

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



MINISTRE DE LA DEFENSE NATIONALE
ETAT MAJOR DE L'ARMEE NATIONALE POPULAIRE
ECOLE MILITAIRE POLYTECHNIQUE - EMP -



MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de **MAGISTER**

FILIERE

SYSTEMES ELECTROTECHNIQUES

Option

Systemes Electromagnétiques

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة -
BIBLIOTHEQUE -
Ecole Nationale Polytechnique

**Contribution à la Modélisation Numérique de la
Perturbation d'un Champ Magnétostatique Par la
Présence d'un Dispositif Perméable**

Par : Atmane LAMALI

-Ingénieur d'Etat en Electrotechnique de l'U.S.T.H.B - Alger-

DEVANT LE JURY :

<u>PRESIDENT</u> :	Mr. A. BOUBEKEUR	Professeur	E.N.P
<u>EXAMINATEURS</u> :	Mr. H. MOHELLEBI	Chargé de cours	U.TIZI-OUZOU
	Mr. A. TAIEB BRAHIMI	Maître de conférences	U.S.T.O
	Mr. M. ABDALLAH	Chargé de cours	E.M.P
<u>RAPPORTEUR</u> :	Mr. M. DJENNAH	Chargé de cours	E.M.P
<u>INVITE</u> :	Mr. R. BENYELLES	ECRN	MERS EL KEBIR

Etablissement de Construction et de Réparation Navales.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire de L'UER-Electrotechnique de l'Ecole Militaire Polytechnique, sous la direction de Mr. M. Djennah ; qu'il trouve ici l'expression de ma plus profonde reconnaissance, pour ces conseils judicieux, pour ses qualités scientifiques et humaines, pour la disponibilité dont il a toujours fait preuve à mon égard, pour m'avoir fait profiter de son expérience dans le domaine de la modélisation tridimensionnelle et pour le climat de travail qu'il a su créer entre nous.

Que Monsieur R. Benyelles de E.C.E.R.N-Mess El Kebir habilité à diriger les recherches dans le domaine de la magnétisation et démagnétisation des navires, trouve également ici mes plus vifs remerciements, de m'avoir apporté une aide considérable dans le domaine du magnétisme du navire et de m'avoir fait l'honneur d'être l'invité de mon jury de thèse.

Mes plus vifs remerciements s'adressent aussi à tous les cadres de L'UER d'Electrotechnique et plus particulièrement, LCL M. Abdellah, C^{dt}. Mossaoui, et C^{ne}. Zaoui, qui font partie de l'équipe de recherche en « Modélisation de Systèmes Electromagnétique », pour leurs disponibilités et leurs conseils qui m'ont souvent prodigué.

Mes plus vifs remerciements vont aussi à mes collègues et amis de l'UER Electrotechnique de L'EMP.

Je remercie vivement toutes les personnes qui m'ont fait l'honneur d'accepter de participer au jury de cette thèse.

Enfin, j'exprime ma gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de cette présente thèse, en particulier mon frère Sadek et ses amis Idriss, Djamel et Abdessalem.

INTRODUCTION GENERALE.....	1
----------------------------	---

Chapitre I : INTRODUCTION AUX FORMULATIONS TRIDIMENSIONNELLES ET PRESENTATION DU MODELE

I.1 Introduction	4
I.2 Equations fondamentales de l'électromagnétisme	4
I.2.1 Présentation du modèle	7
I.3 Formulations magnétostatiques classiques	9
I.3.1 Formulations en potentiel scalaire.....	9
I.3.1.1 Formulations en potentiel scalaire magnétique total.....	9
I.3.1.2 Formulations en potentiel scalaire magnétique réduit.....	10
I.3.2 Formulations en potentiel vecteur	12
I.3.3 Formulations en champ magnétique	13
I.3.4 Formulations aux équations intégrales	14
I.3.4.1 Formulations en potentiel de simple couche.....	14
I.3.4.2 Formulations en potentiel de double couche ou en potentiel total...	17
I.3.4.3 Formulations tirées de l'identité de Green pour les fonctions scalaires	19
I.4 Conclusion	20

Chapitre II : PROBLEMES DISCRETS FORMULES EN CHARGES DE SURFACE ET TRAITEMENT NUMERIQUE PAR LA METHODE INTEGRALE DE FRONTIERE

II.1 Introduction.....	21
II.2 Présentation de la méthode de l'élément intégral de frontière.....	21
II.2.1 Introduction.....	21

II.2.2 Fondement de la méthode (BEM).....	22
II.2.3 Notions des opérateurs	23
II.2.4 Solution numérique de l'équation intégrale	24
II.2.5 Solution dans le domaine	25
II.2.6 Méthodes directe et indirecte dans la (BEM)	25
II.2.6.1 Collocation	26
II.2.7 Les opérateurs intégrro-différentiels discrets de Laplace	27
II.2.7.1 Les propriétés des opérateurs intégrro-différentiels discrets	29
II.2.7.2 Discrétisation des opérateurs intégrro-différentiels discrets	29
II.2.7.3 Les matrices équivalentes des opérateurs discrets	30
II.2.8 Le système linéaire	31
II.2.9 Approximation des intégrales	32
II.2.9.1 Cas bidimensionnel	32
II.2.9.2 Cas tridimensionnel	33
II.2.10 Singularités géométriques	35
II.2.11 Problème intérieur de Laplace.....	36
II.2.11.1 Formulation directe	36
II.2.11.2 Formulation indirecte	37
II.2.11.3 Modification du champ	39
II.2.11.4 Discrétisation du problème intérieur de Laplace	40
II.2.12 Problème extérieur de Laplace.....	42
II.2.12.1 Formulation directe	42
II.2.12.2 Formulation indirecte	43
II.2.12.3 Modification du champ	44
II.2.12.4 Discrétisation du problème extérieur de Laplace	45
II.2.13 La méthode de l'élément coque	47
II.2.13.1 Formulation des équations intégrales	48
II.2.13.2 Discrétisation	49
II.2.13.3 Le système linéaire	49
II.3 La méthode des singularités sous forme variationnelle	50
II.4 Application au calcul des charges de surface	51
II.4.1 Cas d'un matériau massif ou en coque mince.....	51
II.4.2 Cas d'un matériau en coque mince	52
II.5 Conclusion	52

Chapitre III : PROBLEMES DISCRETS FORMULES EN POTENTIEL REDUIT ET TRAITEMENT NUMERIQUE PAR LES METHODES MIXTES SOUS FORME VARIATIONNELLE

III.1 Introduction.....	53
III.2 Formulation variationnelle.....	53
III.3 Formulation en potentiel scalaire réduit	54
III.4 Modélisation	56
III.5 Calcul du premier et du deuxième termes par une approximation en éléments finis	56
III.6 Calcul du saut par une approximation en élément intégral de frontière	57
III.6.1 Par la méthode de collocation	57
III.6.2 Par la méthode de Galerkin	59
III.7 Conclusion	63

Chapitre IV : MISE EN ŒUVRE ET RESULTATS NUMERIQUES - APPLICATION

IV.1 Introduction.....	64
IV.2 Description générale des programmes de calcul du champ perturbé	65
IV.2.1 Fonction du module d'entrée	65
IV.2.2 Fonction du module de calcul	65
IV.2.3 Fonction du module de sortie	66
IV.2.4 Organigramme principal	66
IV.3 Description générale du programme « DBEM-3D »	67
IV.4 Description générale du programme « IBEM-3D »	68
IV.5 Description générale du programme « IBEMCM-3D »	70
IV.6 Description générale du programme « IBEMCC-3D »	72
IV.7 Description du bloc stockage et résolution du système	74
IV.7.1 Résolution du système	74
IV.7.1.1 Méthodes directes	74
IV.7.1.2 Méthodes indirectes	75
IV.7.2 Techniques de stockage	75
IV.7.2.1 Stockage plein	76
IV.7.2.2 Stockage profil	76

IV.7.2.3 Stockage Morse	76
IV.8 L'amélioration du code par les différentes techniques énumérées	77
IV.9 Validation du premier et du deuxième programme	77
IV.10 Validation du troisième programme	79
IV.10.1 Solution analytique	79
IV.10.2 Résultats numériques et analytique du champ perturbé	79
IV.11 Validation du quatrième programme	83
IV.12 Conclusion	84
IV.13 Application à la modélisation de l'aimantation du navire.....	85
IV.13.1 Introduction.....	86
IV.13.2 Caractéristiques géométriques.....	86
IV.13.3 Caractéristiques physiques.....	86
IV.13.4 Résultats et interprétation.....	87
IV.13.5 Conclusion sur l'application.....	101

Chapitre V : ETUDE TECHNIQUE DES SYSTEMES DE DEMAGNETISATION DES NAVIRES

V.1 Introduction.....	102
V.2 Effets des composantes du champ magnétique sur le navire	103
V.3 Définition des besoins opérationnels pour la démagnétisation.....	104
V.4 Traitement du magnétisme résiduel	106
V.5 Méthodes pratiquées pour la démagnétisation	106
V.6 Les stations de démagnétisation et leur composition.....	107
V.6.1 Composition de la station de démagnétisation	107
V.6.1.1 Enroulement horizontal sur la longueur du bâtiment.....	108
V.6.1.2 Enroulement de cap parallèle aux couples du bâtiment.....	108
V.6.1.3 Enroulement longitudinal du bâtiment.....	108
V.6.2 Critères d'une station de démagnétisation	109
V.6.2.1 Critères principaux	109
V.6.2.2 Critères spécifiques à une station mobile.....	110
V.6.3 Choix d'une station de démagnétisation	110
V.6.3.1 Station fixe (à terre) de démagnétisation	110

V.6.3.2 Station mobile (embarquée) de démagnétisation	111
V.7 Exemples de station à terre et mobile de démagnétisation	112
V.7.1 Station à terre (référence TELEFUNKEN Allemagne 1980)	112
V.7.1.1 Définition des profondeurs requises	112
V.7.1.2 Définition des appareils de mesures et de leurs sites d'installation.....	112
V.7.1.3 Technique et réalisations du génie civil	113
V.7.2 Station embarquée (référence CENZIN Pologne 1996)	116
V.7.3 L'installation propre de démagnétisation	116
V.8 Site d'installation des stations de démagnétisation et infrastructure	118
V.8.1 Station mobile (embarquée) de démagnétisation	118
V.8.2 Station terrestre (fixe) de démagnétisation	118
V.9 Conclusion	121
<i>Conclusion générale</i>	122
<i>Annexe</i>	123
<i>Bibliographie</i>	125

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

De plus en plus les matériels et équipements électroniques, qu'ils soient civils ou militaires sont étudiés, développés, industrialisés avec le souci grandissant d'être, d'une part, protégés des effets électromagnétiques et d'autre part, de ne pas perturber leur environnement. Actuellement la compatibilité électromagnétique définit le niveau admissible de perturbations émises ainsi que le niveau de susceptibilité aux perturbations qu'un appareil doit réaliser dans son environnement électromagnétique.

Cependant la présence des matériaux ferromagnétiques modifie les valeurs d'un champ magnétique statique appliqué. La résolution de tels problèmes n'est pas évidente parce que le champ magnétique loin de la structure étudiée ne peut pas être négligé, la difficulté principale réside dans la modélisation d'un domaine ouvert non borné. Afin de résoudre ce problème, beaucoup de méthodes ont été développées[31], mais il n'est pas toujours facile de les mettre en œuvre numériquement, sachant bien qu'on ne puisse subdiviser un domaine infini en un nombre de sous-domaines finis et d'ailleurs les méthodes qui utilisent une telle approche mènent aux temps de calcul qui peuvent être tout à fait prohibitifs, en particulier pour des applications tridimensionnelles et lorsque le dispositif ferromagnétique présente une épaisseur très petite, à l'image des coques minces [39, 40, 42].

En général, lorsqu'on s'intéresse à la modélisation des champs électromagnétiques, l'une des méthodes numériques les plus sollicitées est celle des éléments finis (MEF). Or, pour utiliser les éléments finis, le domaine d'étude doit être borné. Comme les problèmes en électromagnétisme sont généralement posés dans des domaines infinis, ceci constitue une difficulté rencontrée dans la résolution numérique. En effet, les calculs numériques n'autorisent pas la prise en compte de caractéristiques locales sur un domaine non borné[48]. Une manière d'éviter cette difficulté consiste à effectuer un couplage entre une méthode d'éléments finis dans le domaine borné et une méthode d'intégrale de frontière (BEM) ; Cette dernière permet de traiter le problème dans le domaine non borné lorsque celui-ci est homogène. On utilise alors des formules de représentation intégrale de frontière pour décrire les champs dans le domaine non borné, sachant que la solution recherchée par les méthodes

intégrales est approchée par une somme de solutions élémentaires de l'équation considérée, car on admet que le champ est créé par « des charges » qui peuvent être des distributions volumiques, surfaciques, linéaires ou ponctuelles [6, 13]. Les méthodes intégrales peuvent être également appliquées aux problèmes non linéaires, mais l'intérêt majeur de ces méthodes est dans les applications linéaires. Dans ce cas, on peut réduire les intégrales de volumes aux intégrales de frontière, l'étude que nous menons dans ce travail utilise une telle approche, qui concerne une exploitation systématique des différentes méthodes « intégrales de frontière ».

Dans les équations de Maxwell en régime stationnaire, nous nous intéressons à l'aspect "magnétique" et ignorons l'aspect "électrique". Le modèle physique que nous étudions fait appel au système de la magnétostatique tridimensionnelle suivant lequel nous avons développé les différentes formulations adaptées à la détermination de la perturbation d'un champ magnétostatique par la présence de dispositifs perméables tels les ferromagnétiques quand ces derniers sont massifs ou en coques minces. Nous nous intéressons particulièrement aux formulations intégrales dont un code de calcul est élaboré regroupant des programmes de chaque modèle étudié. Le plan de ce travail, partitionné en cinq chapitres, est le suivant :

Le premier chapitre de ce mémoire est entamé par une présentation du problème physique étudié, dont une synthèse des formulations du problème, existantes en magnétostatique ainsi que les avantages et inconvénients de chacune, est étalée.

Le chapitre II aborde dans une première étape le fondement de base de la méthode d'élément intégral de frontière (BEM) et son traitement numérique permettant de résoudre les équations intégrales établies dans le chapitre précédent. Dans une deuxième étape, nous allons développer une méthode traitant le modèle en coque mince avec une formulation mixte des équations intégrales de frontière, par la suite nous traitons la méthode des singularités sous forme variationnelle.

Le chapitre III traite l'étude d'une formulation mixte de deux méthodes numériques « MEF - BEM », adaptée dans le cas des coques minces où nous avons utilisé la méthode des éléments finis avec une discrétisation nodale du potentiel magnétique scalaire et nous faisons appel à la méthode d'intégrale de frontière pour le calcul du terme de bord, à fin de pouvoir revenir au calcul de la grandeur physique recherchée dans le milieu extérieur.

Une mise en œuvre et résultats numériques font l'objet du chapitre IV, contenant une description algorithmique des programmes qui composent notre code de calcul de champ et en particulier ceux développés dans le cadre de ce travail dont nous confirmons l'efficacité ainsi que la précision des résultats par la méthode utilisée et nous exploitons par la suite le code

dans une application sur un modèle réduit d'un navire pour calculer le champ de perturbation engendré par la présence de celui-ci dans un champ magnétique uniforme.

Enfin le chapitre V, complète ce travail par une étude théorique et technique des systèmes de démagnétisation des navires qui illustre parfaitement le domaine d'application de la présente étude.

L'ensemble de ces chapitres est suivi d'une conclusion faisant état des avantages et inconvénients de l'approche adoptée, quelques perspectives y sont aussi présentée.

CHAPTER I

Chapitre I

Introduction aux formulations tridimensionnelles et présentation du modèle

I.1 Introduction :

Dans ce premier chapitre, nous allons présenter en premier lieu les équations fondamentales de l'électromagnétisme que sont les équations de Maxwell. En second lieu nous allons définir le modèle physique, puis nous verrons ensuite les diverses transformations possibles à effectuer pour aboutir aux différentes formulations tridimensionnelles de la magnétostatique.

I.2 Equations fondamentales de l'électromagnétisme :

Les problèmes en électromagnétisme classique sont de manière générale gouvernés par les équations de Maxwell. Celle-ci s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} B = 0, \\ \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \\ \operatorname{div} D = \rho, \\ \operatorname{rot} H = j + \frac{\partial D}{\partial t}, \end{cases} \quad (1.1)$$

Les lois du comportement étant décrites par les relations

$$\begin{cases} D = \varepsilon E, \\ B = \mu H. \end{cases} \quad (1.2)$$

Avec les sources \mathbf{j} et ρ respectivement appelées *densité de courant* et *densité de charge*, et des conditions initiales (Aussi dénommées respectivement : distribution de courant et distribution de charge.), le système (1)-(2) permet de déterminer H , B , E et D respectivement appelés *champ magnétique*, *induction magnétique*, *champ électrique* et *induction électrique*. L'ensemble de ces

champs de vecteurs est essentiellement produit par des courants et des charges. Précisons que les paramètres physiques μ et ϵ ne sont pas des constantes, mais des fonctions de la position et du milieu où peuvent être considérées les équations notées en (1). Dans le vide, μ et ϵ sont des constantes respectivement appelées *perméabilité magnétique du vide* égale à μ_0 et *constante diélectrique du vide* $\epsilon_0 = 1/(c^2 \mu_0)$, où c est la vitesse de la lumière (Dans le système d'unités MKSA : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$ et c est la vitesse de la lumière environ 3.10^8 ms^{-1}). A partir des deux dernières équations du système (1), nous avons la relation suivante, aussi connue sous le nom d'équation de conservation de la charge :

?

$$\text{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Il est connu [1], [2], que le système (1) se découple en des problèmes indépendants lorsque les sources considérées ne dépendent pas du temps.

Très souvent dans les applications d'électrotechnique, les dimensions et les constantes de temps des systèmes et des phénomènes étudiés sont telles que, dans tout système d'unités adapté à l'étude, la vitesse de la lumière c est numériquement très grande. Il est alors naturel de la considérer comme quantité infinie et de faire un passage à la limite par rapport à c dans le système de Maxwell ; ce qui revient à faire tendre vers zéro l'un des paramètres μ ou ϵ , étant donné que : $c = 1/(\mu\epsilon)^{1/2}$. En fait, le choix du paramètre destiné à tendre vers zéro dépend essentiellement de la nature des sources en présence.

Nous nous situons dans le cadre où existent des densités de charge faibles ou tout simplement nulles, et de fortes densités de courant indépendantes du temps. Ainsi, nous adoptons dans ce contexte : $\epsilon = 0$. Le système (I-1) se réduit alors à une famille de problèmes où les champs de vecteurs B et H à déterminer ne dépendent plus du temps. Les équations sont :

$$\text{div} B = 0, \tag{1.3}$$

$$\text{rot} H = j, \tag{1.4}$$

avec la loi de comportement :

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \mu_0 (H + M) \\ B = \mu H, \\ M = (\mu_r - 1)H. \end{array} \right. \quad \text{à vérifier} \quad (1.5)$$

avec $\mu = \mu_0 \mu_r$, où μ_r est la perméabilité relative et M est l'aimantation.

Dans la formule (1.4), la densité de courant j est une donnée qui satisfait :

$$\operatorname{div} j = 0. \quad (1.6)$$

Comme nous pouvons le constater, dans le système de la magnétostatique, seul l'aspect "magnétique" du système de Maxwell représenté par les entités physiques H et B est conservé, l'aspect "électrique" étant ignoré dans ce modèle. Notons par ailleurs que le coefficient μ apparaissant dans (1.5) est une fonction de la position et peut même dépendre localement de H .

Souvent en pratique, on ne dispose pas d'une source de courant donnée dans tout l'espace, mais uniquement dans une région précise. Considérons un inducteur assimilé à un ouvert borné Ω^s de \mathbb{R}^3 , de perméabilité magnétique égale à μ_0 , et parcouru par une densité de courant j^s indépendante du temps. En imposant à j^s de vérifier la relation (1.6), et une condition au bord de Ω^s , il est possible de déterminer de manière unique le champ magnétique régnant dans le complémentaire de Ω^s . Ce champ de vecteurs noté H^s («s» pour source) vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} H^s = 0, (\text{dans } \mathbb{R}^3) \\ \operatorname{rot} H^s = j^s, (\text{dans } \Omega^s) \end{array} \right. \quad (1.7)$$

En fait, pour j^s suffisamment régulier, le champ magnétique source H^s se calcule (de façon directe) en tout point de $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega^s$ via la formule de Biot-Savart [3, 4, 5] :

$$H^s(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega^s} \frac{j^s(\tau) \wedge (x - \tau)}{|x - \tau|^3} d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega^s$$

où $|x|$ désigne la norme euclidienne de $x = (x_1; x_2; x_3)$, dans l'espace \mathbb{R}^3 .

La détermination du champ source ne pose donc aucune difficulté lorsqu'on dispose d'une source de courant donnée comme ci-dessus, sans tenir compte de la présence des matériaux magnétiques autre que les aimants permanents rigides.

Dans le cas de l'aimantation magnétique, le champ total \mathbf{H}^t peut être décomposé en deux parties :

$$H^t = H^s + H^r, \quad (1.8)$$

où \mathbf{H}^r est le champ dû à la présence du matériau magnétique, c'est la contribution de l'aimantation \mathbf{M} au champ total \mathbf{H}^t .

L'étude de l'aimant permanent réel se déduit directement du fait que celui-ci peut être considéré comme un aimant parfait superposé à un matériau ferromagnétique doux, les deux ayant la même géométrie que l'aimant réel [6].

$$M^a = M^i + M^r \quad (1.9)$$

Où \mathbf{M}^r est la partie à aimantation rigide et \mathbf{M}^i la partie à aimantation induite comme dans le cas des matériaux ferromagnétique doux [5].

Nous savons évaluer le champ induit correspondant à la partie variable ; le champ créé par l'aimant rigide sera directement calculable avec des distributions équivalentes de courants ou de charges [6, 9].

On distingue deux étapes dans la détermination du champ total : la première est le calcul de \mathbf{H}^s avec la formule de Biot-Savart. Dans la suite, on considère que \mathbf{H}^s est toujours connu, car on peut le calculer soit analytiquement, soit numériquement. Il reste à trouver en deuxième étape \mathbf{H}^r dont on verra comment procéder dans les prochains paragraphes.

I.2.1 Présentation du modèle :

Dans les équations de Maxwell en régime stationnaire, nous nous intéressons à l'aspect "magnétique" et ignorons l'aspect "électrique". Le modèle physique que nous étudions fait appel au système de la magnétostatique tridimensionnelle. Dans l'aspect du magnétisme du navire, le système magnétique que nous sommes amenés à résoudre est composé dans la plupart des cas de matériaux ferromagnétiques sous forme de coques mince en acier et dans le cas simple, nous le considérons massif. Pour schématiser le système physique, Nous désignons par Ω un milieu magnétique, assimilé à un ouvert borné de \mathbf{IR}^3 , de perméabilité μ , (voir **figure-1**), avec deux frontières Γ_1 et Γ_2 . La distance entre Γ_1 et Γ_2 , est l'épaisseur « e », est petite comparée à la

dimension caractéristique L du dispositif (e n'est pas nécessairement constant). Ceci permet de définir " la frontière moyenne " Γ . Nous orientons la normale \mathbf{n} à Γ , Γ_1 et Γ_2 de l'intérieur vers l'extérieur. Ω a été mis à l'intérieur d'un domaine E , considéré, de perméabilité magnétique μ_0 constante égale à celle du vide. Si E est homogène, tel n'est pas le cas de Ω . C'est par exemple le cas où Ω est physiquement constitué de matériaux tels que des diamagnétiques ($\mu < \mu_0$), paramagnétiques ($\mu > \mu_0$), ou des ferromagnétiques ($\mu \equiv \mu(|\mathbf{H}|)$) [8, 9, 10] comme dans notre cas dont nous supposons μ constante. Etant donné que nous recherchons le champ d'anomalie magnétique créée par la masse ferromagnétique du navire dans le champ magnétique terrestre, donc afin de prendre en compte une telle source dans tout l'espace E , nous considérons un champ statique \mathbf{H}_0 , uniforme et orienté suivant une direction préalablement choisie. Dans le cas où on considère un dispositif massif, le domaine E englobera les parties ferromagnétiques de Ω et l'air environnant est limité par une frontière Γ orienté par une normale \mathbf{n} vers l'extérieur de tout le dispositif massif considéré.

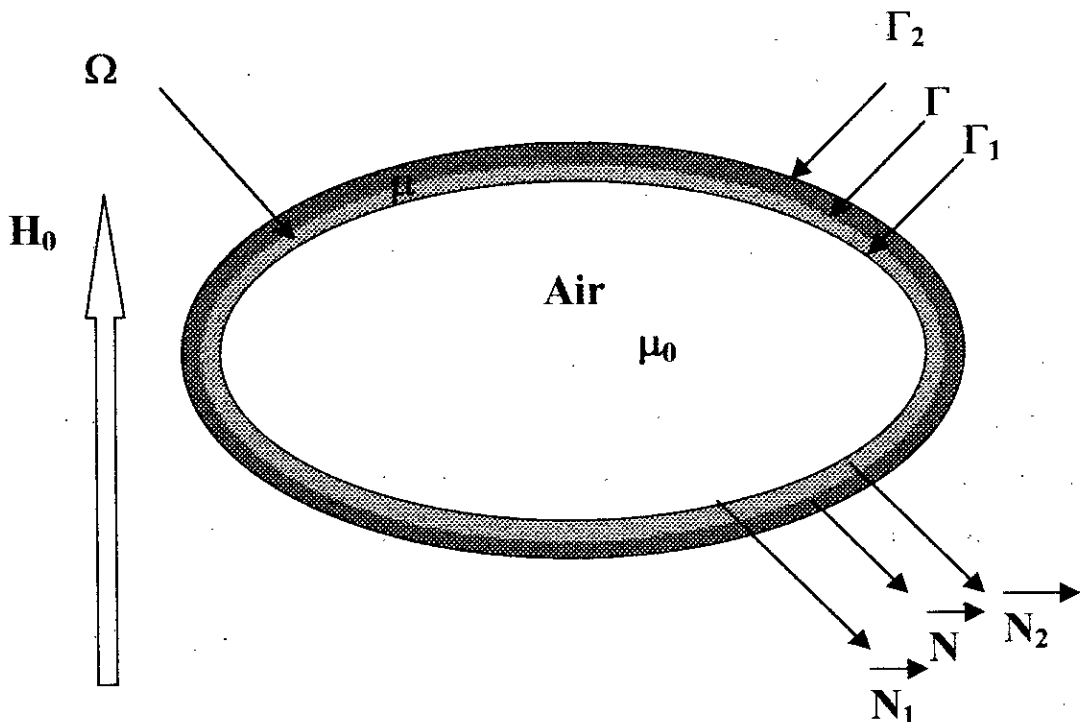


Figure 1 : Le système physique type

I.3 Formulations magnétostatique classiques :

Rappelons que les champs magnétiques et électriques sont indépendants du temps. Le champ est produit dans ce cas par des sources qui ne varient pas en fonction du temps. Le terme $\frac{\partial B}{\partial t}$ est nul dans le système d'équations (1.1) et les champs électrique **E** et magnétique **B** sont alors découplés. Suivant la composition du système à étudier, on peut modéliser par deux de formulation [11, 35, 68]:

- La formulation en potentiel vecteur magnétique
- La formulation en potentiel scalaire

I.3.1 Formulations en potentiel scalaire :

I.3.1.1 Formulation en potentiel scalaire magnétique total : [35]

Cette formulation est applicable uniquement dans les régions où la densité de courants sources \mathbf{j}^s est nulle. Dans ce cas, le champ **H** dérive d'un potentiel scalaire car son rotationnel est nul :

$$\mathbf{H} = -\text{grad}\varphi^t \quad (1.10)$$

Avec φ^t : le potentiel scalaire magnétique total

En remplaçant **H** par (1.10) dans (1.3), on obtient l'équation à résoudre suivante :

$$\text{div} \left[\mu(-\text{grad}\varphi^t) \right] = 0 \quad (1.11)$$

A l'interface séparant deux régions de perméabilités différentes μ_1 et μ_2 , il faut assurer la continuité de la composante normale de l'induction magnétique et des composantes tangentielles du champ magnétique. La deuxième condition est automatiquement vérifiée si le potentiel φ est lui même continue [54].

L'inconvénient de cette formulation est le faite qu'elle est applicable uniquement dans les régions dépourvues de courants [68].

I.3.1.2 Formulation en potentiel scalaire magnétique réduit : [35]

La formulation en potentiel scalaire réduit se déduit de la décomposition du champ en deux parties suivant l'équation (1.8) :

$$H^t = H^s + H^r,$$

Dans ce cas H^r dérive d'un potentiel ~~que~~ :

$$\text{rot } H^r = 0 \quad \Rightarrow \quad H^r = -\text{grad}\varphi^r \quad (1.12)$$

Où φ^r est le potentiel scalaire réduit

En remplaçant H^s et H^r par leurs expressions dans (1.3) on obtient l'équation suivante :

$$\text{div} \left[\mu(H^s - \text{grad}\varphi^r) \right] = 0 \quad (1.13)$$

Si le potentiel scalaire réduit φ^r est continu alors les composantes tangentielles du champ magnétique sont conservées. Néanmoins, il faut assurer la continuité de la composante normale de l'induction magnétique à l'interface entre deux régions de perméabilité μ_1 et μ_2 . En notant n la normale à cette interface il vient [35]:

$$\left[\mu_1(H^s - \text{grad}\varphi^{r1}) \right] \cdot n = \left[\mu_2(H^s - \text{grad}\varphi^{r2}) \right] \cdot n \quad (1.14)$$

Cette formulation discrétisée par des éléments nodaux, malgré sa facilité de mise en œuvre, pose des problèmes numériques dans les régions où la perméabilité des matériaux magnétiques est très élevée. Ceci est dû au fait que le champ total est obtenu, en faisant la somme de deux champ de module très voisins et de signe opposé. Ceci conduira à une mauvaise précision dans les calculs de champ. C'est pour cette raison qu'il faut travailler avec le potentiel réduit φ^r .

Pour palier cet inconvénient, il faut travailler en potentiel scalaire total dans les régions à haute perméabilité où il n'y a pas de courants, celui-ci fournit une bonne précision [68].

A l'interface $\Gamma_{\varphi^r-\varphi^t}$ séparant les deux régions, il faut alors assurer les conditions de continuité de la composante normale de l'induction magnétique \mathbf{B} et des composantes tangentielles du champ magnétique \mathbf{H} . Ces deux conditions se traduisent par les équations suivantes :

$$-\mu_1 \frac{\partial \varphi_t}{\partial n} = \mu_2 \left(-\frac{\partial \varphi_r}{\partial n} + H^s \cdot n \right) \quad (1.15)$$

$$-\frac{\partial \varphi_t}{\partial \xi} = -\frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi} + H^{st} \quad (1.16)$$

$\frac{\partial \varphi_t}{\partial \xi}$: est la composante tangentielle

$\frac{\partial \varphi_r}{\partial n}$: est la composante normale

ξ : étant le vecteur unitaire tangent

Où H^{st} est la composante tangentielle de H^s . En intégrant l'équation (1.16), on obtient :

$$\varphi^t = \varphi^r - \int H^{st} dS = \varphi^r - \varphi^0 \quad (1.17)$$

Les deux conditions (1.15, 1.17) permettent d'assurer le couplage entre les deux formulations. Dans ce cas de couplage, dans une formulation par élément finis, la condition de continuité de la composante tangentielle de \mathbf{H} est imposée en tout point de l'interface, tandis que la condition de continuité de la composante normale de \mathbf{B} est vérifiée au sens faible.

Les formulations en potentiels scalaires sont intéressantes du point de vue du nombre d'inconnues. En effet, on traitera une inconnue scalaire au lieu d'une inconnue vectorielle. Cependant des difficultés apparaissent lorsqu'on veut traiter les régions non simplement connexes. En effet pour éclaircir ce fait là, considérons le tore de la figure I.2 et prenons la circulation du champ sur une courbe fermée C de M vers M' , entourant le tore.

L'application du théorème d'Ampère sur C donne (le champ magnétique \mathbf{H} est un gradient)

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{C} = \int_M^{M'} \text{grad} \varphi dC = \varphi(M') - \varphi(M) = I \neq 0,$$

or $M = M'$ donc $\varphi(M) = \varphi(M')$, ce qui est contradictoire.

Dans ce cas, le potentiel scalaire doit être multiforme. Pour résoudre ce problème, plusieurs techniques ont été proposées, on citera la notion de coupures [2] et l'introduction des spires de

courants fictives dans le domaine, dont les positions dépendent de la direction du champ source [45, 68, 69].

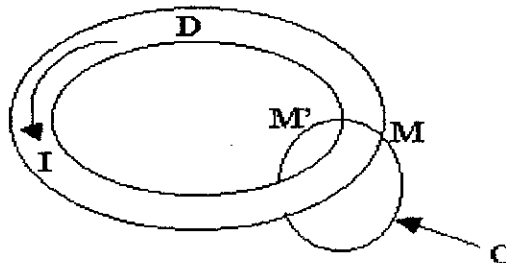


Figure I.2 : Problème type non simplement connexe

On rappelle qu'un domaine est simplement connexe si et seulement si tout contour fermé tracé sur un domaine peut se ramener à un point par une déformation continue.

I.3.2 Formulation en potentiel vecteur :

Cette formulation permet de traiter sans difficulté apparente les régions non simplement connexes et les problèmes liés à l'inducteur. Néanmoins, l'inconvénient est de traiter une inconnue vectorielle au lieu d'une inconnue scalaire.

Compte tenu de la relation (1.3) $\text{div}\mathbf{B}=\mathbf{0}$, \mathbf{B} dérive d'un potentiel vecteur \mathbf{A} tel que :

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (1.18)$$

En utilisant la loi de comportement décrite dans la relation (1.5) et en remplaçant \mathbf{H} par l'expression $[\mathbf{v}\text{rot}\mathbf{A}]$, on obtient l'équation à résoudre suivante :

$$\text{rot}(\mathbf{v} \text{rot}\mathbf{A}) = \mathbf{j}^s \quad \text{avec} \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\mu} \quad (1.19)$$

Avec $\mathbf{v}=1/\mu$ est la réductance magnétique.

réductance

En outre, entre deux milieux de perméabilité μ_1 et μ_2 , il faut assurer la continuité des composantes tangentielles du champ magnétique. En terme de potentiel, cette condition s'exprime par :

$$[v_1 \text{rot} A_1] \wedge n = [v_2 \text{rot} A_2] \wedge n \quad (1.20)$$

Si la continuité de la composante normale de l'induction magnétique est automatiquement conservée. Cependant on peut remarquer qu'il en est de même si seules les composantes tangentielles du potentiel vecteur sont continues.

De plus pour assurer l'unicité de la solution il nécessaire d'imposer une condition de jauge. On peut imposer la jauge de Coulomb, cette condition peut être introduite dans la formulation sous forme d'un terme de pénalité [54].

Dans ce cas l'équation (1.19) devient :

$$\text{rot}[v \text{rot} A] - v \text{grad}(\text{div} A) = j^s \quad (1.21)$$

Une autre possibilité consiste à choisir la jauge $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = 0$, où \mathbf{w} est un champ de vecteurs arbitraires dont les lignes ne se referme pas. La deuxième jauge présente l'avantage non négligeable de réduire le nombre d'inconnues [68].

I.3.3 Formulation en champ magnétique :

Toutefois, le fait de représenter \mathbf{H}^r par un potentiel scalaire ou vecteur entraîne des erreurs numériques inhérentes au calcul de dérivées. Pour éluder ces imprécisions numériques, il est proposé une formulation, établie par méthode de pénalisation, qui utilise le champ de vecteur \mathbf{H} directement comme inconnue et où aucune condition au bord n'est imposée[41, 43].

Le champ magnétique total \mathbf{H}^t dans (1.8) vérifie :

$$\text{rot}(H^t - H^s) = 0 \quad (1.22)$$

et utilisant l'équation (1.3), on aura l'équation à résoudre suivante :

$$\text{div} \left[\mu (H^r + H^s) \right] = 0 \quad (1.23)$$

et suivant l'équation (1.18), (1.23) devient :

$$\mu(H^r + H^s) = \text{rot}A \quad (1.24)$$

Dans Bossavit [38], une formulation semblable qui utilise la formulation en \mathbf{H} établie dans le cas de la magnétodynamique en faisant tendre la fréquence à zéro

Cependant, cette formulation impose un « manque de souplesse », dans le calcul effectif de l'inconnue \mathbf{H} , directement lié au choix du paramètre de pénalisation. Le choix de ce paramètre, fonction des grandeurs caractéristiques du domaine, est encore plus compliqué lorsque la non-linéarité est prise en compte, et mérite alors un choix numérique attentif, sensible à la perméabilité magnétique relative du domaine [41].

I.3.4 Formulations aux équations intégrales :

En fait, les méthodes intégrales sont bien adaptés à des problèmes linéaires à coefficients constants, de préférence elliptiques ou paraboliques. Et elles sont spécialement performantes dans le cas de problèmes en domaine non bornés [30, 35].

I.3.4.1 Formulation en potentiel de simple couche :

a) Avec charges de surface :

Considérons une couche de charges magnétique de densité surfacique q sur la frontière Γ (de telle charges, ou « monopoles » n'existent pas dans la nature, il s'agit de charges fictives que l'on va déterminer de manière à ce que leur effet soit le même que celui de la matière aimantée, hors de celle-ci [35].), analogue aux charges électriques en électrostatique, constituent une simple couche source de la théorie du potentiel. La densité superficielle de charges est la composante normale de l'aimantation sur la frontière, comme on le verra plus loin. Γ désigne indifféremment une surface en **3-D** et une courbe en **2-D**; $d\Gamma$ est l'élément différentiel correspondant.

Le potentiel induit en tout point de l'espace s'écrit :

$$\varphi(X) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{q(Y)}{|X-Y|} d\Gamma y \quad (1.25)$$

Ou bien d'une façon originale :

$$\forall M \in E, \varphi(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} q(P) G(M, P) d\Gamma_P \quad (1.26)$$

q doit vérifier sur Γ la condition de Neumann, soit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = g, \text{ fonction donnée.} \quad (1.27)$$

Cette condition s'écrit :

$$\forall M \in \Gamma, \int_{\Gamma} q(p) \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, P) d\Gamma_P + \frac{1}{2} q(M) = g(M) \quad (1.28)$$

Avec $G(\mathbf{M}, \mathbf{P})$, la fonction de Green de l'équation de Laplace de deux point \mathbf{M} et \mathbf{P} définit par

$$G(M, P) = \frac{1}{2\pi} \text{Log} MP, \quad \text{en dimension 2} \quad (1.27)$$

$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{MP}, \quad \text{en dimension 3} \quad (1.28)$$

Alors le champ dû aux charges et champ source , en utilisant (1.8), (1.10) est :

$$H' = H^s + \text{grad} \varphi \quad (1.29)$$

Reste à trouver q pour que (1.3) et (1.5) soient satisfaites.

$$\text{div} \left[\mu(H^s - \text{grad} \varphi^r) \right] = 0 \quad (1.30)$$

Si le potentiel scalaire réduit φ^r est continu alors les composantes tangentiellles du champ magnétique sont conservées. Néanmoins, il faut assurer la continuité de la composante normale de l'induction magnétique à l'interface entre deux régions de perméabilité μ_1 et μ_2 . En notant n la normale à cette interface il vient [35]:

$$\left[\mu_1 (H^S - \text{grad} \phi^{r1}) \right] \cdot n = \left[\mu_2 (H^S - \text{grad} \phi^{r2}) \right] \cdot n \quad (1.31)$$

Cette condition va fournir une équation déterminant q .

En effet d'après la théorie classique du potentiel [2, 4], on peut exprimer $n \cdot \text{grad} \phi^r$ en fonction de q , soit :

$$\begin{cases} n \cdot \text{grad} \phi^{r1}(x) = -\frac{q(x)}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} q(y) \frac{(x-y)}{|x-y|^3} n(x) d\Gamma y \\ n \cdot \text{grad} \phi^{r2}(x) = +\frac{q(x)}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} q(y) \frac{(x-y)}{|x-y|^3} n(x) d\Gamma y \end{cases} \quad (1.32)$$

En reportant les deux équations de (1.32) dans (1.31) on trouve l'équation cherchée dans laquelle x est un point régulier de la surface ; Pour un point anguleux, le facteur $1/2$ doit être remplacé par l'angle solide intercepté par le cône tangent en ce point, divisé par 4π , on trouve donc :

$$2\pi \frac{(\mu_1 + \mu_2)}{(\mu_1 - \mu_2)} q(x) - \int_{\Gamma} q(y) \frac{(x-y)}{|x-y|^3} n(x) d\Gamma y = n \cdot H^S \quad (1.33)$$

Une fois q connu sur la frontière, on trouve le potentiel induit, puis le champ induit par (1.25) et $\text{grad} \phi$

Comme nous l'avons dit, la charge magnétique sur la frontière est l'aimantation normale.

