

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

École Nationale Polytechnique
Laboratoire de Commande des Processus



*Mémoire de Master en
Automatique*

Thème

**Diagnostic de défauts multiplicatifs de capteurs :
Application à une station d'épuration**

Présenté par :

M. BOUZRINA Djamel-Eddine

Soutenu le : 24/06/2015

Proposé et encadré par :

Dr Illoul R.

Juin 2015

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein du Laboratoire de Commande des Processus de l'École Nationale Polytechnique sous la direction de M. Rachid ILLOUL.

Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour ses précieux conseils et la disponibilité dont il a toujours fait preuve à mon égard. Mes remerciements vont aussi à Messieurs les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer notre travail. J'adresse également mes remerciements à l'ensemble des enseignants du département de Génie Électrique et de la spécialité Automatique.

Enfin, je voudrais réserver mes derniers remerciements à ma famille ainsi qu'à tous mes camarades qui m'ont apporté un grand soutien lors de l'élaboration de ce travail.

Je dédie ce mémoire à mes parents
et à mon frère qui m'ont soutenu
tout au long de ma scolarité.

Djamel-Eddine BOUZRINA

Résumé

Le travail présenté ici est dédié à la synthèse d'un estimateur d'état pour le diagnostic des défauts multiplicatifs de capteurs pour un modèle de station d'épuration à boue activée. Le système considéré est représenté par un modèle flou de Takagi-Sugeno. Les conditions de stabilité de ce type d'estimateurs sont exprimées en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMI). La technique de résolution sur MATLAB de ces LMIs ainsi qu'une simulation du système sont données ici.

Mots-clefs. ASM1 - modélisation floue - conception d'observateur flou - multimodèle - défauts multiplicatifs de capteurs - diagnostic.

Abstract

The work presented here is dedicated to the synthesis of a state observer for the diagnosis of multiplicative sensors fault for an activated sludge model water treatment plant. The considered system is represented by a fuzzy Takagi-Sugeno model. Stability conditions of such observers are expressed in terms of linear matrix inequalities (LMI). The MATLAB resolution technique for these LMIs and a simulation of the system are given here.

Keywords. ASM1 - fuzzy modeling - fuzzy observer design - multiple model - multiplicative sensor fault - diagnosis.

ملخص

العمل المقدم هنا مخصص لتشكيل مقدر للمتغيرات الحالية لنموذج محطة معالجة مياه الصرف مزودة بطين منشط لتشخيص الاعطال المضاعفة لأجهزة الاستشعار. النظام المقترح مقدم على شكل نموذج ضبابي لتكاغي-سوجينو. شروط الاستقرار لهذا النوع من المقدرات معبرة عن طريق متراجحات مصفوفية خطية (LMI). طريقة حل هذه المتراجحات باستعمال MATLAB مع المحاكاة الخاصة بنموذج المحطة مقدمة هنا.

كلمات مفتاحية. ASM1 - نمذجة ضبابية - إنشاء مراقب ضبابي - نمذجة متعددة - مراقب بإدخالات مجهولة - الاعطال المضاعفة لأجهزة الاستشعار - تشخيص.

Table des matières

Résumé	iii
Table des figures	v
Notations	vi
Introduction générale	1
1 Diagnostic de défauts multiplicatifs de capteurs	3
1.1 Formulation du problème	3
1.2 Synthèse de l'observateur	5
2 Diagnostic de défauts du modèle ASM1	10
2.1 Le modèle ASM1 réduit	10
2.2 Synthèse de l'observateur	13
2.3 Résultats de la simulation	17
Conclusion générale	20
Annexe A : Convergence de l'observateur	21
Bibliographie	24

Table des figures

1	Différents types de défauts	1
2.1	Défaut $f(t)$	14
2.2	Correction de défaut multiplicatif de capteur sur X_{DCO} . .	17
2.3	Diagnostic de défauts multiplicatifs de capteur	19
2.3a	X_{BA}	19
2.3b	X_{BH}	19
2.3c	S_{NO}	19
2.3d	S_{NH}	19
2.3e	S_O	19

Notations

Acronymes

LMI	Linear Matrix Inequality
LTI	Linear Time Invariant
LPV	Linear Parameter Varying
quasi-LPV	quasi-Linear Parameter Varying
MM	Multimodèle
MIMO	Multiple Inputs Multiple Outputs
SISO	Single Input Single Output
T-S	Takagi-Sugeno
ASM	Activated Sludge Model

Vecteurs et matrices

I_n	Matrice identité de dimension n
$O_{n,m}$	Matrice nulle de dimensions $n \times m$
$A > 0$ ($A < 0$)	Matrice A définie positive (resp. définie négative)
A^T	Transposée de la matrice A
A^{-1}	Inverse de la matrice A
$\text{Tr}(A)$	Trace de la matrice A
$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ * & S_{22} \end{bmatrix}$	Matrice symétrique, * représente S_{12}^T

Introduction générale

Les représentations d'état sont utilisées de manière routinière afin de modéliser les systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. Les applications de ces dernières incluent la commande par retour d'état (voir, par exemple, [Antsaklis and Michel, 2006, Brogan, 1991] ou [Rugh, 1996]), la détection des défauts (voir, par exemple, [Frank, 1990] ou [Ding, 2005]) ainsi que la supervision et la surveillance des systèmes. L'état du système n'est cependant pas habituellement disponible car il est rarement possible d'avoir un capteur pour chaque variable d'état, et une certaine forme de reconstruction à partir des données mesurées est requise. Dans ce cas, un observateur peut être construit en utilisant le modèle mathématique du système afin d'obtenir une estimation $\hat{\boldsymbol{x}}$ de l'état du système \boldsymbol{x} . Cette estimation peut être alors utilisée comme substitut pour \boldsymbol{x} .

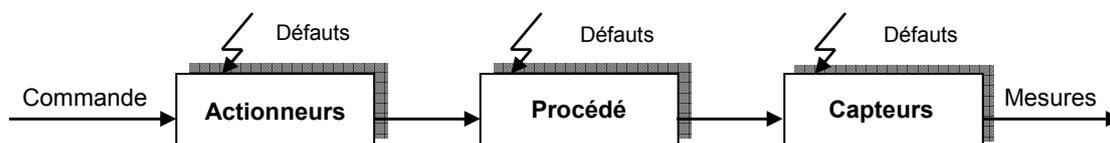


FIGURE 1 – Différents types de défauts

Nous pouvons donc dire que l'étape d'acquisition des données est d'une importance primordiale.

