

1/93

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

DEVELOPPEMENT D'UNE METHODE INVERSE
POUR LE CALCUL DES PROFILS D'AUBAGES EN
TRIDIMENSIONNEL

Proposé par

M. BOUDJEMA

Etudié par

M. ALMIKIDAD

Dirigé par

M. BOUDJEMA

ANNEE UNIVERSITAIRE 1992-1993

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur une tentative d'établissement d'une méthode inverse de conception des profils d'aubages pour l'écoulement tridimensionnel de fluide incompressible. Cet effort a été accompli à l'Ecole Nationale polytechnique d'Alger sous la direction de Mr M. BOUDJEMA.

Je tiens à exprimer à Mr M. BOUDJEMA mon attachement à l'aide toujours efficace et les encouragements qu'il m'a prodigués. Sous sa direction à l'E.N.P j'ai eu l'occasion d'aborder un problème qui n'a été traité de cette façon explicite que par Mr H. MITON et uniquement pour les problèmes à deux dimensions dans sa publication à l'I.M.F de Marseille en 1986 [Ref.1].

Mr M. OUADJAOUT enseignant au département des sciences fondamentales à notre école, m'a transmis des connaissances précieuses durant plusieurs séances, il m'a également orienté dans la recherche bibliographique pour recouvrir l'aspect mathématique de mon travail.

Lors d'une rencontre à l'E.N.S d'Alger, l'hiver dernier avec Mr R. DJELLOULI ancien enseignant à l'E.N.P, en présence de mon promoteur, nous avons fait le plus important pas dans ce projet de fin d'études.

Que Mrs M. OUADJAOUT ET R. DJELLOULI, qui m'ont tous les deux enseigné veuillent bien trouver l'expression de mes remerciements et ma profonde gratitude.

Je ne saurais manquer d'associer à ce travail tous ceux qui ont y ont contribué de manière directe ou indirecte.

SOMMAIRE

Ce travail proposé par Mr M. BOUDJEMA a été réalisé à l'Ecole Nationale Polytechnique, il concerne le développement d'une méthode inverse servant au calcul des profils d'un aubage d'une grille traversée par un écoulement tridimensionnel de fluide incompressible.

Dans le premier chapitre, les équations du mouvement du fluide sont posées, on considère ensuite le cas correspondant à un espace périodique qui est la propriété principale d'une grille d'aubes, et on utilise alors la représentation en séries de FOURRIER des paramètres de l'écoulement qui sont des fonctions périodiques, pour aboutir aux équations aux dérivées partielles qui gèrent l'écoulement. Nous nous intéressons en suite à la répartition de vitesse autours d'une aube de la grille, pour cela nous établissons à la fin de ce chapitre une condition supplémentaire traduisant le glissement du fluide sur le profil de celle-ci.

Le second chapitre traite de la résolution du problème direct, c-à-d la recherche du champ de vitesse sur une aube de géométrie connue, ceci a nécessité la transformation des équations établies en équations elliptiques du second ordre. Nous avons alors jugé utile de discuter l'équivalence des deux systèmes d'équations ainsi que l'unicité de leurs solutions, avant d'aborder les méthodes de résolution exactes ou approchées des nouvelles équations. Nous avons notamment exposé l'utilisation des différences finies et des éléments finis, pour contourner l'absence d'une solution analytique explicite. Enfin nous avons donné la procédure de résolution utilisée et sa mise en oeuvre numérique sur ordinateur.

Le chapitre trois concerne l'application du mode inverse des équations établies, c'est d'une question de manipulation des équations qu'il s'agit.

En dernier lieu et à la fin de ce mémoire, quatre sujets sont abordés en annexes ; le premier rapporte des définitions générales concernant les grilles d'aubes, l'annexe B traite des séries de FOURRIER et ses représentations des fonctions, le troisième annexe concerne la méthode SPLINES pour interpoler les

courbes et enfin dans l'annexe D le problème d'écoulement bidimensionnel dans une grille d'aube traité par H. MITON est brièvement exposé.

CHAPITRE ZERO

INTRODUCTION GENERALE

L'amélioration des caractéristiques aérodynamiques d'une turbomachine nécessite la maîtrise de la répartition de vitesse à la paroi de l'organe considéré : aile, fuselage, ..etc.

Il est bien connu en effet que le conditionnement de la trainée est du à l'importance des zones visqueuses, ainsi qu'à l'intensité des ondes de choc, c'est le cas de l'efficacité du rendement d'une turbine. Les couches limites qui se développent le long d'une paroi, ont fortement tendance à s'épaissir voire même à décoller dès que l'écoulement est ralenti, particulièrement sous l'effet d'une onde de choc.

Si l'on veut alors améliorer les performances de l'organe, il est nécessaire de rechercher la forme géométrique de la paroi, conduisant à une répartition de vitesse qui diminuera les intensités des ondes de choc ainsi que les effets visqueux. Une telle recherche peut être réalisée itérativement par modification de la paroi et des calculs itératifs successifs ; ce procédé est malheureusement long, et ne permet pas toujours de trouver le résultat escompté, laissant ainsi un doute sur l'existence d'un profil meilleur.

Il est par contre, beaucoup plus intéressant d'utiliser une méthode inverse où l'on se donne une répartition de vitesse, choisie de manière à minimiser l'importance des couches limites, et la géométrie résulte du calcul.

Il faut toutefois remarquer que la géométrie obtenue peut ne pas correspondre à une situation réaliste : profil trop mince ou même comportant une épaisseur négative, ou bien ne répondant pas à des impératifs technologiques tels que l'encombrement, mais dans ce cas on aura la preuve que la distribution de la vitesse désirée est impossible à obtenir.

ETUDES ANTERIEURES

Divers auteurs ont publié plusieurs types de méthodes inverses. Ces méthodes valables en écoulement isentropique ont permis des progrès très sensibles notamment pour la définition des aubes de compresseurs et de turbines. Voici maintenant, brièvement

résumées les principales d'entre elles :

1 Les méthodes hodographiques

Le travail se fait sur un plan transformé : plan fonction de courant et potentiel de vitesse, par exemple, et la vitesse et la géométrie résultent du calcul. On impose l'évolution du module de la vitesse en fonction de la direction de son vecteur dans les cas où les effets visqueux ne constituent pas un problème à priori (comme par exemple pour les ailettes de turbines), par contre, elles s'appliquent moins bien quand on cherche à éviter les problèmes de décollement, comme dans les compresseurs, car dans ce cas, c'est l'évolution de la vitesse en fonction de l'abscisse curvilligne qui est déterminante pour la couche limite.

2 Les méthodes inverses

La vitesse est imposée autours du profil et la géométrie est issue des calculs. Ces méthodes sont très utilisées pour le dessin des profils d'aubes de turbomachines, elles ne sont pas applicables qu'à un écoulement subsonique ou tout juste transsonique, mais elles ne sont valables qu'en réstant isentropique et strictement bidimensionnel.

3 La méthode des caractéristiques

Cette méthode ne pose aucun problème de principe pour la détermination d'une ligne de courant correspondant à une certaine évolution de pression, mais elle ne s'applique qu'aux écoulements supersoniques.

Finalement, en ce qui concerne les méthodes inverses qui sont un problème de dimensionnement de prototypes, la répartition de vitesse doit être déterminée de manière à éviter le décollement de la couche limite, à minimiser la trainée et à obtenir une géométrie acceptable, ce qui nécessite une expérience importante.

De plus il est impossible, actuellement de contrôler directement la géométrie du profil par les méthodes inverses actuellement disponibles, de plus le problème de non existence éventuelle d'une solution, d'où les limitations importantes de ce type de procédures.

Pour détourner ces inconvénients, de nouvelles méthodes de définition basées sur les techniques d'optimisation numérique ont été récemment développées.

CHAPITRE UN

ETUDE D'UN ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL DANS UN ESPACE PERIODIQUE APPLICATION A UNE GRILLE D'AUBES

1-0 INTRODUCTION

L'écoulement autour d'une aube de compresseur ou de turbine est sous l'influence de perturbations dues à la présence des autres aubages et des parois constituant l'enveloppe et le moyeu.

L'écoulement est instationnaire du fait du mouvement relatif des roues adjacentes, la présence des phénomènes visqueux de caractère tridimensionnel en raison de la forme très particulière des parois, et le décollement intervient suivant la charge qui est imposée à la machine.

Devant tous ces problèmes qui sont étroitement liés les uns aux autres, les constructeurs ont pu maîtriser d'une manière empirique essentiellement des problèmes aussi complexes.

Ainsi pour ces raisons, l'écoulement dans les turbomachines est difficile à modéliser pour étudier de façon spécifique un phénomène hors de l'influence des autres.

Si lors d'une démarche scientifique, il est classique de trouver un modèle théorique; il est toute fois permis d'étudier en laboratoire un caractère particulier de l'écoulement isolé d'un certain nombre de perturbations. Il est nécessaire alors que les hypothèses sur lesquelles se fonde le modèle soient vérifiées raisonnablement, dans ce cas les résultats obtenus à l'aide de ce dernier doivent être vérifiés sans trop de difficultés.

En ce qui nous concerne, le caractère particulier que nous avons à prendre en compte est la périodicité : l'influence mutuelle des aubes sur le fluide qui s'écoule dans une grille composée de plusieurs aubes. Ce caractère est introduit de façon mathématique dans les équations du modèle.

Dans cette étude il est question d'établir un modèle mathématique décrivant l'écoulement dans une grille d'aubes isolée, fixe ou mobile, en partant de l'équation de continuité et

de quelques considérations cinématiques.

Soit un écoulement permanent tridimensionnel d'un fluide parfait de masse volumique ρ , dans un canal limité par deux murs liés à un repère (o,xyz) , symétriques par rapport au plan (o,xy) et distants de $h(x)$ mesurée suivant oy .

On repère une particule $p(x,y,z)$ se déplaçant à une vitesse $q(u,v,w)$ relative par rapport aux deux murs.

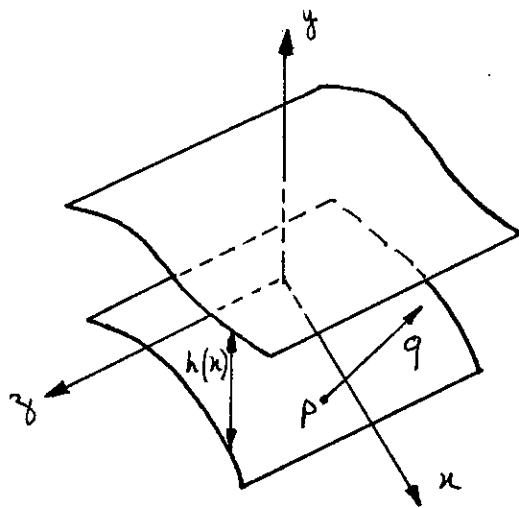


figure (1.1) : écoulement dans une veine.

1-1 EQUATIONS DU MOUVEMENT

Considérons respectivement les équations de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie :

(1.1.a)	$Q(x,y,z) = \frac{\text{Div}(\rho q)}{\rho} + u \Omega'(x)$
(1.1.b)	$R(x,y,z) = \text{Rot}(q)$
(1.1.c)	$H(x,y,z) = \frac{q^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1}$

$$\text{où } \Omega'(x) = \frac{d}{dx} \left(\log \frac{h(x)}{h(x_0)} \right) :$$

coefficient de contraction de veine. Le terme $u \Omega'(x)$ a été introduit de façon empirique.

Loins des parois on peut écrire :

$$(1.2.a) \quad Q(x,y,z) = 0$$

$$(1.2.b) \quad R(x,y,z) = 0$$

$$(1.2.c) \quad H(x,y,z) = H_0$$

dans les parties de l'écoulement où il n'y a pas d'obstacles les équations sont donc plus simples.

Projetons les équations (1.1) sur chaque axe de notre repère :

$$(1.3.a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + u \Omega'(x) = Q(x,y,z) + F(x,y,z)$$

$$(1.3.b) \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = R_1(x,y,z)$$

$$(1.3.c) \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = R_2(x,y,z)$$

$$(1.3.d) \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = R_3(x,y,z)$$

où $F(x,y,z)$ représente la participation de la compressibilité l'équation de continuité :

$$(1.4) \quad F(x,y,z) = \frac{q \text{ Grad}(\rho)}{\rho}$$

qui s'exprime aussi sous la forme :

$$(1.5) \quad F(x,y,z) = \frac{1}{\gamma - 1} \left[\begin{aligned} &u \frac{\partial}{\partial x} \left(\log 1 - \frac{q^2}{2} \right) \\ &+ v \frac{\partial}{\partial y} \left(\log 1 - \frac{q^2}{2} \right) \\ &+ w \frac{\partial}{\partial z} \left(\log 1 - \frac{q^2}{2} \right) \end{aligned} \right]$$

où encore :

$$(1.6) \quad F(x,y,z) = \frac{q \text{ Grad}(\log(1 - 0.5 q^2))}{\rho}$$

1-2 INTRODUCTION DE LA PERIODICITE

La propriété principale d'une grille d'aubes est sa périodicité : le même profil se retrouve après un certain pas 't'. De plus si l'incidence du fluide sur chaque aube se fait avec les mêmes conditions en amont, l'écoulement ne peut être alors que périodique : les mêmes caractéristiques de l'écoulement sont retrouvées après le pas 't'.

1-3 GRILLE D'AUBES ETUDIEE

La grille d'aubes faisant objet de notre étude est plane;

La grille d'aubes faisant objet de notre étude est plane; l'aube est obtenue par translation dans la direction z du profil plan dans xy , les aubes sont parallèles et le pas t est constant partout, en d'autres termes la géométrie ne varie pas suivant la troisième direction z .

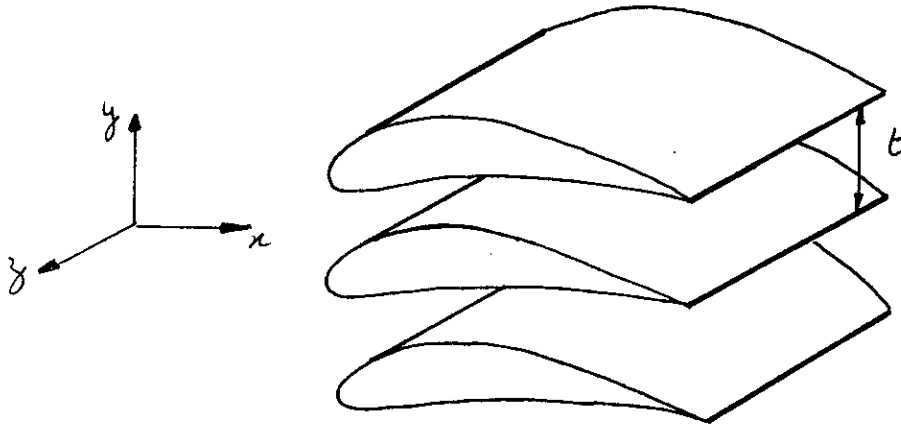


figure (1.2) : grille d'aubes étudiée.

