

5/88

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتقدمة للتقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*ELABORATION DE PROGRAMMES
POUR L'ETUDE DES
GRANDES DEFORMATIONS*

(POUTRES EN CONSOLE)

Proposé par :

Mr. RECHAK S.

Etudié par :

Mr. BENBLIDIA M.

Dirigé par :

Mr. RECHAK S.

PROMOTION

Janvier 1988

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT DE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ELABORATION DE PROGRAMMES POUR L'ETUDE DES GRANDES DEFORMATIONS

(Poutres en console)

Proposé par :
Mr. RECHAK S.

Etudié par :
Mr. BENBLIDIA M.

Dirigé par :
Mr. RECHAK S.

PROMOTION : Janvier 1988

E.N.P. 10 ,Avenue Hacén Badi - El-Harrach - ALGER

الجامعة الوطنية المتعددة التخصصات
المركبة - BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

قال الله تعالى :
« قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ
يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ . »

وقال رسول الله صلى الله عليه وسلم :
« وَمَنْ سَلَكَ طَرِيقًا يَلْتَمِسُ فِيهِ عِلْمًا
سَهَّلَ اللَّهُ لَهُ طَرِيقًا إِلَى الْجَنَّةِ . »
(رواه مسلم .)

- سبحانه لا علم لنا إلا ما
علمتنا . إنك أنت العليم الحكيم -

--- R E M E R C I E M E N T ---

Au terme de cette étude, je tiens à remercier

Monsieur RECHAK pour les conseils et suivi constant qu'il n'a cessé de me prodiguer tout le long de ce travail.

Tous les professeurs qui ont contribué à ma formation d'ingénieur et, en particulier ceux du département de Génie Mécanique.

Monsieur LOUNI et son fils Karim, qui me furent d'une grande aide pour la réalisation de mon polycope.

Que tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin à cette réalisation trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

-- D E D I C A C E S --

Je dédie ce travail à :

- Mes très chers parents
- Mes frères Aziz et Hocine
- Mes soeurs et belle-soeur
- Mes beaux-frères
- Tous mes amis(es)

- ma promotion JANVIER 88

Et à mes grands parents qui auraient été
si fiers.

Mohs

MINISTERE DE L ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

وزارة التعليم العالي

Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات الوطنية المتقدمة للعلوم والتقنية

Département de Mécanique

BIBLIOTHEQUE المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

فرع الهندسة الميكانيكية

Promoteur :Mr RECHAK S.

الموجه: السيد رشاق

Elève Ingenieur :Mr BENBLIDIA Med Aek

الطالب المهندس: بن بليديسة

الموضوع : انجاز برنامج لدراسة العتبات في حالة الانحناءات
الذبيرة .

الملخص: يهدف هذا العمل الى انجاز برامج موجهة على طرق
نظرية تعطينا الانتقالات الالغسية والعمودية لعتبات مشدودة
في جهة وعلى تاشير شدة في الجهة الاخرى ومنا بمقارنتها
بالنتائج التجريبية.

Sujet: Réalisation de programmes pour l'analyse des poutres
soumises à de grandes déformations.

Résumé: L'objet de ce travail consiste à élaborer des programmes
sur la base de méthodes numériques définissant les déplacements
horizontaux et verticaux des poutres soumises aux effets des
charges concentrées à leurs extrémité libre. Les résultats
numériques et spécialement ceux de la M.E.F sont comparés aux
résultats expérimentaux.

Subject: Développement of programs to study the effects of large
déformations of beams.

Abstract: The object of this work is to set up programs using
numerical méthodes, which can provide horizontal and vertical
displacements of beams under the effect of loads on the free
end. The numerical méthodes with a spécial finite élément analysis
have been compared to experimental résultats.

	page
Chap.I INTRODUCTION ;	1
Chap.II GENERALITES	3
II.1- Les poutres	3
II.2- Equation differentielle de la déformé d'une poutre	3
Chap.III ETUDE DES GRANDES DEFORMATIONS D'UNE POUTRE EN CONSOLE	6
III.1-Etude experimentale.....	6
III.2-Etude théorique	12
2.1-Expression théorique des déplacements horizontaux et verticaux	12
2.2-Méthode des variables séparables	14
2.3-Méthode de l'équation élastique	33
3.1-Résultats et interprétation	36
Chap.IV METHODE DES ELEMENTS FINIS.....	46
IV.1- Formulation	46
IV.2- Identification du problème.....	47
IV.3- Matrice de rigidité élémentaire	47
3.1-Formulation de K_e	47
3.2-Matrice de rigidité en extension K_E	48
3.3-Matrice de rigidité dans le cas de flexion....	50
3.4-Matrice de rigidité élémentaire de l'élément..	51
complet	
IV.4- K_e dans le repère de coordonnées globales	52
IV.5- Assemblage et résolution	53
IV.6- Programme et organigramme	54
IV.7- Application	54
IV.8- Résultats et interprétation	54
IV.9- Conclusion générale sur les trois méthodes	60

	page
Chap.V PROPOSITION D'UN TRAVAIL PRATIQUE	63
V.1-Déscription du banc d'essai	63
V.2-Poutres et charges	65
V.3-Manipulation	65
3.1- Méthode du comparateur	66
3.2- Méthode directe	66
3.3- Résultats	67
V.5- Etude des grandes déformations	68
- C O N C L U S I O N G E N E R A L E	70
- A N N E X E	
- B I B L I O G R A P H I E	

T A B L E D E S T A B L E A U X

	page
- Tableau III.1: Résultats expérimentaux	8
- Tableau III.2: Valeur de gamma pour chaque P	20
- Tableau III.3: Résultats théorique par la méthode des variables séparables $P \neq 1 \text{ daN}$	25
- Tableau III.4: " " " " " " " " $P=2 \text{ daN}$	26
- Tableau III.5: " " " " " " " " $P=3 \text{ daN}$	27
- Tableau III.6: Résultats théorique par la méthode de l'équation élastique $P \neq 1 \text{ daN}$	38
- Tableau III.7: " " " " " " " " $P= 2 \text{ daN}$	39
- Tableau III.8: " " " " " " " " $P= 3 \text{ daN}$	40
- Tableau III.9: Résultats théorique par la méthode des éléments finis $P = 1 , 2 , 3 \text{ daN}$	57
- Tableau V.1 : Exemple de calcul	67

T A B L E S D E S F I G U R E S



	page
-Fig II.1: Poutre	3
-Fig II.2: Etude de la courbure de la poutre	4
-Fig II.3: Calcul de la courbure $1/R$ d'une poutre.....	4
-Fig III.1: Poutre sur le banc d'essai.....	7
-Fig III.2: Courbe expérimentale $P= 1 \text{ daN}$	9
-Fig III.3: " " $P= 2 \text{ daN}$	10
-Fig III.4: " " $P= 3 \text{ daN}$	11
-Fig III.5: Poutre en console sous l'effet d'une charge P	12
-Fig III.6: Deux divisions successives de la poutre.....	13
-Fig III.7: Poutre en console sous l'effet d'une charge P de direction verticale	16
-Fig III.8: Comparaison entre la méthode expérimentale et la méthode des variables sépara. $P= 1\text{daN}$..	28
-Fig III.9: " " " " " " " " " " " " $P= 2 \text{ daN}$	29
-Fig III.10:" " " " " " " " " " " " $P= 3 \text{ daN}$	30
-Fig III.11: Ligne élastique d'une poutre en console	33
-Fig III.12: Comparaison entre la méthode élastique et l'expérimentale $P= 1 \text{ daN}$	41
-Fig III.13: " " " $P= 2 \text{ daN}$	42
-Fig III.14: " " " $P= 3 \text{ daN}$	43
-Fig IV.1: élément poutre à trois degrés de liberté.....	48
-Fig IV.2: élément poutre en extension.....	48
-Fig IV.3: élément poutre en flexion	48
-Fig IV.4: Système de coordonnées globale	52
-Fig IV.5: Discrétisation de la poutre	54
-Fig IV.6: Comparaison entre méthode (M.E.F)et l'expérimental $P = 1\text{daN}$	58
-Fig IV.7: " " " $P= 2\text{daN}$	58
-Fig IV.8: " " " $P= 3\text{daN}$	59
-Fig IV.9: Comparison entre les 3 méthodes $P=1\text{daN}$	61
-Fig IV.10: " " " " " " $P=2\text{daN}$	61
-Fig IV.11: " " " " " " $P=3\text{daN}$	62
-Fig V.1 : Exemple de manipulation	67

PRINCIPALES NOTATIONS
UTILISEES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

- T : Effort tranchant
N : Effort normal
M : Moment fléchissant
 σ : Contrainte normale
 ϵ : Déformation linéaire
I : Moment d'inertie longitudinal
E : Module de Young ou d'élasticité.
 α : angle entre l'horizontale et la direction de la charge
 θ : Angle entre la tangente à la ligne d'action et direction de la charge
 ϕ : Angle entre la fibre neutre et l'horizontale
P : Charge
L : Porté de la poutre (ou élément poutre)
U : Déplacement axial ou horizontal
V : Déplacement vertical
R : Rayon de courbure
q : Déplacement généralisé
K : Matrice de rigidité
F : Force généralisée
 φ : Angle entre repère local et global
U : Énergie de déformation
S : Surface de la poutre
 ϵ_r : Erreur relative

Les anciens ne paraissent pas s'être souciés spécialement d'économie de matière dans leurs constructions mais leur souci de la ligne, de la qualité des matériaux et un certain empirisme à base expérimentale leur ont permis de réaliser des oeuvres durables.

Dans toute science physique, l'expérience est la base et le couronnement de la théorie. Elle doit la contrôler aussi souvent qu'il est nécessaire. La théorie édifiée sur des hypothèses expérimentales, volontairement schématisées, ne traduit qu'imparfaitement les faits. Les résultats qu'elles fournit doivent être contrôlés par des essais effectués sur l'organe terminé dans les conditions similaires de son emploi.

Les solides, sans exception, se déforment et peuvent même se rompre sous l'action des sollicitations extérieures, et les déformations peuvent engendrer des désordres parfois graves, si elles dépassent les seuils dits "admissibles". Il s'avère donc indispensable de situer et calculer ces déformations, afin que les constructions à réaliser (bâtiment; pièce d'une machine, élément d'un moteur...), soient capables de leur résister, et assurer une sécurité absolue à l'usage.

Un banc d'essai a été réalisé par un étudiant dans le cadre d'un projet de fin d'études, qui permette faire des séries de travaux pratiques sur des poutres en console, soumises à des charges concentrées à leurs extrémités libres, et de pouvoir faire ainsi, une analyse sur les petites et grandes déformations qui pourraient en résulter. Dans ce sens, une partie de ce travail a été fait, et pour le compléter, on s'est proposé dans cette étude de faire l'analyse des grandes déformations

tout en élaborant des programmes de résolution par différentes méthodes théoriques, qui nous permettra de faire des comparaisons des méthodes numériques et expérimentales.

Chap. II - G E N E R A L I T E S -

II.1- Les poutres

La résolution des problèmes posés par la R.D.M fait appel à de nombreuses hypothèses, nécessaires pour obtenir rapidement des résultats exploitables. L'observation des constructions permet de ranger la plupart des organes soit dans la classe des corps dont une dimension est grande par rapport aux autres (poutres), soit dans la classe des corps dont une dimension est petite devant les autres (plaques et coques).

On appelle poutre, le solide engendré par une surface (S) dont le centre de gravité G , décrit une courbe GG le plan de (S) restant normal à cette courbe (fig II.1)

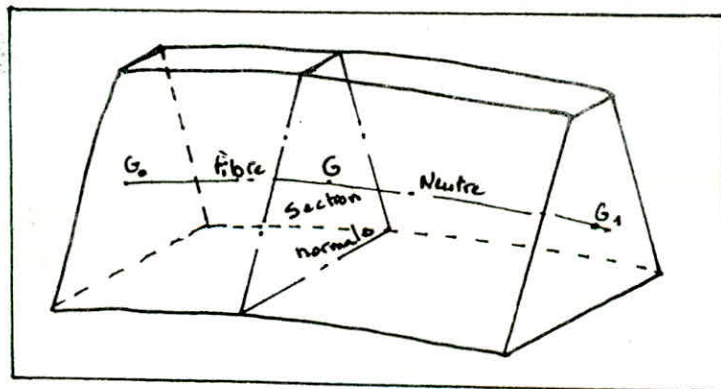


Figure II.1: Poutre

(S) est appelée section droite ou section normale
 G_0, G_1 est appelée fibre moyenne de la poutre.

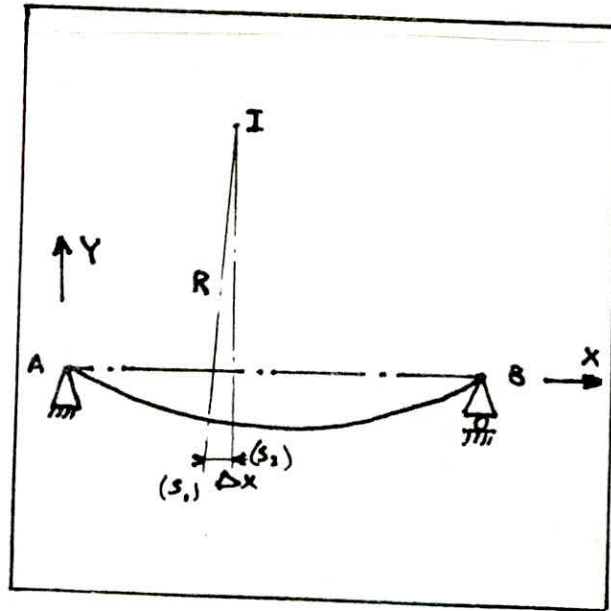
II.2 - Equation différentielle de la déformée d'une poutre

Soit une poutre droite reposant sur deux appuis A et B, soumise à la flexion. Sous l'influence du système de charge qui lui est appliqué, la ligne moyenne fléchit dans le plan A X Y et la courbe ainsi obtenue est

appelée "déformée". Considérons, en G, (fig II.2) deux sections droites très voisines l'une de l'autre distantes de Δx .

Figure II.2:

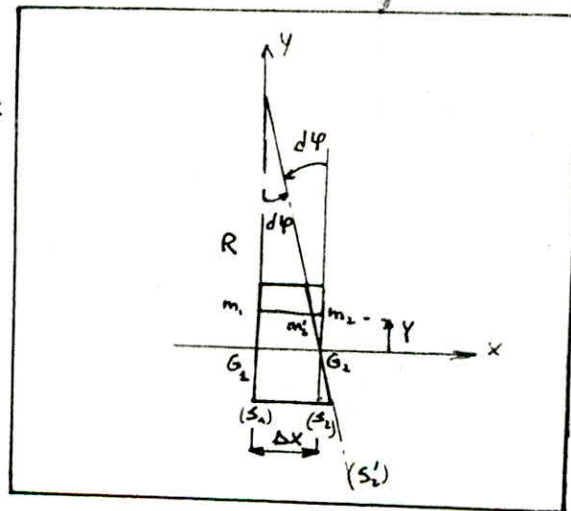
Etude de la courbure de la poutre.



Soit I le centre de courbure de la ligne moyenne. Agrandissant le tronçon de poutre (S_1) (S_2) . D'après les hypothèses de Navier et Bernoulli, les sections droites restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne pendant la déformation.

Figure II.2:

Calcul de la courbure $1/R$ d'une poutre fléchie.



D'après la loi de Hooke : $\sigma = E \cdot \frac{m_2 m_2'}{m_1 m_1'}$
avec $\overline{m_2 m_1'} = -y \cdot \Delta\varphi$ et $\overline{m_1 m_2} = \Delta x$ donc

$$\sigma = -E \cdot y \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \quad (a)$$

Considérons le rayon de courbure $R = \overline{GI}$ ($R > 0$)

si Δx tend vers zéro, on peut écrire que $\Delta x = R \cdot \Delta \varphi$ donc

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = \frac{1}{R} \quad . \text{Par ailleurs, en fonction du moment de flexion}$$

M_f en G , et du moment quadratique I_{G_z} de la section, nous pouvons donner l'expression de la contrainte normale dans la fibre $m_1 m_2$

$$\sigma = y \cdot \frac{M_{fz}}{I_{G_z}}$$

Remplaçons dans (a) $\frac{\Delta \varphi}{\Delta x}$ par $\frac{1}{R}$ et σ par $y \cdot \frac{M_{fz}}{I_{G_z}}$

$$\frac{1}{R} = - \frac{M_{fz}}{E \cdot I_z} \quad (b)$$

En géométrie analytique on démontre que si $y=f(x)$ est l'équation d'une courbe plane, l'expression du rayon de courbure de cette courbe au point M d'abscisse x est :

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \quad (c)$$

où y' et y'' sont les valeurs prises par les dérivées première et secondaire de la fonction $y = f(x)$ pour la valeur x de la variable.

(b) et (c) implique l'équation différentielle de la déformé d'une poutre soumise à la flexion:

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = - \frac{M_{fz}}{E \cdot I_z}$$

III- ETUDE DES GRANDES DEFORMATIONS D'UNE POUTRE EN CONSOLE

En vue d'obtenir le maximum de précisions des effets des grandes déformations il y a lieu de procéder a une étude expérimentale dont les résultats seront comparés aux études théoriques pour en déduire les conclusions nécessaires a exploiter.

III.1- ETUDE EXPERIMENTALE

La mesure expérimentale des grandes déformations a été réaliser sur le banc d'essai qui se trouve au laboratoire du département. A cet effet une lame de scie à métaux de longueur L , de section rectangulaire ($a \times b$) (fig III.1) a été prise comme modèle de poutre.

Une extrémité de la poutre a été fixée rigidement dans l'encastrement du banc d'essai, tandis qu'à l'autre extrémité seront appliquées des charges concentrées P suffisantes pour produire une déformation de la poutre qui, par conséquent, provoquera des déplacements horizontaux U et verticaux V des surfaces repérées de 1 à 11, et qui soient facilement mesurable.

La méthode utilisée pour la mesure, est la méthode dite DIRECTE décrite en détails au chapitre V.

Un tableau regroupant les mesures U et V des différentes sections considérées est ainsi établie (Tableau III.1) Ce tableau fait ressortir les courbes $Y_{exp} = f(X)$ (fig III.2, 3-4) qui visualisent l'aspect de la poutre déformée, et mettent en évidence les déplacements horizontaux et verticaux de l'ensemble de ces sections.