En effet :

Prenons :

$$\phi = \int_{\Omega} M \cdot \text{grad} G(M, P) d\Omega \quad (1.34)$$

Avec M est l'aimantation induite

Si on applique l'identité vectorielle, :

$$\begin{aligned} \phi(P) &= - \int_{\Omega} M \cdot \text{grad}_P G(M, P) d\Omega = \int_{\Omega} [\text{div}_M (MG) - G \text{div}_M M] d\Omega \\ &= \left\{ \int_{\Gamma} M \cdot n G d\Gamma - \int_{\Omega} G \text{div}_M M d\Omega \right\} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Comme l'intégral de volume est nulle (milieu linéaire), on a bien

$$\varphi = \int_{\Gamma} M \cdot n G(M, P) d\Gamma \quad (1.36)$$

Donc $q = M \cdot n \quad (1.37)$

b) Avec courants de surface :

Le modèle des courants équivalents est dual du précédent, en un certain sens. Il consiste à représenter l'effet de la matière aimantée par celui d'une distribution de courant surfacique [32], soit \mathbf{j} , vérifiant (1.6). Posons :

$$A(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{j(y)}{|x-y|} d\Gamma y \quad (1.38)$$

L'induction due à ces courants et au courant source \mathbf{j}^s est : $\mathbf{B} = \mathbf{B}^s + \text{rot}A$

(où $\mathbf{B}^s = \mu_0 \mathbf{H}^s$) et vérifie (1.3). Par construction du potentiel vecteur A et de \mathbf{B}^s , (1.27) est vérifiée aussi dans Ω et hors de Ω , mais il reste, au niveau de la surface, à imposer la continuité tangentielle de $\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}$, (comparer avec à (1.31)) :

$$\left[\mu_0^{-1} (\mathbf{H}^s - \text{rot}A) \right] \wedge n = \left[\mu^{-1} (\mathbf{H}^s - \text{rot}A) \right] \wedge n \quad (1.39)$$

condition qui conduit, par des voies identiques à celles utilisées en haut, à une vectorielle suivante :

$$2\pi \frac{(\mu_1 + \mu_0)}{(\mu_1 - \mu_0)} j(x) - \int_{\Gamma} j(y) \frac{(x-y)}{|x-y|^3} \wedge n(x) d\Gamma y = n \wedge H^s \quad (1.40)$$

I.3.4.2 Formulation en potentiel de double couche ou en potentiel total

En fait, on peut trouver une équation intégrale avec comme inconnue φ^r ou φ^t directement :

On suppose : $\mathbf{H}^s = -\text{grad}\varphi^s$. On a $\varphi^t = \varphi^s + \varphi^r$ qui vient de (1.8)

$$\varphi^r = \int_{\Omega} M \text{grad} G d\Omega = - \int_{\Omega} (\mu_1 - \mu_0) H^t \cdot \text{grad} G d\Omega = (\mu_1 - \mu_0) \int_{\Omega} \text{grad} \varphi^t \cdot \text{grad} G d\Omega \quad (1.41)$$

En appliquant la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} (\varphi \Delta \psi + \text{grad} \varphi \text{grad} \psi) d\Omega = \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \quad (1.42)$$

Avec Δ est l'opérateur Laplacien, on a donc

$$\varphi^r(x) = (\mu_1 - \mu_0) \left[- \int_{\Gamma} \varphi^t \cdot n \cdot \text{grad} G d\Gamma + C \varphi^t(x) \right] \quad (1.43)$$

Ici C est un coefficient qui dépend de l'angle solide sous lequel on voit la courbe ou la surface Γ .

$$C = \begin{cases} 0, & x \notin \Omega \quad (\Omega : \text{volume}) \\ \frac{1}{2}, & x \text{ est point régulier} \\ 1 & x \in \Omega \end{cases} \quad (1.44)$$

Pour des points singuliers de la courbe ou de la surface, $C(x)$ a des expressions particulières [13, 14].

De (1.43), on peut tirer deux expressions en φ^t et φ^r respectivement :

$$[1 - (\mu_1 - \mu_0)C] \varphi^t(x) + (\mu_1 - \mu_0) \int_{\Gamma} \varphi^t \cdot n \cdot \text{grad} G d\Gamma = \varphi^s \quad (1.45)$$

et

$$[(\mu_1 - \mu_0)C - 1] \varphi^r(x) + (\mu_1 - \mu_0) \int_{\Gamma} \varphi^r \cdot n \cdot \text{grad} G d\Gamma = (\mu_1 - \mu_0) \int_{\Gamma} G(H^s \cdot n) d\Gamma \quad (1.46)$$

φ^s peut être calculé à partir de H^s par :

$$\varphi^s = \int_{x_0}^x H^s dl \quad (1.47)$$

D'après (1-45) φ^s est en quelque sorte une double couche source.

I.3.4.3 Formulations tirées de l'identité de Green pour les fonctions scalaires :

$$\int_{\Gamma} (\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}) d\Gamma = \int_{\Omega} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) d\Omega \quad (1.48)$$

Si on remplace ψ par G (fonction de Green dans le vide) et que φ reste le potentiel induit φ^r , on a :

$$C.\varphi^r(x) = \int_{\Gamma} (G \frac{\partial \varphi^r}{\partial n} - \varphi^r \frac{\partial G}{\partial n}) d\Gamma \quad (1.49)$$

C est défini dans le paragraphe ci-dessus.

Dans les paragraphes précédents, on utilise des sources respectivement à simple et à double couches, la formule (1.49) est une combinaison linéaire de ces deux types de sources qui, d'ailleurs, ne sont pas indépendantes.

L'équation (1.49) a deux inconnus : φ^r et $\partial \varphi^r / \partial n$ en un point de la frontière.

Il est facile de montrer que (1.46) peut s'obtenir à partir de (1.49). En effet, si on écrit (1.46) pour la région 1 et pour la région 2 respectivement, on a

$$C.\varphi_1^r(x) = \int_{\Gamma} (G \frac{\partial \varphi_1^r}{\partial n} - \varphi_1^r \frac{\partial G}{\partial n}) d\Gamma \quad (1.50)$$

$$C.\varphi_2^r(x) = \int_{\Gamma} (G \frac{\partial \varphi_2^r}{\partial n} - \varphi_2^r \frac{\partial G}{\partial n}) d\Gamma \quad (1.51)$$

En multipliant les expressions par μ_{r1} et μ_{r2} respectivement et en additionnant membre à membre, nous obtenons :

$$(C_1 \mu_1 \varphi_1^r + C_2 \mu_2 \varphi_2^r) = \int_{\Gamma} G (\mu_1 \frac{\partial \varphi_1^r}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial \varphi_2^r}{\partial n}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} (\mu_1 \varphi_1^r - \mu_2 \varphi_2^r) d\Gamma \quad (1.52)$$

En tenant compte de la continuité de ϕ^f et la condition sur les composantes normales de \mathbf{B} (1.31), nous aboutissons à l'équation (1.46). Pour des raisons de simplicité, on utilise le plus souvent le potentiel de simple couche (1.33) ou la formulation à partir de l'identité de Green (1.49) [17, 70].

I.4 Conclusion :

D'après l'étude que nous avons fait sur les différentes formulations, nous avons retenu la formulation en potentiel scalaire réduit et celle issue des représentations intégrales. La première a été choisie dans le cas où le domaine Ω serait en coque mince, parce que nous pourrions satisfaire dans notre cas les conditions qu'elle impose lors de son usage. La deuxième a été choisie dans le cas où le domaine Ω serait massif, car le calcul de la perturbation d'un champ magnétique statique par la présence d'un matériel ferromagnétique massif est souvent effectué à l'aide des charges magnétiques [39], situées sur sa frontière si la perméabilité μ est constante, ainsi que pour les avantages qu'offre les méthodes intégrales, que se soit, dans la réduction de la dimension du système ou bien lors de la prise en compte de l'infini appelées souvent « formulation mixte ».

CHAPITRE II

Chapitre II

Problèmes discrets formulés en charges de surface et traitement Numérique par la méthode d'élément intégrale de frontière

II.1 Introduction :

Nous nous intéressons tout au long de ce chapitre à l'étude des problèmes formulés en charges de surface issus du modèle physique présenté précédemment. Cette étude s'appuiera sur une approche spécifique quand les matériaux ferromagnétiques sont massifs ou des coques minces et sur une méthode d'intégrale de frontière dont nous allons présenter le fondement de cette méthode numérique permettant de résoudre les équations intégrales établies dans le chapitre précédent. Dans une deuxième étape, on va développer ces équations sous une forme variationnelle.

II.2 Présentation de la méthode d'élément intégral de frontière :

II.2.1 Introduction :

Au cours des décennies récentes, la méthode d'élément de frontière (BEM) a suscité beaucoup d'attention des chercheurs et est devenue une technique importante dans la résolution numérique d'un certain nombre de problèmes physiques. En commun avec la méthode des éléments finis plus répandue (FEM) et la méthode des différences finies (FDM), la méthode d'élément de frontière est essentiellement une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles (PDE) et peut être utilisée seulement quand le problème physique peut être exprimé en tant que tels. Comme avec les autres méthodes mentionnées, la méthode d'élément de frontière est une méthode numérique et par conséquent c'est un sujet important de recherche parmi la communauté d'analyse numérique.

La méthode d'élément de frontière dérive de la discrétisation d'une équation intégrale qui est mathématiquement équivalente à l'équation aux dérivées partielles originale. La formulation essentielle de PDE qui est à la base de la BEM se compose d'une équation intégrale qui est définie sur la frontière du domaine et d'une intégrale qui relie la solution sur la frontière à la solution aux points dans le domaine.

Une formulation d'équation intégrale peut seulement être appliquée pour certaines classes de PDE. Par conséquent la BEM n'est pas largement applicable une fois comparée à l'adaptabilité proche universelle de la méthode des éléments finis et de la méthode des différences finies. Cependant, dans les cas où la méthode d'élément de frontière est applicable, elle a souvent comme conséquence une méthode numérique plus facile à employer et plus efficace numériquement que les méthodes la concourant. Les avantages dans la méthode d'élément de frontière résulte du fait que seulement la frontière (ou les frontières) du domaine du PDE exige la subdivision (dans la méthode d'élément fini ou la méthode de différence finie le domaine entier du PDE exige la discrétisation.). Ainsi la dimension du problème est efficacement réduite d'une dimension, par exemple une équation régissant une région tridimensionnelle est transformée en une sur sa surface. Dans les cas où le domaine est extérieur à la frontière, l'ampleur du domaine est infinie et par conséquent les avantages de la BEM sont plus frappants ; l'équation régissant le domaine infini est réduite à une équation sur la frontière (finie) [13, 14, 16, 30]

II.2.2 Fondement de la méthode(BEM) :

Dans ce travail la stratégie globale en employant la BEM est brièvement décrite. Pour une introduction plus complète, le lecteur est conseillé de consulter les manuels exclusivement consacrés à la méthode d'élément de frontière, telle que Brebbia [13]. Dans la dérivation de la BEM, l'objectif fondamental est de remplacer l'équation partielle qui régit la solution dans un domaine par une équation qui régit la solution sur la frontière seule. Par exemple l'équation de Laplace

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \varphi(p)}{\partial p_i^2} = 0$$

où N est la dimension de l'espace, ou d'une manière plus concise,

$$\Delta \varphi(p) = 0,$$

gouvernant l'intérieur à un domaine Ω lié par une surface Γ peut être remplacé par une équation intégrale de la forme

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_q}(p, q) \varphi(q) d\Gamma_q + \frac{1}{2} \varphi(p) = \int_{\Gamma} G(p, q) \frac{\partial \varphi(q)}{\partial n_q} d\Gamma_q \quad (2.1)$$

La fonction G est la fonction de Green décrite dans les équations (1.27) et (1.28)

Physiquement, $\mathbf{G}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ représente l'effet observé à un point \mathbf{p} d'une source d'unité au point \mathbf{q} . la terminologie $\partial^* / \mathbf{n}_q$ représente la dérivée partielle de la fonction « * » suivant la normale extérieure au point \mathbf{q} sur la frontière.

II.2.3 Notation des opérateurs :

Les manuels sur la BEM tendent toujours à laisser l'équation intégrale sous la forme (2.1). Cependant, il est beaucoup plus facile de travailler de la notation d'opérateur, ceci rend les équations plus compactes et claires à lire et lui simplifie la transition de l'équation intégrale de frontière à la méthode d'élément de frontière [16].

Une équation intégrale contient les opérateurs intégrro-différentiels. Par exemple si ζ est une fonction définie sur Γ , puis appliquant l'opération suivante à ζ pour tous les points \mathbf{p} sur Γ

$$\int_{\Gamma} G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \zeta(\mathbf{q}) d\Gamma_q = v(\mathbf{p}) \quad (\mathbf{p} \in \Gamma)$$

donne une fonction \mathbf{v} , que ceci peut être regardé comme une application d'un opérateur à la fonction ζ pour renvoyer la fonction \mathbf{v} . plus simplement nous pouvons écrire

$$\{L\zeta\}_{\Gamma}(\mathbf{p}) = v(\mathbf{p}) \quad (2.2)$$

Dans (2.2) L représente l'opérateur intégral

$$\{L\zeta\}_{\Gamma}(\mathbf{p}) \equiv \int_{\Gamma} G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \zeta(\mathbf{q}) d\Gamma_q$$

et (Γ) souscrit se rapporte au domaine d'intégration. Ici Γ est employé en tant que variable, représentant une surface entière ou un élément de surface.

Dans la notation d'opérateur l'équation intégrale (2.1) peut être écrite dans la notation alternative de sténographie

$$\{M\varphi\}_{\Gamma}(\mathbf{p}) + \frac{1}{2}\varphi(\mathbf{p}) = \{Lv\}_{\Gamma}(\mathbf{p}) \quad \text{ou} \quad \left\{ \left(M + \frac{1}{2}I \right) \varphi \right\}_{\Gamma}(\mathbf{p}) = \{Lv\}_{\Gamma}(\mathbf{p}) \quad (2.3)$$

où $\mathbf{v}(\mathbf{q}) = \partial\varphi / \partial\mathbf{n}_q$, M représente l'autre opérateur intégral ;

$$\{M\zeta\}_{\Gamma}(\mathbf{p}) \equiv \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \zeta(\mathbf{q}) d\Gamma_q \quad (2.4)$$

et I l'opérateur identité.

II.2.4 Solution numérique de l'équation intégrale :

Afin de développer une méthode numérique pour la solution des équations intégrales telle (2.3), une technique est appliquée de sorte que l'équation soit simplifiée dans un système linéaire des équations. Par conséquent il y a une analogie étroite entre les équations intégrales et les systèmes des équations linéaires ; Les opérateurs intégro-différentiels peuvent être vus comme matrices, les fonctions de frontière comme vecteurs.

L'application d'une telle technique transforme l'équation (2.3) à une équation de la forme :

$$M\tilde{\underline{\varphi}} + \frac{1}{2}\tilde{\underline{\varphi}} = L\tilde{\underline{v}} \quad \text{ou} \quad (M + \frac{1}{2}I)\tilde{\underline{\varphi}} = L\tilde{\underline{v}} \quad (2.5)$$

où les composantes des vecteurs $\underline{\varphi}$ et \underline{v} représentent les valeurs des fonctions $\varphi(\mathbf{p})$ et $\partial\varphi(\mathbf{p}) / \partial n_{\mathbf{q}}$ à un ensemble de points sur la frontière et les \wedge s représentent leurs approximations qui peuvent surgir par la mesure des quantités physiques ou par la solution numérique. L, M et I sont des matrices dérivées des opérateurs intégro-différentiels correspondants dans (2.3) avec I Représentant la matrice identité. Le raccordement entre le système des équations linéaires (2.5) et de l'équation intégrale (2.3) ou (2.1) est maintenant clair. Comme indiqué plutôt, les données de frontière φ , $\partial\varphi(\mathbf{p}) / \partial n_{\mathbf{q}}$ ou une certaine combinaison des deux fonctions sont donnés et la solution du système des équations linéaires (5) peut être employée pour dériver des approximations aux données inconnues de frontière.

Il y a une variété de techniques pour dériver le système des équations linéaires d'une équation intégrale donnée. En général, une méthode peut être dérivée en remplaçant les intégrales dans une équation intégrale par une formule de quadrature ou par une méthode résiduelle pesée telle que la méthode de Galerkin. Beaucoup de méthodes pour résoudre des équations intégrales peuvent être employées pour développer une méthode particulière d'élément de frontière [16].

L'application de la méthode de collocation à une équation intégrale de frontière exige que la frontière soit représentée par un ensemble de panneaux. Par exemple une frontière bidimensionnelle peut être approchée par un ensemble de lignes droites. Afin d'accomplir la discrétisation des équations intégrales, les fonctions de frontière doivent également être approchées sur chaque panneau. C'est les caractéristiques du panneau et de la représentation de la fonction de frontière sur le panneau qui définissent ensemble l'élément dans la méthode d'élément de frontière.

En représentant les fonctions de frontière par une forme caractéristique sur chaque panneau, les équations intégrales de frontière peuvent être simplifiées dans le système linéaire

des équations de la forme présentée plutôt. Le plus simplement, les fonctions de frontière peuvent être approchées par une constante sur chaque panneau. Le point de collocation est au centre du panneau (collocation C^0).

II.2.5 Solution dans le domaine :

Sur la solution de l'équation intégrale (approximations) la(es) fonction(s) inconnu(es) de frontière sera connu sur Γ . Par conséquent $\varphi(\mathbf{q})$ et $\partial\varphi(\mathbf{q}) / \partial\mathbf{n}_q$ tous deux seront explicite si la méthode est basée sur l'équation intégrale (2.5). Dans la plupart des cas une solution dans le domaine Ω est exigée et ceci peut s'avérer utile d'employer l'équation suivante :

$$\varphi(p) = \int_{\Gamma} G(p, q) \frac{\partial\varphi}{\partial n_q} d\Gamma_q - \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_q}(p, q) \varphi(q) d\Gamma_q \quad (p \in \Omega) \quad (2.6)$$

où bien d'une manière plus concise,

$$\varphi(p) = \{L\varphi\}_{\Gamma} - \{Mv\}_{\Gamma} \quad (p \in \Omega)$$

La solution $\varphi(\mathbf{p})$ pour un point \mathbf{p} quelconque du domaine Ω peut être obtenue simplement en évaluant les intégrales dans (2.6).

II.2.6 Méthodes directe et indirecte dans la BEM :

Il y a deux approches fondamentales dans la résolution d'une équation aux dérivées partielle par la BEM. La première se nomme souvent la méthode directe et les équations intégrales sont dérivées par l'application du deuxième théorème de Green (1.48) et un exemple de ceci a été déjà donné dans la section II.2.2. L'autre technique se nomme la méthode indirecte. Ceci est fondé sur l'hypothèse que la solution peut être exprimée en termes de fonction de densité de source définie sur la frontière. On suppose par exemple que la solution de l'équation de Laplace peut être écrite sous la forme

$$\varphi(p) = \int_{\Gamma} G(p, q) \sigma(q) d\Gamma_q,$$

où σ est la fonction de densité de source définie sur Γ seulement. L'équation intégrale suivante peut être dérivée d'après ce qui précède

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_p}(p) = \frac{\partial}{\partial n_p} \int_{\Gamma} G(p, q) \sigma(q) d\Gamma_q + \frac{1}{2} \sigma(p) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_p}(p, q) \sigma(q) d\Gamma_q + \frac{1}{2} \sigma(p)$$

Dans la notation d'opérateur les équations intégrales ci-dessus peuvent s'écrire ;

$$\varphi(p) = \{L\sigma\}(p) \quad \text{et} \quad v(p) = \left\{M^t + \frac{1}{2}I\right\}\sigma(p)$$

Noter que le rapport entre l'opérateur M^t et l'opérateur M présentés plutôt ; M^t est la transposée de M , est obtenue en permutant simplement les arguments p et q dans la définition.

II.2.6.1 Collocation :

L'étape de passage de l'équation intégrale au système linéaire d'équations, comme illustré dans la section II.2.2, est effectuée en appliquant une méthode d'équation intégrale à une équation comme (2.3) pour donner une équation comme (2.5). Il y a une gamme des méthodes élaborées dans ce sens (cf. [13, 16, 17, 70]) mais la technique la plus favorisée est celle de la collocation, en raison de sa simplicité inhérente. La collocation peut être appliquée sous une forme remarquablement élémentaire, qui se nomme la méthode de collocation C^0 dont nous la décrivons brièvement.

D'abord on assume que la frontière Γ est exprimée comme un ensemble de panneaux ;

$$\Gamma = \sum_{j=1}^n \Delta\Gamma_j$$

Souvent les $\Delta\Gamma_j$ désigné sous le nom des éléments dans ce qui suit.

Cependant, le terme élément se réfère non seulement à la géométrie de $\Delta\Gamma_j$ mais également à la méthode de représenter les fonctions de frontière sur $\Delta\Gamma_j$. La méthode de collocation C^0 implique de représenter la fonction de frontière par une constante sur chaque panneau. Par exemple

$$\varphi(p) \approx \varphi_j, \quad v(p) \approx v_j \quad \text{si} \quad p \in \Delta\Gamma_j \quad (2.7)$$

La substitution des représentations de cette forme pour les fonctions de frontière dans l'équation intégrale la ramène à la forme discrète. La combinaison de la représentation des panneaux et de l'approximation des fonctions de frontière, comme caractérisée par (2.7), définit l'élément.

Les simplifications nous permettent de récrire l'équation (2.3) comme approximation :

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \left(M + \frac{1}{2}I \right) e \right\}_{\Delta\Gamma_j} (p) \varphi_j \approx \sum_{j=1}^n \{Le\}_{\Delta\Gamma_j} (p) v_j \quad (p \in \Gamma)$$

où \mathbf{e} est la fonction unité ($\mathbf{e} \equiv 1$). $\{L\mathbf{e}\}_{\Delta\Gamma_j(\mathbf{p})}$, par exemple, pour un point spécifique \mathbf{p} , sont les valeurs numériques des intégrales définies. $\{L\mathbf{e}\}_{\Delta\Gamma_j(\mathbf{p})}$ sont indépendantes des fonctions de frontière et se nomment la forme discrète de l'opérateur intégrale L .

L'approximation constante est prise pour être la valeur des fonctions de frontière au point central représentatif (le point de collocation) sur chaque panneau. En trouvant les formes discrètes des opérateurs intégro-différentiels appropriés pour tout point de collocation, un système de la forme :

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \left(M + \frac{1}{2}I \right) e \right\}_{\Delta\Gamma_j} (p_i) \varphi_j \approx \sum_{j=1}^n \{Le\}_{\Delta\Gamma_j} (p_i) v_j \quad (2.8)$$

Pour $i = 1, 2, \dots, n$ est obtenu en mettant $\mathbf{p} = \mathbf{p}_i$ dans l'approximation précédente. Noter qu'en raison de l'approximation de la frontière et de l'approximation des fonctions de frontière, l'équivalent discret de l'équation (2.3) est une approximation reliant les valeurs exactes des fonctions de frontière aux points de collocation. Ce système des approximations (2.8) peut maintenant être écrit sous la forme de matrice-vecteur suivante :

$$\left(M + \frac{1}{2}I \right) \underline{\varphi} \approx L \underline{v} \quad (2.9)$$

Avec

$$[L]_{ij} = \{Le\}_{\Delta\Gamma_j} (p_i), \quad [M]_{ij} = \{Me\}_{\Delta\Gamma_j} (p_i) \quad (2.10)$$

Les vecteurs $\underline{\varphi}$ et \underline{v} représentent les valeurs exactes de φ et de v aux points de collocation. Les termes du côté droit des équations (2.10) sont des intégrales définies qui doivent être calculées pour renvoyer leur valeur du côté gauche des équations.

Cependant, dans l'exécution des méthodes d'élément de frontière il est bien connu que certaines des intégrales qui surgissent aient des fonctions intégrales singulières, exigeant un traitement spécial. Dans beaucoup de cas ceci est effectué par une application franche d'une méthode d'intégration numérique [33, 56, 57, 58].

II.2.7 Les opérateurs intégro-différentiels discrets de Laplace :

Dans le programme principal existe un sous-programme qui calcule les formes discrètes des opérateurs intégro-différentiels aux L, M, M', N qui apparaissent dans l'application de la collocation aux formulations d'équation intégrale de l'équation de Laplace. Des expressions

pour les opérateurs intégrro-différentiels discrets sont obtenues en approchant les frontières par les éléments les plus simples, pour chacun des trois cas on envisage :

- Les éléments en ligne droite pour le cas bidimensionnel général ;
- Les éléments triangulaires plats pour le cas tridimensionnel général ;
- Les éléments coniques pour le cas tridimensionnel axisymétrique.

Les éléments sont illustrés sur la **figure II.1**

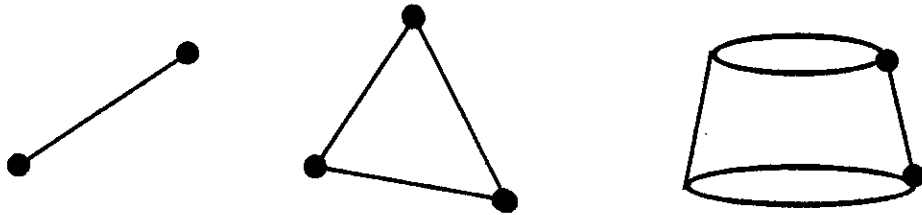


Figure II.1 : Les éléments en ligne droite, triangulaire plat et conique

Les opérateurs intégrro-différentiels intégraux de Laplace sont définis comme suit :

$$\{L\zeta\}_{\Gamma}(p) \equiv \int_{\Gamma} G(p, q) \zeta(q) d\Gamma_q, \quad (2.12)$$

$$\{M\zeta\}_{\Gamma}(p) \equiv \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_q}(p, q) \zeta(q) d\Gamma_q, \quad (2.13)$$

$$\{M'\zeta\}_{\Gamma}(p; v_p) \equiv \frac{\partial}{\partial v_p} \int_{\Gamma} G(p, q) \zeta(q) d\Gamma_q, \quad (2.14)$$

$$\{N\zeta\}_{\Gamma}(p; v_p) \equiv \frac{\partial}{\partial v_p} \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_q}(p, q) \zeta(q) d\Gamma_q. \quad (2.15)$$

où Γ est une frontière, le \mathbf{n}_q est le vecteur normal unité unique à Γ au point \mathbf{q} , le \mathbf{v}_p est un vecteur directionnel unité passant par \mathbf{p} et le $\zeta(\mathbf{q})$ est une fonction définie pour $\mathbf{q} \in \Gamma$. $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ est la fonction de Green de l'espace libre pour l'équation de Laplace.

II.2.7.1 Les propriétés des opérateurs intégro-différentiels discrets :

En général pour une fonction donnée $\zeta(\mathbf{p})$ ($\mathbf{p} \in \Gamma$), $\{L\zeta\}_\Gamma(\mathbf{p})$ et $\{N\zeta\}_\Gamma(\mathbf{p}; \mathbf{u}_p)$ sont continus à travers la frontière Γ (pour tout vecteur donné d'unité vers le haut dans la définition de la dernière fonction). $\{M\zeta\}_\Gamma(\mathbf{p})$ et $\{M'\zeta\}_\Gamma(\mathbf{p})$ sont discontinus à travers Γ et continue sur le reste du domaine. Les opérateurs M et M' ont les propriétés suivantes de continuité aux points à proximité de Γ :

$$\{M\zeta\}_\Gamma(\mathbf{p} + \varepsilon \mathbf{n}_p) + \frac{1}{2}\zeta(\mathbf{p}) = \{M\zeta\}_\Gamma(\mathbf{p}) = \{M\zeta\}_\Gamma(\mathbf{p} - \varepsilon \mathbf{n}_p) - \frac{1}{2}\zeta(\mathbf{p}) \quad (2.16)$$

$$\{M'\zeta\}_\Gamma(\mathbf{p} + \varepsilon \mathbf{n}_p; \mathbf{n}_p) + \frac{1}{2}\zeta(\mathbf{p}) = \{M'\zeta\}_\Gamma(\mathbf{p}; \mathbf{n}_p) = \{M'\zeta\}_\Gamma(\mathbf{p} - \varepsilon \mathbf{n}_p; \mathbf{n}_p) - \frac{1}{2}\zeta(\mathbf{p}) \quad (2.17)$$

où $\mathbf{p} \in \Gamma$ et \mathbf{n}_p de \mathbf{p} est la normale unité à Γ au point \mathbf{p} . les propriétés de continuité sont légèrement différentes si Γ n'est pas lisse à \mathbf{p} .

Remarque : En ce qui concerne les propriétés relatives aux dérivées de la fonction de Green, nous avons développer les plus essentielles en « Annexe »

II.2.7.2 Discrétisation des opérateurs intégro-différentiels discrets :

Afin de discrétiser les formes discrètes des opérateurs intégro-différentiels (2.12), (2.13), (2.14) et (2.15), Γ est approché par un ensemble d'éléments n tel que :

$$\Gamma' = \sum_{j=1}^n \Delta\Gamma'_j$$

La fonction ζ de frontière est remplacée par son équivalent sur la frontière approchée Γ' . La fonction est alors remplacée par une constante sur chaque élément. Ainsi pour l'opérateur L on aura :

$$\{L\zeta\}_\Gamma(\mathbf{p}) \approx \{L\zeta'\}_\Gamma(\mathbf{p}) \approx \sum_{j=1}^n \int_{\Delta\Gamma'_j} G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \zeta'(\mathbf{p}_j) d\Gamma_q = \sum_{j=1}^n [\zeta'(\mathbf{p}_j) \{Le'\}_{\Delta\Gamma'_j}(\mathbf{p})],$$

où e est la fonction unité. Les autres opérateurs intégro-différentiels peuvent être discrétisés d'une manière semblable.

Les formes discrètes sont ainsi définies comme suit :

$$\{Le'\}_{\Delta\Gamma_j}(p) = \int_{\Delta\Gamma_j} G(p, q) d\Gamma_q, \quad (2.18)$$

$$\{Me'\}_{\Delta\Gamma_j}(p) = \int_{\Delta\Gamma_j} \frac{\partial G}{\partial n_q}(p, q) d\Gamma_q, \quad (2.19)$$

$$\{M'e'\}_{\Delta\Gamma_j}(p; v_p) = \frac{\partial}{\partial v_p} \int_{\Delta\Gamma_j} G(p, q) d\Gamma_q, \quad (2.20)$$

$$\{Ne'\}_{\Delta\Gamma_j}(p; v_p) = \frac{\partial}{\partial v_p} \int_{\Delta\Gamma_j} \frac{\partial G}{\partial n_q}(p, q) d\Gamma_q, \quad (2.21)$$

La dérivée dans l'opérateur de l'équation (2.20) peut toujours être portée à l'intérieur de l'intégrale. La même opération est valable pour l'opérateur de (2.21) quand \mathbf{p} ne se trouve pas sur l'élément $\Delta\Gamma_j$. Ainsi que, nous pouvons écrire :

$$\{M'e'\}_{\Delta\Gamma_j}(p; v_p) = \int_{\Delta\Gamma_j} \frac{\partial G}{\partial v_p}(p, q) d\Gamma_q, \quad (2.22)$$

$$\{Ne'\}_{\Delta\Gamma_j}(p; v_p) = \int_{\Delta\Gamma_j} \frac{\partial^2 G}{\partial v_p \partial n_q}(p, q) d\Gamma_q \quad (p \notin \Delta\Gamma_j), \quad (2.23)$$

Quand $\mathbf{p} \notin \Delta\Gamma_j$ les intégrales de (2.18), (2.19), (2.20) et (2.21) seront toutes régulières et par conséquent est favorable à la quadrature standard. La même opération est vraie pour les intégrales de (2.19) et (2.20) quand $\mathbf{p} \in \Delta\Gamma_j$ (cependant pas sur le bord de l'élément). Cependant, l'évaluation des opérateurs intégral-différentiels discrets (2.18) et (2.21) exige généralement un traitement spécial quand $\mathbf{p} \in \Delta\Gamma_j$ car elles deviennent singulières en ce point.

En résumé, l'évaluation des opérateurs intégral-différentiels exige une addition d'un ensemble de valeurs de fonction à intégrer multipliées par des poids de quadrature. Dans le cas où $\mathbf{p} \in \Delta\Gamma_j$, l'évaluation de l'intégrale hors de ce point serait également exigé pour les opérateurs de L et de N.

II.2.7.3 Les matrices équivalentes des opérateurs discrete :

L'application de la collocation exige généralement que la frontière fermée Γ soit remplacée par une frontière approchée Γ' composée d'un ensemble de n éléments $\Delta\Gamma_j$ ($j = 1, \dots, n$) de la manière décrite précédemment.

Soit les points, \mathbf{p}_j ($j = 1, \dots, n$) avec $\mathbf{p}_j \in \Delta\Gamma_j$, les points de collocation. Dans notre travail nous considérons seulement l'approximation des fonctions de frontière par une constante sur chaque élément. Il est utile d'adopter la notation suivante :

$$[L_k]_{ij} = \{Le'\}_{\Delta\Gamma_j}(p_i), \quad (2.24)$$

$$[M_k]_{ij} = \{Me'\}_{\Delta\Gamma_j}(p_i), \quad (2.25)$$

$$[M'_k]_{ij} = \{M'e'\}_{\Delta\Gamma_j}(p_i; n_{p_i}), \quad (2.26)$$

$$[N_k]_{ij} = \{Ne'\}_{\Delta\Gamma_j}(p_i; n_{p_i}), \quad (2.27)$$

là où \mathbf{n}_{p_i} est la normale extérieure à Γ' au point \mathbf{p}_i . Ceci donne les quatre $n \times n$ matrices de L_k , M_k , M'_k et N_k . Les fonctions de frontière approchées peuvent être approchées par un vecteur où l'indice \mathbf{k} indique une généralisation des dérivées de la fonction de Green par rapport à la position du vecteur par le point \mathbf{p} , et quand \mathbf{k} est zéro cela veut dire qu'on dérive par rapport à la normale au point \mathbf{p} .

$$\zeta = [\zeta'(p_1), \dots, \zeta'(p_n)]$$

II.2.8 Le système linéaire :

L'application de la collocation aux équations ci-dessus, nous donne le système linéaire suivant :

$$(M_k - \frac{1}{2}I)\varphi \approx L_k \underline{v} \quad (2.28)$$

où le $\underline{v}_j = \mathbf{v}(\mathbf{p}_j)$ pour $j = 1, \dots, n$. Par conséquent l'étape primaire de la méthode d'élément de frontière nécessite la solution du système linéaire suivant :

$$(M_k - \frac{1}{2}I)\hat{\varphi} \approx \alpha L_k \underline{v} \quad (2.29)$$

ce qui rapporte des approximations de $\varphi(\mathbf{p}_j)$, pour $j = 1, \dots, n$.

L'étape secondaire de la méthode d'élément de frontière exige le calcul de l'approximation de $\varphi(\mathbf{p})$, où \mathbf{p} est un point dans le domaine extérieur \mathbf{E} . Pour ceci que les formes discrètes sont substituées dans (2.3) pour donner :

$$\hat{\phi}(p) = \sum_{j=1}^n \left[\{Me'\}_{\Delta_j'}(p) \hat{\phi}(p) - \{Le'\}_{\Delta_j'}(p) v_j \right] \quad p \in E' \quad (2.30)$$

Noter que l'étape secondaire exige l'évaluation seulement de deux opérateurs intégrodifférentiels contrairement à l'étape primaire qui exige chacun des quatre. Noter également que les techniques spéciales d'évaluation de la soustraction hors de la singularité sont exigées seulement pour les termes diagonaux des matrices dans (2.24), (2.27). Ce dernier point est une propriété typique des méthodes d'équation intégrale, dont les résultats sont que le coût d'évaluer, généralement plus grand, les formes discrètes quand p se trouve sur l'élément mais il n'est pas important en évaluant le coût informatique global.

II.2.9 Approximation des intégrales :

II.2.9.1 Cas Bidimensionnel :

a) Intégrales régulières :

Les intégrales régulières qui surgissent sont approchées par une règle standard de quadrature telle qu'une règle de Gauss-Legendre. Des tableaux des règles de Gauss-Legendre sont donnés dans [13, 67]. Celle-ci s'exprime sous une forme généralisée, tel que si on prend comme exemple l'opérateur L on aura:

$$\{L_0 e'\}_{\Delta_j'}(p) = \frac{1}{2\pi} l \sum_{k=1}^K W_k L_0(M_k) = \frac{1}{2\pi} l \sum_{k=1}^K W_k \ln\left(\frac{1}{r_{ik}}\right) \quad (2.31)$$

où :

l est la longueur de l'élément j

w_k sont les poids de la quadrature de Gauss

M_k sont les points d'intégration de la quadrature où la fonction intégrale est évaluée.

r_{ik} est la distance entre le P_i et le point M_k

K est l'ordre de la quadrature de Gauss

b) Intégrales singulières :

Les intégrales singulières (non-régulières) qui apparaissent quand le point p se trouve sur l'élément sont calculées par l'intermédiaire des méthodes suivantes [13, 16] :

Les opérateurs de M_0 et de M_0^t ont des intégrales régulières, par conséquent le but est de trouver des expressions pour :

$$\{L_0 e'\}_{\Delta\Gamma'}(p) = \int_{\Delta\Gamma'} G_0(p, q) d\Gamma_q, \quad (2.32)$$

$$\{N_0 e'\}_{\Delta\Gamma'}(p; v_p) = \frac{\partial}{\partial v_p} \int_{\Delta\Gamma'} \frac{\partial G_0}{\partial n_q}(p, q) d\Gamma_q, \quad (2.33)$$

où $\Delta\Gamma'$ est un élément de ligne droite, $p \in \Delta\Gamma'$ (cependant pas sur un bord ou un coin de l'élément). On suppose que l'élément $\Delta\Gamma'$ possède une longueur $a+b$ avec $q = q(x)$ et $p = q(0)$ pour $x \in [-a, b]$. Ceci donne les formules suivantes pour (2.32) et (2.33).

$$\{L_0 e'\}_{\Delta\Gamma'}(p) = \frac{1}{2\pi} [a + b - a \log a - b \log b] \quad (2.34)$$

$$\{N_0 e'\}_{\Delta\Gamma'}(p; v_p) = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] \quad (2.35)$$

II.2.9.2 Cas Tridimensionnel :

a) Intégrales régulières :

Les intégrales régulières qui apparaissent sont alors approchées par une règle de quadrature définie sur un triangle, où un choix des règles de quadrature de Gauss-Legendre pour le triangle doit être effectué [67]. Celle-ci s'exprime sous une forme généralisée [16], tel que si on prend comme exemple l'opérateur L on aura :

$$\{L_0 e'\}_{\Delta\Gamma'}(p) = \frac{1}{4\pi} A_j \sum_{k=1}^K \frac{1}{r_{ik}} W_k \quad (2.36)$$

où :

A_j est l'aire de l'élément triangulaire Γ_j

w_k sont les poids de la quadrature de Gauss

M_k sont les points d'intégration de la quadrature où la fonction intégrale est évaluée.

r_{ik} est la distance entre le P_i et le point M_k

K est l'ordre de la quadrature de Gauss

b) Intégrales singulières :

Les intégrales singulières (non-régulières) qui apparaissent sont calculées par les méthodes suivantes : [16]

Les opérateurs \mathbf{M}_0 et \mathbf{M}_0^t ont des intégrales régulières, par conséquent le but est de trouver des expressions pour :

$$\{L_0 e^i\}_{\Delta\Gamma'}(p) = \int_{\Delta\Gamma'} G_0(p, q) d\Gamma_q, \quad (2.37)$$

$$\{N_0 e^i\}_{\Delta\Gamma'}(p; v_p) = \frac{\partial}{\partial v_p} \int_{\Delta\Gamma'} \frac{\partial G_0}{\partial n_q}(p, q) d\Gamma_q, \quad (2.38)$$

où la $\Delta\Gamma'$ est un élément triangulaire plan, $p \in \Delta\Gamma'$ (cependant pas sur bord (arête) ou un coin de l'élément). Soit $R(\theta)$ la distance de p au bord de l'élément pour $\theta \in [0, 2\pi]$, comme illustré sur la figure II.2.

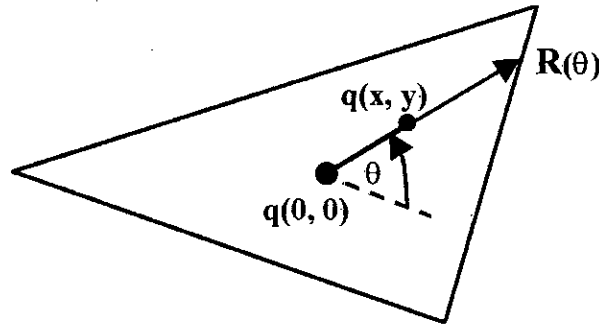


Figure II.2 : L'élément triangulaire en coordonnées polaires de pole p

Les intégrales (2.36) et (2.37) peuvent être écrites sous la forme :

$$\{L_0 e^i\}_{\Delta[\Gamma]}(p) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} R(\theta) d\theta, \quad (2.39)$$

$$\{N_0 e^i\}_{\Delta[\Gamma]}(p; v_p) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R(\theta)} d\theta, \quad (2.40)$$

Afin d'évaluer ces intégrales, une technique semblable à cela décrite dans Kirkup [16] est suivie. L'élément triangulaire $\Delta[\Gamma]$ est divisé en trois $\Delta 1$, $\Delta 2$ et $\Delta 3$ en joignant le point p

aux sommets. Les triangles résultants ont la forme de la **figure II.3**. Après une certaine analyse élémentaire, nous obtenons :

$$\{L_0 e'\}_{\Delta_i}(p) = \sum_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3} \frac{1}{4\pi} R(0) \sin B \left(\log \tan\left(\frac{B+A}{2}\right) - \log \tan\left(\frac{B}{2}\right) \right), \quad (2.41)$$

et

$$\{N_0 e'\}_{\Delta_i}(p; v_p) = \sum_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3} \frac{1}{4\pi} \frac{\cos(B+A) - \cos B}{R(0) \sin B}, \quad (2.42)$$

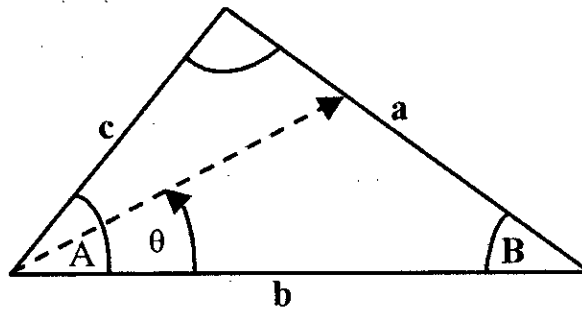


Figure II.2 : Forme géométrique du triangle Δ_i issu de la subdivision.

II.2.10 Singularités géométriques :

Elles apparaissent lorsque la surface présente des points géométriquement singuliers (arêtes et points coniques ou angles Solides en 3D, points anguleux en 2D), en ces points la dérivée normale n'est pas continue.

