

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

École Nationale Polytechnique



Département d'Automatique
Laboratoire de Commande des Processus
Mémoire de Master en Automatique

Synthèse de la Commande LQR
du Robot Balanceur à Deux
Roues

Kalb Eddine CHELLI

Sous la direction de : M. M.CHAKIR Dr

M. M.TADJINE Pr

Présenté et soutenu publiquement le 29/06/2017

Composition du Jury :

M.	A.S. BOUCHERITE	Professeur	ENP
M.	M. CHAKIR	MCB	ENP
M.	M. TADJINE	Professeur	ENP

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

École Nationale Polytechnique



Département d'Automatique
Laboratoire de Commande des Processus
Mémoire de Master en Automatique

Synthèse de la Commande LQR
du Robot Balanceur à Deux
Roues

Kalb Eddine CHELLI

Sous la direction de : M. M.CHAKIR Dr

M. M.TADJINE Pr

Présenté et soutenu publiquement le 29/06/2017

Composition du Jury :

M.	A.S. BOUCHERITE	Professeur	ENP
M.	M. CHAKIR	MCB	ENP
M.	M. TADJINE	Professeur	ENP

Dédicace

*A mes parents
à mes frères, ma sœur
à toute ma famille
à tous mes amis
je dédie ce mémoire.*

REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie ALLAH, le tout puissant, pour m'avoir assisté et armé de patience afin d'accomplir ce modeste travail.

J'exprime ma profonde gratitude, mon grand respect et ma sincère reconnaissance à mes promoteurs Monsieur M.Chakir et Monsieur M.Tadjine pour avoir assumé la lourde responsabilité de m'encadrer, de m'avoir orienté et conseillé tout au long de ce travail ainsi pour la confiance qu'ils m'ont accordé.

Je remercie chaleureusement les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'évaluer mon projet.

Je souhaite aussi remercier mes professeurs d'Automatique et tous mes enseignants pour les connaissances qu'ils m'ont transmis, leur disponibilité et leurs efforts.

Que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude.

ملخص:

يهدف هذا المشروع الى دراسة الروبوت المتوازن على عجلتين و التحكم فيه عن طريق المتحكم التريبيعي الخطي بغية تحقيق توازن الروبوت حول النقطة الغير مستقرة (الوقوف على العجلتين) ثم التحكم في حركته.

تم الحصول على نتائج جد مرضية، حيث تمكن الروبوت من الوقوف والتوازن في وضع غير مستقر، كما تمكن من تتبع تعليمات الموقع مع وقت استجابة مقبول

الكلمات المفتاحية: الروبوت المتوازن، النواس المقلوب، المتحكم التريبيعي الخطي.

Abstract:

The purpose of this project is to study the two-wheeled balancing robot and control it by the optimal controller for balancing in the unstable point (the upright position) then controlling its movement.

The results obtained are good, such that the robot becomes able to balance on both wheels in the vertical position, and also able to follow the position setpoint with a tolerable response time.

Keywords: balancing robot, inverted pendulum, LQR control.

Résumé :

Le but de ce projet est l'étude du robot balanceur à deux roues, et appliquer la commande optimale pour l'équilibrer dans le point instable (la position vertical), puis commander son mouvement.

Les résultats obtenus sont bons, tel que le robot devient capable de équilibrer sur les deux roues dans la position verticale, et aussi capable de poursuivre les consignes de position avec un temps de réponse tolérable.

Mots clés : robot balanceur, pendule inversé, commande LQR.

Table des matières

Liste des figures

Introduction Générale	7
1 Modélisation	9
1.1 Présentation du robot balanceur à deux roues	9
1.2 Principe de fonctionnement du robot balanceur	9
1.3 Modélisation du robot	10
1.3.1 Inclinaison et déplacement linéaire	11
1.3.2 Modèle d'état de la dynamique linéaire	14
1.4 Simulation en boucle ouverte	15
1.5 Conclusion	16
2 Synthèse de la commande LQR	18
2.1 Introduction	18
2.2 commandabilité et observabilité	18
2.2.1 Commandabilité	18
2.2.2 Observabilité	18
2.3 Commande LQR	18
2.3.1 Synthèse de la commande LQR	19
2.3.2 Choix des pondérations	19
2.3.3 Application de la commande LQR sur le robot	19
2.4 Simulation	20
2.5 Optimisation de l'énergie	23
2.6 Poursuite d'un référence	25
2.7 Conclusion	26
Conclusion générale	27
Bibliographie	28

Liste des figures

1.1	Robot balanceur	9
1.2	Principe de fonctionnement	10
1.3	Types de mouvement du robot	10
1.4	Inclinaison et déplacement linéaire du robot	12
1.5	Diagramme de corps libre de la dynamique d'inclinaison	13
1.6	Diagramme de corps libre d'une roue	14
1.7	Simulation du système en boucle ouverte de l'angle ψ	15
1.8	Pôles du système	15
2.1	Structure de la commande LQR	20
2.2	Poursuite de la consigne de position	21
2.3	Commande U_x	21
2.4	Augmentation de la pondération de l'angle d'inclinaison	22
2.5	Diminution de la pondération de position	22
2.6	Augmentation de la pondération de vitesse angulaire	22
2.7	Augmentation de la pondération de vitesse	23
2.8	parts relatives des critères de performance J_x et d'énergie de commande J_u , selon la valeur de ρ	24
2.9	Réponse du système pour $\rho = 10$	24
2.10	Commande U_x pour $\rho = 10$	24
2.11	Réponse du système pour $\rho = 100$	25
2.12	Commande U_x pour $\rho = 100$	25
2.13	Poursuite du référence de position par le robot	26

Introduction générale

La robotique regroupe un domaine très vaste d'activités de la vie humaine, en effet, plus de 1 235 600 robots sont à l'œuvre aujourd'hui. Ils ont envahi notre univers, ils sont utilisés dans tous les domaines : industriel, militaire, médical et celui des services. Les robots actuels ne sont qu'au début de leur évolution, ainsi des laboratoires dans le monde entier travaillent pour les améliorer et les rendre plus efficaces et plus intelligents. Certains travaillent sur la marche, d'autres sur la connaissance faciale ou vocale, tandis que d'autres étudient encore des algorithmes d'intelligence artificielle de plus en plus élaborés.

La particularité du système à pendule inversé a suscité l'intérêt de nombreuses recherches en raison de la nature instable du système. Les études sur les pendules inversés à deux roues ou communément « balancing robot » a gagné en popularité au cours de la dernière décennie dans un certain laboratoire de robotique à travers le monde. Dans ce contexte, notre projet consiste à faire une étude sur la commande LQR du robot balanceur à deux roues pour stabiliser le robot sur les deux roues en position verticale et poursuivre les consignes de position.

Dans le premier chapitre, on présente le robot balanceur à deux roues et leur principe de fonctionnement. On procède par la suite à la modélisation du robot dans l'espace d'état en se basant sur ses équations dynamiques.

Dans le deuxième chapitre, on fait la synthèse de la commande optimale LQR. Puis, on fait la simulation sur le système du robot.

Chapitre 1

Modélisation

Chapitre 1

Modélisation

Dans ce chapitre, on va tout d'abord présenter le robot balanceur à deux roues, son principe de fonctionnement et ses avantages. Ensuite, on développe son modèle dynamique qui sera présent sous forme d'équations différentielles. Puis, on présente ce système dans l'espace d'état. Finalement, on fait une présentation des résultats des simulations effectués en boucle ouverte sur le modèle non linéaire et le modèle linéaire, afin de mettre en évidence le comportement dynamique et son instabilité.

1.1 Présentation du robot balanceur à deux roues

La conception du robot balanceur à deux roues ou le robot "TWIP" (Two Wheeled Inverted Pendulum) est basée sur l'idée du pendule inversé, le pendule inversé est un système non linéaire et instable en boucle ouverte. Le problème du pendule inversé est très réponsu dans le domaine de l'automatique. Une large application de la technologie dérivée de ce système instable a attiré l'intérêt de nombreux chercheurs et passionnés de la robotique à travers le monde. Dans les années passées, les recherches ont appliqué l'idée d'un modèle de pendule inversé mobile aux différents problèmes comme la conception de la marche pour les robots humanoïdes, fauteuils roulants automatique et les systèmes de transport personnelle. Par conséquent, il représente une expérience idéal pour l'application de techniques de commande classiques et contemporaines.