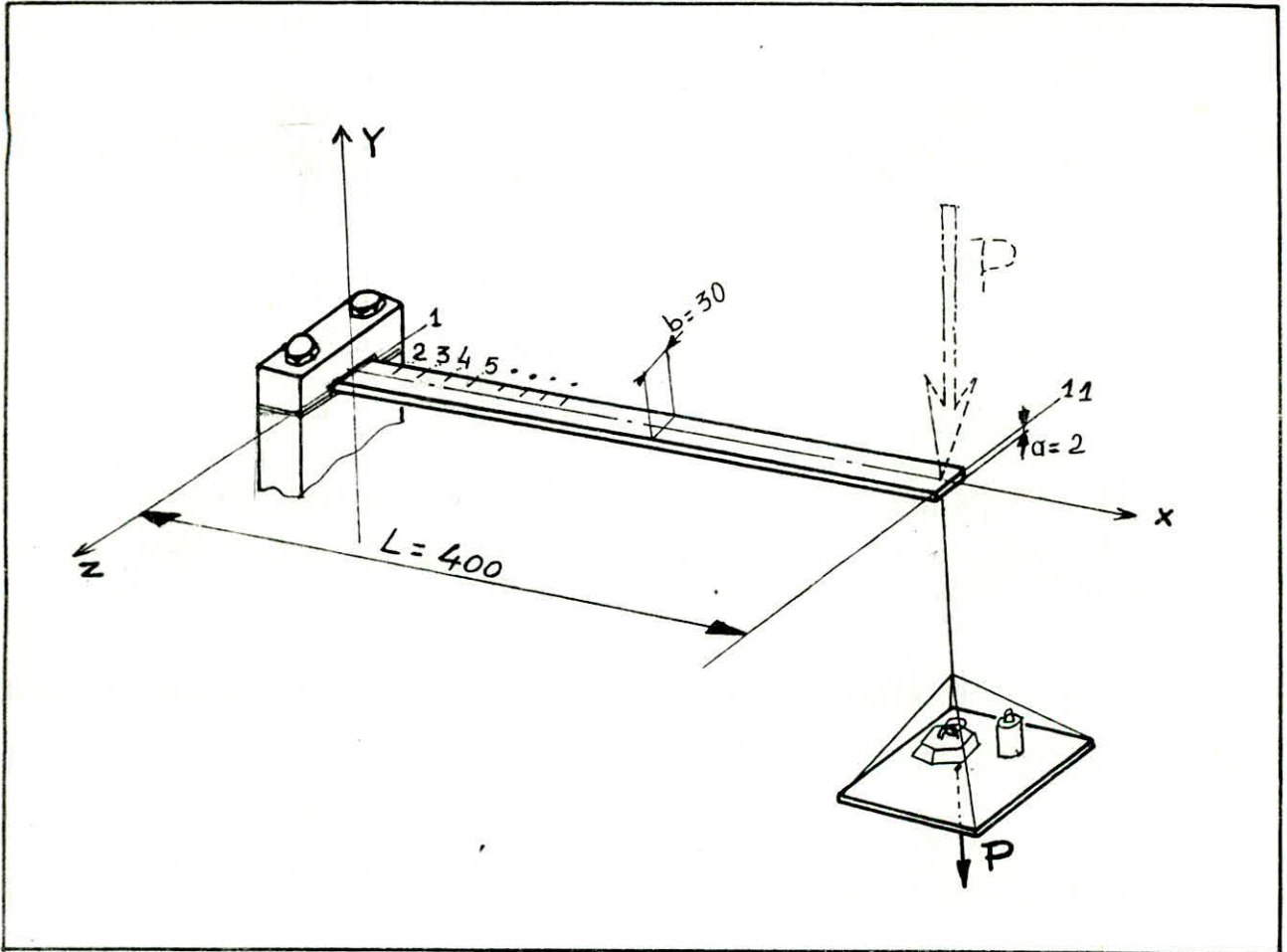


figure III.1: La poutre (lame de scie) sur le banc d'essai

P	1 daN		2 daN		3 daN	
Depl N°	U (mm)	V (mm)	U (mm)	V (mm)	U (mm)	V (mm)
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.01	2.62	0.34	5.00	0.66	6.91
3	0.28	6.35	1.00	12.09	1.99	16.60
4	0.59	11.06	2.51	20.99	4.07	28.70
5	1.00	16.61	3.70	31.40	6.92	42.80
6	1.56	22.86	5.60	43.15	10.51	58.60
7	2.20	29.69	7.90	55.90	14.75	75.69
8	2.92	36.97	10.50	69.50	19.53	93.70
9	3.74	44.57	13.40	83.50	24.70	112.40
10	4.59	52.36	16.40	97.90	30.12	131.49
11	5.44	59.99	19.40	112.50	35.12	150.70

Tableau III.1 : Résultats Expérimentaux

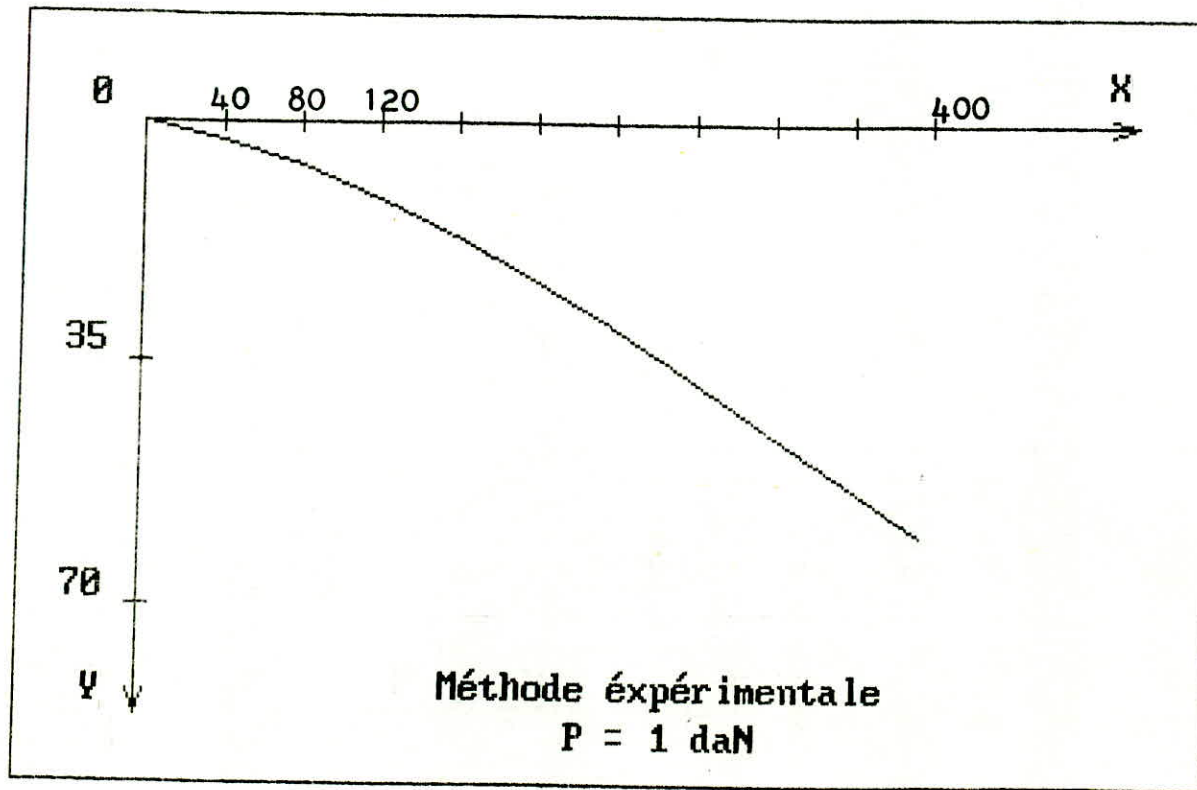


Figure III.2: Courbe Expérimentale -P = 1 daN-

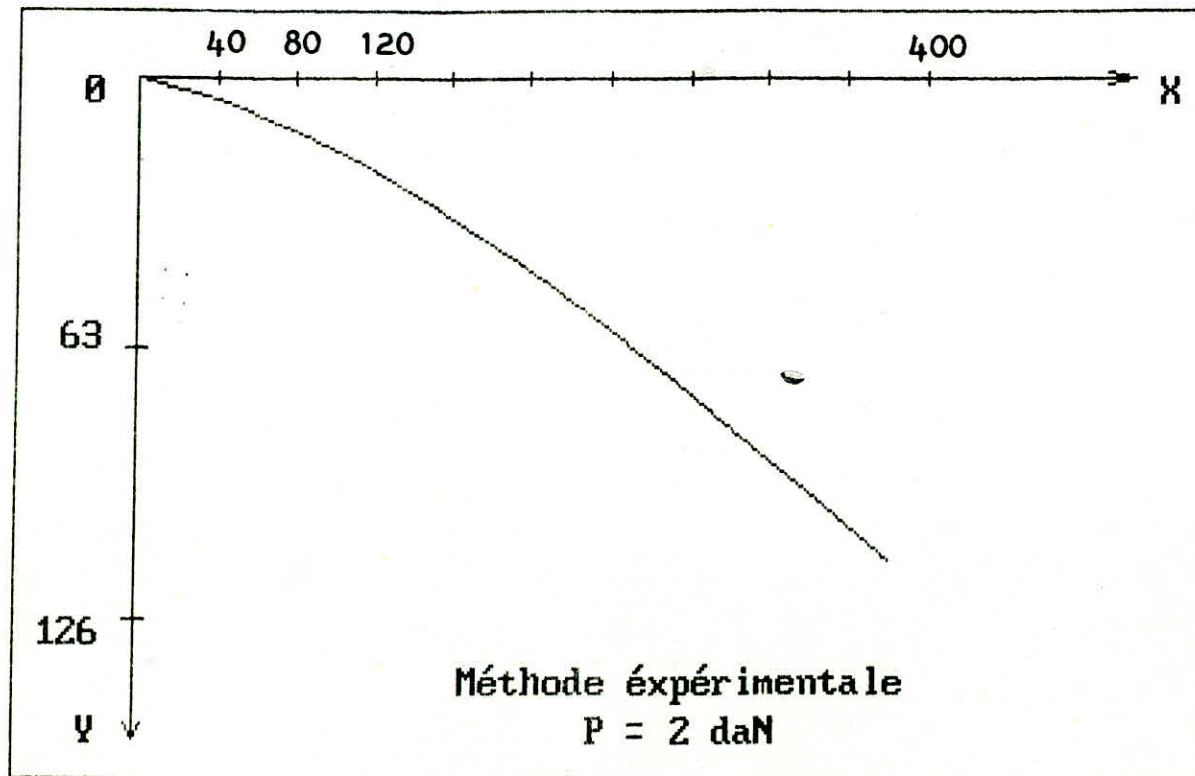


Figure III.3: Courbe Expérimentale - P = 2 daN -

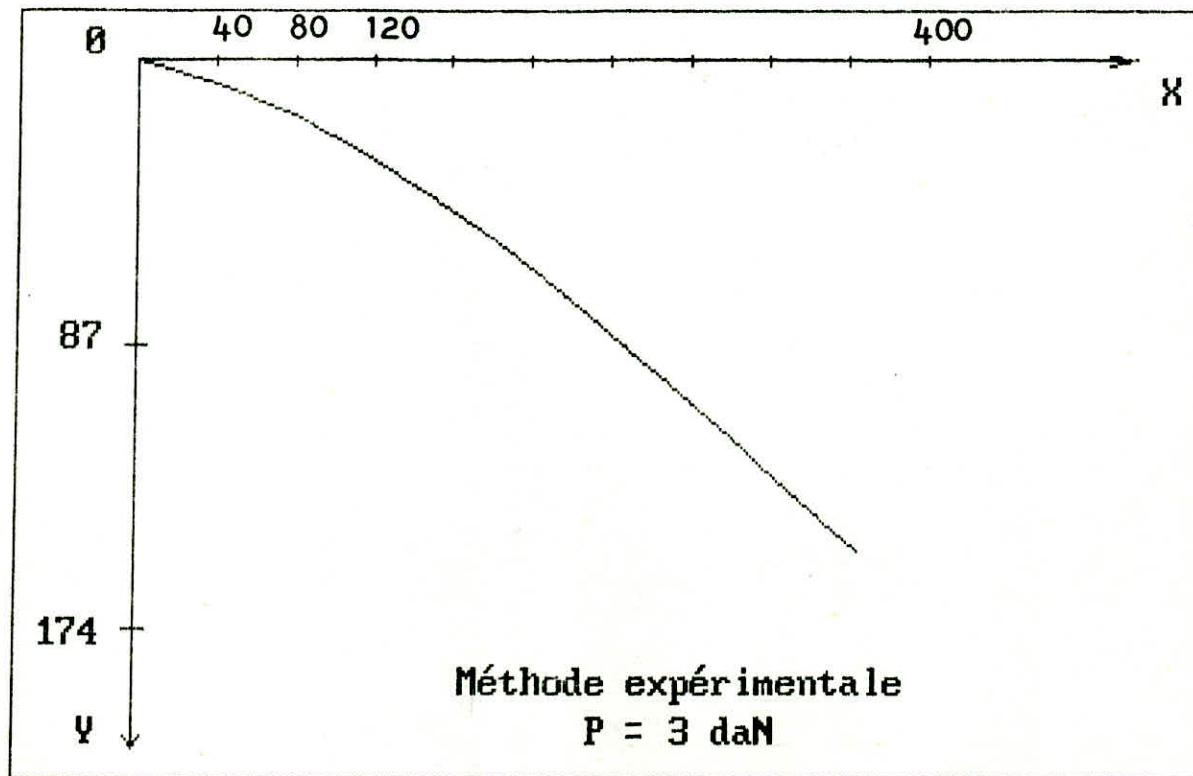


Figure III.4: Courbe Expérimentale - P= 3 daN -

III.2 ETUDE THEORIQUE

III.2.1- Expression théorique des déplacements horizontaux et verticaux

Soit une poutre en console -encastré d'un coté et libre de l'autre- de longueur L , de module d'élasticité E et de section $a \times b$. Appliquant à cette poutre une charge concentrée P à son extrémité libre (fig III,5).

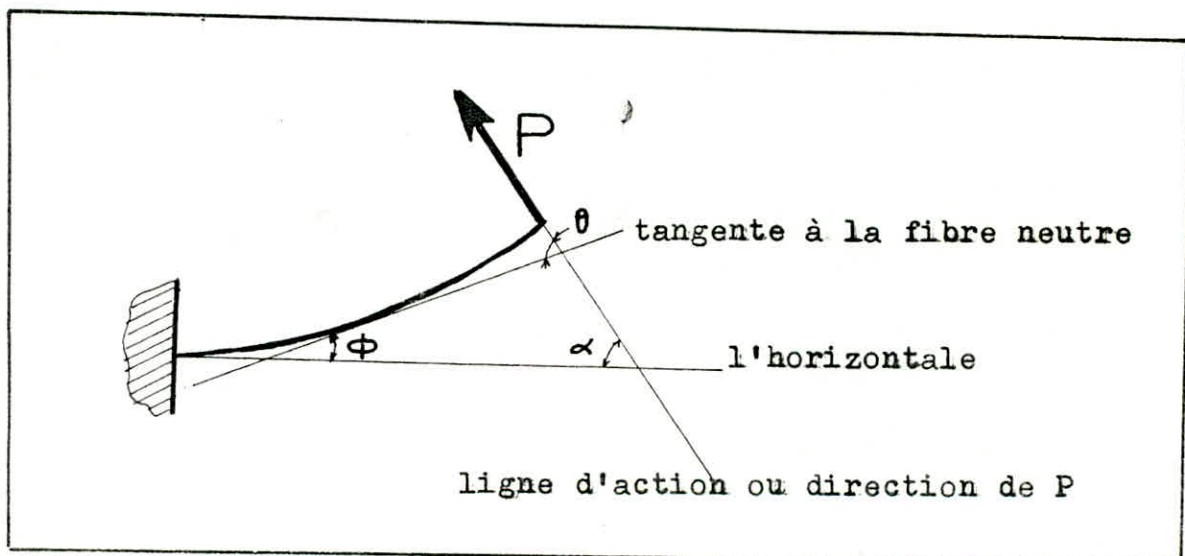


Fig III. 5 : Poutre en console sous l'effet d'une charge P

- La ligne en trait gras représente l'aspect de la poutre déformée

Remarque : Avant l'application de la charge, la poutre était droite et horizontale.

Pour la détermination de l'expression des déplacements verticaux et horizontaux, on va diviser la poutre en N divisions, de manière à pouvoir assimiler une division et sa tangente (fig III.6)

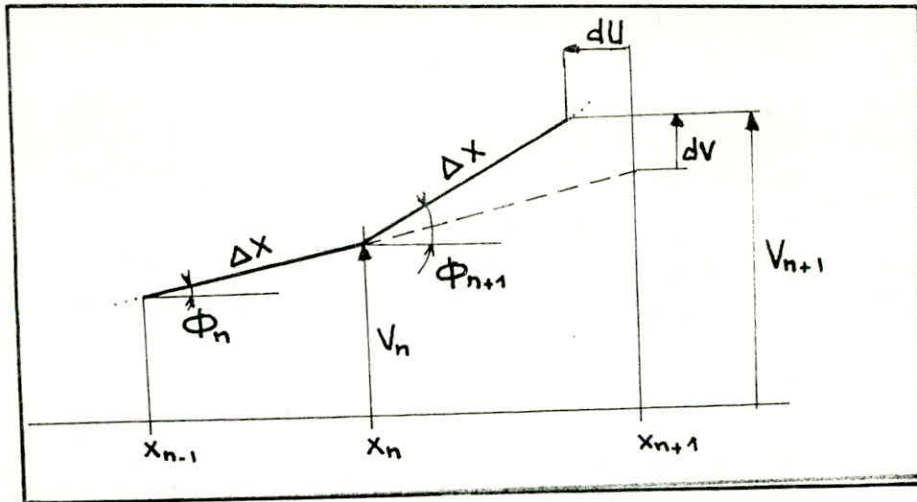


Figure III.6: Deux divisions successives de la poutre de longueur ΔX chacune

$$V_{n+1} = V_n + \sin(\phi_{n+1}) \cdot \Delta X \quad (1)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{d\phi}{dx} \cdot \Delta X \quad (2)$$

$$U_{n+1} = U_n + (dU/dx) \cdot \Delta X \quad (3)$$

$$\cos(\phi_{n+1}) = \frac{d\bar{U}}{dX} \quad \text{or} \quad d\bar{U} = dX + dU \quad (4)$$

$$\text{alors } \frac{d\bar{U}}{dX} = 1 + \frac{dU}{dX} = \cos(\phi_{n+1}) \quad (5)$$

$$(3) \text{ devient } U_{n+1} = U_n + (\cos(\phi_{n+1}) + 1) \cdot \Delta X \quad (6)$$

De cela, on aboutit aux expressions suivantes de

U : déplacement horizontal

V : déplacement vertical

$$U_{n+1} = U_n + (\cos(\phi_{n+1}) - 1) \cdot \Delta X \quad (7)$$

$$V_{n+1} = V_n + \sin(\phi_{n+1}) \cdot \Delta X \quad (8)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{d\phi}{dX} \cdot \Delta X \quad (9)$$

On notera donc que, pour la détermination des déplacements horizontaux et verticaux des différentes sections d'une poutre en console, il faut connaître l'expression de l'angle formé par la tangente à la fibre neutre et l'horizontale.

A cet effet, on a développé des méthodes qui sont exposées dans les paragraphes suivants, pour combler cette lacune.

III.2.2- Méthode des VARIABLES SEPARABLES

III.2.2.1-Equation différentielle de la ligne d'action d'une poutre en console-cas général-

Prenons encore le cas de la figure III.5, on tire les constatations suivantes:

- a/ L'angle " α " formé par la direction de la charge et l'horizontal, prend une valeur constante pour chaque charge P considérée; car celui-ci ne dépend que de la direction de la charge.
- b/ Une relation géométrique existe entre les trois angles et qui est :

$$\phi + \alpha + (180^\circ - \theta) = 180^\circ \quad (10)$$

$$\Rightarrow \theta = \phi + \alpha \quad (11)$$

- c/ $\theta = \phi + \alpha$ et $\alpha = \text{cst} \Rightarrow$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\phi}{dx} + \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\phi}{dx} \quad (12)$$

$$\text{soit} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\phi}{dx} \quad (13)$$

Equations d'équilibres:

Par simple projection, on a :

$$\text{- Effort tranchant} \quad T = - P \cdot \sin \theta \quad (14)$$

$$\text{- Effort normal} \quad N = - P \cdot \cos \theta \quad (15)$$

$$\text{- Moment fléchissant} \quad M = - \int \sigma \cdot y \cdot dS \quad (16)$$

La loi de HOOKE pour un système élastique

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (17)$$

$$\text{avec} \quad \varepsilon = y \cdot \frac{d\phi}{dx} = y \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad (18)$$

: déformation normale d'une fibre à une distance y de la surface neutre.