Différentes méthodes ont été utilisées pour traiter ces cas.

a) On déforme la géométrie du domaine en arrondissant la frontière au voisinage du point singulier, soit par un arc de cercle en 2D, soit par une section sphérique ou cylindrique en 3D.

b) Comme valeur de la fonction à déterminer au nœud singulier, on choisit la moyenne des valeurs de celle-ci obtenues à partir des éléments qui y aboutissent ; Cette méthode est plus économique et plus facile, car on traite le point singulier comme un point non singulier.

c) On évite ce point singulier si on prend comme fonction de base des polynômes de degré zéro, c'est à dire on suppose que la fonction recherchée est constante sur l'élément. Cette méthode est très utilisée.

d) On définit plusieurs points au voisinage de ce point singulier sur les éléments qui y aboutissent.

e) On fait un développement en série locale près de ce point singulier. Cette méthode est difficile à mettre en œuvre.

Parmi ces possibilités, les plus couramment utilisées sont **b**, **c**, **d**. Nous avons utilisé **c**.

II.2.11 Problème intérieur de Laplace :

Le but est de résoudre l'équation de Laplace dans un domaine Ω borné de frontière Γ :

$$\Delta\varphi = 0 \quad (P \in \Omega) \quad (2.43)$$

On assume que les conditions aux limites prennent une forme générale

$$\alpha(p)\varphi(p) + \beta(p)v(p) = f(p) \quad (2.44)$$

où α , β et f sont des fonctions à valeurs réelles définies sur la frontière.

II.2.11.1 Formulation directe :

L'application du deuxième théorème de Green à l'équation de Laplace donne les équations suivantes :

$$\{M\varphi\}_{\Gamma}(p) + \varphi(p) = \{Lv\}_{\Gamma}(p) \quad (p \in \Omega) \quad (2.45)$$

$$\{M\varphi\}_{\Gamma}(p) + \frac{1}{2}\varphi(p) = \{Lv\}_{\Gamma}(p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.46)$$

L'équation intérieure de Laplace de la façon décrite en haut ; l'équation (2.45) donne des approximations de φ et v sur la frontière Γ , l'équation (2.46) rapporte une approximation au $\varphi(p)$ pour n'importe quel point p dans le domaine. Il y a seulement une petite difficulté avec cette approche et c'est dans le cas d'une équation avec des conditions aux limites de Dirichlet, (2.46) est une équation intégrale de Fredholm de première espèce.

Quoique la première équation (2.45), en ayant des singularités, ne présente pas des problèmes numériques graves que ceux avec des intégrales régulières, il est constaté que leur solution peut mener à une perte d'exactitude marginale puisque les matrices qui surgissent ont

des nombres plus élevés de conditionnement et par conséquent augmente n'importe quelle erreur numérique. Le formulation du problème intérieur en équation intégrale de frontière, nous permet de résoudre l'équation (2.46).

Dérivons chaque terme de l'équation (2.45) par rapport à n'importe quel vecteur $\mathbf{v}(\mathbf{p})$, ceci donne :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_p} \{M\varphi\}_\Gamma(\mathbf{p}) + \frac{\partial \varphi(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{u}_p} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_p} \{Lv\}_\Gamma(\mathbf{p}) \quad (p \in \Omega)$$

ou

$$\{N\varphi\}_\Gamma(\mathbf{p}; \mathbf{u}_p) + \frac{\partial \varphi(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{u}_p} = \{M'v\}_\Gamma(\mathbf{p}; \mathbf{u}_p) \quad (p \in \Omega)$$

En prenant la limite comme point \mathbf{p} approchant la frontière avec le vecteur \mathbf{u}_p étant la normale extérieure à la frontière au point \mathbf{p} (c'est à dire \mathbf{n}_p), et tenant compte des propriétés de saut § II.2.7.1, l'équation intégrale suivante est obtenue:

$$\{N\varphi\}_\Gamma(\mathbf{p}; \mathbf{u}_p) = \left\{ \left(M' - \frac{1}{2}I \right) v \right\}_\Gamma(\mathbf{p}; \mathbf{u}_p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.47)$$

où $v(\mathbf{p}) = \frac{\partial \varphi}{\partial n_p}$

Puisque ni l'une ni l'autre des équations (2.45) et (2.46) ne sont universellement acceptables pour résoudre l'équation intérieure de Laplace pour toutes les conditions aux limites de la forme (2.44), on propose une équation hybride qui couple les deux équations originales dans une simple équation

$$\left\{ \left(M + \frac{1}{2}I + N \right) \varphi \right\}_\Gamma(\mathbf{p}; \mathbf{u}_p) = \left\{ \left(L + M' - \frac{1}{2}I \right) v \right\}_\Gamma(\mathbf{p}; \mathbf{u}_p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.48)$$

L'équation (2.48) fournit une base appropriée d'une méthode pour la solution de l'équation intérieure de Laplace pour toutes les conditions aux limites.

II.2.11.2 Formulation indirecte :

Les formulations indirectes correspondantes aux équations intégrales (2.46) et (2.47) peuvent être obtenues en écrivant φ comme potentiel simple ou double couche ;

$$\varphi(\mathbf{p}) = \{L\sigma_0\}_\Gamma(\mathbf{p}) \quad \text{où} \quad \varphi(\mathbf{p}) = \{M\sigma_\infty\}_\Gamma(\mathbf{p}) \quad (p \in \Omega)$$

où σ_0 and σ_∞ sont des fonctions de densité de source définies sur Γ . Pour des points sur la frontière ces équations deviennent des équations intégrales de frontière ;

$$\varphi(p) = \{L\sigma_0\}_\Gamma(p) \quad \text{où} \quad \varphi(p) = \left\{ \left(M - \frac{1}{2}I \right) \sigma_\infty \right\}_\Gamma(p) \quad (p \in \Gamma)$$

où la condition du saut du § II.2.7.1 a été prise en considération dans la deuxième équation.

Ces équations intégrales ont les mêmes difficultés comme l'équation directe correspondante (2.45) ; le problème de Dirichlet est remplacé par la première équation. Encore le problème peut être évité en employant une formulation hybride ; écriture de φ comme une somme pondérée de potentiels simples et doubles de couche

$$\varphi(p) = \{(L + M)\sigma_1\}_\Gamma(p) \quad (p \in \Omega) \quad (2.49)$$

Ceci donne l'équation intégrale de frontière suivante :

$$\varphi(p) = \left\{ \left(L + \left(M - \frac{1}{2}I \right) \right) \sigma_1 \right\}_\Gamma(p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.50)$$

L'équation (2.50) est seulement appropriée à résoudre le problème de Dirichlet puisqu'elle se rapporte à φ et pas à \mathbf{v} sur la frontière. Dérivons l'équation (2.49) suivant \mathbf{n}_p et prenant la limite comme point \mathbf{p} approchant un point sur la frontière donne l'équation intégrale de frontière suivante :

$$\mathbf{v}(p) = \left\{ \left(M' + \frac{1}{2}I + N \right) \sigma_1 \right\}_\Gamma(p; n_p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.51)$$

Ce qui peut être employée pour la solution du problème de Neumann.

Les deux équations (2.50) et (2.51) sont exigées dans la solution indirecte de l'équation de Laplace avec les conditions aux limites de Robin. Dans ce cas-ci l'équation intégrale appropriée est obtenue par la substitution des formes (2.50) et (2.51) dans les conditions aux limites (2.44) pour donner

$$\alpha(p) \left\{ \left(L + \left(M - \frac{1}{2}I \right) \right) \sigma_1 \right\}_\Gamma(p) + \beta(p) \left\{ \left(M' + \frac{1}{2}I + N \right) \sigma_1 \right\}_\Gamma(p; n_p) = f(p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.52)$$

II.2.11.3 Modification du champ :

Le potentiel n'est pas un résultat unique sur la frontière, avec les conditions aux limites sur cette frontière ; la surface peut simplement agir pour modifier un champ existant. Il y a dans ces cas-ci un champ incident dans le domaine, nommé φ^i , qui est le champ qui existerait s'il n'y avait aucune frontière. De tels problèmes peuvent également être résolus par la méthode d'élément de frontière, elle exige seulement une généralisation des équations intégrales et du changement correspondant des méthodes d'élément de frontière.

II.2.11.3.1 Formulation directe :

Dans le cas le plus simple, l'équation (2.45) peut être généralisée comme suit :

$$\varphi(p) = \varphi(p)^i - \{M\varphi\}_\Gamma(p) + \{Lv\}_\Gamma(p) \quad (p \in \Omega) \quad (2.53)$$

L'équation intégrale de frontière qui résulte de la formulation (2.53) est comme suit :

$$\{M\varphi\}_\Gamma(p) + \frac{1}{2}\varphi(p) = \varphi(p)^i + \{Lv\}_\Gamma(p) \quad (p \in \Gamma)$$

La généralisation correspondante de (2.47) est

$$\{N\varphi\}_\Gamma(p; n_p) = v^i(p) + \left\{ \left(M' - \frac{1}{2}I \right) v \right\}_\Gamma(p; n_p) \quad (p \in \Gamma)$$

$$\text{où } v^i(p) = \frac{\partial \varphi^i}{\partial n_p}$$

l'équation hybride qui couple les deux équations originales dans une simple équation est :

$$\left\{ \left(M + \frac{1}{2}I + N \right) \varphi \right\}_\Gamma(p; n_p) = \varphi^i(p) + v^i(p) + \left\{ \left(L + M' - \frac{1}{2}I \right) v \right\}_\Gamma(p; n_p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.54)$$

L'équation (2.54) est la généralisation de (2.48) et les deux équations sont équivalentes quand il n'y a aucun champ incident ($\varphi^i(\mathbf{p}) = 0$, $v^i(\mathbf{p}) = 0$ pour tout $\mathbf{p} \in \Omega \cup \Gamma$).

II.2.11.3.2 Formulation indirecte :

La généralisation des équations (2.49)-(2.51) pour inclure le champ incident invoque les équations intégrales suivantes :

$$\varphi(p) = \varphi^i(p) + \{(L+M)\sigma_1\}_\Gamma(p) \quad (p \in \Omega) \quad (2.55)$$

$$\varphi(p) = \varphi^i(p) + \left\{ (L + (M - \frac{1}{2}I))\sigma_1 \right\}_\Gamma(p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.56)$$

$$v(p) = v^i(p) + \left\{ (M' + \frac{1}{2}I + N)\sigma_1 \right\}_\Gamma(p; n_p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.57)$$

l'équation intérieure de Laplace avec les conditions aux limites générales de Robin (2.44) et avec le champ incident est comme suit :

$$\alpha(p) \left\{ \varphi^i(p) + (L + (M - \frac{1}{2}I))\sigma_1 \right\}_\Gamma(p) + \beta(p) \left\{ v^i(p) + (M' + \frac{1}{2}I + N)\sigma_1 \right\}_\Gamma(p; n_p) = f(p)$$

Pour $(p \in \Gamma)$ (2.58)

II.2.11.4 discrétisation du problème intérieur de Laplace :

Les opérateurs intégral-différentiels sont approchés par la technique décrite précédemment dont résulte le système linéaire des équations à résoudre. La méthode globale est équivalente à la solution des équations intégrales par la collocation.

II.2.11.4.1 Cas de la formulation directe :

L'application de la collocation à l'équation intégrale (2.54) la ramène au système linéaire suivant :

$$\left[M + \frac{1}{2}I + N \right] \underline{\varphi} \approx \underline{\varphi}^i + \underline{v}^i + \left[L + M' - \frac{1}{2}I \right] \underline{v} \quad (2.59)$$

Les vecteurs $\underline{\varphi}$ et \underline{v} représentent les valeurs des fonctions φ et v de frontière aux points de collocation. La méthode implique de trouver la solution du système linéaire :

$$\left[M + \frac{1}{2}I + N \right] \underline{\hat{\varphi}} \approx \underline{\varphi}^i + \underline{v}^i + \left[L + M' - \frac{1}{2}I \right] \underline{\hat{v}} \quad (2.60)$$

où on applique les conditions aux limites aux points de collocation ;

$$\alpha_i \hat{\varphi}_i + \beta_i \hat{v}_i = f_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{ou} \quad D_\alpha \underline{\hat{\varphi}} + D_\beta \underline{\hat{v}} = \underline{f} \quad (2.61)$$

avec $\alpha_i = \alpha(\mathbf{p}_i)$, $\beta_i = \beta(\mathbf{p}_i)$, $f_i = f(\mathbf{p}_i)$ et D_α et D_β dénote les matrices diagonales avec $[D_\alpha]_{ii} = \alpha_i$ et $[D_\beta]_{ii} = \beta_i$.

Lorsqu'il s'agit des conditions de Dirichlet pures ou de Neumann pures les équations peuvent être résolues par une méthode standard telle que la factorisation de LU ou l'élimination gaussienne. Cependant dans le cas général l'équation (2.61) peut être appliquée pour réarranger le système linéaire de l'équation (2.60) et l'équation matrice-vecteur qui résulte peut alors être résolue par des méthodes standards.

Une fois que les approximations de φ et de \mathbf{v} sont obtenues, l'équation (2.53) peut être employée pour chercher une solution approchée en un point quelconque \mathbf{p} dans le domaine ;

$$\hat{\varphi}(\mathbf{p}) = \varphi^i(\mathbf{p}) - \sum_{j=1}^n \{Me^j\}_{\Delta\Gamma_j}(\mathbf{p})\hat{v}_j + \sum_{j=1}^n \{Le^j\}_{\Delta\Gamma_j}(\mathbf{p})\hat{\varphi}_j \quad (2.62)$$

II.2.11.4.2 Cas de la formulation indirecte :

La méthode de collocation ramène les équations intégrales indirectes de frontière (2.56), (2.57) aux systèmes linéaires des approximations

$$\underline{\varphi} \approx \underline{\varphi}^i + \left[L + \left(M - \frac{1}{2}I \right) \right] \underline{\sigma}_1 \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{v}} \approx \underline{\mathbf{v}}^i + \left[M' + \frac{1}{2}I + N \right] \underline{\sigma}_1$$

En appliquant les conditions aux limites à la collocation comme dans la méthode directe donne l'équation :

$$D_\alpha \underline{\varphi} + D_\beta \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{f}} \quad (2.63)$$

La substitution des approximations pour φ et \mathbf{v} donnés ci-dessus dans l'équation (2.61) donne ce qui suit :

$$\left[D_\alpha \left\{ L + \left(M - \frac{1}{2}I \right) \right\} + D_\beta \left\{ M' + \frac{1}{2}I + N \right\} \right] \underline{\sigma}_1 + D_\alpha \underline{\varphi}^i + D_\beta \underline{\mathbf{v}}^i = \underline{\mathbf{f}}$$

ce qui est également l'analogie discret de l'équation (2.58). Dans la méthode indirecte d'élément de frontière, la première étape est trouver l'approximation à la fonction de densité de source σ_1 . Ceci peut être fait par la résolution du système linéaire suivant :

$$\left[D_\alpha \left\{ L + \left(M - \frac{1}{2}I \right) \right\} + D_\beta \left\{ M' + \frac{1}{2}I + N \right\} \right] \hat{\sigma}_1 + D_\alpha \underline{\varphi}^i + D_\beta \underline{\mathbf{v}}^i = \underline{\mathbf{f}} \quad (2.64)$$

La forme de cette équation est plus franche que les équations correspondantes pour la méthode directe (2.60), (2.65). L'équation (2.64) est simplement une équation matrice-vecteur

qui peut être immédiatement résolue par des méthodes d'élimination type de Gauss. Après avoir obtenu la solution (2.64), l'approximation de σ_1 , la solution approchée dans le domaine peut être trouvée en utilisant l'équivalent discret de (2.55) ;

$$\hat{\varphi}(p) = \varphi^i(p) + \sum_{j=1}^n (\{Le'\}_{\Delta\Gamma_j} + \{Me'\}_{\Delta\Gamma_j}) \hat{\sigma}_{1j}$$

II.2.12 Problème extérieur de Laplace :

Le but est de résoudre l'équation de Laplace extérieure à une surface ou à des surfaces fermées Γ , plongées dans un champ source incident :

$$\Delta\varphi = 0 \quad (P \in E) \quad (2.65)$$

On assume que les conditions aux limites prennent une forme générale

$$\alpha(p)\varphi(p) + \beta(p)v(p) = f(p) \quad (2.66)$$

où α , β et f sont des fonctions à valeurs réelles définies sur la frontière.

II.2.12.1 Formulation directe :

L'application du deuxième théorème de Green à l'équation de Laplace donne les équations suivantes :

$$\{M\varphi\}_{\Gamma}(p) - \varphi(p) = \{Lv\}_{\Gamma}(p) \quad (p \in E) \quad (2.67)$$

$$\{M\varphi\}_{\Gamma}(p) - \frac{1}{2}\varphi(p) = \{Lv\}_{\Gamma}(p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.68)$$

En suivant la même démarche que celle développée pour le problème intérieur, nous dérivons chaque terme de l'équation (2.67) par rapport à n'importe quel vecteur $\mathbf{v}(\mathbf{p})$, ainsi qu'en prenant la limite comme point \mathbf{p} approchant la frontière avec le vecteur \mathbf{u}_p étant la normale extérieure à la frontière au point \mathbf{p} (c'est à dire \mathbf{n}_p), et tenant compte des propriétés de saut § II.2.7.1, l'équation intégrale suivante est obtenue :

$$\{N\varphi\}_{\Gamma}(p; \mathbf{u}_p) = \left\{ \left(M^t + \frac{1}{2}I \right) v \right\}_{\Gamma}(p; \mathbf{u}_p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.69)$$

$$\text{où } v(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial n_p}$$

Puisque ni l'une ni l'autre des équations (2.68) et (2.69) ne sont universellement acceptables pour résoudre l'équation extérieure de Laplace pour toutes les conditions aux limites de la forme (2.44), on propose une équation hybride qui couple les deux équations originales dans une simple équation

$$\left\{ \left(M - \frac{1}{2}I + N \right) \varphi \right\}_{\Gamma} (p; u_p) = \left\{ \left(L + M' + \frac{1}{2}I \right) v \right\}_{\Gamma} (p; u_p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.70)$$

L'équation (2.48) fournit une base appropriée d'une méthode pour la solution de l'équation extérieure de Laplace pour toutes les conditions aux limites.

II.2.12.2 Formulation indirecte :

Les formulations indirectes correspondantes aux équations intégrales (2.68) et (2.69) peuvent être obtenues en écrivant φ comme potentiel simple ou double couche ;

$$\varphi(p) = \{L\sigma_0\}_{\Gamma}(p) \quad \text{où} \quad \varphi(p) = \{M\sigma_{\infty}\}_{\Gamma}(p) \quad (p \in E)$$

où σ_0 and σ_{∞} sont des fonctions de densité de source définies sur Γ . Pour des points sur la frontière ces équations deviennent des équations intégrales de frontière ;

$$\varphi(p) = \{L\sigma_0\}_{\Gamma}(p) \quad \text{où} \quad \varphi(p) = \left\{ \left(M + \frac{1}{2}I \right) \sigma_{\infty} \right\}_{\Gamma}(p) \quad (p \in \Gamma)$$

où la condition du saut du § II.2.7.1 a été prise en considération dans la deuxième équation.

Ces équations intégrales ont les mêmes difficultés comme l'équation directe correspondante (2.45) ; le problème de Dirichlet est remplacé par la première équation. Encore le problème peut être évité en employant une formulation hybride ; écriture de φ comme une somme pondérée de potentiels simples et doubles de couche

$$\varphi(p) = \{(L + M)\sigma_1\}_{\Gamma}(p) \quad (p \in E) \quad (2.71)$$

Ceci donne l'équation intégrale de frontière suivante :

$$\varphi(p) = \left\{ \left(L + \left(M + \frac{1}{2}I \right) \right) \sigma_1 \right\}_{\Gamma}(p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.72)$$

L'équation (2.72) est seulement appropriée à résoudre le problème de Dirichlet puisqu'elle se rapporte à φ et pas à v sur la frontière. Dérivons l'équation (2.71) suivant \mathbf{n}_p et prenant la limite comme point p approchant un point sur la frontière donne l'équation intégrale de frontière suivante :

$$v(p) = \left\{ (M' - \frac{1}{2}I + N)\sigma_1 \right\}_{\Gamma} (p; n_p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.73)$$

Ce qui peut être employée pour la solution du problème de Neumann.

Les deux équations (2.72) et (2.73) sont exigées dans la solution indirecte de l'équation de Laplace avec les conditions aux limites de Robin. Dans ce cas-ci l'équation intégrale appropriée est obtenue par la substitution des formes (2.72) et (2.73) dans les conditions aux limites (2.44) pour donner

$$\alpha(p) \left\{ (L + (M + \frac{1}{2}I))\sigma_1 \right\}_{\Gamma} (p) + \beta(p) \left\{ (M' - \frac{1}{2}I + N)\sigma_1 \right\}_{\Gamma} (p; n_p) = f(p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.74)$$

II.2.12.3 Modification du champ :

II.2.12.3.1 Formulation indirecte :

En utilisant le potentiel φ^i dérivée du champ source, les équations intégrales (2.72), (2.73), (2.74) généralisent comme suit :

$$\varphi(p) = \varphi^i(p) + \left\{ (L + M)\sigma_1 \right\}_{\Gamma} (p) \quad (p \in E) \quad (2.75)$$

$$\varphi(p) = \varphi^i(p) + \left\{ (L + (M + \frac{1}{2}I))\sigma_1 \right\}_{\Gamma} (p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.76)$$

$$v(p) = v^i(p) + \left\{ (M' - \frac{1}{2}I + N)\sigma_1 \right\}_{\Gamma} (p; n_p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.77)$$

avec $v^i = \partial\varphi^i / \partial n_p$.

Pour des conditions aux limites de Dirichlet (Neumann), la solution peut être trouvée par la résolution (2.76) (2.77) pour trouver σ et alors substituant le résultat dans (2.75) pour trouver φ en E . Substituant les expressions (2.76) et (2.77) pour φ et v dans l'équation pour les conditions aux limites générales de Robin (2.66) et avec le champ incident est comme suit :

$$\alpha(p) \left\{ \varphi'(p) + (L + (M + \frac{1}{2}I))\sigma_1 \right\}_\Gamma(p) + \beta(p) \left\{ v'(p) + (M' - \frac{1}{2}I + N)\sigma_1 \right\}_\Gamma(p; n_p) = f(p)$$

Pour $(p \in \Gamma)$ (2.78)

II.2.12.3.2 Formulation directe :

La solution du problème extérieur de Laplace sur la frontière Γ peut être déterminée en résolvant l'équation intégrale suivante :

$$\left\{ (M - \frac{1}{2}I + N)\varphi \right\}_\Gamma(p; n_p) = -\varphi'(p) - v'(p) + \left\{ (L + M' + \frac{1}{2}I)v \right\}_\Gamma(p; n_p) \quad (2.79)$$

pour $(p \in \Gamma)$, une généralisation d'équation (2.49), sujet aux conditions aux limites (2.66). Une fois que $\varphi(p)$ et $v(p)$ sont obtenus en résolvant l'équation ci-dessus, la solution dans le domaine peut être obtenue par l'intégration

$$\varphi(p) = \varphi(p)' + \{M\varphi\}_\Gamma(p) - \{Lv\}_\Gamma(p) \quad (p \in E) \quad (2.80)$$

II.2.12.4 Discrétisation du problème extérieur de Laplace :

Les opérateurs intégrro-différentiels sont rapprochés par la technique décrite précédemment dont résulte le système linéaire des équations à résoudre. La méthode globale est équivalente à la solution des équations intégrales par la collocation.

II.2.12.4.1 Cas de la formulation indirecte :

La méthode de collocation ramène les équations intégrales indirectes de frontière (2.76), (2.77) aux systèmes linéaires des approximations

$$\underline{\varphi} \approx \underline{\varphi}' + \left[L + (M - \frac{1}{2}I) \right] \underline{\sigma}_1 \quad \text{et} \quad \underline{v} \approx \underline{v}' + \left[M' + \frac{1}{2}I + N \right] \underline{\sigma}_1$$

En appliquant les conditions aux limites à la collocation comme dans la méthode directe donne l'équation :

$$D_\alpha \underline{\varphi} + D_\beta \underline{v} = \underline{f} \quad (2.81)$$

où D_α et D_β dénote les matrices diagonales avec $[D_\alpha]_{ii} = \alpha_i$ et $[D_\beta]_{ii} = \beta_i$. Substituant les approximations pour $\underline{\varphi}$ et \underline{v} donnés ci-dessus dans l'équation (2.81) donne ce qui suit :

à revoir

$$\left[D_\alpha \left\{ L + \left(M + \frac{1}{2} I \right) \right\} + D_\beta \left\{ M' - \frac{1}{2} I + N \right\} \right] \underline{\sigma}_1 \approx \underline{f} - D_\alpha \underline{\varphi}^i - D_\beta \underline{v}^i$$

ce qui est également l'analogue discret de l'équation (2.78). Dans la méthode indirecte d'élément de frontière, la première étape est trouver l'approximation à la fonction de densité de source σ_1 . Ceci peut être fait par la résolution du système linéaire suivant :

$$\left[D_\alpha \left\{ L + \left(M + \frac{1}{2} I \right) \right\} + D_\beta \left\{ M' - \frac{1}{2} I + N \right\} \right] \underline{\hat{\sigma}}_1 \approx \underline{f} - D_\alpha \underline{\varphi}^i - D_\beta \underline{v}^i \quad (2.82)$$

L'équation (2.82) est simplement une équation matrice-vecteur qui peut être immédiatement résolue par des méthodes d'élimination type de Gauss. Après avoir obtenu l'approximation de σ_1 , solution de (2.82), la solution approchée dans le domaine peut être trouver en utilisant l'équivalent discret de (2.75) :

$$\hat{\varphi}(p) = \varphi^i(p) + \sum_{j=1}^n (\{Le^j\}_{\Delta\Gamma_j} + \{Me^j\}_{\Delta\Gamma_j}) \hat{\sigma}_{1j}$$

II.2.12.4.2 Cas de la formulation directe :

L'application de la collocation à l'équation intégrale (2.79) la ramène au système linéaire suivant :

$$\left[M - \frac{1}{2} I + N \right] \underline{\varphi} \approx -\underline{\varphi}^i - \underline{v}^i + \left[L + M' + \frac{1}{2} I \right] \underline{v} \quad (2.83)$$

Les vecteurs $\underline{\varphi}$ et \underline{v} représentent les valeurs des fonctions φ et v de frontière aux points de collocation. La méthode implique de trouver la solution du système linéaire :

$$\left[M - \frac{1}{2} I + N \right] \underline{\hat{\varphi}} \approx -\underline{\varphi}^i - \underline{v}^i + \left[L + M' + \frac{1}{2} I \right] \underline{\hat{v}} \quad (2.84)$$

où on applique les conditions aux limites aux points de collocation ;

$$\alpha_i \hat{\varphi}_i + \beta_i \hat{v}_i = f_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{ou} \quad D_\alpha \hat{\varphi} + D_\beta \hat{v} = \underline{f} \quad (2.85)$$

avec $\alpha_i = \alpha(\mathbf{p}_i)$, $\beta_i = \beta(\mathbf{p}_i)$, $f_i = f(\mathbf{p}_i)$ et D_α et D_β dénote les matrices diagonales avec $[D_\alpha]_{ii} = \alpha_i$ et $[D_\beta]_{ii} = \beta_i$.

Lorsqu'il s'agit des conditions de Dirichlet pures ou de Neumann pures les équations peuvent être résolues par une méthode standard telle que la factorisation de LU ou l'élimination gaussienne. Cependant dans le cas général l'équation (2.85) peut être appliquée pour réarranger le système linéaire de l'équation (2.84) et l'équation matrice-vecteur qui résulte peut alors être résolue par des méthodes standards.

Une fois que les approximations de $\underline{\varphi}$ et \underline{v} sont obtenues, l'équation (2.80) peut être employée pour renvoyer une solution approchée à un point quelconque \underline{p} dans le domaine ;

$$\hat{\varphi}(\underline{p}) = \varphi'(\underline{p}) + \sum_{j=1}^n \{Me^j\}_{\Delta\Gamma_j}(\underline{p})\hat{v}_j - \sum_{j=1}^n \{Le^j\}_{\Delta\Gamma_j}(\underline{p})\hat{\varphi}_j \quad (2.86)$$

II.2.13 La méthode d'élément coque :

Les surfaces dans des problèmes extérieurs peuvent ne pas être celle d'un corps substantif tel qu'une sphère mais peuvent être des coques minces comme une surface ouverte. Souvent l'épaisseur de la coque est beaucoup moins que la taille d'un élément raisonnable. Par exemple un plaque carré métallique de dimensions $1\text{m} \times 1\text{m} \times 0.001\text{m}$ plongée dans un diélectrique tridimensionnel. Il pourrait exiger des panneaux avec des côtés de 0.01m pour décrire la solution sur les intrados et extrados de la surface (400 triangles), mais de tels éléments seraient beaucoup trop grands pour modéliser le bord du carré. Alternativement, si des éléments avec des côtés (arêtes) de la taille 0.001m sont employés autour du bord du carré puis un supplément de 8000 triangles serait exigé autour du bord du carré. Avoir fait que les triangles qui composent la coque(s) sont de tailles disproportionnées et en utilisant un tel maillage aurait probablement comme conséquence des erreurs numériques. Cependant si un maillage uniforme est employé alors 40000 triangles seraient nécessaires pour décrire les extrados et les intrados de la surface. La surface entière exigerait 48000 triangles. Pour modéliser de telles surfaces il vaut généralement mieux les supposer infiniment minces ; n'ayant aucune largeur du tout. La coque représente une discontinuité de potentiel ou de sa dérivée [16, 49, 64].

On s'intéresse à la solution de l'équation de Laplace

$$\Delta\varphi = 0$$

dans la région extérieure sur une surface ouverte Γ est adressé. On permet au champ d'être discontinu à la surface de la coque ; le potentiel prend généralement différentes valeurs sur les

extrados et les intrados de Γ $\varphi^+(\mathbf{q})$ et $\varphi^-(\mathbf{q})$ ($\mathbf{q} \in \Gamma$). Egalement la dérivée du potentiel suivant la normale \mathbf{n} (dans - et + de la direction de la surface) prend également en général différentes valeurs de chaque côté de Γ , dénoté $\mathbf{v}^+ = [(\partial\varphi^+)/(\partial\mathbf{n})]$ et $\mathbf{v}^- = [(\partial\varphi^-)/(\partial\mathbf{n})]$. Afin de décrire les conditions de coque, est également utile de présenter d'autres fonctions de coque qui représentent les moyennes et les différences du potentiel et de sa dérivée normale à travers Γ : $\delta(\mathbf{p}) = \varphi^+(\mathbf{p}) - \varphi^-(\mathbf{p})$, $\Phi(\mathbf{p}) = 1/2 (\varphi^+(\mathbf{p}) + \varphi^-(\mathbf{p}))$, $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \mathbf{v}^+(\mathbf{p}) - \mathbf{v}^-(\mathbf{p})$, $\mathbf{V}(\mathbf{p}) = 1/2 (\mathbf{v}^+(\mathbf{p}) + \mathbf{v}^-(\mathbf{p}))$. Les conditions de coque sont structurées comme suit

$$a(p)\delta(p) + b(p)v(p) = f(p) \quad (2.87)$$

et

$$A(p)\Phi(p) + B(p)V(p) = F(p) \quad (2.88)$$

pour $\mathbf{p} \in \Gamma$

Les éléments de coque nous permettent de résoudre l'équation de Laplace directement seule en représentant l'extérieur ouvert par un ensemble d'éléments. La méthode est basée sur une formulation d'équation intégrale de l'équation de Laplace extérieure à une coque mince. Seulement la surface ouverte elle-même doit être décrite comme ensemble d'élément avec le potentiel et de sa dérivée normale permis de prendre différentes valeurs sur l'un ou l'autre côté de chaque élément.

II.2.13.1 Formulation des équations intégrales :

Cependant dans les formulations qui suivent la possibilité d'un champ incident est également incluse. Le potentiel dans le domaine est lié aux conditions sur la coque par l'équation suivante :

$$\varphi(p) = \varphi^*(p) + \{M\delta\}_{\Gamma}(p) - \{Lv\}_{\Gamma}(p) \quad (p \in E) \quad (2.89)$$

Pour des points sur la coque on aura :

$$\Phi(p) = \varphi^*(p) + \{M\delta\}_{\Gamma}(p) - \{Lv\}_{\Gamma}(p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.90)$$

$$V(p) = \mathbf{v}^*(p) + \{N\delta\}_{\Gamma}(p) - \{M^t v\}_{\Gamma}(p) \quad (p \in \Gamma) \quad (2.91)$$

où φ^* est le champ incident et $\mathbf{V}^* = \partial\varphi^* / \partial\mathbf{n}_p$ ($\mathbf{p} \in \Gamma$)

Etant donné les conditions δ et v de coque peut être obtenu sur la coque par la solution (2.90) et (2.91). Une fois que des approximations à ces fonctions ont été obtenues, la valeur de ϕ pour n'importe quel point dans le domaine peut être obtenue à partir de l'équation (2.89).

II.2.13.2 Discrétisation :

Dans cette section la collocation est appliquée pour avoir la forme discrète des équations intégrales et une méthode pour la solution générale de telles méthodes est développée. La coque est divisée en n éléments : $\Delta\Gamma_1, \Delta\Gamma_2, \dots, \Delta\Gamma_N$. Les fonctions de coque $\delta(p), v(p), \Phi(p), V(p), a(p), b(p), f(p), A(p), B(p), F(p)$ sont approchées par une constante sur chaque élément. Par conséquent la fonction $\underline{\delta}(p)$ ($p \in \Gamma$) peut être représenté par le vecteur $\underline{\delta} = [\delta(p_1), \delta(p_2), \dots, \delta(p_N)]^T$, où p_1, p_2, \dots, p_N sont les points représentatifs sur les éléments respectifs panels $\Delta\Gamma_1, \Delta\Gamma_2, \dots, \Delta\Gamma_N$. Les autres fonctions de coque sont discrétisées d'une manière semblable, représentées par les vecteurs, $\underline{\Phi}, \underline{V}, \underline{a}, \underline{b}, \underline{f}, \underline{A}, \underline{B}, \underline{F}$.

Les conditions de coque discrètes (2.87), (2.88) peuvent être écrite sous la forme

$$D_a \underline{\delta} + D_b \underline{v} = \underline{f} \quad (2.92)$$

et

$$D_A \underline{\Phi} + D_B \underline{V} = \underline{F} \quad (2.93)$$

L'équivalent discret des équations intégrales (2.90) et (2.91) est comme suit :

$$\underline{\Phi} \approx \underline{\phi}^* + M \underline{\delta} - L \underline{v}$$

$$\underline{V} \approx \underline{v}^* + N \underline{\delta} - M' \underline{v}$$

Alternativement, nous pouvons écrire

$$\hat{\underline{\Phi}} \approx \underline{\phi}^* + M \hat{\underline{\delta}} - L \hat{\underline{v}} \quad (2.94)$$

$$\hat{\underline{V}} \approx \underline{v}^* + N \hat{\underline{\delta}} - M' \hat{\underline{v}} \quad (2.95)$$

II.2.13.3 Le système linéaire :

Les équations (2.94) et (2.95) peuvent être employées pour développer le système suivant :

$$\begin{bmatrix} -M & I \\ N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta} \\ \hat{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L & 0 \\ M' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{V} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi^* \\ V^* \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Les conditions de coque peuvent être écrites sous la forme

$$\begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{A} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{\delta} & \underline{\Phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{b} & \underline{B} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{\Phi} & \underline{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f} & \underline{E} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

II.3 La méthode des singularités sous forme variationnelle :

Supposant toujours la surface Γ fermée, et régulière.

Considérons par exemple l'équation intégrale (1.28), dont l'inconnue est $\sigma(\mathbf{M})$. Nous pouvons choisir une fonction test $\sigma'(\mathbf{M})$ sur Γ , multiplier (1.28) par $\sigma'(\mathbf{M})$, et réintégrer en \mathbf{M} sur Γ ; Apparaîtront alors, en particulier, une intégrale de $\sigma(\mathbf{M}) \sigma'(\mathbf{M})$ en \mathbf{M} sur Γ et une intégrale de $\sigma(\mathbf{P}) \sigma'(\mathbf{M})$ en (\mathbf{M}, \mathbf{P}) sur $\Gamma \times \Gamma$. Nous aurons ainsi obtenu une formulation variationnelle de notre équation intégrale (1.28).

Au lieu d'utiliser une méthode de collocation, i.e. d'imposer l'équation intégrale en des points discrets, nous pourrions alors discrétiser tout à la fois σ et σ' à l'aide d'une interpolation éléments finis sur Γ , bénéficiant de la sorte de toutes les techniques d'éléments finis. En particulier, nous disposons là d'une procédure systématique permettant d'augmenter (sous réserve qu'on sache faire les intégrations) l'ordre de précision de la méthode [2, 17, 22].

Parmi les multiples variantes d'équations intégrales possibles [en particulier (1.28), mais il y en a d'autres...], nous en retiendrons pour le moment (1.28), qui est l'équation de « Fredholm » de première espèce et se prête bien à une formulation variationnelle.

Traisons tout d'abord un problème de Dirichlet extérieur en potentiel de simple couche

Nous cherchons donc $q(\mathbf{M})$ pour $\mathbf{M} \in \Gamma$ tel que

$$\forall \mathbf{M} \in \Gamma, \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{P}) G(\mathbf{M}, \mathbf{P}) d\Gamma_P = f(\mathbf{M})$$

où f est la donnée de Dirichlet. La formulation variationnelle s'écrit :

q t.q.,

$$\forall q' \quad a(\sigma, \sigma') = \eta(q'), \quad \text{où} \quad \eta(\sigma) = \int_{\Gamma} f(\mathbf{M}) \sigma'(\mathbf{M}) d\Gamma_M$$

et

$$a(\sigma, \sigma') = \iint_{\Gamma \times \Gamma} G(\mathbf{M}, \mathbf{P}) \sigma(\mathbf{P}) \sigma'(\mathbf{M}) d\Gamma_P d\Gamma_M \quad (2.98)$$

La fonction de Green $G(M, P)$ de l'équation de Laplace étant symétrique en M et P , on constate que la forme bilinéaire $a(\sigma, \sigma')$ est symétrique, ce qui conduira à une matrice symétrique pour le problème discret [17]. On reviendra sur ce sujet dans le chapitre IV.

II.4 Application au calcul des charges de surface :

Après avoir développé la méthode numérique dans sa globalité, nous passons à son application dans le calcul du champ de réaction engendré par la présence des matériaux ferromagnétiques modifiant la valeur d'un champ statique appliqué. Quand ces matériaux sont massifs, nous pouvons décrire la perturbation en les remplaçant par les charges magnétiques, situés sur leurs surfaces dans la mesure où on assume que la perméabilité μ est constante. Mais, si on voudrait appliquer cette méthode aux coques minces, nous constaterions que les charges q_1 et q_2 qui sont face à face, et par conséquent très près l'une de l'autre, sont presque égales mais de signe opposé. Leur action serait équivalente à celle d'une seule couche de densité $q_1 + q_2$ [39]. Nous traitons dans ce qui suit les deux cas de figure à savoir, quand les matériaux sont massifs ou en coque mince.

II.4.1 Cas d'un matériau massif ou en coque mince :

Dans le chapitre précédent nous avons développé la formulation en charges de surface qui régit notre modèle dans les deux configurations du matériau massif ou en coque mince, passons maintenant à sa discrétisation afin d'aboutir au calcul du champ partout. Selon (1.33), nous avons :

$$2\pi \frac{(\mu_1 + \mu_2)}{(\mu_1 - \mu_2)} q(x) - \int_{\Gamma} q(y) \frac{(x-y)}{|x-y|^3} n(x) d\Gamma y = n.H^s$$

Le terme intégral dans cette équation est bien l'équivalent de l'opérateur discret M^t de l'équation (2.20), ceci nous ramène à la résolution du système linéaire suivant où l'inconnu est les charges magnétiques :

$$\sum_{j=1}^n \left\{ (M^t + 2\pi \frac{(\mu_1 + \mu_0)}{(\mu_1 - \mu_0)} I) e \right\}_{\Delta\Gamma_j} (p_i) q_j = n_j.H_{0j} \quad (2.99)$$

avec l'indice zéro indique le milieu extérieur

Le potentiel en un point p quelconque est :

$$\varphi_j(p) = \sum_{j=1}^n \{Le\}_{\Delta\Gamma_j}(p_i)q_j \quad (2.100)$$

II.4.2 Cas d'un matériau en coque mince :

Vu certaines difficultés de modéliser des dispositifs en coques minces, nous avons développé dans le paragraphe § II.2.13 une méthode que nous avons appelé « la méthode d'élément coque », sauf qu'ici la difficulté réside dans la manière d'imposer les conditions aux limites. Donc il faut résoudre le système linéaire d'équation (2.96) mené des conditions (2.97). On reviendra sur ce sujet plus loin dans le volet programmation et validation.

II.5 Conclusion :

Les méthodes d'équation intégrale telles que la méthode d'élément de frontière deviennent de plus en plus populaires comme méthodes pour la solution numérique des équations partielles elliptiques linéaires telles que l'équation de Laplace. L'application de la collocation (discrète) à la formulation d'équation intégrale exige le calcul des opérateurs intégro-différentiels discrets. Donc nous avons développé la méthode (BEM) dans sa globalité afin de pouvoir passer directement au calcul numérique à l'aide des sous-programmes en Fortran pour évaluer les opérateurs intégro-différentiels discrets de Laplace qui composent notre équation intégrale, résultant par ailleurs de l'utilisation des éléments constants et d'arriver en fin à la validation de la méthode au calcul du champ magnétique de le cas de l'aimantation des navires quant on le considère massif ou en coques minces. nous utiliserons le modèle en charges de surface et la méthode d'élément coque.

Le traitement numérique de la méthode peut être résumé par les étapes suivantes :

- Discrétisation de la frontière.
- Calcul des opérateurs (réguliers et singuliers).
- Formation du système d'équations linéaires.
- Arrangement du système matriciel.
- Résolution des équations.

CHAPITRE III

Chapitre III

Problèmes discrets formulés en potentiel réduit et traitement Numérique par les méthodes mixtes sous forme variationnelle

III.1 Introduction :

On entame ce chapitre par une étude de la formulation variationnelle d'un problème mixte qui découle de la formulation en potentiel scalaire réduit établie précédemment dans l'équation (1.13). Nous y expliquons l'intérêt de faire appel à une approche d'intégrale de frontière, qui permet de considérer le champ magnétique de réaction uniquement dans la région magnétique, couplé toutefois, par une condition de raccord sur la frontière de cette région, avec un potentiel scalaire. Le couple ainsi formé permet, conformément à la méthode d'intégrale de frontière, de reconstituer le champ magnétique de réaction dans l'espace entier. Nous allons aborder tout d'abord la formulation variationnelle puis par la suite, l'étape de discrétisation dont nous présentons les différentes discrétisation possibles.