Le robot a un corps avec deux roues pour le mouvement dans le plan. Deux roues motrices indépendantes sont utilisées pour équilibrer le robot et la commande de position.

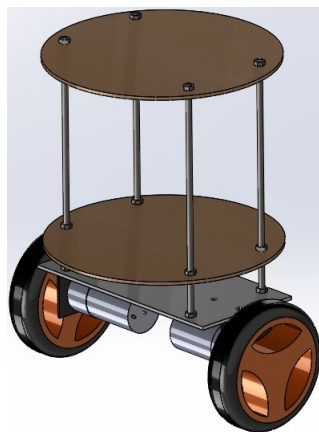


FIGURE 1.1 – Robot balanceur

1.2 Principe de fonctionnement du robot balanceur

Un robot balanceur à deux roues est un système d'une dynamique instable. Cela signifie que le robot est libre de tomber en avant ou en arrière sans aucunes forces appliquées. Il est équilibré

lorsque son centre de gravité et l'axe des roues sont situés sur une ligne verticale. Sinon, les roues devraient suivre les chutes du robot pour l'équilibrer.

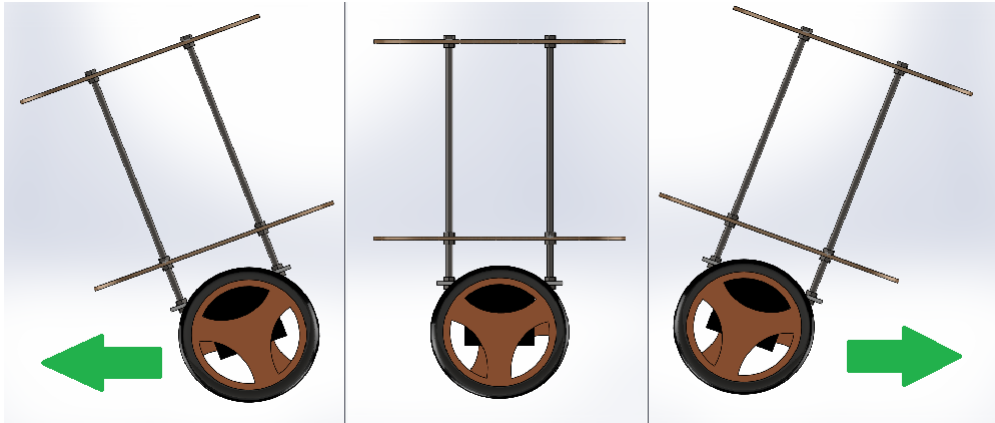


FIGURE 1.2 – Principe de fonctionnement

Le robot a un mouvement d'entraînement différentiel, quand le moteur droit tourne en avant et le moteur gauche tourne en arrière, le corps du robot va tourner à gauche, si on applique le même couples sur les deux moteurs, le robot va tourner autour de soi-même sans déplacement. Le même principe s'applique si les deux directions de moteurs sont renversées. Si le moteur droit tourne en arrière et le moteur gauche tourne en avant, le corps de robot va tourner à droite. Si les deux moteurs tourne en avant, le robot va déplacer vers l'avant et vice versa.

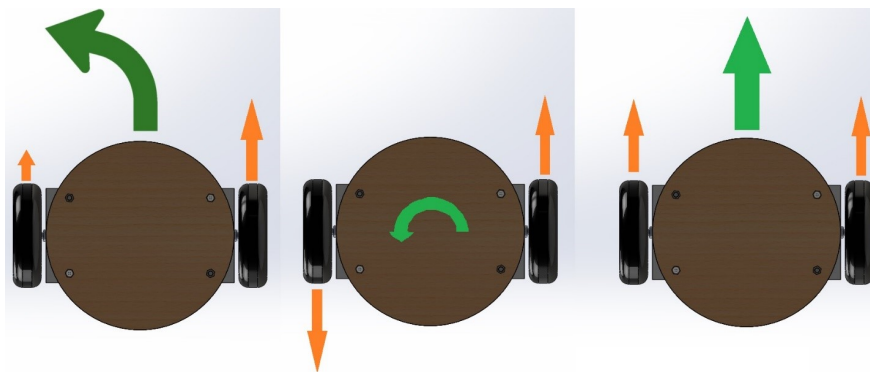


FIGURE 1.3 – Types de mouvement du robot

1.3 Modélisation du robot

On a fait la partie de modélisation à base de [3].

Afin de pouvoir concevoir un correcteur capable de stabiliser le robot, il est nécessaire de mettre au point un modèle mathématique qui représente fidèlement son comportement. La dynamique du robot sera représentée par deux modèles découplés, le premier décrivant la dynamique d'inclinaison et de déplacement linéaire, et le deuxième décrivant la dynamique d'angle de direction. La dynamique globale du robot a été découplée afin de pouvoir concevoir deux contrôleurs séparément ; le premier pour l'angle d'inclinaison et le déplacement linéaire et le deuxième pour l'angle de direction. De cette façon, il est possible d'assigner différentes performances aux deux sous-systèmes et éviter un couplage des dynamiques par le contrôleur.

Les valeurs des paramètres du moteur et de la boîte de réduction ont été obtenues à partir de leurs fiches techniques tandis que les valeurs des moments d'inertie du robot ont été estimées à partir du modèle de conception mécanique assisté par ordinateur sous le logiciel SOLIDWORKS et les poids des différentes composantes ont été obtenus en les pesant avec une balance électronique. Toutes les valeurs des paramètres sont présentées au tableau 1.1.

Symbole	Description	Valeur	Unité
r_w	rayon des roues	5.5	cm
M	masse de la moitié du robot, y compris une roue	0.5335	kg
m_b	masse de la moitié du corps du robot	0.4795	kg
m_w	masse de l'une des roues	0.054	kg
I_{yy}	moment d'inertie de la moitié du corps du robot	40.15	kg.cm ²
I_{zz}	moment d'inertie du robot autour de l'axe Z	4.994	kg.cm ²
I_w	moment d'inertie de l'une des roues	0.88335	kg.cm ²
d	distance entre l'arbre du moteur et le centre de gravité	6.1	cm
S	distance entre les roues	25	cm
K_t	constante de couple des moteurs	0.019	$\frac{N.m}{A}$
K_e	constante de force électromotrice des moteurs	0.019	$\frac{V.S}{rad}$
r_a	résistance d'armature des moteurs	2.7	Ω
r_g	rapport de la boîte de réduction	43.7	$\frac{N}{A}$
η	efficacité de la boîte de réduction	1	%
C_f	constante de friction	0.002	$\frac{N.m.s}{rad}$

TABLE 1.1 – Paramètres du système

Pour le développement du modèle mathématique représentant la dynamique du robot, certaines hypothèses doivent être faites. De façon générale, on considère que le robot se maintient autour de la position verticale, que ses roues restent en contact avec le sol en tout temps. Les forces de réactions entre le corps du robot et les roues ainsi que la force centrifuge due au mouvement d'inclinaison du robot sont également négligées. On considère que les moteurs appliquent des couples aux roues et sur le corps du robot simultanément et que les roues appliquent à leur tour des forces sur le sol provoquant une accélération linéaire du robot ainsi qu'une accélération angulaire autour de l'axe vertical faisant varier l'angle d'orientation du robot. Ces hypothèses sont prises afin d'obtenir un modèle linéaire, bien qu'approximatif, relativement simple représentant bien la dynamique du système autour de la position d'équilibre.

