM,SIAM
358 'IF INKEY# <>" " THEN 358
359 CLS
360 VIEW(0,0)-(300,180)
370 WINDOW(-10,-35)-(80,90)
380 LINE(-10,-35)-(80,90),,B
390 LINE(0,0)-(50,0)
400 LINE(47,-1.2)-(50,0)
410 LINE(47,1.2)-(50,0)
420 LINE(0,0)-(0,85)
430 LINE(-.7,81)-(0,85)
440 LINE(.7,81)-(0,85)
450 FOR I=5 TO 35 STEP 5
490 NEXT(I,-1.2)-(I,1.2)
```

```

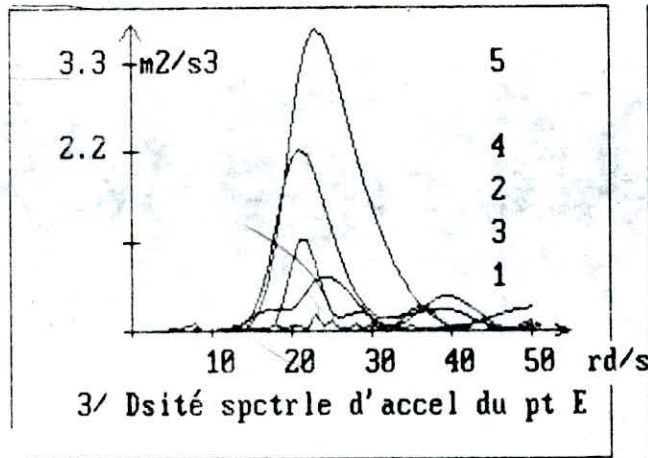
480 FOR I=0 TO 80 STEP 25
490 LINE(-.7,I)-(.7,I)
500 NEXT I
510 LOCATE 2,2 :PRINT "SE"
520 LOCATE 2,8 :PRINT "mm2.s"
530 LOCATE 10,10:PRINT " 10 20 30 rd/s"
540 LOCATE 11,2:PRINT "1/ Dsité spctrlé de deplt du pt E "
550 LOCATE 6,3 :PRINT "25"
560 LOCATE 4,3:PRINT "50"
565 LOCATE 2,20:PRINT "v=5 m/s"
570 LOCATE 3,20:PRINT "v=10 m/s"
580 LOCATE 4,20:PRINT "v=15 m/s"
590 LOCATE 5,20:PRINT "v=20 m/s"
600 LOCATE 6,20:PRINT "v=25 m/s"
610 LOCATE 7,20:PRINT "v=30 m/s"
620 FOR IV=1 TO 5
630 FOR IW=1 TO 35
640 LINE(W(IW),SE(IV,IW))-(W(IW+1),SE(IV,IW+1))
650 NEXT IW
660 NEXT IV
670 VIEW(320,0)-(620,180)
680 WINDOW(-15,-35)-(60,90)
690 LINE(-15,-35)-(60,90),,B
700 LINE(0,0)-(50,0)
710 LINE(0,0)-(0,85)
720 LINE(47,-1.8)-(50,0)
730 LINE(47,1.8)-(50,0)
740 LINE(-.8,82)-(0,85)
750 LINE(.8,82)-(0,85)
760 FOR I=0 TO 40 STEP 10
770 LINE(I,-1.2)-(I,1.2)
780 NEXT I
790 FOR I=0 TO 80 STEP 25
800 LINE(-.8,I)-(.8,I)
810 NEXT I
820 FOR IV=1 TO 5
830 FOR IW=1 TO 40
840 LINE(W(IW),SI(IV,IW))-(W(IW+1),SI(IV,IW+1))
850 NEXT IW
860 NEXT IV
870 LOCATE 2,45:PRINT "75"
880 LOCATE 2,50:PRINT "mm2.s"
890 LOCATE 4,45:PRINT "50"
900 LOCATE 10,50:PRINT " 10 20 30 40 rd/s"
910 LOCATE 11,44 :PRINT " 2/ Dsité spctrlé de dplt du pt I "
920 LOCATE 2,71 :PRINT "1"
930 LOCATE 3,71 :PRINT "2"
940 LOCATE 4,71 :PRINT "3"
950 LOCATE 5,71 :PRINT "4"
960 LOCATE 7,71 :PRINT "5"
970 VIEW(0,210)-(300,379)
980 WINDOW(-15,-1600000!)-(60,4000000!)
990 LINE(-15,-1600000!)-(60,4000000!),,B
1000 LINE(0,0)-(55,0)

```

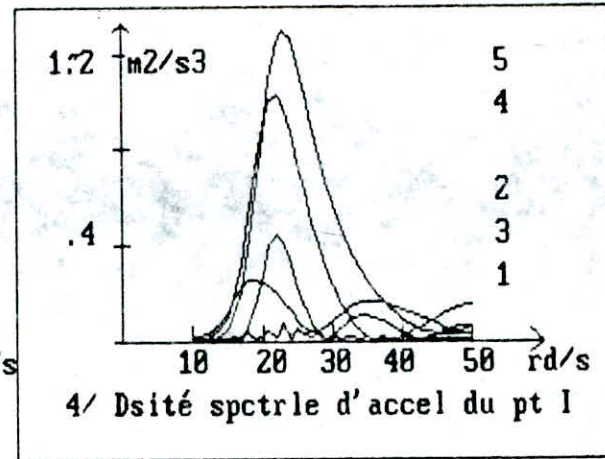
```

1010 LINE(53,-60000!)-(55,0)
1020 LINE(53,60000!)-(55,0)
1030 LINE(0,0)-(0,3800000!)
1040 LINE(-1.3,3800000!)-(0,3800000!)
1050 LINE(1.3,3800000!)-(0,3800000!)
1060 FOR I=0 TO 50 STEP 10
1070 LINE(I,-60000!)-(I,10000)
