

وزارة التعليم العالي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

1ex

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT Genie Mecanique

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

SYNTHESE DES MOTEURS

EN LIGNE ET EN "V"

Proposé par :

M. BOUKABACHE

Etudié par :

M.B. CHOUCHAOU

Dirigé par :

M. REÇHAK

PROMOTION : Juin 88

SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION..... 1

CHAPITRE -1-

A. PISTON..... 3

A.0 GENERALITES..... 3

A.1 DIFFERENTS TYPES DE PISTONS..... 4

1.0 Pistons à dilatation contrôlée pour moteurs à essence 4

1.1 Pistons pour moteurs Diesel..... 4

A.2 MORPHOLOGIE DU PISTON..... 4

2.0 Tête du piston..... 4

2.1 Forme intérieure du fond..... 5

2.2 Refroidissement..... 6

2.3 Porte segments..... 6

2.4 Jupe..... 7

2.4.1 Guidage..... 7

2.4.2 Ovalisation..... 9

2.4.3 Courbures méridiennes des jupes..... 11

A.3 MATERIAUX POUR PISTONS..... 12

3.0 Symbole..... 12

3.1 Composition chimique..... 12

3.2 Mode d'obtention et état de livraison..... 13

3.3 Caractéristiques mécaniques..... 13

3.4 Dilatabilité thermique..... 13

3.5 Conductibilité thermique..... 13

A.4 DIMENSIONNEMENT DU PISTON..... 13

4.0 Schémas des différents types de pistons..... 13

4.1 Dimensions principales..... 14

4.2 4.1.1 Piston pour moteurs à essence..... 14

4.1.2 Pistons pour moteurs Diesel..... 15

4.1.3 Vérification aux contraintes et déformations... 16

B. LES SEGMENTS..... 20

B.0 GENERALITES..... 20

B.1 ROLE DES SEGMENTS..... 20

B.2 DIFFERENTS TYPES DE SEGMENTS..... 20

2.0 Segment d'étanchéité aux gaz..... 20

2.0.1 Fonctionnement..... 20

2.0.2 Jeu à la coupe..... 20

2.0.3 Etat thermique des segments..... 22

2.0.4 Contact segment-chemise. Segment chromé..... 22

2.0.5 Résistance mécanique du segment..... 23

2.1 Segment racleur d'huile..... 23

2.1.1 Fonctionnement..... 23

2.1.2 Types de segments racleurs..... 23

<u>B.3 ELABORATION DES SEGMENTS</u>	24
3.0 Constitution.....	24
3.1 Fabrication.....	24
<u>B.4 DIMENSIONNEMENT DES SEGMENTS</u>	24
4.0 Nombre de segments.....	24
4.1 Dimensionnement.....	24
4.2 Vérification aux contraintes et déformations.....	25
4.2.1 Vérification des contraintes dans un segment en en place dans un cylindre.....	25
4.2.2 Vérification des contraintes exercées lors de la mise en place d'un segment dans sa gorge.....	26
<u>C. L'AXE DE PISTON</u>	27
<u>C.0 GENERALITES</u>	27
<u>C.1 ROLE DE L'AXE</u>	27
<u>C.2 MATERIAUX POUR AXES</u>	27
2.1 Traitement thermique.....	27
<u>C.3 DIMENSIONNEMENT DE L'AXE</u>	28
3.0 Dimensions générales.....	28
3.1 Vérification aux contraintes et déformations.....	28
3.1.1 Vérification de l'axe à la flèche maximale	28
3.1.2 Vérification de l'axe de l'ovalisation.....	29
3.1.3 Vérification de l'axe à la pression.....	29
spécifique dans les bossages.	
3.1.4 Vérification de l'axe à la contrainte de flexion...29	
3.1.5 Vérification de l'axe à la contrainte d'ovalisation29	
3.1.6 Vérification de l'axe à la contrainte idéale.....30	30
<u>D. LA BIELLE</u>	31
<u>D.0. GENERALITES</u>	31
<u>D.1. CONSTRUCTION DE LA BIELLE</u>	31
1.0. Le corps de bielle	31
1.1. Le pied de bielle.....	31
1.2. Tête de bielle.....	31
<u>D.2. MATERIAUX POUR BIELLE</u>	32
<u>D.3. DIMENSIONNEMENT DE LA BIELLE</u>	32
3.0. Dimensions générales	32
3.1. Vérifications aux contraintes et déformations.....	33
3.1.1. Vérification du corps de bielle.....	33
3.1.2. Vérification du pied de bielle.....	35
3.1.3. Vérification de la tête de bielle.....	36

<u>E. LA BIELLE A OEUIL ET SA BIELLETTE</u>	39
E.0. GENERALITES.....	39
E.1. SCHEMA DU DISPOSITIF BIELLE-BIELLETTE.....	39
E.2. EFFORTS AGISSANT SUR LE DISPOSITIF BIELLE - BIELLETTE.....	40
2.0. Etude dynamique de la bielle.....	40
2.1. Etude dynamique de la biellette.....	40
E.3. SOLLECITATIONS SUBIES PAR LE DISPOSITIF BIELLE-BIELLETTE.....	40
E.4. VERIFICATIONS AUX CONTRAINTES ET DEFORMATIONS.....	40
4.0. Vérifications de la bielle aux contraintes et déformations	40
4.0.1. Vérification du corps de bielle.....	40
4.0.2. Vérification du pied de bielle.....	41
4.0.3. Vérification de la tête de bielle.....	41
4.04 . vérification de l'articulation des têtes de bielle	42
4.1. Vérification de la biellette aux contraintes et déformations	42
4.1.1. Vérification du corps de biellette.....	42
4.1.2. Vérification du pied de biellette.....	42
4.1.3. Vérification de la tête de biellette.....	42
 <u>F. LE VILEBREQUIN</u>	 43
F.0. GENERALITES	43
F.1. LA MANIVELLE.....	43
F.2. MATERIAUX POUR VILEBREQUIN	43
2.0. Vilebrequin de moteur à essence.....	43
2.1. Vilebrequin de moteur diesel.....	43
2.2. Traitement thermique.....	44
F.3. MANIVELLE DU MOTEUR EN LIGNE.....	44
3.0. Vérification de la manivelle à la pression maximale des gaz de combustions.....	45
3.0.1. Maneton.....	45
3.02 . Bras	46
3.0.3. TOURILLON.....	46
3.1. Vérification de la manivelle à l'effort tangentiel max...	46
3.1.1. Maneton.....	47
3.1.2. Bras	48
3.1.3. Tourillons.....	49

<u>F.4. MANIVELLE DU MOTEUR EN "V" SYSTEME</u>	
<u> BIELLE - BIELLETTE</u>	
	49
4.0. Maneton	50
4.1. Bras.....	51
4.2. Tourillons.....	52
<u>F.5. MANIVELLE DU MOTEUR EN V SYSTEME</u>	
<u> BIELLE-BIELLE A FOURCHE.....</u>	
	52
5.0. Maneton	53
5.1. Bras.....	53
5.2. Tourillons.....	55
<u>F.6. MANIVELLE DU MOTEUR EN V SYSTEME</u>	
<u> BIELLES ACCOLEES.....</u>	
	55
6.0. Maneton.....	57
6.1. Bras	57
6.2. Tourillon.....	58
<u>G. VERIFICATIONS DES DIMENSIONS DES</u>	
<u>ELEMENTS MOBILES DES MOTEURS F4L912 ET F8V913 PAR</u>	
<u>LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.....</u>	
	59
<u>G.0. GENERALITES</u>	
	59
0.0. Méthode de calcul par les éléments finis.....	59
0.1. Méthode expérimentale.....	59
<u>G.1. APPROCHE REALISEE</u>	
	60
<u>G.2. CALCUL DES ELEMENTS MOBILES DES MOTEURS</u>	
<u> F4L912 ET F8V913.....</u>	
	60
2.0. Calcul du piston.....	60
2.0.1. Maillage du piston.....	60
2.0.2. Résultats obtenus.....	64
2.1. Calcul de l'axe de piston	64
2.1.1 Maillage de l'axe.....	64
2.1.2 Résultats obtenus.....	66
2.2. Calcul de la bielle.....	66
2.2.1. Maillage de la bielle.....	66
2.2.2. Résultats obtenus	69
2.3. Calcul de la bielle à oeil	69
2.3.1. Maillage de la bielle à oeil	69
2.3.2. Résultats obtenus.....	69
2.4. CALCUL DE LA BIELLETTE	69
2.4.1. Maillage de la biellette.....	69
2.4.2. Résultats obtenus.....	69

CHAPITRE -2-

<u>A. GENERALITES.....</u>	71
<u>A.0. ASPECT HISTORIQUE.....</u>	71
<u>A.1.NECESSITE DE GRAISSAGE</u>	71
<u>A.2.SHEMA DES PRINCIPAUX SYSTEMES DE LUBRIFICATION.....</u>	71
<u>A.3. LES FLUIDES LUBRIFIANTS.....</u>	73
3.0. Lubrifiants liquides.....	73
3.0.1. Etude de la viscosité des liquides.....	73
3.0.2. Propriété des lubrifiants.....	73
3.0.3. Indice de viscosité.....	73
<u>B. ETUDE DU GRAISSAGE DES PARTIES INTERNES</u>	
<u> DU MOTEUR</u>	74
<u> B.0. ETUDE DU GRAISSAGE DES PALIERS</u>	74
0.0. Equation de la mécanique des films minces visqueux.....	74
0.0.1. Equations de base.....	74
0.0.2. Hypothèses de base.....	75
0.1. Equation de REYNOLDS simplifiée.....	75
0.2. Régimes de fonctionnement des paliers.....	75
0.3. Epaisseur du film fluide.....	75
0.4. Résolution de l'équation de REYNOLDS.....	77
0.4.1. Palier de dimension axiale infinie.....	77
0.4.2. Palier infiniment court.....	79
0.4.3. Palier de dimension finie	80
0.5. Déterminations des caractéristiques des paliers.....	90
0.5.1. Charge portante.....	90
0.5.2. Débit de fluide.....	91
0.5.3. Force et couple de frottement.....	94
<u> B.1.ETUDE DU GRAISSAGE DES CHEMISES</u>	98
<u> B.2. ETUDE DU GRAISSAGE DU SYSTEME DE DISTRIBUTION.....</u>	99
2.0. Etude théorique	99
2.0.1. Etablissement des équations du problème.....	99
2.0.2. Résolution des équations obtenues.....	101
2.1. Graissage de la tige et la soupape.....	104

3.1. Equilibrage de la masse alternative...	121
3.1.1. Equilibrage d'un effort de piston la théorie de l'équivalence entre une masse alternative et 2 masses rotatives.....	121
3.1.2. Equilibrage théorique parfait.....	122

A.4. EQUILIBRAGE DES MOTEURS MULTICYLINDRE
 EN LIGNE.....

4.0. Moteur 2 cylindres en lignes, 4 temps	126
4.0.1. Equilibrage des masses rotatives.....	126
4.0.2. Equilibrage des masses alternatives.....	128
4.1. Moteur 3 cylindres en ligne, 4 temps.....	129
4.1.1. Equilibrage des masses rotatives.....	129
4.1.2. Equilibrage des masses alternatives.....	129
4.2. Moteur 4 cylindres, 4 temps.....	139
4.2.1. Equilibrage des masses rotatives.....	139
4.2.2. Equilibrage des masses alternatives.....	140
4.3. Moteur 6 cylindres en lignes, 4 temps.....	141
4.3.1. Equil. Masses rotatives.....	141
4.3.2. Equil. masses alternatives.....	141
4.4. Moteur 8 cylindres en ligne, 4 temps.....	142
4.4.1. Equil. masses rotatives.....	142
4.4.2. Equil. masses alternatives.....	142

B. ETUDE DE L'EQUILIBRAGE DES MOTEURS
 EN "V" SYSTEME BIELLE - BIELLE A FOURCHE.....

B.O. GENERALITES.....	143
0.1. Mise en place des repères-Formules de passage.....	143
B.1. EQUILIBRAGE DES MASSES ROTATIVES.....	146
B.2. EQUILIBRAGE DES MASSES ALTERNATIVES.....	146
2.0. Composition des efforts de piston d'ordre p.....	146
2.1. Equilibrage de la résultante des efforts de piston d'ordre p.....	147
2.1.1. Méthode 1 : Ellipse = cercle + droite.....	147
2.1.2. Méthode 2 : Ellipse = cercle + cercle.....	148
2.1.3. Cas particuliers.....	150
2.2. Composition des couples de galop d'ordre p.....	150
2.3. Equilibrage du couple résultant d'ordre p	151
2.3.1. Méthode 1 : Ellipse = cercle + droite.....	153
2.3.2. Méthode 2 : Ellipse = cercle + cercle.....	153
2.3.3. Cas particuliers.....	155
B.3. EQUILIBRE DES MOTEURS MULTICYLINDRES <u>EN "V" SYSTEME BIELLE-BIELLE A FOURCHE.....</u>	155
3.0. Moteur 6 cylindres en V, 4 temps.....	155
3.0.1. Equil. des masses rotatives.....	155
3.0.2. Equil. des masses alternatives.....	155

3.1. Moteur 8 cylindres en V, 4 temps.....	160
3.1.1 Equil. des masses rotatives.....	160
3.1.2. Equil. des masses alternatives.....	160
3.2. Moteur 12 cylindres en V, 4 temps.....	160
3.2.1. Equil. des masses rotatives.....	160
3.2.2 Equil. des masses alternatives.....	161
3.3. Moteur 16 cylindres, en V, 4 temps	161
3.3.1. Equil. des masses rotatives.....	161
3.3.2. Equil. des masses alternatives.....	161

C. ETUDE DE L'EQUILIBRAGE DES MOTEURS EN "V", SYSTEME BIELLE - BIELLETTE.....161

<u>C.0. GENERALITES.....</u>	162
0.1. Etude des forces dues aux inerties.....	162
0.1.1. Inertie centrifuge.....	162
0.1.2. Inertie alternative.....	162
0.1.3. Inertie de la bielle à oeil et de sa bielle.....	163
0.1.4. Conclusion.....	164
<u>C.1. EQUILIBRAGE DES MASSES ROTATIVES.....</u>	165
1.0. Equilibrage de la masse m_c	165
1.1. Equilibrage de la masse rotative résultante.....	166
<u>C.2. EQUILIBRAGE DES MASSES ALTERNATIVES.....</u>	167
2.0. Développement en série de Fourier.....	167
2.0.1. Expression de $\cos \psi$	167
2.0.2. Expression du déplacement du piston de la rangée II.....	168
2.0.3. Forme explicite de u_2	168
2.1. Expression de l'accélération du piston de la rangée II.....	174
2.2. Expression de la force d'inertie au niveau de la rangée II.....	175
2.3. Equilibrage des inerties alternatives.....	176
2.3.1. Composition des forces.....	176
2.3.2. Composition des couples.....	177