1-4 REPRESENTATION EN SERIE DE FOURRIER

Tous les paramètres de l'écoulement sont des fonctions continues et périodiques de y , du point de vue mathématique on peut les développer en série de FOURRIER sous forme complexe, par exemple la première composante de la vitesse :

$$(1.7) \quad u(x,y,z) = \sum_{k \geq 0} U_k(x,z) \exp(i\omega_k y)$$

avec :

- U_k coefficient de FOURRIER d'ordre k , aussi dit harmonique d'ordre k ,

$$- \omega = \frac{2 \pi}{t} \text{ caractérise la période } t.$$

et de la même façon on développe les autres composantes de la vitesse q , de la divergence Q et du rotationnel R . Ainsi l'évolution suivant la direction y de tous les paramètres caractérisant l'écoulement est connue.

En utilisant la représentation de FOURRIER dans les équations (1.3) et ensuite par identification, on aboutit aux équations liant les harmoniques :

$$(1.8.a) \quad \frac{\partial U_k}{\partial x} + i\omega k V_k(x,z) + \frac{\partial W_k}{\partial z} + U_k(x,z)\Omega'(x) = q_k(x,z) + f_k(x,z)$$

$$(1.8.b) \quad i\omega k W_k(x,z) - \frac{\partial V_k}{\partial z} = r_k^1(x,z)$$

$$(1.8.c) \quad \frac{\partial U_k}{\partial z} - \frac{\partial W_k}{\partial x} = r_k^2(x,z)$$

$$(1.8.d) \quad \frac{\partial V_k}{\partial x} - i\omega k U_k(x,z) = r_k^3(x,z)$$

Il s'agit d'équations aux dérivées partielles par rapport aux variables x et z , non linéaires du premier ordre, qui doivent être résolues pour chaque valeur significative de k . En particulier pour $k=0$, l'écoulement moyen c-à-d les valeurs moyennes suivant la direction des y de u , v et w sont solution du système :

$$(1.9.a) \quad \frac{\partial U_o}{\partial x} + \frac{\partial W_o}{\partial z} + U_o(x,z) \Omega'(x) = q_o(x,z) + f_o(x,z)$$

$$(1.9.b) \quad - \frac{\partial V_o}{\partial z} = r_o^1(x,z)$$

$$(1.9.c) \quad \frac{\partial U_o}{\partial z} - \frac{\partial W_o}{\partial x} = r_o^2(x,z)$$

$$(1.9.d) \quad \frac{\partial V_o}{\partial x} = r_o^3(x,z)$$

Dans tout ce qui suit on néglige la contraction de veine $\Omega'(x)$ devant les autres termes dans l'équation de continuité, on considère aussi que le fluide n'est pas compressible ($F=0$).

On s'intéresse particulièrement à la répartition de vitesse autour du profil d'une aube appartenant à la grille. Le système d'équations donnant les harmoniques κ devient :

$$(1.10.a) \quad \frac{\partial U_k}{\partial x} + i\omega k V_k(x,z) + \frac{\partial W_k}{\partial z} = q_k(x,z)$$

$$(1.10.b) \quad i\omega k W_k(x,z) - \frac{\partial V_k}{\partial z} = r_k^1(x,z)$$

$$(1.10.c) \quad \frac{\partial U_k}{\partial z} - \frac{\partial W_k}{\partial x} = r_k^2(x,z)$$

$$(1.10.d) \quad \frac{\partial V_k}{\partial x} - i\omega k U_k(x,z) = r_k^3(x,z)$$

1-5 EXPRESSION DE LA DIVERGENCE Q ET DU ROTATIONNEL R

AUTOURS DU PROFIL

L'aube qui est la partie élémentaire de la grille est cylindrique ; pour chaque z on retrouve le même profil, celui-ci est représenté dans le plan (o,xy) et localisé entre $x=0$ et $x=c$, c est dite 'corde'.

Le squelette $y = s(x)$ est la ligne moyenne de l'aube et il est entouré par le profil qui est composé de l'extrados $y = P_i(x) = s(x) + \varepsilon(x)$ et de l'intrados $y = P_e(x) = s(x) - \varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x)$ représente l'épaisseur locale de l'aube mesurée dans la direction des y .

L'extrados et l'intrados se rejoignent avec le squelette au bord d'attaque B.A à $x=0$ et au bord de fuite à $x=c$, dans ces deux bords on suppose que les tangentes au profil sont parallèles à oy .

Rappelons que la divergence Q et le rotationnel R caractérisent l'obstacle et que :

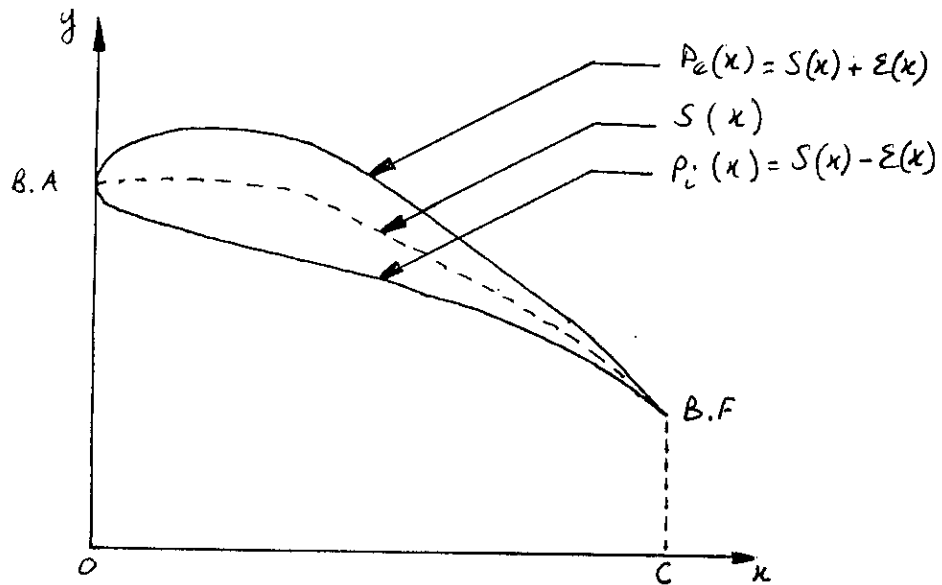


figure (1.3) : profil d'une aube.

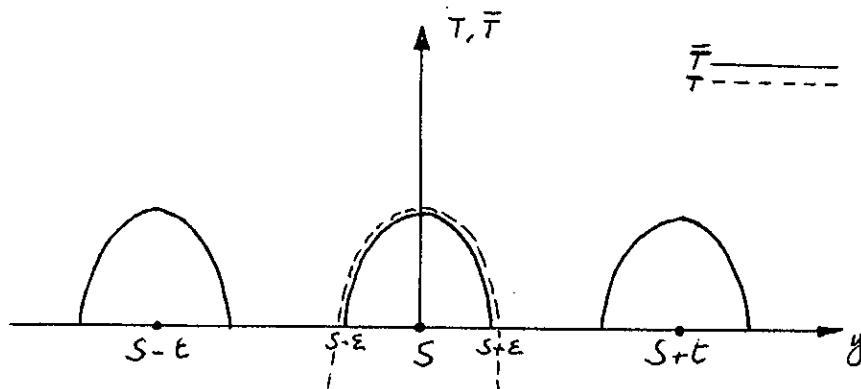


figure (1.4) : fonctions T , \bar{T} .

$$(1.11) \quad \begin{array}{l} Q = 0 \\ R = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} y \geq Pe(x) \\ y \leq Pi(x) \end{array} \quad \text{pour} \quad \text{avec } 0 \leq x \leq c \quad \text{et } 0 \leq z \leq h$$

cherchons $Q(x,y,z)$ et $R(x,y,z)$ sous la forme :

$$(1.12) \quad \begin{bmatrix} Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x,z) \\ \beta(x,z) \end{bmatrix} \overline{T(x,y)}$$

où T est une fonction scalaire caractéristique du profil, dépendante donc de x et de y uniquement. Cette fonction doit s'annuler en dehors du profil, et correspondre à l'intérieur de celui-ci à une fonction T choisie de façon arbitraire ie :

$$(1.13) \quad \overline{T(x,y)} = \begin{cases} T(x,y) & \text{si } Pi(x) \leq y \leq Pe(x) \\ 0 & y \leq Pi(x) \\ 0 & Pe(x) \leq y \end{cases}$$

La périodicité de l'espace impliquant la périodicité de l'écoulement, implique aussi la périodicité de la fonction \overline{T} , on la représente par la série de FOURRIER :

$$(1.14) \quad \overline{T(x,y)} = \sum_{k \geq 0} \overline{t}_k(x) \exp(i\omega_k y)$$

nous pouvons écrire :

$$(1.15) \quad \overline{T(x,y)} = \sum_{k \geq 0} \overline{t}_k(x) \exp(i\omega_k s(x)) \exp(i\omega_k (y-s(x)))$$

posons :

$$(1.16) \quad t_k(x) = \overline{t}_k(x) \exp(i\omega_k s(x))$$

t_k depend de x , qui pourrait s'écrire en fonction de l'épaisseur ε , sachant que $\varepsilon(x)$ est une fonction biunivoque, c-à-d :

$$\begin{aligned}
 (1.17) \quad & t_k = t_k(\varepsilon) \\
 & \bar{T}(x, y) = \sum_{k \geq 0} t_k(\varepsilon(x)) \exp(i\omega k(y-s(x)))
 \end{aligned}$$

Les coefficients de FOURRIER de la fonction T de x et y qui a été proposée par H.MITON sont :

$$(1.18) \quad t_k(\varepsilon) = \frac{4 \varepsilon}{\omega^2 k^2} \left(\cos \omega k \varepsilon - \frac{\sin \omega k \varepsilon}{\omega k \varepsilon} \right)$$

$$t_0(\varepsilon) = \frac{-4 \varepsilon^3}{3}$$

lorsque ε tends vers zero aux bords d'attaque et de fuite ($x=0$, $x=c$) la divergence Q et le rotationnel R s'annulent, on a :

$$(1.19) \quad \begin{bmatrix} q_k(x, z) \\ r_k^1(x, z) \\ r_k^2(x, z) \\ r_k^3(x, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x, z) \\ \beta_1(x, z) \\ \beta_2(x, z) \\ \beta_3(x, z) \end{bmatrix} \bar{t}_k(\varepsilon)$$

nous avons projeté le vecteur rotationnel suivant les trois directions x, y et z. En particulier pour $k=0$ on peut écrire :

$$(1.20) \quad \begin{bmatrix} q_0(x, z) \\ r_0^1(x, z) \\ r_0^2(x, z) \\ r_0^3(x, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x, z) \\ \beta_1(x, z) \\ \beta_2(x, z) \\ \beta_3(x, z) \end{bmatrix} \overline{t}_0(\varepsilon)$$

en utilisant le système d'équations définissant l'écoulement moyen ($k=0$) c-à-d les équations suivantes :

$$(1.21.a) \quad \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial W_0}{\partial z} = q_0(x, z)$$

$$(1.21.b) \quad - \frac{\partial V_0}{\partial z} = r_0^1(x, z)$$

$$(1.21.c) \quad \frac{\partial U_0}{\partial z} - \frac{\partial W_0}{\partial x} = r_0^2(x, z)$$

$$(1.21.d) \quad \frac{\partial V_0}{\partial x} = r_0^3(x, z)$$

On peut alors exprimer les coefficients α, β_1, β_2 et β_3 en fonction des gradients des vitesses projetées de l'écoulement moyen et du premier terme $\overline{t}_0(\varepsilon)$ de la série de FOURRIER de la fonction \overline{T} proposée :

$$(1.22) \quad \begin{bmatrix} \alpha(x, z) \\ \beta_1(x, z) \\ \beta_2(x, z) \\ \beta_3(x, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_o}{\partial x} + \frac{\partial W_o}{\partial z} \\ - \frac{\partial V_o}{\partial z} \\ \frac{\partial U_o}{\partial z} - \frac{\partial W_o}{\partial x} \\ \frac{\partial V_o}{\partial x} \end{bmatrix} \frac{1}{\overline{t_k(\varepsilon)}}$$

et finalement on écrit la divergence Q et le rotationnel R sur le profil en fonction de la vitesse de l'écoulement moyen et de la géométrie :

$$(1.23.a) \quad q_k(x, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_o}{\partial x} + \frac{\partial W_o}{\partial z} \end{bmatrix} \frac{\overline{t_k(\varepsilon(x))}}{\overline{t_o(\varepsilon(x))}} \exp(-i\omega ks(x))$$

$$(1.23.b) \quad r_k^1(x, z) = \begin{bmatrix} - \frac{\partial V_o}{\partial z} \end{bmatrix} \frac{\overline{t_k(\varepsilon(x))}}{\overline{t_o(\varepsilon(x))}} \exp(-i\omega ks(x))$$

$$(1.23.c) \quad r_k^2(x, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_o}{\partial z} - \frac{\partial W_o}{\partial x} \end{bmatrix} \frac{\overline{t_k(\varepsilon(x))}}{\overline{t_o(\varepsilon(x))}} \exp(-i\omega ks(x))$$

$$(1.23.d) \quad r_k^3(x, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_o}{\partial x} \end{bmatrix} \frac{\overline{t_k(\varepsilon(x))}}{\overline{t_o(\varepsilon(x))}} \exp(-i\omega ks(x))$$

où

$$(1.24.a) \quad t_k(\varepsilon) = \frac{4\varepsilon}{\omega_k^2 z^2} \left(\cos \omega_k \varepsilon - \frac{\sin \omega_k \varepsilon}{\omega_k \varepsilon} \right)$$

$$(1.24.b) \quad t_o(\varepsilon) = \frac{-4\varepsilon^3}{3}$$

1-6 ETABLISSEMENT DE LA CONDITION DE GLISSEMENT AUTOURS DU PROFIL

Pour que le fluide puisse glisser sur les parois supérieure et inférieure du profil, une condition supplémentaire doit être imposée, liant les composantes de la vitesse en chaque point sur l'obstacle. Cette condition traduit le fait que chaque particule fluide doit décrire une trajectoire appartenant à la surface du profil : $y = P(x)$ c-a-d que le vecteur vitesse q doit être tangent à une courbe sur la surface du profil, pour cela :

$$(1.25) \quad \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \operatorname{tg} \theta = \frac{dP}{d\eta}$$

où la vitesse $\sqrt{u^2 + v^2}$ est le module de la vitesse tangente suivant une direction η , à la surface $P(x)$, nous avons :

$$(1.26) \quad \cos \varphi = \frac{dx}{d\eta} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

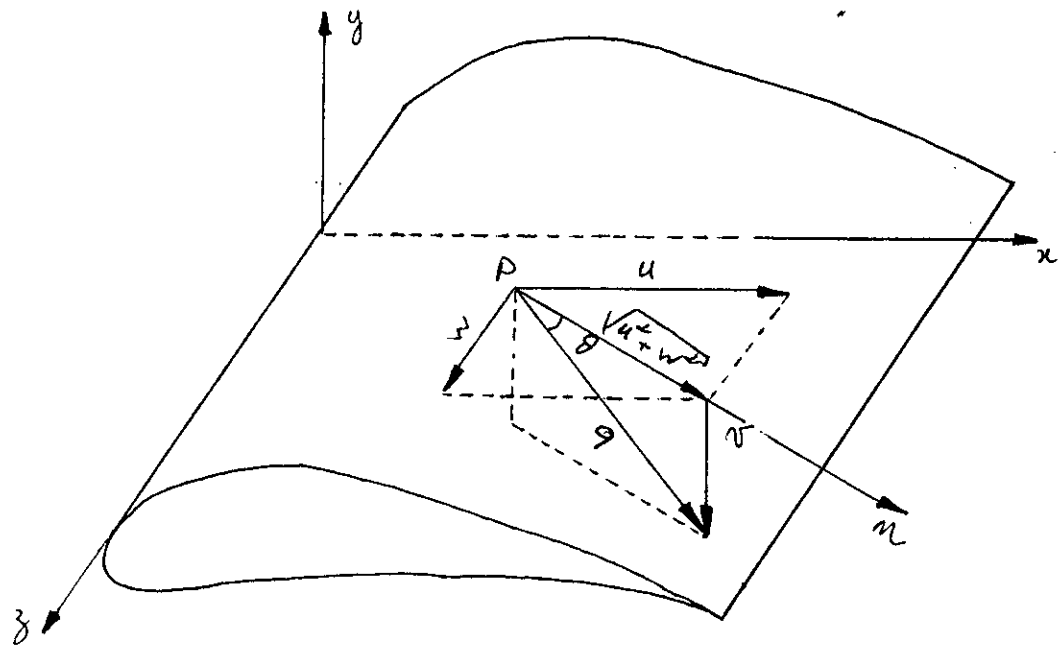


figure (1.5) : glissement tridimensionnel.