En revenant à l'expression du moment fléchissant, on aura:

$$M = - \int \sigma \cdot y \cdot dS = - \int (E \cdot \varepsilon) \cdot y \cdot dS \quad (19)$$

$$= - \int E \cdot (y \cdot \frac{d\theta}{dx}) \cdot y \cdot dS \quad (20)$$

$$= - E \cdot \frac{d\theta}{dx} \cdot \int y^2 \cdot dS \quad (21)$$

$$\text{or} \quad I_z = \int y^2 \cdot dS \quad (22)$$

: moment d'inertie par rapport à l'axe normal

$$(21) \Rightarrow M = - E \cdot I_z \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad (23)$$

$$T = - \frac{dM}{dx} = - \frac{d}{dx} (-E \cdot I_z \cdot \frac{d\theta}{dx}) \quad (24)$$

: relation entre l'effort tranchant et moment fléchissant

$$= E \cdot I_z \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} \quad (25)$$

(14) et (25) \Rightarrow

$$E \cdot I_z \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} = - P \cdot \sin \theta \quad (26)$$

On arrive enfin, à l'équation différentielle d'une poutre en console sous l'effet de flexion

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{P}{E \cdot I_z} \cdot \sin \theta = 0 \quad (27)$$

III.2.2.2- Cas du projet

Les charges appliquées à la poutre sur le banc d'essai, se matérialise par le poids d'une (ou des) masse(s) accrochées à l'extrémité libre, comme le montre la figure ci-dessous (fig III.7)

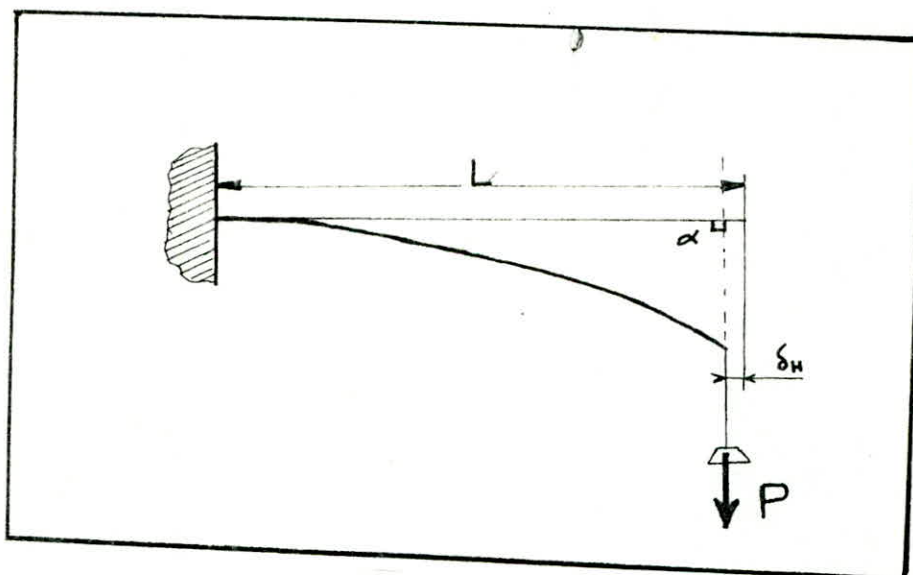


Figure III.7: Poutre en console sous l'effet d'une charge P de direction verticale.

Donc, quelque soit la valeur de la charge appliquée, la direction (ou la ligne d'action) de P , est toujours perpendiculaire à l'horizontale, c'est à dire :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

III223- Résolution de l'équation différentielle

Pour une commodité de calcul, on procédera à la résolution de l'équation différentielle en ϕ ; pour cela, on procédera aux modifications suivantes:

$$M = -E \cdot I_z \cdot \frac{d\theta}{dx} = -E \cdot I_z \cdot \frac{d\phi}{dx} \quad (28)$$

$$T = -P \cdot \sin(\theta) = -P \cdot \sin(\phi + \alpha) = -P \sin(\phi + \frac{\pi}{2}) \quad (29)$$

$$= -P \cdot \cos(\phi) \quad (30)$$

et:

$$T = - \frac{dM}{dx} = - \frac{d}{dx} (-E \cdot I_z \cdot \frac{d\phi}{dx}) = E \cdot I_z \cdot \frac{d^2\phi}{dx^2} \quad (31)$$

$$(30) \text{ et } (31) \Rightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{P}{EI_z} \cos \phi = 0 \quad (32)$$

ou:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \bar{\alpha} \cos \phi = 0 \quad (33)$$

avec $\bar{\alpha} = \frac{P}{EI_z}$

* Soit $p = \frac{d\phi}{dx}$

alors l'équation (33) devient:

$$\frac{dp}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dx} = - \bar{\alpha} \cos \phi \quad (34)$$

$$\frac{dp}{d\phi} \cdot p = - \bar{\alpha} \cos \phi \quad (35)$$

On aboutit à une équation différentielle à variables séparables dont l'intégration est facile:

$$dp \cdot p = - \bar{\alpha} \cos \phi \cdot d\phi \quad (36)$$

L'intégration des deux membres de l'égalité :

$$\frac{1}{2} \cdot p^2 = - \bar{\alpha} (\sin \phi + k)$$

La constante d'intégration k , est déterminé par les conditions aux limites:

pour $X = L - \bar{\lambda}_y = \bar{L} \quad \phi = \gamma \quad \text{et } p = 0$

Ce qui donne :

$$k = -\sin \delta \quad (37)$$

$$p = \frac{d\phi}{dx} = (2. \bar{\alpha} (\sin \delta - \sin \phi))^{1/2} \quad (38)$$

III.2.2.4- Détermination de " δ " par une méthode d'approche

L'usage de la méthode des variables séparables nécessite la connaissance de la valeur de δ ($\phi(x = \bar{L})$). Pour pallier cette carence, une méthode d'approche, est utilisée qui comporte une série d'itération, en vue d'obtenir, à 10^{-5} près, la valeur exacte de δ .

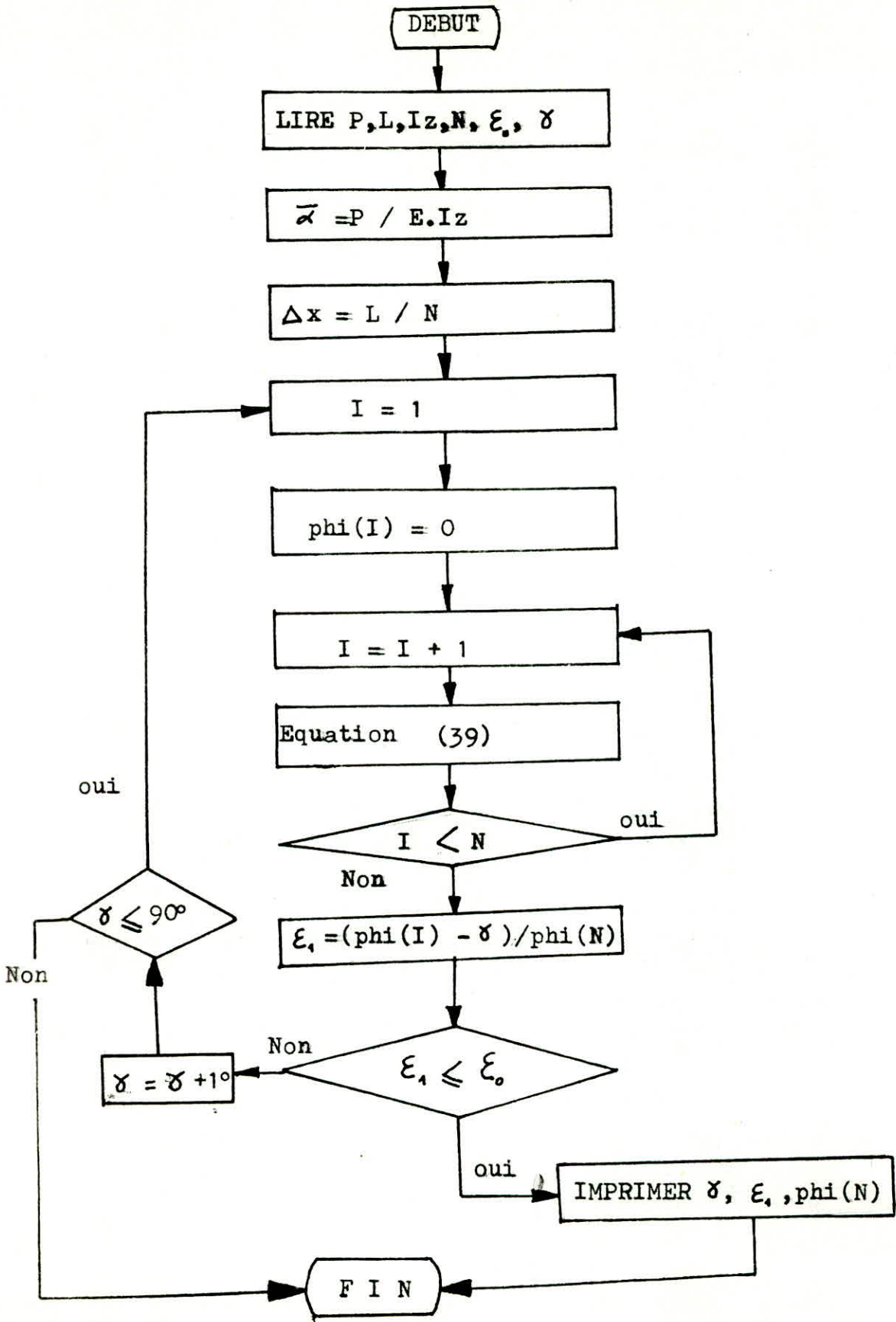
Un organigramme explicatif de cette méthode d'approche, a été développé, suivi d'un programme en fort-ran, dont les résultats figurent au tableau III.8.

Remarque:

La fonction principale utilisée dans le programme a été obtenue, en remplaçant dans l'équation (9), la valeur de $\frac{d\phi}{dx}$ de l'équation (38):

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta X. (2. \bar{\alpha} (\sin \delta - \sin(\phi_n)))^{1/2} \quad (39)$$

- ORGANIGRAMME DE LA METHODE D'APPROCHE -



- R E S U L T A T S -

PHI() : angle formé par la tangente à la fibre neutre et l'horizontale *
 GAMMA : représente PHI pour X = L-DH *
 GAMMA (et PHI) en radians *

--- CARACTERISTIQUES DE LA POUTRE ---

POUTRE: une lame de scie (en acier spécial)
 SECTION RECTANGULAIRE : b x h -----> b=30 mm ; h= 2 mm
 P : charge appliquée à l'extrémité -----> P= 1 , 2 , 3 daN
 L : longueur de la poutre -----> L= 40 mm
 E : module d'élasticité longitudinal -----> E= 19000 daN/mm**2
 Iz : moment d'inertie de la poutre -----> Iz= 20 mm**4
 N : nombre de divisions de la poutre -----> N= 20
 EPS0 : Precision -----> EPS0= 0.00001

 * VALEUR DE GAMMA POUR UNE CHARGE DE 1 daN *****

GAMMA= 0.2314454 # EPS1(10)= 5.9875874E-06 # PHI(10)= 0.2314468 #

 * VALEUR DE GAMMA POUR UNE CHARGE DE 2 daN *****

GAMMA= 0.4397769 # EPS1(10)= 1.431072E-06 # PHI(10)= 0.4397763 #

 * VALEUR DE GAMMA POUR UNE CHARGE DE 3 daN *****

GAMMA= 0.6144217 # EPS1(10)=6.3055677E-06 # PHI(10)= 0.6144255 #

Tableau III.2: Valeur de gamma pour chaque charge P


```

#####
*****
***** DETERMINATION DE LA VALEUR DE PHI POUR X=L-DH *****
*****
#####

```

```
DIMENSION PHI(2200),EPSI(20)
```

```

===== OUVERTURE D'UN FICHIER RÉSULTAT =====
open(unit=5,file='rT.dat',status='new')
=====

```

```
WRITE(5,111)
```

```
FORMAT(2X,77(1H*))
```

```
WRITE(5,112)
```

```

FORMAT(2X,4(1H*),' VALEUR DE GAMMA POUR UNE CHARGE DE dan',
1 25X,4(1H*))

```

```
WRITE(5,113)
```

```

FORMAT(2X,5(1H*),' GAMMA represente phi pour x = L-DH ',
1 24X,4(1H*))

```

```
Write(5,111)
```

```

=====
===== INTRODUCTION DE DONNÉES =====
=====

```

```
print 2
```

```
format(2X,'DONNER LA VALEUR DE LA CHARGE "P"(en daN) = ',%)
```

```
read*,P
```

```
PRINT 3
```

```
format(2X,'DONNER LA VALEUR DE "E"(en daN/mm*2) = ',%)
```

```
read*,E
```

```
PRINT 4
```

```
FORMAT(2X,'DONNER LA VALEUR DE "L"(en mm) = ',%)
```

```
READ*,OL
```

```
PRINT 6
```

```
FORMAT(2X,'DONNER LA VALEUR DE "Iz" (en mm**4) = ',%)
```

```
READ*,ZI
```

```
PRINT 7
```

```
FORMAT(2X,'DONNER LA VALEUR DE "N" = ',%)
```

```
READ*,N
```

```
PRINT 9
```

```
FORMAT(2X,'DONNER LA VALEUR DE "EPSILOGNE" = ',%)
```

```
READ*,EPSO
```

```
PRINT 11
```

```
FORMAT(2X,'DONNER LA VALEUR DE GAMMA (en degres) = ',%)
```

```
READ*,GAMMA
```

```

=====
GAMMA=GAMMA*3.14/180.

```

```
PRINT*, 'GAMMA(EN rd) = ', GAMMA
```

```
ALPHA=P/(E*ZI)
```

```
DX=OL/FLOAT(N)
```

```
I=1
```

```
PHI(I)=0
```

```
DO 10 I=2,N+1
```

```

PHI(I)=PHI(I-1)+DX*SQRT(ABS(2*ALPHA*(SIN(GAMMA)
1 -SIN(PHI(I-1))))))

```

```
CONTINUE
```

```
EPSI(N)=ABS((PHI(N)-GAMMA)/PHI(N))
```

```
IF(EPSI(N).LT.EPSO) GOTO 12
```

```
GAMMA=GAMMA+0.0001
```

```
GOTO 22
.2 IF(GAMMA.GT.1.570796) GOTO 122
WRITE(5,*)'GAMMA=',GAMMA,'EPI(N)=' ,EPSI(N),'PHI(N)=' ,PHI(N)
.22 PRINT*,' gamma est superieur à 90° '
STOP
END
```

On est arrivé à connaître la valeur de " δ " pour chaque charge P, ce qui nous permet de poursuivre la méthode de variables séparables, et d'écrire un programme qui donne les valeurs des déplacements verticaux V et horizontaux U de n'importe quelle section de la poutre.

Les données introduites dans ce programme, sont les caractéristiques géométrique et mécanique de la lame de scie utilisée dans la partie expérimentale avec un nombre de divisions $N= 10$ et $\Delta X= 40$ mm.

III.2.2.5- Résultats et interprétation.

Les résultats découlant du programme (tableaux III 2, 3, 4) et les graphes respectifs de $Y_{thé}=f(X)$ (figures III. , ,) qui en résultent, ont permis d'établir une synthèse entre les courbes expérimentales et théoriques d'où il ressort que les deux courbes ne se confondent pas pour les raisons suivantes:

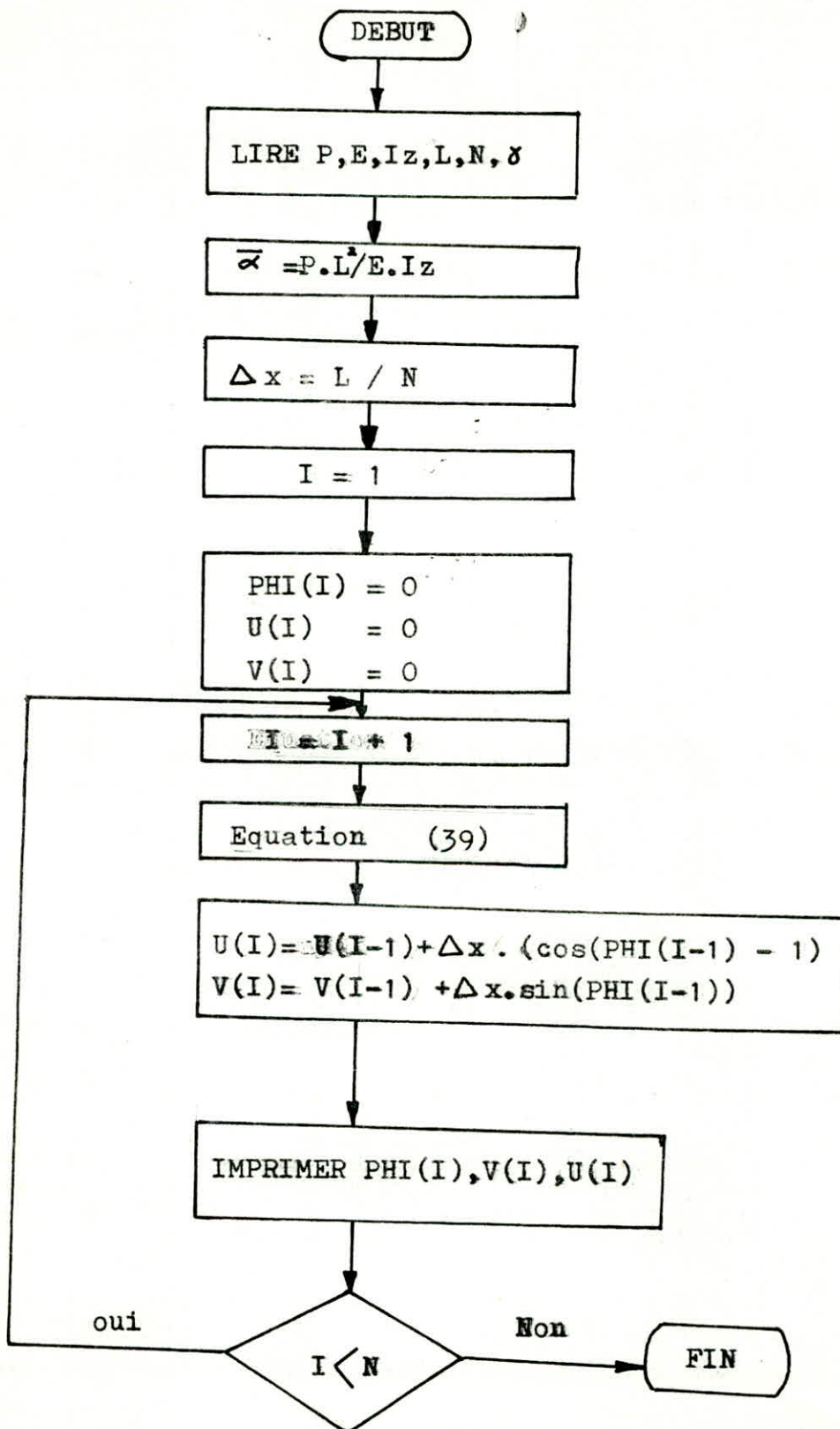
Courbes expérimentales :

- Localisation imprécise des surfaces de prises de mesure.
- Matériel utilisé pour la manipulation et de mesure non précis
- Erreur de lecture.