Jusqu'ici, de nombreuses méthodes pour le diagnostic ont été développées, mais beaucoup d'approches sont plus ad-hoc que systé-

matiques et que les méthodes concernant les défauts multiplicatifs sont encore plus rares. Il est juste d'indiquer que peu de théories générales existent et qu'une connaissance complète des relations entre les différentes méthodes est absente [[Fragkoulis, 2008](#)].

Nous allons, dans le cadre de ce projet de fin d'études, modéliser une station d'épuration puis trouver son multi-modèle dans le but de synthétiser un observateur d'états qui servira, de manière systématique, à diagnostiquer les défauts multiplicatifs de capteurs sur un système en utilisant une technique d'optimisation convexe qui fait appel à des inégalités matricielles linéaires (LMI), déjà étudiées dans [[Tanaka and Wang, 2001](#)].

Chapitre 1

Diagnostic de défauts multiplicatifs de capteurs

1.1 Formulation du problème

Rappelons-nous qu'un système non-linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

Peut être approximé par un modèle flou de Takagi-Sugeno, ou multimodèle, du type :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

Nous allons nous intéresser à la détection ainsi qu'à l'estimation des défauts multiplicatifs de capteurs lorsqu'ils touchent ce type de systèmes. Comme souligné en introduction, le cas de défauts de capteurs le plus répandu dans la littérature existante est celui des défauts additifs, dont l'étude est plus facile à mettre en œuvre. Le diagnostic dans ce cas se fait principalement au moyen de bancs d'observateurs qui permettent une détection et une isolation des défauts.

Pour ce faire, nous allons considérer le système non linéaire T-S

avec défauts multiplicatifs de capteurs représenté par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= C(t) x(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Avec :

$$C(t) = (I_m + F(t))C \quad (1.4)$$

où $F(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est comme suit :

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f_m \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Nous pouvons également mettre $F(t)$ sous la forme suivante :

$$F(t) = \sum_{j=1}^m f_j(t) F_j \quad (1.6)$$

où $F_j \in \mathbb{R}^{m \times m}$ dont les termes sont égaux au symbole de Kronecker $\delta(i, j) = 1$ si $i = j$, 0 sinon.

Ici, les expressions f_j sont des fonctions inconnues qui varient dans le temps et représentent les défauts multiplicatifs de capteurs. Celles-ci doivent être néanmoins bornée telles que :

$$f_j(t) \in [f_j^2, f_j^1] \quad (1.7)$$

avec $f_j^2 = \min(f_j(t))$ et $f_j^1 = \max(f_j(t))$.

Nous pouvons alors appliquer une transformation polytopique à $f_j(t)$ de sorte que :

$$f_j(t) = \tilde{\mu}_j^1(f_j(t)) f_j^1 + \tilde{\mu}_j^2(f_j(t)) f_j^2 \quad (1.8)$$

Avec :

$$\tilde{\mu}_j^1(f_j(t)) = \frac{f_j(t) - f_j^2}{f_j^1 - f_j^2}, \quad \tilde{\mu}_j^2(f_j(t)) = \frac{f_j(t) - f_j^1}{f_j^1 - f_j^2} \quad (1.9)$$

$\tilde{\mu}_j^1(f_j(t))$ et $\tilde{\mu}_j^2(f_j(t))$ vérifieront :

$$\tilde{\mu}_j^1(f_j(t)) + \tilde{\mu}_j^2(f_j(t)) = 1 \quad (1.10)$$

et :

$$0 \leq \tilde{\mu}_j^i(f_j(t)) \leq 1, \quad i = 1, 2 \quad (1.11)$$

En remplaçant 1.8 dans 1.6, on obtient :

$$F(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^2 \tilde{\mu}_j^k(f_j(t)) f_j^k F_j \quad (1.12)$$

Ceci permet d'obtenir une forme polytopique de $C(t)$ à variable de décision $f(t)$ non mesurable et de ré-écrire notre système sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= \sum_{j=1}^{2^m} \tilde{\mu}_j(f(t)) \tilde{C}_j x(t) \end{cases} \quad (1.13)$$

avec :

$$\begin{cases} \tilde{C}_j &= C + \bar{F}_j C \\ \tilde{\mu}(f_j(t)) &= \prod_{k=1}^m \mu_k^{\sigma_j^k}(f_k(t)) \\ \bar{F}_j &= \sum_{k=1}^m f_k^{\sigma_j^k} F_j \end{cases} \quad (1.14)$$

1.2 Synthèse de l'observateur

Un observateur simultané de l'état et des défauts multiplicatifs de capteur est proposé pour le système T-S par [Bezzaoucha, 2013].

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(\hat{y}(t) - y(t))) \\ \dot{\hat{f}}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t))(K_i(\hat{y}(t) - y(t)) - \alpha_i \hat{f}(t)) \\ \hat{y}(t) &= \sum_{j=1}^{2^m} \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t)) \tilde{C}_j \hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.15)$$

où les gains à calculer sont :

$$\begin{cases} L_i & \in \mathbb{R}^{n_x \times m} \\ K_i & \in \mathbb{R}^{m \times m} \\ \alpha_i & \in \mathbb{R}^{m \times m} \end{cases} \quad (1.16)$$

Soient maintenant les erreurs d'estimation $e_x(t)$ et $e_f(t)$ définies comme suit :

$$\begin{cases} e_x(t) & = x(t) - \hat{x}(t) \\ e_f(t) & = f(t) - \hat{f}(t) \end{cases} \quad (1.17)$$