1080 NEXT I
1090 FOR I=1 TO 3800000! STEP 1100000!
1100 LINE(-1.1,I)-(-1.1,I)
1110 NEXT I
1120 LOCATE 22,10:PRINT " 10 20 30 40 50 rd/s"
1130 LOCATE 23,5 :PRINT "3/ Dsité spctrlé d'accél du pt E"
1140 LOCATE 15,4:PRINT "3.3"
1150 LOCATE 17,4:PRINT "2.2"
1160 LOCATE 15,9:PRINT "m2/s3"
1170 FOR IV=1 TO 5
1180 FOR IW=1 TO 49
1190 LINE(W(IW),SEA(IV,IW))-(W(IW+1),SEA(IV,IW+1))
1200 NEXT IW
1210 NEXT IV
1220 LOCATE 15,31:PRINT "5"
1230 LOCATE 17,31:PRINT "4"
1240 LOCATE 18,31:PRINT "2"
1250 LOCATE 19,31:PRINT "3"
1260 LOCATE 20,31:PRINT "1"
1270 VIEW(320,210)-(620,379)
1280 WINDOW(-15,-500000!)-(70,1400000!)
1290 LINE(-15,-500000!)-(70,1400000!),,B
1300 LINE(0,0)-(60,0)
1310 FOR I=10 TO 50 STEP 10
1320 LINE(I,-60000!)-(I,60000!)
1330 LINE(0,0)-(0,1330000!)

```

- 1 -- $\rightarrow v = 5 \text{ m/s}$
 2 -- $\rightarrow v = 10 \text{ m/s}$
 3 -- $\rightarrow v = 15 \text{ m/s}$



- 4 -- $\rightarrow v = 20 \text{ m/s}$
 5 -- $\rightarrow v = 25 \text{ m/s}$

_ CAS D'UNE ROUTE PAVEE _

2- Résultats numériques et approximation :

Dans le cas d'une route pavée les résultats numériques obtenus pour les densités spectrales d'accélération aux points de fixation E et I des plots sont pour une vitesse $V=25 \text{ m/s}$ présentés dans le tableau suivant :

ω (rad/s) [rad/s]	$\log_{10} \omega$	SEA $\times 10^{-2}$ (cm^2/s^3)	$\log_{10} \text{SEA}$	SEI $\times 10^2$ (cm^2/s^3)	$\log_{10} \text{SEI}$
2	0,693	168,1565	0,226	168,4731	0,226
6	0,78	19529,41	2,291	19607,35	2,292
10	1	254	0,405	3379,1	1,530
15	1,176	94667,22	2,976	48604,59	2,685
20	1,301	2462531	4,391	265661,6	3,937
24	1,380	3645097	4,560	1263659	4,102
25	1,398	3366871	4,527	1162941	4,065
30	1,477	1537178	4,187	568166,4	3,754
35	1,544	448491,8	3,652	251399,7	3,400
40	1,602	65971,2	2,819	39625,59	2,952
45	1,653	143850,9	3,153	30385,63	2,483

On rappelle que ces valeurs correspondent aux courbes $m=5$ de la page (69 - 3) dans le cas d'une route pavée. L'approximation de celles-ci nécessite leur tracé après passage à l'échelle logarithmique. On obtient alors les figures 1 et 2 (page 71). On en déduit les pentes des différents segments tracés.