Courbes théoriques :

- Module d'élasticité utilisé dans les calculs, n'est pas celui de la poutre (pris approximativement)
- Largeur de la poutre n'étant pas constante sur toute la longueur
- Surface de la poutre pas tout à fait rectangulaire (denture de la scie à métaux)

- ORGANIGRAMME DE LA METHODE DES VARIABLES SEPARABLES -



 ***** VALEURS DE V(I),U(I) POUR UNE CHARGE DE P = 1 daN *****
 ***** PAR LA METHODE DES VARIABLES SEPARABLES *****
 ***** GAMMA= 0.2314454 rd *****

PHI(1)= 0.000 V(1)= 0.000 U(1)= 0.000

 PHI(2)= 0.043 V(2)= 1.297 U(2)= 0.023

 PHI(3)= 0.081 V(3)= 4.176 U(3)= 0.129

 PHI(4)= 0.116 V(4)= 8.462 U(4)= 0.360

 PHI(5)= 0.146 V(5)= 13.979 U(5)= 0.744

 PHI(6)= 0.171 V(6)= 20.548 U(6)= 1.288

 PHI(7)= 0.192 V(7)= 27.997 U(7)= 1.988

 PHI(8)= 0.209 V(8)= 36.149 U(8)= 2.828

 PHI(9)= 0.222 V(9)= 44.830 U(9)= 3.781

 PHI(10)= 0.229 V(10)= 53.861 U(10)= 4.814

 PHI(11)= 0.231 V(11)= 63.037 U(11)= 5.881

**Tableau III.3: Résultats théorique par la méthode
 des variables séparables - P= 1 daN -**

 *** VALEURS DE $V(I)$, $U(I)$ POUR UNE CHARGE DE $P = 2$ daN ***
 ***** PAR LA METHODE DES VARIABLES SEPARABLES *****
 ***** GAMMA = 0.4397765 rd *****

PHI(1) = 0.000 V(1) = 0.000 U(1) = 0.000

PHI(2) = 0.083 V(2) = 2.495 U(2) = 0.086

PHI(3) = 0.156 V(3) = 8.015 U(3) = 0.475

PHI(4) = 0.222 V(4) = 16.192 U(4) = 1.325

PHI(5) = 0.278 V(5) = 26.660 U(5) = 2.723

PHI(6) = 0.327 V(6) = 39.059 U(6) = 4.696

PHI(7) = 0.367 V(7) = 53.045 U(7) = 7.223

PHI(8) = 0.398 V(8) = 68.284 U(8) = 10.240

PHI(9) = 0.421 V(9) = 84.453 U(9) = 13.655

PHI(10) = 0.436 V(10) = 101.232 U(10) = 17.344

PHI(11) = 0.440 V(11) = 118.263 U(11) = 21.151

Tableau III.4: Résultats théorique par la méthode des variables séparables - $P = 2$ daN-

 *** VALEURS DE V(I),U(I) POUR UNE CHARGE DE P = 3 daN ***
 ***** PAR LA METHODE DES VARIABLES SEPARABLES *****
 ***** GAMMA= 0.6144217 rd *****

PHI(1)= 0.000 V(1)= 0.000 U(1)= 0.000

PHI(2)= 0.117 V(2)= 3.549 U(2)= 0.174

PHI(3)= 0.222 V(3)= 11.361 U(3)= 0.957

PHI(4)= 0.314 V(4)= 22.854 U(4)= 2.654

PHI(5)= 0.393 V(5)= 37.458 U(5)= 5.423

PHI(5)= 0.460 V(6)= 54.630 U(6)= 9.303

PHI(6)= 0.515 V(7)= 73.866 U(7)= 14.235

PHI(7)= 0.558 V(8)= 94.698 U(8)= 20.091

PHI(8)= 0.589 V(9)=116.696 U(9)= 26.684

PHI(10)= 0.609 V(10)=139.449 U(10)= 33.786

PHI(11)= 0.615 V(11)=162.511 U(11)= 41.103

Tableau III.4: Résultats théorique par la méthode des variables séparables - P= 3 daN -

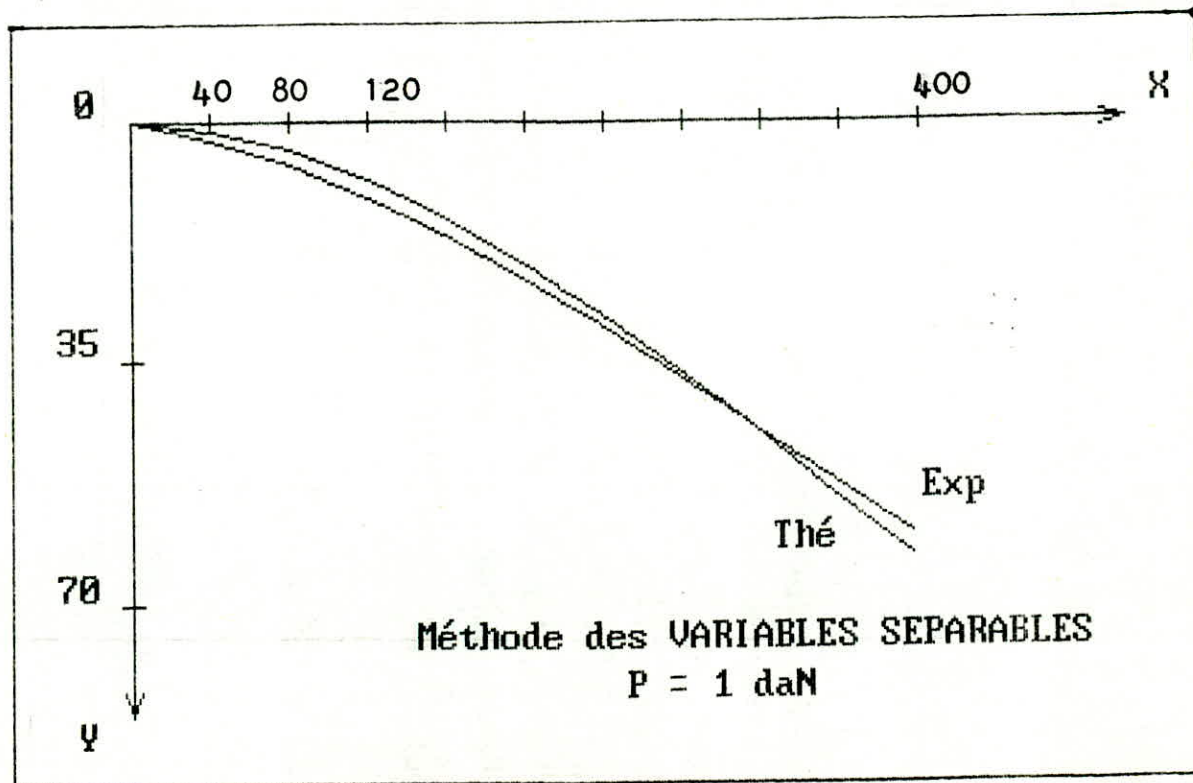


Figure III.8: Comparaison entre la méthode des variables séparables et l'expérimentale pour $P = 1 \text{ daN}$

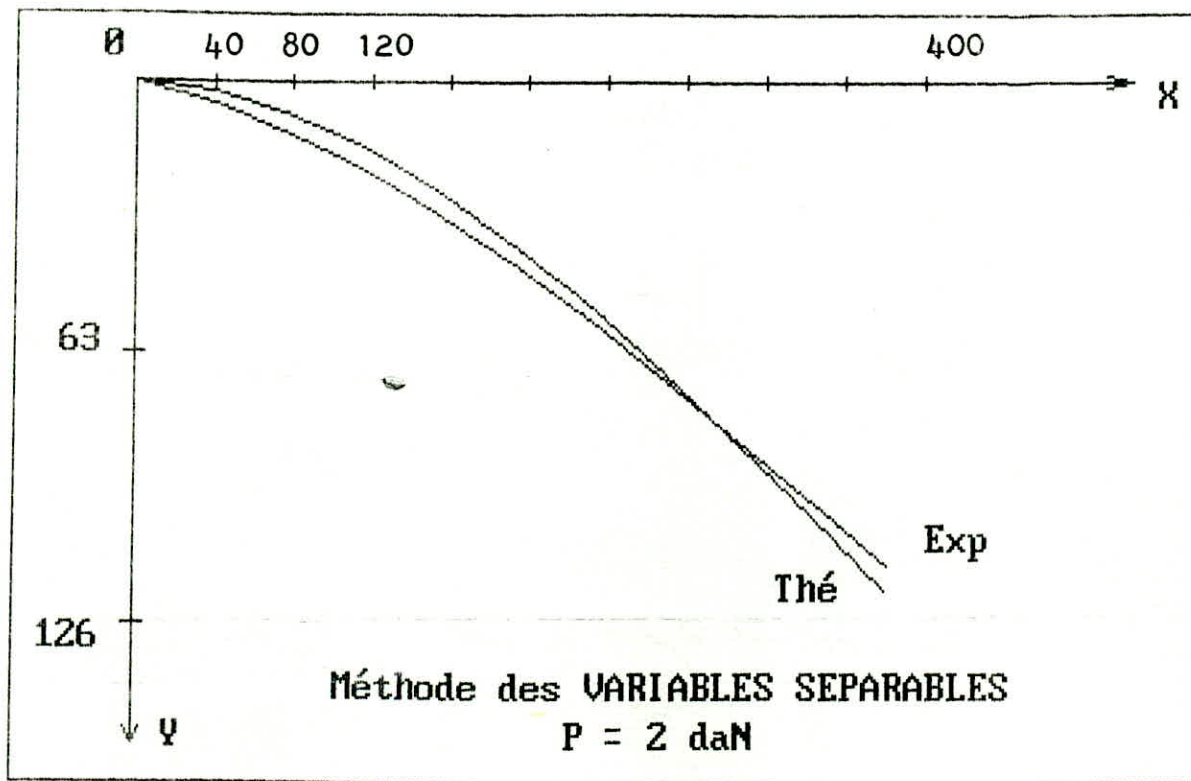


Figure III.9: Comparaison entre la méthode des variables séparables et l'expérimentale pour $P = 2 \text{ daN}$

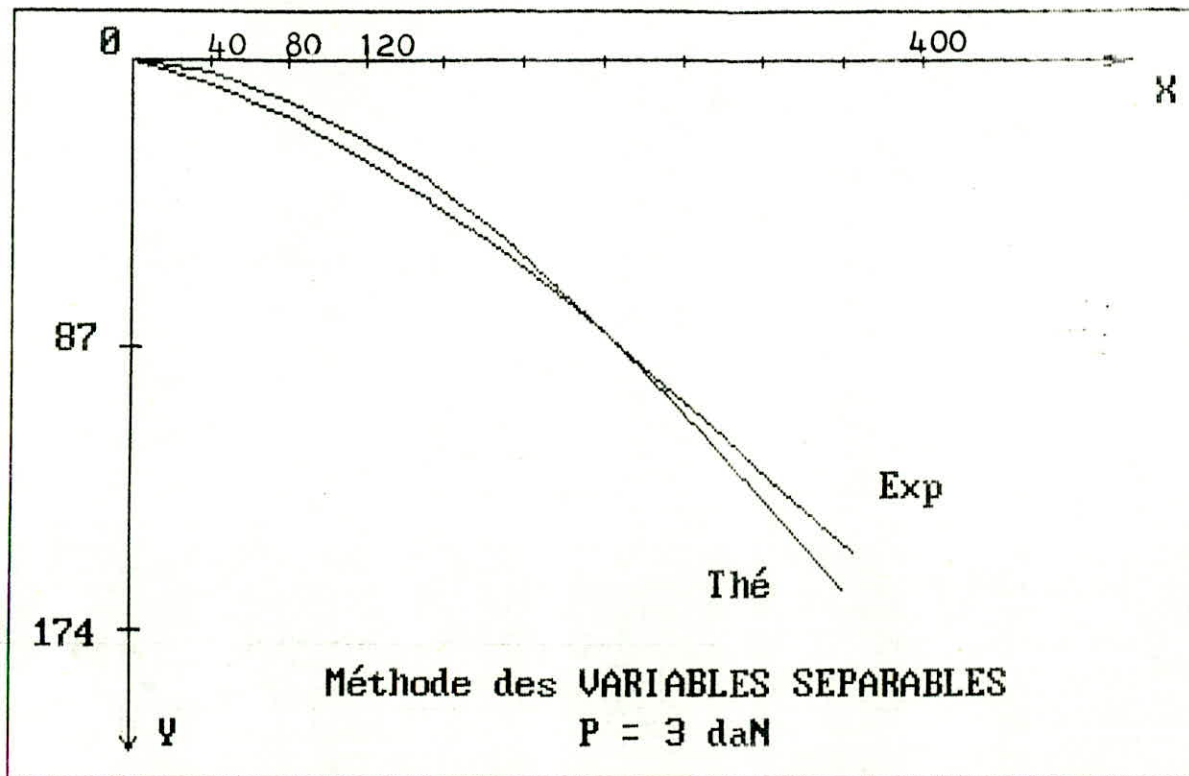


Figure III.10 : Comparaison entre la méthode des variables
séparables et l'expérimentale pour $P = 3 \text{ daN}$

```

*****
*****
****   ETUDE DE LA DEFORMEE D'UNE POUTRE SUBISSANT   ****
****   DES GRANDES DEFORMATIONS                     ****
****   --- méthode des variables séparables ---      ****
*****
*****
DIMENSION U(22),V(22),PHI(22),DF(22),DEF(22),DU(22)
DIMENSION DV(22),EV(22),EU(22)

```

```

===== OUVERTURE D'UN FICHIER RESULTATS =====

```

```

CHARACTER A20 FICH
WRITE(MP,A)'NOM DU FICHIER DE DONNEES'
READ(A,11) FICH
FORMAT(A20)
OPEN(UNIT=7,FILE=FICH,STATUS='OLD')
open(unit=5,file='res.dat',status='new')

```

```

WRITE (5,106)
FORMAT(2X,77(1H*))
WRITE (5,107)
FORMAT(2X,4(1H*),' DETERMINATION DE U(I),V(I) POUR UNE CHARGE
1      P = daN',4(1H*))
WRITE (5,108)
FORMAT(2X,8(1H*),'      PAR LA METHODE DES VARIABLES SEPARABLES'
1      ,6(1H*))
WRITE (5,109)
FORMAT(2X,8(1H*),'      GAMMA=',25X,6(1H*))
WRITE (5,106)

```

```

===== INTRODUCTION DE DONNÉES =====

```

```

print 2
format(2X,'DONNER LA VALEUR DE LA CHARGE "P"(en daN) = ',#)
read*,P
PRINT 3
format(2X,'DONNER LA VALEUR DE "E"(en daN/mm*2) = ',#)
read*,E
PRINT 4
FORMAT(2X,'DONNER LA VALEUR DE "L"(en mm) = ',#)
READA,OL
PRINT 6
FORMAT(2X,'DONNER LA VALEUR DE "Iz" (en mm**4) = ',#)
READA,ZI
PRINT 7
FORMAT(2X,'DONNER LA VALEUR DE "N" = ',#)
READA,N
print 8
FORMAT(2X,'DONNER LA VALEUR DE "GAMMA"=#)
READA,GAMMA

```

```

=====
ALPHA=P/(E*ZI)
DX=OL/FLOAT(N)

```

```

*****
**** PHI( ) : ANGLE FORME PAR LA TANGENTE A LA FIBRE MOYENNE ****
****      ET L'HORIZONTALE                                     ****

```

```

I=1
U(I)=0.
V(I)=0.
PHI(I)=0.

```

```

DO 10 I=1,N+1
PHI(I+1)=PHI(I)+DX*SQRT(2*AALPHA*(SIN(GAMMA)
1 -SIN(PHI(I))))

```

```

*****
***          DEPLACEMENT VERTICAL :    V( )          ***
***          DEPLACEMENT HORIZONTAL : U( )          ***
*****
V(I+1)=V(I)+DX*SIN(PHI(I+1))
U(I+1)=U(I)+DX*(-1.+COS(PHI(I+1)))
===== IMPRESSION DES RESULTATS =====
WRITE(5,200) I,PHI(I),I,V(I),I,U(I)
FORMAT('          PHI(',I2,',')=',F6.3,',          V(',I2,',')=',F7.3,',
1          U(',I2,',')=',F8.3)

```

```

CONTINUE
WRITE(5,106)
STOP
END

```

III.2.3- Méthode de L'EQUATION ELASTIQUE

L'équation différentielle de la déformée d'une poutre soumise à la flexion s'écrit :

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = - \frac{M_f}{E I_z} \quad (40)$$

avec $\frac{dy}{dx} = \phi$ (41)

: pente à la courbe élastique en un point quelconque

En remplaçant dans (40) :

$$\frac{\frac{d\phi}{dx}}{(1 + \phi^2)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{M_f}{E I_z} \quad (42)$$

Le moment de flexion pour ce cas de figure (fig III.) est le suivant:

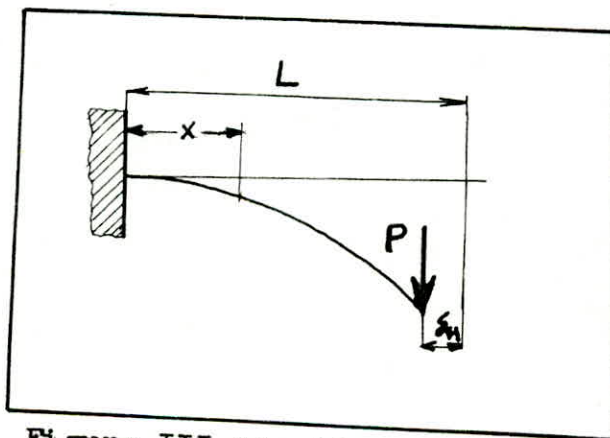


Figure III.11: Ligne élastique d'une poutre en console.

$$Mf(x) = - P.(L - \delta_H - x) \quad (43)$$

$$= - P.(\bar{L} - x) \quad (44)$$

$$\text{avec } \bar{L} = L - \delta_H$$

En remplaçant l'expression de $Mf(x)$ dans l'équation(42):

$$\frac{\frac{d\phi}{dx}}{(1 + \phi^2)^{3/2}} = \frac{P}{E I_z} .(\bar{L} - x) \quad (45)$$

$$= A.(\bar{L} - x) = g(x) \quad (46)$$

$$\text{avec } A = \frac{P}{E.I_z}$$

ainsi, on arrive à une équation différentielle à variables séparables de la forme :

$$\frac{d\phi}{(1 + \phi^2)^{3/2}} = g(x).dx \quad (47)$$

Intégrant en premier lieu, la fonction $\frac{d\phi}{(1 + \phi^2)^{3/2}}$:

$$\int \frac{d\phi}{(1 + \phi^2)^{3/2}} = \frac{\phi}{(1 + \phi^2)^{1/2}} \quad (48)$$

Le détail du calcul de cette fonction est exposé dans l'annexe 1, du polycopé.

La fonction polynomiale $g(x)$ est facile à intégrer, est donc pour résultat:

$$\int g(x)dx = \int A.(\bar{L} - x) dx = A.(Lx - \frac{x^2}{2} + k) \quad (49)$$

d'où l'intégrale de l'équation (47) :

$$\frac{\phi}{(1 + \phi^2)^{1/2}} = A.(Lx - \frac{x^2}{2} + k) \quad (50)$$

Avec k constante d'intégrale, déterminer par

les conditions aux limites:

$$\phi (x = 0) = 0 \implies k = 0 \quad (51)$$

L'équation élastique de la poutre s'écrit donc:

$$\frac{\phi}{(1 + \phi^2)^{1/2}} = A \cdot (\bar{L} \cdot x - \frac{x^2}{2}) \quad (52)$$

$$\text{avec : } A = \frac{P}{E I_z} \text{ et } \bar{L} = L - \delta_H$$

On remarque, que l'équation (52) est une équation à deux inconnues en ϕ et \bar{L} ; Donc on doit déterminer la valeur de \bar{L} , pour cela réarrangeant l'équation:

$$\phi = \frac{A (\bar{L} x - \frac{x^2}{2})}{(1 - A^2 (\bar{L} x - \frac{x^2}{2})^2)^{1/2}} \quad (53)$$

$$\text{or, pour } x = \bar{L} \quad \phi = \delta$$

soit donc:

$$L = L - \delta_H = \left(\frac{2 \cdot \delta}{A (1 + \delta^2)^{1/2}} \right)^{1/2} \quad (54)$$

Avec " δ " ($\delta = \phi(x=\bar{L})$) déterminé par la méthode d'approche du paragraphe III.2.2.4.