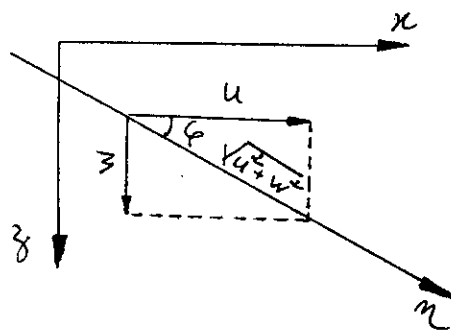


figure (1.6) : vitesse suivant η .

ce qui implique :

$$(1.27) \quad d\eta = dx \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{u}$$

d'où :

$$(1.28) \quad \frac{dP}{d\eta} = \frac{dP}{dx} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

remplacée dans (1.25) on retrouve :

$$(1.29) \quad v = \operatorname{tg} \theta = \frac{dP}{dx} u$$

ce qui traduit exactement la condition de glissement établie dans le cas bidimensionnel. Ceci est dû au fait que le profil en question correspond à une grille d'aubes plane dont la géométrie ne présente pas une variation suivant la troisième direction z . Nous écrivons finalement :

$$(1.30) \quad v(x, P(x), z) = P'(x) u(x, P(x), z) ; \quad P'(x) = s'(x) \pm \varepsilon'(x)$$

sur l'extrados et sur l'intrados.

Cette relation garde la même forme si on passe aux coefficients de FOURRIER relatifs aux vitesses u et v , par identification l'équation précédente nous donne :

$$(1.31) \quad v_k(x, z) = P'_k(x) u(x, z) ; \quad P'(x) = s'(x) \pm \varepsilon'(x)$$

TRAITEMENT DE LA CONDITION DE GLISSEMENT AUX BORDS D'ATTAQUE

ET DE FUIITE

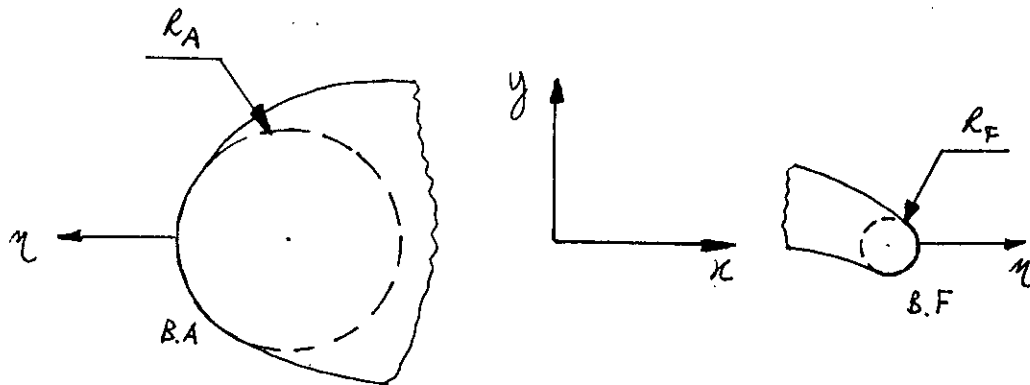


figure (1.7) : courbures aux bords d'attaque et de fuite.

La jonction de la surface extrados et de la surface intrados au niveau du bord d'attaque B.A et du bord de fuite B.F, se présente sous la forme de deux courbures de rayons respectifs R_a, R_f . La condition de glissement qui traduit la tangence de la projection de la vitesse au profil doit être vérifiée.

Malheureusement à ces niveaux, la tangente est verticale, il en est alors de même pour la vitesse dans le plan xy, cela veut dire que la première composante de celle-ci doit alors s'annuler, idem pour les coefficients de FOURRIER :

$$\begin{aligned}
 & u \Big|_A = 0 \qquad \text{et donc} \qquad u_k \Big|_A = 0 \\
 (1.32) \quad & \text{et} \\
 & u \Big|_F = 0 \qquad \text{et donc} \qquad u_k \Big|_F = 0
 \end{aligned}$$

dans ces deux cas on doit établir la condition de glissement sous une autre forme, cette nouvelle condition ne devra lier que les deux composantes u, v de la vitesse. Aux points B.A et B.F, la

conservation des moments s'écrit sous la forme :

$$(1.33) \quad - \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{V}{R}$$

où

- V : module de la vitesse mesurée dans le plan xy ,
- η : direction normale au bord considéré orienté vers l'extérieur,
- R : rayon de courbure du bord en question.

de plus la condition de non rotationnalité $R = 0 = R_3$ s'écrit :

$$(1.34) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

par exemple au bord d'attaque, la direction η est opposée à la direction x .

$$(1.35) \quad \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_A = \frac{V_A}{R_A}$$

écrivons cette dérivée partielle sous la forme d'une variation :

$$(1.36) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_A = \frac{\partial V_A}{\partial y} = \frac{u(0, y_A + e) - u(0, y_A - e)}{2e}$$

où e représente une petite fraction du pas t vérifiant :

$$(1.37) \quad e < 0.01 \frac{\omega}{2\pi}$$

une procédure analogue au bord de fuite, nous laisse écrire finalement :

$$(1.38a) \quad \frac{u_A(0, y_A + e) - u_A(0, y_A - e)}{2e} = \frac{v_A(0, y_A)}{R_A} \quad \text{au B.A}$$

$$\frac{u_F(C, y_F+e) - u_F(C, y_F-e)}{2e} = - \frac{v_F(C, y_F)}{R_F} \quad \text{au B.F.}$$

(1.38b)

il est maintenant clair que cette condition implique une relation similaire en ce qui concerne les coefficients de FOURRIER U_k et V_k :

$$\frac{u_k(0, y_A+e) - u_k(0, y_A-e)}{2e} = \frac{v_k(0, y_A)}{R_A} \quad \text{au B.A.}$$

(1.39a)

$$\frac{u_k(C, y_F+e) - u_k(C, y_F-e)}{2e} = - \frac{v_k(C, y_F)}{R_F} \quad \text{au B.F.}$$

(1.39b)

CHAPITRE DEUX

PROBLEME DIRECT RECHERCHE DE LA REPARTITION DE VITESSE SUR LE PROFIL

2-1 ECRITURE D'UN SYSTEME D'E.D.P RESOLVABLE DEFINISSANT LES HARMONIQUES. EQUATIONS ELLIPTIQUES

Le système d'équations aux dérivées partielles (1.10) ne peut être résolu directement vu sa complexité ; chaque équation regroupe au moins deux fonctions inconnues parmi U_k , V_k et W_k dérivées partiellement par rapport à x et/ou à z , de plus le nombre d'équations est supérieur au nombre d'inconnues.

Nous allons maintenant écrire trois équations découplées c-à-d une E.D.P pour chaque fonction recherchée. Pour cela gardons la forme compacte initiale des équations du mouvement :

(2.1.a)



$$\text{Div} (q) = Q$$

(2.1.a)

$$\text{Rot} (q) = R$$

on utilise ensuite la formule du LAPLACIEN dans \mathbb{R}^3 d'un vecteur, écrit en fonction de sa divergence et de son rotationnel :

$$(2.2) \quad \Delta_3 q = - \text{Rot}(\text{Rot}(q)) + \text{Grad}(\text{Div}(q))$$

où $\Delta_3 q$ est le vecteur regroupant les LAPLACIEN de chaque composante de q ie :

$$(2.3) \quad \begin{bmatrix} \Delta_3 u \\ \Delta_3 v \\ \Delta_3 w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_3}{\partial y} - \frac{\partial R_2}{\partial z} \\ \frac{\partial R_1}{\partial z} - \frac{\partial R_3}{\partial x} \\ \frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial R_1}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

opérateur LAPLACIEN dans \mathbb{R}^3 .

Introduisons la périodicité suivant y :

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_k}{\partial z^2} - \omega^2 k^2 U_k(x, z) = - \left[i\omega k r_k^3 - \frac{\partial r_k^2}{\partial z} \right] + \frac{\partial q_k}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_k}{\partial z^2} - \omega^2 k^2 V_k(x, z) = - \left[\frac{\partial r_k^1}{\partial z} - \frac{\partial r_k^3}{\partial x} \right] + i\omega k q_k$$

$$\frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_k}{\partial z^2} - \omega^2 k^2 W_k(x, z) = - \left[\frac{\partial r_k^2}{\partial x} - i\omega k r_k^1 \right] + \frac{\partial q_k}{\partial z}$$

(2.4.a), (2.4.b) et (2.4.c)

on voit apparaitre l'opérateur scalaire L du coté gauche de chaque

équation du système :

$$L = - \Delta_2 + \omega^2 k^2$$

où

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

opérateur LAPLACIEN dans \mathbb{R}^2 .

Finalement nous avons obtenu un système lineaire decouplé d'équations aux derivées partielles du second ordre ; en effet chaque harmonique inconnue parmi U_k , V_k et W_k a été isolée dans une seule équation. D'un autre coté et comme le système (1.10), ce problème se pose dans le plan xy. On écrit :

(2.5.a) $-\Delta_2 U_k + \omega^2 k^2 U_k = f_k^1$

(2.5.b) $-\Delta_2 V_k + \omega^2 k^2 V_k = f_k^2$

(2.5.c) $-\Delta_2 W_k + \omega^2 k^2 W_k = f_k^3$

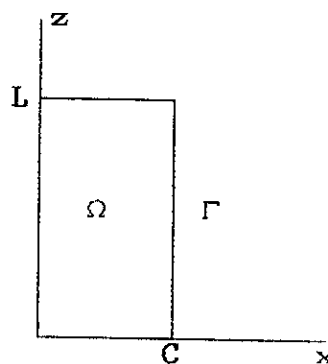


figure (2.1) :
domaine de résolution.

Les trois équations sont semblables, ce type d'équations aux E.D.P est appelé équation elliptique du second ordre.

L'écoulement moyen est solution de la forme particulière du système précédent, car les seconds membres vont disparaître étant donné que pour $k = 0$ la divergence q_0 et les rotationnels r_0 s'annulent :

$$(2.6.a) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} - \Delta_2 U_0 = 0$$

$$(2.6.b) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} - \Delta_2 V_0 = 0$$

$$(2.6.c) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} - \Delta_2 W_0 = 0$$

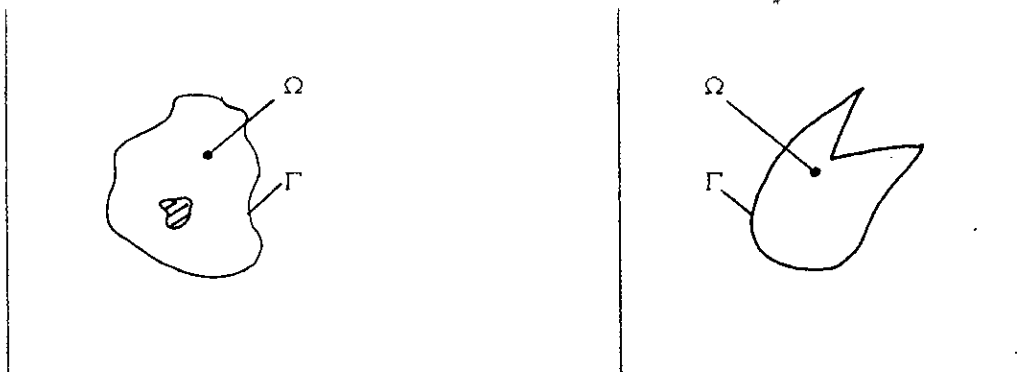
chaque équation est aussi connue comme équation de LAPLACE.

2-2 EQUIVALENCES DES DEUX SYSTEMES

Nous avons traité le système d'E.D.P initial (1.10), de façon à pouvoir le résoudre, pour cela on est passé à des équations d'ordre supérieur. Toute solution du premier système est solution du deuxième car il s'agit de simples dérivations par rapport à x et à z . Mais inversement, en résolvant le second système, nous ne résolvons pas les équations du premier système sauf si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1/ Condition de régularité du domaine

Le domaine Ω de résolution ne doit présenter en aucun cas des irrégularités géométriques telles que des trous ou des piques.



figures (2.2) : exemples d'irrégularités géométriques du domaine Ω .

2/ Condition de compatibilité des C.L

Si sur deux parties Γ_1 et Γ_2 de la frontière Ω qui se rejoignent en un point, on impose deux C.L : $u = \phi_1$ sur Γ_1 et $u = \phi_2$ sur Γ_2 , alors à l'intersection de Γ_1 et Γ_2 , les C.L doivent être les mêmes.

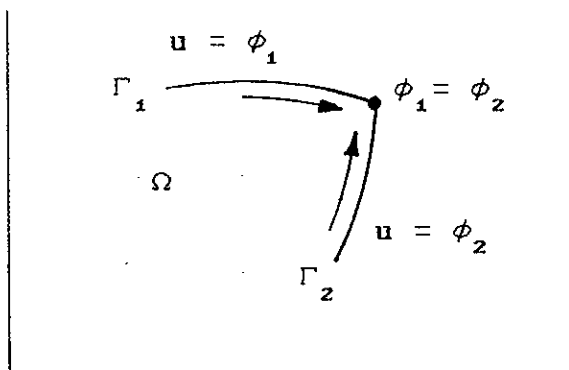


figure (2.3) : C.L. compatibles.