III.2 Formulation variationnelle :

En général, les méthodes numériques d'approximation des champs sont plus faciles à analyser dans un cadre variationnel.

En effet, vu l'ordre élevé des équations aux dérivées partielles décrivant les différentes formulations, nous appliquons la formulation variationnelle à ces équations, ce qui permet de réduire l'ordre de ces équations, en passant à une forme dite « faible ». Sous l'aspect mathématique et sans approfondir les choses, nous définissons la forme variationnelle comme suit [7, 22]. Soit V un espace de Hilbert et V' un espace dual de V et soit $a(., .)$ une forme bilinéaire continue sur $V \times V$. Nous écrivons la formulation variationnelle sous la forme suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad ; \quad \forall v \in V; \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire d'un élément de l'espace vectoriel V et d'un élément de son dual V' .

v est la fonction test et $f \in V'$. La méthode générale pour approcher la solution u du problème est dite méthode de Galerkin.

Pour toute formulation variationnelle, nous utilisons la méthode de Galerkin dont les fonctions test sont identiques aux fonctions de forme. Les fonctions test seront définies respectivement dans l'espace des fonctions test vectorielles ou scalaires. Ces fonctions test remplissent les mêmes propriétés mathématiques que les fonctions de forme d'interpolation.

Dans ce qui va suivre, nous allons développer sous forme variationnelle la formulations en potentiel scalaire réduit établies au chapitre 1.

III.3 Formulation en potentiel scalaire réduit :

La formulation variationnelle donnant la distribution du champ obtenu à partir de l'équation (1.13), une intégration sur l'espace entier E donnerait :

$$\int_E [\text{div} \mu(H_0 - \text{grad} \varphi)] \varphi \, dE = 0 \quad \forall \varphi \in W \tag{3.2}$$

W est l'espace fonctionnel suivant :

$$W = \left\{ \varphi \in L^2, \text{grad} \varphi \in L^2(\mathbb{R}^3) \right\}$$

C'est un espace avec poids qui suppose que le potentiel tend vers zéro à l'infini [22].

Nous intégrons (3.2) par parties et séparons chaque intégrale en E en intégrale sur Ω et l'autre sur $E - \Omega$, sachant que $\Delta \varphi = 0$ dans $E - \Omega$. En appliquant l'identité vectorielle de la divergence ainsi que la première identité de Green pour les fonctions scalaires (qui est l'intégration par parties), (3.2) se transforme en suivant les étapes ci-dessous :

$$\int_E \text{div}[\mu(H_0 - \text{grad} \varphi)] \varphi \, dE - \int_E (\mu(H_0 - \text{grad} \varphi)) \text{grad} \varphi \, dE = 0 \tag{3.3}$$

en séparent les intégrales sur E dans (3.3) on aura pour le premier terme :

$$\begin{aligned} \int_E \operatorname{div}[(\mu(H_0 - \operatorname{grad}\varphi))\varphi] dE &= \int_{E-\Omega} \operatorname{div}[(\mu_0(H_0 - \operatorname{grad}\varphi))\varphi] d(E-\Omega) + \int_{\Omega} \operatorname{div}[(\mu(H_0 - \operatorname{grad}\varphi))\varphi] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mu H_0 \operatorname{grad}\varphi d\Omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

le deuxième terme de (3.3) se développe comme suit :

$$\begin{aligned} \int_E \mu H_0 \operatorname{grad}\varphi dE &= \int_{E-\Omega} \mu H_0 \operatorname{grad}\varphi d(E-\Omega) + \int_{\Omega} \mu H_0 \operatorname{grad}\varphi d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_1} \mu_0 H_0 \varphi \cdot n_1 d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} \mu_0 H_0 \varphi \cdot n_2 d\Gamma_2 = \int_{\Omega} \mu_0 H_0 \operatorname{grad}\varphi d\Omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \int_E \mu \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\varphi dE &= \int_{E-\Omega} \mu \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\varphi d(E-\Omega) + \int_{\Omega} \mu \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\varphi d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mu \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\varphi d\Omega + \int_{\Gamma_1} \mu_0 \varphi \cdot \operatorname{grad}\varphi n_1 d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} \mu_0 \varphi \cdot \operatorname{grad}\varphi n_2 d\Gamma_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

En regroupant à nouveau les termes issus des équations (3.4), (3.5) et (3.6) nous obtenons finalement :

$$\int_{\Omega} (\mu - \mu_0) H_0 \cdot \operatorname{grad}\varphi d\Omega + \int_{\Omega} \mu \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\varphi d\Omega + \int_{\Gamma_1} \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} \varphi d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} \varphi d\Gamma_2 = 0 \quad (3.7)$$

Les intégrales de volume font intervenir les champs à l'intérieur de Ω . Quant aux champs à l'extérieur de Ω , sont représentés par les intégrales de surface.

Rappelons que dans le cas où le domaine Ω est une coque mince dont l'épaisseur e est très petit, nous pouvons supposer que H_0 et $\operatorname{grad}\varphi$ ont une très petite variation dans Ω le long de la normale à Γ , ce qui laisse transformer les deux premières intégrales de (3.7) en intégrale de surface. Nous supposons également que, pour deux points face à face sur Γ_1 et Γ_2 , les deux normales n_1 et n_2 sont identiques. Les deux dernières intégrales de (3.7) peuvent être remplacées ainsi par une seule, dans laquelle apparaît le saut $[\partial\varphi/\partial n]$ dans l'air de la composante normale du champ de réaction en allant de la face intérieure de Ω à sa face extérieure [39, 40, 42]. L'équation (3.7) devient alors :

$$\int_{\Gamma} e(\mu - \mu_0) H_0 \cdot \operatorname{grad}\varphi d\Gamma + \int_{\Gamma} e \mu \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\varphi d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} \varphi d\Gamma = 0 \quad (3.8)$$

Toutes les intégrales dans (3.8) sont des intégrales de surface sur Γ

III.4 Modélisation :

Dans le but de résoudre (3.8), on procède en deux étapes, la première consiste à l'approximation de $\mathbf{grad}\varphi$ par une valeur moyenne constante par triangle, en prenant en compte l'effet du champ de réaction qui est très petit devant \mathbf{H}_0 [39, 47, 63].

$$\varphi = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \lambda_i \quad (3.9)$$

avec φ_i le potentiel au sommet i et λ_i les coordonnées barycentriques. L'expression de $\mathbf{grad}\varphi$ en terme de φ_i est donc évidente, il est constant par triangle. Dans la deuxième étape, il reste pour que le saut $[\partial\varphi/\partial n]$ soit exprimé en fonction du φ_i . Afin de faire ceci, nous présentons encore les charges q_τ constantes sur chaque triangle τ de Γ introduites déjà dans les chapitres précédents.

$$\varphi(x) = \int_{\Gamma} \frac{q(y)}{|x-y|} d\Gamma y, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{grad}\varphi(x) = \int_{\Gamma} q(y) \frac{x-y}{|x-y|^3} d\Gamma y, \quad (3.11)$$

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right] = -4\pi q(x). \quad (3.12)$$

mais maintenant, ils seront seulement des quantités intermédiaires, c'est à dire., ils sont calculé (3.10) en fonction du φ_i et puis remplacées en (3.12). (3.8) est après transformée en équation où les φ_i sont les quantités inconnues, appelée souvent par la méthode mixte.

III.5 Calcul du premier et le deuxième terme par une approximation en éléments finis :

Pour un élément triangulaire, les fonctions d'interpolation nodales sont au nombre de trois :

$$\{\lambda\} = \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle^T \quad (3.13)$$

Donc φ , peut être approché sur l'élément au moyen d'une interpolation nodale :

$$\varphi = \lambda_i \varphi_i + \lambda_j \varphi_j + \lambda_k \varphi_k = \langle \lambda \rangle \{a\}^e,$$

avec $\{a\}^e = \langle \varphi_i, \varphi_j, \varphi_k \rangle^T$

$\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k$ Sont les valeurs inconnues du potentiel aux nœuds.

En utilisant la méthode de Galerkin, l'intégrale du résidu pondéré de l'équation différentielle « $\int_{\Gamma} e \mu \text{grad } \varphi \text{ grad } \varphi' d\Gamma$ » s'écrit pour un élément :

$$\int_{\Gamma} e \mu \text{grad } \varphi \text{ grad } \varphi' d\Gamma = \int_{s^e} \{\lambda\} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu e \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu e \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \quad (3.14)$$

remplaçant maintenant φ par son expression approchée, on obtient :

$$\left[\int_{s^e} \left[\frac{\partial \{\lambda\}}{\partial x} \mu \frac{\partial \langle \lambda \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \{\lambda\}}{\partial y} \mu \frac{\partial \langle \lambda \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \{\lambda\}}{\partial z} \mu \frac{\partial \langle \lambda \rangle}{\partial z} \right] e dx dy dz \right] \{a\}^e \quad (3.15)$$

Que nous pouvons réécrire sous la forme

$$[M]^e \cdot \{a\}^e$$

Avec

$$[M]^e = [M]_{xx}^e + [M]_{yy}^e + [M]_{zz}^e \quad (3.16)$$

On procède de la même manière pour le calcul du premier terme de (3.8) qui autre que le second membre de l'équation différentielle.

$$\int_{\Gamma} e(\mu - \mu_0) H_0 \text{grad } \varphi d\Gamma = \int_{s^e} e(\mu - \mu_0) H_0 \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (3.17)$$

III.6 Calcul du saut par une approximation en éléments intégrale de frontière :

III.6.1 Par la méthode de collocation :

En utilisant la méthode de collocation très développée dans le chapitre2, l'équation (3.10) s'écrit sous forme discrète selon l'équation (2.100) comme suit:

$$\varphi_j(p) = \sum_{j=1}^n \{Le\}_{\Delta\Gamma_j}(p_i) q_j \quad (3.18)$$

En posant :

$$C = \sum_{j=1}^n \{Le\}_{\Delta\Gamma_j}(p_i)$$

et désignant par $\bar{\varphi}$ et \bar{q} les vecteurs :

$$\bar{\varphi} = (\varphi_j) \quad ; \quad \bar{q} = (q_j)$$

Nous avons alors :

$$\bar{\varphi} = C\bar{q}$$

$$\bar{q} = C^{-1}\bar{\varphi}$$

Et selon (3.12) nous aurons enfin :

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] = -4\pi C^{-1} \bar{\varphi} \cdot \quad (3.19)$$

III.6.2 Par la méthode de Galerkin :

La méthode de discrétisation présentée ici est basée sur une approche détaillée dans Bossavit [2].

Rappelons que l'opérateur \mathbf{P} aussi connu sous le nom impédance, est tel que :

$$\forall \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \mathbf{P}(\varphi) = n.grad\varphi, \quad (3.20)$$

Le potentiel de réaction φ étant harmonique dans \mathbf{E} , il peut être exprimé sous la forme d'un potentiel de simple couche sur Γ [37]. Considérons une distribution de charge superficielle fictive q suffisamment régulière sur Γ et écrivons :

$$\varphi(x) = \int_{\Gamma} \frac{q(y)}{|x-y|} d\Gamma y \quad \forall x \in E \quad (3.21)$$

$$n.grad\varphi(x) = -2\pi q(x) + \int_{\Gamma} q(y) \frac{\partial}{\partial n_{x_0}} \left(\frac{1}{|x_0-y|} \right) d\Gamma y \quad \forall x \in E \mapsto x_0 \in \Gamma \quad (3.22)$$

La densité q étant supposée régulière, le potentiel de simple couche φ est continu à la traversée de Γ

La discrétisation des équations (3.21) et (3.22) par une méthode de Galerkin permet d'établir une relation liant le potentiel scalaire à sa dérivée normale extérieur. Commençons par faire conformément aux notations du chapitre 2 les considérations suivantes.

- L'approximation de la trace sur Γ du potentiel φ , déjà suggérée par la relation (3.9) est :

$$\varphi_h = \sum_{i=1}^{ns} \varphi_i \lambda_i$$

- L'approximation de la densité q se fait dans l'espace de dimension finie formé des fonctions constantes par triangle :

$$q_h = \sum_{i=1}^{nbtri} q_i \eta_i \quad q_h = \sum_{i=1}^{nbtri} q_i \eta_i$$

où, q_i est la densité que prend q_h sur un triangle frontalier numéroté i , et η_i est la fonction de forme définie :

$$\eta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est dans le triangle de numéro } i; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On procède ainsi à une approximation conforme [2] de l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Avec ces approximations, il suit de (3.21),

$$\varphi_h(x) = \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-y|} \sum_{i=1}^{nbtri} q_j \eta_i d\Gamma y$$

La définition de la fonction η_j permet d'écrire

$$\varphi_h(x) = \sum_{i=1}^{nbtri} q_i \int_{T_i} \frac{1}{|x-y|} d\Gamma y,$$

où T_i représente le triangle du numéro i .

Dans cette dernière relation, utilisons l'écriture du potentiel φ_h et multiplions par une fonction - test η_j , pour obtenir :

$$\int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{ns} \varphi_i \lambda_i \eta_j d\Gamma_x = \sum_{i=1}^{nbtri} q_i \int_{\Gamma T_i} \frac{1}{|x-y|} \eta_j d\Gamma_y d\Gamma_x.$$

Clairement par la définition de η_j , les deux membres de cette relation sont nuls dès que x n'est pas sur le triangle T_j . En effet $\eta_j(x) = 0$ dans ce cas. Notons aussi que la deuxième variable d'intégration y parcourt le triangle T_i . En tenant alors compte que x est un élément de T_j , il suit de cette égalité :

$$\int_{T_i} \sum_{i=1}^{ns} \varphi_i \lambda_i d\Gamma_x = \sum_{i=1}^{nbtri} q_i \int_{T_j} \int_{T_i} \frac{1}{|x-y|} d\Gamma_y d\Gamma_x.$$

Ainsi, nous écrivons sous forme matricielle :

$$\sum_{i=1}^{ns} b_{ji} \varphi_i = \sum_{i=1}^{nbtri} Q_{1ji} q_i$$

i.e.,

$$B \varphi_h = Q_1 q_h \quad (3.23)$$

où

- B est une matrice creuse de dimension $ns \times nbtri$ dont les termes sont

$$B_{ij} = \begin{cases} \int_{T_i} \lambda_j dx = \frac{|T_i|}{3} & \text{si } j \text{ est l'un des trois sommets du triangle } T_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec $|T_i|$ est la surface du triangle T_i

La ligne correspondante au triangle du numéro i a trois éléments non nuls : éléments correspondant aux sommets du triangle T_i tous égaux à $|T_i|/3$.

- Q_1 est une symétrique pleine, régulière et de dimension $nbtri \times nbtri$ dont les termes sont donnés par :

$$Q_{ij} = \int_{T_i} \int_{T_j} \frac{1}{|x-y|} d\Gamma_x d\Gamma_y$$

La détermination de ces termes se fait par un calcul analytique de l'intégrale

$$\int_{T_i} \frac{1}{|x-y|} d\Gamma_y$$

et à l'aide de la méthode de Gauss pour calculer la seconde intégrale.

Considérons à présent la relation (3.22). En tenant compte de l'écriture du potentiel φ_h et de la densité q_h , il suit

$$P(\varphi_h) = -2\pi \sum_{i=1}^{nbtri} q_i \eta_i + \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{nbtri} q_i \eta_i \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\Gamma_y$$

et donc

$$P(\varphi_h) = -2\pi \sum_{i=1}^{nbtri} q_i \eta_i + \sum_{i=1}^{nbtri} q_i \int_{T_i} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\Gamma_y$$

Nous avons,

$$\int_{\Gamma} P(\varphi_h) \lambda_j d\Gamma_x = -2\pi \sum_{i=1}^{nbtri} q_i \int_{\Gamma} \eta_i \lambda_j + \sum_{i=1}^{nbtri} q_i \int_{\Gamma} \int_{T_i} \lambda_j \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\Gamma_y d\Gamma_x$$

i.e.,

$$\sum_{i=1}^{ns} \varphi_i \int_{\Gamma} P(\lambda_i) \lambda_j d\Gamma_x = -2\pi \sum_{i=1}^{nbtri} q_i \int_{T_i} \lambda_j d\Gamma_x + \sum_{i=1}^{nbtri} q_i \int_{\Gamma} \int_{T_i} \lambda_j \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\Gamma_y d\Gamma_x$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{ns} \varphi_i \int_{\Gamma} P(\lambda_i) \lambda_j d\Gamma_x = \sum_{i=1}^{nbtri} q_i \left(-2\pi \int_{T_i} \lambda_j d\Gamma_x + \int_{\Gamma} \int_{T_i} \lambda_j \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\Gamma_y d\Gamma_x \right)$$

Ceci permet d'écrire sous forme matricielle :

$$\sum_{i=1}^{ns} \varphi_i \int_{\Gamma} P(\lambda_i) \lambda_j d\Gamma_x = \sum_{i=1}^{nbtri} Q_{2ji} q_i$$

i.e.,

$$P\varphi_h = Q_2 q_h \quad (3.24)$$

- \mathbf{P} correspond à la matrice de dimension $\mathbf{ns} \times \mathbf{ns}$ définie par les termes

$$P_{ij} = \int_{\Gamma} P(\lambda_i) \lambda_j d\Gamma_x$$

- \mathbf{Q}_2 est une matrice de dimension $\mathbf{ns} \times \mathbf{nbtri}$ dont les termes sont données par la formule :

$$Q_{2ij} = -2\pi \int_{T_j} \lambda_i d\Gamma_x + \int_{\Gamma} \int_{T_j} \lambda_i \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\Gamma_y d\Gamma_x$$

i.e.,

$$Q_{2ij} = -2\pi \int_{T_j} \lambda_i d\Gamma_x + \int_{S(i)} \int_{T_j} \lambda_i \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\Gamma_y d\Gamma_x$$

où $\mathbf{S(i)}$ est l'union des triangles dont \mathbf{i} est l'un des sommets, tout en notant qu'à nouveau,

$$\int_{T_j} \lambda_i d\Gamma_x = \begin{cases} \frac{|T_j|}{3} & \text{si } i \text{ est l'un des trois sommets du triangle } T_j, \\ 0 & \text{sin on.} \end{cases}$$

La matrice \mathbf{P} correspond à la discrétisation de l'opérateur P s'obtient en éliminant la densité de charge q_h des équations (3.23) et (3.24). En effet, nous avons le système :

$$B\varphi_h = Q_1 q_h$$

$$P\varphi_h = Q_2 q_h$$

qui permet d'écrire compte tenu du fait que Q_1 est régulière,

$$P\varphi_h = Q_2 Q_1^{-1} B\varphi_h$$

$P = Q_2 Q_1^{-1} B$ devrait donc être « la matrice de l'impédance » (aussi appelée matrice de

rigidité extérieure) désirée mais elle n'est pas symétrique alors que l'opérateur l'est. En effet on obtient une bonne approximation [2, 45, 69] en prenant la partie symétrique :

$$\frac{P + P^t}{2}$$

En multipliant par μ_0 , cette matrice est symétrique de $ns \times ns$, nous formons la matrice aussi notée \mathbf{P} , reste à l'introduire dans le système global où nous aurons un seul inconnu sur tout les nœuds du maillage du milieu magnétique, qui est en l'occurrence le potentiel magnétique scalaire φ_i . Enfin, nous pouvons conclure que ce calcul n'est pas trivial pour autant et demande des précautions, surtout pour les termes \mathbf{Q}_{ij} où l'intégrale interne se calcul analytiquement, et la seconde doit s'approcher par une formule de quadrature d'autant plus sophistiquée que les triangles i et j sont proches [2, 17, 22, 38].

III.7 Conclusion :

La modélisation du milieu extérieur au dispositif est essentielle pour la prise en compte de nombreux phénomènes électromagnétiques demeure une préoccupation de tout les chercheur travaillant dans ce domaine. Bien que la méthode étudié dans ce chapitre répond à cette exigence mais elle n'est pas unique de son genre, il existe bien d'autres méthodes qui sont énumérés par Brunotte [31, 47, 48], et le sujet reste ouvert vis à vis de ces méthodes.

CHAPITRE IV

Chapitre IV

Mise en œuvre et résultats numériques – Application

IV.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous allons expliciter la mise en œuvre numérique de notre formulation. Nous rappelons que celle-ci est faite à base de la méthode des éléments frontières (BEM) en trois dimensions, abordée aux chapitres précédents, afin d'effectuer un calcul numérique de la perturbation du champ magnétostatique par la présence de dispositifs perméables tels les ferromagnétiques, en tout point intérieur est extérieur du milieu homogène Ω de \mathfrak{R}^3 considéré. Pour répondre au mieux à cette exigence nous avons élaboré un code qui est composé de quatre programmes principaux. Une partie de ce chapitre nous la consacrons pour la description algorithmique des différents programmes réalisés suivant la formulation qu'ils traitent ainsi que les différents blocs qui les composent et leurs validations du point de vue théorique, une autre partie nous la consacrons pour la discussion et l'interprétation des résultats obtenus pour chaque test effectué. Enfin, nous traitons une application dans le cadre du magnétisme du navire, où nous faisons un calcul de la perturbation du champ engendré par un modèle réduit d'un navire, plongé dans un champ magnétique uniforme.

Les deux premiers programmes appelés respectivement « **DBEM-3D** » et « **IBEM-3D** » traitant du fondement principal de la BEM pour les problèmes de Dirichlet intérieurs pour les formulations en potentiel de simple couche par une méthode directe pour le premier programme et la méthode indirecte pour le deuxième programme, élaborés dans le but de comparer l'exactitude de la solution obtenue par ces deux méthodes, en particulier la méthode indirecte qui utilise la densité de charges de surface comme inconnue principale, ces deux programmes nous permettent enfin à élaborer les deux derniers programmes qui traitent les deux formulations utilisées pour le calcul de la perturbation d'un champ magnétostatique par la présence d'un dispositif perméable quand celui-ci est massif ou en coques minces.

En effet, ces deux derniers programmes à savoir le troisième et le quatrième appelés respectivement « **IBEMCM-3D** » et « **IBEMCC-3D** » traitant d'une part le calcul de la perturbation par la formulation en charge de surface de simple couche étudiée au chapitre II quand le dispositif est massif, objectif du troisième programme et traitant d'autre part le calcul

de la perturbation par la formulation mixte en potentiel et charge de surface de simple couche ou cette dernière sera une inconnue intermédiaire, étudiée au chapitre III quand le dispositif est en coque mince, c'est donc l'objectif du quatrième programme.

IV.2 Description générale des programmes de calcul de champ perturbé :

Tout les programmes qui traitent notre formulation de calcul de champ perturbé, comportent les étapes principales suivantes :

- Description de la géométrie et des caractéristiques physiques.
- Mise en œuvre de la méthode adoptée pour la résolution.
- Visualisation et interprétation des résultats de la simulation.

IV.2.1 Fonction du module d'entrée :

La première étape consiste à préparer les données qui seront utilisées dans la deuxième étape. Ces données concernent la géométrie, la discrétisation et le comportement physique du domaine ou de sa frontière. Cette première étape doit réaliser les trois fonctions suivantes :

- Description de la géométrie de l'objet.
- Discrétisation du domaine et/ou de sa frontière.
- Description des caractéristiques physiques (caractéristiques du milieu, sources, conditions aux limites, conditions initiales, etc.).

IV.2.2 Fonction du module de calcul :

La deuxième étape procède à la mise en œuvre de la méthode utilisée, c'est à dire la résolution du ou des systèmes d'équation linéaires ou non linéaires qui proviennent de la formulation de la méthode. Dans cette étape, on reçoit en entrée la discrétisation, les caractéristiques physiques et les conditions aux limites. En sortie, on aura les valeurs des grandeurs recherchées en chaque nœud de la discrétisation. La résolution des systèmes d'équations comprend les étapes suivantes :

- Construction des matrices et vecteurs du système matriciel.
- Prise en compte des conditions aux limites.
- Résolution du système matriciel.

La résolution des systèmes linéaires est réalisée de plusieurs manières possibles :

- Méthodes directes (Gauss, Choleski, etc.).
- Méthodes itératives (Gauss-Seidel, Newton-Raphson, Gradient ou Bi-gradient conjugué, etc.).

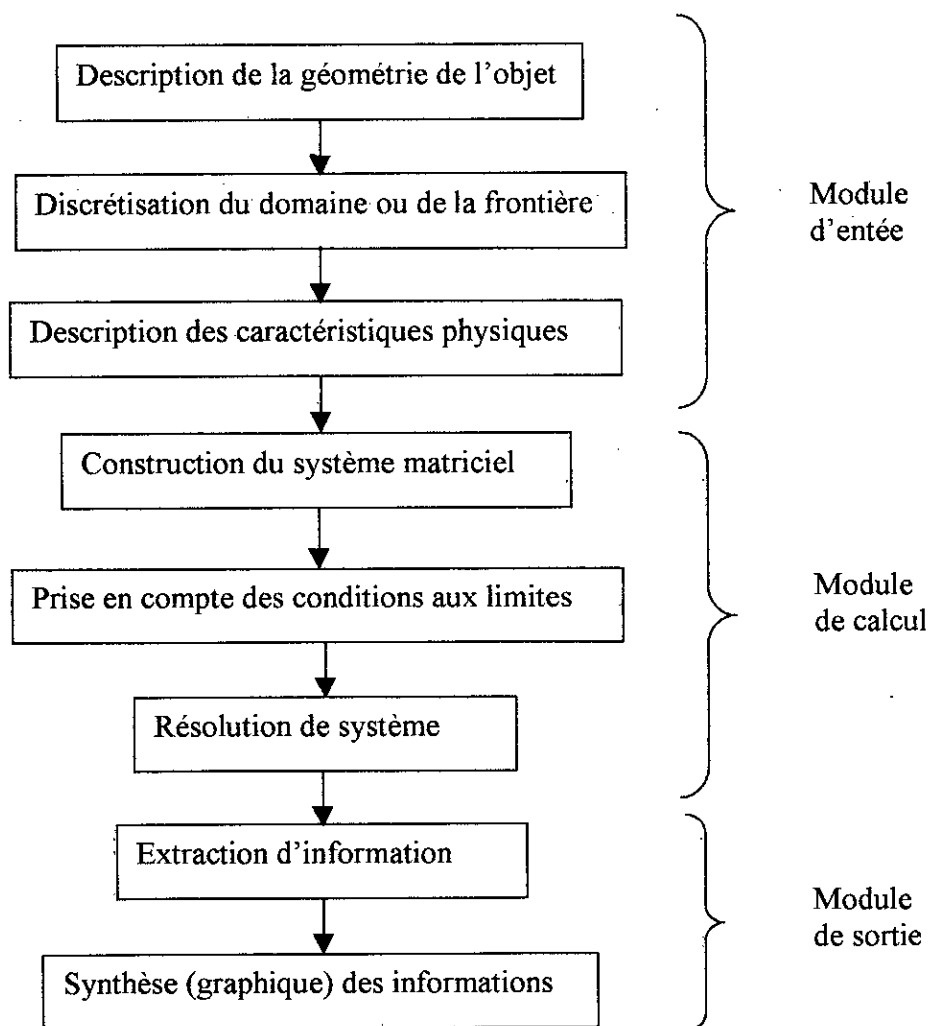
IV.2.3 Fonction du module de sortie :

Le rôle de la troisième étape est double :

- Extraction d'informations significatives. Ces informations peuvent être reliées à des grandeurs locales (induction magnétique, champ magnétique, etc.) ou globales (flux, forces, couples, etc.).
- Présentation synthétique des informations numériques sous forme graphique pour faciliter leur interprétation (lignes équipotentielles, lignes de champ, etc.).

IV.2.4 Organigramme principal :

En regroupant toutes les étapes pour traiter le problème, on peut donner l'organigramme principal suivant :

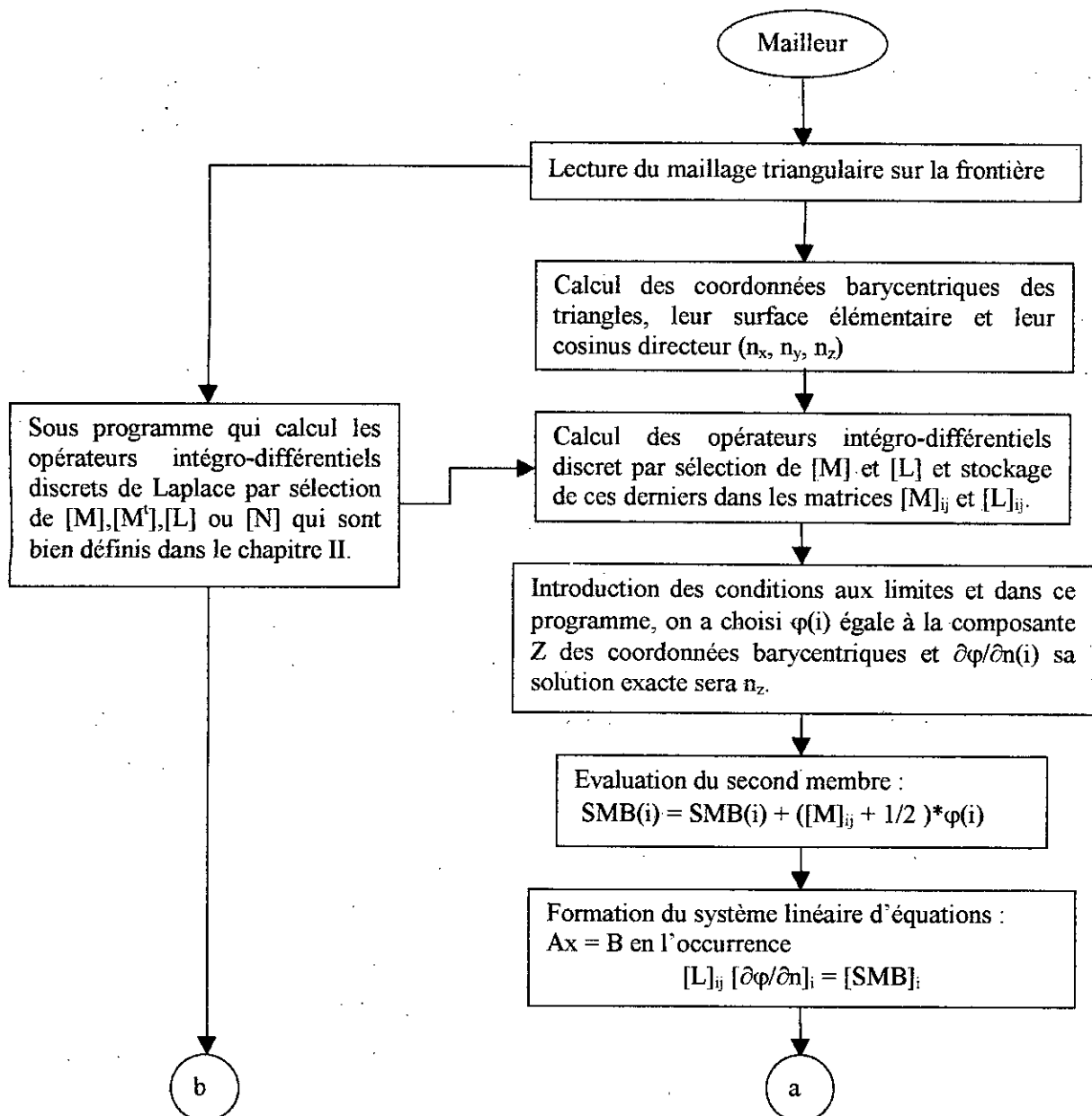


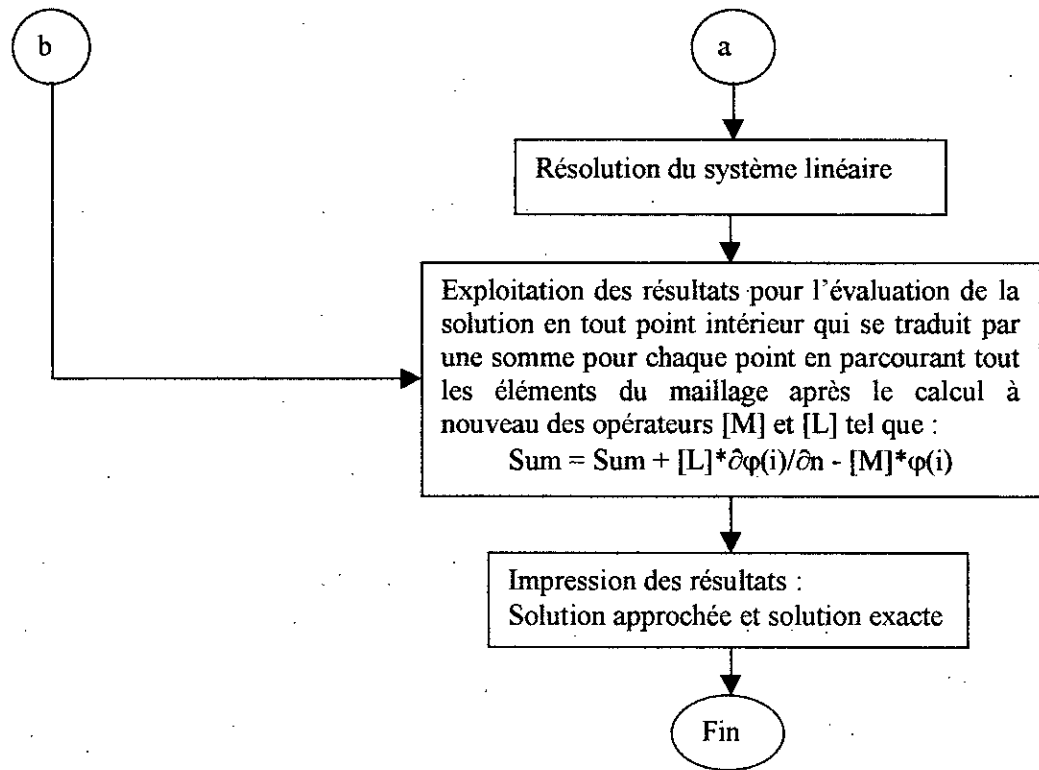
Organigramme 4.1 : Description générale de l'organigramme principal de la méthode de calcul du champ perturbé.

Dans la suite nous verrons chaque bloc en détails en fonction de la spécificité de chacun de nos programmes élaborés.

IV.3 Description générale du programme « DBEM-3D » :

Le programme « DBEM-3D » permet le traitement des problèmes de potentiel (équation de Laplace) dans un milieu homogène Ω de \mathcal{R}^3 par une méthode directe dont la formule sous sa forme discrète est donnée au chapitre II par l'équation (2.8). Cependant, nous pensons qu'il est judicieux de présenter l'algorithme principal dont il s'agit des étapes nécessaires pour trouver les valeurs du potentiel et de sa dérivée au niveau de tous les nœuds désignés par les coordonnées barycentriques de chaque triangle de la frontière, puis les valeurs pour n'importe quel point intérieur du milieu étudié.

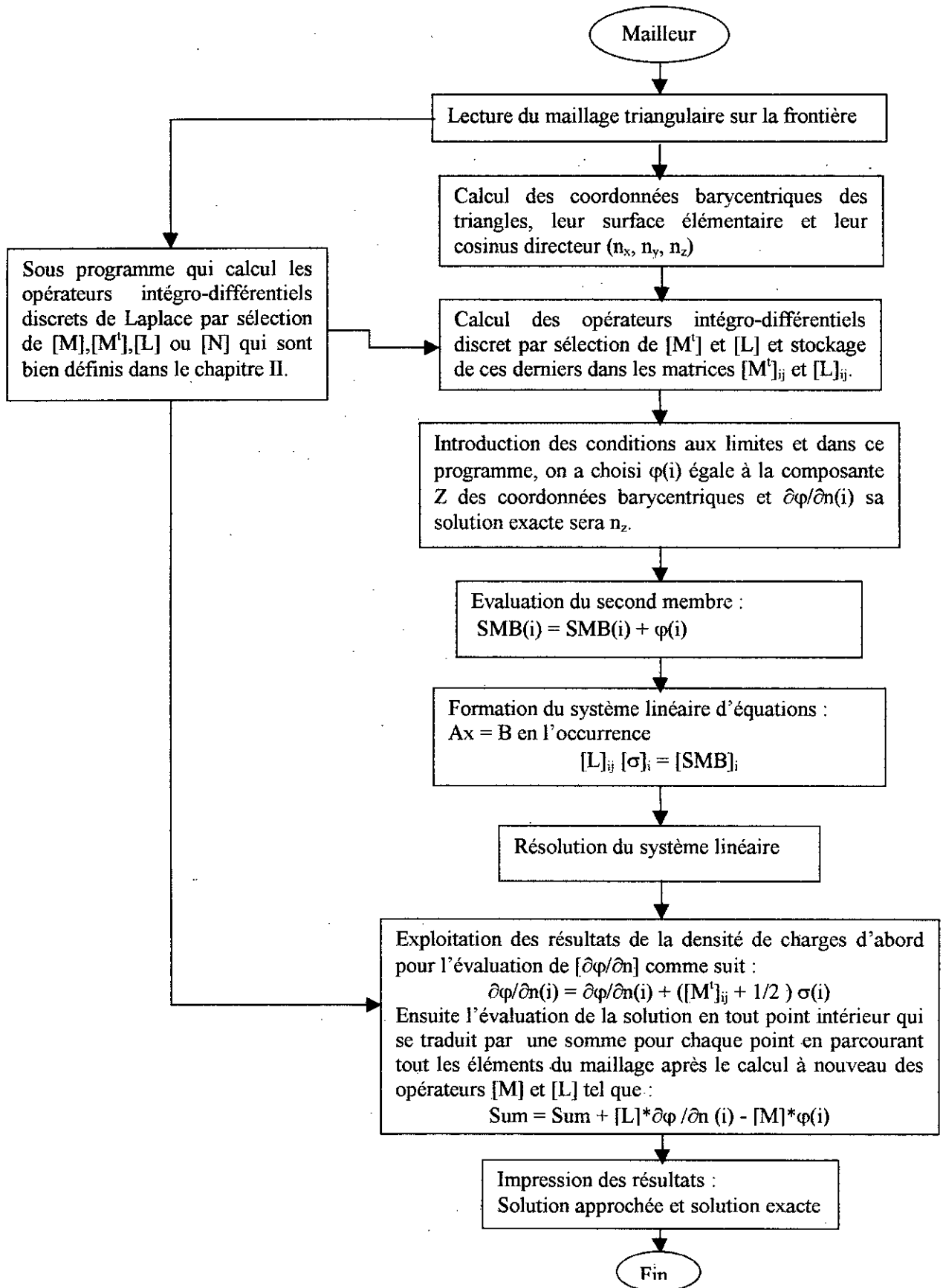




Organigramme 4.2 : Description générale du programme « **DBEM-3D** » qui traite le problème du potentiel par la méthode directe
 $([M]_{ij} + 1/2) [\varphi]_i = [L]_{ij} [\partial\varphi/\partial n]_j$

IV.4 Description générale du programme « **IBEM-3D** » :

Le programme « **IBEM-3D** » traite exactement le même problème que celui traité par celui qui le précède, avec une particularité distincte qui en l'occurrence la méthode indirecte de la BEM dont les formules sont données au chapitre II dans la section II.2.6, nous donnons dans ce qui suit l'algorithme principal qui regroupe les étapes nécessaires pour trouver les valeurs du potentiel et de sa dérivée au niveau de tous les nœuds désignés par les coordonnées barycentriques de chaque triangle de la frontière, puis les valeurs pour n'importe quel point intérieur du milieu étudié, ceci nous permettra de distinguer les difficultés de mise en œuvre des deux méthodes caractéristiques de la BEM et conclure sur la précision des résultats obtenus par ces deux méthodes, enfin voir quelles sont les modifications à apporter sur ces deux programmes pour aboutir au deux derniers programmes qui traitent les formulations de calcul de la perturbation d'un champ magnétostatique, qui sont en l'occurrence la formulation en charges de surface et la formulation mixte (charges et potentiel de surface), étudiées en détail dans les chapitres précédents.