Le problème de l'inconnue " \bar{L} " étant résolu, on pourra maintenant déterminer la valeur de ϕ pour n'importe quelle position X de la poutre (équat. (52)).

Un programme a été établi, pour cette méthode qui permet la détermination des déplacements horizontaux et verticaux de n'importe quelle section de la poutre. Un organigramme explicatif (dans la feuille qui suit) du programme, nous permet de suivre tous les étapes utilisées pour aboutir aux déplacements U et V.

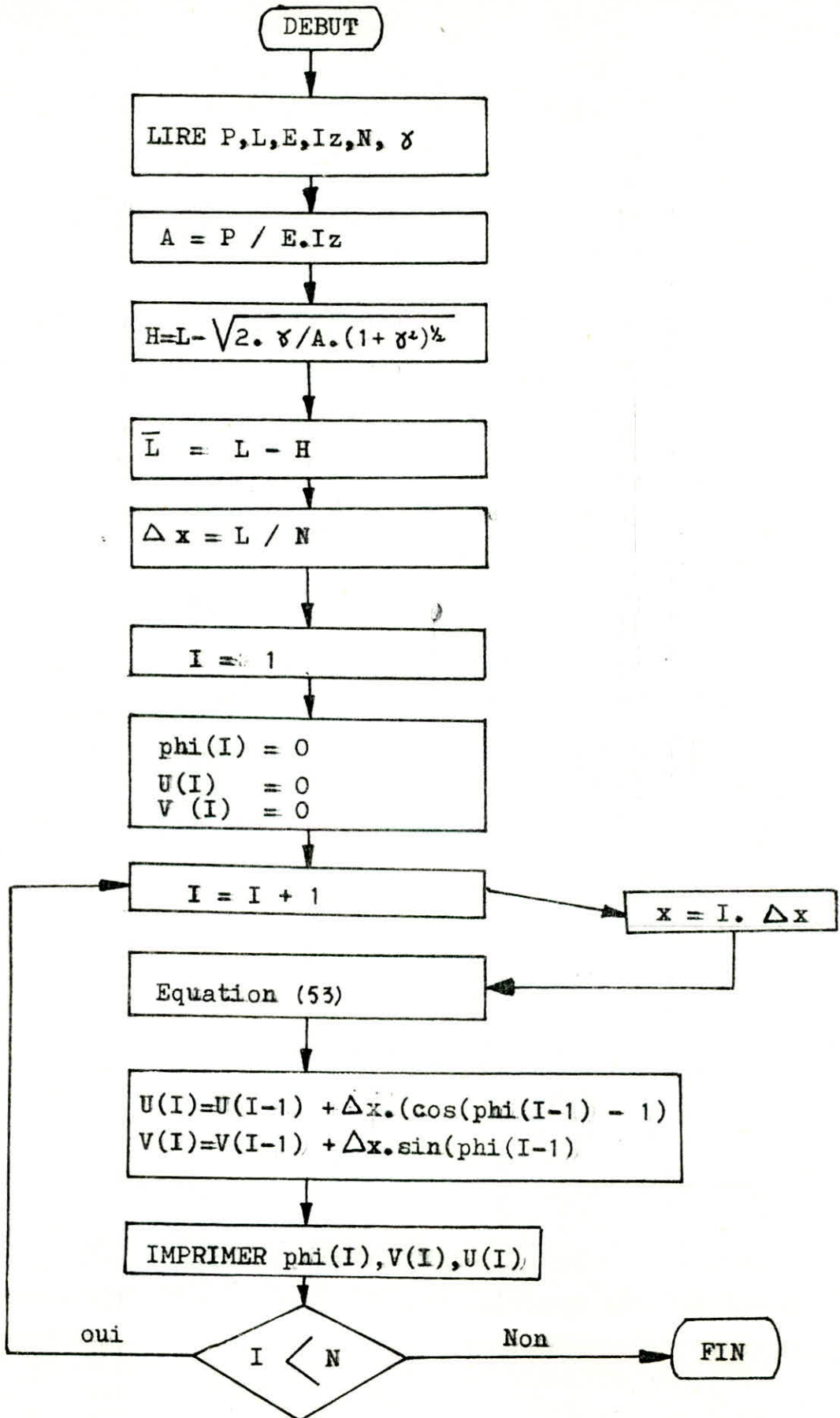
Les données introduites dans ce programme, sont celle de la poutre de la partie expérimentale; avec $N = 10$ et $X = 40$ mm.

III.3.1- Résultats et interprétation.

Les tableaux des résultats obtenus par cette méthode (Tableaux III 5, 6, 7) ont permis de tracer les courbes $Y_{thé} = f(X)$ (Figures III , ,) qui ont décelé les mêmes constatations que celles exposées dans la méthode précédente.

Néanmoins, on remarquera une meilleur approche des courbes expérimentales, et surtout au niveau de l'encastrement.

- ORGANIGRAMME DE LA METHODE DE L'EQUATION ELASTIQUE -



 ***** VALEURS DE $V(I)$, $U(I)$ POUR UNE CHARGE DE $P = 1$ daN *****
 ***** methode de l equation élastique *****
 ***** GAMMA = 0.2314454 *****

PHI(1) = 0.000 $V(1) = 0.000$ $U(1) = 0.000$

PHI(2) = 0.061 $V(2) = 2.044$ $U(2) = 0.054$

PHI(3) = 0.096 $V(3) = 5.543$ $U(3) = 0.209$

PHI(4) = 0.128 $V(4) = 10.336$ $U(4) = 0.498$

PHI(5) = 0.155 $V(5) = 16.261$ $U(5) = 0.940$

PHI(6) = 0.179 $V(6) = 23.153$ $U(6) = 1.539$

PHI(7) = 0.198 $V(7) = 30.845$ $U(7) = 2.286$

PHI(8) = 0.213 $V(8) = 39.167$ $U(8) = 3.162$

PHI(9) = 0.224 $V(9) = 47.947$ $U(9) = 4.137$

PHI(10) = 0.230 $V(10) = 57.010$ $U(10) = 5.178$

PHI(11) = 0.231 $V(11) = 66.179$ $U(11) = 6.243$

Tableau III.5: Résultats théorique par la méthode de l'équation élastique- $P=1$ daN-

 ***** VALEURS DE $V(I)$, $U(I)$ POUR UNE CHARGE DE $P = 2$ daN *****
 ***** methode de l'equation élastique *****
 ***** GAMMA = 0.4397769 *****

PHI(1)= 0.000 $V(1)= 0.000$ $U(1)= 0.000$

PHI(2)= 0.115 $V(2)= 3.857$ $U(2)= 0.193$

PHI(3)= 0.193 $V(3)= 10.465$ $U(3)= 0.748$

PHI(4)= 0.244 $V(4)= 19.532$ $U(4)= 1.794$

PHI(5)= 0.298 $V(5)= 30.761$ $U(5)= 3.406$

PHI(6)= 0.344 $V(6)= 43.859$ $U(6)= 5.607$

PHI(7)= 0.383 $V(7)= 58.435$ $U(7)= 8.367$

PHI(8)= 0.412 $V(8)= 74.197$ $U(8)= 11.604$

PHI(9)= 0.431 $V(9)= 90.752$ $U(9)= 15.191$

PHI(10)= 0.439 $V(10)=107.714$ $U(10)= 18.966$

PHI(11)= 0.437 $V(11)=124.687$ $U(11)= 22.745$

Tableau III.6: Résultats théorique par la méthode de l'équation élastique - $P= 2$ daN -

 *** VALEURS DE V(I),U(I) POUR UNE CHARGE DE P = 3 daN ***
 ***** methode de l equation élastique *****
 ***** GAMMA = 0.6144217 *****

PHI(1)= 0.000 V(1)= 0.000 U(1)= 0.000

PHI(2)= 0.160 V(2)= 5.375 U(2)= 0.376

PHI(3)= 0.256 V(3)= 14.593 U(3)= 1.464

PHI(4)= 0.344 V(4)= 27.262 U(4)= 3.533

PHI(5)= 0.423 V(5)= 42.977 U(5)= 6.757

PHI(6)= 0.492 V(6)= 61.284 U(6)= 11.199

PHI(7)= 0.548 V(7)= 81.676 U(7)= 16.791

PHI(8)= 0.589 V(8)=103.581 U(8)= 23.324

PHI(9)= 0.611 V(9)=126.377 U(9)= 30.456

PHI(10)= 0.613 V(10)=149.408 U(10)= 37.752

PHI(11)= 0.595 V(11)=172.011 U(11)= 44.751

Tableau III.7: Résultats théorique par la méthode de l'équation élastique - P= 3 daN -

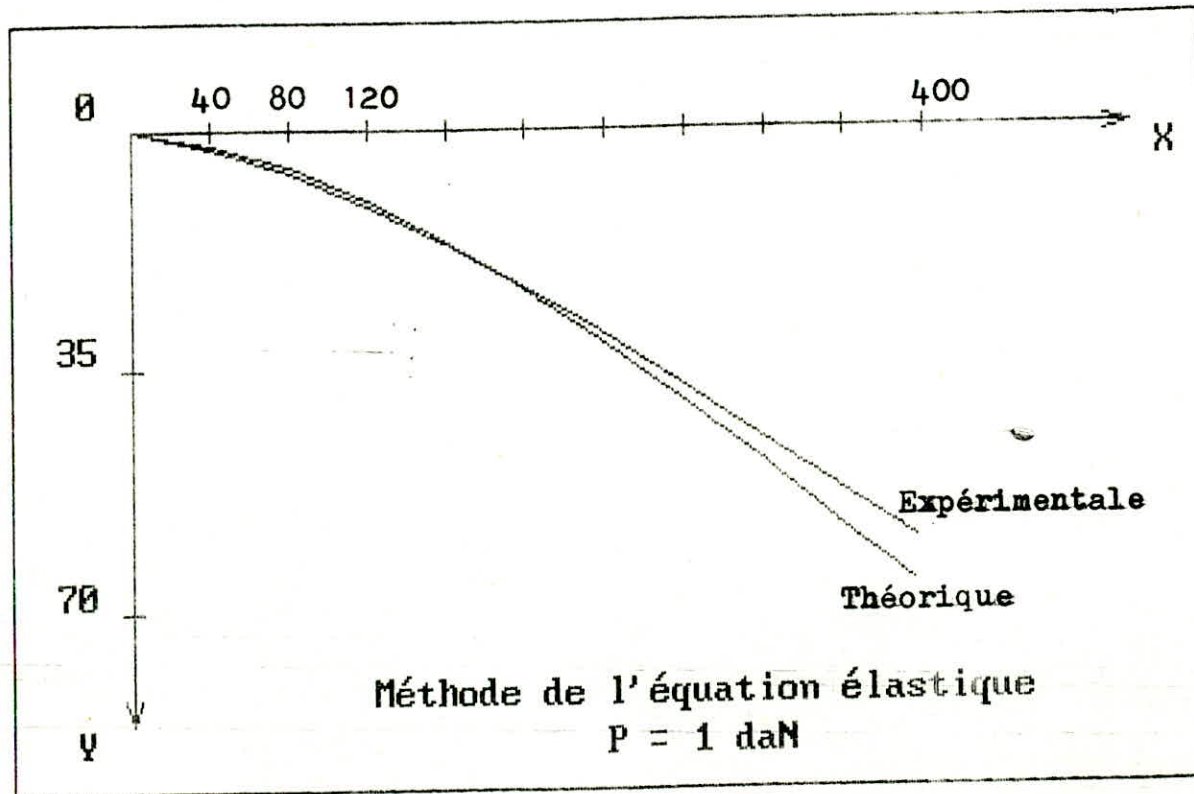


Figure III.12 Comparaison entre la Méthode de l'équation élastique et l'expérimentale pour P = 1 daN

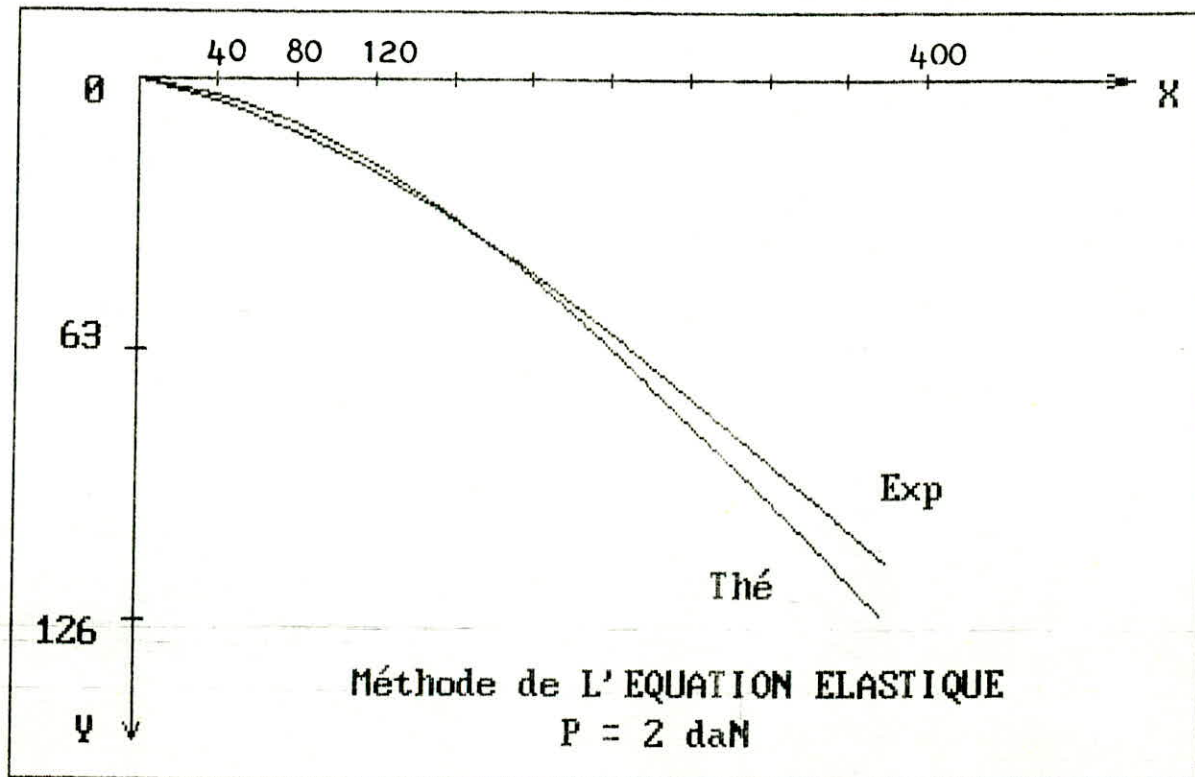


Figure III.13 : Comparaison entre la méthode de l'équation élastique et l'expérimentale pour

$P = 2 \text{ daN}$

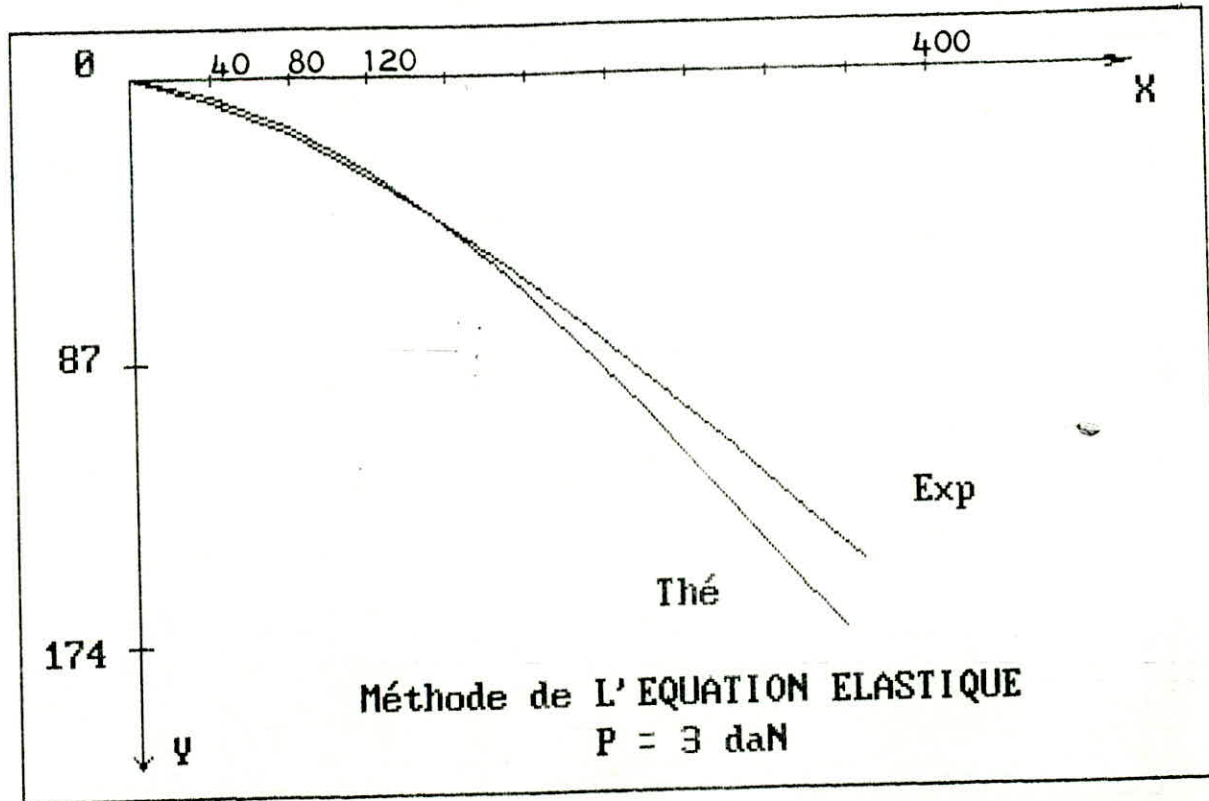


Figure III.14 : Comparaison entre la méthode de l'équation élastique et l'expérimentale pour $P = 3 \text{ daN}$

```

*****
***** ETUDE DE LA DEFORMEE D'UNE POUTRE SUBISSANT *****
***** DES GRANDES DEFORMATIONS *****
***** -- méthode de l'équation élastique -- *****
*****

```

```

*****
***** DIMENSION U(22),V(22),PHI(22),EV(22),EU(22),DF(22),DEF(22) *****
***** DIMENSION DV(22),DU(22) *****

```

```

===== FICHIER DE DONNÉES =====

```

```

CHARACTER *20 FICH
WRITE(MP,*) 'NOM DU FICHIER DONNEES'
READ(*,11) FICH
FORMAT(A20)
OPEN(UNIT=7,FILE=FICH,STATUS='OLD')
open(unit=5,file='rr.dat',status='new')

```

```

=====

```

```

WRITE (5,106)
FORMAT(2X,77(1H*))

```

```

WRITE (5,107)
FORMAT(2X,4(1H*),'VALEURS DE U(I),V(I) POUR UNE CHARGE DE
P = daN', 4(1H*))

```

```

WRITE (5,108)
FORMAT(2X,8(1H*),' méthode de l equation élastique',24X,
6(1H*))

```

```

WRITE(5,109)
FORMAT(2X,8(1H*),' GAMMA =',24X,6(1H*))
WRITE (5,106)

```

```

===== INTRODUCTION DE DONNÉES =====

```

```

print 2

```

```

format(2X,'DONNER LA VALEUR DE LA CHARGE "P"(en daN) = ',*)
read*,P

```

```

PRINT 3
format(2X,'DONNER LA VALEUR DE "E"(en daN/mm*2) = ',*)
read*,E

```

```

PRINT 4
FORMAT(2X,'DONNER LA VALEUR DE "L"(en mm) = ',*)
READ*,OL

```

```

PRINT 6
FORMAT(2X,'DONNER LA VALEUR DE "Iz" (en mm**4) = ',*)
READ*,ZI

```

```

PRINT 7
FORMAT(2X,'DONNER LA VALEUR DE "N" = ',*)
READ*,N

```

```

PRINT 8
FORMAT(2X,'DONNER LA VALEUR DE GAMMA (en rd)= ',*)
READ*,GAMMA

```

```

=====

```

```

DX=OL/FLOAT(N)
A= P/(E*ZI)
DH=OL-SQRT(2*GAMMA/(A*SQRT(1+GAMMA**2)))
B=OL-DH

```

```

=====

```

```

***** PHI( ) : ANGLE FORME PAR LA TANGENTE A LA FIBRE MOYENNE *****
***** ET L'HORIZONTALE *****

```

```

*****
*****
*****

```



```

=====
I=1
U(I)=0.
V(I)=0.
PHI(I)=0.

DO 10 I=2,N+1
X=FLOAT(I)*DX
PHI(I)=AA*(BAX-(X**2/2))/SQRT(1.-AAA2A*((BAX-(X**2/2.))**2))
=====
***          DEPLACEMENT VERTICAL :   V( )          ****
***          DEPLACEMENT HORIZONTAL : U( )          ****
=====
V(I)=V(I-1)+DX*ASIN(PHI(I))
U(I)=U(I-1)+DX*(-1.+COS(PHI(I)))

=====
===== IMPRESSION DES RESULTATS =====
=====
WRITE(5,200)I,PHI(I),I,V(I),I,U(I)
FORMAT('          PHI(',I2,')=',F7.3,'          V(',I2,')=',F7.3,
        '          U(',I2,')=',F8.3)
CONTINUE
STOP
END

```

IV.- METHODE DES ELEMENTS FINIS (M.E.F)

Jusqu'à présent dans la plupart des cas, en résistance des matériaux, le calcul des poutres et des structures constituées de poutres, appelées structures à barres, s'effectuait à l'aide de formulaire de résistance des matériaux et de théorie des poutres. Cette méthode entraînait fréquemment des calculs longs et fastidieux.