2-3 UNICITE DE LA SOLUTION D'UNE EQUATION ELLIPTIQUE

PROBLEME AUX LIMITES

D'une façon générale, une équation aux dérivées partielles admet une infinité de solutions, la solution particulière désirée est déterminée à partir de conditions supplémentaires qui en général portent sur le comportement particulier de la solution sur la frontière du domaine étudié.

Le problème aux limites :

(2.7)

$$\begin{aligned}
 - \Delta U + \omega^2 k^2 U &= f && \text{sur } \Omega \\
 U &= \phi && \text{sur } \Gamma_o \\
 \frac{\partial U}{\partial \eta} &= \varphi && \text{sur } \Gamma/\Gamma_o
 \end{aligned}$$

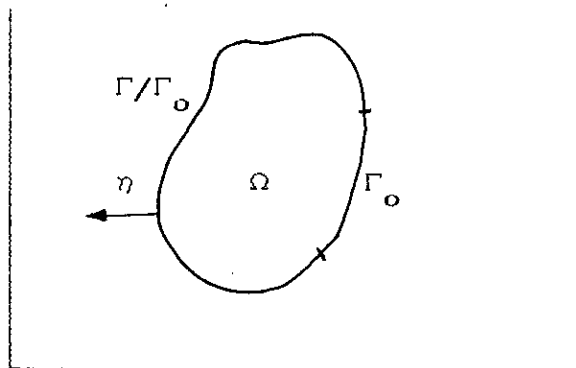


figure (2.4) : frontière fermée d'un domaine.

où Γ est la frontière fermée du domaine Ω , η est une direction normale à Γ dirigée vers l'extérieur du domaine, est un problème elliptique, admettant une solution unique U .

- La condition $U = \phi$ sur Γ est dite condition aux limites de

DIRICHLET.

- La condition $\frac{\partial U}{\partial \eta} = \varphi$ sur Γ/Γ_0 est dite condition aux limites de NEWMAN.

2-4 SOLUTION D'UN PROBLEME AUX LIMITES

Après avoir transformé le système d'E.D.P du premier ordre définissant les harmoniques U_k , V_k et W_k en un système d'E.D.P elliptiques, et après avoir ensuite énoncé l'unicité de la solution de chacune des équations à condition qu'elle soit associée à des C.L, nous abordons maintenant différentes méthodes de résolution de ces problèmes elliptiques.

2-4-1 SOLUTION ANALYTIQUE EXACTE. FONCTION DE GREEN

Le problème que nous voulons résoudre est le suivant :

$$\begin{array}{l}
 (2.8) \quad \left[\begin{array}{l}
 - \Delta U + \omega^2 k^2 U = f \quad \text{sur } \Omega \\
 \\
 U = \phi \quad \text{sur } \Gamma_0 \\
 \\
 \frac{\partial U}{\partial \eta} = \varphi \quad \text{sur } \Gamma/\Gamma_0
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Il existe alors une unique fonction G continue sur l'ensemble $\{ (X,Y) \in \Omega \times \Omega ; X \neq Y \}$ telle que la solution U recherchée s'écrit sous la forme du produit de convolution suivant :

$$(2.8) \quad U(X) = G(X,Y) * f(y) = \int_{\Omega} G(X,Y) f(Y) d\Omega$$

où l'on a noté $X = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix}$,

G est appelée fonction de GREEN du problème mixte relatif $(\Omega, \Gamma_0, -\Delta + \omega^2 k^2)$ en d'autres termes cette fonction G dépend du domaine Ω , de la partie de sa frontière où les C.L du type DIRICHLET sont imposées et de l'opérateur en question.

Malheureusement malgré que notre domaine Ω soit de géométrie assez simple, nous n'avons pas trouvé dans la bibliographie, le noyau de GREEN pour notre problème. La fonction de GREEN n'a été donnée que pour le problème de LAPLACE et pour le problème de HELMOLTZ relatif à l'opérateur $L = +\Delta + \omega^2 k^2$.

De toute façon, même si on connaissait le noyau G relatif à notre problème, l'intégrale (2.8) ne pourrait être évaluée avec exactitude ; on ne pourrait la calculer qu'approximativement.

2-4-2 SOLUTIONS APPROCHÉES. METHODES NUMÉRIQUES POUR LA

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES

D'une façon générale, les résultats mathématiques concernant l'existence et l'unicité de la solution d'un problème elliptique, peuvent indiquer une indication précieuse pour le physicien, mais ils peuvent s'avérer insuffisants dans la mesure où le calcul explicite de la solution exacte est souvent hors d'atteinte.

C'est pour cela que le problème exact est approché par un problème discret formulé dans un espace de dimension finie, ce qui conduit à la résolution d'un système linéaire d'équations algébriques.

Diverses méthodes d'approximation des solutions ont été successivement utilisées. Pendant la première moitié du vingtième

ciécle, la quasitotalité de ces méthodes consistaient en un calcul à la main, basées essentiellement sur des développements en séries entières ou trigonométriques par exemple.

A partir des années 1950, l'utilisation des calculateurs électroniques s'est développée, et a fait introduire par ordre chronologique : la Méthode des Différences Finies, puis la Méthode des Eléments Finis. Parmi les autres méthodes nous citerons les Méthodes de Collocation et les Méthodes des moindres carrés.

2-4-2-1 DISCRETISATION PAR DIFFERENCES FINIES

La mise en oeuvre de cette méthode utilise la formulation différentielle du problème, et elle consiste à remplacer chacun des opérateurs différentiels par un quotion aux différences.

Nous avons à résoudre le problème suivant :

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} - \Delta U + \omega^2 k^2 U = f & \text{sur } \Omega \\ U = \phi & \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} = \varphi & \text{sur } \Gamma/\Gamma_0 \end{array} \right.$$

Soit n_1, n_2 deux entiers, on définit alors le maillage du domaine rectangulaire Ω comme l'ensemble des points $(X_i, Z_j) = (ih_x, jh_z)$ avec $i=0, n_1+1$ et $j=0, n_2+1$ appelés noeuds du maillage (voir figure(2.5)), ces points sont équidistants suivant les directions x et z par les deux pas différents :

$$h_x = \frac{C}{n_x + 1}, \quad h_z = \frac{L}{n_z + 1}$$

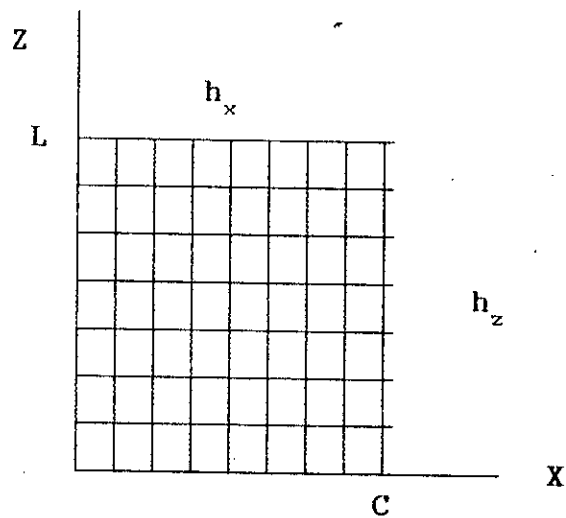


figure (2.5) :

maillage du domaine Ω .

La méthode des différences finies (M.D.F) consiste à obtenir une approximation de la solution U aux points (X_i, Z_j) , et elle repose sur la formule de TAYLOR suivante :

$$\begin{aligned}
 - \Delta U(X_i, Z_j) &= \frac{1}{h_x^2} \left[2 U(i, j) - U(i+1, j) - U(i-1, j) \right] \\
 &+ \frac{1}{h_z^2} \left[2 U(i, j) - U(i, j+1) - U(i, j-1) \right] \\
 (2.9) \quad &+ \frac{h_x^2}{12} \left[\frac{\partial^4 U}{\partial X^4} (X_i + \theta_i h_x, Z_j) \right] \\
 &+ \frac{h_z^2}{12} \left[\frac{\partial^4 U}{\partial Z^4} (X_i, Z_{j+1} + \theta_j h_z) \right]
 \end{aligned}$$

avec :

$$U(i, j) = U(X_i, Z_j)$$

$$|e_i| < 1$$

$$|e_j| < 1$$

$$i = 1, n_x$$

$$j = 1, n_z$$

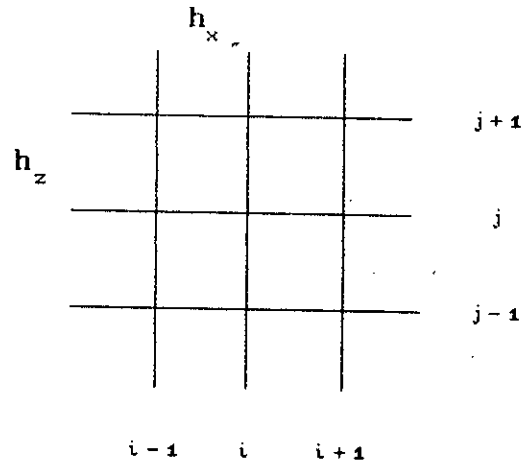


figure (2.6) : incrémentation des noeuds.

Les deux principes de base de la M.D.F sont alors:

1/ de négliger le reste du développement limité dans lequel les deux coefficients :

$$\frac{h_x^2}{12}, \quad \frac{h_z^2}{12}$$

sont petits.

2/ d'écrire que l'équation (2.7) est satisfaite en tous les points (X_i, Z_j) du maillage, la quantité $-\Delta U_x(X_i, Z_j)$ étant approchée conformément au principe 1 par le quotient aux différences :

$$(2.10) \quad \frac{1}{h_x^2} \left[2 U(i, j) - U(i+1, j) - U(i-1, j) \right] + \frac{1}{h_z^2} \left[2 U(i, j) - U(i, j+1) - U(i, j-1) \right]$$

Posant $f(i,j)=f(X_i,Z_j)$ on obtient alors $n_x n_z$ équations aux $n_x n_z$ inconnues $U(i,j)$, ie :

$$(2.11) \quad \begin{aligned} & A \left[U(i, j) \right] \\ & - B \left[2 U(i+1, j) + U(i-1, j) \right] \\ & - C \left[U(i, j+1) + U(i, j-1) \right] = f(i, j) \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$A = \omega^2 k^2 + \frac{2}{z^2} + \frac{2}{h_x^2}$$

$$B = \frac{1}{z} h_x$$

$$C = \frac{1}{z} h_x$$

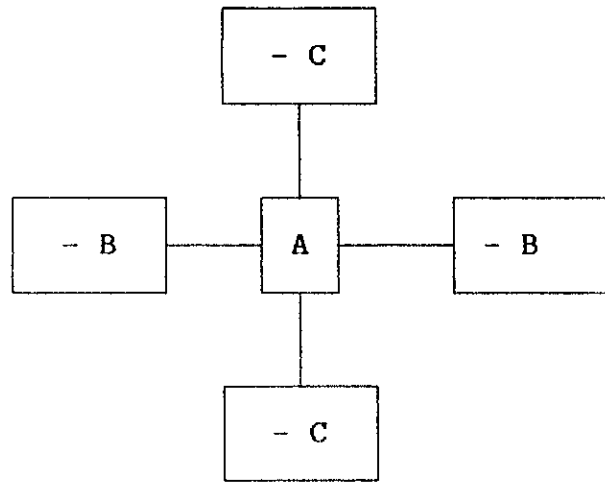


figure (2.7) :

Molécule de calcul pour l'approximation du second ordre de l'équation elliptique.

les conditions aux limites sur Γ_0 et Γ/Γ_0 sont prises en compte dans l'équation :

B. d'attaque : $U(0, j) = 0 \quad j = 1, n_z+1$

B. de fuite : $U(n_x+1, j) = 0 \quad j = 1, n_z+1$

(2.13)

Base de l'aube: $U(i, 0)$ donné $i = 1, n_x + 1$

Tête de l'aube: $U(i, n_z + 1) = U(i, n_z)$ $i = 1, n_x + 1$

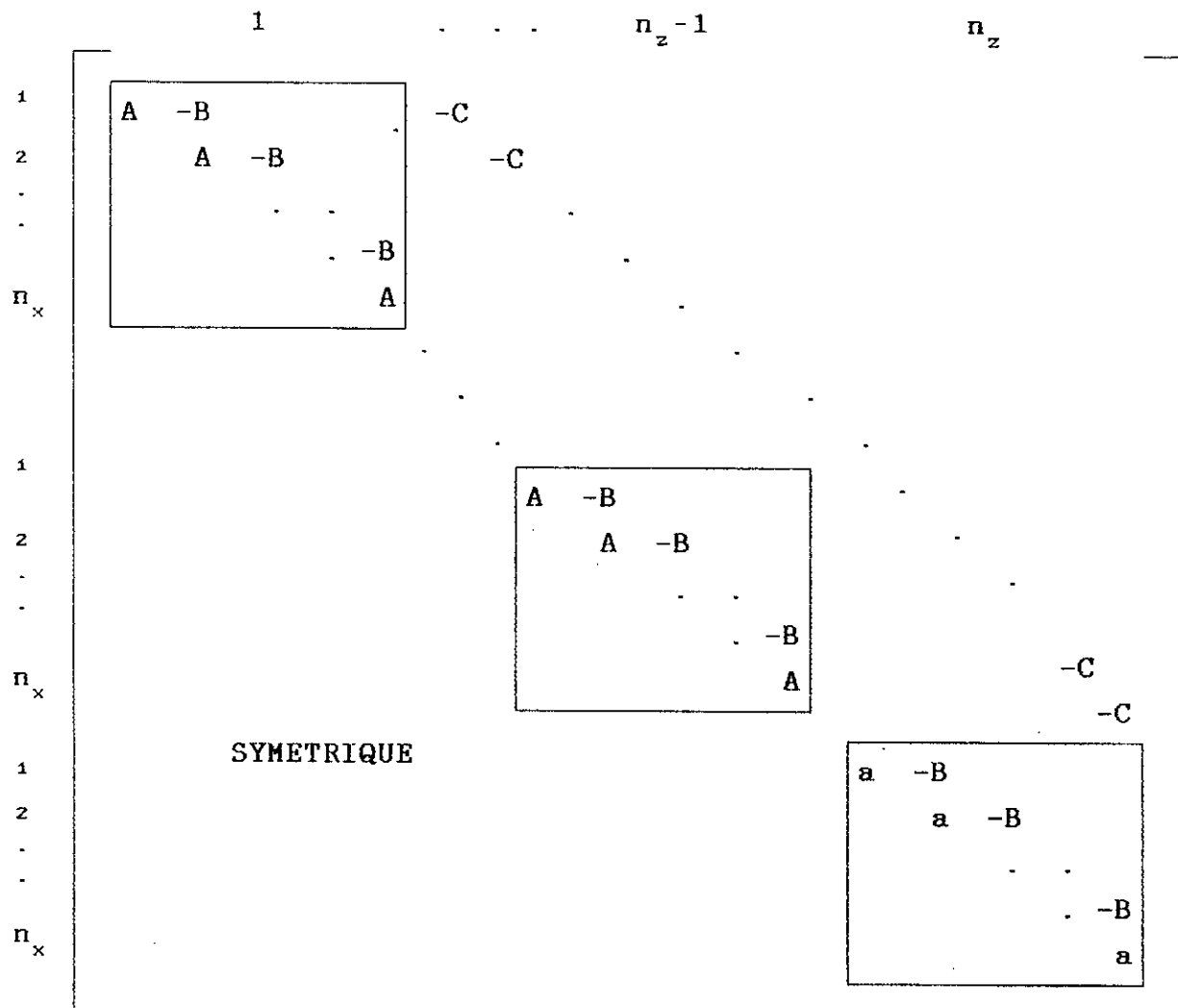
Le système (2.11) avec les C.L (2.13) s'écrit alors sous la forme :