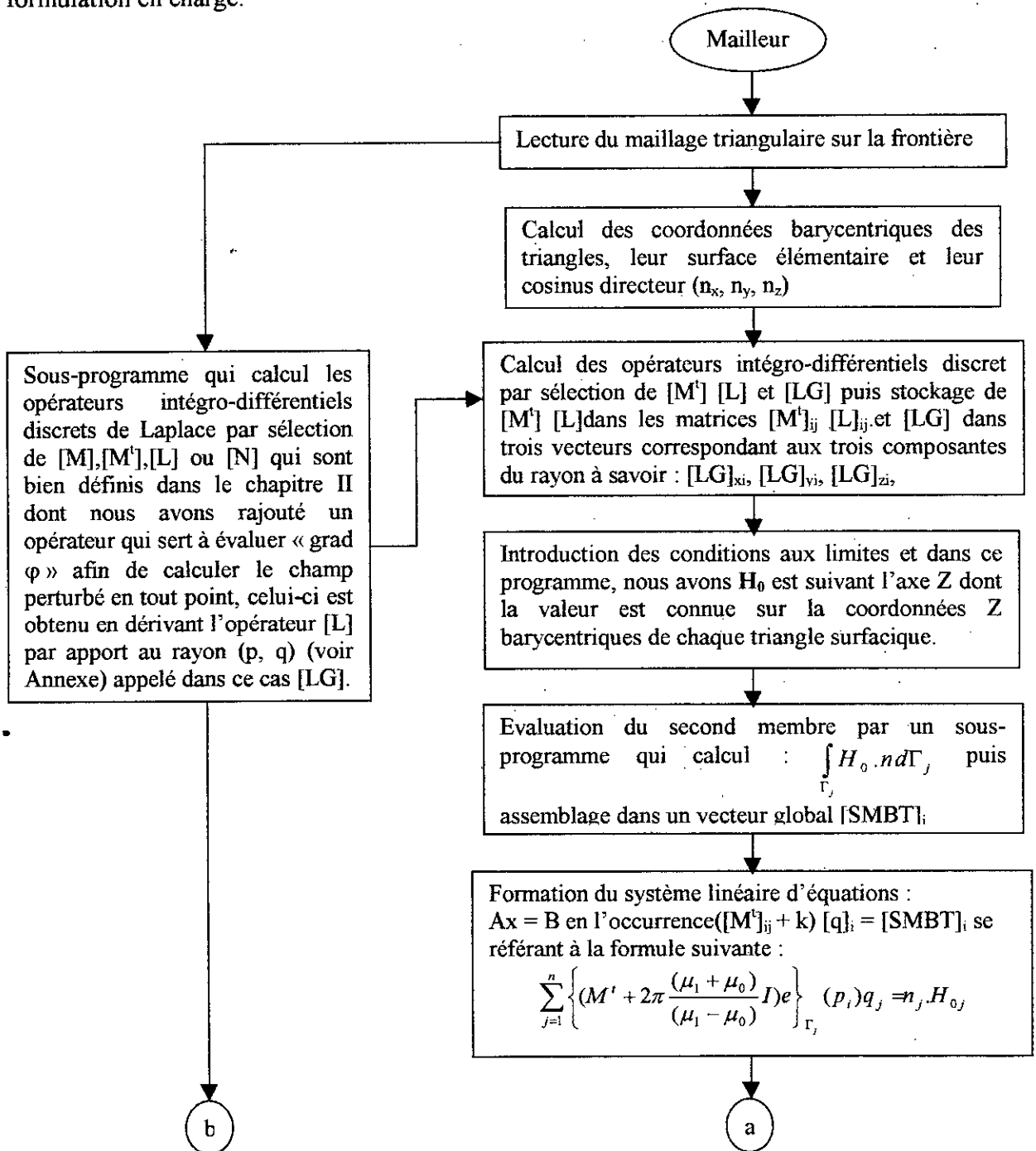


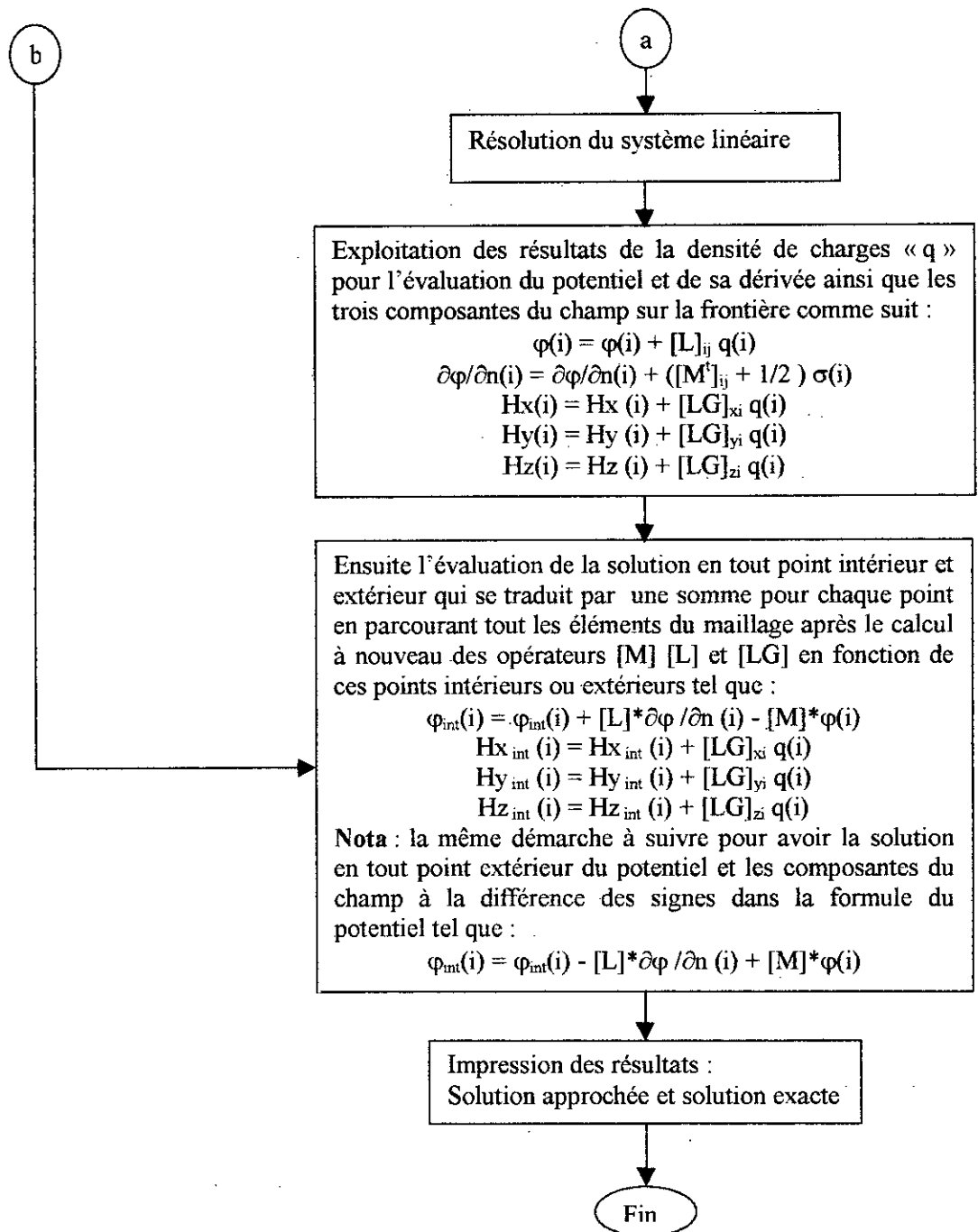
Organigramme 4.3 : Description générale du programme « **IBEM-3D** » qui traite le problème du potentiel par la méthode indirecte

$$[L]_{ij} [\sigma]_i = [\varphi]_i \quad \text{et} \quad ([M]_{ij} + 1/2) [\sigma]_i = [\partial\varphi/\partial n]_i$$

IV.5 Description générale du programme « IBEMCM-3D » :

Le programme « IBEMCM-3D » traite la formulation en charge de surface développée en chapitre I § I.3.4.1 sous une forme continue puis sous une forme discrète dans le chapitre II § II.4.1 par la BEM pour un matériau massif, cette formulation nous permet d'évaluer le champ magnétique perturbé en tout point intérieur et extérieur du milieu magnétique étudié. On présente dans ce qui suit l'algorithme de ce programme qui utilise certains blocs des deux premiers programmes réalisés précédemment en particulier le deuxième qui présente une similitude vis avis des méthodes indirectes, base de notre formulation en charge.

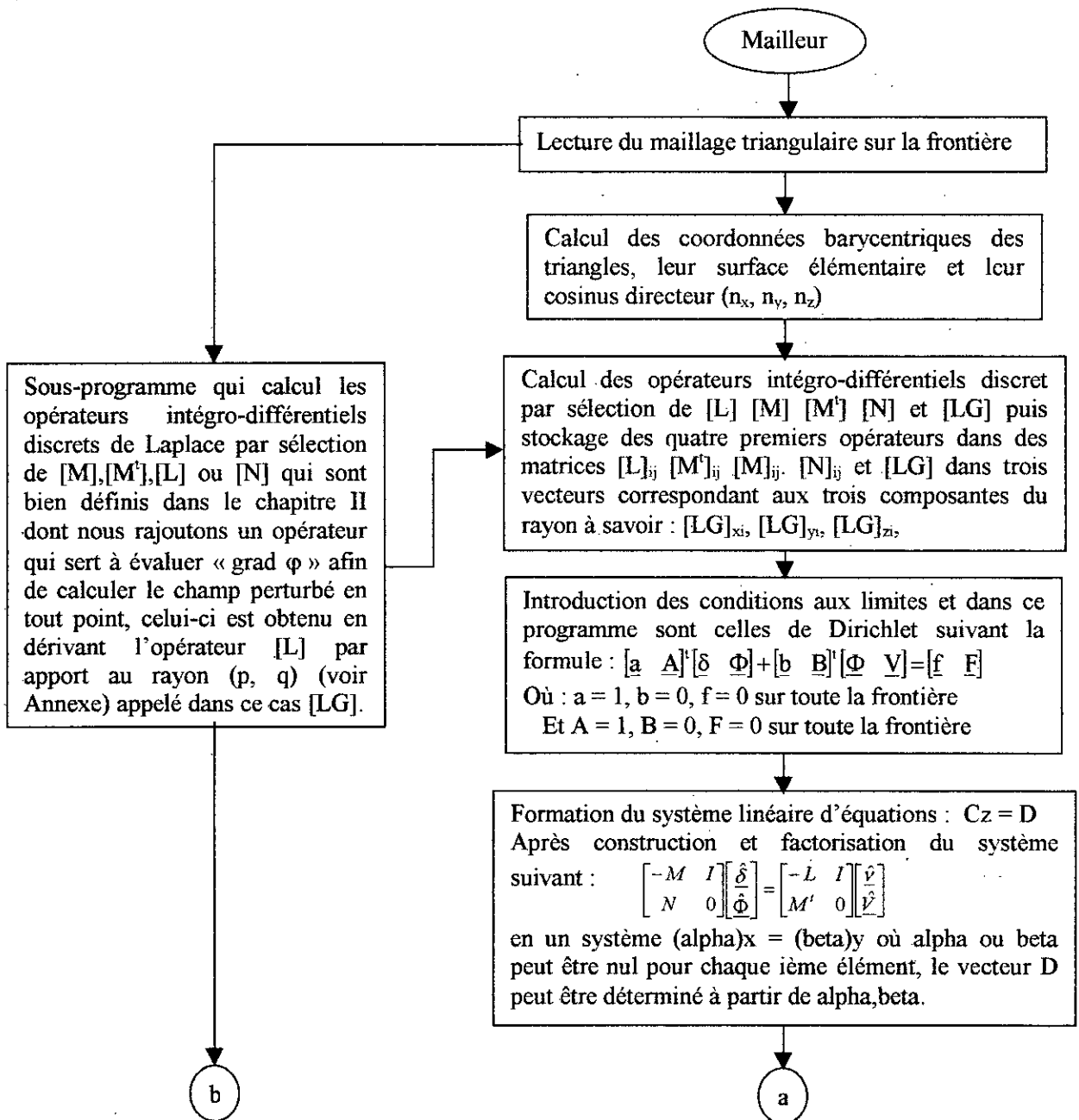


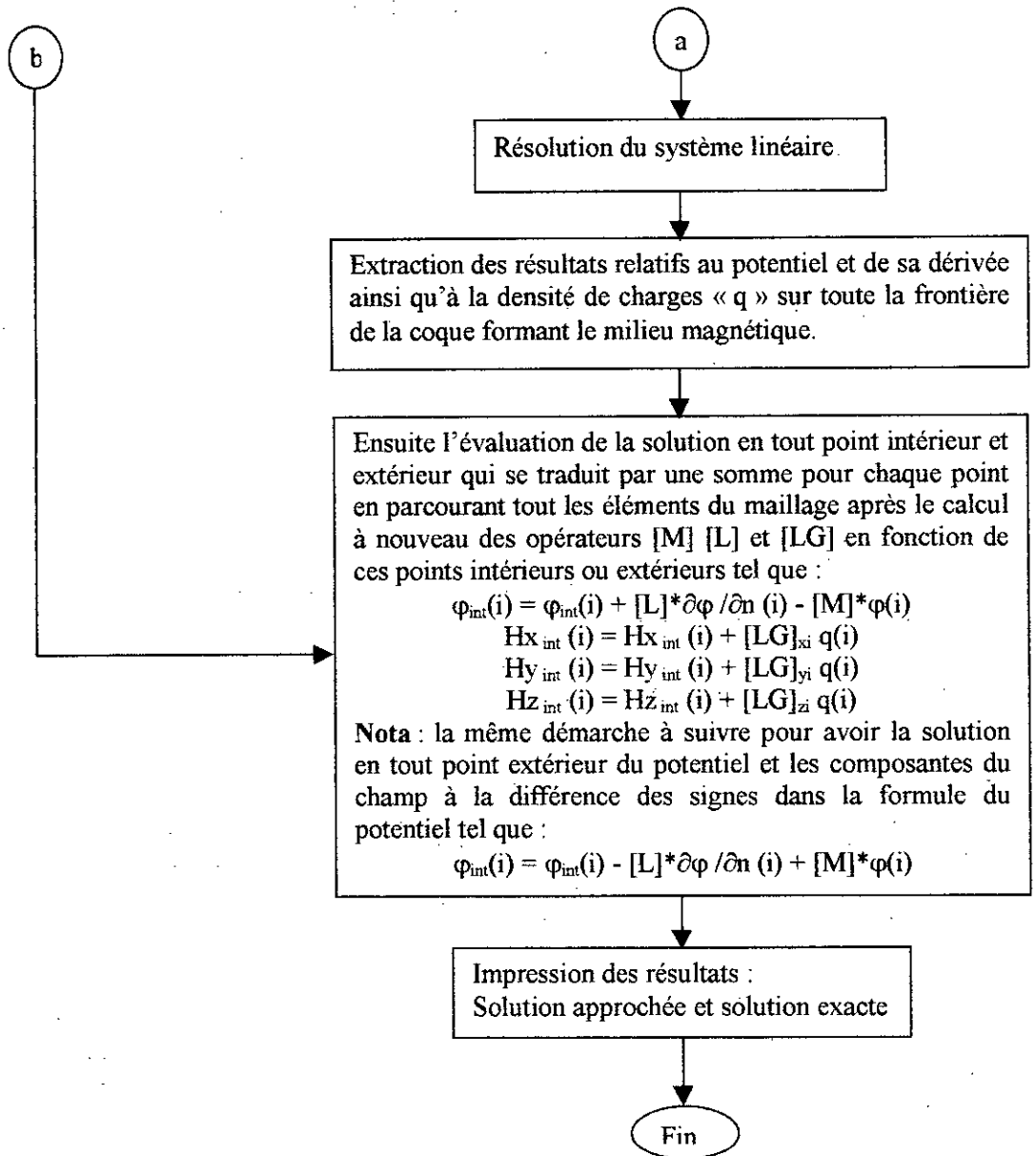


Organigramme 4.4 : Description générale du programme « **IBEMCM-3D** » qui traite le problème discret de la formulation en charge de surface pour le calcul de la perturbation du champ magnétostatique par la présence d'un dispositif perméable et massif par la méthode indirecte de la BEM.

IV.6 Description générale du programme « IBEMCC-3D » :

Le programme « IBEMCC-3D » traite la formulation mixte en potentiel magnétique scalaire surfacique et charge de surface comme inconnue intermédiaire développée en chapitre II § II.2.13 sous une forme continue et discrète par la BEM pour un matériau en coque mince, appelée dans ce cas la méthode d'élément coque, cette formulation nous permet d'évaluer le champ magnétique perturbé en tout point intérieur et extérieur du milieu magnétique étudié. On présente dans ce qui suit l'algorithme de ce programme. Cependant une des difficultés majeure de cette formulation est l'introduction des conditions aux limites qui sont données par les équations(2.97).





Organigramme 4.5 : Description générale du programme « **IBEMCC-3D** » qui traite le problème discret de la formulation mixte en potentiel et charge de surface pour le calcul de la perturbation du champ magnétostatique par la présence d'un dispositif perméable et en coque mince par la BEM.

IV.7 Description du bloc stockage et résolution du système :

IV.7.1 Résolution du système :

La résolution par la méthode d'éléments frontière (BEM) des équations de l'électromagnétique conduit à résoudre de grands systèmes d'équations linéaires.

Ceci n'est possible que si l'on dispose d'ordinateur performant tant du point de vue de leur place mémoire que de leur rapidité de calcul.

Donc, il est impératif d'aborder le problème de la résolution avec un soin particulier. D'autant plus que la taille du maillage (maillage plus fin), et le type d'éléments d'approximation ont une grande incidence sur la taille et les propriétés du système à résoudre.

Ces critères vont conditionner le choix d'un algorithme de résolution. Parmi les méthodes de résolution qui existent, il y a les méthodes directes et indirectes dites itératives. Bien que ces méthodes différentes par leur principe, leur algorithme et leur programmation visent à ce que la place mémoire et le temps de calcul soient minimisés.

Pour résoudre un système linéaire, il faut d'abord calculer la matrice et le second membre, c'est pourquoi quel que soit l'algorithme utilisé et la forme de stockage choisie, toutes les méthodes de résolution se décomposent en trois étapes :

- La préparation du système linéaire (calcul des pointeurs nécessaire pour le stockage).
- L'assemblage de la matrice de raideur et du second membre.
- La prise en compte des conditions aux limites, il est parfois nécessaire de modifier la matrice de raideur ainsi que le second membre pour prendre en compte les conditions aux limites.

Par la suite, nous allons présenter les avantages et les inconvénients pour chacune de deux méthodes.

IV.7.1.1 Méthodes directes :

Le principe des méthodes directes consiste à substituer au système initial une suite de système linéaire facile à résoudre, en utilisant une factorisation de la matrice S (matrice de raideur) en un produit de matrices triangulaires.

Les méthodes directes ont l'avantage d'être rapides, néanmoins elle nécessite un stockage important en mémoire sur l'ordinateur. Pour palier cet inconvénient, on a recours à l'utilisation des mémoires secondaires, dans ce cas le nombre important des entrées – sorties effectuées par l'ordinateur augmente le temps de calcul.

La résolution du système s'effectue en deux étapes [18, 19, 25]

- La décomposition (factorisation de la matrice S de raideur en matrice triangulaire).
- La résolution des systèmes triangulaires associés.

Suivant les propriétés mathématiques des matrices, il existe trois types de décomposition

- Décomposition par Gauss :

Si la matrice M est régulière (c'est à dire existence de M^{-1}) alors elle peut-être décomposée sous la forme $M = LU$ avec L : une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et U : une matrice triangulaire supérieure.

- Décomposition de Cholesky :

Si la matrice M est régulière et symétrique, on peut la décomposer sous la forme ; $M=LDL^t$; L : est une matrice inférieure à diagonale unité, D : une matrice diagonale et L^t : la transposée de L.

- Décomposition de Crout :

Si la matrice est symétrique définie positive, il existe alors une matrice triangulaire inférieure unique telle que : $M = L.L^t$.

IV.7.1.2 Méthodes indirectes : [11, 25, 65, 68]

Les méthodes itératives conduisent en solution par une succession d'amélioration d'une solution approchée, le nombre d'itérations nécessaire étant difficile à prévoir et dépendant de la structure de la matrice de raideur. Ces méthodes ont en commun, que chaque itération nécessite un nombre d'opération du même ordre de grandeur que celui nécessaire pour effectuer le produit de la matrice par un vecteur

Elles présentent l'avantage de réduire l'espace en mémoire. Les méthodes itératives sont généralement préférées pour les grands systèmes linéaires à matrices M de raideur creuses.

IV.7.2 Techniques de stockage :

L'étude des problèmes tridimensionnels conduit à un nombre important d'inconnues. Par conséquent le choix d'un mode performant de stockage d'éléments s'avère crucial

Dans cette partie, nous présentons les techniques de stockage qui peuvent être utilisées pour stocker la matrice à inverser. Lorsque la matrice à inverser est pleine et lorsqu'on ne tient pas compte de la nullité de certains coefficients, le stockage est simple.

Néanmoins, les matrices résultantes de la discrétisation sont souvent creuses, c'est à dire qu'elles présentent une majorité de coefficients nuls. Il est alors intéressant de tenir compte de la structure de ces matrices lors du stockage. Les différentes techniques [11, 13, 18, 19, 20, 66] sont les suivantes :

IV.7.2.1 Stockage plein :

Ce mode de stockage est pénalisant du point de vue de l'espace mémoire requis. On stocke tous les termes de la matrice y compris les termes nuls. Donc ceci conduit à un temps d'inversion du système trop grand.

IV.7.2.2 Stockage profil :

Cette technique s'adapte bien aux méthodes directes pour stocker la matrice. A sous forme profil, on ne stocke pas les coefficients nuls dont les indices n'appartiennent pas au profil de la matrice par contre on stocke tous les termes appartenant au profil qu'ils soient nuls ou non, le rangement se fait ligne par ligne.

IV.7.2.3 Stockage Morse :

Les éléments finis ou éléments intégrales de frontières issus du maillage engendrent des coefficients non nuls qui ne répondent à aucune règle macroscopique, c'est à dire que les matrices n'ont de structure topologique précises (blocs, Bande). Sur de telles matrices, la représentation creuse par ligne dite « Morse » s'avère particulièrement efficace.

Seules les méthodes indirectes utilisent généralement cette technique de stockage. Elle est la plus économique du point de vue mémoire, car on ne stocke que les termes non nuls de la matrice au prix d'un algorithme coûteux mais en contre partie on réalise un gain en espace mémoire.

Les coefficients non nuls de la matrice M sont rangés séquentiellement ligne par ligne dans un tableau monodimensionnel. Pour chaque ligne de coefficient diagonal est placé en premier, tandis que les numéros de colonnes correspondants sont rangés parallèlement dans un tableau autre monodimensionnel tel que :

- MADAP(ILOC) : Vecteur contenant les éléments non nuls de la matrice avec les termes diagonaux sont placés en premier
- IJMAT(ILOC) : Vecteur contenant les numéros de colonne de chaque élément de la matrice

Les pointeurs MADAP et IJMAT sont obtenus en parcourant tous les éléments du maillage en repérant pour chaque inconnues I le nombre de la liste des inconnues auxquelles elle est connectée

Ce mode de stockage nous amène à introduire les méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires. Plus la matrice est creuse, plus le gain par rapport au stockage profil est important.

IV.8 L'amélioration du code par les différentes techniques énumérées :

L'amélioration de notre code par les différentes techniques énumérées dans le paragraphe précédent concerne particulièrement le mode de stockage et la méthode de résolution du système linéaire adoptée en vue de minimiser à la fois l'espace mémoire et le temps de calcul « CPU » pour aboutir enfin à plus de précision sur les résultats obtenus. Sachant qu'au préalable tous les programmes utilisent un mode de stockage plein et la résolution du système est faite par une méthode directe qui est celle de la décomposition de Gauss. En effet, nous avons amélioré le bloc de résolution du système linéaire dans le troisième programmes « **IBEMCM-3D** » de notre code suivant l'opportunité qu'il offre dans le calcul du champ perturbé par la formulation en charges de surface qui génère une matrice pleine et non symétrique mais avec plus d'élément nuls, en adoptant donc une méthode de résolution itérative qui est en l'occurrence la méthode du gradient biconjugué [15, 65] après avoir modifier la matrice globale en adoptant un mode de stockage Morse. Tandis que Le premier et le deuxième programme ainsi que le quatrième ont gardé la même configuration initiale de leurs blocs de stockage et de résolution.

IV.9 Validation du premier et deuxième programme :

Rappelons que ces programmes « **DBEM-3D** » et « **IBEM-3D** » traitent la solution de l'équation de Laplace formulé en potentiel de simple couche (Voir organigramme 4.2 et 4.3), afin de valider ces derniers du point de vue théorique et conclure sur la précision de leurs résultats, nous les avons tester sur un cube de dimension [1 m³] maillé en 24 triangles recouvrant toute sa surface et nous avons introduit les conditions de Dirichlet, en imposant la

valeur du potentiel qui sera la composante Z des coordonnées barycentriques de chaque triangle ceci aurait comme solution exacte la dérivée normale de cette composante sur la frontière, il en résulte donc après avoir calculer à nouveau la dérivée normale du potentiel sur tous les triangles de surface par les deux méthodes utilisées par ces deux programmes, nous pouvons comparer la solution exacte et approchée obtenue pour tout point intérieur du cube. Pour cela nous avons pris deux points intérieurs au cube dont il est évident si la composante z de ce point est la valeur exacte du potentiel, nous devons avoir une solution approchée acceptable par la contribution de toutes les valeurs sur la frontière. Nous présentons dans le tableau suivant les résultats du test effectué.

Programmes	Points intérieurs	Solution exacte	Solution approchée
DBEM-3D	P(0, 0, 0.05)	0.0500	0.0480
	P(0, 0, 0.08)	0.0800	0.0768
IBEM-3D	P(0, 0, 0.05)	0.0500	0.0512
	P(0, 0, 0.08)	0.0800	0.0823

Tableau 4.1 : Résultats obtenus par le premier et le deuxième programme pour un cube de 1 m^3 maillé en 24 triangles, test effectué sur deux points intérieurs

Interprétation :

Nous pouvons déduire que d'après le test effectué pour les deux programmes et suivant les résultats étalés dans le tableau 4.1 obtenus par ces derniers, que la méthode indirecte utilisée dans le deuxième programme est beaucoup plus précise que la méthode directe utilisée dans le premier programme, ceci est dû particulièrement à l'étape de la formation de la matrice globale du système linéaire de chaque organigramme des deux programmes (Voir organigramme 4.2 et 4.3). En effet tout le système linéaire formé dans le cas de la méthode indirecte fait intervenir un seul opérateur discret, ce qui facilite sa résolution d'une part et une précision sur la solution de la densité de charge d'autre part. Ceci n'est pas le cas pour le système linéaire formé dans le cas de la méthode directe où on fait intervenir un deuxième opérateur pour l'évaluation du second membre ce qui est pénalisant de point de vue numérique. Enfin, nous avons noter avec rigueur les avantages qu'offre la

méthode indirecte après sa mise en œuvre numérique car par la suite elle forme le noyau principal des formulations qui traitent le calcul du champ perturbé objectif de notre étude.

IV.10 Validation du troisième programme :

Pour la validation numérique du problème discret de la formulation en charge de surface qui calcul le champ magnétique statique en 3D qui l'objet du troisième programme « **IBEMCM-3D** », nous avons considéré une sphère dans un champ magnétique orienté suivant l'axe Ox , $H_0 = 10$ A/m, $R=1$ m, et la perméabilité relative $\mu_r = 100$ avec un maillage de 36 éléments triangulaire sur la surface puis avec un maillage plus raffiné de 200 éléments triangulaires sur sa surface, sachant que la solution analytique du problème est connue, ceci donc nous permettra à comparer les résultats numériques avec ceux analytiques et conclure, dont nous donnons un aperçu sur une solution analytique dans ce qui suit.

IV.10.1 Solution analytique :

Le modèle considéré est celui qui consiste en la détermination du champ magnétique perturbé conformément à la formulation en charges de surface où la région d'intérêt Ω est assimilée à un milieu sphérique de perméabilité magnétique constante. Le champ magnétique source régnant dans ce milieu est un champ de vecteur dirigé suivant l'axe Ox :

$$h^s = H_0 e_x$$

Où H_0 est une constante réelle.

Pour une telle source, il est connu [3, 4, 5] que le champ magnétique perturbé s'écrit :

$$H = \frac{1 - \mu_r}{2 + \mu_r} h^s$$

Où μ_r est la perméabilité magnétique relative associée au milieu Ω .

IV.10.2 Résultats numériques et analytique du champ perturbé :

Les tableaux ci-dessus nous montre une comparaison entre les résultats numériques et analytiques obtenus sur des points extérieurs à la sphère avec les deux types du maillage de la sphère.

Programme « IBEMCM-3D »					
r	φ	Hax	Hx	Hy	H _z
2	0	10.1560	10.1312	0.0046	0.0005
2	90	09.9220	09.8793	-0.0219	0.0003
4	0	10.0190	10.0187	0.0001	0.0001
4	90	09.9900	09.9822	-0.0011	0.0000
6	0	10.0060	10.0026	0.0001	0.0000
6	90	09.9970	09.9911	-0.0001	0.0000
8	0	10.0020	10.0033	0.0001	0.0000
8	90	09.9990	09.9969	0.0000	0.0000
10	0	10.0010	10.0012	0.0000	0.0000
10	90	09.9990	10.0011	0.0000	0.0000

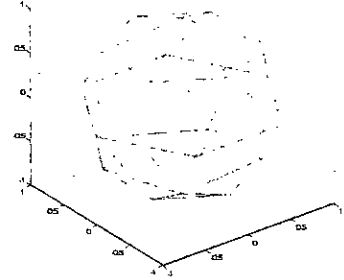


Tableau 4.2 : Comparaison entre les résultats numérique (H_x, H_y, H_z) et analytiques

(H_{ax}, H_{ay} = 0, H_{az} = 0) pour $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, φ, (θ = 0), dans le calcul du champ perturbé dans le milieu extérieur pour un maillage sur la surface d'une sphère avec un nombre de 36 éléments triangulaires.

Programme « IBEMCM-3D »					
r	φ	Hax	Hx	Hy	H _z
2	0	10.1560	10.1340	0.0042	0.0005
2	90	09.9220	09.8920	-0.0223	0.0003
4	0	10.0190	10.0170	0.0001	0.0001
4	90	09.9900	09.9960	-0.0011	0.0000
6	0	10.0060	10.0030	0.0001	0.0000
6	90	09.9970	09.9940	-0.0001	0.0000
8	0	10.0020	10.0040	0.0001	0.0000
8	90	09.9990	09.9970	0.0000	0.0000
10	0	10.0010	10.0010	0.0000	0.0000
10	90	09.9990	10.0010	0.0000	0.0000

Tableau 4.3 : Comparaison entre les résultats numérique (H_x, H_y, H_z) et analytiques

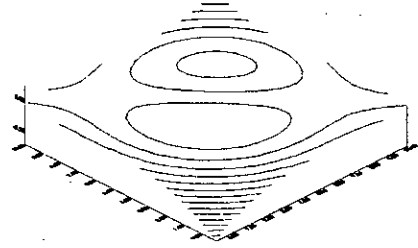
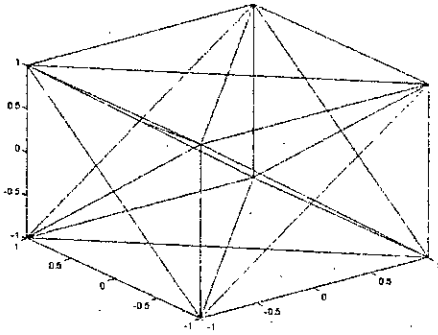
(H_{ax}, H_{ay} = 0, H_{az} = 0) pour $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, φ, (θ = 0), dans le calcul du champ perturbé dans le milieu extérieur pour un maillage sur la surface d'une sphère avec un nombre de 200 éléments triangulaires.

Interprétation :

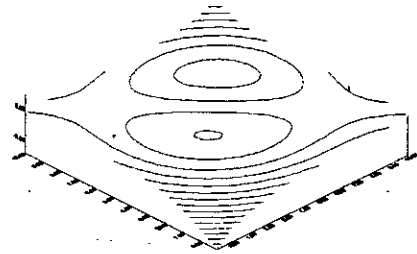
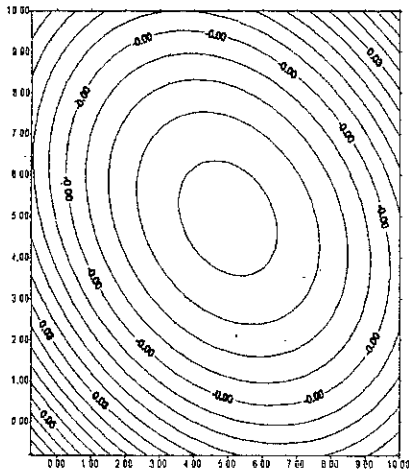
D'après les résultats étalés dans les tableaux 4.2 et 4.3, nous pouvons déduire que la formulation en charge de surface dans le calcul du champ perturbé, en particulier dans le milieu extérieur où nous intéressons à noter la modification du champ magnétostatique appliqué loin du domaine Ω caractérisant la structure étudiée. Comme nous pouvons remarquer un écart très acceptable entre la solution analytique et la solution approchée obtenue par le programme « **IBEMCM-3D** » du fait que l'erreur relative moyenne est de l'ordre de 0.3 %. Aussitôt, il est à noter que le raffinement du maillage augmente la précision des résultats et ceci on le constate dans le tableau 4.3 où le maillage est de 200 triangles comparativement au tableau 4.2 où le maillage est de 36 triangles. En dernier, nous pouvons remarquer aussi que la solution approchée est nettement plus précise pour des points plus loin de la sphère où le champ magnétostatique appliqué reste constant et dans ce cas le champ de perturbation est nul, ce qui confirme la théorie des champs magnétiques qui s'annule à l'infini. Enfin, nous pouvons conclure donc que pour cette première validation, notre programme est nettement convergent et donne des résultats appréciables vu l'amélioration portée sur ces blocs de stockage et de résolution du système linéaire.

Représentation graphique :

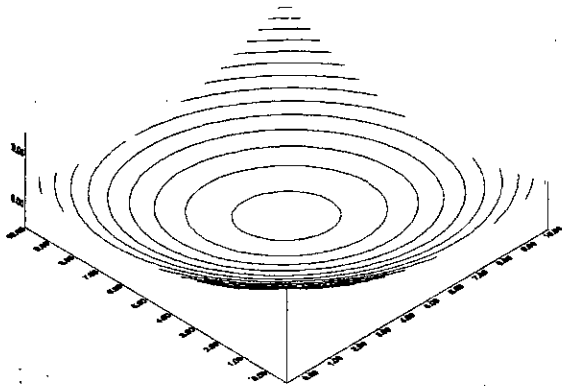
Pour une représentation synthétique des résultats nous faisons graphique, nous allons représenter dans ce qui suit les plus pertinents obtenus dans le cadre de l'exploitation de ceux donnés par le programme « **IBEMCM-3D** », traitant la formulation en charge de surface, qui sont le potentiel magnétique scalaire et les trois composantes vectorielles du champ magnétique perturbé ; Nous les avons donc représenté graphiquement dans la figure 4.1 qui regroupe le tracé des lignes équipotentielles et le tracé des lignes du champ sur un plan XY pour une géométrie cubique maillé en 24 éléments triangulaires surfaciques, Avec le champ appliqué $H_0 = 10$ A/m est suivant l'axe Z et $\mu_r = 100$ H/m, sachant que le calcul de nos grandeurs est effectué aux points intérieurs et extérieurs au cube.



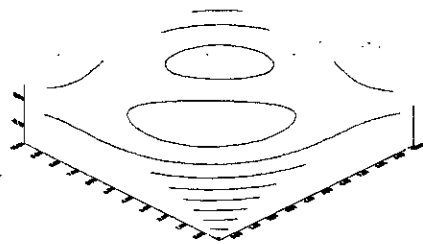
La composante X du champ magnétique



La composante Y du champ magnétique



Le tracé des lignes équipotentielles



La composante Z du champ magnétique

Figure 4.1 : Les tracés des lignes équipotentielles et les lignes du champ sur un plan XY pour une géométrie cubique maillé en 24 éléments triangulaires surfaciques, Avec $H_0 = 10 \text{ A/m}$ est suivant Z et $\mu_r = 100 \text{ H/m}$

IV.11 Validation du Quatrième programme :

Pour la validation numérique du problème discret de la formulation mixte destinée initialement pour des dispositifs en coque mince établie dans le quatrième programme « **IBEMCC-3D** », nous avons considéré la même géométrie sphérique avec les mêmes caractéristiques physiques que celles qui ont été l’objet de la validation de la formulation en charges, où nous avons retenu que le maillage de 36 éléments triangulaires sur la surface de la sphère et les résultats obtenus pour ce premier test de ce programme sont étalés dans le tableau 4.4 ci-dessous.

Programme « IBEMCCM-3D »					
R	φ	Hax	Hx	Hy	Hz
2	0	10.1560	10.1994	0.0065	0.0011
2	90	09.9220	09.9567	-0.0381	0.0004
4	0	10.0190	10.0231	0.0003	0.0002
4	90	09.9900	09.9156	-0.0025	0.0002
6	0	10.0060	10.1101	0.0002	0.0001
6	90	09.9970	10.1037	-0.0001	0.0001
8	0	10.0020	10.0461	0.0001	0.0001
8	90	09.9990	10.0107	0.0001	0.0000
10	0	10.0010	10.0029	0.0001	0.0000
10	90	09.9990	10.0021	0.0000	0.0000

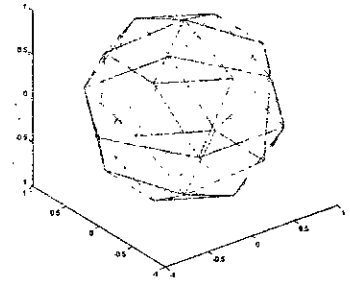


Tableau 4.4 : Comparaison entre les résultats numérique (Hx, Hy, Hz) et analytiques

(Hax, Hay = 0, Haz = 0) pour $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \varphi, (\theta = 0)$, dans le calcul du champ perturbé dans le milieu extérieur pour un maillage sur la surface d’une sphère avec un nombre de 36 éléments triangulaires.

Interprétation :

Nous pouvons remarquer que les résultats donnés par le tableau 4.4 obtenus pour ce premier test de validation du programme « **IBEMCC-3D** », sont acceptables du fait que l’écart entre la solution analytique et la solution approchée n’est pas trop grand en particulier pour des points situés plus loin de la sphère et comparativement à la formulation en charge, la formulation mixte est moins précise à ce stade de validation, en contre partie nous rappelons que parmi les difficultés de mise en œuvre numérique rencontrée dans ce programme est la

complexité de formation et résolution du système linéaire qui découle du problème discret de la formulation mixte, et ceci a influer sur la précision des résultats.

IV.12 Conclusion :

Ce chapitre est consacré à la mise en œuvre numérique de notre formulation par la BEM en 3D dont nous avons décrit en détail les différentes étapes à suivre dans des organigrammes de quatre programmes qui composent notre code suivant l'utilisation et la formulation traitée. En effet, dans le premier et le deuxième programme nous avons montré l'efficacité de la méthode indirecte dans la résolution de l'équation de Laplace et ceci dans le but d'introduire la méthode indirecte dans notre modèle de calcul du champ perturbé suivant la formulation adoptée, qui est en l'occurrence la formulation en charge de surface implantée dans le troisième programme et la formulation mixte implantée dans le quatrième programme.

Bien que les performances numériques envisagées aient été atteintes, dans le troisième programme qui traite la formulation en charges de surface, Il nous semble cependant intéressant d'aboutir à la même conclusion pour le quatrième programme, qui traite la formulation mixte adoptée dans le cas où des dispositifs en forme de coques minces, après une amélioration de ces blocs de stockage des matrices et résolution du système linéaire par des procédés plus adéquats comme il en est le cas du troisième programme.

Cependant dans le cadre où nous avons posé le modèle physique, nous avons montré l'efficacité du modèle en charges de surfaces dans le calcul de la perturbation d'un champ magnétostatique par la présence d'un dispositif ferromagnétique magnétique en particulier quand sa perméabilité reste constante.

Enfin, l'étude comparative qui a été faite entre la solution analytique et numérique pour tous les quatre programmes confirme globalement, d'après les résultats obtenus la validité de notre code.

IV.13 Application à la modélisation de l'aimantation du navire :

IV.13.1 Introduction :

Le code est exploité pour le calcul du champ perturbé, engendré par la présence d'un dispositif ferromagnétique en coque mince dont nous avons choisi une structure géométrique représentant un modèle réduit d'un navire dans le but de s'assurer de l'exactitude de notre modèle numérique étudié et l'opportunité qu'il pourra offrir dans le domaine du magnétisme du navire. Pour ce faire, nous avons plongé le modèle géométrique dans un champ magnétique statique suivant différentes orientations ; et nous avons choisi deux symétries par rapport aux trois plans dans le but de s'assurer de la conservation du comportement physique du modèle, puis de pouvoir modifier la géométrie de la structure vis à vis de l'angle d'ouverture des plaques latérales (Voir figure App-1).

IV.13.2 Caractéristiques géométriques :

Nous avons en générale une forme unique du modèle, dont nous avons appliqué deux changements distincts, à savoir l'angle d'ouverture des plaques latérales et le modèle avec une surface fermée. Le même nombre de triangles et sommets du maillage surfacique est conservé pour la majorité des différents tests effectués à savoir au total « **128 triangles et 100 nœuds** », sauf dans un test particulier où nous avons traité une structure avec une surface globale fermée à l'aide d'une plaque de fermeture qui s'ensuit donc par une augmentation du nombre total des données du maillage surfacique de l'ordre « **192 triangles et 150 nœuds** ». Enfin, pour se rendre compte du comportement du champ de perturbation à des distances lointaines de la structure, nous avons effectué le calcul sur des points intérieurs et extérieurs localisés sur les portions des axes d'un demi-cercle ayant pour centre le centre de la structure, et à des distances allant de $[-300 \div 300]$ mm suivant l'axe Z et $[0 \div 300]$ mm suivant l'axe Y ; et ceci pour les différents angles d'ouverture des plaques latérales de la structure.

IV.13.3 Caractéristiques physiques :

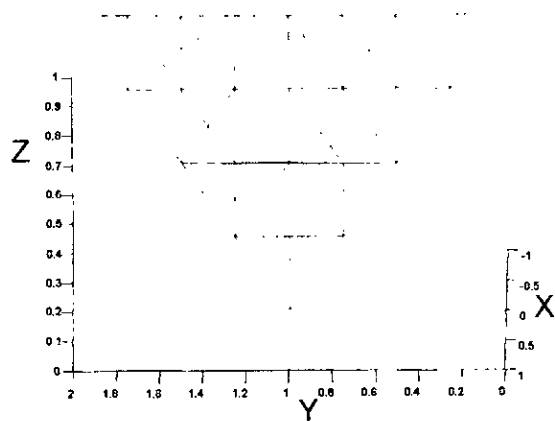
Nous avons choisi les caractéristiques physiques suivantes :

- Une perméabilité magnétique constante de l'ordre de **200 H/m** ;
- Un champ magnétique source de l'ordre de **10 A/m** et qui est suivant la direction Oz ; pour la majorité des tests effectués, sauf pour un cas où nous avons changé l'orientation dans les deux autres directions à fin de montrer le comportement du champ perturbé pour les différentes orientations du champ source appliqué.