Entrée du plot E

points i	$\log w_{10}$	K
1	0,8	+1
2	1,4	+1
3	1,6	-2

Sortie du plot I

points i	$\log w_{10}$	K
1	0,70	+1
2	0,85	+1
3	1,20	-1
4	1,40	+1
5	1,65	-2

Ainsi on peut écrire :

$$S_{EA}(w) = \left[1 + \left(\frac{w}{0,8} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{w}{1,4} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{w}{1,6} \right)^4 \right]$$

$$S_{EI}(w) = \frac{\left[1 + \left(\frac{w}{0,7} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{w}{0,85} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{w}{1,4} \right)^2 \right]}{\left[1 + \left(\frac{w}{1,2} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{w}{1,65} \right)^4 \right]}$$

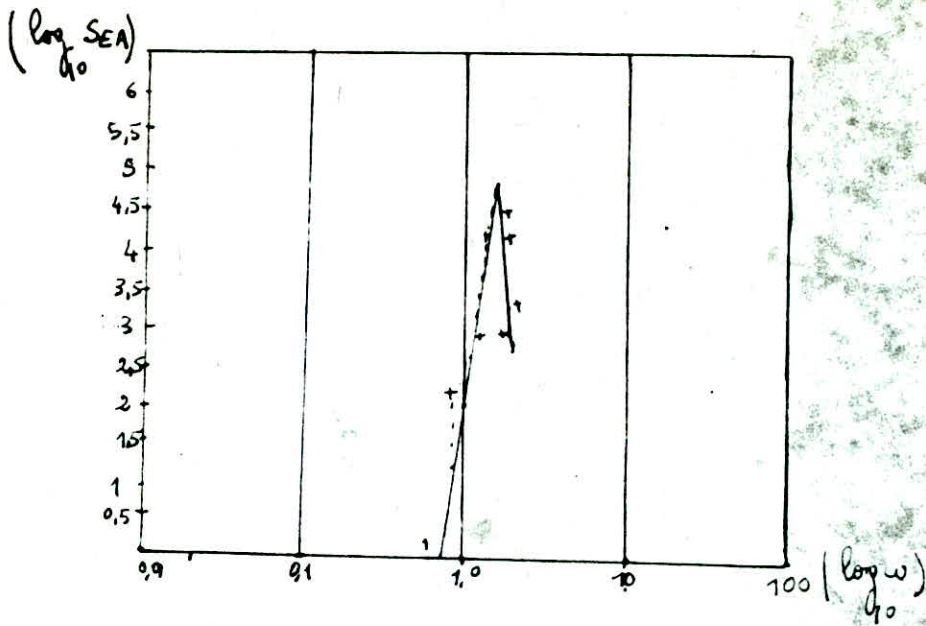


fig - 1 -

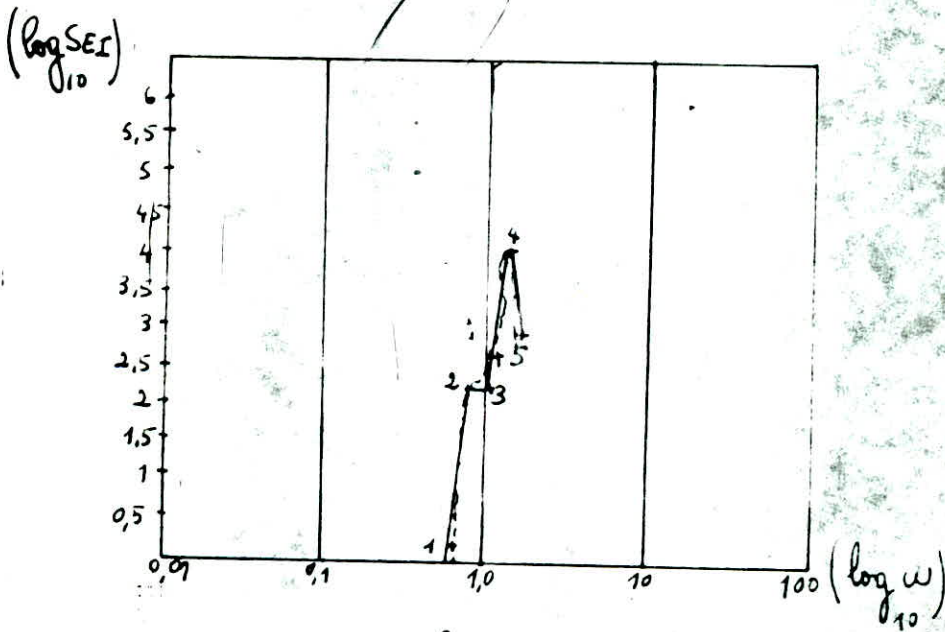


fig - 2 -

72 - a -

IV-ANALYSE PAR BLOC :

On peut représenter un plot de suspension par le schéma suivant (fig - 1-) :