1.3.1 Inclinaison et déplacement linéaire

Tout d'abord, un modèle pour la dynamique d'inclinaison et de déplacement linéaire est mis au point en faisant l'hypothèse que le robot se déplace en ligne droite. En tenant compte de la symétrie du robot par rapport à l'axe vertical, il est possible de ne considérer que la moitié du robot avec un seul moteur, en notant que des couples de valeurs égales doivent être appliqués par chacun des deux moteurs afin de provoquer un déplacement purement linéaire du robot. Par conséquent, la même tension doit être fournie aux deux moteurs et cette tension $u_x(t)$ sera considérée comme l'entrée de ce sous-système. En se référant aux variables et paramètres définis dans la liste des notations et des symboles, on peut faire les observations suivantes :

- la masse de la moitié du robot M consiste en la somme de la moitié de la masse du corps m_c et de la masse d'une roue m_r :

$$M = m_c + m_r$$

- la constante de couple K_t et la constante de la force électromotrice K_e sont équivalentes dans le système d'unités international
- la position linéaire du robot $x(t)$ peut être obtenue à partir du déplacement angulaire d'une roue $\theta(t)$ et le rayon d'une roue r de cette façon :

$$x(t) = r_w \theta(t) \quad (1.1)$$

- le déplacement angulaire de l'arbre du moteur $\theta_i(t)$ est relié au déplacement angulaire de l'arbre de la boîte de réduction $\theta_o(t)$ par le facteur de réduction r_g de la boîte de Réduction de la façon suivante :

$$\theta_i(t) = r_g \theta_o(t) \quad (1.2)$$

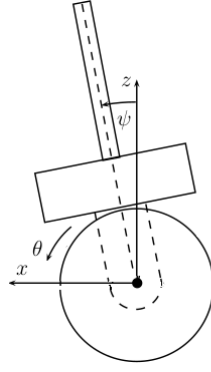


FIGURE 1.4 – Inclinaison et déplacement linéaire du robot

- le déplacement angulaire de l'arbre de la boîte de réduction $\theta_o(t)$ est constitué du déplacement angulaire de la roue $\theta(t)$ et de l'inclinaison du robot $\psi(t)$:

$$\theta_o(t) = \theta(t) - \psi(t) \quad (1.3)$$

- la force de friction $F(t)$ entre la roue et le sol est responsable d'engendrer une accélération linéaire du robot :

$$F(t) = M\ddot{x}(t) \quad (1.4)$$

Dynamique d'un moteur

Le couple généré par un moteur est proportionnel à son courant :

$$T_i(t) = K_t i(t)$$

En faisant l'hypothèse que l'inductance du moteur est négligeable, il est possible d'exprimer le courant en fonction de la tension d'entrée et la force électromotrice en utilisant la loi d'Ohm :

$$i(t) = \frac{u_x(t)}{r_a} - \frac{K_e \dot{\theta}_i(t)}{r_a} \quad (1.5)$$

On peut maintenant établir la relation entre le couple généré par le moteur et la tension appliquée à son entrée en combinant les équations 1.3.1 et 1.5 de cette façon :

$$T_i(t) = K_t \left[\frac{u_x(t)}{r_a} - \frac{K_e \dot{\theta}_i(t)}{r_a} \right] \quad (1.6)$$

Couple appliqué à une roue

La relation exprimant le couple appliqué à une roue par un moteur à travers la boîte de réduction est la suivante :

$$T(t) = \eta r_g T_i(t) \quad (1.7)$$

En remplaçant $T_i(t)$ par la relation trouvée en 1.6, on obtient la relation suivante :

$$T(t) = \frac{\eta r_g K u_x(t)}{r_a} - \frac{\eta r_g K^2 \dot{\theta}_i(t)}{r_a} \quad (1.8)$$

En utilisant la relation entre $\theta_i(t)$ et $\theta_o(t)$ donnée par l'équation 1.2, on peut exprimer l'équation précédente en fonction de $\theta_o(t)$ de cette façon :

$$T(t) = \frac{\eta r_g K u_x(t)}{r_a} - \frac{\eta r_g^2 K^2 \dot{\theta}_o(t)}{r_a} \quad (1.9)$$

Puis, en considérant la dérivée de l'équation 1.3 par rapport au temps, on obtient :

$$T(t) = \frac{\eta r_g K}{r_a} u_x(t) - \frac{\eta r_g^2 K^2}{r_a} \dot{\theta}(t) + \frac{\eta r_g^2 K^2}{r_a} \dot{\psi}(t) \quad (1.10)$$

Finalement, à partir de l'équation 1.1, on obtient la relation donnant le couple appliqué à une roue $T(t)$ en fonction de la tension à l'entrée d'un moteur $u_x(t)$, de la vitesse de déplacement linéaire du robot $\dot{x}(t)$ et de la dérivée par rapport au temps de son angle d'inclinaison $\dot{\psi}(t)$:

$$T(t) = \frac{\eta r_g K}{r_a} u_x(t) - \frac{\eta r_g^2 K^2}{r_a r_w} \dot{x}(t) + \frac{\eta r_g^2 K^2}{r_a} \dot{\psi}(t) \quad (1.11)$$

Dynamique d'inclinaison

En se référant à la figure 1.5, et en notant que le couple appliqué à une roue est également appliqué à la moitié du corps du robot, on peut faire le bilan des couples agissant sur la moitié du corps du robot comme suit :

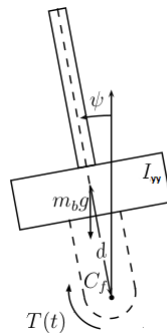


FIGURE 1.5 – Diagramme de corps libre de la dynamique d'inclinaison

$$I_{yy} \ddot{\psi}(t) = m_b g d \sin(\psi(t)) - T(t) - C_f \dot{\psi}(t) + C_f \dot{\theta}(t) \quad (1.12)$$

En remplaçant $T(t)$ par la relation trouvée en (1.11), on obtient la relation suivante :

$$I_{yy} \ddot{\psi}(t) = m_b g d \sin(\psi(t)) - \frac{\eta r_g K}{r_a} u_x(t) + \frac{\eta r_g^2 K^2}{r_a r_w} \dot{x}(t) - \frac{\eta r_g^2 K^2}{r_a} \dot{\psi}(t) - C_f \dot{\psi}(t) + C_f \frac{\dot{x}(t)}{r_w} \quad (1.13)$$

ce qui donne à son tour :

$$\ddot{\psi}(t) = \frac{m_b g d \sin(\psi(t))}{I_{yy}} - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a I_{yy}} \right] \dot{\psi}(t) + \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a r_w I_{yy}} \right] \dot{x}(t) - \frac{\eta r_g K}{r_a I_{yy}} u_x(t) \quad (1.14)$$

Par contre, cette équation contient le terme non linéaire $\sin(\psi(t))$ et nous devons la linéariser afin de pouvoir utiliser la théorie de la commande des systèmes linéaires. En considérant l'hypothèse que le robot reste autour de la verticale, $\psi(t)$ peut être considéré comme étant petit, et on obtient $\sin(\psi(t)) \approx \psi(t)$, ce qui implique à son tour que :

$$\ddot{\psi}(t) = \frac{m_b g d}{I_{yy}} \psi(t) - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a I_{yy}} \right] \dot{\psi}(t) + \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a r_w I_{yy}} \right] \dot{x}(t) - \frac{\eta r_g K}{r_a I_{yy}} u_x(t) \quad (1.15)$$

Dynamique des roues et du déplacement linéaire

En se référant à la figure 1.6, on effectue le bilan des couples appliqués à l'une des roues comme suit :

$$I_w \ddot{\theta}(t) = T(t) - F(t) r_w - C_f \dot{\theta}(t) + C_f \dot{\psi}(t) \quad (1.16)$$

La force appliquée au sol par une roue $F(t)$, peut être remplacée par une relation équivalente selon l'équation 1.4 :

$$I_w \ddot{\theta}(t) = T(t) - r_w M \ddot{x}(t) - C_f \dot{\theta}(t) + C_f \dot{\psi}(t) \quad (1.17)$$

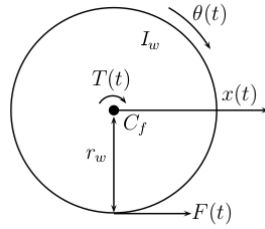


FIGURE 1.6 – Diagramme de corps libre d'une roue

En remplaçant $T(t)$ par la relation trouvée en 1.11, on obtient la relation suivante :

$$I_w \ddot{\theta}(t) = \frac{\eta r_g K}{r_a} u_x(t) - \frac{\eta r_g^2 K^2}{r_a r_w} \dot{x}(t) + \frac{\eta r_g^2 K^2}{r_a} \dot{\psi}(t) - r_w M \ddot{x}(t) - \frac{C_f}{r_w} \dot{x}(t) + C_f \dot{\psi}(t) \quad (1.18)$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left[\frac{I_w}{r_w} + r_w M \right] \ddot{x}(t) = \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a} \right] \dot{\psi}(t) - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a r_w} \right] \dot{x}(t) + \frac{\eta r_g K}{r_a} u_x(t) \quad (1.19)$$