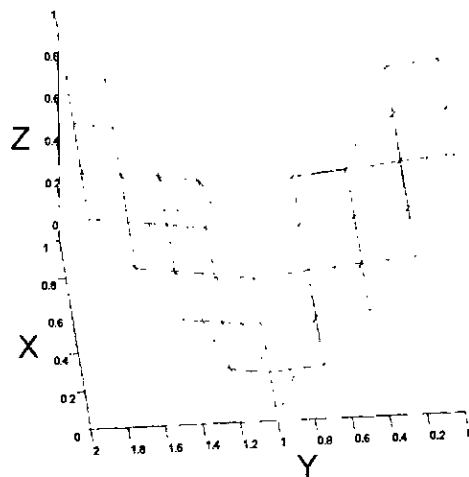
IV.13.4 Résultats et interprétation :

Les premières remarques que nous pouvons distinguer sont les suivantes :

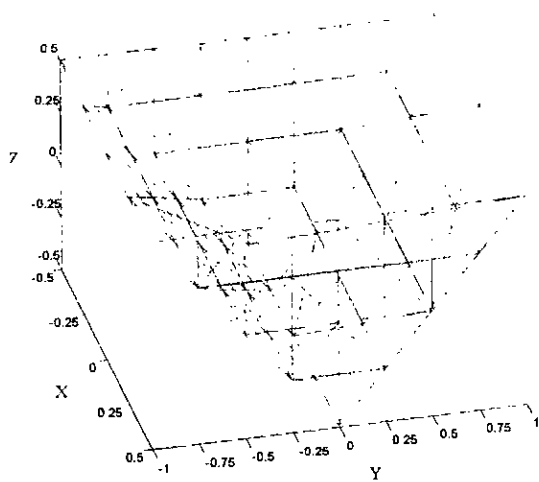
- Dans les figures **App-2, 3, 4 et 5** nous avons tracé les lignes équipotentielles et les lignes des différentes composantes du champ magnétique où une symétrie parfaite est conservée.
- Dans la figure **App-6** nous avons tracé les lignes du module du champ réduit dont nous remarquons qu'il suit le comportement de la composante **Z** et ceci montre bien la direction dont laquelle nous avons orienté le champ source **H₀**.
- Les figures **App-7-1, 7-2, 8, 9** montrent le comportement du champ magnétique réduit sur les différentes plaques et sur la structure globale du modèle dans le cas où nous aurions choisi les trois orientations du champ source **H₀**.
- Les figures **App-10, 11, 12** montrent la conservation des propriétés physiques quand on place la structure suivant une symétrie quelconque par rapport aux trois plans et pour s'assurer de cette condition nous avons tracé les lignes équipotentielles, les lignes du module du champ ainsi que le comportement de ce dernier pour la deuxième symétrie choisi dont on remarque la même configuration par rapport à la première symétrie.
- La figure **App-13** montre un test particulier pour décrire le champ magnétique réduit lointain où on vérifie la disparition de la perturbation du champ à des distances lointaines.
- Dans les figures **App-14, 15, 16, 17** montrent l'influence de la plaque de fermeture sur le potentiel et le champ réduit localement et à des distances lointaines
- Les figures **App-18, 19, 20, 21** montrent le comportement du champ lointain pour les angles d'ouverture **15°, 30°, 60° et 75°** respectivement. Nous pouvons déduire que la perturbation de champ est très prépondérante de la géométrie du milieu magnétique, et donc du volume enveloppé par celui-ci. Cependant, nous avons montré ici par la variation de l'angle d'ouverture des plaques de la structure que le champ réduit dans le milieu extérieur est directement proportionnel à l'angle d'ouverture des plaques.



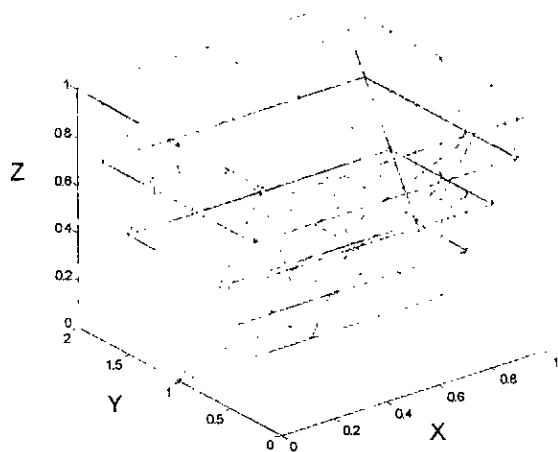
Vue de face d'une plaque frontale



Vue en perspective des deux plaques latérales



(a)



(b)

Vue en perspective de la structure complète, avec un angle d'ouverture des plaques latérales de 45° tel que :

(a) : Placée dans une symétrie centrale par rapport $O(0,0,0)$

(b) : Placée dans les X et Z positifs, et symétrique par rapport au plan $Y=1$

Figure App-1 : Géométrie de la structure du modèle étudié

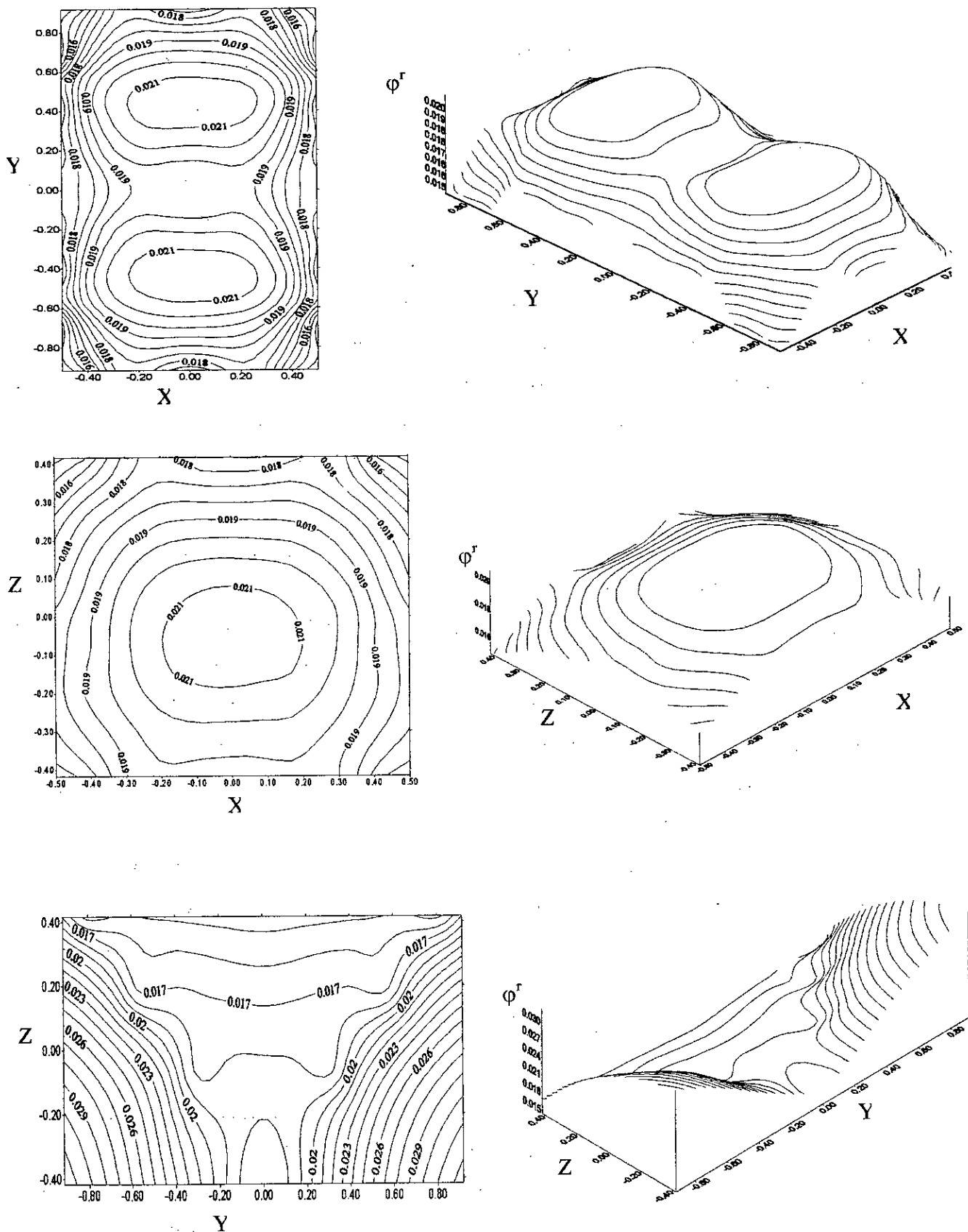


Figure App-2 : Lignes équipotielles du potentiel réduit sur la surface globale de la structure, représentées sur les trois plans.

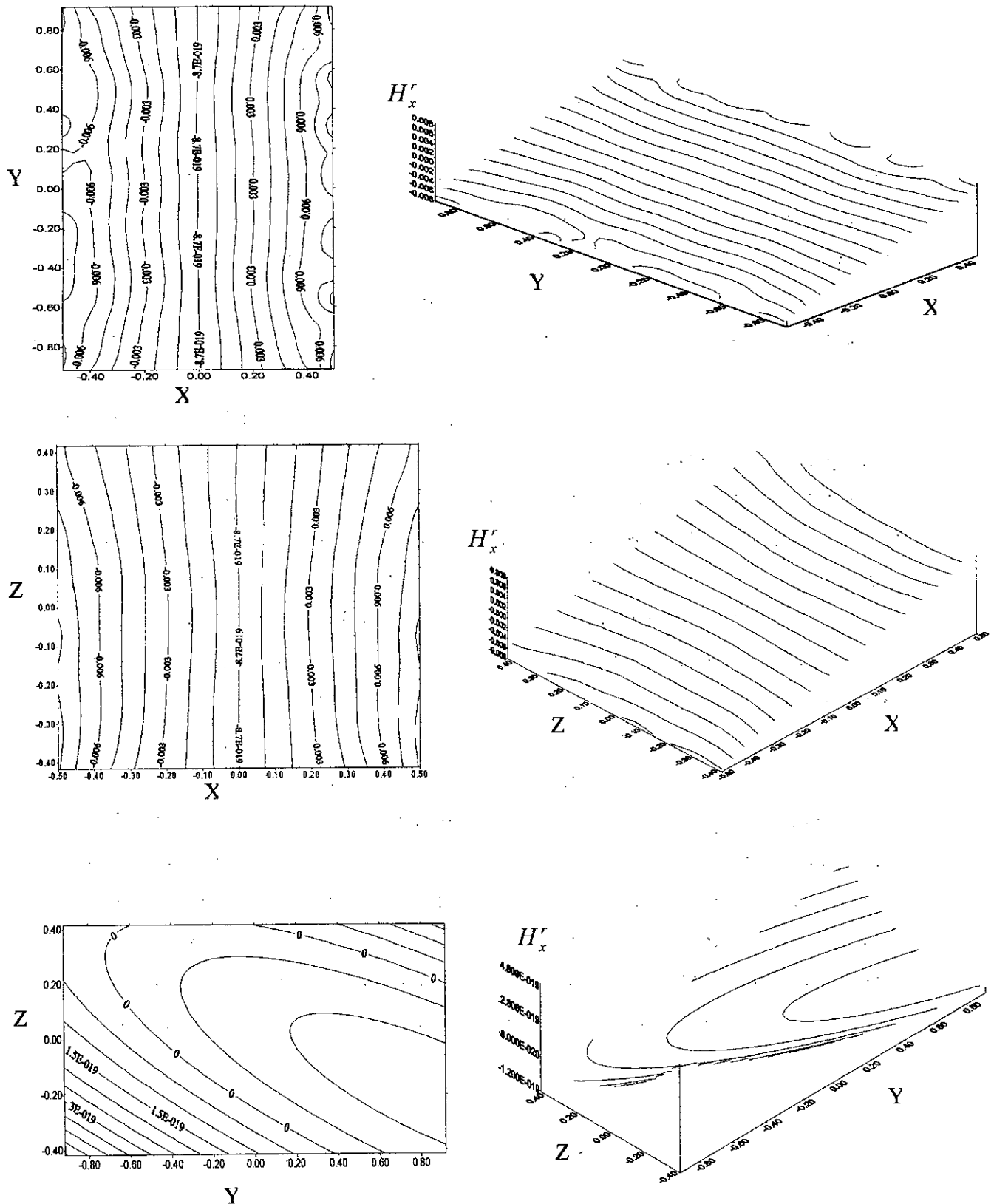


Figure App-3 : Lignes de la composante « X » du champ réduit sur la surface globale de la structure, représentées sur les trois plans.

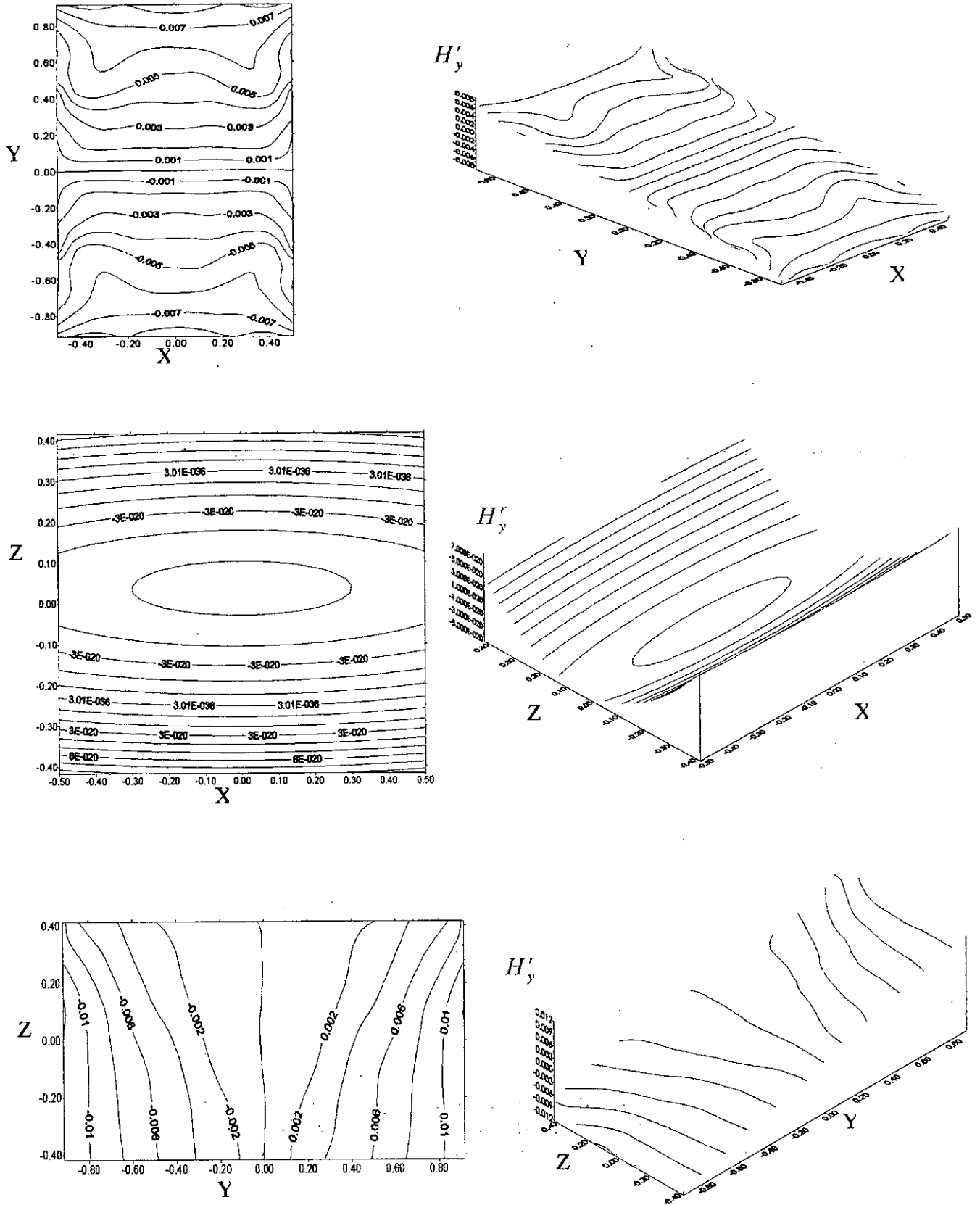


Figure App-4 : Lignes de la composante « Y » du champ réduit sur la surface globale de la structure, représentées sur les trois plans.

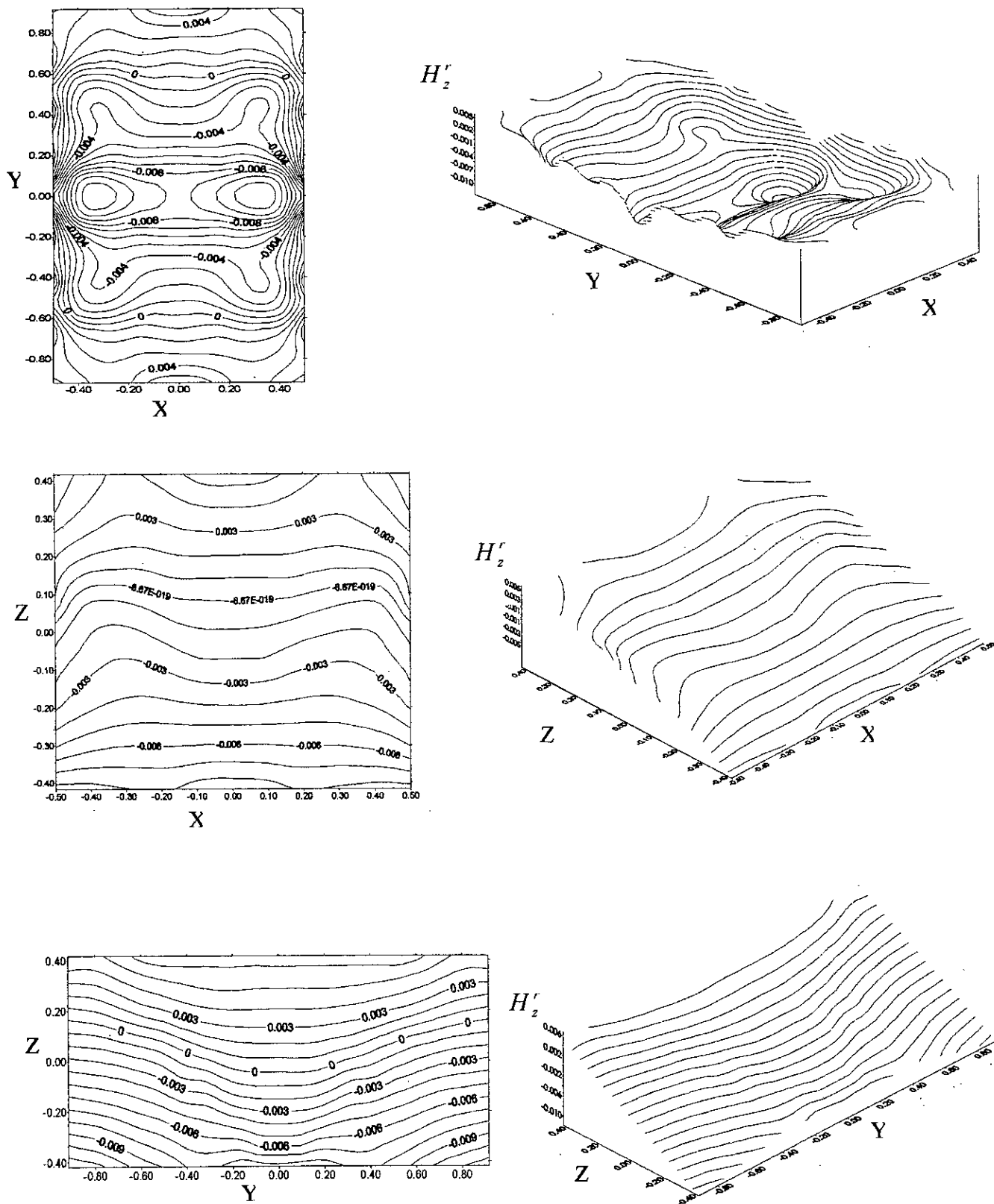


Figure App-5 : Lignes de la composante « Z » du champ réduit sur la surface globale de la structure, représentées sur les trois plans.

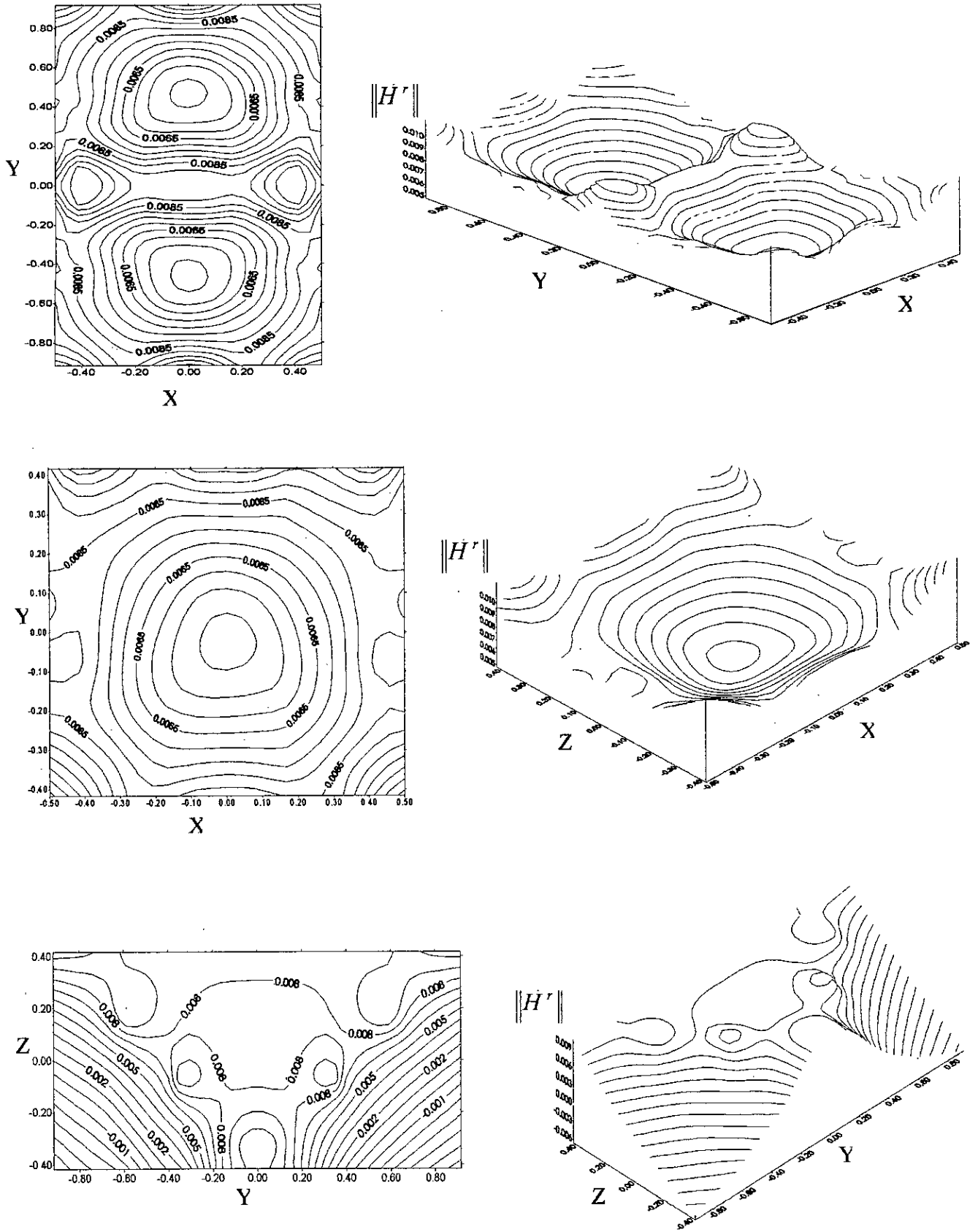


Figure App-6 : Lignes du module du **champ réduit** sur la surface globale de la structure, représentées sur les trois plans.

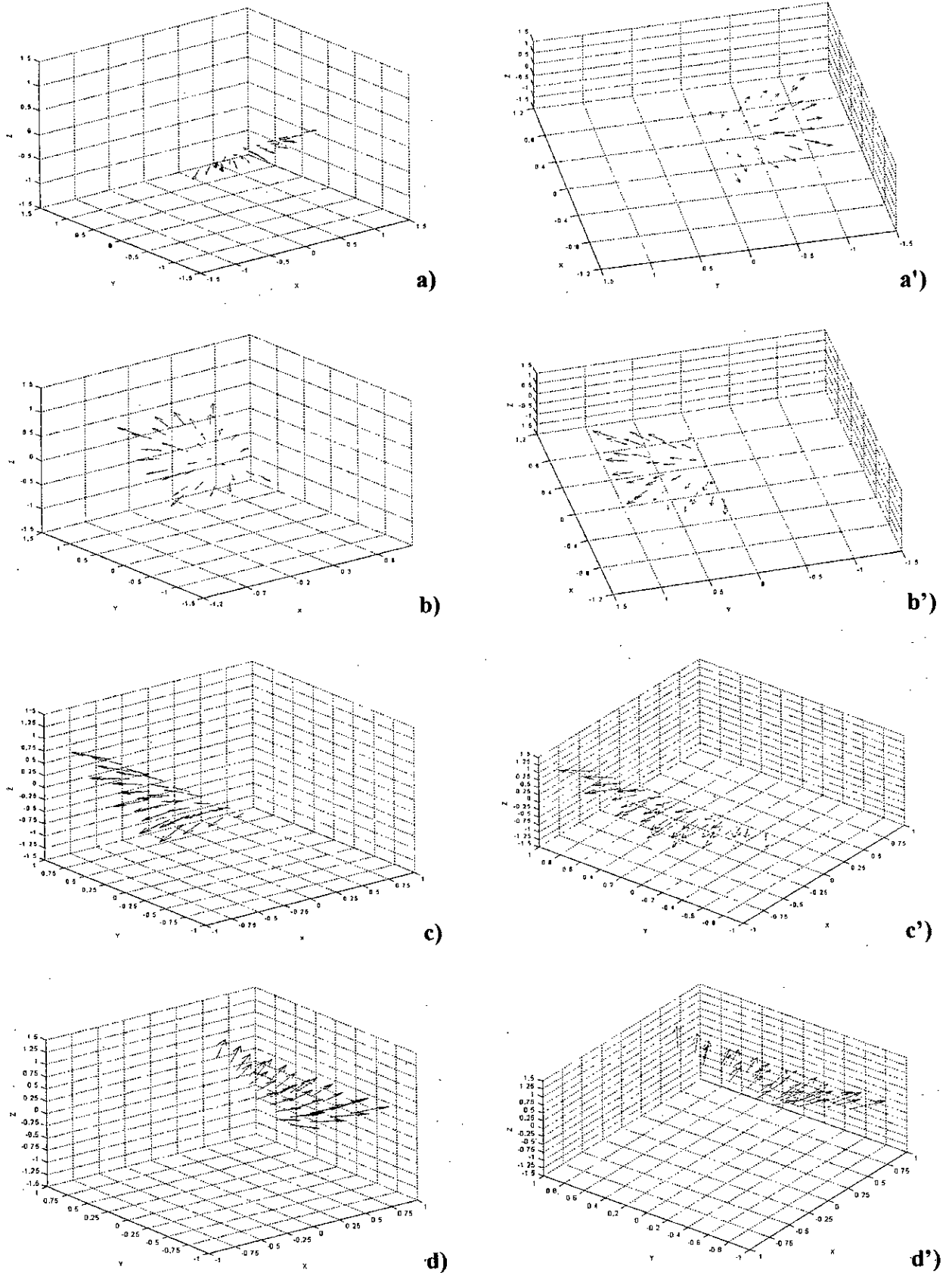


Figure App-7.1 : Comportement du champ réduit sur les plaques de la structure globale :

- (a), (a') et (b), (b') sur les plaques latérales
- (c), (c') et (d), (d') sur les plaques frontales

Avec les figures a', b', c' et d' désignent une rotation 3-D des figures a, b, c, et d afin de mieux situer les différentes plaques

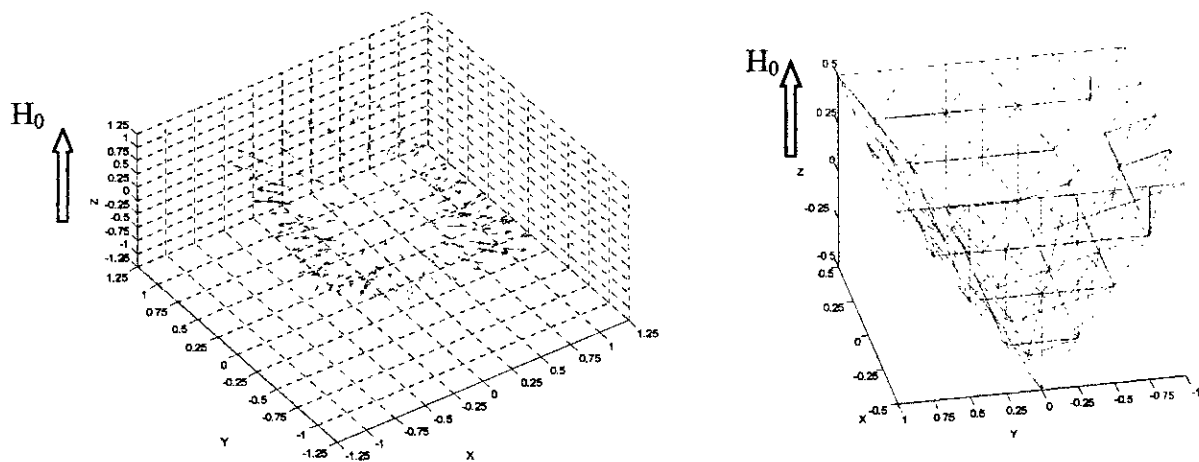


Figure App-7.2 : Comportement du champ réduit sur la structure globale :
Avec H_0 est suivant l'axe Z

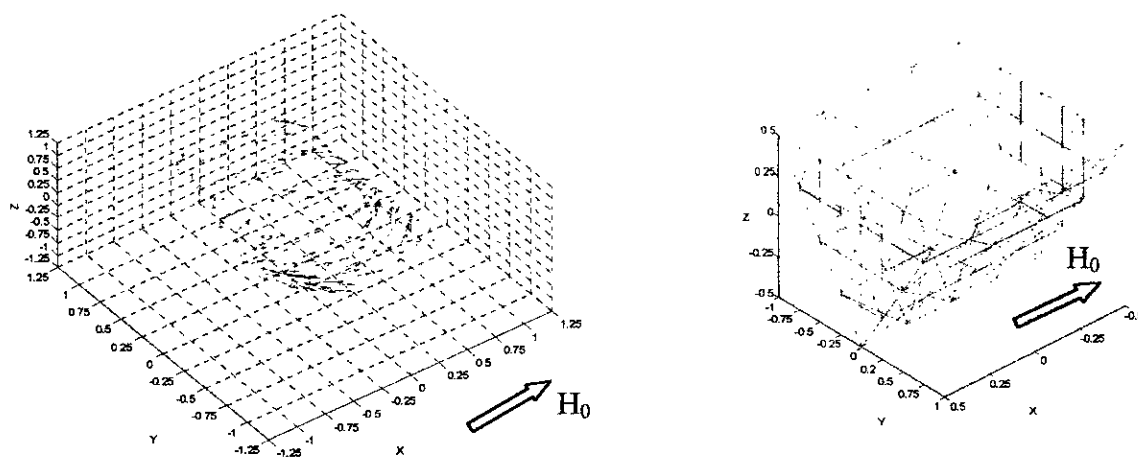


Figure App-8 : Comportement du champ réduit sur la structure globale :
Avec H_0 est suivant l'axe X

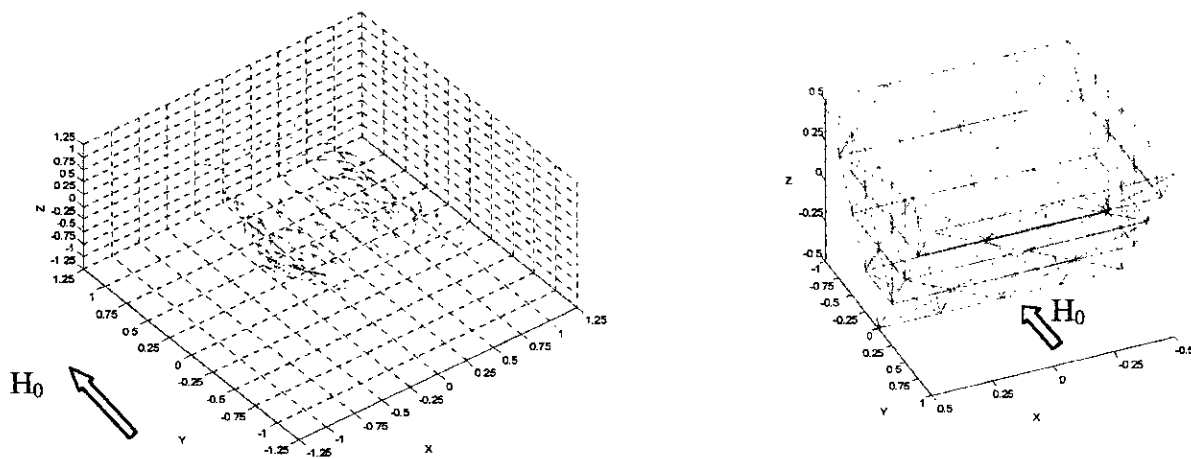


Figure App-9 : Comportement du champ réduit sur la structure globale :
Avec H_0 est suivant l'axe Y

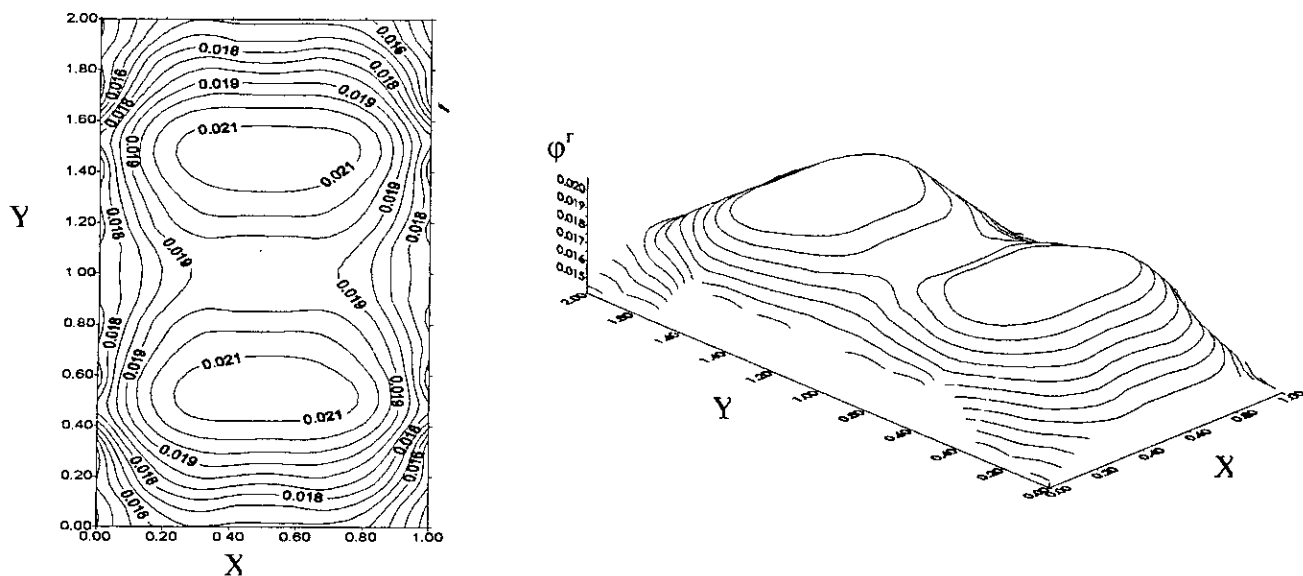


Figure App-10 : Lignes équipotentielles du **potentiel réduit** sur la surface globale de la structure placée dans la 2^{ème} symétrie, représentées sur le plan **XY**, où le champ H_0 est suivant Oz

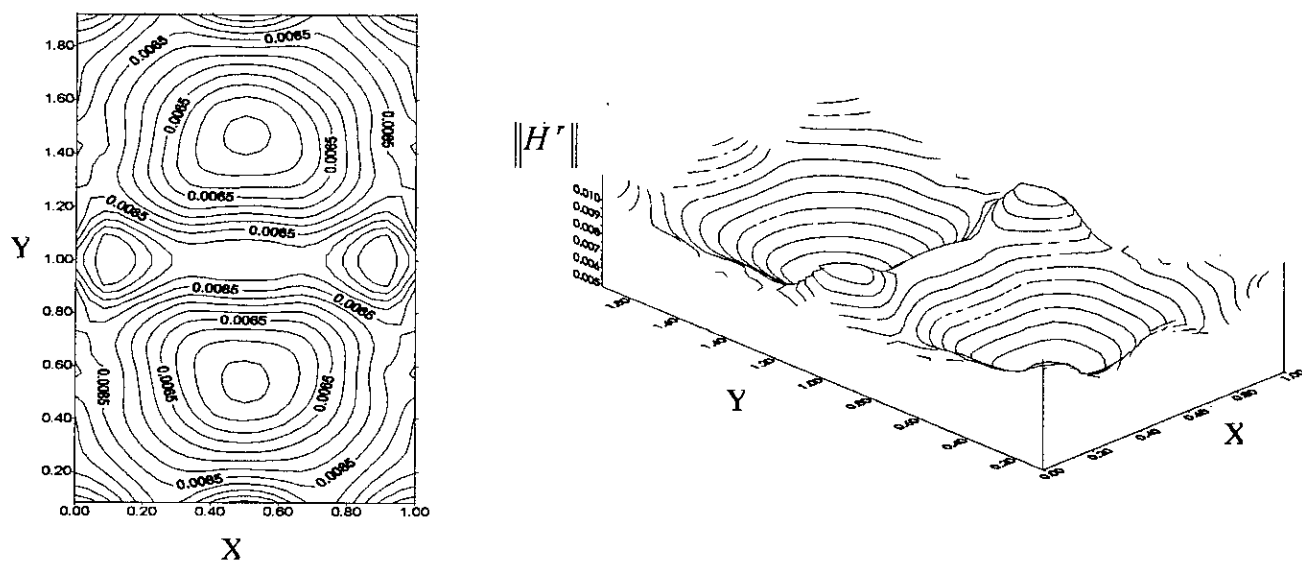


Figure App-11 : Lignes du module du **champ réduit** sur la surface globale de la structure placée dans la 2^{ème} symétrie, représentées sur le plan **XY**, où le champ H_0 est suivant Oz

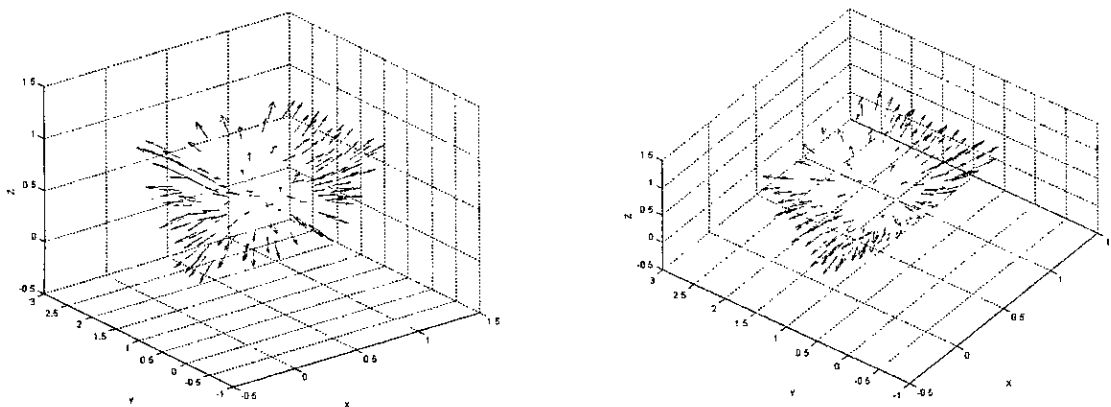


Figure App-12 : Comportement du **champ réduit** sur la structure globale placée dans la 2^{ème} symétrie, où le champ H_0 est suivant Oz

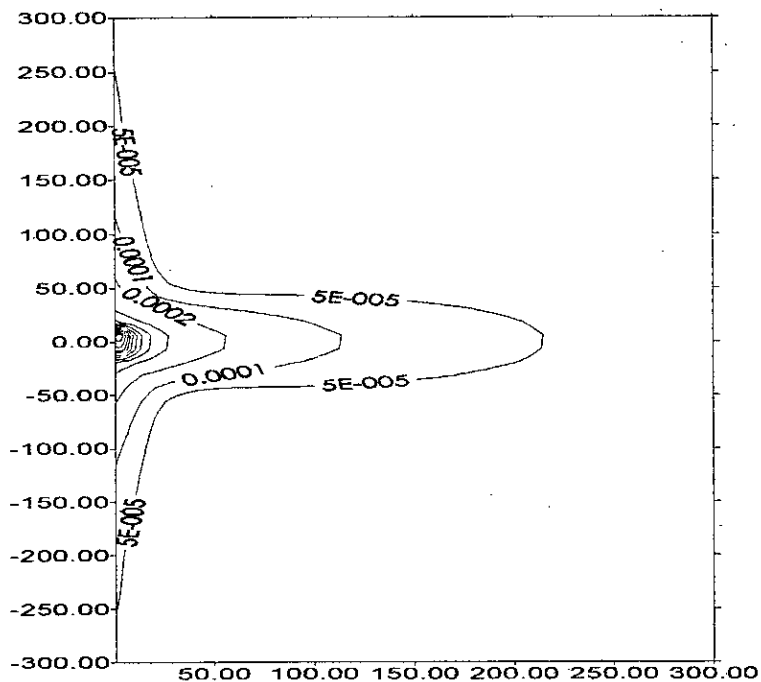


Figure App-13 : Comportement du **champ réduit lointain** (la perturbation) pour l'angle d'ouverture des plaques 45° placée dans la 2^{ème} symétrie, où le champ H_0 est suivant Oz .