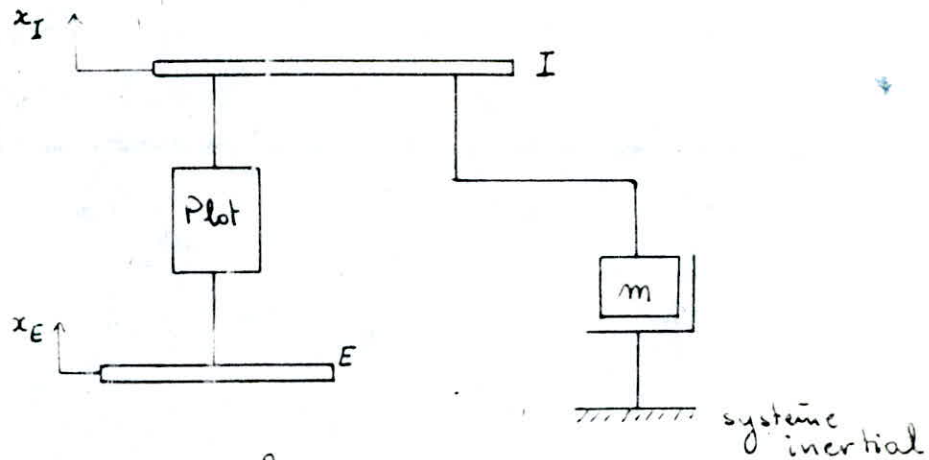


fig - 1-

où m est la masse partielle du moteur rattaché au plot.

Soit H_{pe} la fonction de transfert du plot.

On peut alors écrire :

$$x_I m p^2 + H_{pe}(p) [x_E - x_I] = 0$$

$$m p^2 (x_E - x_I) + H_{pe}(p) [x_E - x_I] = m p^2 x_E$$

$$\frac{x_E - x_I}{x_E} = \frac{m p^2}{m p^2 + H_{pe}(p)}$$

$$\frac{x_I}{x_E} = \frac{\frac{H_{pe}(p)}{m p^2}}{1 + \frac{H_{pe}(p)}{m p^2}} \quad (1)$$

La fonction de transfert $\frac{x_I}{x_E}$ du système de la figure correspond donc au schéma bloc suivant (fig - 2 -) :

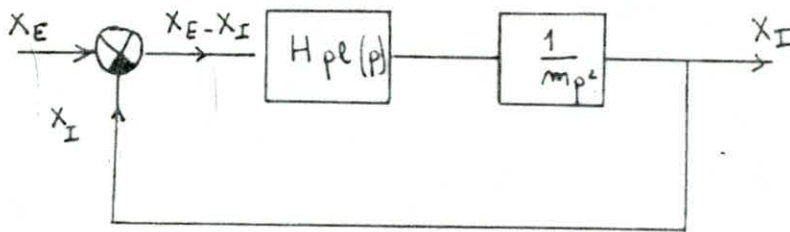


fig - 2 -

Si l'on suppose qu'un plot de suspension du moteur peut être représenté par le système simplifié de la fig - 3 -

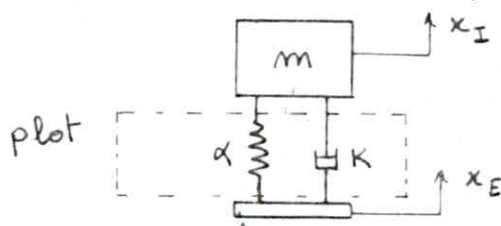


fig - 3 -

m : masse partielle du moteur rattachée au plot.