D. ETUDE DE L'EQUILIBRAGE DES MOTEURS EN V, SYSTEME BIELLES ACCOLEES.....179

<u>D.0. GENERALITES.....</u>	179
<u>D.1. EQUILIBRAGE DES MASSES ROTATIVES.....</u>	180
<u>D.2. EQUILIBRAGE DES MASSES ALTERNATIVES.....</u>	181
<u>D.3. EQUILIBRAGE DE MOTEUR EN V SYSTEME BIELLES ACCOLEES.....</u>	185
3.0. Moteur 8 cylindres, 4 temps avec angle d'ouverture 90°	185
3.1. Moteur 8 cylindres, 4 temps avec angle d'ouverture 60° ..	188

CONCLUSION

CHAPITRE -3-

A. ETUDE DE L'EQUILIBRAGE DES MOTEURS EN LIGNE.....106

A.0. GENERALITES.....106

0.0. Définition.....106

0.1. Etudes des différentes sollicitations subies par le moteur.....107

0.2. Etude des forces dues aux inerties.....107

0.2.1. Inertie centrifuge.....107

0.2.2. Inertie alternative.....107

0.2.3. Inertie de la bielle.....107

0.2.4. Résumé.....108

0.3. Nature des efforts et des couples engendrés par les forces d'inertie.....108

0.3.1. Force d'inertie rotative.....108

0.3.2. Force d'inertie alternative.....108

A.1. EQUILIBRAGE DES MASSES ROTATIVES.....109

1.0. Etude théorique109

1.1. Définitions.....109

1.2. Equilibrage théorique parfait.....110

A.2. EQUILIBRAGE DES MASSES ALTERNATIVES.....110

2.0. Equilibrage théorique.....110

2.1. Développement en série de **Fourier**.....111

2.1.1. Développement en série de Taylor.....111

2.1.2. Transformation des puissances de fonctions circulaires en fcts circul. d'arcs multiples..111

2.1.3. Expression de \cos^4111

2.1.4. Expression du déplacement du piston.....113

2.1.5. Expression de l'accélération du piston.....113

2.2. Equilibrage des forces alternatives.....114

2.2.1. Composition des forces d'inertie alternative d'ordre 1114

2.2.2. Composition des forces d'inertie alternative d'ordre p.....116

2.2.3. Equilibrage d'un couple de galopselon la théorie de l'équivalence entre un couple alternatif et 4 masses rotatives.....117

A.3. EQUILIBRAGE DU MOTEUR MONOCYLINDRE.....120

3.0. Equilibrage de la masse rotative120

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

Le moteur thermique est un organe qui transforme de l'énergie calorifique de combustibles, en travail mécanique, occupant par le fait, une place de choix dans l'industrie des moyens de transport.

Ce dernier connut depuis les premières réalisations d'Etienne LENOIR, Nikolaus OTTO, Eugen LANGEN et Rudolf DIESEL, des améliorations considérables, fruits de calculs théoriques fondamentaux, corrigés par de nombreuses expériences d'essai, réalisés en laboratoire, destinées à améliorer ses performances.

Le principe de fonctionnement des moteurs à combustion interne est de transformer un déplacement alternatif du piston, dû à la pression des gaz dans la chambre de combustion et à l'inertie de ce dernier, en mouvement rotatif continu du vilebrequin qui lui est relié par un système d'embiellage en ligne ou en "V", bielle simple, bielle-biellette, bielle-bielle à fourche ou bielles déportées.

Le but de notre étude est de dimensionner les éléments mobiles du moteur en ligne et en "V", le graissage de tout le moteur ainsi que son équilibrage.

Pour cela, ce présent ouvrage comporte 3 grandes parties:

La première s'intéresse au dimensionnement des éléments mobiles du moteur, à savoir, le piston, l'axe de piston, la bielle, la bielle-biellette et le vilebrequin, version essence et Diesel, tenant compte, de son encombrement, de son poids ainsi que des conditions de résistance aux contraintes et déformations par le choix approprié des matériaux.

La seconde partie a pour objet l'étude du graissage de tout le moteur ainsi que la détermination des paramètres caractéristiques de ce dernier: portance, température de régime, et coefficients de frottement, indispensable à la bonne tenue et à la longévité du moteur.

La troisième et dernière partie considère l'étude de l'équilibrage du moteur, qui consiste en la diminution naturelle ou forcée, des efforts et couples d'inertie afin de mieux stabiliser le moteur.

Notre étude est synthétisée par le logiciel "SYNTHESE" existant au niveau du centre de calcul, dont la manuel d'utilisation a été rédigé à part.

CHAPITRE
-I-
DIMENSIONNEMENT
DES ELEMENTS
MOBILES
DES MOTEURS EN
LIGNE ET EN "V"

*L'attelage mobile des moteurs en ligne et en "V" comprend:
Le piston, l'axe de piston, la bielle, la bielle à veil, sa biellette,
la bielle à fourche et le vilebrequin, ce qui constitue le coeur
vivant du moteur.*

*Ainsi, la détermination des dimensions de chaque élément,
tenant compte de l'encombrement du moteur et de son poids, ainsi que
des conditions de résistance aux contraintes par le choix approprié
des matériaux, est d'une importance capitale pour le bon fonction-
nement du moteur.*

*Cependant, on ne peut procéder, à la détermination des dimen-
sions et des formes des organes mobiles des moteurs étudiés en utili-
sant exclusivement les lois de la résistance des matériaux; cette
détermination ne peut être qu'empirique, basée sur l'expérience née de
la conjugaison de l'observation et du raisonnement.*

A. LE PISTON:

A.0 GENERALITES:

Le piston, fond mobile de la chambre de combustion, considéré comme l'organe le plus vulnérable du moteur, se compose :

- D'une tête porteuse de segments, en contact avec les gaz chauds,
- D'une jupe en liaison avec la chemise assurant le guidage du piston,
- D'un axe en liaison avec la bielle lui transmettant les efforts de combustion.

Le piston doit assumer des fonctions multiples tout en sousscrivant à des impératifs discordants, à savoir:

- Recevoir et transmettre les efforts moteurs développés par la combustion des gaz sans subir de déformation appréciable, ce qui motive un matériau de module d'élasticité encore élevé à haute température,
- Recevoir et éliminer une grande partie de la quantité de chaleur dégagée durant la combustion sans subir de déformation notable, ce qui motive un bon coefficient de conductivité thermique,
- Assurer l'étanchéité aux gaz de combustion tout en contrôlant le passage de l'huile de graissage dans la chambre de combustion, ce qui incite à choisir des matériaux à coefficients de dilatation faibles,
- Opérer dans une vaste plage de température, ce qui oriente vers des matériaux à température de fusion élevée et à haute limite élastique à chaud,
- Diminuer au maximum les efforts d'inertie, ce qui conduit à l'adoption d'alliages aussi légers que possible.

Ces fonctions fondamentales du piston, tant d'ordre mécanique que thermique doivent être assurées avec la plus grande sécurité, ce qui rend le piston l'un des organes le plus délicats du moteur, et a donc subi, depuis la création du moteur à explosion, des modifications constantes destinées à améliorer son fonctionnement.

Les qualités exigées aux matériaux pour pistons sont:

- Une bonne conduction,
- Des caractéristiques mécaniques encore élevées à chaud,
- Une bonne résistance à la corrosion par les gaz chauds, et à l'usure,
- Une faible dilatabilité afin de réduire les jeux à froid,
- Une masse réduite,
- Une bonne coulabilité,
- Un usinage facile.

A.1 DIFFERENTS TYPES DE PISTONS:

1.0 Pistons à dilatation contrôlée pour moteur à essence:

Depuis quelques années, les pistons en aluminium se sont imposés. En effet, le seul but était d'alléger le piston pour diminuer les efforts d'inertie, et ce n'est que récemment que l'on a commencé à étudier le comportement thermique des pistons.

La solution au phénomène de dilatation exagérée de l'aluminium était de munir la jupe du piston en alliage léger, de plaquettes en acier. De cette manière, on alliait la bonne conductibilité thermique, le faible poids des métaux légers, à la faible dilatation de l'acier.

Plus tard, on a pu obtenir un contrôle de la dilatation, principalement dans le sens de l'axe avec des plaquettes en acier non allié, vu que les bossages, par leur masse, ont une grande capacité calorifique et absorbent une bonne partie de la chaleur.

1.1 Pistons pour moteur Diesel:

Le facteur prépondérant intervenant dans la réalisation du piston pour moteurs Diesel, est, sans conteste, le facteur température qui, imposant des dispositions constructives destinées à soulager thermiquement les têtes de pistons, entraîne par conséquent, des réalisations nombreuses et variées.

Les effets pernicioeux de la température se manifestent:

- Dans les premières loges de segments par le gommage et l'usure des flancs de gorges,
- Sur la tête et particulièrement, dans les cas de formes complexes, par des fissurations dues aux contraintes thermiques et parfois par des fusions locales.

Parmi les solutions technologiques les plus courantes, adoptées par les constructeurs pour combattre les effets de température, on cite:

- un tracé favorable à la conductibilité thermique, solution à laquelle il est sage de faire appel avant d'envisager des solutions plus complexes,
- Incorporation de métaux plus durs et moins fusibles que les alliages d'aluminium, cette dernière ayant lieu sur les fonds et autour de la première gorge des segments d'étanchéité,
- Refroidissement par l'huile:
avec arrosage des parois intérieures de la tête,
avec circulation à travers la tête.

A.2 MORPHOLOGIE DU PISTON:

2.0 Tête de piston:

la forme de la tête du piston est d'une très grande importance par le rôle qu'elle joue dans la modification de la turbulence, particulièrement pour les moteurs Diesel où une partie de la chambre de combustion peut y être incorporée.

En effet, pour ce type de moteurs, la tête de piston présente une forme particulière suivant l'emplacement de l'injecteur et des soupapes. On distingue les pistons à chambre concave, déportée, à courant circulaire, à chambre plate pour injecteur horizontal, avec évidemment, à chambre lenticulaire...

On note aussi, que, très souvent, le piston comporte des fraisages pour le logement des soupapes, ces dernières pouvant dépasser le plan de joint de la culasse lorsque le piston est au point mort haut (P.M.H.).

Pour les pistons ne présentant pas de symétrie, la répartition des températures n'est pas uniforme provoquant une irrégularité de l'écoulement de chaleur.

Du fait des multiples variations de température, on peut craindre la naissance de criques radiales, le métal à chaud dépassant la limite élastique en compression se crique au refroidissement.

Les solutions envisageables pour remédier à ce défaut se résument en:

- L'augmentation du rayon de raccordement de la boucle avec la partie plane du fond,

- Le polissage de la partie plane du fond voisin du rayon de raccordement pour supprimer les irrégularités d'usinage, pouvant engendrer des amorces de rupture,

- Le rapport d'une partie en acier spécial à haute résistance à chaud dans la partie étranglée.

2.1 Forme intérieure du fond:

La forme intérieure du fond de piston est étudiée pour répondre aux conditions de:

- Résistance mécanique,

- et d'écoulement de chaleur vers la jupe et le porte segment.

Dans le cas du moteur à allumage commandé, le piston soumis à des pressions et températures relativement modérées, peut présenter avec la chemise des jeux faibles; ainsi le porte segment peut évacuer une partie importante des calories recues et assurer la portée latérale.

Par contre, dans le cas du Diesel, le piston doit être considéré comme constitué de deux parties distinctes: le porte segment, d'une part, la jupe, d'autre part, et c'est cette dernière, plus longue que celle conçue pour les moteurs à essence, qui doit évacuer une partie importante des calories entrées par la tête du piston. Cette jupe doit donc être largement développée et généreusement raccordée à la tête. Par ailleurs, il faut également que l'axe du piston Diesel soit éloigné de la tête afin que les températures au contact piston - axe ne réduisent pas trop la viscosité de l'huile interfaciale lubrifiant le déplacement.

Certains constructeurs cherchent à accroître la surface interne du piston en ménageant, sous la tête, des nervures, qui, par ailleurs rigidifient la paroi de tête et permettent un allègement du piston. Néanmoins les gains obtenus dans le domaine thermique sont toujours très faibles, les nervures diminuant la vitesse de circulation du fluide de refroidissement le long des parois.

2.2 Refroidissement:

Afin de diminuer le jeu entre piston et chemise, tant au droit des segments qu'au droit de la jupe, et d'adopter des pistons à parois peu épaisses, on est amené à trouver des modes efficaces de refroidissement des pistons.

Ainsi, la solution facile du jet projeté sur le fond interne de la tête du piston n'est absolument pas judicieuse vu qu'elle ne permet de refroidir que 50 % de la surface exposée aux gaz.

Il faut donc faire circuler l'huile dans une galerie circulaire interne laquelle, après refroidissement retombe dans le carter. On peut pour cela prévoir:

- Un canal d'amenée foré dans la bielle,
Une telle solution ne convient pas aux moteurs rapides d'autant plus qu'elle ne répond pas aux impératifs des conditions rationnelles de refroidissement du piston,

- La circulation continue d'un courant d'huile au sein d'un serpentín incorporé dans la tête,
Cette solution onéreuse est peu efficace. En effet elle exige un débit d'huile, à tout instant, suffisant pour éviter toute élévation de température de nature à provoquer sa carbonisation.

Un autre mode de refroidissement consiste en la projection d'huile depuis le bâtycylindres. Un jet sous pression sort d'un ajutage, fixé sur la paroi du bâtycylindres, alimenté directement par la pompe à huile. Ce jet, à peu près parallèle à l'axe de chaque cylindre se termine dans une cavité ménagée dans la tête du piston.

Cette solution simple présente l'intérêt considérable d'être efficace et parfaitement adaptée aux moteurs rapides; elle demande cependant, que le jet ne soit pas trop ouvert pour que, sans recourir à des solutions difficiles de raclage de l'huile sur la chemise, la consommation d'huile reste convenable.

Un autre effet, dit "effet Shaker" permet le refroidissement du piston. L'huile circule à grande vitesse et sous forte pression le long des parois existant au sein de la couronne du piston, sous l'effet de l'inertie. Cet effet est recommandable au dessus de 500 tr/mn, et pour bénéficier de son plein effet, il faut de larges sections de circulation de l'huile.

2.3 Porte segments:

La partie porte segments doit être tronconique pour aboutir au diamètre de la jupe au droit du dernier segment d'étanchéité.

Cette partie reçoit donc les segments dont le nombre varie selon le type de moteur et l'alésage de son piston et présente à sa base des orifices d'évacuation de l'huile, ces derniers pouvant être situés au fonds de la gorge du racléur, sous celui-ci, ou à cheval sur le flanc inférieur de la gorge.