Au début du 20ème siècle, l'informatique a connu un développement considérable, et avec elle, la méthode des éléments finis s'affirma comme un instrument très efficace. Elle permet d'effectuer des calculs de structures très complexes formés d'une multitude de degrés de libertés. Cette technique de calcul, utilisant l'informatique présente de grands avantages, nécessite peu de moyens en matériel et s'avère très souple et rapide à l'usage comparée au système de calcul traditionnel de la R.D.M. Elle permet de quantifier instantanément, sans difficulté, l'influence d'une variation de l'un des paramètres de la structure - paramètres géométriques (portée d'une barre, forme de la section droite ...), paramètres physiques (nature des matériaux, amplitude des efforts...), paramètres de construction (nature, nombre des appuis...) - sur le comportement de cette dernière.

IV.1- Formulation

Dans la M.E.F, il existe deux types de formulation réalisables par la méthode des déplacements et celle des forces. Pour la circonstance, et dans le cas des déplacements des noeuds on utilise la "méthode des déplacements" en vue de déceler les déplacements éventuels découlant des effets des forces appli-

quées à la structure et compte tenu des caractéristiques de sa rigidité.

IV.2- Identification du problème

Nous avons à déterminer -comme pour les méthodes précédentes- les déplacements des surfaces d'une poutre contilever sous l'action d'une force P à son extrémité libre par la M.E.F. Tout d'abord, on doit faire un choix sur le type d'élément simple à utiliser pour discrétiser la structure, et on a opter pour l'élément poutre (ou barre) à deux dimensions qui convient parfaitement au cas de l'espèce. Déterminer ensuite la matrice de rigidité élémentaire d'un élément dans un repère global $[K]_e$ préalablement choisi et les assembler pour aboutir à la matrice de rigidité globale de la structure $[K]$; puis former le vecteur force nodal $\{F\}$ dans le même repère et résoudre à la fin le système linéaire (dans le cas statique)

$$[K] \{q\} = \{F\} \quad (55)$$

par la méthode de GAUSS qui nous donnera les déplacements nodaux $\{q\}$ inconnus du problème.

IV.3-Matrice de rigidité élémentaire d'un élément \triangle

Après avoir discrétiser la poutre en élément de dimensions finis, on procède au calcul de la matrice de rigidité élémentaire $[K]_e$ de chacun de ces éléments.

On définit $[K]_e$ comme étant la matrice qui permet d'exprimer l'énergie de déformation U sous forme quadratique des déplacements nodaux $\{q\}$:

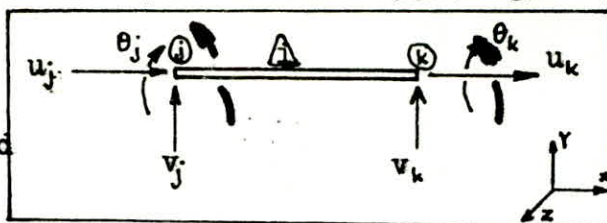
$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T \cdot [K]_e \cdot \{q\} \quad (56)$$

IV.3.1 Formulation de $[K]_e$

Considérons un élément \triangle de notre structure, avec

trois degrés de liberté par noeuds(k, j)(fig IV.1).

FIGURE IV.1:
élément poutre à
trois degrés de
liberté par noeud



- Vecteur déplacement : $\{q\}^T = \{u_j, v_j, \theta_j, u_k, v_k, \theta_k\}$

- vecteur forces appliquées aux noeuds :

$$\{F\}^T = \{F_{xj}, F_{yj}, M_j, F_{xk}, F_{yk}, M_k\}$$

Le problème peut être considéré comme la superposition de deux problèmes que l'on peut résoudre séparément :

- Extension (fig IV.2)

- Flexion autour de l'axe z (fig IV.3)

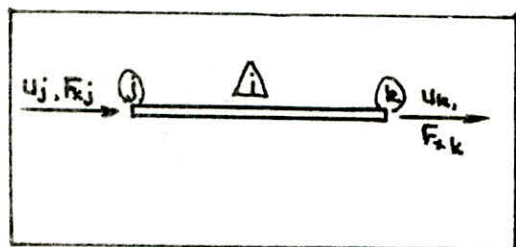


Figure IV.2: Elément poutre
en extension

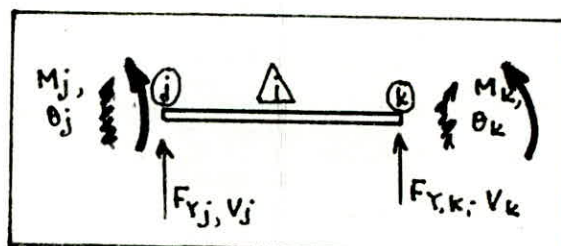


Figure IV.3: Elément poutre en
flexion autour de oz

IV.3.2- Matrice de rigidité en extension $[K]_E$

On établit d'abord la fonction de déplacement $u(x)$ qui est fonction polynomiale qui donne le déplacement $q(x)$ en un point quelconque de la structure. Elle possède un nombre de coefficients inconnus égal au nombre de degrés de liberté de l'élément.

Revenons à la figure IV.2; Les forces $F_{xj(k)}$ provoquent les déplacements $u_{j(k)}$ et puisque il n'y a pas de force intermédiaire alors la déformation est constante :

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = a_1 \quad (57)$$

Après intégration :

$$u(x) = a_1 \cdot x + a_0 \quad (58)$$

Les constantes a et a_0 sont déterminées par les conditions aux limites :

$$u(0) = u_j \quad ; \quad u(L) = u_k \quad (59)$$

En remplaçant dans (58) on aura :

$$u(x) = u_j + (u_k - u_j) \cdot \frac{x}{L} \quad (60)$$

L'énergie de déformation s'écrit :

$$U = \int_V W \cdot dV \quad (61)$$

:avec-l'énergie potentiel de déformation

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon \quad (62)$$

-Élément de volume

$$dV = S \cdot dx \quad (63)$$

-poutre soumise à une charge axiale

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (64)$$

Remplaçons (62,63,64) dans (61), nous aurons :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E \cdot \varepsilon^2 \cdot S dx \quad (65)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L E \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \cdot S dx \quad (66)$$

$$\text{or } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_k - u_j}{x_k - x_j} = \frac{u_k - u_j}{L} \quad (67)$$

(67) et (66).

$$U = \frac{E \cdot S}{L} \cdot (u_k - u_j)^2 \quad (68)$$

Soit, sous forme matricielle:

$$U = \frac{1}{2} [u_j, u_k] \cdot \frac{E \cdot S}{L} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_k \end{Bmatrix} \quad (69)$$

Et par identification à l'équation (56):

$$[K]_E = \frac{E.S}{L} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (70)$$

IV 3.3-Matrice de rigidité dans le cas de flexion (fig IV.3) $[K]_F$

La fonction de déplacement $w(x)$ de ce cas de figure est de la forme suivante :

$$w(x) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 \quad (71)$$

$$\xi = \frac{x}{L}$$

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = a_1 + 2 \cdot a_2 \xi + 3 \cdot a_3 \xi^2 \quad (72)$$

Conditions aux limites :

$$w(0) = v_j \quad ; \quad w(L) = v_k \quad (73)$$

$$\theta(0) = \theta_j \quad ; \quad \theta(L) = \theta_k \quad (74)$$

Ces conditions aux limites aboutissent à l'écriture matricielle des déplacements en fonction des inconnues a :

$$\begin{Bmatrix} v_j \\ L\theta_j \\ v_k \\ L\theta_k \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (75)$$

On inverse et on tire les inconnues (a) :

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ L\theta_j \\ v_k \\ L\theta_k \end{Bmatrix} \quad (76)$$

U dans le cas de flexion de poutre s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \int_v \sigma \cdot \epsilon \, dV = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_x^2}{E I_2} \cdot dx \quad (77)$$

Or

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{2}{L^2} \cdot a_2 + \frac{6}{L^2} \cdot a_3 \xi$$

$$\text{ou bien : } L^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (78)$$

$$\text{De plus : } Mz = E \cdot I^2 \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (79)$$

En remplaçant (78) et (79) dans (77):

$$U = \{ a_0, a_1, a_2, a_3 \} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4L & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 12L \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (80)$$

Soit à la fin, en remplaçant les déplacements généralisés par leurs valeurs :

$$U = \frac{1}{2} \{ v_j, \theta_j, v_k, \theta_k \} \frac{EI_2}{L^3} \begin{vmatrix} 12 & 6L & -12 & 0L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \text{Symé} & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ \theta_j \\ v_k \\ \theta_k \end{Bmatrix} \quad (81)$$

ainsi par identification :

$$[K]_F = \frac{E \cdot I_2}{L^3} \begin{vmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \text{Sym.} & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{vmatrix} \quad (82)$$

IV3.4- Matrice de rigidité élémentaire de l'élément complet

La relation énergétique permet d'écrire :

$$\frac{1}{2} \{q\}^T [K]_e \{q\} = \frac{1}{2} [q_E^T K_E q_E + q_F^T K_F q_F] \quad (83)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_E & q_F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_E \\ q_F \end{Bmatrix} \quad (84)$$

Ecriture de $[K]_e$

$$[K]_e = \begin{bmatrix} \frac{E.S}{L} & 0 & 0 & -\frac{E.S}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{E.S}{L} & 0 & 0 & \frac{E.S}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

IV.4-Matrice élémentaire de rigidité dans le repère de coordonnées globales

Soient le repère $\overline{o\bar{x}\bar{y}}$ ^{le système} de coordonnées global.

supposant que le système de coordonnées local oxy soit incliné d'un angle φ dans le système de coordonnées global (fig IV.4)

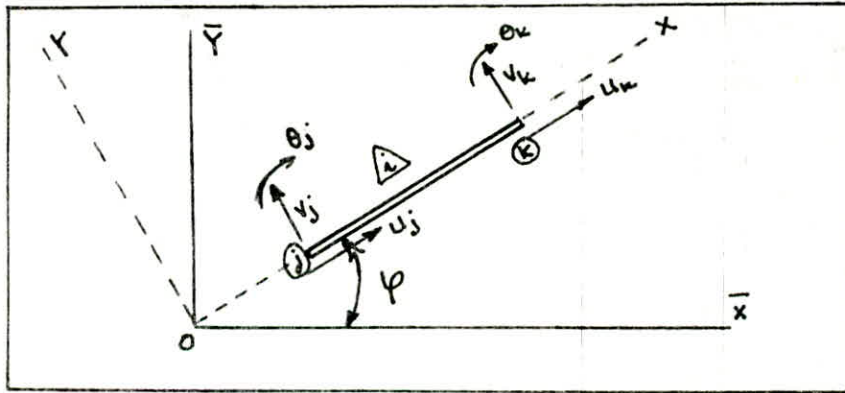


Figure IV.4: Système de coordonnées global

On détermine les relations qui existent entre les axes globaux et locaux, comme suit (pour le nœud j par exemple)

$$u_j = \bar{u}_j \cos \varphi + \bar{v}_j \sin \varphi \quad (85)$$

$$v_j = -\bar{u}_j \sin \varphi + \bar{v}_j \cos \varphi \quad (86)$$

$$\theta_j = \bar{\theta}_j \quad (87)$$

Sous forme matriciel :

$$\begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (88)$$

Pour les deux noeuds, on aura comme matrice de passage p ; la matrice orthogonale suivante :

$$[p] = \begin{vmatrix} \cos & \sin & 0 & & & \\ -\sin & \cos & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos & \sin & 0 \\ & & & -\sin & \cos & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (89)$$

soit $[K]_e^G$: matrice de rigidité dans le repère global
 $[K]_e^L$: matrice de rigidité dans le repère local

$$[F]^L = [K]_e^L \cdot \{q\}^L \quad (90)$$

$$[p] \cdot [F]^G = [K]_e^L [p] \cdot \{q\}^G \quad (91)$$

$$[F]^G = [p]^T \cdot [K]_e^L [p] \cdot \{q\}^G \quad (92)$$

Ce qui résulte que :

$$[K]_e^G = [p]^T [K]_e^L [p] \quad (93)$$

IV.5 Assemblage et résolution

La phase d'assemblage consiste à construire les matrices globales K et F de la structure complète à partir de la somme des matrices élémentaires des éléments dans le repère global.

Cette addition se fait par bloc, en respectant la numérotation des noeuds de chaque élément ainsi que leurs connectivités.

La résolution du système linéaire $[K] \{q\} = \{F\}$, a été faite par

la méthode d'élimination de Gauss ,décrite dans l'annexe

IV.6- Programme et organigramme

Nous avons établi un programme général, qui permet de résoudre tous les types de structures en élément poutre à deux dimensions. Un organigramme explicatif, (sur la page ci-après) permet de voir l'organisation, et les étapes logique du programme.

IV.7- Application du programme pour le cas de notre problème

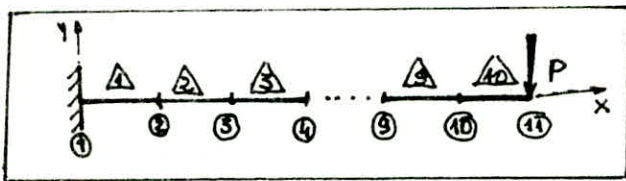


Figure IV.5: Discrétisation de la poutre

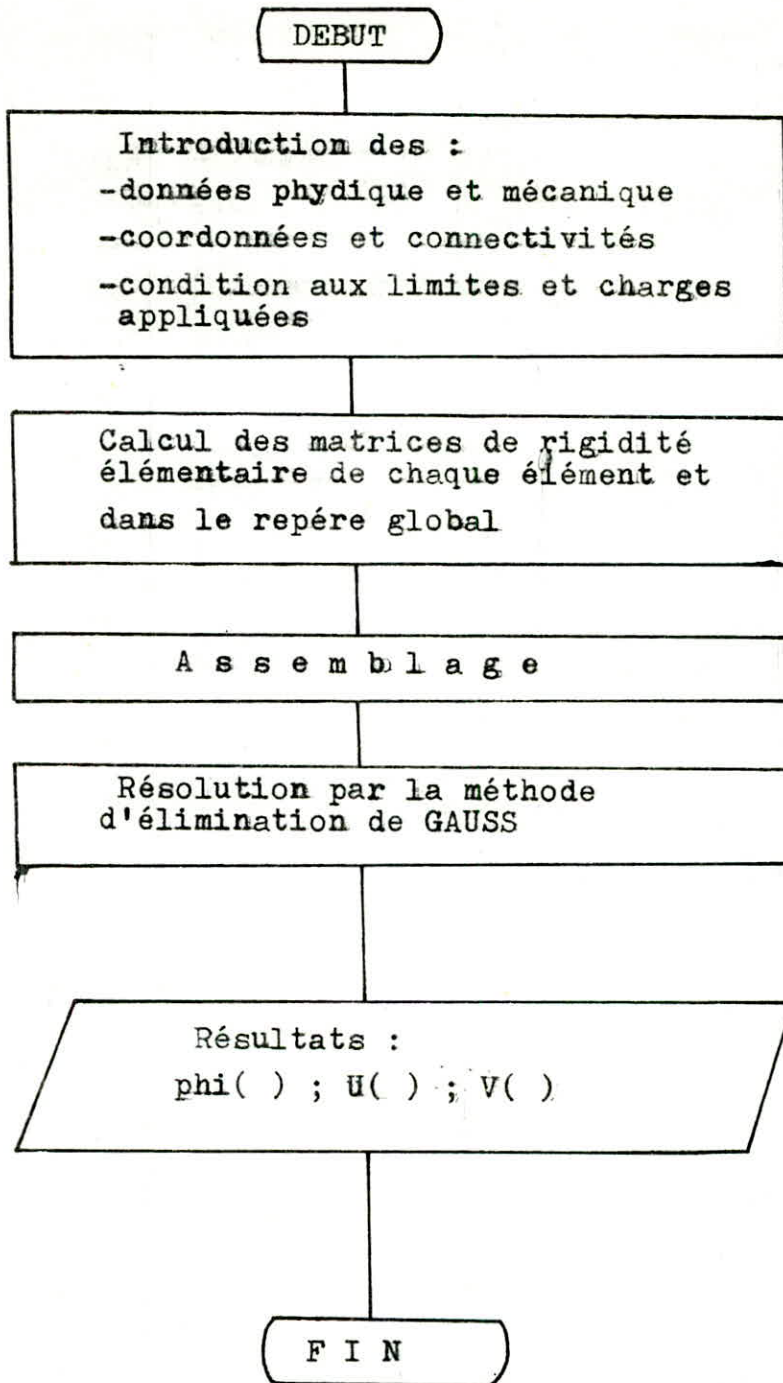
Nous avons partagé notre poutre en 10 éléments finis de longueur de 40mm. La numérotation des noeuds et éléments s'est faite de gauche à droite.

Tous les éléments ont même caractéristique géométrique et mécanique. Il y a uniquement le noeud 11 qui est chargé, et on a comme condition aux limites, l'encastrement au noeud 1 qui ne permet aucun degrés de liberté.