Ce qui donne à son tour :

$$\ddot{x}(t) = \left[\frac{\eta r_w r_g^2 K^2 + C_f r_a r_w}{r_a (I_w + r_w^2 M)} \right] \dot{\psi}(t) - \left[\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a (I_w + r_w^2 M)} \right] \dot{x}(t) + \frac{\eta r_g r_w K}{r_a (I_w + r_w^2 M)} u_x(t) \quad (1.20)$$

1.3.2 Modèle d'état de la dynamique linéaire

En définissant le vecteur d'état $X = [\psi \ \dot{\psi} \ x \ \dot{x}]_T^T$ et le vecteur de sortie $y = [\psi \ x]^T$, à partir des équations 1.15 et 1.20, on obtient le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) + B u_x(t) \\ y(t) = C X(t) \end{cases} \quad (1.21)$$

Où,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{m_b g d}{I_{yy}} & -\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a I_{yy}} & 0 & \frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a r_w I_{yy}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\eta r_w r_g^2 K^2 + C_f r_a r_w}{r_a (I_w + r_w^2 M)} & 0 & -\frac{\eta r_g^2 K^2 + C_f r_a}{r_a (I_w + r_w^2 M)} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\eta r_g K}{r_a I_{yy}} \\ 0 \\ \frac{\eta r_g r_w K}{r_a (I_w + r_w^2 M)} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En tenant compte des valeurs des paramètres du système, nous obtenons les matrices nominales suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 71.16 & -16.72 & 0 & 303.93 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2.17 & 0 & -39.46 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -38.66 \\ 0 \\ 5.02 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4 Simulation en boucle ouverte

Pour vérifier si la sortie du modèle linéaire et non linéaire semble acceptable, un simple test en boucle ouverte a été effectué. Le pendule a commencé à 0.1 rad, ce qui signifie légèrement déplacé du point d'équilibre instable, puis simulé pendant une durée de 20 secondes.

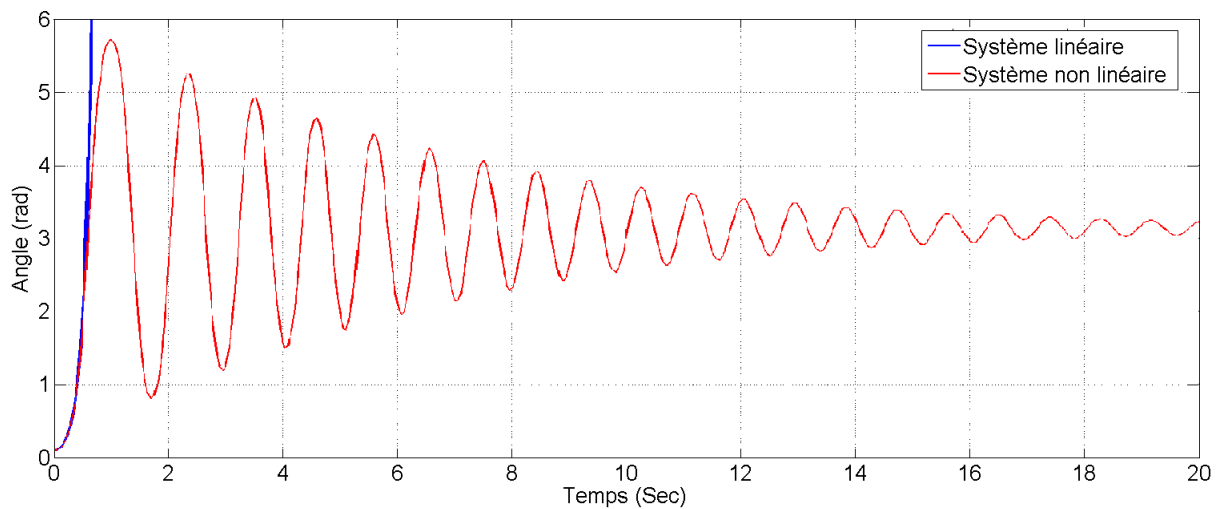


FIGURE 1.7 – Simulation du système en boucle ouverte de l'angle ψ

Le modèle non linéaire montre que le pendule tombe du point de départ et commence à osciller autour du point d'équilibre stable. Il est clair que les oscillations diminuent avec le temps. Il est également clair que le modèle linéaire présente une dynamique similaire pour la région proche du point d'équilibre instable, mais comme prévu, il ne peut pas donner une représentation précise du système lorsqu'il se déplace trop loin de ce point (Plus de 1.4 radian par rapport au point d'équilibre).

A l'aide de Matlab (Pole-Zero Map), on peut tracer les pôles du système pour vérifier que le système est instable car il y a un pôle dans le demi-plan droite. Idéalement, tous les pôles devraient être sur le demi-plan gauche pour que le système soit stable.

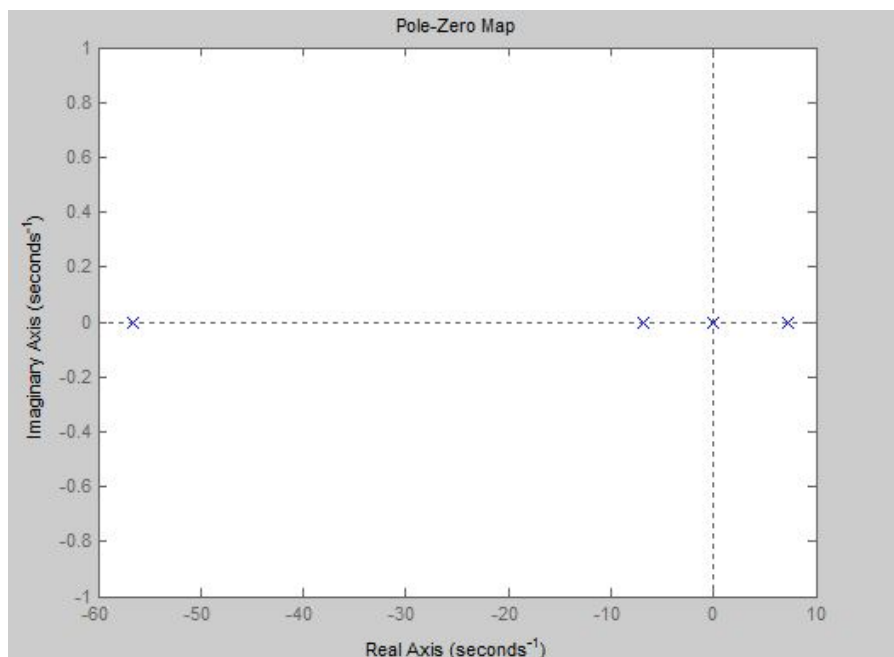


FIGURE 1.8 – Pôles du système

1.5 Conclusion

La modélisation du robot balanceur a montré que le système est composé de deux sous-système indépendant, le premier est la dynamique d'inclinaison et de déplacement linéaire, et le deuxième est la dynamique d'angle de direction. Ce modèle nous a bien montré que le système est multi variable et non-linéaire, Les simulations effectuées en boucle ouverte sur le robot nous ont permis de constater l'instabilité de celui-ci. On essayera dans le chapitre suivant de commander ce système en utilisant trois lois de commande.

Chapitre 2

Synthèse de la commande LQR

Chapitre 2

Synthèse de la commande LQR

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on va développer trois lois de commande PID, LQR et commande par mode glissant pour deux objectifs principaux : le premier c'est la stabilisation du robot balanceur à l'origine. Le deuxième objectif est la poursuite d'une trajectoire référence.

2.2 commandabilité et observabilité

Avant de présenter les lois de commande du système à régler, nous devons montrer que le système à étudier est commandable et observable.

2.2.1 Commandabilité

On dit qu'un système est commandable à l'instant t_0 s'il est possible de transférer le système à partir de tout état initial $x(t_0)$ à tout autre état dans un intervalle de temps fini au moyen d'un vecteur de contrôle sans contrainte.[1]

Le critère de Kalman établit qu'un système est commandable si et seulement si le rang de la matrice de commandabilité ζ est égal à l'ordre du système. Par conséquent, il faut que le déterminant de la matrice de commandabilité soit différent de zéro.[1]

$$\zeta = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

Où n est l'ordre du système à régler.

A l'aide de Matlab, on calcule la matrice de commandabilité ainsi que son rang, ce calcul a montré qu'elle est de rang complet, cela signifie que le système est commandable.