2.4 Jupe:

La jupe a pour rôle:

- De guider le porte segments,
- De répartir l'effort normal au cylindre dû à l'obliquité de la bielle,
- D'évacuer la chaleur reçue par la tête de piston.

2.4.1 Guidage:

Le piston se déplaçant dans la chemise, il y a glissement des surfaces en contact sous forte pression, et ceci, à grande vitesse et haute température.

Il est donc nécessaire de remédier au grippage du piston dans son alésage par une bonne lubrification de la jupe et des segments, et par un usinage spécial des profils extérieurs de la pièce. En effet, le piston n'ayant pas une architecture symétrique, la température n'étant pas la même en tous les points, la dilatation n'est pas égale dans toutes les directions. On est donc conduit à donner au piston une forme à froid qui, évoluant avec la température, fera que le piston à chaud aura un contact cylindrique avec la chemise dans le sens du battement.

Pour supprimer les risques de grippage et améliorer l'ensemble du comportement du piston, le contact entre ce dernier et le cylindre doit être assuré dans certaines conditions:

- Ce contact doit se limiter à la jupe et ne pas intéresser les cordons porte segments,

- La zone de portée doit avoir la plus grande surface possible afin de diminuer la pression de contact et favoriser la transmission thermique. Il faut cependant éviter l'étalement de la portée vers les trous d'axe, zone critique soumise à des déformations thermiques et mécaniques.

C'est alors dans le façonnage extérieur du piston, c'est à dire par les profils d'usinage, que l'on cherche des solutions à ces problèmes.

Ce façonnage relativement simple autrefois, s'est progressivement compliqué avec l'accroissement des performances des moteurs.

La figure 1.1 schématise les étapes de l'évolution vers des profils complexes caractérisés essentiellement par:

- Des sections ovales dans des plans perpendiculaires à l'axe du cylindre,

- Des méridiennes curvilignes.

Les courbures qui traduisent ces profils, sont de nature expérimentale. Cependant, on exige d'elles au moins 2 qualités:

- La première d'ordre fonctionnel: on admet que dans chaque cas les profils à retenir sont ceux qui, après retouches successives imposées par des essais répétés, se révèlent satisfaisants,

- La seconde d'ordre industriel: il faut produire ces profils fidèlement et économiquement par suggestion d'analogies évitant de nouveaux et trop longs tâtonnements.

fig 1.1: Quelques étapes dans l'évolution des profils simples vers des profils complexes.

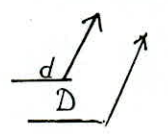
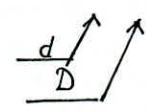
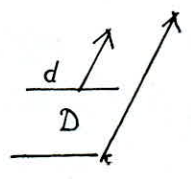
SECTIONS
DROITES
MERIDIENNES

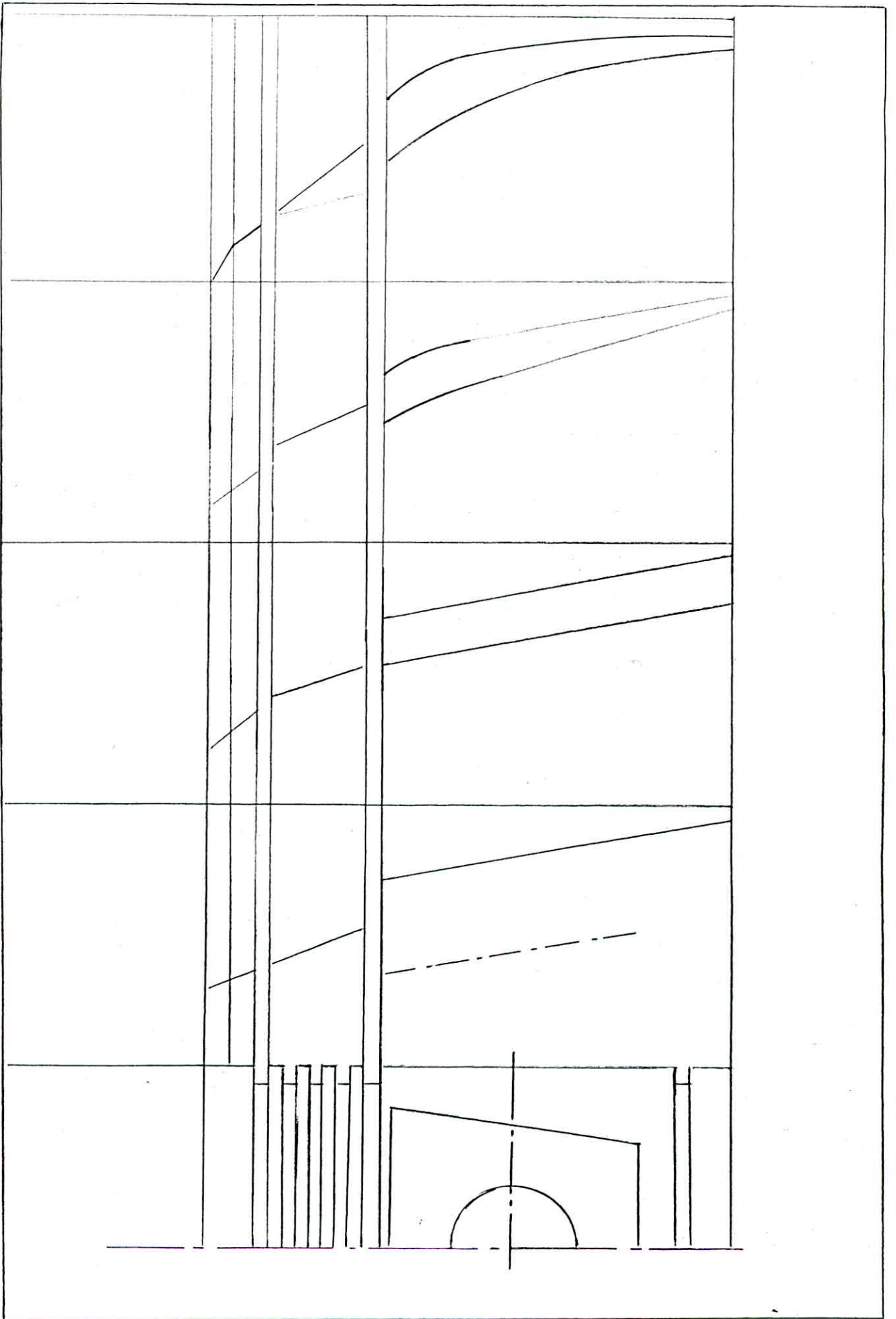
Circulaires
Rectilignes
(1)

Ovales Constantes
Rectilignes
(2)

Ovales Progressives
Rectilignes
(3)

Ovales Progressives
Curvilignes
(4)





2.4.2. Ovalisation des jupes - profils polaires:

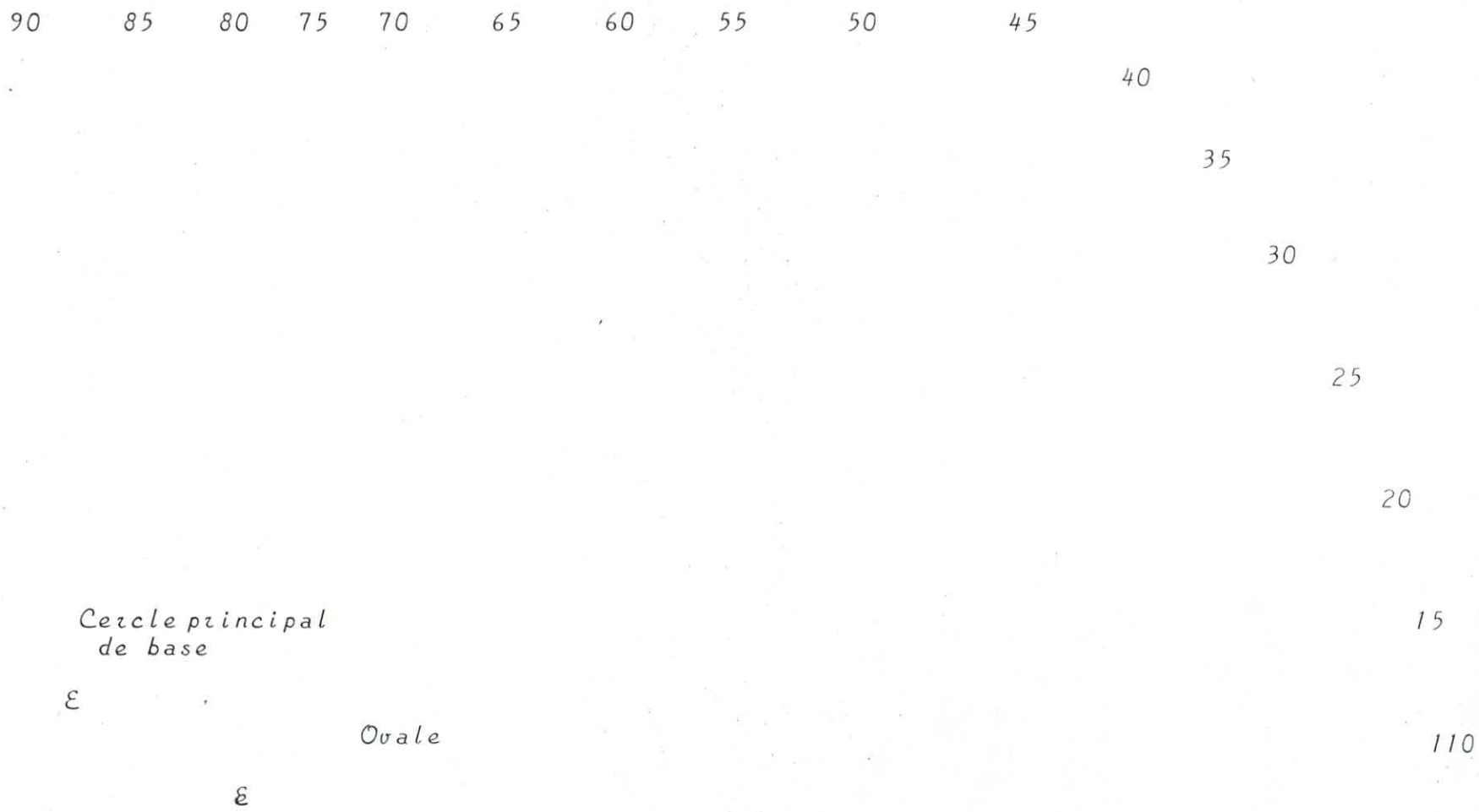
Il est commode de définir la courbe par la différence $D - r = e$ sur le rayon polaire d'angle θ afin de mettre en évidence la différence de diamètre principaux du cylindre et de la jupe.

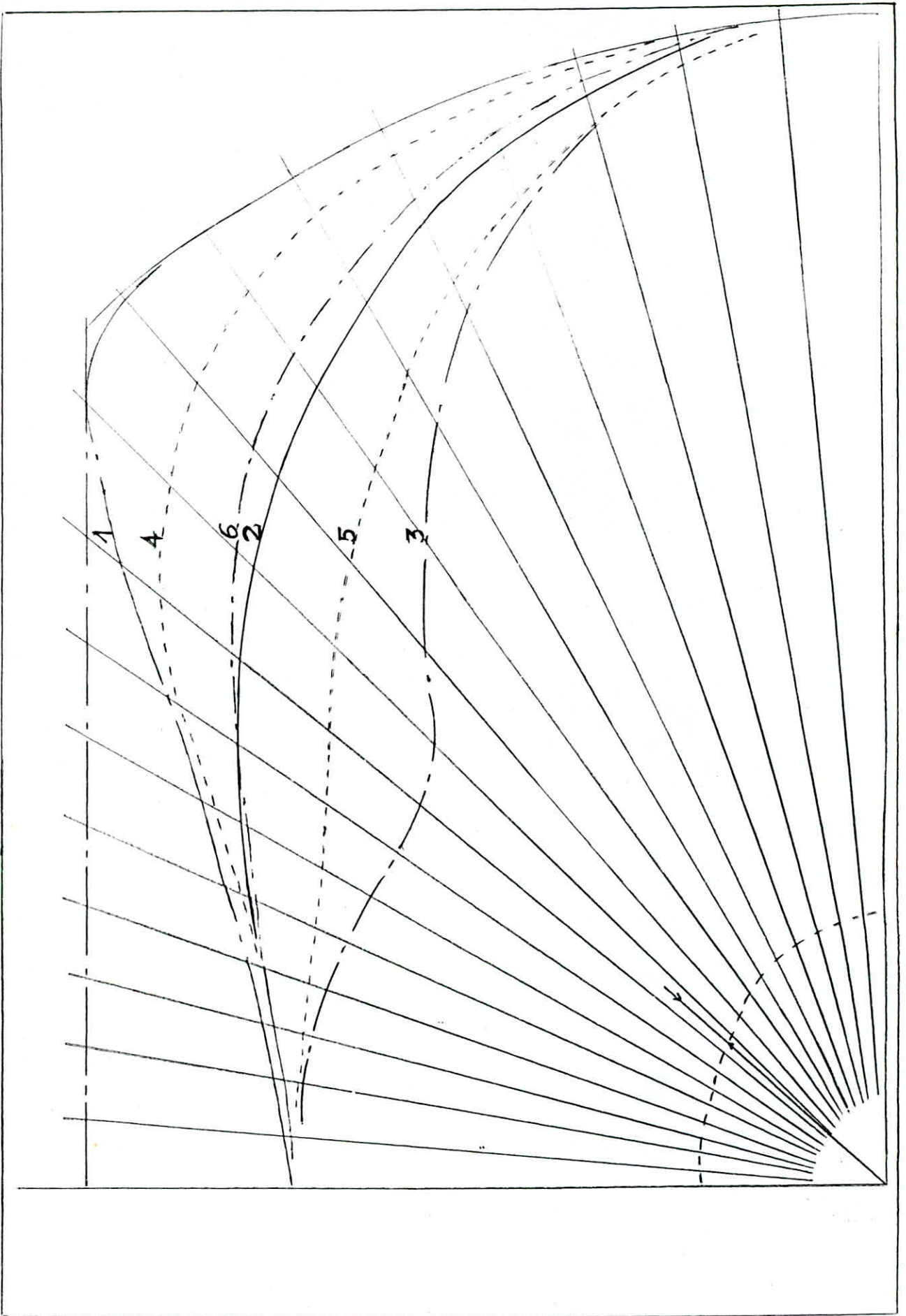
Pour des raisons de précision et de fidélité de reproduction, il est préférable d'adopter parmi les ovales satisfaisants, ceux qui sont engendrables par des cinématiques facilement réalisables, parmi lesquels on peut citer la famille d'équation:

$$e = \frac{D-d}{2} \sin^2 \theta \text{ ou encore } e = \frac{D-d}{4} (1 - \cos 2\theta)$$

La figure 12 représente des profils polaires couramment utilisés actuellement, ayant ou non, une équation simple.

fig 1.2: Profils polaires couramment utilisés actuellement.





a/ Détermination des fuseaux de tolérances:

Le profil polaire n'est réalisable que dans la limite de certaines tolérances, d'où la nécessité de définir des fuseaux de tolérance obtenus pour chaque type de profil polaire par des courbes enveloppes de la famille considérée passant par des points dont les écarts en microns autour de la valeur théorique, sont données par le tableau suivant: [1]

Référence Courbe	Ecart en microns autour de la courbe théorique									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
2	+0	+0,3	+1,2	2,5	+4,1	+5,9	+7	+7	+7	+7
	-0	-0,6	-2,3	-5	-8,3	-11,7	-13	-13	-13	-13
3	+0	+0,5	+2,2	+4,9	+10	+10	+10	+10	+10	+10
	-0	-0,9	-4,5	-9	-10	-10,1	-10	-10	-10	-10
4	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0
	-0	-0,2	-1	-3	-8	-16,6	-20	-20	-20	-20
5	+0	+0,5	+2	+4	+6,1	+7	+7	+7	+7	+7
	-0	-1,1	-4	-8	-12,1	-13	-13	-13	-13	-13

b/ Profils réalisés:

Les profils réalisés et enregistrés, doivent être continus (sans bosses ni vagues), symétriques et doivent s'aligner sur une courbe de la famille considérée, à l'intérieur du fuseau de tolérance.