$$(2.14) \quad [A] \{U\} = \{B\}$$

où $[A]$ est une matrice carrée de taille $n_x n_z$. La configuration ci-dessous concerne le classement des $U(i,j)$ et des $f(i,j)$ suivant les i croissants puis les j croissants:

$$(2.14) \quad \{U\} = \begin{bmatrix} U(1,1) \\ U(2,1) \\ \\ U(n_x,1) \\ \text{-----} \\ U(1,2) \\ U(2,2) \\ \\ U(n_x,2) \\ \text{-----} \\ \\ \text{-----} \\ U(1,n_z) \\ U(2,n_z) \\ \\ U(n_x,n_z) \end{bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{bmatrix} f(1,1) \\ f(2,1) \\ \\ f(n_x,1) \\ \text{-----} \\ f(1,2) \\ f(2,2) \\ \\ f(n_x,2) \\ \text{-----} \\ \\ \text{-----} \\ f(1,n_z) \\ f(2,n_z) \\ \\ f(n_x,n_z) \end{bmatrix}$$

alors la matrice [A] prend la forme ci-dessous. Cette matrice est tridiagonale par blocs, et elle est régulière. Le choix de la méthode de résolution dépend largement des propriétés de la matrice [A]. La taille de celle-ci est $(n_x n_z)(n_x n_z)$, ce qui la rend relativement grande pour valeurs assez petites de n_x et n_z , dans notre cas $n_x = 10, n_z = 20$, alors [A] est de taille (200,200). La matrice [A] est aussi une matrice bande ; tous les éléments non nuls s'étendent sur des 'diagonales' proche de la diagonale principale. Voici la forme de [A] :



où $a = A - C$.

Pour les éléments du vecteur $\{ B \}$, nous avons pour C.L. :

$$(2.16) \quad B(i,j) = f(i) + C U(i,0) \quad ; \quad i=1, n_x$$

$$B(i,j) = f(i) \quad ; \quad i=n_x+1, n_x n_z$$

Les méthodes numériques conçues pour la résolution de systèmes à matrices bandes exigent un nombre d'opérations arithmétiques proportionnel au produit de la taille de la matrice c-a-d $n_x n_z$ et de la largeur de bande ie n_x élevée au carré, ainsi la résolution de ce système exige $n_x^3 n_z$ opérations ou encore n_x^2 par point. Lorsque la géométrie de la frontière est complexe -ce qui n'est pas notre cas- ; on utilise des méthodes itératives.

2-4-2-2 DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis (M.E.F) est apparue dans les années 1950-1955 pour la résolution des problèmes posés dans la mécanique des milieux continus déformables. Depuis, cette méthode a été développée et utilisée non seulement pour la résolution des problèmes de mécanique mais aussi pour résoudre les problèmes aux limites généraux. Les problèmes traités par la M.E.F sont généralement formulés sur des domaines à géométrie complexe.

La M.E.F est basée sur l'utilisation de la "formulation variationnelle" ou la "formulation faible" du problème, elle est un cas particulier de la "méthode d'approximation variationnelle" encore appelée "méthode de RAYLEIGH-RITZ et/ou de GALERKINE".

Soit Ω un domaine de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma/\Gamma_0$ et soit f une fonction scalaire définie sur Ω . On pose le problème suivant : trouver U sur Ω tel que :

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad & \left. \begin{aligned}
 - \Delta U + \omega^2 k^2 U &= f && \text{sur } \Omega \\
 U &= \phi && \text{sur } \Gamma_0 \\
 \frac{\partial U}{\partial \eta} &= \varphi && \text{sur } \Gamma/\Gamma_0
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Une formulation faible ou variationnelle [Ref.6] sera de trouver U tel que :

$$(2.17) \quad \left\{ \frac{1}{2} a(U,U) - b(U) \right\} \text{ soit minimale, où}$$

$$(2.18) \quad a(U,V) = \int_{\Omega} \left[(\text{Grad}(U)\text{Grad}(V) + \omega^2 k^2 UV) \right] d\Omega$$

$$(2.19) \quad b(U) = \int_{\Omega} f U d\Omega + \int_{\Gamma/\Gamma_0} \varphi U d\Gamma$$

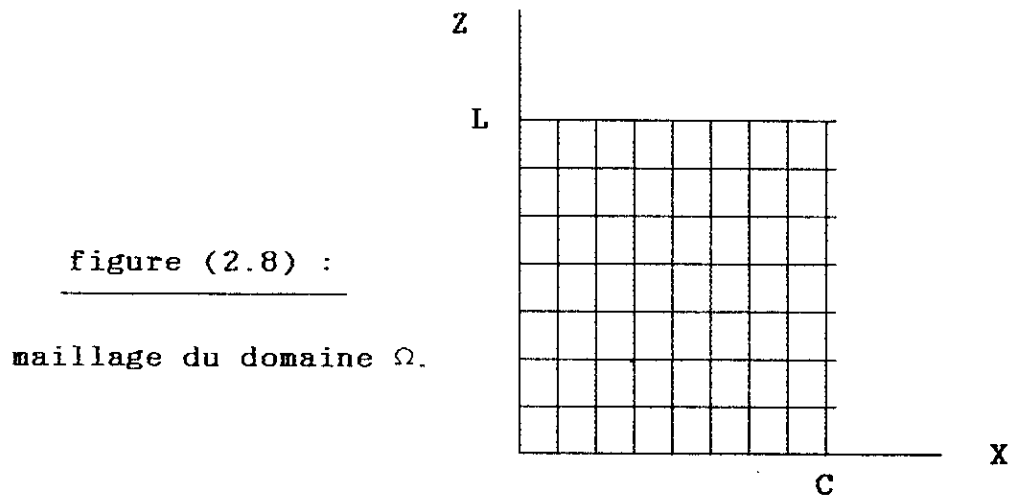
Le domaine Ω est discrétisé en éléments Ω_e , dont l'intersection se fait sur des points appelés noeuds et le problème (2.17) doit être résolu sur chaque sous-domaine Ω_e :

$$(2.20) \quad \min_{\Omega_e} \left\{ \frac{1}{2} a(U,U) - b(U) \right\} , \text{ où}$$

$$(2.21) \quad a(U, V) = \int_{\Omega_e} \left[(\text{Grad}(U)\text{Grad}(V) + \omega^2 k^2 UV) \right] d\Omega$$

$$(2.22) \quad b(U) = \int_{\Omega_e} f U d\Omega + \int_{\Gamma/\Gamma_0^e} \varphi U d\Gamma$$

Le problème est de trouver la solution de l'équation (2.7) sur les noeuds du maillage de Ω , tout en résolvant le problème équivalent (2.20) sur chaque élément.



Concernant notre domaine d'étude Ω qui est de géométrie assez simple, l'élément quadrilatéral (rectangulaire) à 4 noeuds sert à une bonne discrétisation.

Élément isoparamétrique quadrilatéral à 4 noeuds

La variable U solution de (2.7) doit être une fonction continue exprimée en fonction des variables nodales U_i sur l'élément, il s'agit évidemment d'une question d'interpolation :

$$(2.23.a) \quad U(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\zeta, \eta) \bar{U}_i$$

$$(2.23.b) \quad N_i(\zeta, \eta) = \frac{(\zeta_i + \zeta)(\eta_i + \eta)}{4}$$

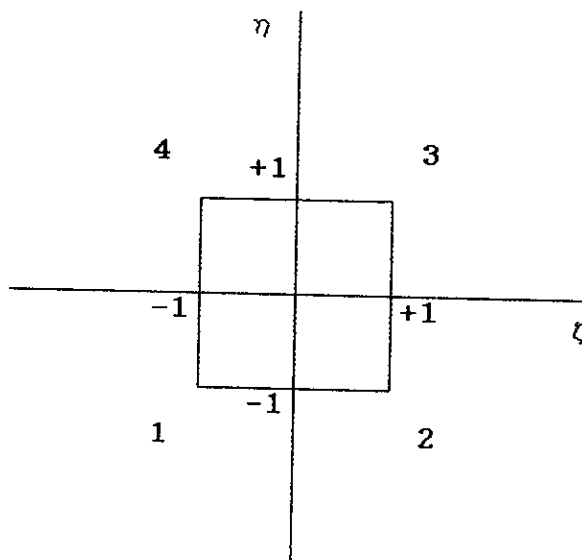


figure (2.9) :

élément isoparamétrique
quadrilatéral à 4 noeuds.

une transformation géométrique lie l'élément réel à l'élément de référence.

Le problème de minimisation de l'intégrale est transféré sur l'élément de référence :

$$(2.24) \quad \min_{\Omega_r} \left\{ \frac{1}{2} a(U, U) - b(U) \right\}, \text{ où}$$

$$(2.25) \quad a(U, V) = \int_{\Omega_r} \left[(\text{Grad}(U)\text{Grad}(V) + \omega^2 k^2 UV) \det(J) \right] d\Omega$$

$$(2.25) \quad b(U) = \int_{\Omega_r} f U \det(J) d\Omega + \int_{\Gamma/\Gamma_0^r} \varphi U J_s dS$$

avec $\det(J)$ déterminant de la matrice JACOBIENNE :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix}$$

et s abscisse ζ ou η d'un point de coordonnées x_s et z_s parcourant le contour de l'élément et :

$$J_s = \sqrt{x_s^2 + z_s^2}$$

Maintenant dans chacune des égalités (2.25) et (2.26), les fonctions U et V sont remplacées par leurs fonctions interpolatrices (2.23) . Le problème est alors de minimiser l'intégrale (2.24) par rapport aux variables nodales U_i par annulation de ses dérivées partielles selon U_i , et on aboutit pour chaque élément réel à un système d'équations algébriques linéaires.

$$(2.27) \quad \boxed{[A_e] \{U_e\} = \{B_e\}}$$

avec :

$$a_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[\text{Grad}(N_i(\zeta, \eta)) \text{Grad}(N_j(\zeta, \eta)) + \omega^2 k^2 N_i(\zeta, \eta) N_j(\zeta, \eta) \right] \det(j) d\zeta d\eta$$

(2.28)

$$b_i = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f N_i(\zeta, \eta) \det(j) d\zeta d\eta + \int_{\Gamma/\Gamma_0^r} \varphi N_i(\zeta, \eta) J_g dS$$

(2.29)

l'intégration sur chaque élément se fait numériquement.

La matrice $[A_e]$ est symétrique et de structure bande dépendante de la numérotation des noeuds dans le maillage. Il y a autant de système linéaires que d'éléments. Le système global liant par des équations tous les noeuds doit regrouper tous ces systèmes élémentaires par l'opération d'assemblage (+) des matrices élémentaires $[A_e]$ et des vecteurs élémentaires $\{B_e\}$:

$$(2.30) \quad \boxed{\quad} \quad [A_g] \{U_g\} = \{B_g\}$$

avec

$$(2.31) \quad [A_g] = \sum_e [A_e]$$

$$(2.32) \quad \{B_g\} = \sum_e \{B_e\}$$

Ce système subit ensuite une "réduction c-à-d l'introduction des C.L sur l'inconnue U ou sa dérivée (C.L. de DIRICHLET ou de NEWMAN), pour que le nombre d'équations soit égal au nombre d'inconnues :

$$(2.33) \quad \boxed{\quad} \quad [A_r] \{U_r\} = \{B_r\}$$

la résolution de ce dernier système se fait directement ou

itérativement.

Enfin nous donnons l'expression du jacobien relatif à l'élément isoparamétrique que nous avons exposé :

$$(2.34) \quad [J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\zeta) & -(1+\zeta) & (1+\zeta) & (1-\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ X_4 & Y_4 \end{bmatrix}$$

et

$$\det(J) = A_0 + A_1 \zeta + A_2 \eta$$

$$(2.35) \quad \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{8} \left[(Y_4 - Y_2)(X_3 - X_1) - (Y_3 - Y_1)(X_4 - X_2) \right] \\ A_1 &= \frac{1}{8} \left[(Y_3 - Y_4)(X_2 - X_1) - (Y_2 - Y_1)(X_3 - X_4) \right] \\ A_2 &= \frac{1}{8} \left[(Y_4 - Y_1)(X_3 - X_2) - (Y_3 - Y_2)(X_4 - X_1) \right] \end{aligned}$$

2-5 PROCEDURE DE RESOLUTION

Parmi toutes les solutions des équations (2.5.a.b et c) nous devons trouver celles qui répondent à la condition de glissement du fluide autours du profil reliant les deux composantes u et v uniquement. Ecrivons :

(2.5.a)

$$-\Delta_z U_k + \omega^2 k^2 U_k = f_k^1$$

(2.5.b)

$$-\Delta_z V_k + \omega^2 k^2 V_k = f_k^2$$

(2.5.c)

$$-\Delta_z W_k + \omega^2 k^2 W_k = f_k^3$$

$$V_k = P'(x) U_k(x, z)$$

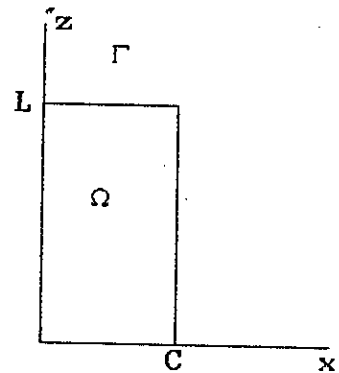


figure (2.11) :

domaine de résolution.

Etant donné que la solution se détermine exactement ou approximativement de façon unique une fois fixées les C.L entourant le domaine de résolution. Alors quelles conditions aux limites faudrait-il choisir sur U_k et V_k pour que le fluide puisse glisser sur le profil partout dans le domaine ?

Il est clair que les vitesses harmoniques U_k et V_k imposées sur toute la frontière Γ de Ω doivent nécessairement satisfaire la relation de glissement . Mais ceci est-il suffisant?

Pour tenter de répondre à cette question, supposons que la propriété de glissement n'est pas vérifiée sur tout Ω , cette propriété doit alors être transmise aux limites et ceci contredit l'hypothèse. D'un autre côté, il n'est pas possible que la condition de glissement soit vérifiée sur une partie seulement de Ω sachant qu'elle est vérifiée sur le contour Γ entièrement, car sinon les solutions U_k et V_k ne seraient plus des fonctions continues.