2.2.2 Observabilité

On dit qu'un système est observable à l'instant t_0 si, avec le système dans l'état $x(t_0)$, il est possible de déterminer cet état à partir de l'observation de la sortie sur un intervalle de temps fini.[1]

$$\vartheta = [C \ CA \ \dots \ CA^{n-1}]^T$$

L'observabilité est garantie si le rang de la matrice d'observabilité ϑ est égal à n .

Un calcul sur Matlab a montré que la matrice d'observabilité pour le système est de rang $n = 4$, donc le système est complètement observable.

2.3 Commande LQR

Les problèmes de commande optimale se rencontrent dans la vie de tous les jours : comment arriver à destination le plus rapidement possible, comment minimiser sa consommation... Pour un système dynamique donné et dont les équations sont connues, le problème de commande

optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère donné. C'est sous cette forme que la commande optimale a été étudiée dès le 19^{ème} siècle avec le calcul des variations. Une des grandes applications de la commande optimale a été l'application au lanceur Apollo dans les années 1960. Notons néanmoins que les difficultés soulevées par ce genre de problème sont loin d'être complètement résolues comme en témoignent les sessions dédiées à la commande optimale dans les conférences d'automatique.

La commande optimale reste donc un sujet de recherche d'actualité.

2.3.1 Synthèse de la commande LQR

Ce type de régulateur utilise un modèle d'état linéaire du système. Un régulateur quadratique linéaire optimal (LQR) estime le gain des contrôleurs en utilisant le modèle du système. Le but du contrôleur est de minimiser la fonction de coût[2] :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T(t)QX(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (2.1)$$

Les matrices R et Q, équilibrent l'importance relative des entrées et des états dans la fonction de coût (J) étant optimisé avec une condition que les éléments dans Les matrices Q et R sont des valeurs positives. La taille de la matrice Q dépend de la taille de la matrice d'état du système et la matrice R dépend du nombre d'entrées de contrôle du système.[2]

Le gain $K = R^{-1}B^T P$ de la commande $u = -KX$ est obtenu par application de l'indice de performance de l'équation 2.1, et en utilisant la solution de l'équation algébrique de Riccati donnée dans l'équation 2.2.[2]

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (2.2)$$

2.3.2 Choix des pondérations

Il est intéressant de remarquer d'abord que la multiplication des pondérations Q et R par un même scalaire laisse inchangée le gain K . En effet, soit P solution de l'équation de Riccati et soit le nouveau problème basé sur les pondérations $\hat{Q} = \lambda Q$ et $\hat{R} = \lambda R$ On vérifie que $\hat{P} = \lambda P$ est solution de l'équation de Riccati correspondante. En effet :

$$\hat{K} = -\hat{R}^{-1}B^T \hat{P} = R^{-1}B^T P = K \quad (2.3)$$

Sans restriction, les pondérations peuvent être choisies symétriques. Elles sont généralement choisies diagonales. Une valeur élevée de pondération de Q indique l'importance de cet état par rapport aux autres. La valeur élevée de R indique que moins d'énergie de commande des moteurs est utilisée pour équilibrer le robot.

Voici une méthode simple de choix et de médication des pondérations en vue d'aboutir à un correcteur satisfaisant.

- Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices identité.
- Dans une seconde étape, on accélère ou décélère globalement le système en multipliant la matrice Q par un scalaire α (accélération avec $\alpha > 1$ et décélération avec $\alpha < 1$), jusqu'à obtenir une dynamique moyenne adaptée.
- Dans le cas où certains états auraient des dynamiques trop lentes par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de Q correspondant aux premiers.
- Dans le cas où certains actionneurs seraient trop sollicités par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de R leur correspondant.[4]

Les étapes b, c et d peuvent être répétées dans l'ordre souhaité jusqu'à obtenir un correcteur satisfaisant le cahier de charges

2.3.3 Application de la commande LQR sur le robot

A partir de Matlab, on peut résoudre l'équation de Riccati et calculer le gain K par différentes valeurs de Q et R les matrices de pondération.

Les matrices Q et R sont de la forme :

$$Q = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \quad R = [R_1]$$

Où les valeurs a, b, c, d sont les pondérations des états $\psi, \dot{\psi}, x, \dot{x}$, respectivement, et R_1 est la pondération de commande U_x .

Les valeurs de la matrice Q sont ajustées pour obtenir la réponse désirée du système.

L'objectif principal de la commande est que tous les états poursuivent les consignes (la consigne est null pour ψ et $\dot{\psi}$) en le plus court temps possible.

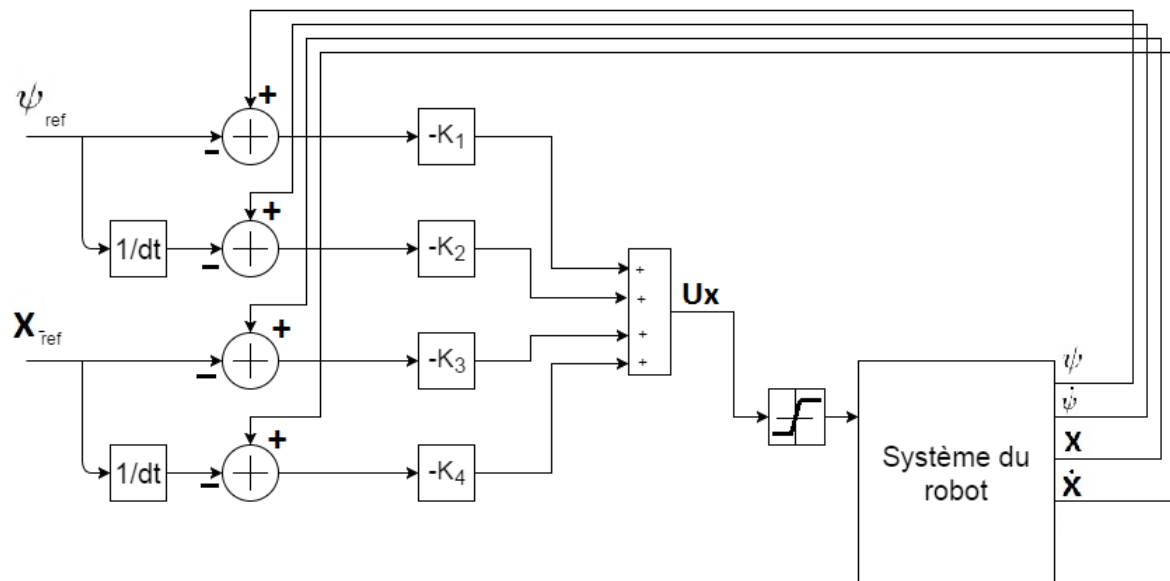


FIGURE 2.1 – Structure de la commande LQR

2.4 Simulation

Pour le LQR, les matrices de coût ont été choisies compte tenu de l'objectif principal de stabilisation du robot. On a donné aussi une importance pour la position du robot. La matrice Q a été conçue pour : On a utilisé les matrices de pondération suivantes dans la simulation de la commande LQR :

$$Q = \begin{bmatrix} 1500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = [1]$$

Par la fonction du Matlab on a calculé les gains du régulateur K :

$$K = [-59.2082 \quad -4.9871 \quad -37.4166 \quad -30.8261]$$

On a obtenu les résultats suivants :