2.4.3 Courbures méridiennes des jupes:

On arrive généralement à de bons résultats, dans chaque cas particulier, avec une courbure commune à tous les plans méridiens. Les procédés d'usinage exploitables, s'accommodent d'ailleurs de toutes les courbes expérimentales, pourvu que ces dernières soient continues et sans singularités notables.

La prédétermination des courbures méridiennes idéales, reste très délicate dans chaque cas: des courbures distinctes bien que très voisines, conduisant souvent à des résultats très différents. Il est donc nécessaire de mettre en évidence les différences existant entre ces courbes. On peut par exemple construire leur dérivée première.

a/ Jeu au bas de la jupe:

Le jeu relatif au bas de la jupe à froid ($\frac{J}{D} \times 100\%$) est de 0,03 à 0,06 pour les moteurs à essence et de 0,10 à 0,15 pour les moteurs Diesel.

La chemise est alésée à froid à H6. Connaissant le diamètre nominal, on détermine les diamètres maximal et minimal de la chemise. Ceci nous permet de déterminer le diamètre théorique du bas de jupe.

Le diamètre réel du bas de jupe est généralement $D = D_{th} - 0,01$.

b/ Profil réalisés:

Le profil réalisé doit être une courbe continue sans point de rebroussement ou d'inflexion, contenu dans la marge admissible.

A.3.2 ALLIAGES POUR PISTONS:

De façon générale, les alliages d'aluminium sont utilisés pour les pistons qui ne sont pas refroidis.

Les caractéristiques de ces alliages sont:

- Sous l'angle qualité:

légèreté, conductivité, frottement, usinabilité,

- Sous l'angle défauts:

coefficient de dilatation, résistance mécanique.

Les éléments d'addition apportent des améliorations diverses que l'on peut résumer ainsi:

- Silicium: teneur hypoeutectique (<12 %) coulabilité,

teneur hypereutectique (>12 %) résistance à chaud, frottement.

- Cuivre: usinabilité, coulabilité, dureté.

- Nickel: résistance à chaud.

- Mn : 1 à 4 % : dureté à chaud.

- Fe : (0,5 %) facilité de démoulage.

En l'absence d'alliages de composition idéale, on utilise deux types d'alliages:

- Les alliages au Silicium,

- Les alliages au cuivre.

Cependant, soulignons que l'alliage actuellement employé est un eutectique du genre A-S 12 UN ; c'est pour cette raison qu'on a cru bon de donner les caractéristiques complètes d'un tel alliage.

3.0 Symbole: A- S 12 UN.

3.1 Composition chimique:

Eléments	Al	Fe	Si	Cu	Zn	Mg	Mn	Ni	Pb	Sn	Ti
% minimal	le reste	--	11,5	0,5	---b	0,8	--	0,5	--	--	--
% maximal		0,75	13	1,5	0,20	1,5	0;3	1,5	0,20	0,05	0,1

3.2 Mode d'obtention et état de livraison:

A-S 12 UN- Y 33 coulée en moule métallique par gravité, trempé, revenu,
A-S 12 UN- Y 35 coulée en moule métallique par gravité, stabilisé.

3.3 Caractéristiques mécaniques:

Valeurs mini	R.Traction	E.Limite élastique à 0,2% N/mm ²	H.B Dureté Brinel bille 10 mm
Désignation	N/mm ²		
A-S12UN-Y 35	190	150	85

Module d'élasticité: 74 500 N/mm.

Valeurs mini	R.Traction	E.Limite élastique à 0,2 % N/mm ²	H.B Dureté Brinel bille 10 mm
Désignation	N/mm ²		
A-S12UN-Y 33	220	180	100

3.4 Dilatabilité thermique:

Les coefficients moyens de dilatation thermique sont:

- Entre 20 et 100° : $19 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$,
- Entre 20 et 200° : $20 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$,
- Entre 20 et 300° : $21,5 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$.

3.5 Conductibilité thermique:

$$\lambda = 158,84 \text{ W/m } ^\circ\text{C}.$$

A.4 DIMENSIONNEMENT DU PISTON:

4.0 Schéma des différents types de pistons:

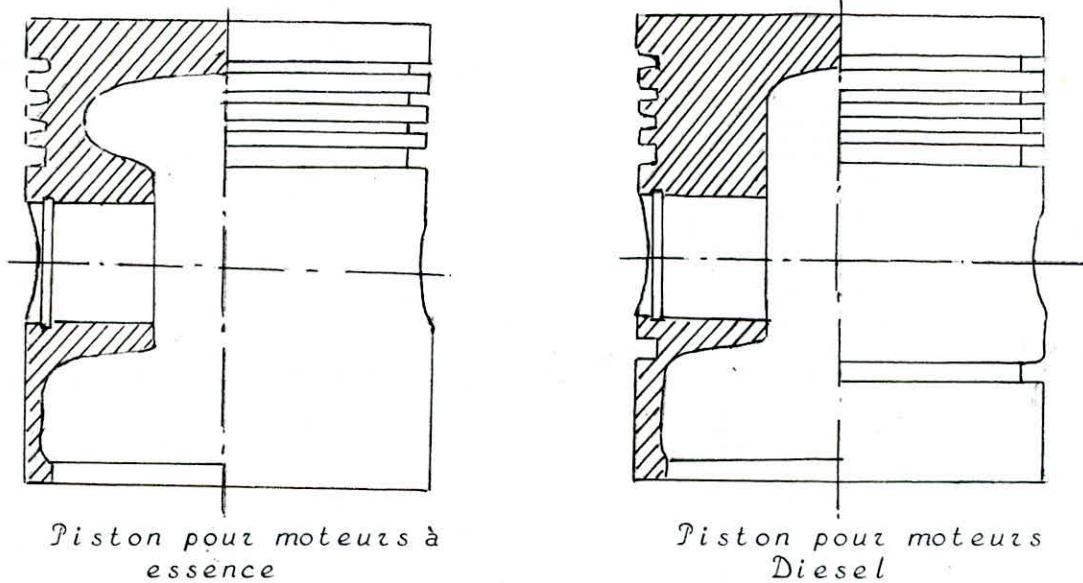


fig 1.3: Schémas de pistons pour moteurs Diesel et à essence.

4.1 Dimensions principales:

4.1.1. Pistons pour moteur à essence:

Les dimensions que nous allons donner, fournies par des statistiques Américaines et Allemandes, concernent les moteurs 4 temps à essence, refroidis par eau.

a/ longueur totale des pistons:

Pour les pistons Américains, la longueur totale varie entre $0,85 D$ et $1,16 D$, les pistons de même longueur que le diamètre formant la majorité.

La longueur totale des pistons Européens se situe entre $0,965 D$ et $1,3 D$.

b/ Hauteur d'axe des pistons:

Par hauteur d'axe, on entend la longueur depuis le centre de l'axe jusqu'au bord de la tête du piston.

Calculée en fonction du diamètre, on trouve pour les pistons Américains, des valeurs entre $0,46 D$ et $0,56 D$, tandis que pour les pistons Européens, on trouve à une exception près, des valeurs entre $0,50 D$ et $0,63 D$.

c/ Longueur de la jupe du piston:

C'est la longueur au dessous de la zone de segmentation. Elle est à peu près la même dans les 2 Continents.

Aux USA, elle est de $0,58 D$ à $0,8 D$, en Europe de $0,58 D$ à $0,96 D$.

d/ Désaxage:

Pour des raisons de silence de marche, les pistons de série, des voitures Américaines et Européennes sont généralement désaxés.

Les pistons dont l'axe est placé hors du centre du piston, empêchent le claquement qui naît au bas de la jupe lorsque, arrivé au P.M.H, le piston change de côté de son appui dans le cylindre.

Le désaxage des pistons Américains varie entre $1,5$ et $2,0$ mm ($0,014$ à $0,022 D$). De même on choisit généralement pour les pistons Européens un désaxage de 1 à 2 mm (soit $0,016 D$ à $0,025 D$).

e/ Jeu:

Jeux à froid piston-chemise dans la zone de segmentation:

- Pistons-chemises Américains: $0,5$ à $0,9$ mm,
- Pistons-chemises Européens: $0,3$ à $0,5$ mm.

Pour les pistons à dilatation contrôlée:

- USA: $0,7 \% D$ dans la zone de segmentation,
- Europe: $0,5 \% D$.

4.1.2 Pistons pour moteur Diesel:

N'ayant pu réunir les mêmes éléments de comparaison que pour les moteurs à essence, nous indiquerons les dimensions générales d'un piston de moteur Diesel 4 temps en alliage d'aluminium-silicium, tel qu'on l'envisage actuellement:

a/ Diamètre de tête:

$$(1-0,007)D$$

b/ Epaisseur du fond de piston:

$$D/8$$

c/ Epaisseur du cordon de tête:

$$0,2 D$$

d/ Diamètre de haut de jupe:

$$D_{jh} = (1-0,003)D$$

e/ Diamètre de bas de jupe:

$$D_{jb} = (1 - 0,0015) D$$

f/ Hauteur de jupe:

$$(0,9 \text{ à } 1) D$$

g/ Hauteur d'axe:

$$(0,7 \text{ à } 0,8) D.$$

4.1.3 Vérifications aux contraintes et déformations:

a/ Vérification de la tête du piston à la flexion:

La contrainte de flexion maximale au niveau de la tête de piston a pour expression:

$$\sigma_f \max = 0,75 (P_{cyl \max} - P_{carter}) (D_{ti} / e_f)^2$$

où: $P_{cyl \max}$ est la pression maximale dans le cylindre,

P_{carter} est la pression dans le carter (atmosphérique),

D_{ti} est le diamètre intérieur du piston

e_f est l'épaisseur du fond de piston.

Cette contrainte doit être inférieure à la contrainte admissible à la flexion du matériau utilisé:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_f \text{ adm} = 200 \text{ à } 300 \text{ daN/cm}^2 \\ 250 \text{ à } 300 \text{ daN/cm}^2 \text{ (avec nervures)} \end{array} \right\} \text{alliages légers.}$$
$$\left. \begin{array}{l} 400 \text{ à } 450 \text{ daN/cm}^2 \\ 900 \text{ à } 2000 \text{ daN/cm}^2 \text{ (avec nervures)} \end{array} \right\} \text{fonte.}$$

b/ Vérification de la tête de piston à la flèche maximale:

La flèche maximale a lieu au centre de la tête du piston et a pour expression:

$$\delta_f \max = \frac{A (P_{cyl \max} - P_{carter}) D_{ti}^4}{76 E e_f^3}$$

où:

E est le module d'élasticité longitudinal du matériau,

A est une constante dépendant du matériau,

$A = 0,175$ pour les aciers

$0,168$ pour l'Al et ses alliages

La flèche maximale de la tête ne doit pas dépasser celle admissible:

$$F_{\text{adm}} = 0,001 \cdot D$$

c/ Vérification à la compression au niveau du porte segments:

La contrainte maximale de compression s'exerçant sur le porte segments a lieu au niveau du segment racleur.

Elle est donnée par:

$$\sigma_c \text{ max} = P_{\text{cyl max}} \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{S_{A-A}}$$

où:

S_{A-A} est la section la plus faible du piston, amoindrie par les trous de graissage se trouvant au niveau du segment racleur.

$$S_{A-A} = \frac{\pi}{4} ((D_{ti} + 2e)^2 - D_{ti}^2) - n \cdot dp \cdot e$$

avec: dp le diamètre des trous de graissage,

n le nombre de trou de graissage.

La contrainte maximale de compression dans la région porte segment doit être inférieure à la contrainte admissible de traction (ou compression).

d/ Vérification à la flexion dans les bossages du piston;

Les bossages du piston sont soumis aux contraintes de flexion dues à la pression des gaz de combustion.

La contrainte maximale de flexion est donnée par:

$$\sigma_f \text{ max} = \frac{M_f \text{ max}}{\frac{J}{v}}$$

où:

J est le moment d'inertie de la section du bossage:

$$J = \frac{\pi}{64} (dp_e^4 - da_e^4)$$

v est la distance de la fibre la plus éloignée de l'axe neutre:

$$v = \frac{dp_e}{2}$$

$M_f \text{ max}$ est le moment de flexion maximal au niveau des bossages:

$$M_f \max = P_{\text{cyl max}} d a e \frac{a^2}{2}$$

e/ Vérification à la pression spécifique au niveau de la jupe du piston:

Afin de permettre un bon guidage du piston dans le cylindre, la pression spécifique sur la jupe du piston doit être limitée.

Cette dernière est donnée par:

$$p_j = \frac{N \max}{D.L_j - S_{\text{deg}}}$$

où:

$D.L_j$ est la projection de la surface de la jupe,

S_{deg} est la surface de dégagement au niveau des trous de l'axe,

$N \max$ est la force latérale maximale sur le piston.

Cette pression spécifique calculée doit être inférieure à la pression spécifique admissible:

$$P_{\text{adm}} = (1,5 \text{ à } 3) \text{ N/mm}^2$$

f/ Vérification à la contrainte thermique sur le piston:

Les variations de température dans le corps du piston sont fonction du temps et des modifications de vitesse et de couple dues à un fonctionnement prolongé et à un régime variable du moteur et provoquent des contraintes thermiques génératrices de déformations conduisant le piston au grippage, et à l'extrême, à des fissurations devront être inférieures à la contrainte thermique admissible pour le matériau constructif.