En conclusion de ce raisonnement, il nous suffit d'appliquer des C.L vérifiant l'équation de glissement sur l'aube pour la vérifier en chaque noeud.

C'est de la façon suivante que nous avons procédé en vue de la résolution du problème direct :

- 1/ Résolution du problème de l'écoulement moyen \bar{U}_0 ,
Calcul de V_0 par la condition de glissement,
Résolution du problème en W_0 , équations (2.6)
- 2/ Calcul de la divergence et du rotationnel représenté par les harmoniques q_k , r_k^1 , r_k^2 et r_k^3 par les formules (1.23).
- 3/ Calcul des seconds membres des équations elliptiques (2.5) définissant les harmoniques de vitesse.
- 4/ Résolution du problème de l'harmonique U_k ,
Calcul de V_k par la condition de glissement,
Résolution du problème en W_k , équations (2.5)
- 5/ Superposition des k harmoniques à l'écoulement moyen à l'aide des formules similaires à l'égalité (1.7).

Le travail est fait sur chaque surface supérieure et inférieure de l'aube, le nombre d'harmoniques superposées à l'écoulement moyen est $k=3$ et la discrétisation est réalisée par l'approximation des équations (2.5) et (2.6) par différences finies.

2-6 MISE EN OEUVRE NUMERIQUE

Sur ordinateur nous avons appliqué la procédure de résolution des équations du modèle que nous avons conçu, en vue de retrouver la répartition dans l'espace de la vitesse sur un profil de géométrie connue.

La grille étudiée comprend des aubes dont le profil est celui qui a été présenté par H.MITON dans son travail à deux dimensions, nous avons pris comme pas t une période en radians pour simplifier les calculs de façon similaire à H.MITON.

Nous avons opté pour l'utilisation des différences

finies- pour des raisons de rapidité - comme outil de résolution des E.D.P.

Le travail a été divisé en plusieurs tâches pour essayer d'une part de surmonter l'impossibilité de disposer d'un espace mémoire relativement important du fait qu'une grande partie de nos variables d'ailleurs toutes sauf l'écoulement moyen, le squelette et l'épaisseur sont des nombres complexes, une quantité complexe est un couple de deux réels. D'autre part cette organisation du travail est efficace pour localiser les erreurs de programmation.

Le travail est fait aussi bien pour l'extrados que pour l'intrados.

1ère étape: Programme MAIL2.FOR

Le profil de la grille étudiée est lu comme donnée, et le maillage du domaine se fait suite à un choix du nombre de noeuds suivant chaque direction. Ce maillage réalisé est régulier : les deux pas sont constants. En chaque noeud doivent être calculées les caractéristiques géométriques du profil c-à-d squelette et épaisseur, ainsi que leurs dérivées droites par rapport à x . Il s'agit là d'interpoler les profils P_e et P_i définis sur des points disposés de façon irrégulière pour bien représenter l'aube.

En premier lieu nous avons utilisé l'interpolation polynomiale de LAGRANGE, celle-ci a montré qu'elle est limitée pour certaines applications, en effet en s'approchant du B.A et du B.F, le profil calculé prenait des valeurs très éloignées de ce qui était défini. Nous avons alors appliqué la méthode des d'interpolation SPLINES cubique qui est exposée en annexe C, cette méthode nous sert aussi interpoler les dérivées du profil. Subroutines SPLO.FOR, SPL1.FOR et SPL2.FOR.

2ème étape: Programme FOU.FOR

Conformément aux C.L choisies, cette partie effectuée le

calcul des coefficients de FOURRIER des vitesses sur chaque position x de la base de l'aube. Ceux-ci sont calculés à l'aide des intégrales de FOURRIER présentées en annexe B et approximées par la formule de SIMPSON pour l'intégration numérique.

3ème étape: Programme ECOO.FOR

Ce programme exécute le calcul de l'écoulement moyen qui est la solution du problème de LAPLACE (2.6). Les matrices des systèmes linéaires d'équations sont calculées en respectant les C.L imposées. La résolution se fait par la méthode directe de GAUSS; Subroutine GAUSSTRD adaptée aux matrices bandes ou tridiagonales par blocs.

4ème étape: Programmes DIVROTE.FOR, DIVROTI.FOR

On calcule pour chaque noeud, sur chacune des surfaces supérieure et inférieure et en nombres complexes les harmoniques de la divergence Q et des trois rotationnels R en fonction de la géométrie (fonction T) et des dérivées partielles de la vitesse harmoniques zéro. Ces dérivations numériques sont effectuées à l'aide de la méthode SPLINES que nous avons adapté aux fonctions bidimensionnelles à deux variables. Dans cette approximation nous avons considéré une des variables comme paramètre pour devenir une fonction à une seule variable, en d'autres termes la surface $f(x,z)$ est approximée par plusieurs courbes $f(x)$ et $f(z)$.

5ème étape: Programmes DEPE.FOR, DEPI.FOR

Cette partie a pour tâche d'évaluer les dérivées partielles par rapport à x et à z des harmoniques k de Q et de R . A cause de l'écriture en nombres complexes, ces dérivations ont nécessité un espace mémoire considérable. Pour chaque partie réelle et imaginaire de ces divergences et rotationnels projetés on se ramène à l'utilisation de SPLINES.

6ème étape: Programmes SME.FOR, SMI.FOR

Les seconds membres des équations elliptiques (2.5) définissant les harmoniques sont exprimés en fonction des coefficients de FOURRIER de Q et R dérivés partiellement. Ils sont représentés par des nombres complexes pour chaque noeud du domaine.

7ème étape: Programmes ECOKE.FOR, ECOKI.FOR

On résoud les équations donnant les vitesses harmoniques par différences finies, les C.L étant semblables à celles imposées dans le calcul de l'écoulement moyen, les matrices mises en jeu sont identiques à celles formées dans ECOO.FOR de la première étape et la méthode de résolution des systèmes linéaires est la même.

8ème étape: Programmes ECOFE.FOR, ECOFI.FOR

Dans la dernière partie de ce travail, on superpose les vitesses harmoniques calculées par ECOKE.FOR et ECOKI.FOR à l'aide des formules (1.7) à l'écoulement moyen, et ce pour chaque noeud (i,j) et la position $P_e(x)$ et $P_i(x)$ sur l'aube.

2-8 CONDITIONS AUX LIMITES APPLIQUEES

Puisque selon notre procédure de résolution, il n'est question que de résoudre des problèmes en u et en v, nous avons appliqué les conditions aux limites ci-dessous :

- Sur le bord d'attaque et le bord de fuite à $x=0$ et à $x=c$ et pour $0 < z < 0$: $u = 0$ et $w = 0$.
- Sur la base de l'aube à $z=0$ et le long de la corde : $0 < x < C$, on

s'est mis dans l'esprit d'un écoulement bidimensionnel. Comme dans une roue de turbomachine l'aube est encastrée à sa base, donc la vitesse "radiale" suivant z doit s'annuler ie $w = 0$. Nous avons pensé à imposer une répartition bidimensionnelle de vitesse qu'il faudrait qu'elle soit représentée par les coefficients de FOURRIER, ceux-ci ne peuvent être calculés que si on connaissait l'évolution de cette vitesse en fonction de y (formules (B.2,3 et 4) de l'annexe C), c-à-d utiliser les résultats du modèle direct bidimensionnel dont nous ne disposons pas. C'est pour cela que nous avons pris $u = cste$.

- Sur la tête de l'aube $z=L$ et pour $0 < x < C$ nous avons opté pour une dérivée normale c-à-d par rapport à z de u et w nulle.

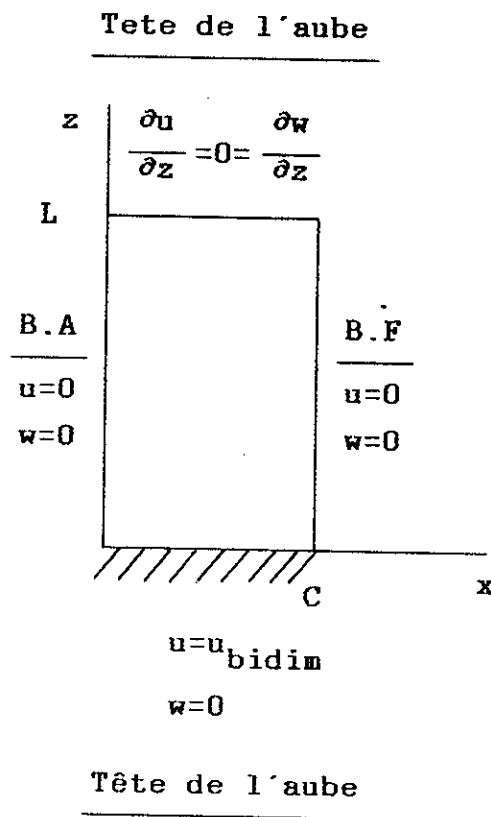
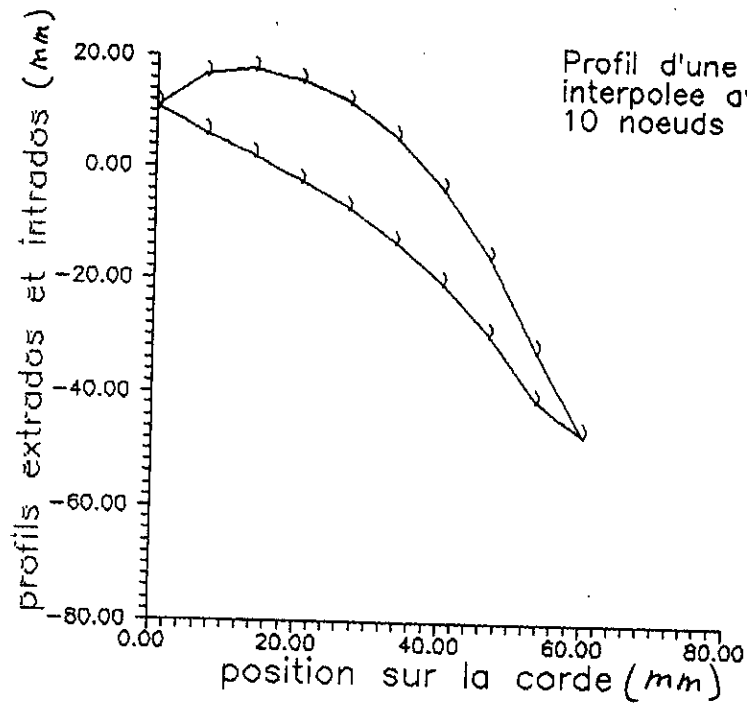
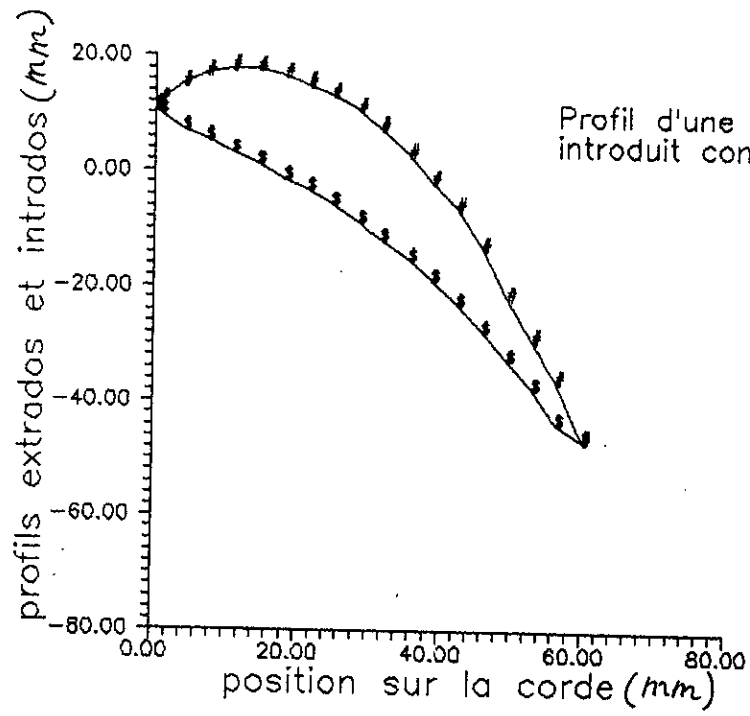
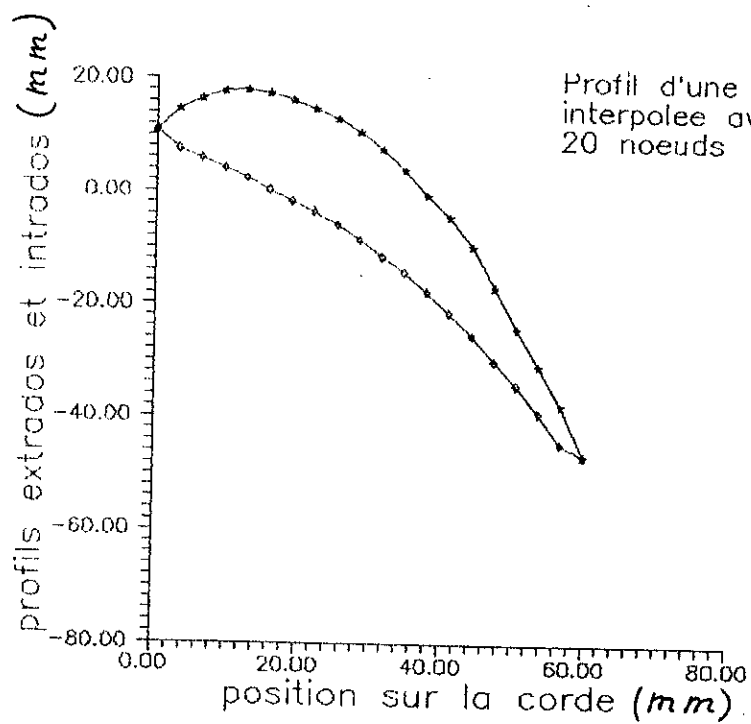
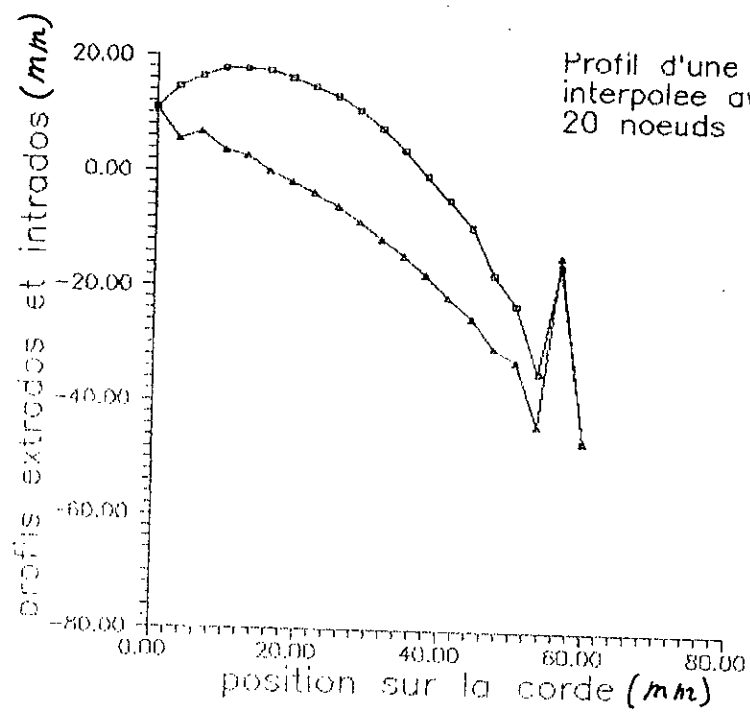
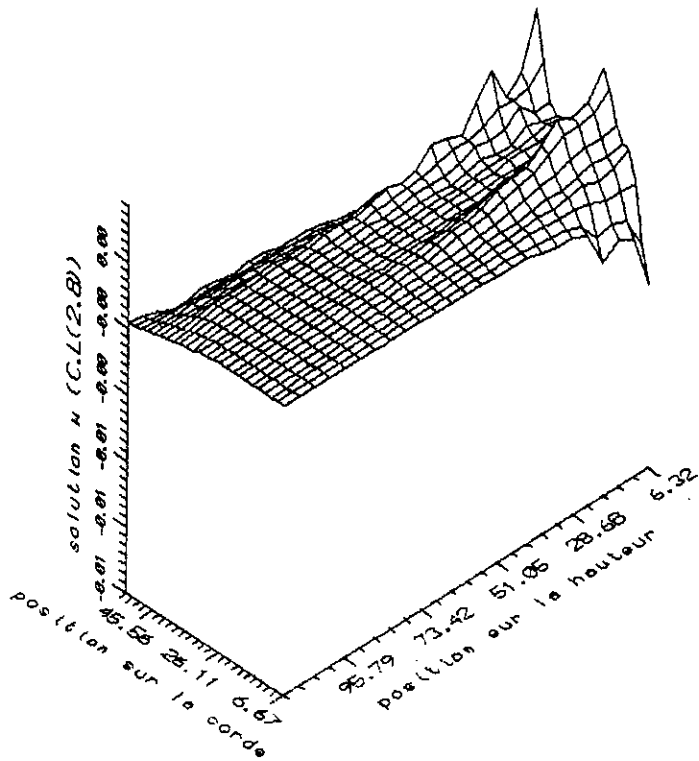
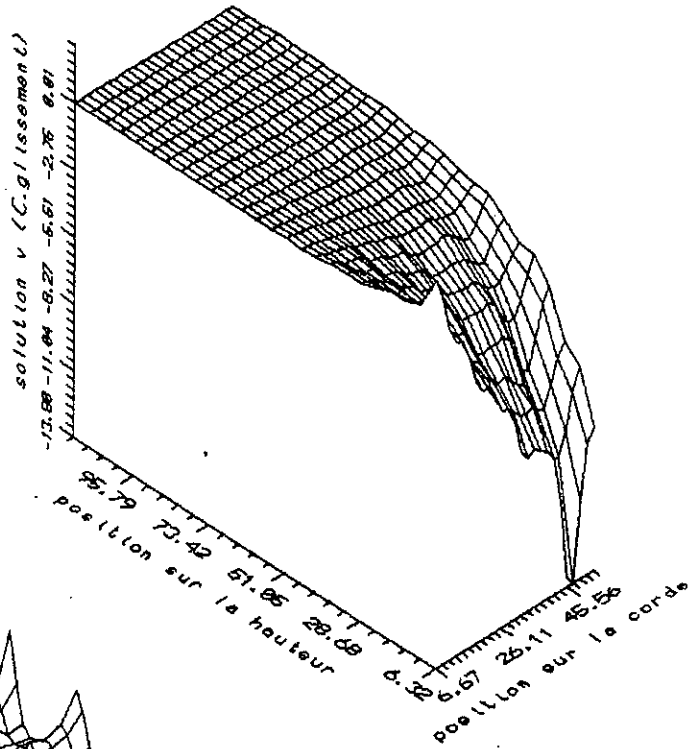
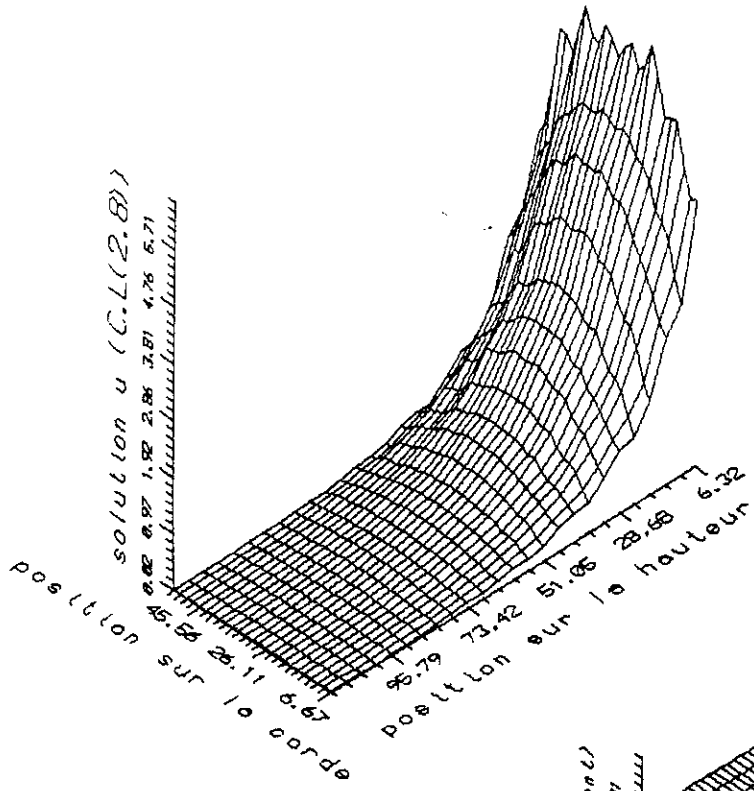