alors

$$m \ddot{x}_I + \alpha (\dot{x}_I - \dot{x}_E) + K (x_I - x_E) = 0$$

$$m (\ddot{x}_I - \ddot{x}_E) + \alpha (\dot{x}_I - \dot{x}_E) + K (x_I - x_E) = -m \ddot{x}_E$$

$$\Rightarrow m p^2 (x_I - x_E) + \alpha p (x_I - x_E) + K (x_I - x_E) = -m p^2 x_E$$

$$\frac{x_I - x_E}{x_E} = \frac{-m p^2}{m p^2 + \alpha p + K}$$

$$\text{d'où } \frac{\frac{x_E}{x_I} - 1}{\frac{x_E}{x_I}} = \frac{mp^2}{mp^2 + \alpha p + K}$$

$$\frac{x_I}{x_E} = \frac{\frac{\alpha p + K}{mp^2}}{1 + \frac{\alpha p + K}{mp^2}}$$

$$\text{donc } H_{pe}(p) = \alpha p + K$$

V.-/IDENTIFICATION DES PLOTS DE SUSPENSION DU MOTEUR F4L 912 DU CAMION K66 ;

L'application de la formule

$$S\ddot{x}_I(\omega) = |H(j\omega)|^2 S\ddot{x}_E(\omega)$$

permet le calcul de la fonction de transfert globale du système illustré par la figure -1- page 73

$$\Rightarrow |H(j\omega)|^2 = \frac{S\ddot{x}_I(\omega)}{S\ddot{x}_E(\omega)} =$$

$$= \frac{\left[1 + \left(\frac{\omega}{0,7}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{0,85}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{1,42}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{1,6}\right)^4\right]}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{1,4}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{0,8}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{1,2}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{1,65}\right)^4\right]}$$

$$\Leftrightarrow |H(j\omega)|^2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{\omega}{0,7}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{0,35}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{1,6}\right)^4\right]}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{0,8}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{1,2}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{1,65}\right)^4\right]} = S^2 \quad (1)$$

Soit $H(j\omega)H(-j\omega) = S \cdot S^*$

or $H(j\omega) = \frac{H_{pe}(p)/mp^2}{1 + H_{pe}(p)/mp^2}$ (d'après l'expression (1) page 73)

donc $\frac{H_{pe}(p)/mp^2}{1 + H_{pe}(p)/mp^2} = S$

$$\Rightarrow H_{pe}(p) = \frac{S}{\frac{1}{mp^2}(1-S)} \quad (2)$$

Dans notre cas l'expression (1) devient:

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= \frac{\left(\frac{0,49 + \omega^2}{0,49}\right) \left(\frac{0,7225 + \omega^2}{0,7225}\right) \left(\frac{6,5536 + \omega^4}{6,5536}\right)}{\left(\frac{0,64 + \omega^2}{0,64}\right) \left(\frac{1,44 + \omega^2}{1,44}\right) \left(\frac{7,4120 + \omega^4}{7,4120}\right)} \\ &= 2,94 \frac{(0,49 + \omega^2)(0,7225 + \omega^2)(6,5536 + \omega^4)}{(0,64 + \omega^2)(1,44 + \omega^2)(7,4120 + \omega^4)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow |H(j\omega)|^2 = \frac{6,82 + 23,37\omega^2 + 20,31\omega^4 + 3,56\omega^6 + 2,94\omega^8}{6,83 + 15,42\omega^2 + 8,33\omega^4 + 2,08\omega^6 + \omega^8}$$

$$|H(j\omega)|^2 = H(p)H(-p) = \frac{N(p)N(-p)}{D(p)D(-p)}$$

$$\begin{aligned} N(p)N(-p) &= (A_1 p^4 + A_2 p^3 + A_3 p^2 + A_4 p + A_5) \times \\ &\quad \times (A_1 p^4 - A_2 p^3 + A_3 p^2 - A_4 p + A_5) \\ &= A_1^2 p^8 + p^6 (2A_1 A_3 - A_2^2) + p^4 (2A_1 A_5 - 2A_2 A_4 + A_3^2) \\ &\quad + p^2 (2A_3 A_5 - A_4^2) + A_5^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N^2(j\omega) &= A_1^2 \omega^8 + (A_2^2 - 2A_1 A_3) \omega^6 + \omega^4 (A_3^2 + 2A_1 A_5 - 2A_2 A_4) \\ &\quad + \omega^2 (A_4^2 - 2A_3 A_5) + A_5^2 \\ &= 2,84 \omega^8 + 3,56 \omega^6 + 20,31 \omega^4 + 23,37 \omega^2 + 6,82 \end{aligned}$$

L'identification terme à terme permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_1^2 = 2,84 & \Rightarrow A_1 = 1,715 \\ A_2^2 - 2A_1 A_3 = 3,56 & \Rightarrow A_2^2 - 3,43 A_3 = 3,56 \\ A_3^2 + 2A_1 A_5 - 2A_2 A_4 = 20,31 & \Rightarrow A_3^2 - 2A_2 A_4 = 21,35 \\ A_4^2 - 2A_3 A_5 = 23,37 & \Rightarrow A_4^2 - 5,22 A_3 = 23,37 \\ A_5^2 = 6,82 & \Rightarrow A_5 = 2,611 \end{array} \right.$$

Le système se réduit donc à :

$$\begin{cases} A_2^2 - 3,43 A_3 = 3,56 \\ A_3^2 - 2A_2 A_4 = 11,35 \\ A_4^2 - 5,22 A_3 = 23,37 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Système de 3 équations} \\ \text{à 3 inconnues, non linéaire} \end{array}$$

La résolution directe donne les résultats suivants:

$$A_3^2 - \sqrt{71,6 A_3^2 + 395,3 A_3 + 333,2} = 11,35$$

En élevant les deux membres de l'équation :

$$A_3^2 - 11,35 = (71,6 A_3^2 + 395,3 A_3 + 333,2)^{+1/2}$$

au carré, on obtient

$$A_3^4 + (11,35)^2 - 2 \times 11,35 A_3^2 = 71,6 A_3^2 + 395,3 A_3 + 333,2$$

$$\text{ou } A_3^4 - 94,3 A_3^2 = +204,4 + 395,3 A_3$$

$$\text{On pose } y_1 = A_3^4 - 94,3 A_3^2$$

$$y_2 = 395,3 A_3 + 204,4$$

Après quelques itérations on trouve.