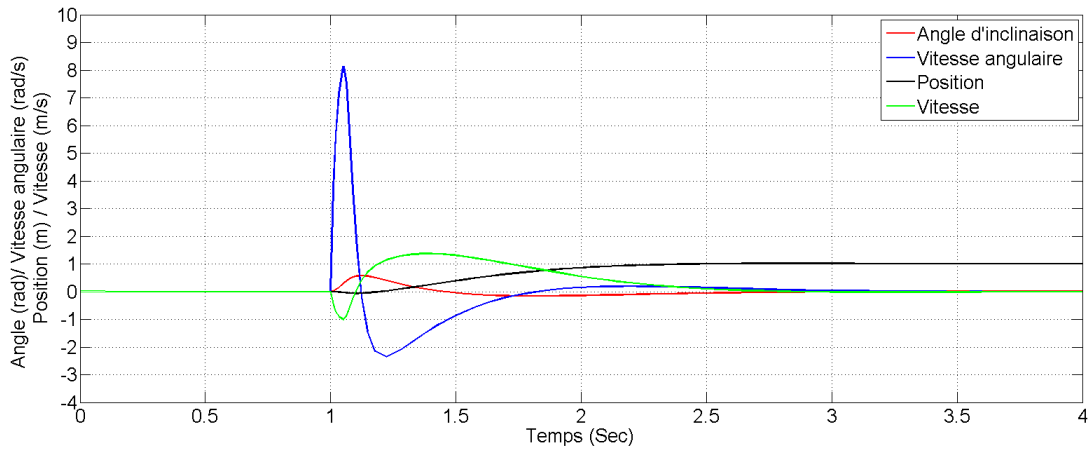
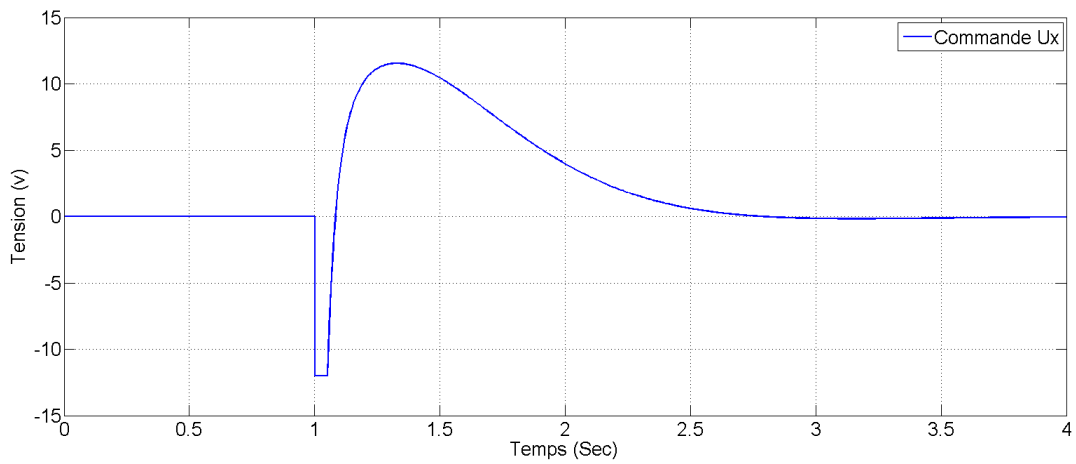


FIGURE 2.2 – Poursuite de la consigne de position


 FIGURE 2.3 – Commande U_x

Les figures 2.2 montrent le résultat de la simulation de poursuite par le robot de la référence. On prend une référence $x_{ref} = 1m$, le robot poursuit la référence sans oscillation. Le temps de réponse égale à $1.2s$. Le robot se déplace un peu au sens inverse de la consigne afin d'incliner le corps dans la direction de celle-ci, ce parce que le dynamique de x a un zéro positif.

Pour voir les effets des valeurs de la matrice de pondération, on conserve les mêmes paramètres de la première matrice et à chaque fois on change une seule valeur. Les figures suivantes montrent les effets de changement des paramètres du régulateur LQR.