figure (2.12) : C.L utilisées.







CHAPITRE TROIS

PROBLEME INVERSE RECHERCHE DE LA FORME GEOMETRIQUE DE L'AUBE

Le problème inverse est une question de dimensionnement du prototype répondant à une certaine spécification. Il y a lieu dans notre étude de tirer la forme géométrique d'une aube élément d'une grille traversée par un fluide avec telle ou telle répartition tridimensionnelle de vitesse sur le profil.

Jusqu'ici nous avons lié la géométrie de l'obstacle à la répartition de vitesse par des équations aux dérivées partielles qui doivent être associées à des conditions aux limites :

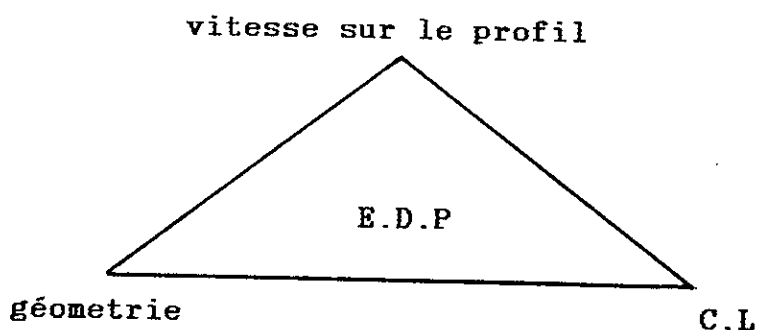


figure (2.3) : relation entre les différentes composantes du problème.

en fait cette relation concerne les vitesses harmoniques.

Pour inverser le problème il faut localiser les paramètres géométriques : squelette et épaisseur dans les équations établies.

Le système (2.5) que nous avons résolu lors du traitement direct du problème présente des seconds membres qui s'expriment en fonction des dérivées des harmoniques de la divergence Q et du rotationnel R , qui à leur tour s'écrivent à l'aide des dérivées droites par rapport à x de l'exponentiel du squelette $s(x)$ et

d'une combinaison de fonctions sinusoidales du squelette $\varepsilon(x)$: formules (1.23). IL est pour cela et à ce niveau à priori trop difficile de poser un schéma numérique inverse recherchant la fonction squelette.

Par contre si on considère les quatre équations du système initial (1.10), nous pouvons constater l'absence des dérivées de ces fonctions ; elles interviennent directement, nous avons donc proposé le processus qui commence par calculer les divergences et les rotationnels projetés en utilisant leurs expressions de définition et en passant à la représentation en séries trigonométriques, ensuite la fonction \overline{T} caractérisant le profil est évaluée. Rappelons toutefois que l'écoulement moyen intervient par ses gradients dans q_k , r_k^1 , r_k^2 et r_k^3 . D'un autre coté il est à rappeler que dans le mode direct nous avons écrit les équations de type LAPLACE vérifiées par l'écoulement moyen (équations (26)) U_0 et W_0 sont donc indépendants de la géométrie, elles sont conditionnées par des C.L, et V_0 par contre a été calculée par la condition de glissement.

Pour chaque indice k et sur chaque noeud du maillage nous avons fait les démarches qui suivante :

- 1- Calcul des dérivées partielles des vitesses harmoniques.
- 2- Calcul des coefficients q_k, r_k^1, r_k^2 et r_k^3 de FOURRIER de la divergence Q et du rotationnel R de la vitesse q .
- 3- Dérivation des composantes de la vitesse harmonique zéro par rapport à x et à z .
- 4- A l'aide de la fonction \overline{T} trouver par chacune des quatre équations (1.10) le squelette local.

Vue la complexité de nos équations, dans cette procédure on a

utilisé comme données les trois composants de la vitesse ainsi que la loi d'épaisseur $\varepsilon(x)$, alors que dans un problème inverse la géométrie doit corriger la vitesse.

En bidimensionnel le mode inverse a été lancé sur la base de la maîtrise de la solution analytique explicite donnée en annexe D, qui est le point de départ de tout le modèle qui a montré sa fiabilité dans la conception aérodynamique.

A trois dimensions les équations peuvent subir plusieurs manipulations pour la recherche du profil.

CONCLUSION

Dans ce travail nous avons abordé un problème encore traité comme sujet de recherche, il est délicat dans la mesure où il lie des antités aérodynamiques ou énergétiques à des paramètres en relation directe avec la construction des turbomachines.

J'estime que j'ai tiré un grand bénéfice de cette expérience puisqu'entre autre, j'ai eu à traiter une formulation mathématique et des applications numériques, toutes importantes dans les problèmes d'ingénieurs.

Il est clair que ce travail ne pourrait être en aucun cas parfait, en vue de le compléter, je tiens à suggérer les propositions suivantes pour une éventuelle continuation de ces efforts.

En premier lieu, je pense à l'amélioration du travail effectué par l'amélioration des approximations utilisées, par exemple la substitution de la méthode SPLINES par une technique d'interpolation à deux variables. Un raffinement du maillage serait intéressant et également on pourrait effectuer une étude de convergence.

IL serait considérablement important de donner un traitement numérique particulier aux régions proches des bords d'attaque et de fuite. Donner aux C.L une grande variété est une autre proposition.

Je recommande d'un autre côté, une mise en oeuvre sur calculateur de la résolution par la méthode des éléments finis que nous avons exposé de manière suffisante dans le deuxième chapitre de ce mémoire, et de comparer les résultats à ceux des différences finies.

Lancer ce travail en mode inverse était notre objectif, j'attends de ceux qui continueront nos efforts de proposer dans ce sens des schémas numériques directs ou itératifs pour retrouver la lois du squelette pour une répartition de vitesse donnée, par exemple vitesse-profil jusqu'à convergence.

ANNEXES

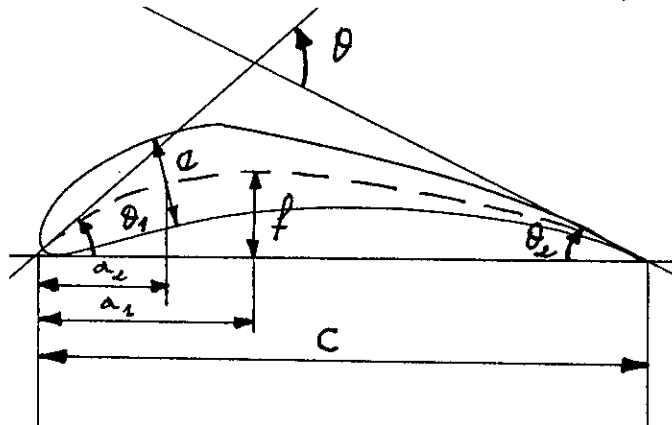
ANNEXE ADEFINITIONS DES AUBES ET DES GRILLES D'AUBESA-0 GENERALITES

On sait que le fonctionnement des turbomachines est fondé sur des déviations tangentielles du flux, tant par le stator que par le rotor, et que le rôle des grilles d'aubes et de réaliser ces déviations.

A-1 DEFINITIONS : AUBES ET GRILLES D'AUBES

Les aubes sont des obstacles plongés dans l'écoulement, on appelle grille d'aubes un ensemble fixe ou mobile d'obstacles généralement profilés, deduits les uns des autres par déplacement géométrique périodique, ils sont utilisés pour guider l'écoulement du fluide et pour échanger avec lui des efforts mécaniques. Pour les turbomachines, la géométrie de révolution impose que ce déplacement soit une rotation d'angle de $2\pi/z$ autour de l'axe de symétrie, z étant le nombre d'aubes constituant la grille circulaire réalisée .

A-1-1 DEFINITIONS GEOMETRIQUES



figure(A.1)

A-1-2 DEFINITIONS LINEAIRES

Profil :

On appelle profil la section plane de l'aube par un plan perpendiculaire à sa ligne moyenne.

Squelette :

Le squelette d'un profil est la ligne médiane entre l'extrados et l'intrados. Pratiquement sur la plus grande partie de sa longueur, cette ligne se confond avec le centre des cercles inscrits.

Corde :

C'est le segment rectilligne joignant les extrémités du squelette orienté dans le sens de l'écoulement. Elle peut servir de référence aux mesures d'angles, ou être remplacée pour cela par une corde de référence qui est souvent la bi-tangente au profil lorsqu'elle existe.

Flèche :

La flèche du profil est l'ordonnée maximale du squelette par rapport à sa corde. En général elle s'exprime en pourcentage de cette corde ; on repère l'abscisse de cette flèche projetée sur la corde à partir du bord d'attaque, elle s'exprime aussi en pourcentage de la corde.

Epaisseur maximale :

Exprimée elle aussi en général en pourcentage, elle est notée a_2 .