IV.8- Résultats et interprétation

Après de nombreux essais laborieux pour la réalisation du programme, on a pu obtenir des résultats probants (Tableaux IV, 1, 2, 3) qui permettent de tracer les graphes théoriques (fig 5, 6; 7) et de pouvoir ainsi les comparer

-ORGANIGRAMME DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS-



RESULTS NUMERIQUES

NOMBRE DE NOEUDS=> 11 NOMBRE D ÉLÉMENT=> 10

NOEUDS	COORDONNÉES	
1	0.00000	0.00000
2	40.00000	0.00000
3	80.00000	0.00000
4	120.00000	0.00000
5	160.00000	0.00000
6	200.00000	0.00000
7	240.00000	0.00000
8	280.00000	0.00000
9	320.00000	0.00000
10	360.00000	0.00000
11	400.00000	0.00000

ÉLÉMENT	CONNÉCTIVITÉS	
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6
6	6	7
7	7	8
8	8	9
9	9	10
10	10	11

MODULE DE YOUNG(en daN/mm**2)=>E= 0.19000E+05

MOMENT D INERTIE(en mm**4)=>I= 0.20000E+02

SÉCTION DE LA POUTRE(en mm**2)=>S= 0.60000E+02

SOLLICITATION AU NOEUD 11 => 0.00000E+00 0.00000E+00 -0.10000E+01

NOEUD	PHI (Y)	V(Z)	DÉPLACEMENT HORIZONTAL
1	0.40000E-27	-0.10000E-29	0.00000E+00
2	0.40000E-01	-0.81404E+00	0.31996E-01
3	0.75789E-01	-0.31439E+01	0.14682E+00
4	0.10737E+00	-0.68211E+01	0.37716E+00
5	0.13474E+00	-0.11677E+02	0.73969E+00
6	0.15789E+00	-0.17544E+02	0.12373E+01
7	0.17684E+00	-0.24253E+02	0.18611E+01
8	0.19158E+00	-0.31635E+02	0.25929E+01
9	0.20211E+00	-0.39523E+02	0.34071E+01
10	0.20842E+00	-0.47747E+02	0.42727E+01
11	0.21053E+00	-0.56140E+02	0.51559E+01

SOLLICITATION AU NOEUD 11 => 0.00000E+00 0.00000E+00 -0.20000E+01

NOEUD	PHI (Y)	V(Z)	DÉPLACEMENT HORIZONTAL
1	0.80000E-27	-0.20000E-29	0.00000E+00
2	0.80000E-01	-0.16281E+01	0.12793E+00
3	0.15158E+00	-0.62877E+01	0.58658E+00
4	0.21474E+00	-0.13642E+02	0.15053E+01
5	0.26947E+00	-0.23354E+02	0.29488E+01
6	0.31579E+00	-0.35088E+02	0.49268E+01
7	0.35368E+00	-0.48505E+02	0.74026E+01
8	0.38316E+00	-0.63270E+02	0.10303E+02
9	0.40421E+00	-0.79046E+02	0.13527E+02
10	0.41684E+00	-0.95495E+02	0.16952E+02
11	0.42105E+00	-0.11228E+03	0.20445E+02

SOLLICITATION AU NOEUD 11 => 0.00000E+00 0.00000E+00 -0.30000E+01

NOEUD	PHI (Y)	V(Z)	DÉPLACEMENT HORIZONTAL
1	0.12000E-26	-0.30000E-29	0.00000E+00
2	0.12000E+00	-0.24421E+01	0.28765E+00
3	0.22737E+00	-0.94316E+01	0.13171E+01
4	0.32211E+00	-0.20463E+02	0.33743E+01
5	0.40421E+00	-0.35032E+02	0.65978E+01
6	0.47368E+00	-0.52632E+02	0.11002E+02
7	0.53053E+00	-0.72758E+02	0.16500E+02
8	0.57474E+00	-0.94905E+02	0.22927E+02
9	0.60632E+00	-0.11857E+03	0.30057E+02
10	0.62526E+00	-0.14324E+03	0.37624E+02
11	0.63158E+00	-0.16842E+03	0.45341E+02

Tableau IV:1: Résultats théoriques par la méthode des élément finis pour P = 1 , 2 , 3 daN

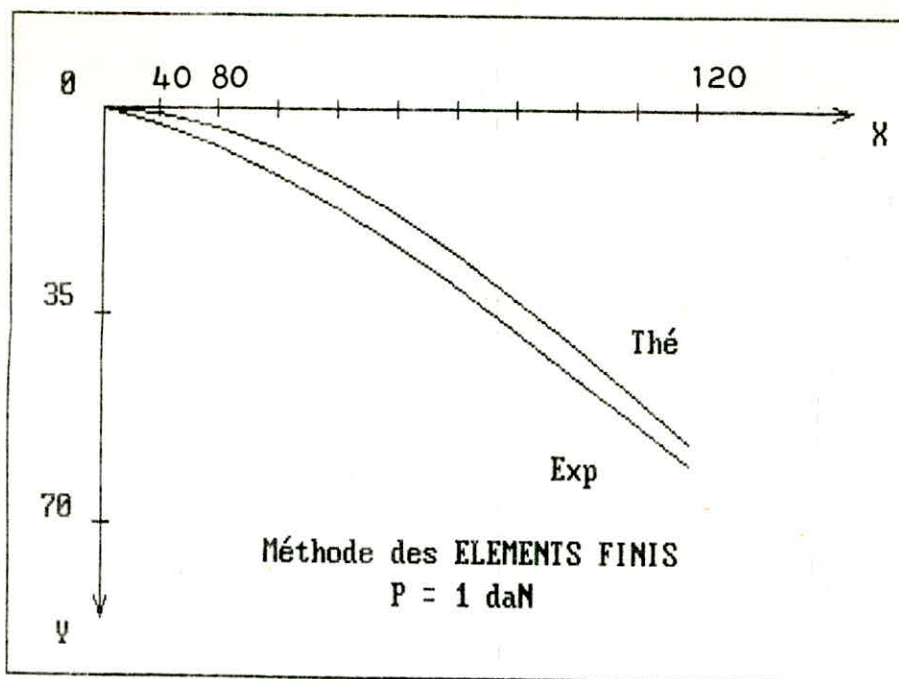


Figure IV.5 : Comparaison entre méthode des éléments finis et l'expérimentale $P=1 \text{ daN}$

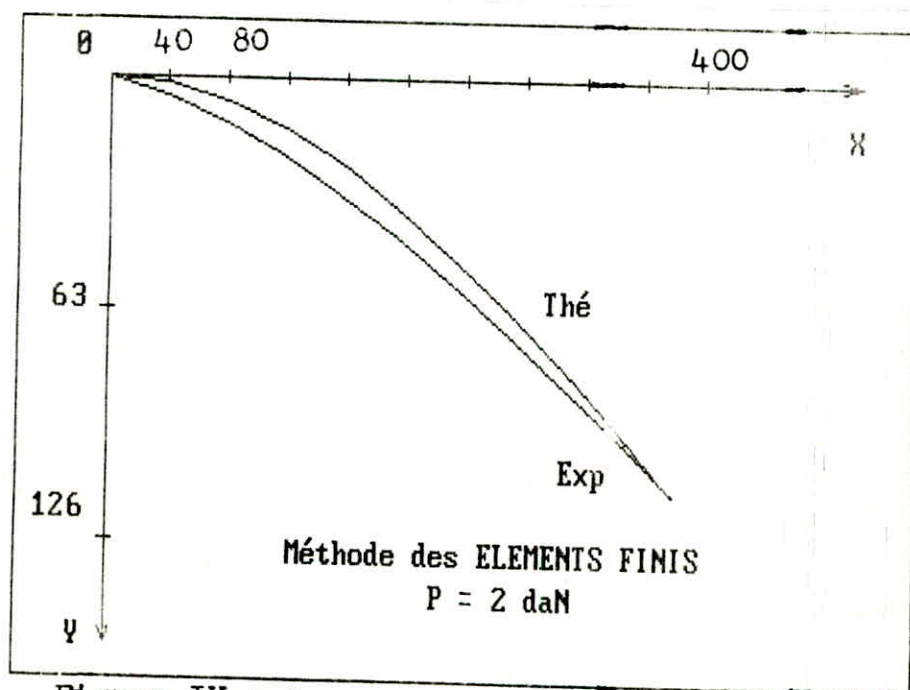


Figure IV.6 : Comparaison entre méthode des éléments finis et l'expérimentale $P = 2 \text{ daN}$

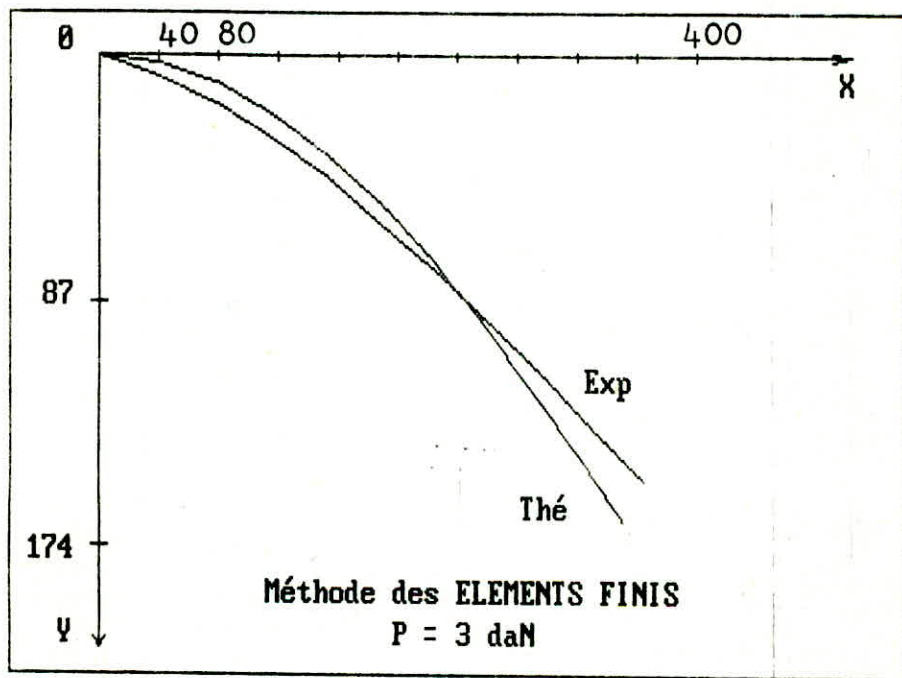


Figure IV. 7 : Comparaison entre méthode des éléments finis et l'expérimentale

$$P = 3 \text{ daN}$$

aux résultats expérimentaux.

Il en résulte les mêmes remarques relevées dans la méthode des variables séparables. Cependant, on constate un certain parallélisme (de courbure) entre les courbes théorique et expérimentales.

IV.9- Comparaison entre les méthodes théoriques

Après avoir démontré les méthodes numériques, tracé leurs programmes et procédé à la comparaison des résultats obtenus avec ceux de l'expérimentale et démontré ainsi les avantages techniques et pratiques qui en découlent, il apparaît nécessaire de faire une synthèse succincte de cette étude.

On constate que les déformations obtenues par les trois méthodes théoriques (fig IV.9,10,11) présentent des courbes graphiques approximativement similaires compte tenu des différentes charges auxquelles étaient soumises les poutres. Cependant, le défaut d'exemples traités dans les ouvrages en la matière ne nous a pas permis de procéder à la vérification exacte de ces méthodes qui, néanmoins, apparaissent valables.

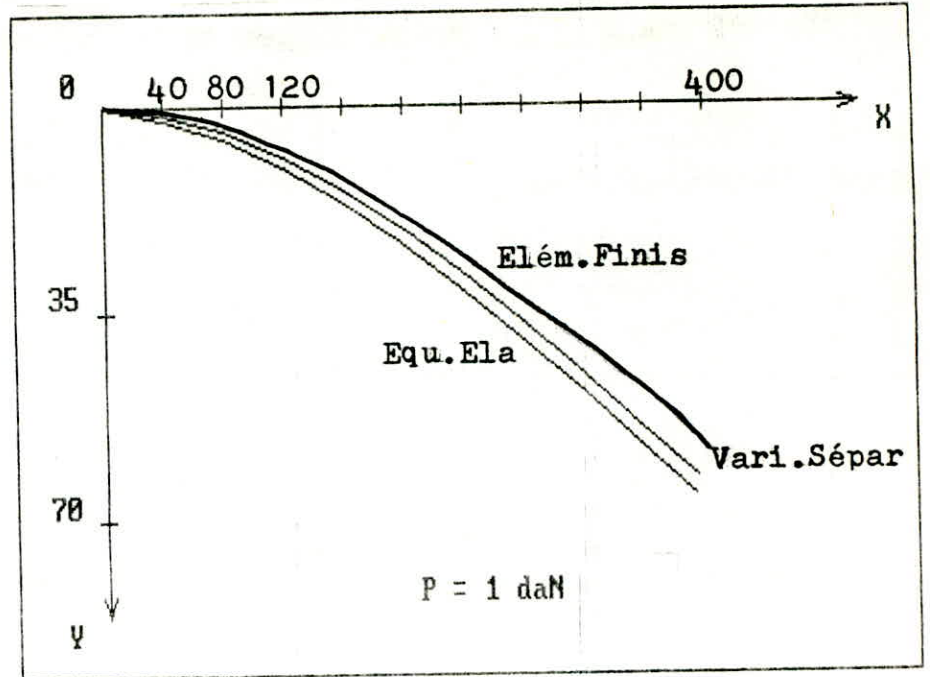


Figure IV.9 : Comparaison entre les méthodes théoriques pour $P = 1 \text{ daN}$

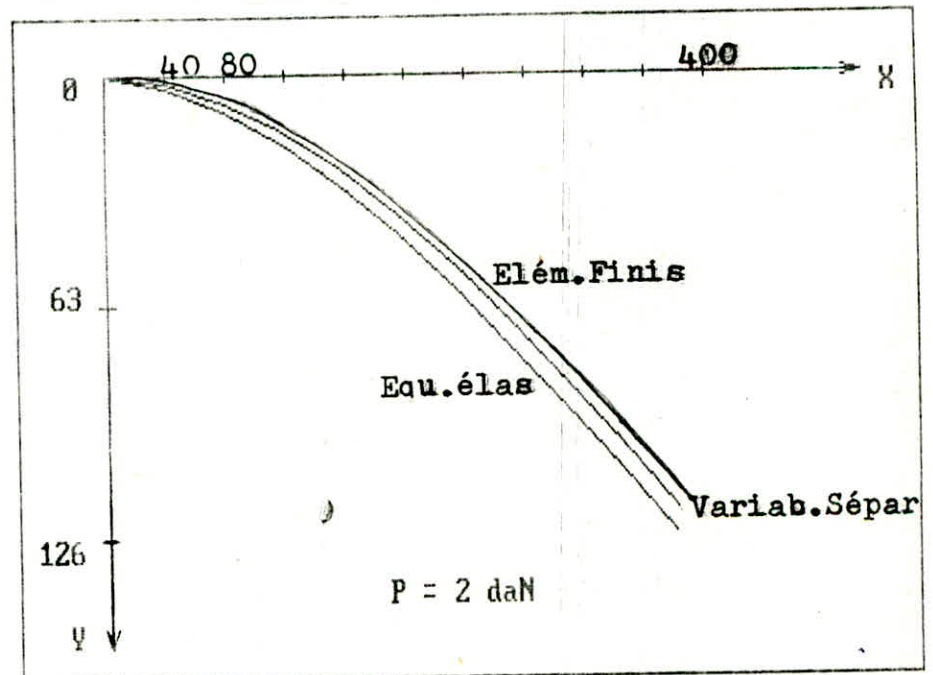


Figure IV.10: Comparaison entre les méthodes théoriques pour $P = 2 \text{ daN}$

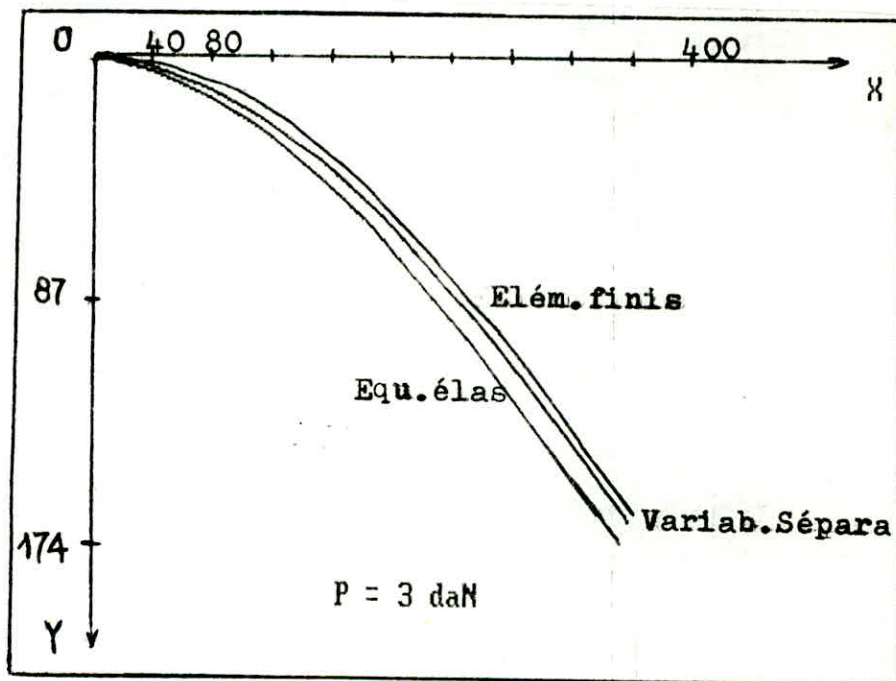


Figure IV.11: Comparaison entre les méthodes théoriques pour $P = 3 \text{ daN}$

V- PROPOSITION D'UN TRAVAIL PRATIQUE

La résistance des matériaux, joue un rôle prépondérant dans la formation de l'ingénieur, pour la quasi totalité des spécialités, et recèle une importance particulière dans la pratique pour les travaux en génie mécanique et génie civil.

C'est une science qui traite les méthodes qu'utilisent les ingénieurs chargés du dimensionnement des organes d'une machine, ou de l'étude des éléments d'une construction afin qu'ils puissent supporter les efforts auxquels ils sont soumis, en vue d'obtenir les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique.