La contrainte thermique est donnée par:

$$\sigma_{\text{th}} = \epsilon \alpha \frac{\Delta \theta}{2}$$

où:

ϵ est le module d'élasticité longitudinale,

α est le coefficient de dilatation:

= $10 \cdot 10^{-6}$ pour la fonte

$22 \cdot 10^{-6}$ pour l'aluminium,

est la différence de température entre le centre et la périphérie du piston.

En résumé, on tient fortement à noter qu'une fois le piston dessiné, on en fait construire quelques unités dont on vérifie soigneusement la géométrie avant d'en équiper un moteur que l'on entraîne quelques heures au moyen d'un moteur électrique.

Au démontage, on retouche les parties qui porteraient avec excès, on met ensuite le moteur sous charges progressives allant jusqu'à la surcharge.

Si le profil du piston est judicieux, on constate qu'une large surface de la jupe a porté sur le cylindre. L'examen des surfaces de contact et des dépôts de couronne permet de mettre au net un dessin définitif.

B. LES SEGMENTS:

B.0 GENERALITES:

Le segment, pièce la plus délicate du moteur, est un anneau élastique coulissant entre le piston et le cylindre qui le met sous tension et lui impose sa forme.

B.1 ROLE DES SEGMENTS:

Le segment doit, dans des conditions de refroidissement déplorables, supporter des contraintes alternées d'origines tant mécanique que thermique, tout en acquérant de brillantes qualités de frottement en lubrification précaire et tout en assurant deux fonctions capitales pour le comportement fondamental du moteur, fonctions distinctes mais interdépendantes, à savoir:

- Interdire à l'air en cours de compression puis aux gaz de combustion en cours de détente, l'accès du carter vilebrequin,
- Contrôler le débit du nécessaire afflux d'huile remontant vers la tête du piston.

Pour assurer le bon fonctionnement du moteur, les segments doivent obéir à un certain nombre de paramètres:

- Résistance du matériau à l'égard des flexions alternées à haute température,
- Conservation des propriétés mécaniques dans le temps et à chaud,
- Aptitude au frottement à sec,
- Forme géométrique des faces d'appui,
- Formes géométriques et natures des surfaces en regard,
- Jeux segment - piston - cylindre,
- Lubrification,
- Evacuation des calories.

B.2 DIFFERENTS TYPES DE SEGMENTS:

2.0 Segment d'étanchéité aux gaz:

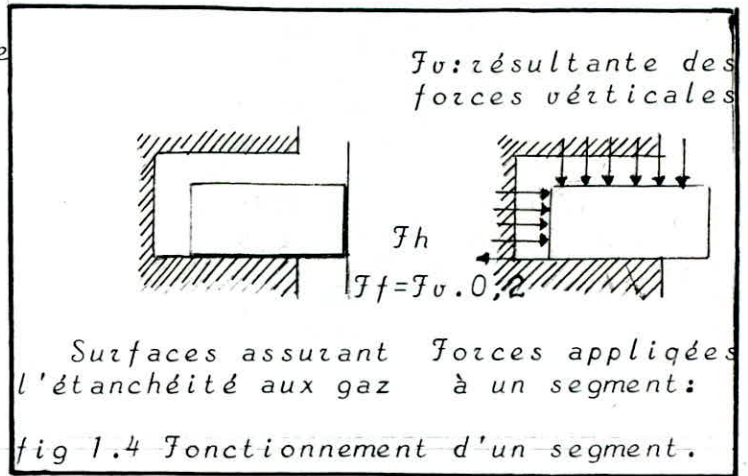
2.0.1 Fonctionnement:

La mission d'étanchéité aux gaz de combustion est assurée:

- D'une part, par appui de la face externe du segment contre le cylindre,
- D'autre part, par appui de la face inférieure du segment contre le piston.

Tout défaut d'étanchéité segment - cylindre laisse libre un passage plus ou moins abondant pour les gaz de combustion, ce qui faisant disparaître la couche d'huile lubrifiant provoque un rapide et intense gripage.

La pression radiale exercée par l'anneau élastique constituant le segment ne peut, à elle seule, assurer l'appui ferme de la face externe du dit segment sur le cylindre. Il est nécessaire qu'un jeu entre le segment et la gorge du piston permette en permanence le libre accès de gaz de combustion sous pression derrière le segment afin d'agir librement sur la face intérieure de celui-ci.



La forme de base de la section droite du segment est rectangulaire, cependant, il existe des formes dérivées qui ont été utilisées, avec des succès divers, dans des applications spécifiques.

Ainsi on note:

- Les segments coniques,
- Les segments à face bombée,
- Les segments chanfreinés,
- Les segments trapézoïdaux.

Selon le type de coupe nécessaire au montage du segment dans les gorges du piston on note:

- Les segments à coupe en sifflet,
- Les segments à coupe en Z,
- Les segments à coupe droite.

Soulignons qu'actuellement la coupe la plus utilisée est la coupe dénommée droite, plus facile à réaliser.

2.0.2 Jeu à la coupe:

Pour avoir une étanchéité aussi complète que possible, il y a évidemment intérêt à réduire le jeu à la coupe existant entre les deux extrémités libres du segment, solution de continuité indispensable pour:

- La création de l'élasticité qui seule permet la nécessaire application du segment sur la paroi du cylindre en dehors du temps de combustion,
- Le fonctionnement à températures variables.

Pour obtenir une tension tangentielle suffisante pour assurer l'application du segment sur le cylindre, il est bon que l'ouverture à l'état libre soit comprise entre $0,1 D$ et $0,15 D$.

Par ailleurs, il est bon de s'assurer que les faces à la coupe ne viennent en contact, segment en place dans le cylindre.

Avec des coupes droites, il est recommandé de ne pas descendre au dessous de 0,006 D pour les segments de tête chromés et 0,004 D pour les moteurs de camions en particulier.

2.0.3 Etat thermique des segments:

Les températures respectives du segment, du piston et de la chemise varient d'un type de moteur à l'autre en fonction de multiples facteurs:

Refroidissement ou non du piston, températures de l'eau de refroidissement, de l'air admis, de l'huile, des gaz d'échappement, turbulence, importance du jeu à la coupe des segments en place.

Pour assurer une bonne transmission thermique entre piston et segment, il est bon que l'épaisseur radiale du segment soit de l'ordre de 0,04 D.

2.0.4 Contact segment- chemise, segment chromé:

La pression réelle au contact segment- chemise est fonction de la valeur de la concordance géométrique. si cette dernière n'est pas correcte, les pressions réelles atteintes sont suffisantes pour rompre le film d'huile et provoquer le frottement à sec.

Lorsque la température atteinte du fait du frottement atteint le point de fusion du matériau, une petite quantité de métal se détache et s'accroche sur la chemise avant d'être arrachée par le déplacement ultérieur du segment, ce qui use la surface intérieure du cylindre.

Pour éviter ces incidents qui conduisent rapidement au grippage généralisé, il faut donc:

- Améliorer la résistance mécanique de l'huile (viscosité dynamique, volatilité),
- Diminuer les températures,
- Améliorer les formes,
- Augmenter le point de fusion du matériau présent sur la face externe du segment par application d'un revêtement à point de fusion plus élevé présentant les qualités :

- Dilatation voisine de celle du matériau du piston,
- Bonne conduction thermique,
- Dureté (résistance à l'usure et à l'insertion de poussières abrasives)
- Résistance à la corrosion
- Et enfin et surtout: le bon accrochage sur les supports.

Les 2 matériaux industriels répondant le mieux à ces conditions sont, le chrome et le molybdène dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau :

	Dilatation .10	Conductivité (cal/cm.s.°C)	Dureté Brinell à 20°C	Résistance à la corrosion
Chrome Cr	6	0,165	125 à l'état moullé 500 à 125 si électrolytique	Bonne
Molybdène	4,5	0,342	147	Oxydation pour 0 300°C

Il est à noter que le chromage des segments est techniquement et financièrement préférable au chromage des chemises, à moins que celles-ci ne doivent être protégées contre la corrosion provenant des gaz de combustion.

2.0.5 Résistance mécanique du segment:

Les conséquences de rupture des segments sont financièrement lourdes car les morceaux de segments, du fait de leur inertie, se frayent un passage dans la couronne du piston et vont détériorer la turbine de suralimentation (pour les moteurs alimentés).

Les ruptures les plus classiques se produisent:

- A l'opposé de la coupe, conséquence d'une ouverture exagérée ou maladroitement lors de la mise en place du segment,
- A quelques cm de la coupe, spécifiques en général, des moteurs à régimes variables, dues à une insuffisance d'ouverture à la coupe,
- Dans le corps même du segment, surtout s'il est chromé, dans des conditions mécaniques initiant des fissures radiales.

2.1 Segment racleur d'huile:

2.1.1 Fonctionnement:

Le segment racleur a pour fin de racler l'huile projetée sur l'intérieur de la chemise à partir du maneton. Cette dernière doit être évacuée vers le carter vilebrequin au travers de la paroi du piston par l'intermédiaire de trous constituant un facteur déterminant.

2.1.2 Types de segments racleurs:

Pour améliorer l'efficacité des segments racleurs, non soumis aux pressions des gaz, il faut augmenter la pression de contact du segment sur la chemise donc diminuer la section de contact, ce qui amène à utiliser des types particuliers de segments, parmi lesquels on cite:

- Les segments à simple étage,
- Les segments à double étage,
- Les segments à expandeur (ressort)...

B.3 ELABORATION DES SEGMENTS:

3.0 Constitution:

Dans la plus part des cas, la fonte est le matériau constitutif de segments.

Ce choix apparemment mauvais, vu les très mauvaises qualités élastiques de la fonte, est motivé par:

- L'aptitude au frottement en lubrification,
- La stabilité de la structure à chaud,
- Le prix de revient

La composition de la fonte pour segments de moteurs Diesel est: 3,5% C+(1,5 à 3)% Si+(0,4 à 1,2)% Mn+ de faibles teneurs de Ni, Cr, Mo, Va...

Depuis quelques années sont fabriqués des segments en acier dont la composition est voisine de:

1% C + 0,25% Si + 0,3% Mn + 1,5% Cr

revêtus extérieurement d'une couche de Chrome afin d'améliorer les caractéristiques de frottement.

3.1 Fabrication:

Les segments sont:

- Soit coulés en anneaux unitaires,
- soit tronçonnés dans des tubes coulés.

Cependant, il est à noter que, les segments coulés en anneaux unitaires présentent une structure plus homogène que celle des segments tronçonnés dans un tube. Ainsi, ils sont préférables, en principe, pour les moteurs poussés. Par ailleurs, les segments de grand diamètre sont coulés en tube pour des raisons de prix de revient de l'outillage, du fait de la fabrication en petites séries.

B.4 DIMENSIONNEMENT DE SEGMENTS:

4.0 Nombre de segments:

Pour les moteurs à essence on a:

- Segments d'étachéité: 2 Si $D \leq 85$ 3 Si $D > 85$
- Segments racleurs: 1

Pour les moteurs Diesel:

- Segments d'étanchéité: 3 Si $D \leq 135$ 4 Si $D \leq 175$ 5 Si $D \leq 200$
- Segments racleurs: 1 1 à 2 2

4.1 Dimensionnement:

Pour moteurs à essence:

- Epaisseur radiale $a = 0,045 D$
- Hauteur du segment $h = (2 \text{ à } 2,5) \text{ mm}$ pour segments compresseurs,
5 pour segments racleurs.

Pour moteurs Diesel:

- Epaisseur radiale $a = (0,038 \text{ à } 0,04) D$
- Hauteur du segment $h = (0,02 \text{ à } 0,025) D$ avec minimum de 3 mm + 2 mm par racleur.

Jeux:

Pour moteurs à essence:

- 1er segment: $J_1 = (0,005 \text{ à } 0,006) D$
- Les autres: $J = 0,8 \text{ mm}$
et 1 mm pour racleur

Pour moteurs Diesel:

- 1er segment: $J_1 = (0,005 \text{ à } 0,0075) D$
- Les autres: $J = 0,003 D$ (jamais inférieur à 0,3 mm. Jeu double pour le racleur afin de faciliter l'évacuation de l'huile).

4.2 Vérification aux contraintes et déformations:

Le principe de calcul d'un segment est basé sur la connaissance:

- De la fonction qu'il doit assumer,
- Des contraintes auxquelles il est soumis, en service d'une part, et au montage d'autre part.

4.2.0 Vérification du segment à la pression sur le cylindre:

La pression exercée par le segment sur le cylindre est donnée par:

$$p = \frac{01. e^3. \varepsilon}{36 \pi R^4}$$

où:

$O1$ est l'ouverture à l'état libre en mm

e l'épaisseur radiale en mm

$R = D/2$ en mm

E est le module d'élasticité du matériau constituant le segment en Kgf/mm

La pression ainsi calculée doit être inférieure à celle admissible, égale

$p = 1,2 \text{ daN/mm}^2$, en pratique

4.2.1 Vérification des contraintes dans un segment en place dans le cylindre:

La contrainte en extension agissant sur la fibre externe du segment est donnée par:

$$\sigma_{\max} = \frac{O1 \cdot E \cdot e}{3\pi R^2}$$

Cette contrainte calculée doit être inférieure à la valeur admissible, laquelle varie (22 à 23) daN/mm^2 pour les fontes.

4.2.2. Vérification des contraintes exercées lors de la mise en place du segment dans sa gorge:

Les fibres internes sont soumises à une contrainte d'extension dont la valeur maximale vaut:

$$\sigma_{c \max} = \left(\frac{6D}{e} + 1 \right) \frac{F}{h e}$$

F étant l'effort appliqué par la pince à segments au bec de ce dernier.

C. L' AXE DE PISTON:

C.0 GENERALITES:

L'axe de piston est un tube épais liant le piston à la bielle, Ce dernier étant placé à travers le pied de bielle, flottant dans les bossages du piston.

L'axe est généralement limité en translation latérale par des circlips prenant appuis dans des rainures ménagées dans les débouchés externes des bossages.

Pour diminuer les effets d'inertie de l'axe, lequel fait partie de la masse alternative (voir chapitre-3-), l'axe peut présenter des extrémités chanfreinées dont le diamètre intérieur est tronconique, solution satisfaisante mais chère.

C.1 ROLE DE L'AXE:

L'axe permet de transmettre l'effort des gaz de combustion par l'intermédiaire du piston auquel il est solidaire, à la bielle.

La situation de l'axe de pistons Diesel est beaucoup plus sévère que celle des pistons à essence, vu que les pressions de combustion sont plus élevées, c'est pour cela qu'il doit particulièrement être largement dimensionné.