A_3	y_1	y_2
-0,6	-33,8	-32,78
-0,605	-34,38	-34,75
-0,604	-58,5	-34,4
-0,65	-39,7	-52,56
-0,6055	-34,83	-34,84

On prendra : $A_3 = -0,6055$

donc $A_2 = 1,22$ et $A_4 = 20,27$

De la même façon on pose :

$$D(p)D(-p) = (B_1 p^4 + B_2 p^3 + B_3 p^2 + B_4 p + B_5) \\ \times (B_1 p^4 + B_2 p^3 + B_3 p^2 - B_4 p + B_5)$$

$$[D(j\omega)]^2 = B_1 \omega^8 + (B_2^2 - 2B_1 B_3) \omega^6 + \omega^4 (B_3^2 + 2B_1 B_5 \\ - 2B_2 B_4) + \omega^2 (B_4^2 - 2B_3 B_5) + B_5^2 \\ = \omega^8 + 2,08 \omega^6 + 8,33 \omega^4 + 15,42 \omega^2 + 6,83$$

L'identification terme à terme conduit au système :

$$B_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad B_1 = 1$$

$$B_2^2 - 2B_1 B_3 = 2,08 \quad \Rightarrow \quad B_2^2 - 2B_3 = 2,08$$

$$B_3^2 + 2B_1 B_5 - 2B_2 B_4 = 8,33 \quad \Rightarrow \quad B_3^2 - 2B_2 B_4 = 3,1$$

$$B_4^2 + 2B_3 B_5 = 15,42 \quad \Rightarrow \quad B_4^2 + 5,22 B_3 = 15,42$$

$$B_5^2 = 6,83 \quad \Rightarrow \quad B_5 = 2,61$$

La résolution de ce système donne :

$$B_1 = 1 \quad ; \quad B_2 = 2,66 \quad ; \quad B_3 = 2,51$$

$$B_4 = 1,522 \quad B_5 = 2,61$$

$$\text{donc } H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{1,715 \omega^4 - 1,22 j \omega^3 + 0,6055 \omega^2 + 20,21 \omega + 2,7}{\omega^4 - 2,66 j \omega^3 - 2,51 \omega^2 + 1,522 j \omega + 2,61}$$

On déduit alors l'expression de la fonction de transfert

des plots d'après l'équation (2)

$$H_{pe}(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{\frac{1}{-m\omega^2} [1 - H(j\omega)]}$$

$$H_{pe}(j\omega) = \frac{(1,715\omega^4 - 1,22j\omega^3 + 0,6055\omega^2 + 4,5j\omega + 2,67)(+m\omega^2)}{0,715\omega^4 + 1,55j\omega^3 + 1,585\omega^2 + 3,621j\omega}$$

Des résultats plus simples figurent dans l'annexe.

CONCLUSION

Cette étude nous permet de conclure que l'identification constitue un problème très difficile car elle exige un matériel spécial pour les expériences nécessaires et aussi l'adaptation de méthodes mathématiques très sophistiquées.

Par ailleurs, la visualisation de la fonction de transfert $H(p)$ sous forme d'un modèle physique s'avère très difficile. Les méthodes de résolution de ce problème sont très complexes notamment lorsqu'il s'agit des systèmes multidimensionnels où il est nécessaire de faire la factorisation des matrices appropriées.

Il serait souhaitable que cette étude se poursuive par une optimisation des plots de suspension en agissant sur leurs caractéristiques afin de les améliorer.