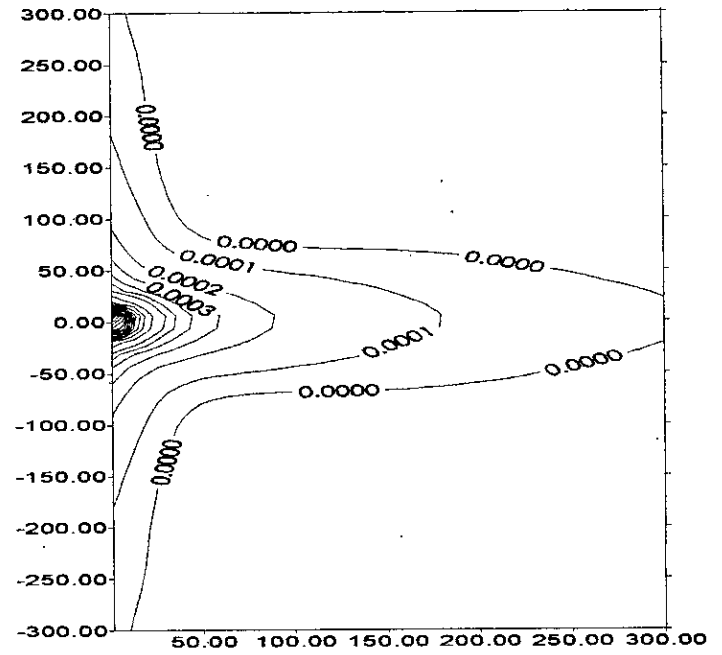
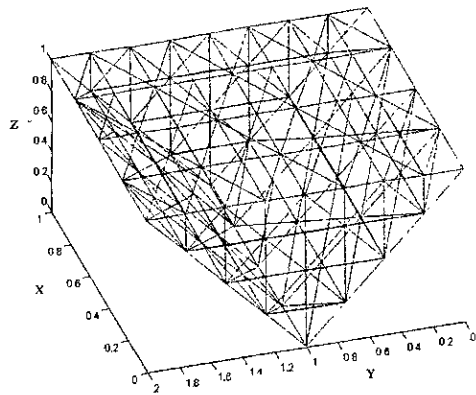


Figure App-14 : Comportement du **champ réduit lointain** (la perturbation) pour la structure à surface fermée avec l'angle d'ouverture des plaques latérales est de 45° , où le champ H_0 est suivant Oz .

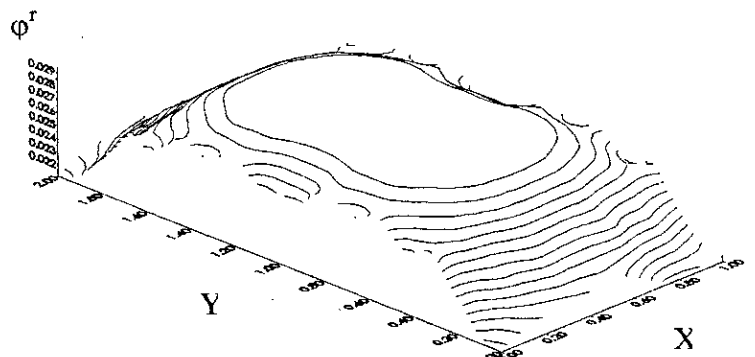
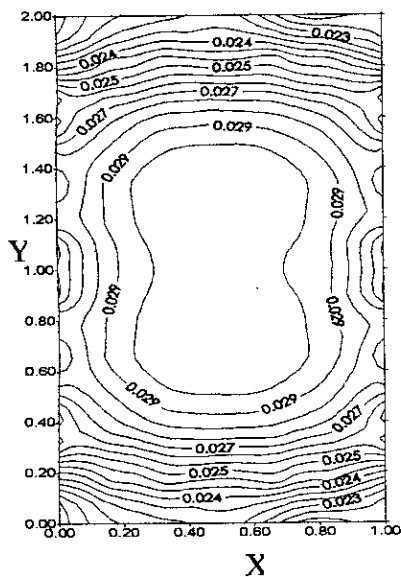


Figure App-15 : Lignes équipotentielles du **potentiel réduit** sur la surface globale de la structure, représentées sur le plan XY, où le champ H_0 est suivant Oz

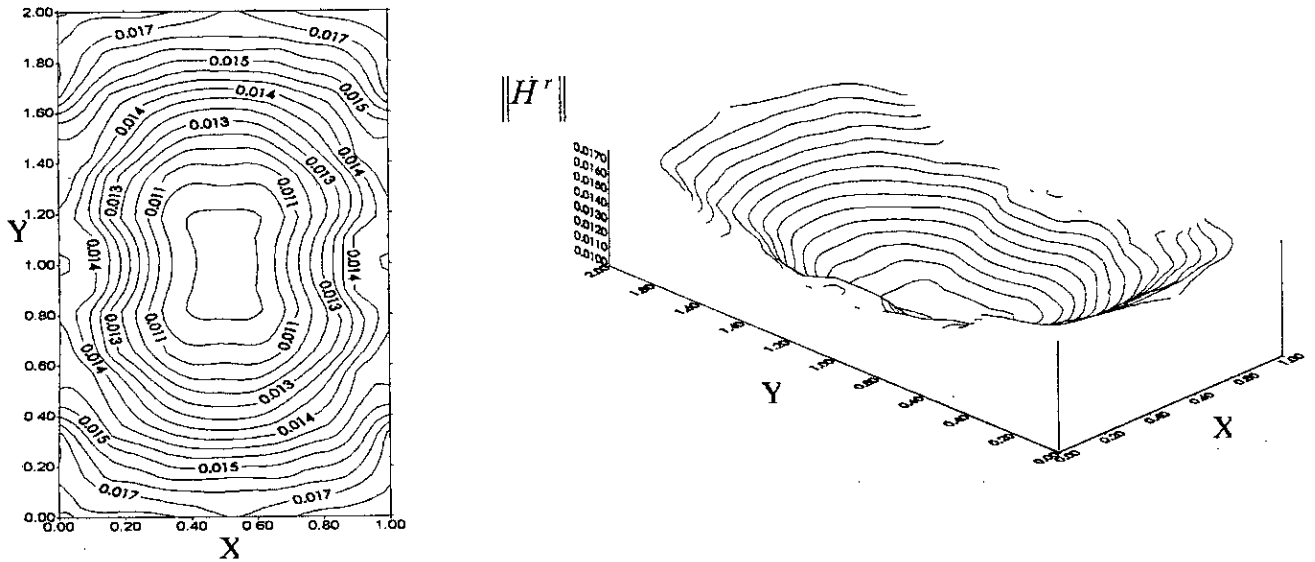


Figure App-16 : Lignes du module du **champ réduit** sur la surface globale pour la structure à surface fermée avec l'angle d'ouverture des plaques latérales est de 45° , où le champ H_0 est suivant Oz .

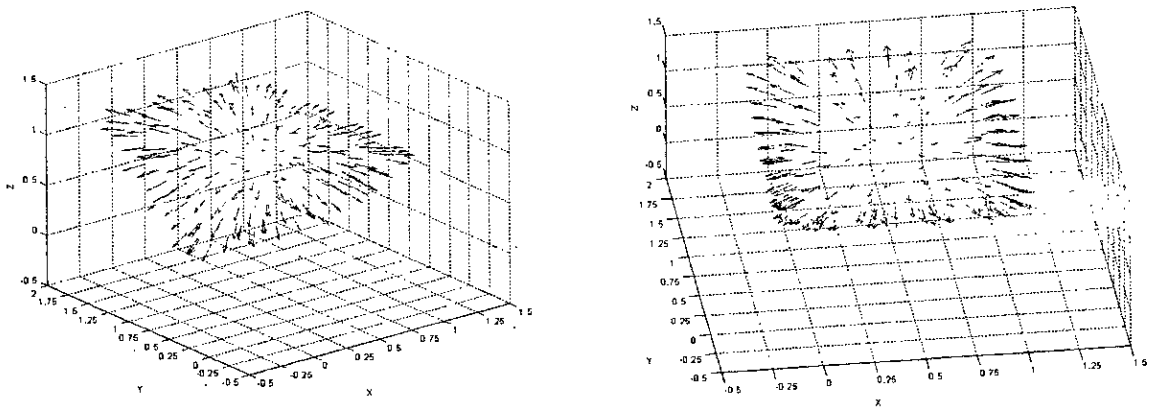


Figure App-17 : Comportement du **champ réduit** sur la structure à surface fermée avec l'angle d'ouverture des plaques latérales est de 45° , où le champ H_0 est suivant Oz .

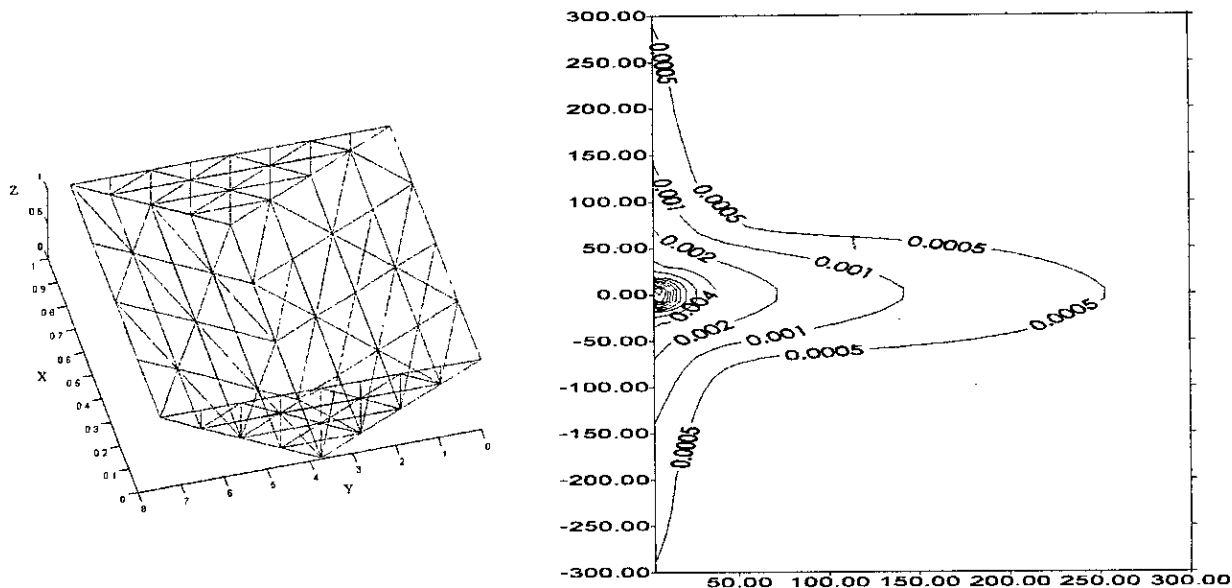


Figure App-18 : Comportement du **champ réduit lointain** (la perturbation) avec l'angle d'ouverture des plaques latérales est de 75° , où le champ H_0 est suivant Oz .

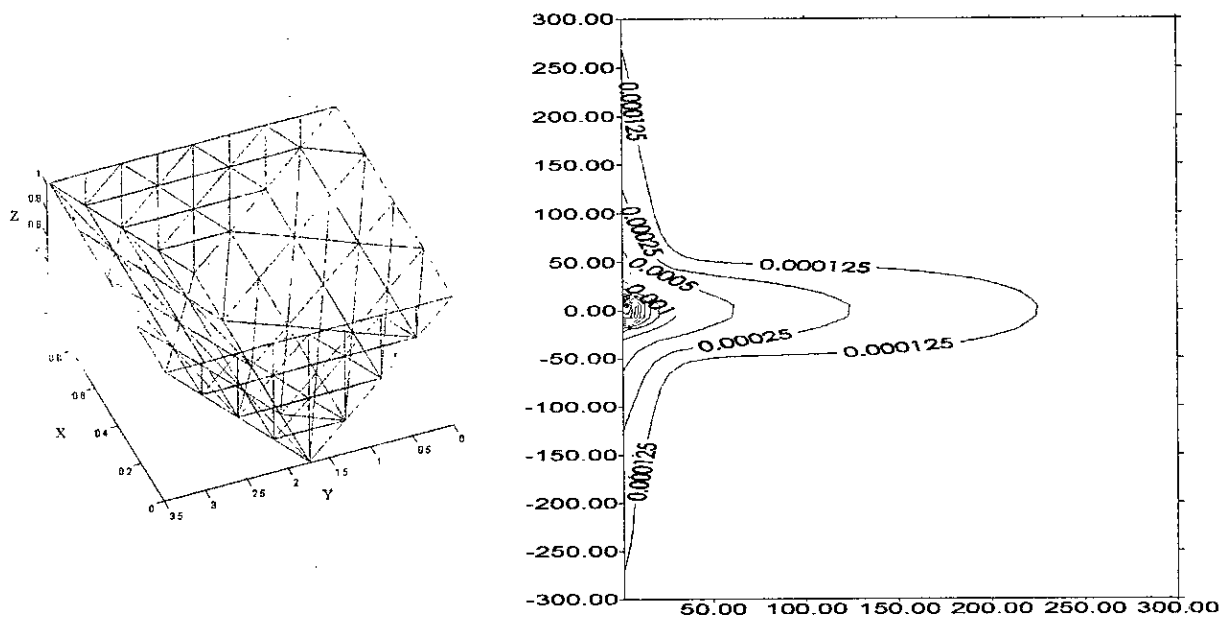


Figure App-19 : Comportement du **champ réduit lointain** (la perturbation) avec l'angle d'ouverture des plaques latérales est de 60° , où le champ H_0 est suivant Oz .

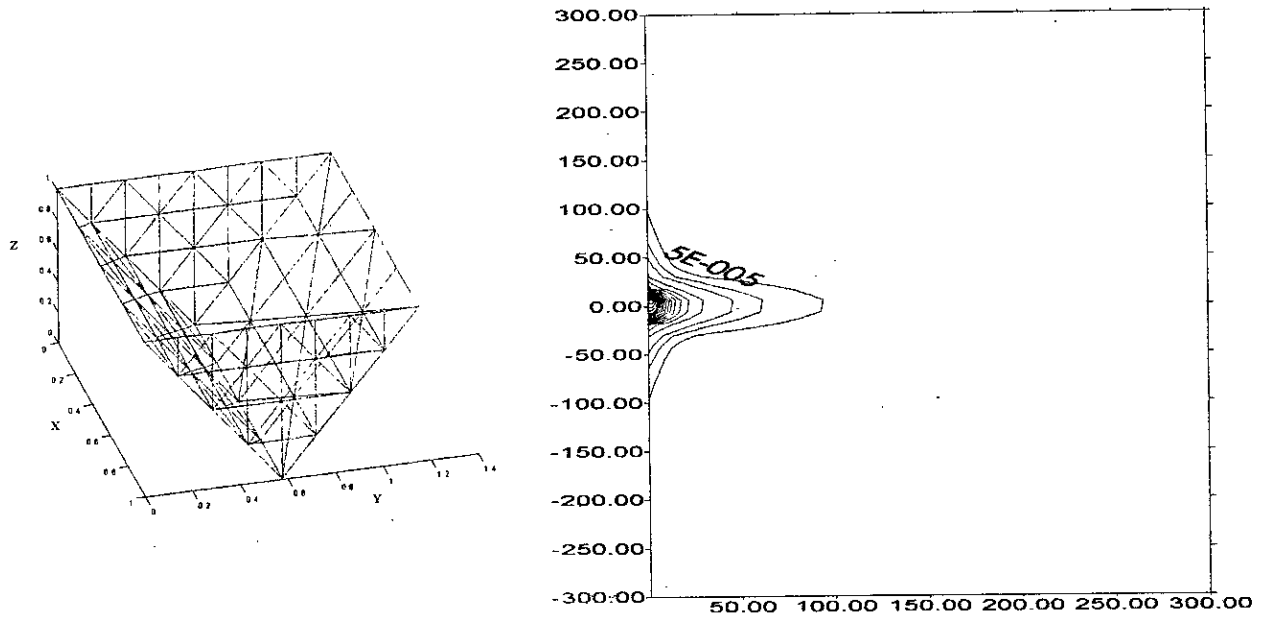


Figure App-20 : Comportement du champ réduit lointain (la perturbation) avec l'angle d'ouverture des plaques latérales est de 30° , où le champ H_0 est suivant Oz .

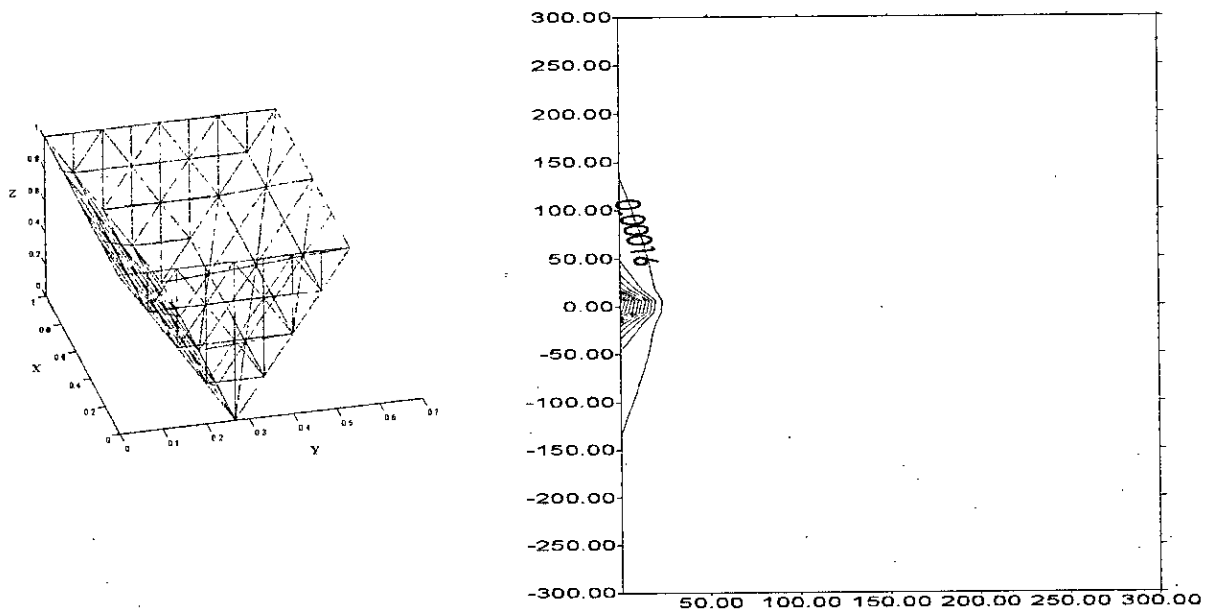


Figure App-21 : Comportement du champ réduit lointain (la perturbation) avec l'angle d'ouverture des plaques latérales est de 15° , où le champ H_0 est suivant Oz .

IV.13.5 Conclusion sur l'application :

Il n'est pas dans notre intention d'apporter par le biais de cette application, une solution définitive aux problèmes de l'aimantation des navires. Bien au contraire, nous avons montré que plusieurs formulations existent et qu'elles sont appliquées chacune à un type de problème ou la méthode de résolution envisagée. Cependant, nous avons montré l'efficacité du modèle en charges de surface dans le calcul du champ magnétostatique perturbé, ainsi que la performance du programme « **IBEMCM-3D** » qui la traite numériquement ; ce qui nous a permis d'effectuer une application qui concerne plus particulièrement le domaine du magnétisme du navire où nous avons essayé de cerner le problème de la perturbation du champ magnétostatique dans ces différentes configurations, liées aux caractéristiques géométriques et physiques du milieu magnétique considéré.

Enfin, l'application à un modèle réduit d'un navire représente un test de notre code sur une géométrie complexe, ce qui a permis d'apprécier la performance de celui-ci dans le calcul du champ magnétostatique perturbé par la présence d'un dispositif perméable de géométrie quelconque en tous points de l'espace tridimensionnel.

CHAPTER V

Chapitre V

Etude technique des systèmes de démagnétisation des navires

V.1 Introduction :

Le globe terrestre est un corps magnétique entouré de forces partant du Nord au Sud dont la densité en un point précis (ou champ magnétique local) assume des valeurs non uniformes particulières dépendant de la latitude, longitude et saison de l'année. Ces valeurs sont reportées sur des cartes établies par des institutions spécialisées dans ce domaine.

Le globe terrestre (et donc les mers et océans) est divisé en zones frappées par des coefficients particuliers directement liés à la valeur d'un champ moyen, et plus spécifiquement à la valeur de sa composante verticale [29].

Ce champ magnétique peut aussi voir son amplitude varier d'année en année. A ce titre, des campagnes périodiques de mesures du champ magnétique terrestre sont menées à l'effet de mettre à jour les cartes établies et donc, la valeur des coefficients de zones cités plus haut.

La perturbation du champ magnétique terrestre locale peut être engendrée par la présence d'un matériau ferromagnétique dans une zone libre, pour ne pas se limiter à un navire mais vu les particularités qu'il représente, on s'intéresse à ses influences pour des raisons multiples et spécifiques. Nous citerons les plus pertinentes dans ce qui suit.

Durant la navigation, le champ magnétique propre au bâtiment interagit avec celui terrestre et en perturbe la configuration. Cette perturbation est mise à profit et utilisée dans la guerre des mines puisque opportunément mesurée, classifiée et identifiée (on parlera alors de signature magnétique du navire), cette perturbation peut servir à activer des mines de différentes natures et destination.

Le processus de démagnétisation d'un navire aura donc pour objectif essentiel de mener avec le maximum de précision possible, l'ensemble des opérations de mesures et de compensation de toute perturbation du champ magnétique terrestre local pouvant être provoquée par le passage du navire, c'est-à-dire, rendre le navire transparent du point de vue magnétique, en réduisant au maximum admissible par les normes opérationnelles (elles-mêmes conditionnées par le type de mines ennemies), le champ magnétique propre à ce dernier.

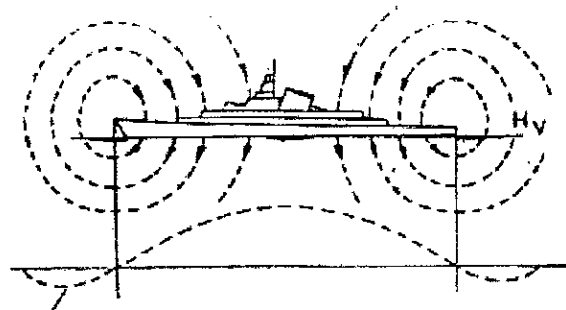
Dans cet esprit, la plus grande partie du magnétisme propre du navire est traitée par une station de démagnétisation qui réduit à la plus petite valeur possible et/ou admissible, en particulier la composante verticale du champ magnétique, qui représente généralement 75 à 80 % du champ total.

V.2 Effets des composantes du champ magnétique sur le navire :

Assimilant un bateau à une masse métallique, on peut considérer ce dernier comme doté d'un champ magnétique propre avec trois composantes verticales, horizontale et transversale (voir figures V.1, 2, 3) dont l'amplitude peut varier, voir augmenter sous l'action conjuguée de différents facteurs, en particulier :

- Un stationnement prolongé dans une même direction ;
- Des gros travaux de soudure ;
- Des déplacements de grosses métalliques (changement de moteurs, pièces d'artillerie, systèmes missiles...) ou changements de configuration technique à bord.

Il reste entendu que tous les moteurs et générateurs électriques de bord lors de leur mise sous tension et/ou fonctionnement, perturbent et amplifient le champ magnétique propre du bâtiment.



H_z causé par H_v

Figure V.1 : Effet de la composante verticale du champ magnétique terrestre

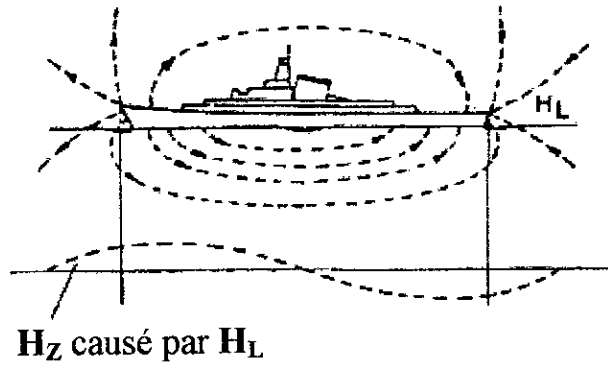


Figure V.2 : Effet de la composante horizontale du champ magnétique terrestre

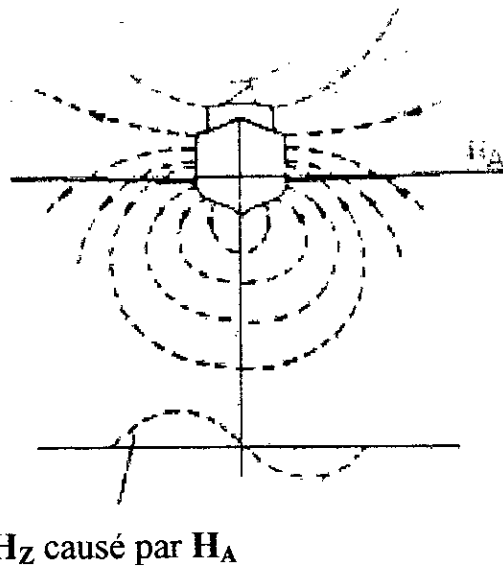


Figure V.3 : Effet de la composante transversale du champ magnétique terrestre

V.3 Définition des besoins opérationnels pour la démagnétisation des navires :

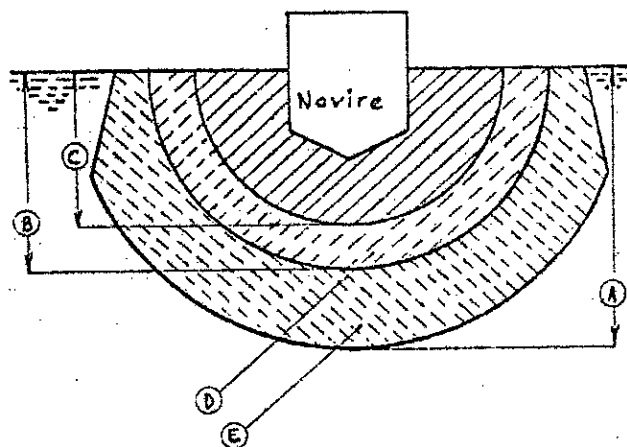
Aujourd'hui, les mines sont dites intelligentes pour leur capacité à identifier des milliers de "signatures magnétiques" des différents types de navires, à classer et à opérer en fonction des données et ordres stockés dans leur mémoire. Elles peuvent être activées par influence

(perturbation provoquée par le passage d'un navire) sous l'effet des composantes du champ magnétique terrestre au point où elles ont été mouillées.

Indépendamment du danger réel auquel sont exposées les unités des forces navales face à l'emploi de ces mines, les équipements modernes de conduite du bâtiment, télécommunication, conduite de tir et toute l'électronique embarquée, sont très sensibles aux valeurs et perturbation du champ magnétique.

Ainsi donc, la nécessité de se pencher sur le problème de la démagnétisation et de disposer d'une station fixe ou mobile se justifie doublement.

Si la nécessité sur le plan de l'emploi opérationnel nous oblige à maintenir les champs magnétiques rémanents à des valeurs et niveaux tolérables en fonction de la notion de "profondeur dangereuse" (voir figures V.4) qui reste à normaliser, les unités et bâtiments navals devront bénéficier de sessions de mesures et de démagnétisation régulières, voire plus fréquentes (Navires de guerre, sous-marins, Corvettes Lance Missiles, Vedettes de combat, etc...)



- A : Profondeur dangereuse sans démagnétisation ou équipement de démagnétisation**
- B : Profondeur dangereuse après démagnétisation**
- C : Profondeur dangereuse avec équipement de Démagnétisation**
- D : Profondeur dangereuse avec traitement Magnétique**
- E : Profondeur dangereuse sans traitement magnétique**

Figure V.4 : Définition de la profondeur dangereuse

V.4 Traitement du magnétisme résiduel :

Le magnétisme rémanent ou résiduel est traité par les équipements de démagnétisation installés à bord d'un navire. Ce traitement dépendra essentiellement :

- de la qualité avec laquelle il aura été traité par la station de démagnétisation particulièrement en fonction de la précision des mesures effectuées,
- De la zone de navigation et donc de la fiabilité des coefficients de zones disponibles sur les cartes magnétiques.

V.5 Méthodes pratiquées pour la démagnétisation :

On peut envisager trois méthodes pour la désaimanter : [9]

1. L'application d'un champ inverse dont l'intensité est soigneusement contrôlée et qu'on supprime ensuite ;
2. L'application d'un champ alternatif d'amplitude initiale soigneusement contrôlée et qu'on fait décroître ensuite régulièrement jusqu'à zéro ;
3. Le chauffage de l'échantillon au-dessus du point de curie et son refroidissement en champ nul.

Seule la première méthode reste très utilisable dans la désaimantation des navires vue la complexité des caractéristiques propres de ce dernier, ainsi que les particularités des composantes du champ magnétique qui le caractérise. Dans ces conditions on doit appliquer un champ inverse pour chacune des trois composantes du champ propre du navire (voir figure V.5).

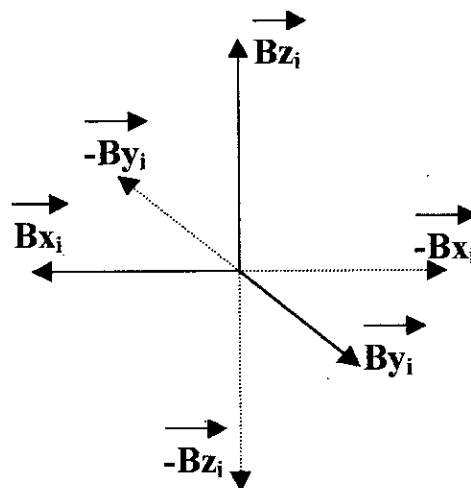


Figure V.5 : Représentation vectorielle des composantes des champs magnétisants et démagnétisants

V.6 Les stations de démagnétisation et leur composition :

La station de démagnétisation, qu'elle soit fixe (à terre) ou mobile (embarquée) dispose d'un ensemble d'équipements destinés :

- D'une part à mesurer les valeurs des 03 composantes du champ magnétique local (valeurs de référence) et les perturbations créées par le passage de la masse métallique représentée par le bâtiment. Par différence, des méthodes manuelles et/ou automatisées de calcul peuvent permettre de déterminer "la signature magnétique du bâtiment", et donc les valeurs des 03 composantes magnétiques qui lui sont propres ;
- D'autre part réduire ces dernières, en particulier la composante verticale qui est la plus importante en amplitude, jusqu'à des valeurs résiduelles qui peuvent être prises en charge et traitées par les dispositifs de démagnétisation installés à bord et ce, en fonction des zones où le bâtiment est en navigation.

V.6.1 Composition de la station de démagnétisation :

La station de démagnétisation comprend deux parties :

- une partie est constituée par le système de mesures (champs magnétiques locaux et induits, profondeur et marée, signature acoustique éventuellement), un système de traitement de signaux, commande et contrôle de tout le processus de démagnétisation
- Une autre partie constituée par la source d'énergie primaire, les moyens électrotechniques de sa conversion en énergie nécessaire à la création du champ magnétique de compensation.

Généralement, la station de démagnétisation dispose de trois jeux bobines destinés à réduire les trois composantes "verticale, longitudinale et transversale" résultant du champ magnétique du bâtiment. Ces bobines sont enroulées manuellement autour du bâtiment selon les 03 axes et le nombre de tours (de spires) est calculé en fonction de la taille et du magnétisme rémanent propre au bâtiment en cours de traitement.

Certaines stations fixes (à terre) disposent de façon permanente au fond de l'eau à une profondeur convenable, un jeu de bobines pour traiter la composante verticale du champ magnétique. Pour compenser les trois composantes, on place autour du bâtiment les enroulements temporaires suivants :

V.6.1.1 Enroulement horizontal sur la longueur du bâtiment :

Cet enroulement est placé autour du bâtiment sur le plan horizontal au niveau de la ligne de flottaison. Mis sous tension, il crée la composante verticale de compensation en fonction des mesures préliminaires effectuées.

(voir figure V.6.a).

V.6.1.2 Enroulement de cap parallèle aux couples du bâtiment :

Cet enroulement ceinture le bâtiment sur toute sa longueur dans le plan des couples du bâtiment. Mis sous tension, il crée en fonction des mesures préliminaires effectuées, la composante horizontale de compensation.

(voir figure V.6.b).

V.6.1.3 Enroulement longitudinal du bâtiment :

Cet enroulement est posé selon le plan longitudinal sur les deux cotés bâbord et tribord. Mis sous tension, il crée en fonction des mesures préliminaires effectuées, la composante transversale de compensation (voir figure V.6.b).

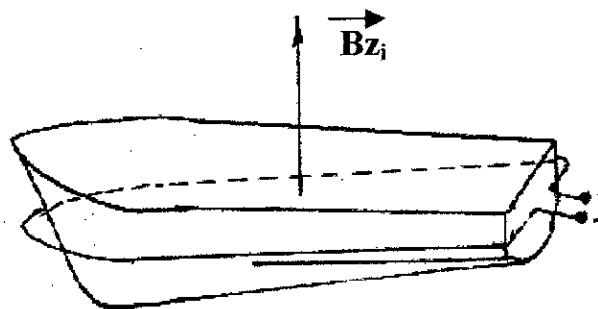


Figure V.6.a : Principe de pose de l'enroulement de démagnétisation du champ vertical.

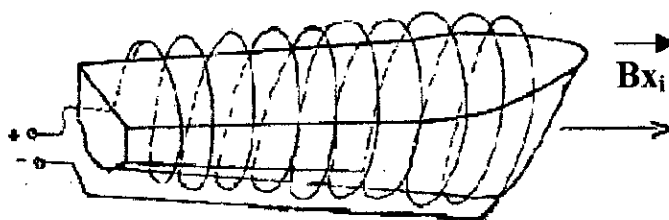


Figure V.6.b : Principe de pose de l'enroulement de démagnétisation du champ longitudinal.

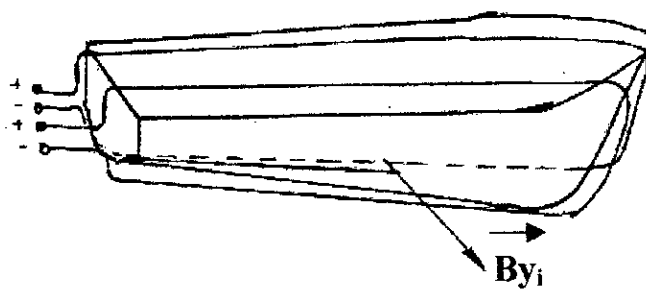


Figure V.6.c : Principe de pose de l'enroulement de démagnétisation du champ transversal

V.6.2 Critères d'une station de démagnétisation :

V.6.2.1 Critères principaux :

Quelle que soit la variante de station choisie par un chantier naval pour la démagnétisation de ses unités, elle devra répondre aux critères suivants :

1. Capacité de prendre en charge les bâtiments et sous-marins ayant les dimensions suivantes:
 - longueur hors tout = 130 mètres maximum
 - largeur hors tout = 18 mètres maximum
 - déplacement = 2500 à 3000 T
 - tirant d'eau = 07 m

2. Effectuer les mesures magnétiques statiques et dynamiques et assurer le traitement automatique des données ainsi que leur stockage.
3. Possibilité de procéder aux mesures acoustiques à l'effet de définir les signatures acoustiques des unités en cours de traitement.
4. Assurer la compensation magnétique des trois composantes du champ magnétique mesuré.
5. Assurer une surveillance optique par la télévision des approches de la zone de démagnétisation des unités.

V.6.2.2 Critères spécifiques à une station de démagnétisation mobile :

Si on opte pour une station de démagnétisation mobile (embarquée), en plus des exigences supra citées, le navire porteur de la station de démagnétisation devrait pouvoir assurer les missions suivantes :

1. Disposer des moyens techniques de soutien aux sous-marins (air comprimé très haute pression, dispositifs de sauvetage, capacité de recharge totale et/ou partielle des batteries, soutien logistique spécialisé etc...
2. Disposer de laboratoires équipés pour mener des missions océanographiques, hydrographiques, relevés topographiques, sismiques et bathymétriques classiques.
3. Disposer de moyens techniques de mesures pour la réalisation des cartes des zones magnétiques terrestres.

V.6.3 Choix de station de démagnétisation :

Pour le choix de la variante, les stations de démagnétisation fixe (station terrestre) et mobile (station embarquée à bord d'une plate-forme navale, donc mobile par essence) présentent les avantages et les inconvénients suivants :

V.6.3.1 Station fixe (à terre) de démagnétisation :

a) Avantages :

1. Nécessité de disposer d'une équipe de départ réduite mais de très haut niveau;
2. Personnel exploitant permanent pour de longues années de service ;
3. Zone d'installation abritée et décontaminée de tous déchets chimiques probables ;
4. Système de mesure installé de façon permanente offrant une très grande précision de mesure, et donc de démagnétisation ;

5. Coût d'investissement relativement moindre par rapport à celui de la station embarquée ;
6. Facilité d'entretien ;
7. Coût d'entretien réduit ;
8. Possibilité de traiter les bâtiments civils et militaires ;

b) Inconvénients :

Exécution d'une seule mission à savoir, mesure des valeurs des champs magnétiques et démagnétisation des unités si les paramètres de tolérance sont dépassés.

V.6.3.2 Station mobile (embarquée) de démagnétisation :

a) Avantages :

1. Mobilité opérationnelle et grande souplesse d'emploi ;
2. Possibilité d'assurer le soutien aux sous-marins particulièrement faire la charge des batteries ;
3. Possibilité d'assurer des missions secondaires d'hydrographie et d'océanographie, de relevés sismiques, ainsi que la détermination des mesures de bases nécessaires à la réalisation des cartes des zones magnétiques du champ d'action des bâtiments ;
4. Vecteur de visibilité technologique et scientifique avec ses laboratoires embarqués ;

b) Inconvénients :

1. Nécessité de disposer au départ d'un équipage très hautement qualifié ;
2. Changement périodique des membres de l'équipage, donc possibilité de perte du capital expérience accumulé ;
3. Perte de temps pour la pose du système de mesure et probabilité de réduction de la précision des mesures ;
4. Investissement nettement plus élevé par rapport à celui de la station à terre ;
5. Investissement qui ne pourrait se justifier que par l'importance, l'ampleur et le volume des missions secondaires qui seraient confiées au navire ;
6. Coût d'entretien élevé ;

V.7 Exemples de station à terre et mobile démagnétisation :

V.7.1 Station à terre (Référence = TELEFUNKEN - Allemagne - 1980) :

(voir figure V.7)

V.7.1.1 Définition des profondeurs requises :

Les profondeurs auxquelles doivent être installées les bobines de compensation du champ magnétique local et celles de démagnétisation, sont intimement liées à la largeur des unités à démagnétiser. Compte tenu de la classification effectuée plus haut, nous pouvons retenir deux profondeurs :

- La profondeur de **8 mètres** pour les unités légères (petit et moyen tonnage)
- La profondeur de **16 mètres** pour les grandes unités

Pour ne pas avoir des coûts d'installation prohibitifs, nous pouvons combiner les exigences des deux catégories en une seule solution. Le jeu de bobines nécessaires sera unique et sa taille sera dimensionnée en fonction des ampères spires requises par les unités majeures. Ces bobines seront déposées à une profondeur moyenne de **9 mètres**.

V.7.1.2 Définition des appareils de mesures et de leurs sites d'installation :

La série de magnétomètres nécessaires à la mesure des perturbations électromagnétiques et donc à l'évaluation des courants nécessaires, seront disposés en croix (**voir figure V.8**). Chaque direction de la croix contiendra **11 magnétomètres tridimensionnels** disposés à **2 mètres** les uns des autres. Ainsi pourront-ils mesurer le champ magnétique local et ses perturbations sur une largeur utile de **22 mètres**.

Ceci est valable pour les unités de petit et moyen tonnage.

Pour les unités majeures, vu que leur largeur est nettement supérieure à 8 m, et pour tenir compte de la combinaison des deux catégories, nous pouvons mettre la série des magnétomètres tridimensionnels à la profondeur de **16 mètres** grâce à un forage sous-jacent la croix pour les unités de petit tonnage, soit les couler à une profondeur de **17 mètres**. La première hypothèse est plus économique vu qu'elle ne conduit pas à la réalisation d'un double ouvrage en génie civil.

Pour l'arrimage des magnétomètres, les mêmes fondations de béton seront utilisées pour les deux séries de magnétomètres (**voir figure V.9**).

La différence entre les deux dispositifs de mesure réside dans le fait que maintenant la distance entre les magnétomètres sera de **4 mètres**. Aussi pour les unités majeures, le champ magnétique local et ses perturbations seront mesuré sur une distance de **11 x 4 = 44 m**. On

réalise donc une économie appréciable sur les travaux de génie civil ainsi que sur les travaux de mise au point essentiels pour la qualité des mesures.

La seule difficulté résidera peut-être dans le forage des **22** trous (où loger les magnétomètres) si le fond marin est de nature rocheuse.

La solution préconisée restera valable tant que les travaux de prélèvements et de carottage ne seront pas exécutés dans le site choisi.

Le champ magnétique terrestre local sera mesuré par deux magnétomètres de très haute précision spécialisés dans cette fonction. Ils seront disposés de manière opportune sur le site et les mesures qu'ils permettront d'effectuer serviront de référence pour le pilotage des courants de démagnétisation devant être produits par la station de démagnétisation.

La profondeur sera mesurée par un transducteur de profondeur pouvant mesurer des profondeurs allant de **0 à 35 m** avec une précision à lier à l'amplitude de la marée et à la taille des bâtiments à traiter.

V.7.1.3 Technique et réalisations du génie civil :

La technique utilisée sera du type préfabrication à terre des fondations de béton ainsi que des ouvrages sous-marins requis. Ceux-ci seront transportés par ponton ou plate-forme et coulés aux endroits choisis. Ces travaux se feront sur les spécifications du bureau d'études.

Cette partie du projet est d'une importance capitale pour la précision des mesures et donc de l'efficacité de la démagnétisation.

La précision des forages est de l'ordre de plus ou moins un degré ($\pm 1^\circ$) par rapport à la verticale est l'alignement des magnétomètres ne devra pas dépasser **35 minutes d'arc** par rapport à la direction locale du champ magnétique terrestre.