C.2 MATERIAUX POUR AXE:

2.0 Nomenclature des aciers employés:

Les matériaux employés pour axes de pistons sont les aciers, dont les 2 principaux sont donnés par le tableau :

NUANCE	Dureté sous couche (daN/mm ²)	Allongement (%)	Dureté extérieure Rockwell	EMPLOI
15 NC D12	90 à 100	12 à 15	58 à 64	Piston à essence
16 NC 6	110 à 130	7 à 10	58 à 64	Piston Diesel

2.1 Traitement thermique:

Le traitement thermique pour axes de pistons est la cémentation extérieure et intérieure de façon qu'en section; la surface non traitée ne soit pas inférieure à 60° de la section totale afin de conserver à l'axe une élasticité suffisante.

L'épaisseur de cémentation a pour valeur:

et pour tolérances $\pm 0,1$ mm pour $0,6 \text{ mm} \leq e \leq 0,3 \text{ mm}$

et $0,6$ mm pour $e > 0,6$ mm.

C.3 DIMENSIONNEMENT DE L'AXE:

3.0 Dimensions générales:

Les dimensions fondamentales de l'axe sont données par:-

- Le rapport d/D :
 $0,25 \leq d/D \leq 0,30$

pour moteurs à essence,

$$0,35 \leq d/D \leq 0,40$$

pour moteurs Diesel.

- La longueur de l'axe:

La longueur L de l'axe se détermine en fonction de D et d suivant la position respective des gorges, des joncs, ou des circlips.

- La largeur b :

$$b = L/2,1$$

- La largeur s :

$$s = b + 2j \text{ avec } j = 1 \text{ à } 3 \text{ mm}$$

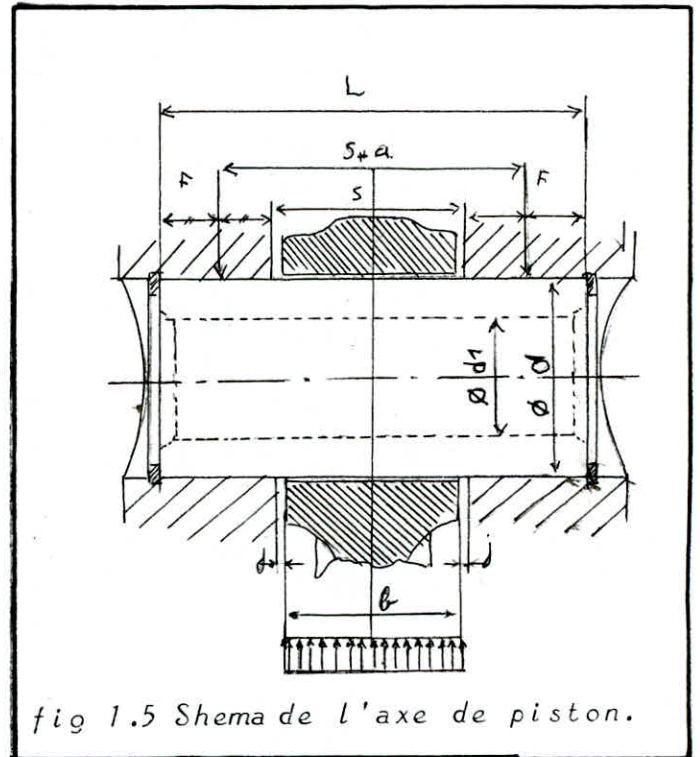


fig 1.5 Schéma de l'axe de piston.

3.1 Vérification aux contraintes et déformations:

3.1.1 Vérification de l'axe de piston à la flèche maximale:

La flèche maximale subie par l'axe est donnée par:

$$f = 0,053 \frac{F \cdot L (L+b)^2}{E(d^4 - d_1^4)}$$

La flèche admissible étant:

$f_{adm}(\text{mm}) = 3,8.10$ pour moteurs à essence,

$F_{adm}(mm) = 1,4 \cdot 10^{-4} \cdot D$ pour les moteurs Diesel.

3.1.2 Vérification de l'axe à l'ovalisation:

L'ovalisation maximale subie par l'axe est donnée par:

$$\zeta = \frac{5}{12} \frac{F \cdot d}{E \cdot L (d - d1)^3}$$

La valeur admissible de l'ovalisation de l'axe étant:

$\zeta_{adm} = (1,25 \cdot 10^{-4} D) + 0,0125$ pour les moteurs Diesel et essence.

3.1.3 Vérification de l'axe à la pression spécifique dans les bossages:

La pression spécifique dans les bossages est donnée par:

$$p_s = \frac{100 \cdot F}{d (L - S)}$$

La valeur de celle-ci doit être inférieure à la pression spécifique admissible:

450 daN/cm² pour les moteurs à essence,

500 pour les moteurs Diesel.

3.1.4 Vérification de l'axe à la contrainte de flexion:

La contrainte de flexion maximale est donnée par:

$$\zeta_f \max = \frac{16 \cdot F \cdot (S/2 - b/4) \cdot d}{\pi (d^4 - d1^4)}$$

Cette contrainte doit être inférieure à la valeur admissible, soit 20 daN/mm².

3.1.5 Vérification de l'axe à la contrainte d'ovalisation

La contrainte d'ovalisation maximale est donnée par:

$$\zeta_o \max = \frac{F d}{L (d - d1)^2}$$

Cette contrainte doit être inférieure à la valeur admissible, soit 14 daN/mm².

3.1.6 Vérification de l'axe à la contrainte idéale:

La contrainte idéale maximale est donnée par:

$$\text{idéale} = \sqrt{\sigma_f^2 + \sigma_o^2}$$

où:

σ_f est la contrainte de flexion maximale,
 σ_o celle d'ovalisation maximale.

Cette contrainte ainsi calculée doit être inférieure à celle admissible, soit 22 daN/mm².

D. LA BIELLE:

D.0 GENERALITES:

Dans toutes les machines à pistons, la bielle est une pièce qui, associée à un piston d'une part, et une manivelle d'autre part, transforme un mouvement rectiligne alternatif en un mouvement rotatif continu.

En règle générale, on fait remarquer que:

- Plus longue est la bielle mieux elle transmet la force qui lui est appliquée,
- Et plus élevée est la vitesse de rotation du moteur, plus légère, soit plus courte, doit être la bielle afin de limiter l'amplitude des efforts d'inertie alternatifs et rotatifs (voir chapitre-3-).

Dans le cas de moteurs thermiques, la bielle transmet à partir de l'axe de piston les efforts des gaz en détente, à la manivelle du vilebrequin.

D.1 CONSTRUCTION DE LA BIELLE:

La bielle est constituée de 3 parties distinctes:

1.0 Le corps de bielle:

Pratiquement, on adopte le profil en I à larges ailes, dont l'âme est dans le plan d'oscillation.

Le corps de bielle doit être:

- Suffisamment rigide pour résister au flambement,
- Aussi léger que possible pour diminuer les effets d'inertie.

1.1 Le pied de bielle:

Le pied de bielle permet à cette dernière la liaison à l'axe de piston.

L'assemblage axe- tête de bielle est du type tournant oscillant sous charge.

Le pied de bielle doit être conçu pour résister aux efforts de traction périodiques dues aux effets d'inertie du piston assemblé en cours de phase d'admission.

1.2 Tête de bielle:

La tête de bielle permet la liaison de cette dernière à la manivelle du vilebrequin.

L'assemblage tête de bielle-maneton est soumis à des efforts dépendant:

- Des forces agissant selon l'axe du cylindre ,
- de l'obliquité de la bielle,
- Et des efforts d'inertie centrifuge de la masse rotative.

Les dimensions de la tête de bielle doivent faciliter son retrait par l'alésage. C'est d'ailleurs dans ce but que certains constructeurs ont recours à une tête de bielle à coupe oblique avec une liaison par boulons pour le bras long et par vis pour le bras court.

Cependant, cette solution, paraissant intéressante, ne peut être admissible que pour les moteurs à essence, les vis et les boulons travaillant de plus au cisaillement, dont la présence d'adents limite l'importance.

D.2 MATERIAUX POUR BIELLE:

Les bielles sont pratiquement obtenues par estampage d'acier mi-dur de nuance X C38 traité pour 800 à 900N/mm^2 , ou encore d'acier au Ni-Cr de nuance 35 NCD6 traité pour 900 à 1000N/mm^2 .

Les alliages d'aluminium, bien que permettant l'allégement de 40 % environ, sont rarement utilisés pour des raisons économiques et des difficultés d'élaboration.

La fonte à graphite sphéroïdale est très employée aux Etats Unis.

D.3 DIMENSIONNEMENT DE LA BIELLE:

3.0 Dimensions générales:

Le dimensionnement général du corps de bielle est très délicat par les impératifs discordant que doit assumer cette dernière.

Le rapport de la section droite du milieu de bielle au carré de l'alésage du cylindre moteur varie de:

$S/D = 0,020$ à $0,025$ dans le cas de moteur à essence

$0,040$ à $0,050$ dans le cas de moteur Diesel.

Les dimensions générales de la section droite d'une bielle pour moteur Diesel sont les suivantes:

- Hauteur $h = (0,3$ à $0,35) D$

- Largeur $a = (0,22$ à $0,37) D$

Le dimensionnement du pied de bielle quand à lui, est essentiellement fonction de la dimension de l'axe de piston, ou encore des pressions exercées sur l'assemblage axe de piston- bielle.

De manière générale, le diamètre d_e de l'axe de piston est d'environ: $0,25 D$ dans le cas de moteurs à essence,

et de $0,4 D$ dans le cas de moteurs Diesel.

La longueur de la portée dans le pied de bielle est de l'ordre de $0,35$ à $0,40 D$.

Le diamètre de la tête de bielle est nettement supérieur au diamètre du pied de bielle, la bielle s'épanouissant depuis son pied à sa tête.

L'alésage de ce dernier est en fait tributaire du diamètre du maneton ainsi que de l'épaisseur du coussinet.

3.1 Vérification aux contraintes et déformations:

3.1.1. Vérification du corps de bielle:

La bielle est soumise à la traction en cours d'admission, à la compression au cours de la compression, détente et échappement; elle est également soumise à des effets de flexion sous des forces d'inertie et dans le cas limite, si la bielle est peu rigide, on peut lui craindre le flambage.

a/ Vérification du corps de bielle à la traction-compression:

La contrainte de compression (dont l'effet est plus en vue) est donnée par:

$$\sigma_{c \max} = \frac{F \max}{S}$$

où:

$F \max$ est la force maximale produite par les gaz en détente,

$$F \max = P_{cyl \max} \pi D^2/4$$

S est la section droite du corps de bielle,

$$S = e (2a + h) - 2e^2$$

Cette contrainte doit être inférieure à la valeur admissible du matériau de la bielle.

b/ Vérification du corps de bielle à la flexion:

Les contraintes d'inertie subies par la bielle sont dues au seul corps de bielle, les inerties du pied et de la tête de bielle intéressant respectivement l'axe de piston et le maneton.

Un point quelconque M_2 situé à l'abscisse x du pied de bielle ayant une accélération égale à $d^2\varphi/dt^2 \cdot x$, l'effort d'inertie pour une bielle de section constante, maximale lorsque la bielle est perpendiculaire à la manivelle est alors:

$$Q = 0,5 SL \rho w^2$$

où:

Q est l'effort d'inertie,

L la longueur de la bielle,

R le rayon de la manivelle,

S la section de la bielle, supposée

ρ la masse volumique de la bielle,

w la vitesse angulaire.

Le moment de flexion en chaque point vaut ainsi:

$$M_f = \frac{Q}{3} x - Q \left(\frac{x^2}{L} \right) \frac{x}{3} = \frac{Q}{3} \left(x - \frac{x^3}{L^2} \right)$$

dont la valeur maximale a lieu en un point d' abscisse X_{\max} tel que

$$\frac{dM_f}{dx} = 0 \text{ soit alors } X_{\max} = L/\sqrt{3}.$$

Cependant, vu que S n'est en réalité pas constante, on adopte $X_{\max} = 2L/3$.

Le moment fléchissant maximal vaut ainsi:

$$M_{f \max} = \frac{10}{81} Q \cdot L$$

La contrainte maximale de flexion agissant sur le fût de la bielle vaut:

$$\sigma_{f \max} = \frac{M_{f \max}}{\frac{I_x}{v}}$$

Cette contrainte ainsi calculée doit être inférieure à la valeur admissible de la contrainte de flexion dans le corps de bielle.

c/ Vérification du corps de bielle au flambage.

Le corps de bielle doit dans les conditions les plus sévères résister au flambement tant dans le plan d'encastrement que dans le plan d'oscillation.

Le corps de bielle, en tant que poutre colonne est tributaire de la formule de Rankine, dont l'expression est:

$$\text{Contrainte} = \frac{\text{effort}}{\text{section droite}} \left(1 + k \left(\frac{l}{\rho} \right)^2 \right)$$

où:

l est la longueur critique de flambement,

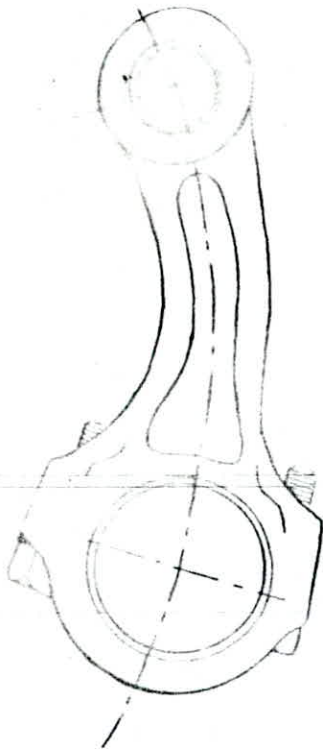
ρ est le rayon de giration:

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{S}}$$

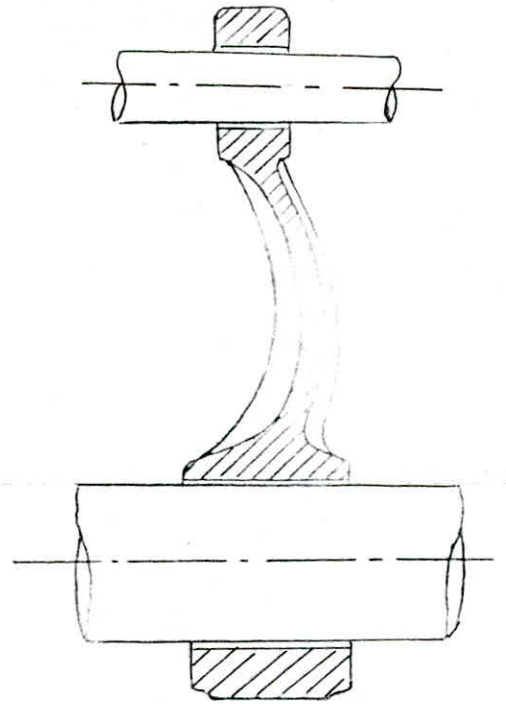
k est un coefficient numérique dépendant du type de fixation des extrémités:

$k = 4$ dans le plan d'encastrement,

16 dans le plan d'oscillation.