ANNEXE

On rappelle que ces valeurs correspondent aux courbes n° 5 de la page 69-1 dans le cas d'une route pavée. L'approximation de celles-ci nécessite leur tracé après passage à l'échelle logarithmique. On obtient alors les figures 1 et 2 (page 71). On en déduit les pentes des différents segments tracés.

Entrée du plot E

points i	$\log_{10} \omega$	K
1	0,8	+1
2	1,4	+1
3	1,6	-2

Sortie du plot I

points i	$\log_{10} \omega$	K
1	0,80	+1
2	1,40	+1
3	1,70	-2

Ainsi on peut écrire:

$$S_{\ddot{x}_A} = S_{EA} \quad ; \quad S_{EA}(\omega) = \frac{\left[1 + \left(\frac{\omega}{0,8}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{1,4}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{1,6}\right)^4\right]}$$

$$S_{\ddot{x}_I} = S_{EI} \quad ; \quad S_{EI}(\omega) = \frac{\left[1 + \left(\frac{\omega}{0,8}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{1,40}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{1,7}\right)^4\right]}$$

(log SEA)

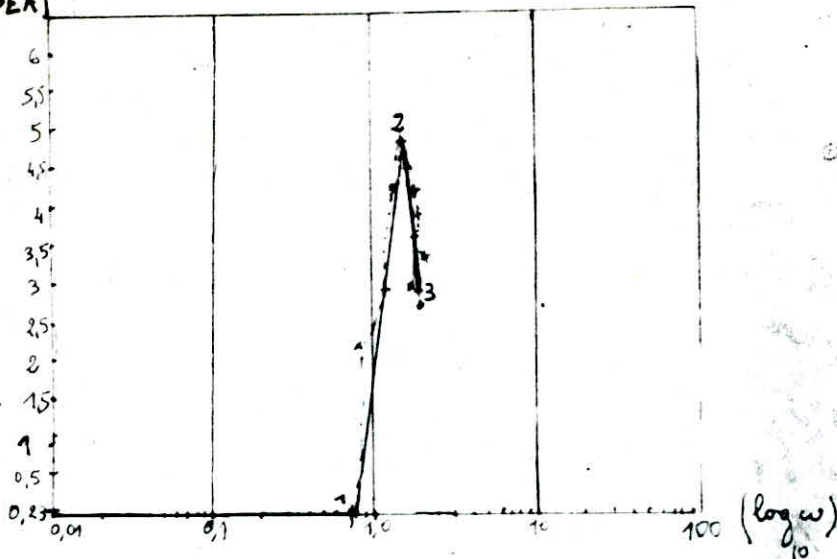


fig - 1 -

(log SEI)

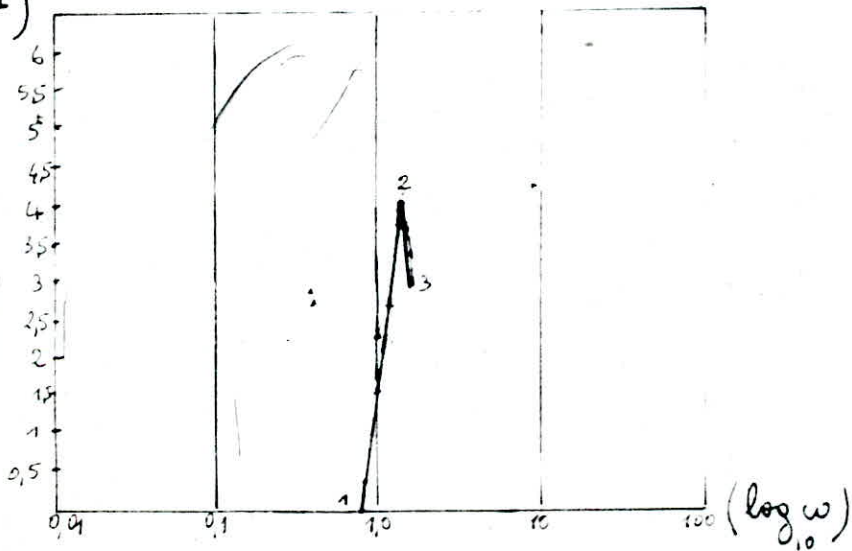


fig - 2 -

$$\text{d'où} \left| \frac{\frac{x_E}{x_I} - 1}{\frac{x_E}{x_I}} \right| = \frac{mp^2}{mp^2 + \alpha p + k}$$

$$\frac{x_E}{x_I} = \frac{\frac{\alpha p + k}{mp^2}}{1 + \frac{\alpha p + k}{mp^2}}$$

$$\text{donc } H_{pe}(p) = \alpha p + k$$

V. IDENTIFICATION DES PLOTS DE

SUSPENSION DU MOTEUR F4L 912

DU CAMION K66 :

L'application de la formule

$$\dot{S}\ddot{x}_I(\omega) = |H(j\omega)|^2 S\ddot{x}_E(\omega)$$

permet le calcul de la fonction de transfert globale du système illustré par la figure - 1 - page 73.