Nous pouvons ré-écrire 1.13 sous forme incertaine comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) ((A_i + \Delta A(t))x(t) + (B_i + \Delta B(t))u(t)) \\ y(t) & = \sum_{j=1}^{2^{n_x}} \tilde{\mu}_j(f(t)) (\tilde{C}_j + \Delta C(t)) x(t) \end{cases} \quad (1.18)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta A(t) &= \sum_{i=1}^r [\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t))] A_i \\ &= \mathcal{A} \Sigma_A(t) E_A \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \Delta B(t) &= \sum_{i=1}^r [\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t))] B_i \\ &= \mathcal{B} \Sigma_B(t) E_B \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \Delta C(t) &= \sum_{i=1}^r [\tilde{\mu}_i(f(t)) - \tilde{\mu}_i(\hat{f}(t))] \tilde{C}_i \\ &= \mathcal{C} \Sigma_C(t) E_C \end{aligned} \quad (1.21)$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= [A_1, \dots, A_r], \quad \Sigma_A(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_r(t) \end{bmatrix}, \quad E_A = [I_{n_x}, \dots, I_{n_x}]^T \\ \mathcal{B} &= [B_1, \dots, B_r], \quad \Sigma_B(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_r(t) \end{bmatrix}, \quad E_B = [I_{n_u}, \dots, I_{n_u}]^T \\ \mathcal{C} &= [C_1, \dots, C_{2^m}], \quad \Sigma_C(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_1(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \tilde{\delta}_{2^m}(t) \end{bmatrix}, \quad E_C = [I_{2^m}, \dots, I_{2^m}]^T \end{aligned}$$

$$\delta_i(t) = \mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)), \quad \tilde{\delta}_j(t) = \tilde{\mu}_j(f(t)) - \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t))$$

Puisque nous pouvons déduire à partir de 1.10 et 1.11 que :

$$-1 \leq \delta_i(t) \leq 1, \quad -1 \leq \tilde{\delta}_j(t) \leq 1 \quad (1.22)$$

nous pouvons écrire :

$$\Sigma_{\mathfrak{A}}^T(t) \Sigma_{\mathfrak{A}}(t) \leq I, \quad \mathfrak{A} = A, B, C \quad (1.23)$$

En utilisant les expressions des modèles incertains, l'erreur peut être ré-écrite de manière suivante :

$$\dot{e}_x(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t)) (A_i e_x(t) + \Delta A(t) x(t) - L_i (y(t) - \hat{y}(t)) + \Delta B(t) u(t)) \quad (1.24)$$

En ré-écrivant l'erreur de sortie comme suit :

$$y(t) - \hat{y}(t) = \sum_{j=1}^{2^m} \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t)) (\tilde{C}_j e_x(t) + \Delta C(t) x(t)) \quad (1.25)$$

la dynamique de l'erreur devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^m} \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t)) ((A_i - L_i \tilde{C}_j) e_x(t) \\ &+ (\Delta A(t) - L_i \Delta C(t)) x(t) + \Delta B(t) u(t)) \\ \dot{e}_f(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^m} \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t)) (-K_i \tilde{C}_j e_x(t) - \alpha_i e_f(t) \\ &+ \dot{f}(t) - K_i \Delta C(t) x(t) + \alpha_i f(t)) \end{cases} \quad (1.26)$$

En posant les vecteurs augmentés suivants :

$$e_a(t) = \begin{pmatrix} e_x(t) \\ e_f(t) \end{pmatrix}, \quad \omega(t) = \begin{pmatrix} x^T(t) & f^T(t) & \dot{f}^T(t) & u(t) \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

On obtient :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^m} \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t)) (\Phi_{ij} e_a(t) + \Psi_i(t) \omega(t)) \quad (1.28)$$

avec :

$$\Phi_{ij} = \begin{pmatrix} A_i - L_i \tilde{C}_j & 0 \\ -K_i \tilde{C}_j & -\alpha_i \end{pmatrix}, \quad \Psi_i(t) = \begin{pmatrix} \Delta A(t) - L_i \Delta C(t) & 0 & 0 & \Delta B(t) \\ -K_i \Delta C(t) & \alpha_i I & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

À partir de l'équation 1.28, nous pouvons montrer (voir A), que l'observateur 1.15 pour le système non linéaire avec défauts multiplicatifs de capteurs converge s'il existe :

$$\begin{cases} P_1 = P_1^T > 0 \\ P_2 = P_2^T > 0 \\ \Gamma_p > 0, \Gamma_p \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, p = 1, \dots, 4 \\ \text{Des gains : } \bar{\alpha}_i, \bar{K}_i, R_i \\ \text{Et des réels : } \beta, \lambda_1, \lambda_{1C}, \lambda_{2C}, \lambda_B > 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

Solutions, pour $i = 1, \dots, r$ et $j = 1, \dots, 2^{2^m}$, du problème de minimisation sous contrainte LMI suivant :

$$\min_{P_1, P_2, \bar{\alpha}_i, \bar{K}_i, R_i, \lambda_1, \lambda_{1C}, \lambda_{2C}, \lambda_B} \beta \quad (1.31)$$

$$\Gamma_p < \beta I \text{ pour } p = 1, \dots, 4 \quad (1.32)$$

$$\begin{pmatrix}
 Q_{ij}^{11} & -\tilde{C}_j^T \bar{K}_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1 \mathcal{A} & P_1 \mathcal{B} & R_i \mathcal{C} & 0 \\
 * & Q_i^{22} & 0 & \bar{\alpha}_i & P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{K}_i \mathcal{C} \\
 * & * & Q^{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 * & * & * & -\Gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 * & * & * & * & -\Gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 * & * & * & * & * & Q^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 * & * & * & * & * & * & -\lambda_1 I & 0 & 0 & 0 \\
 * & * & * & * & * & * & * & -\lambda_B I & 0 & 0 \\
 * & * & * & * & * & * & * & * & -\lambda_{1C} I & 0 \\
 * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\lambda_{2C} I
 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Avec :

$$Q_{ij}^{11} = P_1 A_i + A_i^T P_1 - R_i \tilde{C}_j - \tilde{C}_j^T R_i^T + I_{n_x} \quad (1.34)$$

$$Q_i^{22} = -\bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_i^T + I_m \quad (1.35)$$

$$Q^{33} = -\Gamma_1 + \lambda_1 E_C^T E_C + \lambda_{1C} E_C^T E_C + \lambda_{2C} E_C^T E_C \quad (1.36)$$

$$Q^6 = -\Gamma_4 + \lambda_B E_B^T E_B \quad (1.37)$$

Les gains de l'observateur sont donnés par :

$$\begin{cases}
 L_i = P_1^{-1} R_i \\
 K_i = P_2^{-1} \bar{K}_i \\
 \alpha_i = P_2^{-1} \bar{\alpha}_i
 \end{cases} \quad (1.38)$$