Il reste entendu que les spécifications techniques sus mentionnées restent totalement valables pour une station embarquée sauf que la plate-forme mobile devra avoir en plus, les moyens de mettre à flot, poser et régler sa propre installation de mesures, démonter, tirer à sec et stocker à bord tout ce dispositif, y compris les différentes bobines de compensation et de démagnétisation.

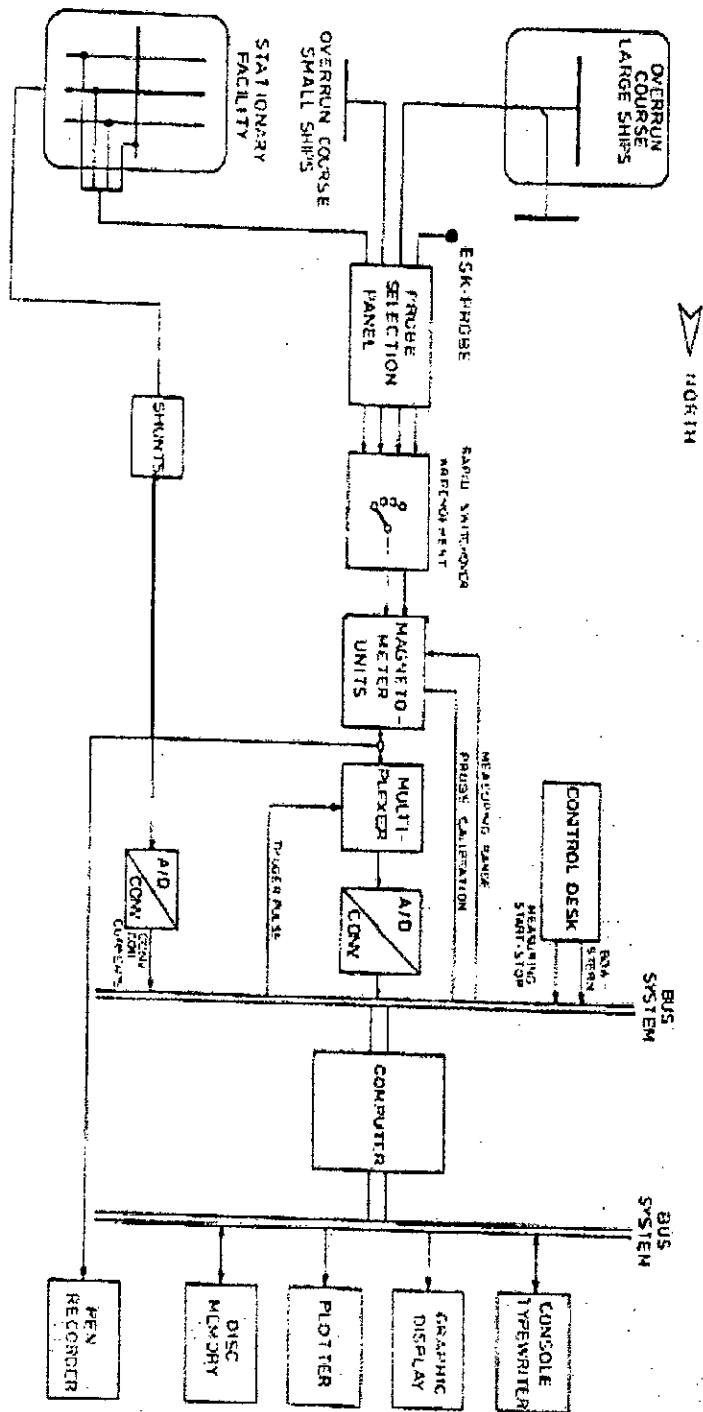


Figure V.7 : Schéma de principe d'une station fixe, mesure et démagnétisation (AEG-TELEFUNKEN)

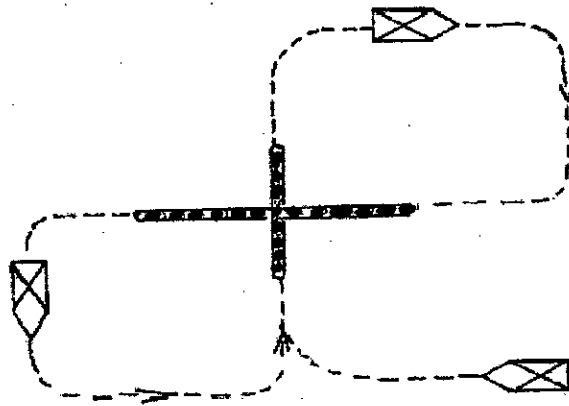


Figure V.8 : Disposition en croix des magnétomètres

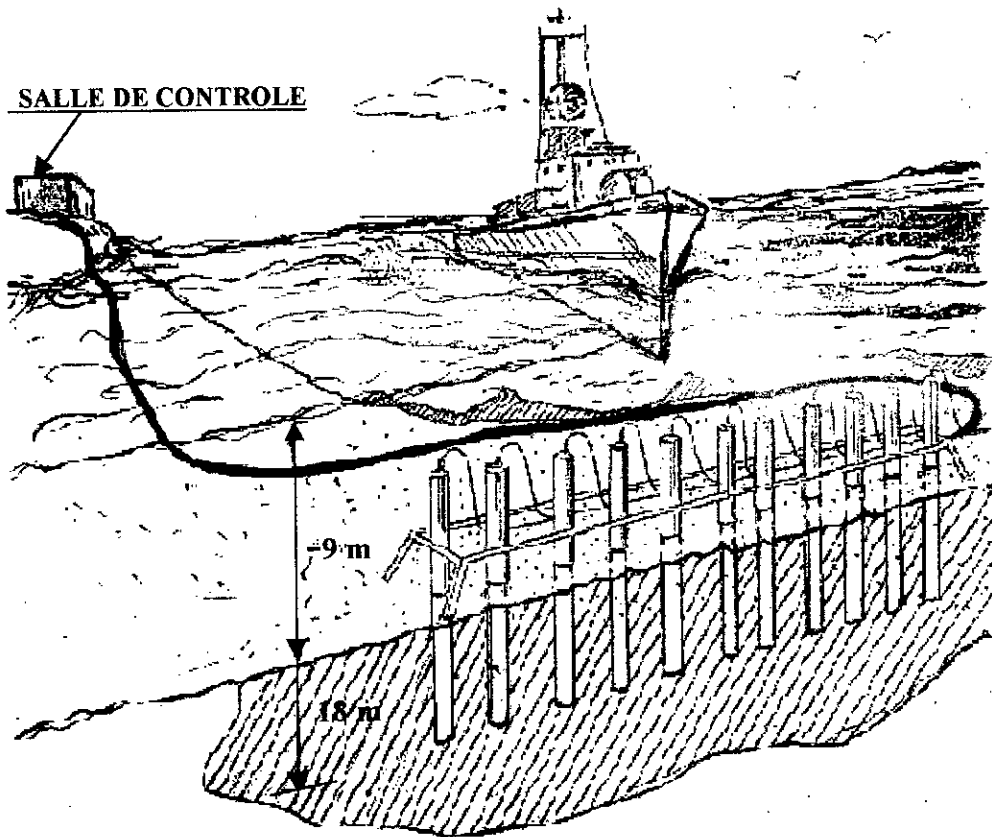


Figure V.9 : Croquis montrant l'arrimage des magnétomètres

V.7.2 Station embarquée (Référence = CENZIN - Pologne - 1996) :

L'installation de démagnétisation propre au navire sert à compenser la composante verticale de son champ magnétique lorsque cette dernière ne dépasse pas la valeur de consigne de plus ou moins +/- 20 mOe (Milli Oersted) (+/- 02 micro Tesla).

V.7.3 L'installation propre de démagnétisation (voir figure V.10). :

L'installation propre comprend :

a) Bobines de démagnétisation :

- Bobines principales et bobines de compensation à double niveau pour compenser les composantes verticale et induite B_{z_p} et B_{z_i} jusqu'à une valeur maximale de +/- 0,2 micro Tesla mesurée à une profondeur équivalente à 78% du tirant d'eau maximum du navire.
- Bobines de compensation horizontale de la composante B_{x_i}
- Bobines de compensation verticale de la composante B_{y_i}

Les bobines sont constituées de câbles en polyvinyle ou en caoutchouc

Le système de compensation automatique est utilisé pour le réglage du courant de démagnétisation dans les bobines.

b) Alimentation et contrôle de l'installation de démagnétisation :

(voir figure V.11)

- 03 convertisseurs séparés de 380 V/58 Hz et 230 V DC avec des excitations séparées alimentées à partir d'une amplidyne sont prévus pour alimenter chaque bobine.

Le pilotage des convertisseurs et des amplidyne est effectué à partir du tableau principal de distribution de bord. Profondeur équivalente à 78% du tirant d'eau maximum du navire. Les convertisseurs et les amplidyne sont situés dans la salle des machines principales.

Indépendamment de son installation propre pour la démagnétisation de son champ résiduel ou rémanent brièvement décrite ci-dessus, le navire de démagnétisation proposé par la société CENZIN embarque une installation spéciale de fabrication russe est décrite ci-après.

c) Système spécial de démagnétisation :

Le système énergétique d'alimentation installé à bord du navire délivre des impulsions variables en amplitude, durée et le temps de rupture pour alimenter les bobines de

démagnétisation. L'amplitude maximale des impulsions est de **6000 A**, délivrée à 400 Volts pour une puissance d'exercice de **2400 kW**.

Le nombre d'impulsions est de **220 cycles/Seconde**

Le contrôle de la génération d'impulsions est effectué par le complexe (**fabriqué en ex. URSS**) "**GRAN - A**". Ce complexe a pour missions :

- D'alimenter les bobines de démagnétisation ;
- De piloter simultanément 02 générateurs d'impulsions ;
- De varier la forme d'impulsion ainsi que l'instant de coupure ou d'inversion ;
- De générer des impulsions allant jusqu'à 6000 Ampères.

L'installation spéciale complète de démagnétisation comprend :

1. Deux (02) générateurs d'impulsions alimentant les bobines principales et constitués chacun par un moteur électrique, un générateur et un volant d'inertie dont la vitesse de rotation à vide est de **1500 tr / min**
 - a) une génératrice de **400 V**, délivrant **2 x 3000 A** et une puissance d'impulsion de **2400 kW**.
 - b) Un générateur de courant de **430 V** et (**1370 A à pleine charge et 180 A à vide**)
2. Le système GRAN-A lui-même
3. Deux (02) amplificateurs rotatifs pour alimenter le générateur d'impulsion
4. Deux (02) convertisseurs pour alimenter des bobines
5. Deux (02) amplificateurs rotatifs pour alimenter les convertisseurs cités en position 4
6. Panneaux de contrôle des interrupteurs de puissance
7. Armoire de contrôle de démagnétisation
8. Panneau des interrupteurs de commande des circuits en courant continu
9. Cinq (05) points de connexion situés sur la coque servant à alimenter les bobines de démagnétisation

V.8 Site d'installation des stations de démagnétisation et infrastructure nécessaire :

V.8.1 Station mobile (embarquée) de démagnétisation :

Nécessité d'un port d'attache du navire porteur de la station de démagnétisation d'une part et de la disponibilité de l'énergie électrique d'autre part (réseau aérien et centrales de secours)

V.8.2 Station terrestre (fixe) de démagnétisation :

La station fixe (terrestre) sera implantée en fonction de 04 critères suivants :

- Profondeurs disponibles en fonction de la largeur des bâtiments à traiter ;
- Rayons de girations et espaces de manœuvres des grands bâtiments ;
- Le site doit être protégé ;
- Disponibilité de l'énergie électrique ;
- Proximité immédiate d'un établissement de construction et réparation navale pour faire subir la procédure de mesure et démagnétisation à tous les navires en construction, en réparation et/ou en carénage de façon systématique après l'arrêt technique ;
- Site doit être abrité des facteurs météorologiques influents dans la zone ;
- Masse d'eau en contact permanent avec la mer ;
- Site dépourvu de toute décharge ou agression pouvant influencer sur les matériaux utilisés par l'installation, particulièrement les capteurs de mesures ;
- Disponibilité de l'énergie électrique (réseau aérien et centrales de secours).

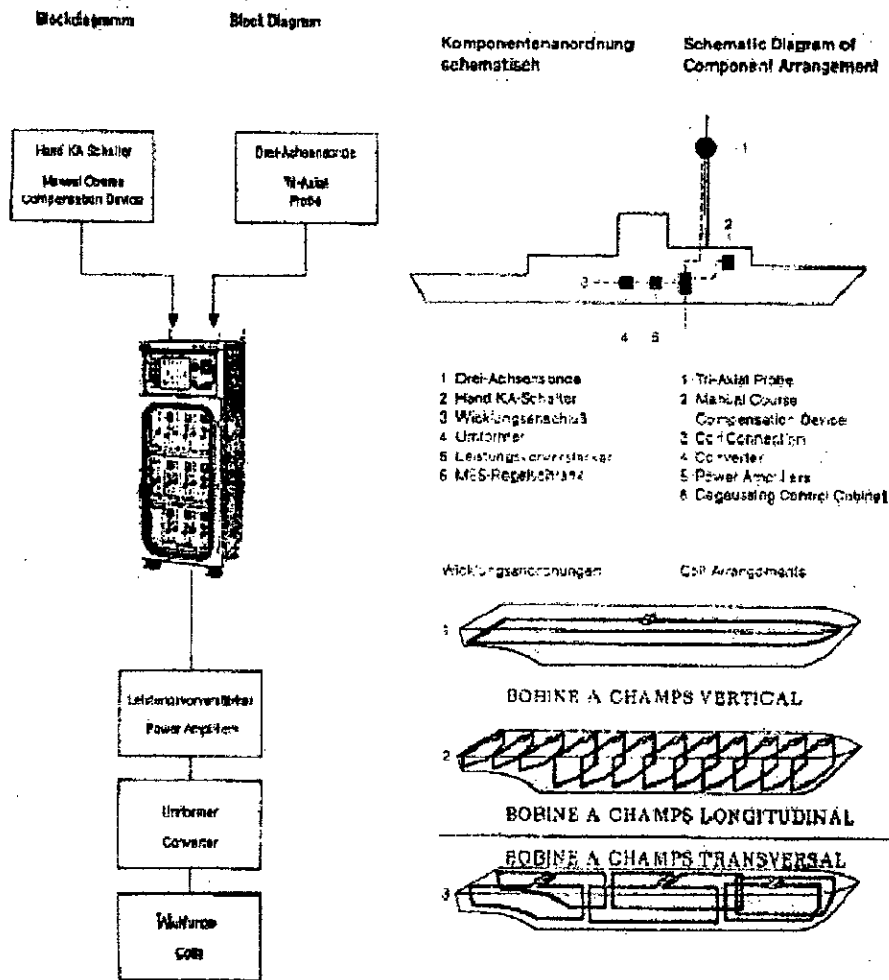


Figure V.10 : Principe de l'installation de démagnétisation et de compensation propre au navire

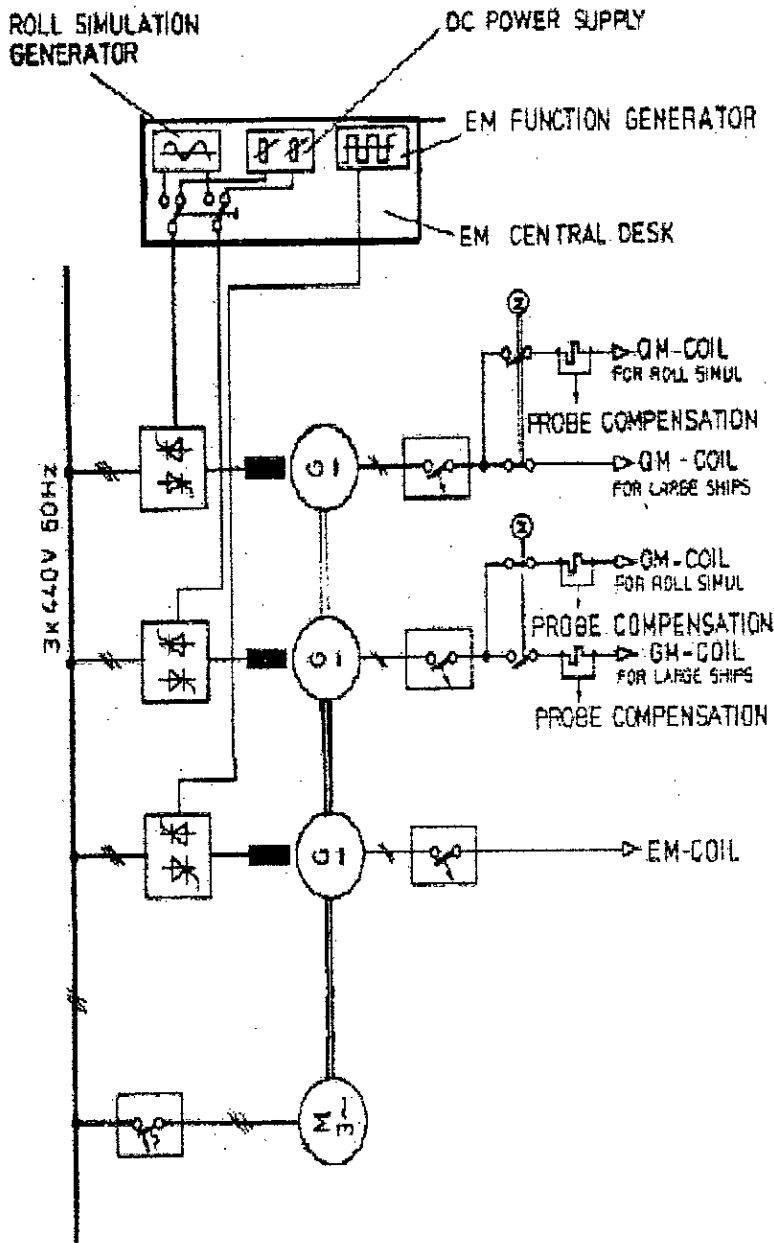


Figure V.11 : Schéma de principe de l'installation des équipements de puissance d'une station de démagnétisation (AEG-TELEFUNKEN)

V.9 Conclusion :

En fonction des priorités opérationnelles d'un chantier naval, des contraintes financières et de la disponibilité des personnels qualifiés dans le domaine, une des deux stations de démagnétisation doit être sélectionnée après avoir mené avec soin des études de faisabilité et technico-économiques et le suivi, relatives au projet d'acquisition d'une installation de démagnétisation.

Sans préjuger de son coût, la station mobile (Navire multirole combiné à une station fixe de mesures magnétiques et acoustiques) semble celle qui offre le maximum d'avantages en termes de souplesse d'emploi opérationnel.

Elle combine la fiabilité et la précision des mesures acoustiques et magnétiques à la mobilité de la station de démagnétisation qui jouera en même temps le rôle de soutien opérationnel aux sous-marins et permettra le développement des sciences hydrographiques.

Actuellement on assiste à un développement technologique considérable dans ce domaine, où plusieurs logiciels de conception, de prévision et d'évaluation des systèmes de démagnétisation sont commercialisés. On citera le logiciel « SWECADE » développé par « Polyamp AB, SE-191 29 Sollentuna, Suède » qui a été livré dans une version suédoise, à la marine suédoise RSwn vers la fin de 1995. Depuis lors le RSwn a équipé toutes leurs stations (fixe à terre ou embarquée) avec ce logiciel. SWECADE est conçu pour fonctionner sur un système standard d'un PC Pentium de 32 M RAM approximativement. SWECADE maintenant est développé pour inclure des modules permettant de calculer des signatures lointaines de champ à de plus grandes profondeurs que la profondeur mesurée.

En fin, aucun confort, ni aucune technologie moderne ne sont généralement possibles sans électricité, et il n'est bien sur pas question de la supprimer. Mais le moins que l'on puisse faire, lorsqu'un facteur de danger est présent, c'est de connaître puis d'être à même de l'évaluer pour se protéger.

CONCLUSION

GENERALE

Conclusion générale

Le travail présenté montre l'efficacité du modèle en charges de surface dans le calcul de la perturbation d'un champ magnétostatique par la présence d'un dispositif ferromagnétique magnétique massif ou en coque mince et homogène, de part la souplesse de sa mise en œuvre numérique et sa précision dans le calcul du champ magnétique perturbé dans un domaine non borné. Cependant, l'une des insuffisances de ce modèle est de ne pas avoir fait intervenir les densités de charges qui nécessitent une connaissance physique plus détaillée. Dans une tentative de pallier cette insuffisance nous avons développé deux méthodes dites formulations mixtes qui nous permettent de modéliser au mieux le problème de la perturbation du champ et en particulier dans un milieu formé en coque mince, mais vu la difficulté de leur mise en œuvre numérique, nous avons retenu la méthode en coque basée sur la BEM du fait que notre code de calcul comporte les différents blocs qu'elle fait intervenir.

D'après les tests de validation effectués, nous avons noté quelques imprécisions de la méthode en coque pour des points situés à une distance plus loin du domaine, et ceci est dû à plusieurs paramètres dont nous citons l'introduction des conditions aux limites imposées et la complexité du système linéaire généré. Néanmoins, les résultats obtenus jusqu'ici confirment sa validité. Par ailleurs, on peut conclure sur la méthode des intégrales de frontière (BEM), qu'elle donne des résultats probants même si le nombre des éléments du maillage est réduit, il faut avoir recours, dans certains cas aux éléments d'ordre supérieur afin d'éliminer l'erreur géométrique que posent les éléments constants et linéaires.

Il serait toute fois intéressant d'enrichir le code élaboré par un traitement numérique des différentes méthodes proposées, ainsi que dans le cas où la perméabilité du milieu sollicité dépendrait du champ magnétique. Ceci consisterait à prendre en considération des phénomènes propres aux matériaux ferromagnétiques.

Pour ce qui de la qualité des résultats obtenus lors de notre étude d'un modèle réduit d'un navire, celle-ci a permis l'acquisition d'une convergence non négligeable dont nous sommes pleinement rassurés, du fait qu'ils sont en accord avec la théorie connue dans ce domaine. Nous espérons avoir montré que le fait que la solution analytique et/ou expérimentale concernant ce modèle réduit ne serait pas bien connue pour une comparaison quantitative sérieuse n'est pas un handicap pour la compréhension qualitative du phénomène physique globale auquel nous nous sommes intéressés, et pour l'obtention de grandeurs approximatives qui peuvent y servir.

Enfin, le travail présenté se veut d'une part un outil qui pourrait permettre à l'équipe de recherche en modélisation des systèmes électromagnétiques d'effectuer des applications plus ou moins difficiles, et d'autre part une contribution à la richesse de l'U.E.R./ E.L.T-EMP par le code élaboré qui sera une plate forme pour des travaux beaucoup plus pointus, tel le calcul de la signature électromagnétique d'un navire dont nous espérons aussi avoir modestement offert au lecteur un point de vue original sur ce domaine et espérons l'avoir ainsi aidé à le comprendre.

ANNEXE

Annexe

1. Fonction de Green dans le vide :

La fonction de Green dans le vide est la solution fondamentale des équations aux dérivées partielles.

$$G(p, q) = \frac{1}{2\pi} \log r \quad \text{en } 2D \quad (\text{A.1})$$

$$G(p, q) = \frac{1}{4\pi r} \quad \text{en } 3D \quad (\text{A.2})$$

où

$$r = |p - q| = \begin{cases} \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2} & \text{en } 2D \\ \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2} & \text{en } 3D \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

2. Propriétés des dérivées de la fonction de Green :

2.1 Dérivées de G_0 par rapport à r :

$$\begin{cases} \frac{\partial G_0}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r} \\ \frac{\partial^2 G_0}{\partial r^2} = \frac{1}{2\pi r^2} \end{cases} \quad \text{en } 2D \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial G_0}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi r^2} \\ \frac{\partial^2 G_0}{\partial r^2} = \frac{1}{2\pi r^3} \end{cases} \quad \text{en } 3D \quad (\text{A.5})$$

2.2 Dérivées de r suivant la normale n_q et le vecteur v_p :

$$\frac{\partial r}{\partial n_q} = -\frac{r n_q}{r} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial r}{\partial v_p} = -\frac{r v_p}{r} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial v_p \partial n_q} = -\frac{1}{r} (v_p n_q + \frac{\partial r}{\partial v_p} \frac{\partial r}{\partial n_q}) \quad (\text{A.8})$$

2.3 Expressions de $[\partial^2 G_0 / (\partial v_p \partial n_q)]$:

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial v_p \partial n_q} = -\frac{1}{2\pi r^2} (v_p n_q + 2 \frac{\partial r}{\partial v_p} \frac{\partial r}{\partial n_q}) \quad \text{en } 2D \quad (A.9)$$

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial v_p \partial n_q} = -\frac{1}{4\pi r^3} (v_p n_q + 3 \frac{\partial r}{\partial v_p} \frac{\partial r}{\partial n_q}) \quad \text{en } 3D \quad (A.10)$$

BIBLIORAPHIE

Bibliographie

Les ouvrages :

[1] A. Bossavit, C. Emson, I. D. Mayergoyz:

« Méthodes numériques en électromagnétisme. »

Editions Eyrolles 1991

[2] A. Bossavit:

« Electromagnétisme en vue de la modélisation. »

Springer-verlag France, Paris, 1993

[3] E. Durand:

* « Magnétostatique. » E^{dt}. Masson 1968

* « Electrostatique. » Tome I,II,III, E^{dt}. Masson 1966

[4] J. A. Stratton:

Théorie de l'électromagnétisme, traduit par J.Hebenstreit,

E^{dt}.Dunod, Paris, 1960.

[5] P. Lorrain & D. R. Corson:

Champs et ondes électromagnétiques, traduit par C.Guthmann et D.Lederer. Librairie

Armand Colin, Paris, 1971.

[6] L. Pinchard:

Electromagnétisme classique et théorie des distributions;

E^{dt}.Marketing, Paris, 1990.

[7] F. Gardiol:

« Electromagnétisme », Traité d'Electricité, d'Electronique et d'Electrotechnique,

1987, Presses Polytechniques romandes (Dunod).

[8] P. Brissonneau:

« Matériaux magnétiques pour l'électrotechnique », Cours de l'école National ,
supérieure d'Ingénieurs Electriciens de Grenoble.

[9] P. Brissonneau:

« Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique. »

Hermès, Paris 1997

- [10] **P. Robert:**
« Matériaux de l'électrotechnique.»
Traité d'Electricité, volume II, 1979 Presse polytechnique romande
- [11] **J. L. Coulomb, J. C. Sabonnadière:**
« 'C.A.O' en électrotechnique.»
Hermes Publishing 1985
- [12] **J. L. Coulomb, J. C. Sabonnadière:**
« Eléments finis et 'C.A.O'.»
Hermes Publishing 1986
- [13] **C. A. Brebbia, J. Dominguez:**
« Boundary elements and introductory course.»
McGraw-Hill Incorporated 1989
- [14] **L. C. Wrobel and C. A. Brebia:**
« Boundary element methods in heat transfer.»
Computational mechanics publication 1992
- [15] **NAG Fortran Library :**
« The Numerical Algorithms Group, Oxford, UK. The Numerical Algorithms Group »
Ltd, Oxford, UK.
- [16] **S. M. Kirkup :**
« Fortran Codes for Computing the Discrete Helmholtz Integral Operators » Advances
in Computational Mathematics, 9, 391-409, 1998
- [17] **Daniel Euvrard:**
« Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : de la
physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur.» Masson, 1994
- [18] **A. Khennane:**
« Méthode des éléments finis ;Enoncé des principes de base.»OPU 1997
- [19] **Gouri Dhat, Gilbert Touzot:**
« Présentation de la méthode des éléments finis.» 2^{ème} Edition
Maloine S.A Editeur 1984
- [20] **O. C. Zienkiewicz, R.L.Taylor:**
« La méthode des éléments finis.»1991, AFNOR pour l'édition Française.
- [21] **Pièrre-Arnaud Raviart:**
« Les méthodes d'éléments finis en mécanique des fluides.» Edition Eyrolles, 1981

[22] **R. Dautray, J. L. Lions:**

« Analyse mathématique et calcul numérique »
Volume VI, E^{dt} Masson 1988

[23] **G. Beauquet, M. Pogu:**

« Programmation des élément finis (P1,2D)
Cepadues-Editions 1987

[24] **C. Taylor, T. G. Hughes:**

« Finite element programming of the Navier-Stokes equations.»
First published in 1981 by « Pineridge Press LTD ».

[25] **M. Boumahrat, A. Gourdin:**

« Méthodes numériques appliquées »
O.P.U, 1993

[26] **D. Kalfon:**

« Méthodes numériques pour les sciences de l'ingénieur.»
Partie I, SUPARO, 1995

[27] **J. K. Bathe:**

« Numerical methods in finite element analysis.»
Prentice-Hill, 1982

[28] **H. Silvester:**

« Finite element for electrical engineers.»
Inter-Edition, Paris, 1985

[29] **R. T. Merrill & M. W. McElhinny:**

The Earth's Magnetic Field, «Its History, Origin and Planetary
Perspective».E^{dt}.Academic press, London, New York, 1983.

LES ARTICLES :

[30] **J. C. Sabonnadière:**

« Méthodes de calcul numérique en électrotechnique, application aux machines
électriques, modèles, méthodes et logiciels d'aide à la conception de systèmes
électromagnétiques.». RGE-10/82-Octobre 1982, pp.645-57

[31] **X. Brenotte, G. Menier et J. F. Imhoff:**

« Modélisation éléments finis de l'infini par transformation ».
RGE-N° 2/92-Février 1992, pp.51-58

[32] **J. b. Ayasse, G. Caplain, J. P. Lebacque:**

« Calcul numérique des champs magnétiques par les courants ampériens et les charges magnétiques ». RGE-3/85-Mars 1985, pp. 210-21

[33] **L. Krahenbuhl, A. Nicolas:**

« Méthodes des équations intégrales de frontières, développement des techniques et formulation axisymétrique. » RGE-3/85-Mars 1985, pp.222-26

[34] **S. B. Kuznetsov:**

« une Méthode de décomposition de domaines en magnétostatique 3-D. ». E.D.F, BULDER, Série C Math., Informatique, N° 4, 1991, pp.17-22

[35] **A. Bossavit:**

« Modèles et modélisation en électrotechnique. »
Techniques de l'ingénieur, § A 3595 pp.1-25

[36] **J. L. Coulomb et J. C. Sabonnadière:**

« Calcul des champs électromagnétiques. ».
Techniques de l'ingénieur, § D 3020 pp.1-20

[37] **A. Bossavit:**

« Sur les représentations des champs par potentiels et leur rôle dans les méthodes intégrales. ». E.D.F, BULDER, Série C Math., Informatique, N° 1, 1991, pp.39-51

[38] **A. Bossavit:**

« "TRIFOU" et la magnétostatique. » E.D.F, BULDER, Série C Math., Informatique, N° 2, 1986, pp.101-109

[39] **F. Rioux-Damidaou, B. Bandelier, P. Penven:**

« Perturbation of a static magnetic field by a thin iron shell ferromagnetic device ». IEEE Trans.Mag-29, 1993, pp.2434-36.

[40] **F. Rioux-Damidaou, B. Bandelier, P. Penven:**

« Magnetostatic signature prediction new approach for the modelling of the hull. ». Undersea Defence Technology Conference Cannes June 93, pp.491-94.

[41] **B.Bandelier, C. Daveau, F. Rioux-Damidaou:**

« A new h-formulation for nonlinear magnetostatics in \mathbb{R}^3 . »
IEEE Trans.Mag-30, 1994, pp.2889-92.

[42] **F. Rioux-Damidaou, B. Bandelier, P. Penven:**

« A fast and precise determination of the static magnetic field in the presence of the thin iron shells ». IEEE Trans.Mag-31, 1995, pp.3491-93.

[43] C. Daveau and F. Rioux-Damidau:

« New (e, h) formulation coupling a finite element method and a boundary integral method for the computation of the interaction of waves with a conducting domain. »
IEEE Trans.Mag-35, 1999, pp.1014-18.

[44] Kazuhiro Urata and Akihisa Kameari:

« Static magnetic field analyses by integral method using magnetization with normal continuity in shell structure ». IEEE Trans.Mag-31, 1995, pp.1440-43.

[45] M. Djennah, B. Bandelier and F. Rioux-Damidau:

« Computation of electric charges and eddy-currents with an E-Formulation ». IEEE Trans.Mag-33, 1997, pp.1322-25.

[46] B. Bandelier, C. Daveau, F. Rioux-Damidau:

« Several mixed finite element technics for magnetostatics. »
IEEE Trans.Mag-35, 1999, pp.1175-78.

[47] X. Brenotte, G. Menier:

« Line element for efficient computation of the magnetic field created by thin iron plates. ». IEEE Trans.Mag-26, 1990, pp.2196-98.

[48] J. F. Imhoff, G. Menier, X. Brenotte and J. C. Sabonnadière:

« An original solution for unbounded electromagnetic 2D- and 3D-Problems throughout the finite element method ». IEEE Trans.Mag-26, 1990, pp.1659-61.

[49] C. Guerin and G. Tanneau, G. Menier, X. Brenotte:

« Three dimensional magnetostatic finite element for gaps and iron shells using magnetic scalar potentials. ». IEEE Trans.Mag-30, 94, pp.2885-88.

[50] A. Bossavit and J. C. Vérité:

« The "TRIFOU" code: Solving the 3-D eddy-current problem by using H as state variable. » IEEE Trans.Mag-19, 1983, pp.2465-70.

[51] L. Han, Lin-Su Tong, Jing Yang:

« Integral equation method using total scalar potential for the simulation of linear or nonlinear 3D magnetostatic field with open boundary. »
IEEE Trans.Mag-30, 1994, pp.2897-2900.

[52] M. Tegedor, H. Rubio, L. Elbaile and R. Iglisias:

« External field created by uniformly magnetized ellipsoids and spheroids. » IEEE Trans.Mag-31, 1995, pp.830-36.

[53] **Eva varga and Adalbert Beyer, Fellow, IEEE:**

« Magnetic field of uniformly magnetized hollow cylinder.» IEEE Trans.Mag-34, 1998, pp.613-18.

[54] **Miklos Gyimes and J. Douglas lavers, Senior member , IEEE:**

« Generalized potential formulation for 3-D magnetostatic problems.»
IEEE Trans.Mag-28, 1992, pp.1924-29.

[55] **W. M. Rucker, Ch. Magele, E. Schlemmer and K. R. Richter:**

« Boundary element analysis of 3-D magnetostatic problems using scalar potentials.»
IEEE Trans.Mag-28, 1992, pp.1099-1102.

[56] **S. Kalaichelvan and J. D. Lavers:**

« A sub-Triangulation method to improve the accuracy of singular integral evaluation 3-D boundary methods.» IEEE Trans.Mag-24, 1988, pp.2515-17.

[57] **A. Caron, M. Dupuy et Ch. Pichot:**

« Résolution numérique d'équation intégrales singulières ;Application au guide à lames parallèles.» L'onde électrique "ELECTOMAGNETISME" 1980, vol.60, No 8

[58] **H. L. J. Pina, J. L. M. Fernandes and C. A. Brebia:**

« Some numerical integration formulae over triangles and squares with a $1/R$ singularity.» Appl. Math. Modelling, 1981, Vol.5, June 1981

[59] **N. Bamps, F. Delincé, A. Genon, W. Legros and A. Nicolet:**

« Comparison of various methods for the modelling of thin magnetic plates.» J. Appl. Phys. Vol.69, No.8, 15 April 1991.

[60] **T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara and P. Olszewski:**

« Analysis of magnetic field of 3-D non-Linear magnetostatic model (problem 13).»
Proceeding of European Team Workshop and International Seminar on
Electromagnetic Field Analysis, 107, 1990.

[61] **J. C. Nedelec:**

« Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 .» Numer. Math. 35, pp.315-341, 1980

[62] **J. Penman, M. D. Grieve and A. F. Wilson:**

« On the solution of open boundary field problems using the finite element method.»
IEE Proceedings, Vol.133, Pt.A, No.9, December 1986

[63] **J. Descloux, M. Flueck, M. V. Romerio:**

« A problem of magnetostatics related to thin plate.»
Math. Modelling and Numer. Analysis, Vol.32, No.7, 1998, pp.859-76

[64] P. L. Tallec, S. Mani:

« Analyse numérique d'un model de coque de Koiter discrétisé en base cartésienne par éléments finis DKT.» Math. Mod. and Num. Analysis, Vol.32, No.4, 1998, pp.433-50

[65] J. Torquil Smith :

« Conservative Modeling of 3-D Electromagnetic Fields: Biconjugate Gradient Solution and an Accelerator » Geophysics Program, AK-50, University of Washington Seattle, WA 98195 USA, 1995

[66] N. Shiraishi, T. Taniguchi :

« Design of algorithms for reducing the bandwidth profile of sparse matrix » pp. 187-95
Numérical methods for engineering, GAMNI-2, congre international publié sous la direction technique de E. Absi, R. Glowinski, P. Lascaux et H. Veysseyre, Dunod Technique, 1980

[67] M. Cristescu, G. Loubignac :

« Quadratures de Gauss pour des fonctions avec des singularités en $1/R$ sur des carrés ou des triangles » pp. 21-31

Numérical methods for engineering, GAMNI-2, congre international publié sous la direction technique de E. Absi, R. Glowinski, P. Lascaux et H. Veysseyre, Dunod Technique, 1980

LES THESES :

[68] Dj. Benzerga:

« Contribution à la modélisation des phénomènes électromagnétiques régis par les équations de la magnétodynamique.»

Thèse de Doctorat de l'université Paris VI, Dépt. Génie électrique, 1993

[69] M. Djennah:

« Modélisation tridimensionnelle, par couplage éléments finis - équation intégrale, des courants induits et des charges surfacique pour un conducteur plongé dans un champ électromagnétique en I.R.M.»

Thèse de Doctorat de l'université Paris VI, Dépt. Génie électrique, 1993

[70]. Huang Fang:

« Etude des problèmes d'électrotechnique par la méthode des intégrales de frontière.»

Thèse de Doctorat de l'institut national polytechnique de Lorraine, 1988



LAMALI Atmane, né le 12 avril 1973 à Tizi-ouzou, (Algérie). Obtient son baccalauréat série "électrotechnique" en 1991. Titulaire du diplôme de D.U.E.A en électrotechnique, option machines électriques de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou en 1994 et d'ingénieur d'état en électrotechnique, option machines électriques de l'U.S.T.H.B – Alger - en 1998.

Poursuit sa formation post-graduée à l'Ecole Militaire Polytechnique (EMP) depuis 1998.

Résumé :

Ce mémoire est une contribution à la modélisation numérique de la perturbation d'un champ magnétique statique appliqué par la présence d'un dispositif ferromagnétique dans l'espace tridimensionnel.

La première partie est consacrée à une synthèse des formulations tridimensionnelles parmi lesquelles nous avons développé deux formulations discrètes qui utilise une approche d'intégrale de frontière permettant de décrire l'entité physique dans le milieu extérieur dans le cas où le dispositif est massif ou en coque mince.

La seconde partie présente une étude d'une formulation mixte dont un couplage est fait entre le potentiel scalaire restreint au milieu magnétique et un potentiel scalaire surfacique adapté dans le cas des coques minces.

Enfin nous décrivons quelques résultats numériques obtenus par notre code de calcul et nous les comparons à ceux obtenus par le calcul à l'aide d'une formulation classique et nous exploitons par la suite le code dans une application sur un modèle réduit d'un navire. Et particulièrement nous avons complété ce travail par une étude théorique et technique des systèmes de démagnétisation des navires qui illustre parfaitement le domaine d'application de la présente étude.

Mots clés : Modélisation, formulation, magnétostatique, méthode d'intégrale de frontière, méthode des éléments finis, coque mince, magnétisation, démagnétisation.

Abstract:

This thesis is a contribution to the numerical modeling of the disturbance of an applied static magnetic field by the presence of a ferromagnetic device in three-dimensional space.

The first part is devoted to a synthesis of the three-dimensional formulations among which we developed two discrete formulations which uses an approach of boundary integral making it possible to describe the physical entity in the external medium if the device is massive where out of thin shell.

The second part presents a study of a mixed formulation whose coupling is made between the scalar potential restricted in the magnetic medium and a surface scalar potential, adapted in the case of thin shell.

Finally we describe some numerical results obtained by our code computer and we compare them with those obtained by calculation using a classical formulation and we exploit thereafter the code in an application on a reduced model of a ship. And particularly we supplemented this work by a theoretical and technical study of the systems of demagnetization of the ships which illustrates perfectly the applicability of this study.

Key words : Modeling, formulation, magnetostatic, boundary integral method, finite element method, thin shell, magnetization, demagnetization.

ملخص :

هذا العمل يتدرج في مشاركة نموذجية عديدة لاضطراب الحقل المغناطيسي الساكن مطلق . بوجود أنظمة الفولاذ المغناطيسي . المرحلة الأولى مخصصة في حوصلة تشكيلات الثلاثي الأبعاد . التي من بينها طورنا تشكيلتين غير مستمرتين والتي تستعمل من أحدها طريقة تكامل محدود التي تسمح بوصف وحدة فيزيائية في اغمال الخارجي في حالة ما إذا كان الحيز كئلي أو صفحة رقيقة . المرحلة الثانية تقدم دراسة تشكيلة مختصة حيث الازدواج أخرج بين الكميون السلمي المنحصر في اغمال المغناطيسي والكميون السلمي السطحي الملام في حالة الصفحات الرقيقة .

في الآخر تقدم بعض النتائج العددية الموائى أخصت عنيها برنامج العددي وقدره بالموافى أخصت عنيها بالحساب على الطريقة التحليلية واستعمل في الآخر برنامج في تطبيق على نموذج منحصر بالبحر . وتليها بالتالي قدم تشكيلة هذه الدراسة باستعمال الطريقة النظرية والتقنية لأنظمة حداث مغناطيسي بالبحر والتي تشر كذا مجال تطبيق دراسة التي قصد هـ

مفتاح الكلمات : تشكيل . تشكيل . مضمومات . طريقة تكامل محدود . طريقة لاجر . تشكيل . صفحة رقيقة . انتمتع .