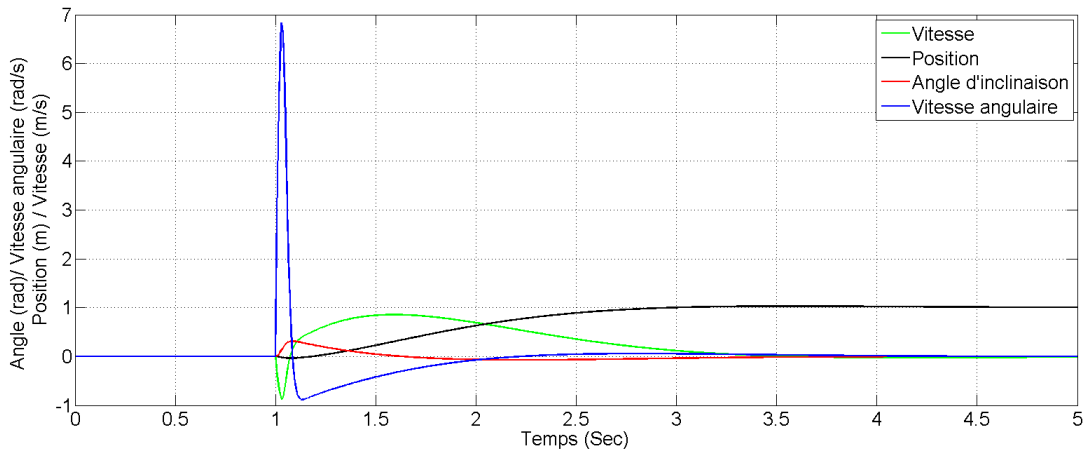


FIGURE 2.4 – Augmentation de la pondération de l'angle d'inclinaison

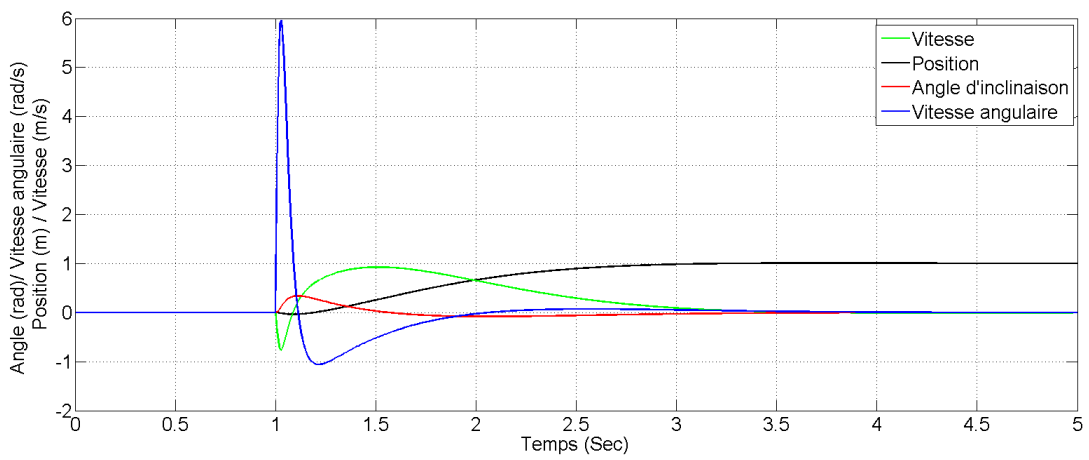


FIGURE 2.5 – Diminution de la pondération de position

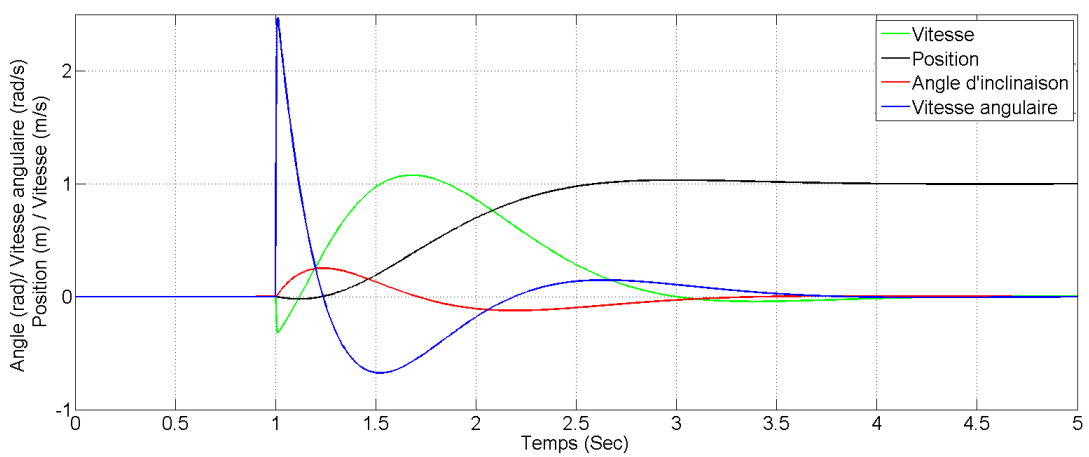


FIGURE 2.6 – Augmentation de la pondération de vitesse angulaire

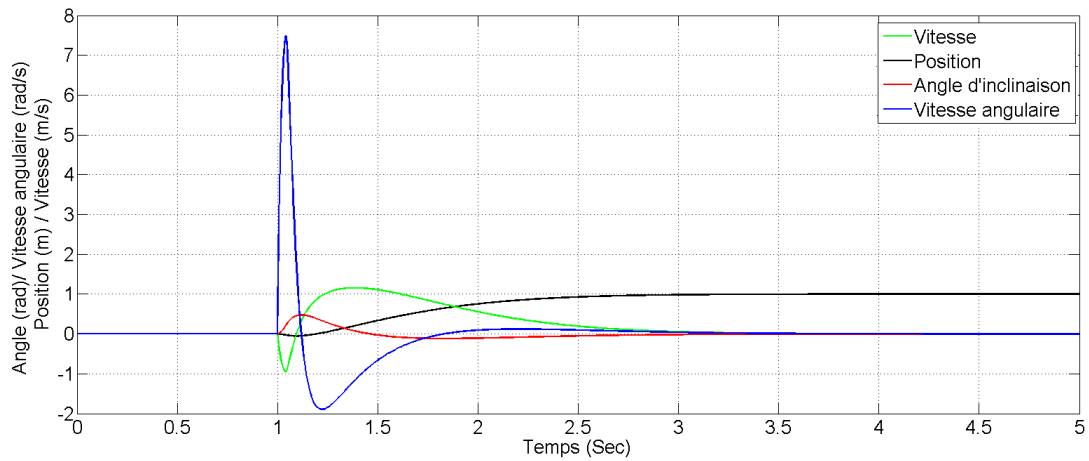


FIGURE 2.7 – Augmentation de la pondération de vitesse

La figure 2.4 la réponse du système après l'augmentation de la valeur du pondération de l'angle d'inclinaison ψ . On remarque la variation de l'angle est faible par rapport à celle dans la première simulation, ce affect sur la réponse du robot à la consigne de position, le temps de réponse deviens plus grand.

On peut voir dans La figure 2.5 que la diminution de la valeur du pondération de position x a le même effet de l'augmentation de la valeur du pondération de l'angle d'inclinaison ψ , il augmenter le temps du réponse du la poursuite de la consigne de position et diminue la variation de l'angle d'inclinaison. L'augmentation de la valeur du pondération de position x plus que de celle de l'angle d'inclinaison va déstabiliser le robot.

La figure 2.6 la réponse du système après l'augmentation de la valeur du pondération de la vitesse angulaire $\dot{\psi}$. On remarque que la vitesse angulaire est diminuée de 8 rad/s jusqu'à 2.5 rad/s . Ce fait la réponse du système lent. L'augmentation des valeurs du pondération des vitesses minimise les osculations du robot mais une valeur grande peut déstabiliser le système.

2.5 Optimisation de l'énergie

La matrice R est la matrice de pondération des commandes. On pose : $R = \rho R'$, où ρ est un réel positif.

ρ est un paramètre de Lagrange qui sert à régler le poids relatif de R par rapport à Q . La matrice R devient :

$$R = \rho [R'_1]$$

On commence par choisir les différents R'_i qui pondèrent les énergies de commande des différents actionneurs.

Le critère optimal linéaire quadratique s'écrit finalement :

$$J = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\infty} X^T(t) Q X(t) dt + \rho \int_0^{\infty} u^T(t) R' u(t) dt \right)$$

Le problème est de choisir ρ

- si ρ croît la part relative du critère $\int_0^{\infty} u^T(t) R' u(t) dt$ croît : l'objectif est d'économiser l'énergie de commande,

- si ρ décroît le terme $\int_0^{\infty} X^T(t) Q X(t) dt$ prend plus d'importance : l'objectif est d'accroître les performances.

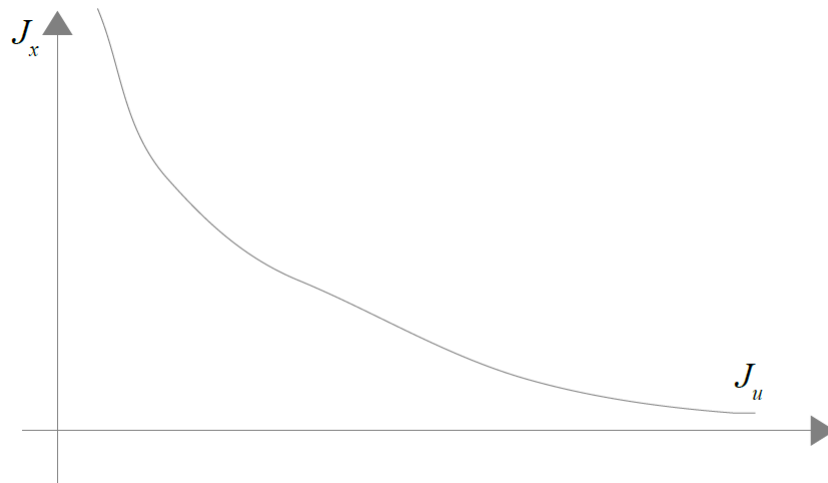


FIGURE 2.8 – parts relatives des critères de performance Jx et d'énergie de commande Ju , selon la valeur de ρ

L'augmentation du rapport ρ nous donne les résultats de simulation suivantes :