Flambage de la bielle dans le plan d'oscillation



Flambage de la bielle dans le plan d'encastrement.

fig 1.6 Flambage de la bielle dans le plan d'oscillation et celui d'encastrement.

La longueur critique dans le plan d'oscillation étant double de celle dans le plan d'encastrement, le taux de travail au sein de la bielle est uniforme si: $I_y = 4I_x$

avec:
$$I_x = \frac{(h-2e')e^3}{12} + 2 \frac{e'a^3}{12}$$

I_y étant donnée antérieurement.

3.1.2 Vérification du pied de bielle:

Les efforts d'inertie provoquent au sein du pied de bielle, des sollicitations composés de flexion et de traction.

a/ Vérification du pied de bielle à la flexion:

La contrainte de flexion au niveau du pied de bielle a pour expression:

$$\sigma_f = k_1 \frac{F_i \cdot r}{J/v}$$

où: F_i est la force d'inertie alternative (voir chapitre-3-),
 k_1 une valeur numérique donnée par le tableau 1.3 en fonction
de Θ et Θ_{enc} (l'angle d'encastrement):
tableau 1.3:

Θ	0°	30°	60°	90°	120°	135°	150°
$K1.10$ $\Theta=120^\circ$	-20	-0,11	+0,11	+0,45	-2,3		
$K1.10$ $\Theta=135^\circ$	-0,84	-0,52	+0,33	+1,50	-0,38	-6,0	
$K1.10$ $\Theta=155^\circ$	-1,29	-1,96	-0,53	3,02	2,44		-10,81

$K2 = 0,50$ excepté à l'encastrement où on prend:

Θ	120°	135°	150°
$K2$	0,48	0,43	0,37

b/ Vérification du pied de bielle à la traction:

La contrainte de traction au niveau du pied de bielle
a pour expression:

$$\sigma_t = k_2 \frac{F_i}{H_p a}$$

La constante numérique k_2 étant de même, donnée par le
tableau 1.3 en fonction de Θ et Θ_{enc} .

c/ Vérification du pied de bielle à la contrainte résultante:

La contrainte résultante est obtenue par composition
algébrique des contraintes de flexion et de traction:

$$\sigma_{rés} = \sigma_t + \sigma_f$$

Cette dernière doit être inférieure à la valeur admi-
ssible.

3.1.3 Vérification de la tête de bielle:

La méthode qui précède s'applique également au calcul
des contraintes dans la tête de bielle, cependant il faut tenir
des contraintes supplémentaires dans le serrage du coussinet.

La fixation du chapeau de tête de bielle peut être réalisée:

- Par vis:

Cette solution adaptée par quelques constructeurs automobiles, permet un ensemble plus compact et moins cher.

Cependant, la technique de réalisation reste délicate.

- Par goujons venus de forge avec le corps de bielle:

Cette solution impose que toute la bielle soit exécutée dans l'acier requis pour les goujons et son remplacement en cas d'avarie de filetage, ce qui la rend très peu utilisée.

- Par boulons:

Cette solution est plus couramment utilisée, c'est d'ailleurs pour cette raison que nous évoquons le dimensionnement de ces derniers.

a/ Vérification de l'assemblage chapeau-tête de bielle:

Sous l'effet du serrage initial F_0 :

- L'assemblage subit une contraction:

$$l_c = \frac{f_0}{k_A} \quad \text{avec: } k_A = \frac{E_A \cdot S_A}{l_A} \quad (\text{la raideur de l'assemblage})$$

- Le boulon subit un allongement:

$$a_0 = \frac{F_0}{k_B} \quad \text{avec: } k_B = \frac{E_B \cdot S_B}{l_B} \quad (\text{la raideur du boulon}).$$

Si, à l'état d'équilibre, on applique un effort extérieur F tendant à séparer les éléments, on notera une décompression dans l'assemblage et une extension dans le boulon.

En effet, la longueur l_{A_0} de l'assemblage comprimé passe de $l - c_0$ à $l_A = l - c$ avec $c < c_0$.

La longueur active l_{B_0} du boulon quand à elle devient $(l+a) - a$ avec $a > a_0$.

L'effort F se répartit en F_A et F_B sollicitant respectivement l'assemblage et le boulon, de telle manière que:

$$c = \frac{F_0 - F_A}{k_A} \quad \text{où: } c > 0 \quad \text{impliquant que } F_0 > F_A.$$

$$\text{et: } a = \frac{F_0 + F_B}{k_B}$$

Ecrivons la conservation des déformations:

$$a_0 + c_0 = a + c \quad \text{soit: } d$$

$$\text{on aura ainsi: } \frac{F_0}{k_A} + \frac{F_0}{k_B} = \frac{F_0 - F_A}{k_A} + \frac{F_0 + F_B}{k_B} = \frac{F_0}{k_A} - \frac{F_A}{k_A} + \frac{F_0}{k_B} + \frac{F_B}{k_B}$$

$$\text{ou encore: } \frac{F_A}{k_A} = \frac{F_B}{k_B}$$

On déduit que l'effort auxiliaire F se répartit entre boulon sous tension et l'assemblage comprimé, de façon proportionnelle à leurs facteurs de raideur, dans la mesure où le serrage initial soit supérieur à la force additionnelle.

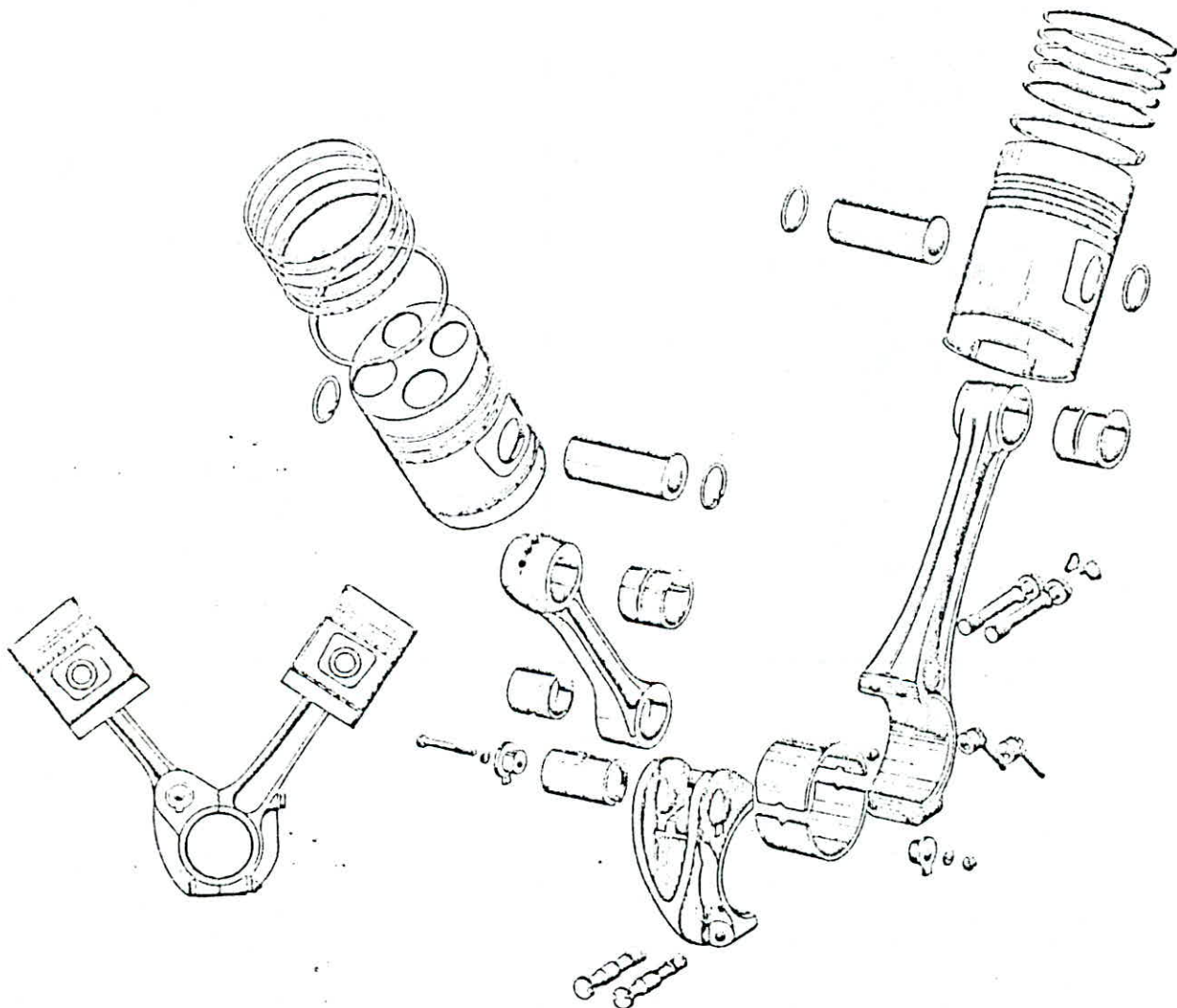
E. LA BIELLE à OIE et sa BIELLETTE:

E.O GENERALITES:

La disposition bielle-biellette est très intéressante par sa très grande rigidité ainsi que par sa régularité et meilleure équilibrage.

Dans ce présent paragraphe, nous allons faire une analyse dimensionnelle de ce système, analogue à celle faite pour la bielle du moteur en ligne, ces dernières travaillant dans des conditions similaires.

E.1 SCHEMA DU DISPOSITIF BIELLE-BIELLETTE:



E.2 EFFORTS AGISSANT SUR LE DISPOSITIF BIELLE- BIELETTE:

2.0 Etude dynamique de la bielle:

La bielle est sollicitée par l'action \vec{F}_{B_1} de l'axe de piston de la rangée I d'une part et par les actions de l'axe de maneton et celui de l'articulation des têtes de bielles d'autre part.

2.1 Etude dynamique de la biellette:

La biellette est quand à elle sollicitée par l'action de l'axe de piston de la rangée II d'une part, et par celle de l'articulation des têtes de bielle d'autre part.

E.3 SOLLICITATIONS SUBIES PAR LE DISPOSITIF BIELLE- BIELETTE:

La bielle comme la biellette sont sollicitées par la traction, en temps d'admission des rangées I et II respectivement, à la compression en temps de compression, détente et échappement des cylindres I et II, ainsi qu'au flambage dans les deux plans, d'encastrement et d'oscillation.

E.4 VERIFICATIONS AUX CONTRAINTES ET DEFORMATIONS:

4.0 Vérification de la bielle aux contraintes et déformations:

4.0.1 Vérification du corps de bielle:

a/ Vérification du corps de bielle à la traction-compression:

La contrainte maximale à la compression a lieu en début de détente du piston de la rangée et a pour expression:

$$\sigma_c \max = \frac{F_{l \max}}{S}$$

$F_{l \max}$ étant l'effort maximal produit par les gaz de la détente,

S la section droite de la bielle.

Cette contrainte doit être inférieure à la valeur admissible.

b/ Vérification du corps de bielle à la flexion:

La contrainte de flexion dans le fût de la bielle, due aux inerties, est donnée par:

$$\sigma_f \max = \frac{M_f \max}{I/\sigma}$$

où le moment de flexion maximal vaut:

$$M_f \max = \frac{10}{83} Q \cdot L$$

Q étant la force maximale de flexion.

Cette contrainte doit être inférieure à la valeur admissible.

c/ Vérification du corps de bielle au flambage:

Le corps de la bielle à oeil doit être vérifié au flambage, dont la contrainte maximale est donnée par la formule de Rankine, et ceci dans les deux plans, d'oscillation et d'encastrement.

Dans le plan d'oscillation:

$$\sigma_{fl \max} = \frac{f_{B1} \cdot m_{ca}}{S} (1 + k_1 (\ell / \rho_1)^2) \quad k_1 = 16$$

Dans le plan d'encastrement:

$$\sigma_{fl \max} = \frac{f_{B1} \cdot m_{ca}}{S} (1 + k_2 (\ell / \rho_2)^2) \quad k_2 = 4$$

Les conditions de résistance devant être vérifiées.

4.0.2 Vérification du pied de bielle:

a/ Vérification du pied de bielle à la flexion:

La contrainte de flexion dans le pied de bielle est:

$$\sigma_f = k_1 \frac{F_i \cdot r}{(I/c)}$$

F_i étant la force d'inertie de la masse alternative de la rangée (voir chapitre-3-),
 k_1 préalablement donné.

b/ Vérification du pied de bielle à la traction:

La contrainte de traction au niveau du pied de bielle est:

$$\sigma_t = k_2 \frac{F_i}{H_p a}$$

k_2 préalablement déterminée.

c/ Vérification du pied de bielle à la contrainte résultante:

La contrainte résultante est donnée par:

$$\sigma_{res} = \sigma_f + \sigma_t$$

cette dernière devant être inférieure à la valeur admissible.

4.0.3 Vérification de la tête de bielle:

Vue l'action additionnelle de la biellette au niveau de l'articulation des têtes de bielles, le chapeau de tête de bielle se trouve plus sollicité que pour le moteur en ligne.

C'est d'ailleurs pour cela que l'on fait recours à l'utilisation de 4 boulons de fixation.

Le principe de calcul de ces derniers est identique à celui des boulons de la bielle simple du moteur en ligne.

4.0.4 Vérification de l'articulation des têtes de bielles:

L'articulation des têtes de bielles est vérifiée:

- A la flexion,
- A la traction,
- A la résultante de ces actions.

La vérification à ces contraintes est analogue à celle du pied de bielle.

4.1 Vérification de la biellette aux contraintes et déformations:

4.1.1 Vérification du corps de biellette:

Le corps de biellette est vérifié:

- A la traction-compression,
- A la flexion,
- Et au flambage.

La vérification à ces contraintes est analogue à celle du corps de bielle.

4.1.2 Vérification du pied de biellette:

Le pied de biellette est vérifié:

- A la flexion,
- A la traction,
- Et à la résultante de ces actions.

La vérification à ces contraintes est analogue à celle du pied de bielle.

4.1.3 Vérification de la tête de biellette:

La biellette étant pratiquement symétrique, le calcul de la tête de bielle est identique à celui du pied de biellette.

7. LE VILEBREQUIN:

7.0 GENERALITES:

Le vilebrequin est le dernier élément de la chaîne cinématique qui transforme le déplacement rectiligne alternatif du piston en un mouvement rotatif continu de la manivelle.