Chapitre 2

Diagnostic de défauts du modèle ASM1

2.1 Le modèle ASM1 réduit

Rappelons-nous que le modèle ASM1 réduit est donné par [Nagy, 2010, Bouzrina, 2015] :

$$\dot{X}_{DCO}(t) = -\frac{1}{Y_H}[\rho_1(t) + \rho_2(t)] + (1 - f_P)(\rho_4(t) + \rho_5(t)) + D_1(t) \quad (2.1)$$

$$\dot{S}_O(t) = \frac{Y_H - 1}{Y_H}\rho_1(t) + \frac{Y_A - 4.57}{Y_A}\rho_3(t) + D_2(t) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_{NH}(t) = & -i_{XB}[\rho_1(t) + \rho_2(t)] - \left(i_{XB} + \frac{1}{Y_A}\right) \\ & + (i_{XB} - f_P i_{XP})[\rho_4(t) + \rho_5(t)] + D_3(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\dot{S}_{NO}(t) = \frac{Y_H - 1}{2.86 Y_H}\rho_2(t) + \frac{1}{Y_A}\rho_1(t) + D_4(t) \quad (2.4)$$

$$\dot{X}_{BH}(t) = \rho_1(t) + \rho_2(t) - \rho_4(t) + D_5(t) \quad (2.5)$$

$$\dot{X}_{BA}(t) = \rho_3(t) - \rho_5(t) + D_6(t) \quad (2.6)$$

où :

$$D_1(t) = \frac{q_{in}(t)}{V} [X_{DCO,in}(t) - X_{DCO}(t)] \quad (2.7)$$

$$D_2(t) = \frac{q_{in}(t)}{V} (-S_O(t)) + K_{q\zeta a}(t) [S_{O,sat}(t) - S_O(t)] \quad (2.8)$$

$$D_3(t) = \frac{q_{in}(t)}{V} [S_{NH,in}(t) - S_{NH}(t)] \quad (2.9)$$

$$D_4(t) = \frac{q_{in}(t)}{V} [-S_{NO}(t)] \quad (2.10)$$

$$D_5(t) = \frac{q_{in}(t)}{V} [X_{BH,in}(t) - X_{BH}(t) + f_R \frac{1 - f_W}{f_R + f_W} X_{BH}(t)] \quad (2.11)$$

$$D_6(t) = \frac{q_{in}(t)}{V} [-X_{BA}(t) + f_R \frac{1 - f_W}{f_R + f_W} X_{BA}(t)] \quad (2.12)$$

Son MM est obtenu en considérant les fonctions de prémisses suivantes :

$$\xi_1(x(t), u(t)) = \frac{q_{in}(t)}{V} \quad (2.13)$$

$$\xi_2(x(t), u(t)) = \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} \quad (2.14)$$

$$\xi_3(x(t), u(t)) = \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} \quad (2.15)$$

$$\xi_4(x(t), u(t)) = \frac{1}{K_{OA} + S_O(t)} \frac{S_{NH}(t)}{K_{NH,A} + S_{NH}(t)} X_{BA}(t) \quad (2.16)$$

Les matrices de la forme quasi-LPV auront la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = A(x, u)x(t) + B(x, u)u(t) + E(x, u)d(t) \quad (2.17)$$

et sont exprimées grâce aux variables de prémisse comme suit :

$$A(x, u) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{15} & a_{16} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} & 0 \\ 0 & a_{32} & -\xi_1(u) & 0 & a_{35} & a_{36} \\ 0 & a_{42} & 0 & -\xi_1(u) & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & a_{62} & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

et :

$$E_1(u) = \begin{bmatrix} \xi_1(u) & 0 \\ 0 & KS_{O,sat} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \xi_1(u) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \xi_1(u) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$B(u) = [E_1(u), E_2(u)] \quad (2.20)$$

Nous allons considérer dans la suite de ce développement que les entrées $d(t)$ sont mesurables.

Les éléments $a_{ij}(x, u)$ sont donnés par :

$$a_{11}(x, u) = -\xi_1(x, u)$$

$$a_{15}(x, u) = -\frac{\mu_H}{Y_H}\xi_2(x, u) + (1 - f_p)b_H - \frac{\mu_H\eta_{NOg}}{Y_H}$$

$$a_{16}(x, u) = (1 - f_p)b_A$$

$$a_{22}(x, u) = -\xi_1(x, u) - Kq_a - \frac{4.57 - Y_A}{Y_A}\mu_A\xi_4(x, u)$$

$$a_{25}(x, u) = \frac{(Y_H - 1)\mu_H}{Y_H}\xi_2(x, u)$$

$$a_{32}(x, u) = -(i_{XB} + \frac{1}{Y_A})\mu_A\xi_4(x, u)$$

$$a_{35}(x, u) = (i_{XB} + f_p i_{XP})b_H - i_{XB}\mu_H\xi_2(x, u) - i_{XB}\mu_H\eta_{NOg}\xi_3(x, u)$$

$$a_{36}(x, u) = (i_{XB} + f_p i_{XP})b_A$$

$$a_{42}(x, u) = \frac{1}{Y_A}\mu_A\xi_4(x, u)$$

$$a_{45}(x, u) = \frac{Y_H - 1}{2.86Y_H}\mu_H\eta_{NOg}\xi_3(x, u)$$

$$a_{55}(x, u) = \mu_H\xi_2(x, u) - b_H + \xi_1(x, u) \left[\frac{F_W(1 + f_R)}{f_R + f_W} - 1 \right] \\ + \mu_H\eta_{NOg}\xi_3(x, u)$$

$$a_{62}(x, u) = \mu_A z_4(x, u)$$

$$a_{66}(x, u) = \xi_1(x, u) \left[\frac{F_W(1 + f_R)}{f_R + f_W} - 1 \right] - b_A$$