$$\Rightarrow |H(j\omega)|^2 = \frac{S\ddot{x}_I(\omega)}{S\ddot{x}_E(\omega)} =$$

$$= \frac{\left[1 + \left(\frac{\omega}{0.8}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{1.40}\right)^4\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{1.40}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{1.4}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{0.8}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\omega}{1.7}\right)^4\right]}$$

$$\Leftrightarrow |H(j\omega)|^2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{\omega}{1,6}\right)^4\right]}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{1,7}\right)^4\right]} \quad (1)$$

Soit $H(j\omega) \cdot H(-j\omega) = H(p) \cdot H(-p)$

or $H(p) = \frac{H_{pe}(p)/mp^2}{1 + H_{pe}(p)/mp^2}$ (d'après l'expression (1) page 73)

donc $\frac{H_{pe}(p)/mp^2}{1 + H_{pe}(p)/mp^2} = H(p)$

$$\Rightarrow H_{pe}(p) = \frac{H(p)}{\frac{1}{mp^2}(1 - H(p))} \quad (2)$$

Dans notre cas l'expression (1) devient:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\left(\frac{6,5536 + \omega^4}{6,5536}\right)}{\left(\frac{8,3521 + \omega^4}{8,3521}\right)}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{6,5536 + \omega^4}{8,3521 + \omega^4} \times 1,274 = \frac{8,35 + 1,27 \omega^4}{8,35 + \omega^4}$$

$$|H(j\omega)|^2 = H(p)H(-p) = \frac{N(p)N(-p)}{D(p)D(-p)}$$

$$N(p)N(-p) = (A_1 p^2 + A_2 p + A_3)(+A_1 p^2 - A_2 p + A_3)$$

$$= A_1^2 p^4 + p^2 [2A_1 A_3 - A_2^2] + A_3^2$$

$$|N(j\omega)|^2 = A_1^2 \omega^4 + \omega^2 [A_2^2 - 2A_1 A_3] + A_3^2 = 1,127 \omega^4 + 8,35$$

Analogiquement

$$|D(j\omega)|^2 = B_1^2 \omega^4 + \omega^2 [B_2^2 - 2B_1 B_3] + B_3^2 = \omega^4 + 8,35$$

L'identification terme à terme permet d'écrire:

$$A_1^2 = 1,127 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 1,127$$

$$A_2^2 - 2A_1 A_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 2,55$$

$$A_3^2 = 8,35 \quad \Rightarrow \quad A_3 = 2,89$$

$$B_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad B_1 = 1$$

$$B_2^2 - 2B_1 B_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_2 = 2,40$$

$$B_3^2 = 8,35 \quad \Rightarrow \quad B_3 = 2,89$$

$$\text{donc } H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{-1,127 \omega^2 + 2,55 j\omega + 2,89}{-\omega^2 + 2,40 j\omega + 2,89}$$

L'équation (2) permet de trouver la fonction de transfert des plots:

$$H_{pe}(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{\frac{1}{-m\omega^2} (1 - H(j\omega))} = \frac{-m\omega^2 (-1,127 \omega^2 + 2,55 j\omega + 2,89)}{0,127 \omega^2 - 0,15 j\omega}$$

Bibliographie

1. Théorie de la transmission de l'information
Tome 1. Bruit et signaux
Alexandru Spatoru
2. Vibrations aléatoires
Cours de post-graduation
Marek. Ksiązek. E.N.P.
3. Application d'une procédure informatique au diagnostic d'un moteur à combustion interne.
Projet de fin d'études étudié par Saad Hamdan
proposé et dirigé par W. Kurowski
E.N.P., juin 1987
4. Vibrations aléatoires des systèmes mécaniques
V.A. Svetlickij Technique et documentation
Paris 1980
5. Introduction to the statistical dynamics of automatic control systems
V.V. Solodovnikov Dover Publications, Inc.
New York 1960

6. Dispersion de déplacement et d'accélération des points de fixation du moteur

Projet de fin d'études étudié par Ali Tahri

proposé et dirigé par M. Ksiązek

ENP, juin 1987

7. Dispersions du déplacement, de la vitesse et de l'accélération des points de fixation du moteur.

Marek Ksiązek, Ali Tahri, Ramdane Boulahia
dans "Journal of technology", ENP, en cours de publication