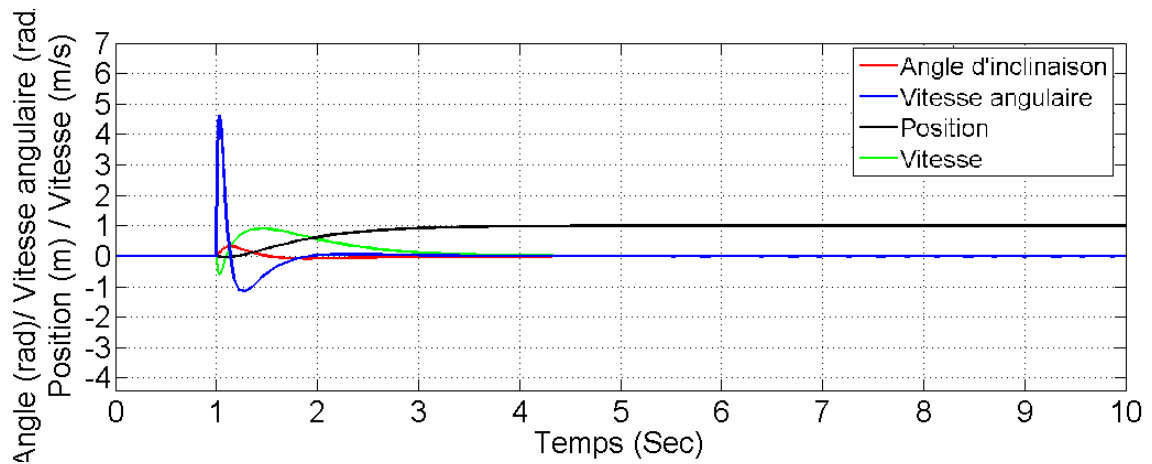


FIGURE 2.9 – Réponse du système pour $\rho = 10$

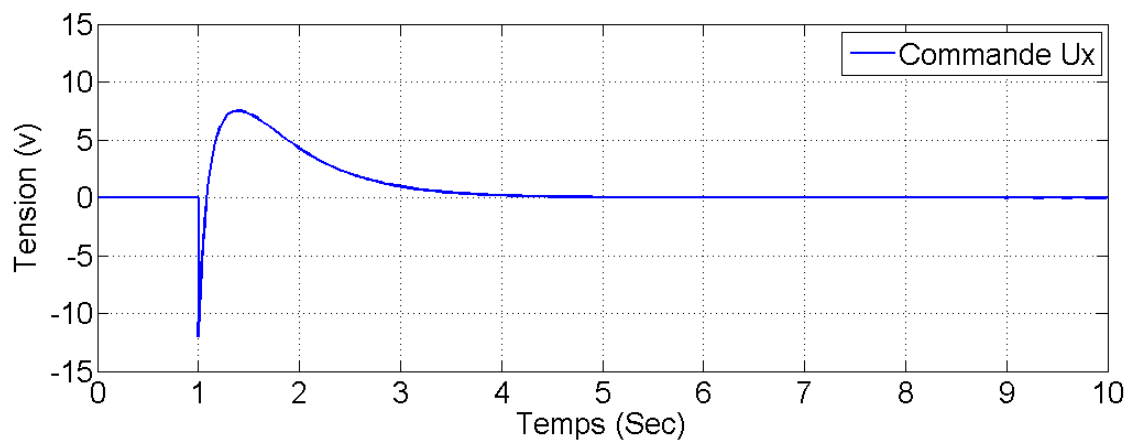
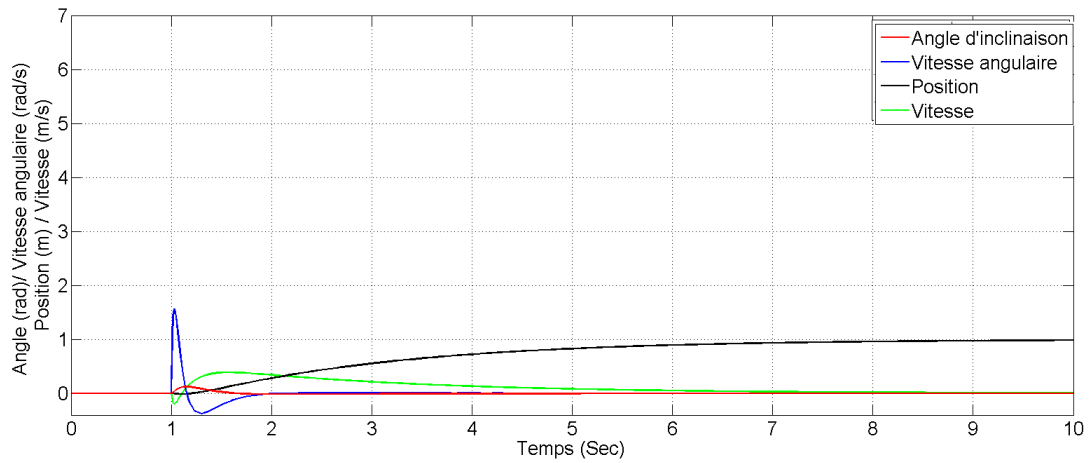
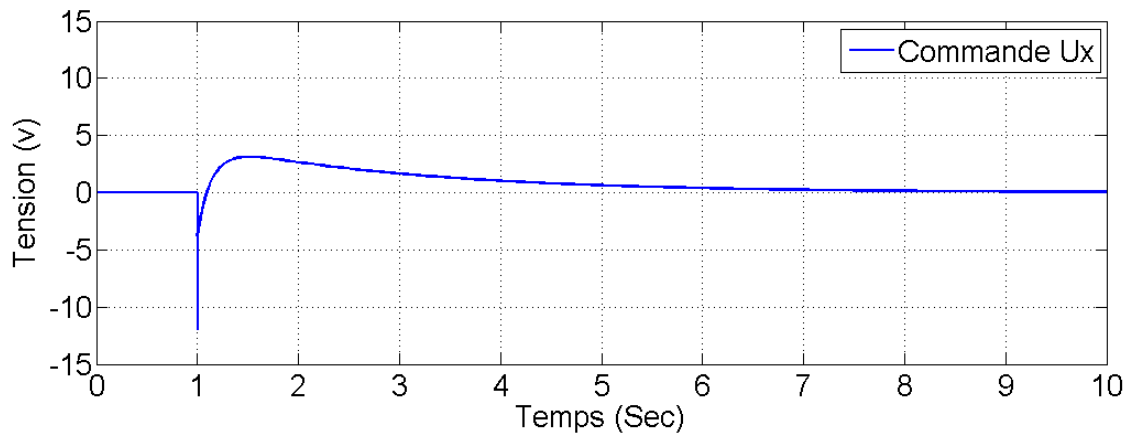


FIGURE 2.10 – Commande Ux pour $\rho = 10$

FIGURE 2.11 – Réponse du système pour $\rho = 100$ FIGURE 2.12 – Commande U_x pour $\rho = 100$

Les figures 2.9, 2.10, 2.11 et 2.12 montrent l'effet de la valeur de ρ sur le système. On peut voir que à chaque fois on augmente ρ la commande ou la tension du moteur va se diminuer et le temps du réponse va s'augmenter.

2.6 Poursuite d'une référence

On a choisi les valeurs des matrices de pondération Q et R pour garantir la stabilisation du robot et la poursuite de la consigne avec le minimum du temps de réponse et le minimum des oscillations. La figure 2.13 montre la simulation de la poursuite du référence de position par le robot. On remarque que il y a des erreurs, ce parce que le robot doit toujours balancer en position vertical. On remarque aussi que le robot se déplace un peu au sens contraire de la consigne parce que la dynamique de x a un zéro positif, ce déplacement crée un retard dans la réponse en position. On peut voir que le robot dépasse la consigne de position parce que ce dépende du choix des paramètres du régulateur et le cahier des charges.

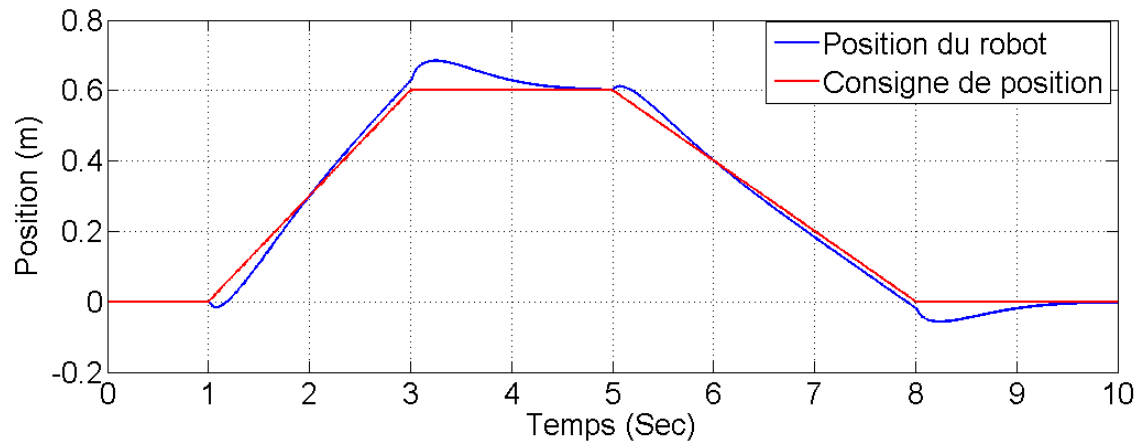


FIGURE 2.13 – Poursuite du référence de position par le robot

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a fait le synthèse de la commande LQR et on a montré les effets des valeurs de pondération .

D'après les résultats obtenus, on conclue que la commande LQR réalise les objectifs désirés, la stabilisation dans la position vertical et la poursuite de trajectoire.

Conclusion générale

Dans le cadre du projet de fin d'études, on a étudié et réalisé un robot capable de s'équilibrer sur deux roues, et de se déplacer en avant et en arrière et de poursuivre une trajectoire de position linéaire par utilisation de la commande optimal LQR.

Dans le premier chapitre, on est menés d'abord à connaître la constitution de ce système et comprendre son principe de fonctionnement. La modélisation du système du robot balancier était nécessaire afin de synthétiser les lois de commande proposées dans notre travail. D'après la modélisation et les simulations en boucle ouverte, nous avons constaté l'instabilité de ce système.

Dans le deuxième chapitre, après la confirmation de la commandabilité et l'observabilité du système du robot on a fait la synthèse de la commande optimale LQR. Les résultats de simulation en Matlab montrent que la commande optimale LQR réalise les objectifs désirés.

Bibliographie

- [1] M. Boulouiha, " Techniques de commande avancée ", note de cours, universitaire de Rélizane, 2015.
- [2] A. A. Bature, S. Buyamin, M. N. Ahmad, M. Muhammad, " A comparison of controllers for balancing two wheeled inverted pendulum Robot ", International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering IJMME-IJENS Vol :14 No :03, June 2014.
- [3] M. Lozeau " Commande par supervision de systèmes mécatroniques via internet " Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de maitrises sciences, École Polytechnique de Montréal, Septembre 2009.
- [4] D. Benhaddouche " Commande Optimale Appliquée à un Robot Mobile " Mémoire de Magister en Electronique, Université de Batna, 2013.
- [5] K. Chelli " Commande Optimale d'un Robot Balanceur à Deux Roues : Étude et Implémentation " Mémoire de Projet de fin d'étude en Automatique, École Nationale Polytechnique, 2017.