2.2 Synthèse de l'observateur

Nous allons introduire au niveau de X_{DCO} le défaut multiplicatif de capteur $f(t)$ suivant :

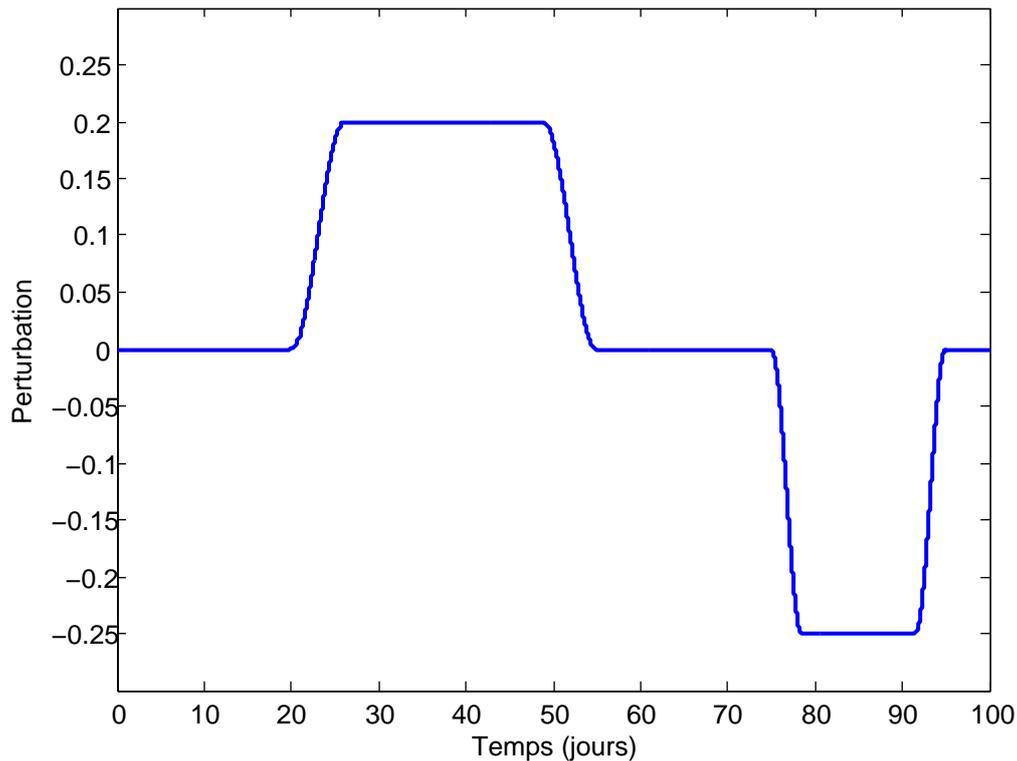


FIGURE 2.1 – Défaut $f(t)$

Nous nous contenterons d'une seule perturbation compte-tenu du nombre important de LMIs à résoudre si on augmente le nombre de ces dernières.

Les variables sont définies à l'aide de l'utilitaire `lmiedit` de MATLAB, celui-ci permet de les déclarer ainsi que d'obtenir les lignes de codes permettant de les décrire à partir d'une description simple comme suit :

```
P1>0
P2>0
gamma1>0
gamma2>0
gamma3>0
gamma4>0
beta>0
lambda1>0
lambda1C>0
```

```

lambda2C>0
lambdaB>0
gamma1-beta*eye(4)<0
gamma2-beta*eye(4)<0
gamma3-beta*eye(4)<0
gamma4-beta*eye(4)<0
[P1*A1+A1'*P1-R1*Cg1-Cg1'*R1'+eye(6), -Cg1'*K1', 0, 0, 0,
0, P1*AA, P1*BB, R1*CC, 0;
-K1*Cg1, -alpha1'-alpha1+eye(4), 0, alpha1, P2, 0, 0, 0,
0, K1*CC;
0, 0, -gamma1+lambda1*ECTEC+lambda1C*ECTEC+lambda2C*ECTEC,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
0, alpha1, 0, -gamma2, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
0, P2, 0, 0, -gamma3, 0, 0, 0, 0, 0;
0, 0, 0, 0, 0, -gamma4+lambdaB*EBTEB, 0, 0, 0, 0;
AA'*P1', 0, 0, 0, 0, 0, -lambda1*I96, 0, 0, 0;
BB'*P1', 0, 0, 0, 0, 0, 0, -lambdaB*I64, 0, 0;
CC'*R1', 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -lambda1C*I12, 0;
0, CC'*K1', 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -lambda2C*I12]<0

```

Et ce pour $i = 1, \dots, 16$ et $j = 1, 2$.

Qui nous donne :

```

%% LMI s
lmiterm([-1 1 1 P1],1,1); % LMI #1: P1
lmiterm([-2 1 1 P2],1,1); % LMI #2: P2
lmiterm([-3 1 1 0],gamma1); % LMI #3: lgamma1
lmiterm([-4 1 1 gamma2],1,1); % LMI #4: gamma2
lmiterm([-5 1 1 gamma3],1,1); % LMI #5: gamma3
lmiterm([-6 1 1 gamma4],1,1); % LMI #6: gamma4
lmiterm([-7 1 1 beta],1,1); % LMI #7: beta
lmiterm([-8 1 1 lambda1],1,1); % LMI #8: lambda1