Elle permet aussi, de résoudre de nombreux types de problèmes particulièrement deux très importants:

- 1- Déterminer les dimensions d'un organe connaissant la nature du matériau et les efforts qui lui sont appliqués, de telle façon qu'aucune région ne subisse de déformations et de tensions internes exagérées et dangereuses (prédétermination)
- 2- Les dimensions étant connues, calculer les déformations et répartition des tensions internes (vérification)

V.1- DESCRIPTION DU BANC D'ESSAI

Le banc d'essai est composé d'un marbre plan lisse, d'un support de poutre et d'une plaque en plexiglass. Le marbre plan lisse portera le socle du comparateur lors de première manipulation et servira de surface de référence pour le contrôle du parallélisme des poutres à étudier. Le support de poutre est constitué d'un montant maintenu au marbre par deux presses de type "Armantstang"-permettront un bon réglage de la perpendicularité- et de l'encastrement sou-

- 1 - Marbre plan lisse
- 2 - Montant
- 3 - Support de poutre
- 4 - Presses "Amontstang"
- 5 - Comparateur

- 6 - Poutre
- 7 - Papier millimétré
- 8 - Plaque plexiglass
- 9 - Poutre - Section rectangulaire
- 10 - Poutre - Section circulaire

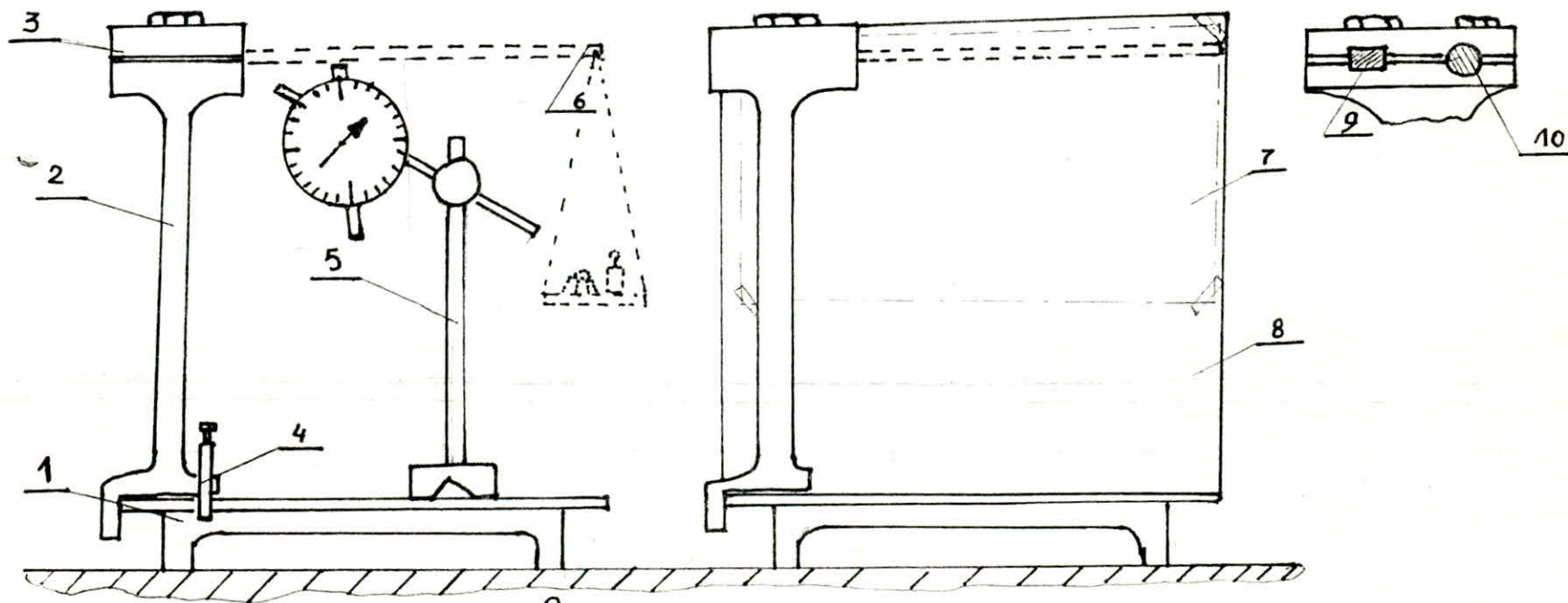


Fig V.0 :

- Méthode du Comparateur -

- Méthode directe -

dé au montant et constitué de deux pièces qui fixent la poutre dans deux rainures usinées sur ces deux pièces. L'assemblage et le serrage de la poutre sont assurés par deux vis (M8x30).

Cette forme d'encastrement permet d'une part le bon maintien de la poutre, en supprimant ainsi tous les degrés de liberté, et d'autre part, l'interchangeabilité et le réglage des longueurs des poutres.

V.2- POUTRES ET CHARGES

Les matériaux des poutres utilisées dans cette manipulation sont les suivantes:

- Acier étiré
- Acier doux
- Laiton
- Acier spécial

Ces poutres sont de sections carré, rectangulaire et circulaire

Pour ce qui est des charges, elles sont introduites sous forme de masses de différents poids, qui seront posées sur le plateau (fig V. 0)

V.3- M A N I P U L A T I O N

Avant la manipulation, il faut s'assurer que le marbre est bien propre.

Utiliser une équerre d'atelier et contrôler la perpendicularité du support de poutre sur le marbre. Dans le cas où ils ne sont pas perpendiculaires, desserrer les deux presses et régler la perpendicularité, puis resserrer soigneusement.

V.3.1- 1^{ère} PARTIE: METHODE AVEC UTILISATION D'UN COMPAREUR

Dans cette partie de cette manipulation, on utilisera un comparateur à cadran (fig V. 0)

- Fixer sur la poutre des repères distants de 40 mm l'un de l'autre.
- Faire glisser le palpeur sous la poutre et régler l'aiguille du cadran à "zéro".
- Appliquer la charge en mettant des masses sur le plateau.
- Prendre les mesures des déformations constatées sur les différents repères de la poutre.

Remarque: Pour toute la manipulation et pour toutes les poutres on fixera une longueur $L = 440$ mm de la poutre, et on utilisera successivement les masses suivantes:
50-100-150-200-400-600-800- et 1000 grammes

V.3.2- 2^{ème} PARTIE: METHODE DIRECTE

- Fixer une feuille de papier millimétré sur la plaque de plexiglass.
- Procéder au repérages sur le papier millimétré, au moyen d'une aiguille qu'on introduira du côté antérieur de la poutre (sans appliquer la charge), dans les trous préalablement percés.
- Appliquer la charge et à l'aide de l'aiguille, on procédera comme initialement aux repérages sur le papier millimétré des différentes positions que prendra la poutre sous l'effet de la charge

Remarque: Les trous percés sont distants de 40mm. Après chaque application de la charge, on indiquera les repères de déformation, afin qu'il n'y est pas d'erreurs.

exemple:

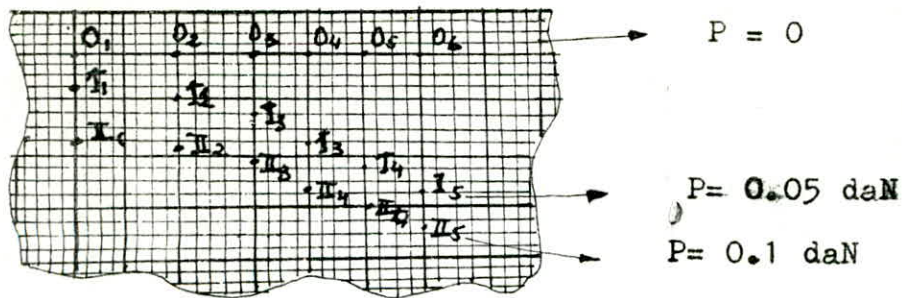


Figure V.1: Exemple de manipulation.

V.3.3: RESULTATS

Mettre les résultats expérimentaux sous la forme suivante:

- longueur de la poutre: $L = \dots\dots\dots$
- Matériau : $\dots\dots\dots$
- Méthode utilisée: $\dots\dots\dots$

P \ X	0.05	0.1	0.15
0	Y(0)	Y(0)	
40	Y(40)	Y(40)	
80	⋮	⋮	
120	⋮	⋮	
160	⋮	⋮	
⋮			

Tableau V.1: Exemple de tableau de valeurs.

- 1- Donner la condition de rigidité de la poutre considérée et localiser sur les tableaux des valeurs, les charges où cette condition est (ou n'est pas) vérifiée.
- 2- Tracer pour chaque P , la courbe $Y_{\text{exp}} = f(X)$:
 - a/ Dans le cas où la rigidité est vérifiée.
 - b/ Dans le cas où la rigidité n'est pas vérifiée.

- 3- Trouver à l'aide des formules classiques de la R.D.M l'expression théorique de la flèche, et remplir des tableaux analogues au tableau V.1.
- 4- Refaire le même travail, mais cette fois-ci utiliser le programme M.E.F disponible au centre de calcul de l'école.
- 5- Tracer sur le même papier millimétré $Y_{thé} = f(X)$ pour les cas 3-; 4-; théorique et ceci avec la condition a/ et b/.
- 6- Comparer les courbes théoriques et expérimentales dans le cas a/, et b/.
-donner vos remarques et conclusions concernant la rigidité
- 7- Fixer la charge P et faire varier E (module de YOUNG). que remarquez-vous.
- 8- Comparer les deux méthodes théoriques entre elles puis chacune d'elles avec l'expérimentale.
- 9- Conclusion générale pour les petites déformations.

V.5- Etude des grandes déformations

On prendra comme modèle de poutre pour cette étude la lame de scie (acier spéciale) et comme méthode expérimentale la méthode directe. Les charges appliquées sont les suivantes

1 ; 2 ; et 3 daN

- Relever sur des tableaux, les déplacements verticaux et horizontaux
 - tracer les courbes expérimentales $Y_{exp} = f(x)$, pour chaque P
 - Etude théorique-
- 1- Utiliser le programme GA.FOR, qui vous donnera les différentes valeurs de gamma, pour chaque charge.
 - 2- Pour la détermination des U et V théoriquement, utiliser:
 - a/Le programme VAR.FOR (variables séparables) et dresser les tableaux de résultats
 - b/Le programme EQU.FOR (équation élastique) et dresser les tableaux de résultats.
 - c/Le programme MEF.FOR (élément finis) et dresser les tableaux de résultats.

- 3- A l'aide des tableaux de résultats tracer (sur l'olive) les graphes $Y_{\text{thé}}=f(x)$, pour chaque méthode et comparer les avec les courbes expérimentales.
- 4- Comparer ~~entre~~ les méthodes théoriques.
- 5- Conclusion sur l'étude des grandes déformations.
- 6- Conclusion générale sur toute la manipulation.

C O N C L U S I O N

Notre objectif consiste à élaborer des méthodes numériques susceptibles d'expliquer théoriquement le principe des grandes déformations des poutres. Les trois méthodes retenues :

- Méthode des variables séparables: par l'utilisation de l'équation différentielle de second ordre non linéaire.
- Méthode de l'équation élastique : utilisation de l'équation de la déformée d'une poutre.
- Méthode des éléments finis : utilisation d'éléments poutre à trois degrés de liberté par noeud.

se sont avérées efficaces, notamment la M.E.F très utilisée pour sa précision et son organisation dans la résolution des problèmes complexes.

Le manque de matériel nécessaire, de données physiques adéquates et le défaut de documents relatifs au sujet, ne nous ont pas permis de procéder à des expériences précises afin d'établir une comparaison exacte avec les méthodes théoriques, en vue d'aboutir à des résultats concrets. Toutefois cette étude nous a permis de nous familiariser d'avantage avec l'informatique et d'apprécier les avantages qu'il procure.

L'importance qui s'attache aux grandes déformations incite à l'approfondissement de son étude et l'élargissement de son application aux structures spatiales et autres types d'éléments (coques et plaques). Il serait également nécessaire de procéder au développement de programmes dans le cas du flambage, notamment par la M.E.F où le système d'équations linéaire serait de la forme $\{F\} = \{[K] + [n]\} \cdot \{q\}$ avec $[n]$ matrice de rigidité incrémentale due à la force axiale.

Je ne saurais terminer sans formuler le souhait pour les étudiants des promotions futurs de bien exploiter et améliorer le banc d'essai et mettre ainsi leurs connaissances théoriques en pratique.

- ANNEXE : 1 -

I-INTEGRATION DE LA FONCTION $f(\phi) = \frac{d\phi}{(1+\phi^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{d\phi}{(1+\phi^2)^{3/2}} = \int \frac{(1+\phi^2) - \phi^2}{(1+\phi^2)^{3/2}} \cdot d\phi \quad (A1)$$

$$\int \frac{d\phi}{(1+\phi^2)^{3/2}} = \int \frac{1+\phi^2}{(1+\phi^2)^{3/2}} - \int \frac{\phi^2}{(1+\phi^2)^{3/2}} \quad (A2)$$

Intégrons en premier lieu : " $\frac{1+\phi^2}{(1+\phi^2)^{3/2}}$ "

$$\int \frac{1+\phi^2}{(1+\phi^2)^{3/2}} d\phi = \int \frac{1+\phi^2}{(1+\phi^2)} \cdot \frac{d\phi}{(1+\phi^2)^{1/2}} \quad (A3)$$

$$= \int \frac{d\phi}{(1+\phi^2)^{1/2}} \quad (A4)$$

Intégrons maintenant $\frac{\phi^2}{(1+\phi^2)^{3/2}}$

$$\int \frac{\phi^2}{(1+\phi^2)^{3/2}} \cdot d\phi = \int \frac{\phi \cdot \phi}{(1+\phi^2)^{3/2}} d\phi \quad (A5)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\phi}{(1+\phi^2)^{3/2}} \cdot d(1+\phi^2) \quad (A6)$$

(car $d(1+\phi^2) = 2 \cdot \phi \cdot d\phi$)

elle est aussi égale à :

$$= - \int \phi \cdot d\left(\frac{1}{(1+\phi^2)^{1/2}}\right) \quad (A7)$$

est ceci du faite que :

$$d(Z^{-1/2}) = -\frac{1}{2} \frac{dZ}{Z^{3/2}}$$

La fonction (A7) peut être intégrée par parties avec :

$$U = \phi \longrightarrow dU = d\phi \quad (A8)$$

$$V = \frac{1}{(1+\phi^2)^{1/2}} \longrightarrow dV = d\left(\frac{1}{(1+\phi^2)^{1/2}}\right) \quad (A9)$$

$$\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU \quad (A10)$$

En remplaçant, on arrivera à :

$$\int \phi \cdot d\left(\frac{1}{(1+\phi^2)^{1/2}}\right) = \frac{\phi}{(1+\phi^2)^{1/2}} - \int \frac{d\phi}{(1+\phi^2)^{1/2}} \quad (A11)$$

Ce qui pour (A5):

$$\int \frac{\phi^2}{(1+\phi^2)^{3/2}} \cdot d\phi = - \frac{\phi}{(1+\phi^2)^{1/2}} + \int \frac{d\phi}{(1+\phi^2)^{1/2}}$$

En revenant à la fonction de départ (A1), et en remplaçant les valeurs de chaque termes, on aboutira à :

$$\int \frac{d\phi}{(1+\phi^2)^{3/2}} = \int \frac{d\phi}{(1+\phi^2)^{1/2}} - \int \frac{d\phi}{(1+\phi^2)^{1/2}} + \frac{\phi}{(1+\phi^2)^{1/2}} \quad (A12)$$

$$\int \frac{d\phi}{(1+\phi^2)^{3/2}} = \frac{\phi}{(1+\phi^2)^{1/2}} \quad (A13)$$

- ANNEXE : 2 -

METHODE D'ELIMINATION DE GAUSS

Cette méthode très utilisée, est constituée de deux étapes:

A- Triangularisation

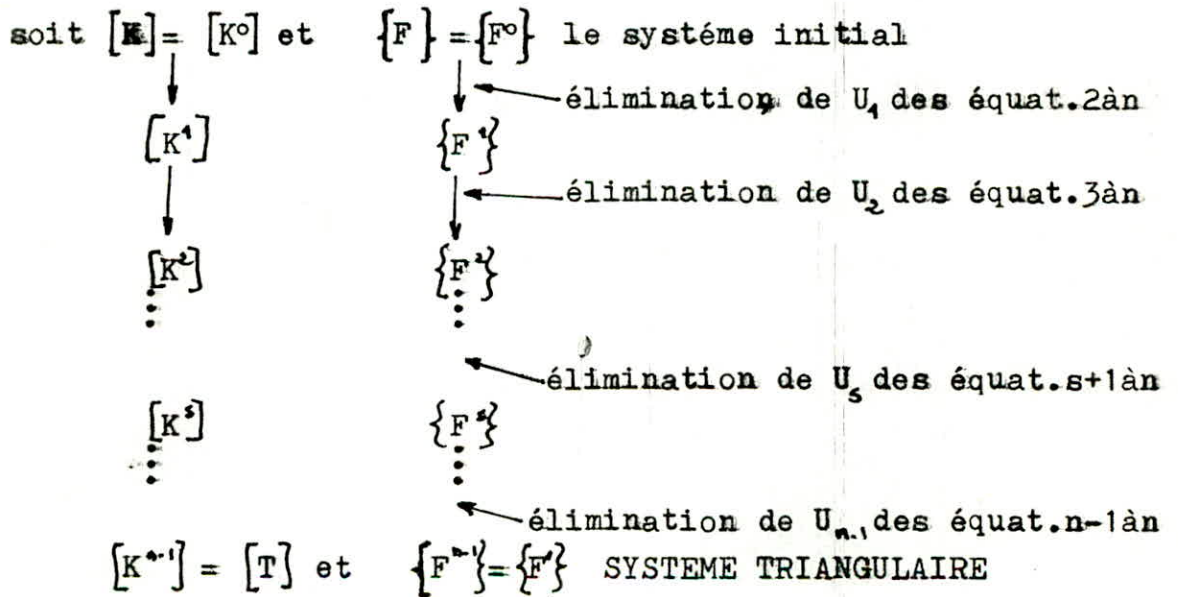
Soit un système d'équation linéaire du type $[K]\{U_n\} = \{F\}$

où les inconnues sont U_n .

Cette étape de résolution, qui est la **triangularisation** consiste à transformer le système d'équations, en un système triangulaire

$$\left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] T \{U_n\} = \{F'\}$$

et cela par une succession d'élimination:



B- RESOLUTION DU SYSTEME TRIANGULAIRE SUPERIEUR

On procédera dans cette étape au calcul des inconnues U .
 Le système triangulaire supérieur nous permet de calculer
 successivement $U_n, U_{n-1}, U_{n-2}, \dots, U_1$:

$$\left| \begin{array}{c} \diagup T \\ 0 \end{array} \right| \{U_n\} = \{F'\}$$

$$U_n = S_{nn}^{-1} \cdot F_n'$$

$$U_{n-1} = S_{n-1, n-1}^{-1} \cdot (F_{n-1}' - S_{n-1, n} \cdot U_n)$$

$$\vdots$$

$$U_1 = S_{11}^{-1} \cdot (F_1' - S_{12} \cdot U_2 - \dots - S_{1n} \cdot U_n)$$

- ANNEXE 3-

Le programme qui a permis le tracé des différentes courbes qui se trouvent dans ce polycopé, est un programme en BASIC exécuté sur un micro ordinateur, dont le programme est le suivant:

```

1 REM-----PROGRAMME GRAPHISME EN BASIC-----
9 CLS
10 DIM X(11),Y(11),H(11),Z(11)
15 INPUT "YMAX = ";YMAX
17 X(0)=0 : Y(0)=0
18 H(0)=0 : Z(0)=0
20 FOR I=1 TO 10
30 INPUT "Xexp(I)=";X(I)
40 NEXT I
50 FOR I=1 TO 10
60 INPUT "Yexp(I)=";Y(I)
61 NEXT I
62 FOR J=1 TO 10
63 INPUT "Hth(J)= ";H(J)
64 NEXT J
65 FOR J=1 TO 10
66 INPUT "Zth(J)= " ; Z(J)
70 NEXT J
80 CLS
90 SCREEN 3
100 VIEW (80,60)-(530,310)
110 WINDOW (-50,(-10-YMAX))-(450,13)
115 LINE (-50,(-10-YMAX))-(450,13),,B
116 LINE (0,-YMAX-2)-(-3,-YMAX+1) : LINE (0,-YMAX-2)-(-3,-YMAX+1)
117 LINE (420,0)-(409,.8) : LINE (420,0)-(409,-1.2)
120 LINE (0,0)-(420,0) : LINE (0,0)-(0,-YMAX-2)
150 FOR I=0 TO 9
155 LINE ((I+1)*40/1.2,-1.2)-((I+1)*40/1.2,1)
156 LINE (-4,-YMAX/2.4)-(4,-YMAX/2.4) : LINE (-4,-YMAX/1.2)-(4,-YMAX/1.2)
160 LINE (X(I)/1.2,-Y(I)/1.2)-(X(I+1)/1.2,-Y(I+1)/1.2)
161 LINE (H(I)/1.2,-Z(I)/1.2)-(H(I+1)/1.2,-Z(I+1)/1.2)
170 NEXT I
172 IF INKEY$="" THEN 172
175 END

```


B I B L I O G R A P H I E

- 1 - ANDRE BAZERGUI
Résistance des matériaux
édition: Ecole Polytechnique de Montréal

- 2 - P. AGATI , N. MATTERA
Mécanique
édition : collection Durrande

- 3 - S. P. TIMOSHENKO
Théorie de la stabilité élastique
édition: Dunod

- 4 - B. BOUMARD , F. LAVASTE
Résistance des matériaux
édition: Delagrave

- 5 - KERGUINAS , CAIDNAERT
Résistance des matériaux
édition : Dunod Université

- 6 - GOURI DHATT , G. TOUZOT
Une présentation de la méthode des éléments finis
édition: Maloines

- 7 - Mr KSIAZEK
Cours R.D.M 2 (E.N.P)