A-1-3 DEFINITIONS ANGULAIRES

On définit les angles θ_1 , θ_2 des tangentes au squelette avec la corde ainsi que la déviation angulaire du squelette égale à leur somme : $\theta = \theta_1 + \theta_2$

A-2 DEFINITIONS GEOMETRIQUES CONCERNANT LES GRILLES D'AUBES

A-2-1 Differentes formes de grilles d'aubes

Les aubes assemblées sont identiques et déduites les unes des autres par des déplacements géométriques égaux. Si ces déplacements sont des translations "t" toutes égales, la grille est dite plane parallèle, et t est appelé le pas de cette grille les aubes sont alors cylindriques, parallèles entre elles et comprises entre deux plans, dont celui d'amont est appelé front de grille.

Lorsque les déplacements sont des rotations égales de pas angulaire $t = 2\pi/z$ (avec z nombre d'aubes par tour) et d'axes sensiblement parallèles aux génératrices des aubes, la grille est dite cylindrique : les z aubes sont sensiblement parallèles et comprises entre deux cylindres dont l'un est le front de grille ;

elles sont elles même cylindriques.

Si enfin les déplacements sont des rotations égales, de pas angulaire $t = 2\pi/z$, et d'axe sensiblement perpendiculaire aux génératrices des aubes, la grille est dite plane radiante. Les z aubes sont en éventail et sensiblement comprises entre deux plans dont l'un est le front de grille. Elles peuvent être cylindriques, mais elles sont souvent à profil évolutif.

Il existe un cas intermédiaire, celui des grilles radiantés coniques dont les aubes sont comprises entre deux cônes.

Enfin nous citons les grilles toriques qui échappent aux définitions ci-dessus en ce que les aubes sont imbriquées et ne sont pas identiques les unes aux autres.

Quant aux aubes elles-mêmes, elles peuvent être à profil constant (aubes cylindriques), où à profil évolutif (aubes coniques où vrillée).

ANNEXE B

SERIES DE FOURRIER

Si une fonction f réelle continue est périodique de période T , elle peut être représentée par la somme suivante :

$$(B.1) \quad f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k \cos \omega k x + b_k \sin \omega k x$$

où a_k, b_k sont les coefficients donnés par les formules de FOURRIER :

$$(B.2) \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx$$

$$(B.3) \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(\omega k x) dx$$

$$(B.4) \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(\omega k x) dx$$

avec $\omega = \frac{2 \pi}{T}$

Si la fonction f est monotone par tranches et bornée sur une période, la série de FOURRIER converge en tous les points. Aux points de discontinuité la somme est égale à la moyenne arithmétique des limites de la fonction à gauche et à droite.

Sous la forme complexe suivante on écrit :

$$(B.5) \quad \overline{f}(x) = \sum_{k \geq 0} f_k \exp(i\omega_k x)$$

où l'on a posé :

$$(B.6) \quad f_k = a_k - ib_k$$

et la fonction f correspond à la partie réelle de la somme (C.4) :

$$(B.7) \quad f(x) = \text{Réal}(\overline{f}(x))$$

Les séries de FOURRIER, en particulier en représentation complexe ont trouvé une large application dans les différentes branches mathématiques. On utilise particulièrement avec succès la représentation de FOURRIER des fonctions continues en physique-mathématique et dans ces applications a des problèmes concrets de mécanique et de physique.

ANNEXE C

INTERPOLATION SPLINES CUBIQUE

Parmis les inconvénients des interpolations de LAGRANGE et d'HERMITE on peut citer leur difficulté du point de vue calcul, elles sont imprécises si le nombre de points est grand ; il ya discontinuité de la dérivée dans les points de jonction. Elles sont utiles pour dériver des méthodes numériques (résolutions des équations différentielles ordinaires ,...), mais les courbures qu'elles produisent sont en général non satisfesantes.

On définit une courbe d'interpolation SPLINES par les critères suivants :

- 1- La courbure est cubique, les coefficients du polynome sont différents dans chaque intervalle (X_i, X_{i+1}) .
- 2- La courbe passe par les points donnés $(X_i, Y_i), i=1, n$.
- 3- Les première et seconde dérivées sont continues aux points d'abscisses X_i . Le dernier point nécessite un traitement spécial qu'on présentera ci-dessous.

La seconde dérivée s'écrit en l'interpolant avec LAGRANGE d'ordre un pour chaque deux noeuds X_i, X_{i+1} :

$$(C.1) \quad f''_i(X) = f''(X_{i+1}) \frac{X_{i+1} - X}{X_{i+1} - X_i} + f''(X_i) \frac{X - X_{i+1}}{X_{i+1} - X_i}$$

$$X_i \leq X \leq X_{i+1}$$

Par intégration deux fois en prenant les conditions aux limites suivantes:

$$f_i(X_i) = Y_i, \quad f_i(X_{i+1}) = Y_{i+1}$$

après avoir effectué ces opérations on trouve :

$$\begin{aligned}
 f_i(X) &= f''(X_i) \frac{(X_{i+1} - X)^3}{6 \Delta_i} + f''(X_{i+1}) \frac{(X - X_i)^3}{6 \Delta_i} \\
 &+ \left[\frac{Y_i}{\Delta_i} - \frac{\Delta_{i+1}}{6} f''(X_i) \right] (X_{i+1} - X) \\
 &+ \left[\frac{Y_{i+1}}{\Delta_i} - \frac{\Delta_i}{6} f''(X_{i+1}) \right] (X - X_i)
 \end{aligned}
 \tag{C.2}$$

avec $\Delta_i = X_{i+1} - X_i$

Si on peut trouver les dérivées secondes $f''(X_i)$, la formule serait complète. Nous avons satisfait toutes les conditions énumérées ci-dessus, exceptée la condition de la continuité de la première dérivée f' , nous devons donc l'utiliser pour trouver les $f''(X_i)$.

La continuité est établie par l'établissement des trois conditions suivantes:

- 1-Différencier $f_i(X)$ et faire $X = X_i$ et évaluer la dérivée de f du côté gauche de l'intervalle i .
- 2-Différencier $f_{i+1}(X)$ et faire $X = X_{i+1}$ et évaluer la dérivée de f du côté droit de l'intervalle $i+1$.
- 3-Egaliser les deux résultats obtenus.

Le resultat de ces operations est l'équation suivante:

$$\frac{\Delta_{i-1}}{6} f''(X_{i-1}) + \frac{\Delta_{i-1} + \Delta_i}{6} f''(X_i) + \frac{\Delta_i}{6} f''(X_{i+1}) =$$

(C.3)

$$\frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta_i} - \frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta_{i-1}}$$

C'est un système d'équations algébriques pour $f''(X_i)$, il est tridiagonal car la i ème équation regroupe seulement: $f''(X_{i-1})$, $f''(X_i)$ et $f''(X_{i+1})$, il est facilement résolvable.

Nous avons n inconnues et $n-2$ équations, car pour $i=1$ et $i=n$ on ne peut pas appliquer la continuité de f' . Ceci demande quelques suppositions supplémentaires aux limites de l'intervalle d'étude. On pourrait supposer par exemple que la dérivée seconde s'annule aux bornes c-à-d que la fonction devient localement parabolique.

ANNEXE D

ÉCOULEMENT DANS UNE GRILLE D'AUBES

PROBLÈME À DEUX DIMENSIONS

Dans cette partie on présente les équations du modèle à deux dimensions établit par H. MITON :

D-1 EQUATIONS DU MOUVEMENT

L'écoulement est bidimensionnel dans la veine du chapitre un :

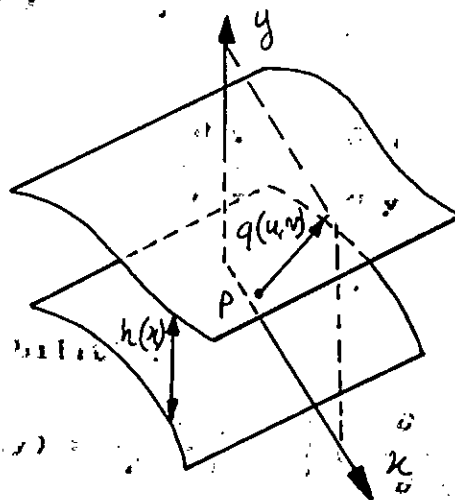


figure (D.1) : écoulement bidimensionnel dans une veine.

la grille de... annelle...

$$u(x, y) = \sum q_i(x) \cos(n_i y)$$

$$(D.5) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{d U_k}{d x} + i\omega k V_k(x) + U_k(x)\Omega'(x) = q_k(x) + f_k(x) \\ \frac{d V_k}{d x} - i\omega k U_k(x) = r_k(x) \end{array} \right.$$

écoulement moyen :

$$(D.6) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{d U_o}{d x} + U_o(x)\Omega'(x) = q_o(x) + f_o(x) \\ \frac{d V_o}{d x} = r_o(x) \end{array} \right.$$

On néglige la contraction de veine et on considère que le fluide incompressible ($F=0$), la divergence et le rotationnel sont modélisés comme dans le chapitre un :

$$(D.7) \quad q_k = \left[\frac{d U_o}{d x} \right] \frac{t_k(\varepsilon)}{t_o(\varepsilon)} \exp(-i\omega k s(x))$$

$$(D.8) \quad r_k = \left[\frac{d V_o}{d x} \right] \frac{t_k(\varepsilon)}{t_o(\varepsilon)} \exp(-i\omega k s(x))$$

on aboutit enfin aux expressions des vitesses :

$$u(x,y) = U_0(-c/2) - \int_{-c/2}^{+c/2} \frac{d U_0}{d t} C_u(x,y,t) dt - \int_{-c/2}^{+c/2} \frac{d U_0}{d t} C_v(x,y,t) dt$$

(D.9)

$$v(x,y) = V_0(-c/2) - \int_{-c/2}^{+c/2} \frac{d V_0}{d t} C_u(x,y,t) dt - \int_{-c/2}^{+c/2} \frac{d U_0}{d t} C_v(x,y,t) dt$$

(D.10)

où

$$C_u(x,y,t) = \delta(x,t) C_1(x,y,t) - 1/2$$

$$C_v(x,y,t) = C_2(x,y,t)$$

et

$$C_1(x,y,t) = 1/2 + \sum_{k \geq 1} E_k(\varepsilon(t)) \exp(\omega_k |t-x|) \cos(\omega_k(y-s(t)))$$

$$C_2(x,y,t) = 1/2 + \sum_{k \geq 1} E_k(\varepsilon(t)) \exp(\omega_k |t-x|) \sin(\omega_k(y-s(t)))$$

et

$$E_k(x) = \frac{3}{4 \varepsilon^2 \pi^2 k^2} \left[\frac{\sin(\omega_k \varepsilon)}{\omega_k \varepsilon} - \cos(\omega_k \varepsilon) \right]$$

REFERENCES

REFERENCES

- [1] H. MITON.
Proprieties of a space wise periodic flow.
Application to flow computation design for blade cascades.
Institut de Mécanique des Fluides de Marseille, 1986.
- [2] H. MITON.
Etude théorique et expérimentale de problèmes aérodynamiques
concernant les compresseurs transsoniques.
Université d'Aix Marseille II, 1978.
- [3] B. MAHFOUD, M. AIT-TALEB.
Couplage, calcul de couche limite - méthode inverse.
Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, 1992.
- [4] M. A. GUELLATI.
Calcul des profils d'aubages par la méthode inverse.
Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, 1991.
- [5] J. H. FERZIGER.
Numerical methods for engineering application.
A Wiley-Interscience Publication, 1981.
- [6] J. L. LIONS.
Optimal control of distributed parameters systems.
Springer 1969.
- [7] V. BOISSON, B. GAY, M. GOTTELLAND.
Differences finies. Quelques applications en mécanique des
fluides.
Ecole Centrale de Lyon.
- [8] J. RAPPAZ.
Méthodes d'éléments finis pour les équations linéaires

- élliptiques du second ordre.
Cahiers Mathématiques de l'Ecole Polytechnique Fédérale de
Lausanne, 1988.
- [9] H. MITON, H. SANKALE.
Projet et analyse aérodynamique des turbomachines par
méthodes numériques.
Ecole Centrale de Lyon, 1984.
- [10] G. MEAUZE.
Méthode de calcul aérodynamique inverse pseudo-
instationnaire.
La Recherche Aérospatiale, 1980.
- [11] J. RENAUX.
Méthode de définition des profils par optimisation
numérique.
La Recherche Aérospatiale, 1984.
- [12] G. DHATT, G. TOUZOT.
Une présentation de la méthode des éléments finis.
Collection de l'Université de Compiègne, 1984.
- [13] R. BIDARD, J. BONNIN
Energétique et turbomachines.
Collection de la direction des études et recherches
d'électricité en France, 1979.
- [14] N. PISKOUNOV.
Calcul différentiel et intégral.
Edition MIR MOSKOU, 1988.
- [15] R. DAUTRAY, J. L. LIONS.
Analyse mathématique et calcul numérique.
Commissariat à l'énergie atomique.
Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires.

Edition MASSON, 1987.

TABLE DES MATIERES

- AVANT-PROPOS	1
- SOMMAIRE	2
- CHAPITRE ZERO : INTRODUCTION GENERALE	4
- CHAPITRE UN : ETUDE D'UN ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL DANS UN ESPACE PERIODIQUE. APPLICATION A UNE GRILLE D'AUBES.	
1-0 Introduction	7
1-1 Equations du mouvement	8
1-2 Introduction de la périodicité	10
1-3 Grille d'aubes étudiée	10
1-4 Représentation en série de FOURRIER	11
1-5 Expression de la divergence et du rotationnel autours du profil	14
1-6 Etablissement de la condition de glissement sur le profil	19
- CHAPITRE DEUX : PROBLEME DIRECT. RECHERCHE DE LA REPARTITION DE VITESSE SUR LE PROFIL.	
2-1 Ecriture d'un système d'E.D.P résolvable définissant les harmoniques. Equations elliptiques	24
2-2 Equivalence des deux systèmes	27
2-3 Unicité de la solution d'une équation elliptique. Problème aux limites	28
2-4 Solution d'un problème aux limites	30
2-4-1 Solution analytique exacte. Fonction de GREEN	30

2-4-2 Solutions approchées. Méthodes numériques pour la résolution des problèmes aux limites elliptiques	31	
2-4-2-1 Discrétisation par différences finies	32	
2-4-2-2 Discrétisation par éléments finis	38	
2-5 Procédure de résolution	44	
2-6 Mise en oeuvre numérique	46	
2-7 Conditions aux limites appliquées.....	49	
- CHAPITRE TROIS : <i>PROBLEME INVERSE.</i>		
<i>RECHERCHE DE LA FORME GEOMETRIQUE DE</i>		
<i>L'AUBE</i>		51
- <i>CONCLUSION</i>		54
- ANNEXES :		
ANNEXE A : <i>Définitions des aubes et des grilles d'aubes</i>		55
ANNEXE B : <i>Séries de FOURRIER</i>		59
ANNEXE C : <i>Interpolation SPLINES cubique</i>		61
ANNEXE D : <i>Ecoulement dans une grille d'aubes.</i>		
<i>Problème à deux dimensions</i>		64
- <i>REFERENCES</i>		68
- <i>TABLE DES MATIERE</i>		71