```

```

lmiterm([-9 1 1 lambda1C],1,1); % LMI #9: lambda1C

lmiterm([-10 1 1 lambda2C],1,1); % LMI #10: lambda2C

lmiterm([-11 1 1 lambdaB],1,1); % LMI #11: lambdaB

lmiterm([12 1 1 gamma1],1,1); % LMI #12: gamma1
lmiterm([12 1 1 beta],.5*1,-eye(4),'s');
% LMI #12: -beta*eye(4) (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([13 1 1 gamma2],1,1); % LMI #13: gamma2
lmiterm([13 1 1 beta],.5*1,-eye(4),'s');
% LMI #13: -beta*eye(4) (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([14 1 1 gamma3],1,1); % LMI #14: gamma3
lmiterm([14 1 1 beta],.5*1,-eye(4),'s');
% LMI #14: -beta*eye(4) (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([15 1 1 gamma4],1,1); % LMI #15: gamma4
lmiterm([15 1 1 beta],.5*1,-eye(4),'s');
% LMI #15: -beta*eye(4) (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([16 1 1 P1],1,A1,'s'); % LMI #16: P1*A1+A1'*P1
lmiterm([16 1 1 R1],1,-Cg1,'s');
% LMI #16: -R1*Cg1-Cg1'*R1'
lmiterm([16 1 1 0],eye(6)); % LMI #16: eye(6)
lmiterm([16 2 1 K1],1,-Cg1); % LMI #16: -K1*Cg1
lmiterm([16 2 2 -alpha1],.5*1,-1,'s');
% LMI #16: -alpha1' (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([16 2 2 alpha1],1,-1); % LMI #16: -alpha1
lmiterm([16 2 2 0],eye(4)); % LMI #16: eye(4)
lmiterm([16 3 3 gamma1],1,-1); % LMI #16: -gamma1
lmiterm([16 3 3 lambda1],.5*1,ECTEC,'s');
% LMI #16: lambda1*ECTEC (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([16 3 3 lambda1C],.5*1,ECTEC,'s');
% LMI #16: lambda1C*ECTEC (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([16 3 3 lambda2C],.5*1,ECTEC,'s');
% LMI #16: lambda2C*ECTEC (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([16 4 2 alpha1],1,1); % LMI #16: alpha1
lmiterm([16 4 4 gamma2],1,-1); % LMI #16: -gamma2
lmiterm([16 5 2 P2],1,1); % LMI #16: P2
lmiterm([16 5 5 gamma3],1,-1); % LMI #16: -gamma3
lmiterm([16 6 6 gamma4],1,-1); % LMI #16: -gamma4
lmiterm([16 6 6 lambdaB],.5*1,EBTEB,'s');
% LMI #16: lambdaB*EBTEB (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([16 7 1 -P1],AA',1); % LMI #16: AA'*P1'
lmiterm([16 7 7 lambda1],.5*1,-I96,'s');
% LMI #16: -lambda1*I96 (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([16 8 1 -P1],BB',1); % LMI #16: BB'*P1'
lmiterm([16 8 8 lambdaB],.5*1,-I64,'s');
% LMI #16: -lambdaB*I64 (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([16 9 1 -R1],CC',1); % LMI #16: CC'*R1'
lmiterm([16 9 9 lambda1C],.5*1,-I12,'s');
% LMI #16: -lambda1C*I12 (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([16 10 2 -K1],CC',1); % LMI #16: CC'*K1'
lmiterm([16 10 10 lambda2C],.5*1,-I12,'s');
% LMI #16: -lambda2C*I12 (NON SYMMETRIC?)

```

Et ce pour $i = 1, \dots, 16$ et $j = 1, 2$.

Nous obtiendrons un système de 47 LMIs qui seront résolues en utilisant `mincx`, contrairement à [Bouzrina, 2015], car il s'agit ici d'un problème de minimisation sous contraintes LMIs et non pas de la résolution d'un système de LMIs.

2.3 Résultats de la simulation

Nous obtenons les réponses suivantes :

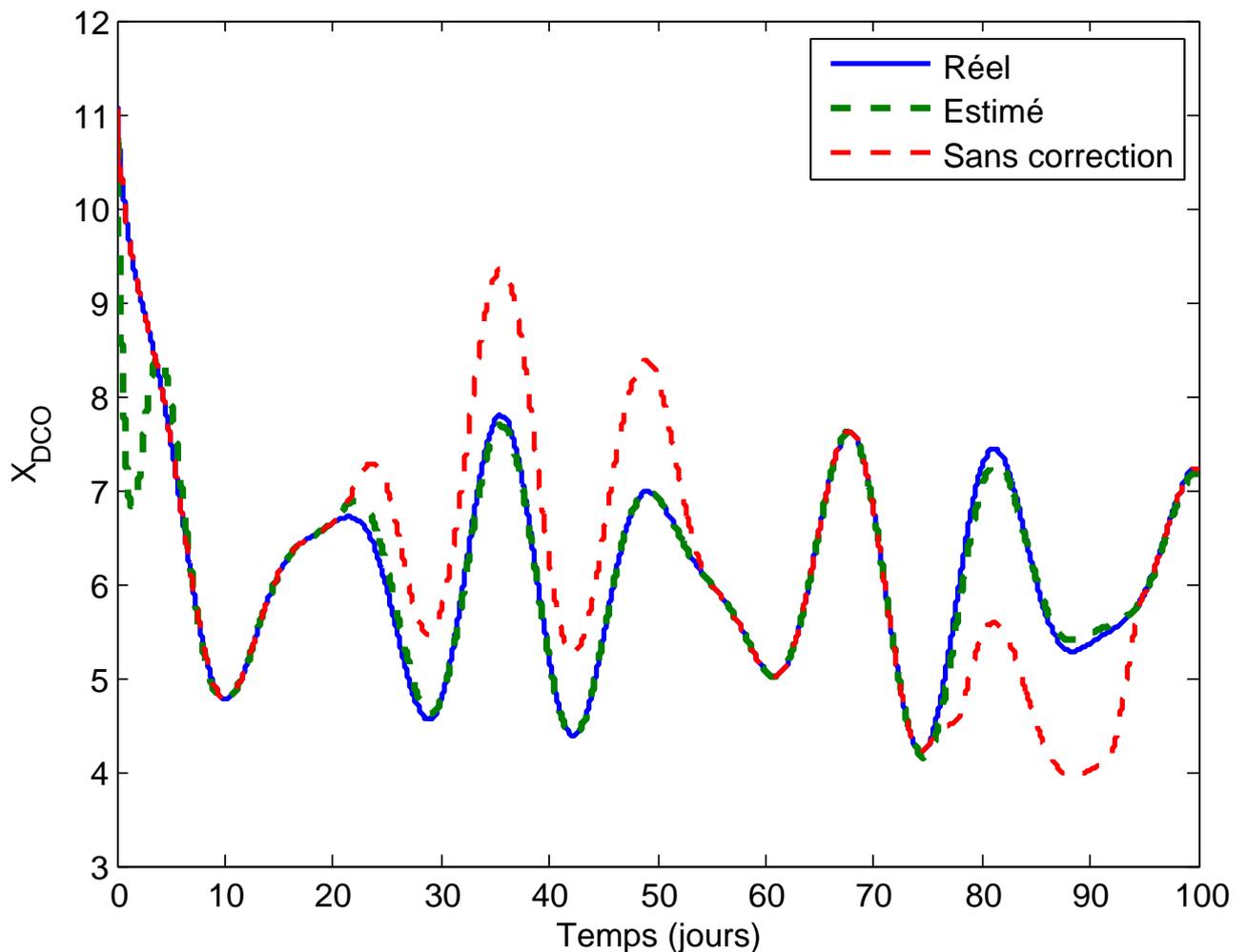


FIGURE 2.2 – Correction de défaut multiplicatif de capteur sur X_{DCO}

La courbe en rouge représente la mesure de X_{DCO} qu'on aurait obtenu si nous n'avions pas pris en compte le défaut multiplicatif

de capteur.

Les figures suivantes montrent que les réponses des autres états ne se trouvent que très peu influencées par le défaut au niveau de X_{DCO} :

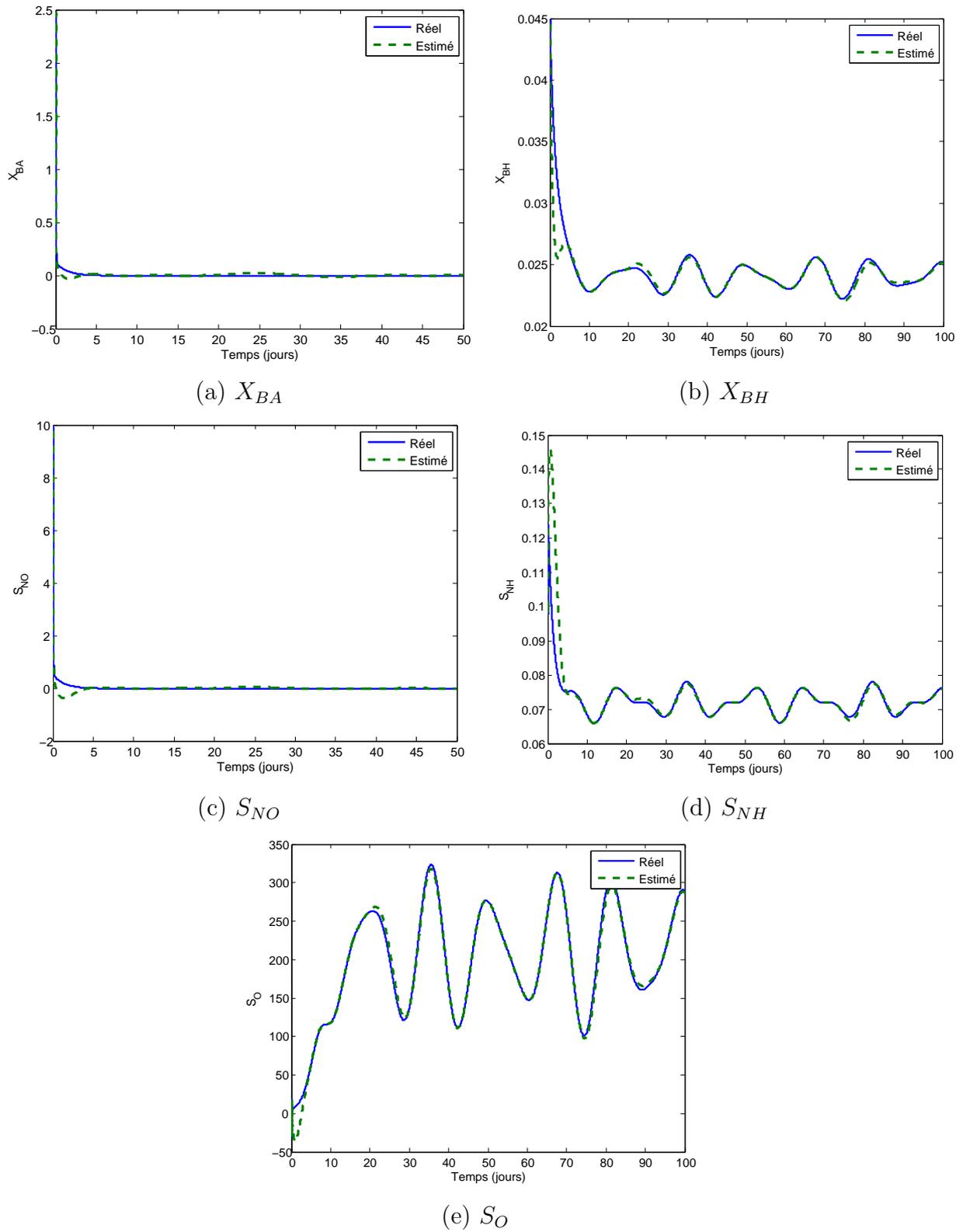


FIGURE 2.3 – Diagnostic de défauts multiplicatifs de capteur

Conclusion générale

Dans le cadre de ce travail, nous avons mis au point un observateur d'état pour un système non-linéaire qui sert au diagnostic des défauts multiplicatifs de capteurs par estimation des défauts.

Nous pouvons noter que l'approche se structure en 3 étapes distinctes :

1. Obtention du MM du système non-linéaire par transformation par secteurs non-linéaires.
2. Ré-écriture polytopique des défauts.
3. Synthèse de l'observateur et diagnostic des défauts par estimation.

Cette technique offre une méthode systématique pour le diagnostic des défauts multiplicatifs de capteurs pour les systèmes non linéaires.

Nous avons pu noter que les gains obtenus pour l'observateur d'état sont semblables à ceux obtenus pour un observateur PI dans [[Bouzrina, 2015](#)].

Ces techniques peuvent être étendues à l'estimation des systèmes non linéaires à paramètres variants dans le temps ainsi que pour le diagnostic des défauts d'actionneurs.

Annexe A

Convergence de l'observateur

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(e_a(t)) = e_a^T(t) P e_a(t), \quad P = P^T > 0 \quad (\text{A.1})$$

En remplaçant l'expression de $e_a(t)$ A.1, puis en dérivant $V(e_a(t))$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_a(t)) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^m} \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t)) [e_a^T(t) (\Phi_{ij}^T P + P \Phi_{ij}^T) e_a(t) \\ & + e_a^T(t) P \Psi_i(t) \omega(t) + \omega^T(t) \Psi_i^T(t) P e_a(t)] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

L'erreur $e_a(t)$ converge asymptotiquement vers 0 quand $\omega(t) = 0$ et le gain du transfert de $\omega(t)$ vers l'erreur est borné par β si :

$$\dot{V}(e_a(t)) + e_a^T(t) e_a(t) - \omega^T(t) \Gamma \omega(t) < 0 \quad (\text{A.3})$$

avec :

$$\Gamma = \text{diag}(\Gamma_k), \quad \Gamma_k < \beta I, \quad \text{pour } : k = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{A.4})$$

En tenant compte de A.3, A.2 devient :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^m} \mu_i(\hat{x}(t)) \mu_j(\hat{f}(t)) \\ & \begin{pmatrix} e_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Phi_{ij}^T P + P \Phi_{ij} + I_{n_x+m} & P \Psi_i(t) \\ \Psi_i^T(t) P & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Avec :

$$P = \text{diag}(P_1, P_2) \quad (\text{A.6})$$

Il en vient que A.5 est vraie si :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^m} \mu_i(\hat{x}(t)) \mu_j(\hat{f}(t)) (Q_{ij} + Q(t) + Q^T(t)) < 0 \quad (\text{A.7})$$

Avec :

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} Q_{ij}^{11} & -\tilde{C}_j^T K_i^T P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -P_2 \alpha_i - \alpha_i^T P_2 + I_m & 0 & \bar{\alpha}_i & P_2 & 0 \\ * & * & -\Gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Gamma_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Gamma_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$Q_{ij}^{11} = P_1 A_i + A_i^T P_1 - P_1 L_i \tilde{C}_j - \tilde{C}_j^T L_i^T P_1 + I_{n_x} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} Q(t) &= (\mathcal{A}^T P_1^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \Sigma_A(t) (0 \ 0 \ E_A \ 0 \ 0 \ 0) \\ &+ (\mathcal{B}^T P_1^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \Sigma_B(t) (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ E_B) \\ &+ (\mathcal{C}^T L_i^T P_1^T \ \mathcal{C}^T K_i^T P_2^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \Sigma_C(t) (0 \ 0 \ -E_C \ 0 \ 0 \ 0) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

De l'équation précédente on trouve :

$$Q(t) + Q^T(t) < \begin{pmatrix} Q^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_B E_B^T E_B \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

avec :

$$Q^1 = \lambda_1^{-1} P_1 \mathcal{A} \mathcal{A}^T P_1 + \lambda_B^{-1} P_1 \mathcal{B} \mathcal{B}^T P_1 + \lambda_{1C}^{-1} P_1 L_i \mathcal{C} \mathcal{C}^T L_i^T P_1 \quad (\text{A.12})$$

$$Q^2 = \lambda_{2C}^{-1} P_2 K_i C C^T K_i^T P_2 \quad (\text{A.13})$$

$$Q^3 = \lambda_1 E_A^T E_A + (\lambda_{1C} + \lambda_{2C}) E_C^T E_C \quad (\text{A.14})$$

pour $i = 1, \dots, r$ et $j = 1, \dots, 2^m$. Finalement, l'inégalité A.7 est vérifiée si :

$$\left(\begin{array}{cccccc} Q_{ij}^{11} + Q^1 & -\tilde{C}_j^T K_i^T P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -P_2 \alpha_i - \alpha_i^T P_2 + I_{n_x} + Q^2 & 0 & \bar{\alpha}_i & P_2 & 0 \\ * & * & Q^{33} + Q^3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Gamma_4 \lambda_B E_B^T E_B \end{array} \right) \quad (\text{A.15})$$

En utilisant le changement de variable 1.38 et le complément de Schur, on retrouve le résultat donné précédemment.

Bibliographie

- [Antsaklis and Michel, 2006] Antsaklis, P. J. and Michel, A. N. (2006). *Linear systems*. Springer Science & Business Media. 1
- [Bezzaoucha, 2013] Bezzaoucha, S. (2013). *Commande tolérante aux défauts de systèmes non linéaires représentés par des modèles de Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Université de Lorraine. 5
- [Bouzrina, 2015] Bouzrina, Djamel-Eddine et Derrar, M. E. M. (2015). Multi-observateur pour un système non linéaire : Application à une station d'épuration. Projet de fin d'études. École Nationale Polytechnique. 10, 17, 20
- [Brogan, 1991] Brogan, W. L. (1991). Modern control theory, 3rd. 1
- [Ding, 2005] Ding, S. (2005). Model-based fault diagnosis in dynamic systems using identification techniques, Silvio Simani, Cesare Fantuzzi and Ron J. Patton, Springer : London, 2003, 282pp. ISBN 1-85233-685-4. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 15(11) :509–512. 1
- [Fragkoulis, 2008] Fragkoulis, D. (2008). *Détection et localisation des défauts provenant des capteurs et des actionneurs : application sur un système non linéaire*. PhD thesis, Université Paul Sabatier-Toulouse III. 2
- [Frank, 1990] Frank, P. M. (1990). Fault diagnosis in dynamic

- systems using analytical and knowledge-based redundancy : A survey and some new results. *Automatica*, 26(3) :459–474. 1
- [Nagy, 2010] Nagy, A. M. (2010). *Analyse et synthèse de multimodèles pour le diagnostic. Application à une station d'épuration*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine-INPL. 10
- [Rugh, 1996] Rugh, W. J. (1996). *Linear system theory*, volume 2. prentice hall Upper Saddle River, NJ. 1
- [Tanaka and Wang, 2001] Tanaka, K. and Wang, H. O. (2001). *Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons. 2