Le vilebrequin connaît 2 types de contraintes:

- Les contraintes résultant du couple engendré, dont la valeur moyenne accuse les variations cycliques des efforts reçus,
 - La résultante de ce couple et de ces efforts cycliques:
 - Soumet le vilebrequin à des contraintes de fatigue,
 - Compromet la géométrie de l'assemblage vilebrequin-paliers,
 - Risque de dégrader sous l'effet de flexion, l'alignement des paliers,
- Les contraintes provoquées par les déplacements dus aux vibrations créées au sein du matériau élastique par les variations cycliques des efforts.

Aussi, il est à noter que le vilebrequin n'est pas une pièce à remplacer fréquemment tant à cause de son prix de revient que de son emplacement.

7.1 LA MANIVELLE:

L'objectif est de produire des vilebrequins de coûts modérés qui, pour un poids et un encombrement aussi faibles que possible, soient capables de supporter infiniment les charges maximales de service.

7.2 MATERIAUX POUR VILEBREQUIN:

2.0 Vilebrequin de moteurs à essence:

Les faibles dimensions des éléments constitutifs permettent l'adoption de vilebrequins coulés:

- Soit en fonte,
- soit en acier de composition:

1,2 % de carbone, 1,5 % de cuivre et 0,6% de chrome.

De nombreux constructeurs préfèrent néanmoins des aciers forgés, aciers spéciaux traités de nuance 25 NCD16, 35 NC6, ou 42CD4.

2.1 Vilebrequins de moteurs Diesel:

Les vilebrequins Diesel, sauf cas particulier, sont en acier forgé.

Ainsi pour les moteurs Diesel à moyenne vitesse de

rotation et non suralimentés, on choisit des vilebrequins en acier mi-dur de nuance XC45, par contre les vilebrequins des Diesel rapides suralimentés, sont en :

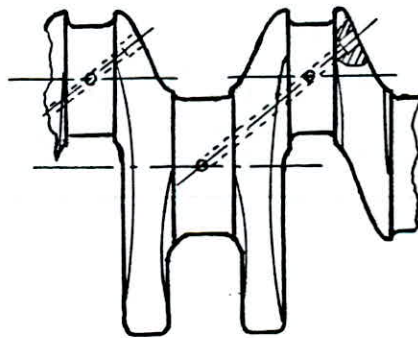
- Acier au Ni-Cr-Mo de nuance 25 NCD15 (25% de carbone, 4% de Nickel, 1,2% de chrome et 0,5% de molybdène),
- Acier au Ni-Cr de nuance 35 NC6 (0,35% de C, 1,5% Ni, 1% Cr),
- Acier au Cr-Mo de nuance 42 CD4 (0,42% C, 1% Cr, 0,25% Mo et 0,7% Mn).

2.2 Traitement thermique:

Les traitements thermiques appliqués au corps du vilebrequin est, dans toutes les nuances, pratiquement le même:

- Trempe à l'huile à 850°C
- Revenu à 625°C.

F.3 MANIVELLE DU MOTEUR EN LIGNE:



Fig^{1.7}: of manivelle du moteur en ligne

La manivelle du moteur en ligne est vérifiée:

- A l'effort maximale des gaz de combustion,
- A l'effort tangentiel maximal,
- Et aux efforts d'inertie (voir chapitre-3-)

3.0 Vérification de la manivelle à la pression maximale des gaz de combustion:

Au PMH, la composante $Y_A(0)$ de l'action \vec{F}_A de la bielle sur la manivelle, se traduit dans les paliers adjacents par 2 réactions \vec{R}_A et \vec{R}_B telles que:

$$\vec{R}_A = \vec{R}_B = \frac{Y_A(0)}{2} \vec{y}_1$$

Sous l'effet de ces forces, les éléments de la manivelle seront sollicités comme suite:

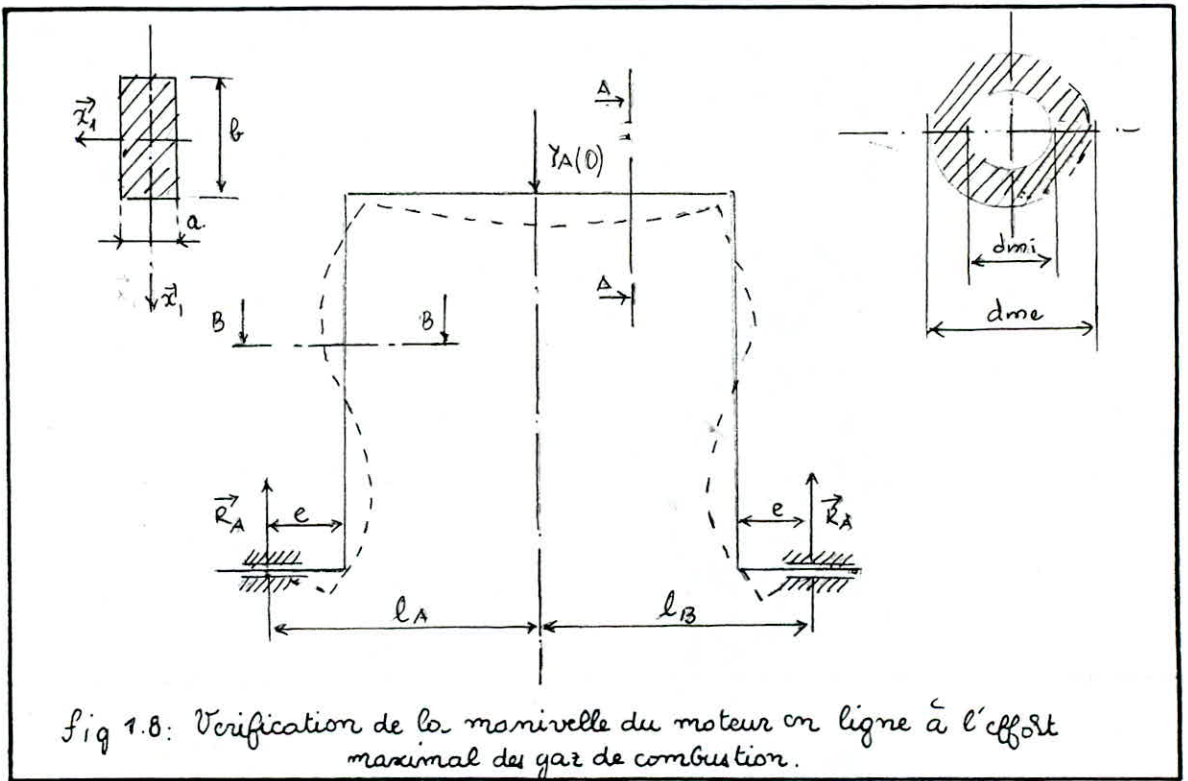


Fig 1.8: Vérification de la manivelle du moteur en ligne à l'effort maximal des gaz de combustion.

3.0.1 Maneton:

Le maneton est soumis à une flexion dans le plan de la manivelle, de moment:

$$\mathcal{M}_{f_{man}} = -R_A l_A \vec{x}_1$$

La contrainte de flexion dans le maneton est:

$$\sigma_{f_{man}} = \frac{\mathcal{M}_{f_{man}}}{J/v} \quad \text{avec} \quad \mathcal{M}_{f_{man}} = |\mathcal{M}_{f_{man}}| = R_A l_A$$

d'où :

$$d_{me} \geq \left(\frac{32 R_A l_A}{\pi (1 - K_m) \sigma_{f_{man, adm}}} \right)^{1/3}$$

$$J/v = \frac{\pi}{64} \frac{(d_{me}^4 - d_{mi}^4)}{2}$$

3.0.2 Bras:

Les bras sont sollicités à la compression dont la contrainte est:

$$\sigma_{c \text{ bras}} = \frac{R_A}{S_b} \quad \text{où: } S_b = a \cdot b$$

La condition de résistance impose que:

$$S_b \geq \frac{R_A}{\sigma_{c \text{ bras adm}}}$$

Ils sont également sollicités à la flexion, dont le moment est:

$$\vec{M}_{f \text{ bras}} = -R_A \cdot e \vec{x}_1$$

La contrainte à la flexion dans le bras est:

$$\sigma_{f \text{ bras}} = \frac{M_{f \text{ bras}}}{J/G} \quad \text{avec: } M_{f \text{ bras}} = |M_{f \text{ bras}}| = R_A \cdot e$$

$$J/G = \frac{a^3 b}{12} / \frac{a}{2} = \frac{a^2 b}{6}$$

La condition de résistance impose que:

$$a \geq \frac{(R_A \cdot e)}{S_b \cdot \sigma_{f \text{ bras adm}}} \quad S_b \text{ étant déjà déduite.}$$

3.0.3 Tourillons:

Les tourillons sont sollicités:

- A la flexion dont le moment fléchissant vaut:

$$\vec{M}_{f \text{ tour}} = -R_A \cdot e \vec{x}_1$$

La contrainte de flexion dans les tourillons est:

$$\sigma_{f \text{ tour}} = \frac{M_{f \text{ tour}}}{J/G} \quad \text{avec: } M_{f \text{ tour}} = |M_{f \text{ tour}}| = R_A \cdot e$$

$$J/G = \frac{\pi}{32} \frac{d_{te}^4 - d_{ti}^4}{d_{te}}$$

En posant, $k_t = \frac{d_{ti}}{d_{te}}$, la condition de résistance s'écrit: $d_{te} \geq \left(\frac{32 \cdot R_A \cdot e}{\pi (1 - k_t^4) \cdot \sigma_{f \text{ tour adm}}} \right)^{1/4}$

3.1 Vérification de la manivelle à l'effort tangentiel maximal:

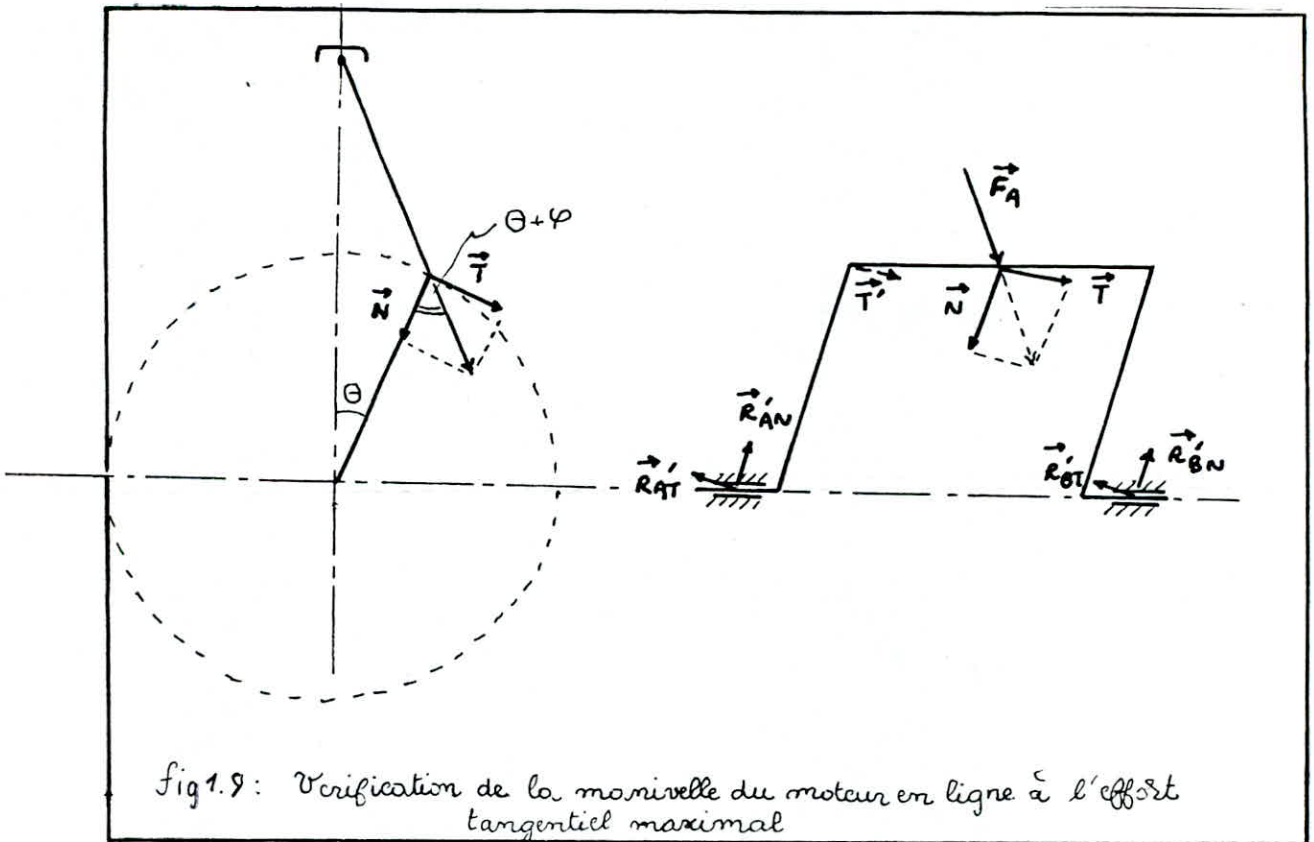
L'effort maximal tangentiel de la bielle se produisant environ à 35° après le PMH se décompose en:

- Une force tangentielle: $\vec{T} = F_A \sin(\theta + \varphi) \vec{x}_1$,

- Et une force radiale: $\vec{N} = F_A \cos(\theta + \varphi) \vec{y}_1$.

dans chacune se traduit dans les paliers adjacents par un couple de réactions parallèles et équivalentes à celles d'origine, données par:

$$R'_{AN} = R'_{BN} = -\frac{\vec{N}}{2} \quad \text{et} \quad R'_{AT} = R'_{BT} = -\frac{\vec{T}}{2}$$



3.1.1 Maneton:

Chacun des efforts \vec{N} et \vec{T} fait subir au maneton une flexion, l'effort \vec{T} lui fait, de plus, subir une torsion (engendrant le couple moteur).

Il est à noter que nous négligeons dans notre analyse l'effort tangential complémentaire \vec{T}' , variable suivant le nombre et la disposition des cylindres d'une part et suivant la position de la manivelle considérée d'autre part, appliqué par le bras amont, dans l'effet est faible.

Le moment fléchissant dû à \vec{N} est: $\mathcal{M}_{x_1} = -R'_{AN} \cdot l_A \cdot \vec{x}_1$

Celui dû à \vec{T} est: $\mathcal{M}_{y_1} = -T_{AN} \cdot l_A \cdot \vec{y}_1$

Le moment fléchissant résultant est:

$$\mathcal{M}_{f\text{man}} = \sqrt{\mathcal{M}_{x_1}^2 + \mathcal{M}_{y_1}^2}$$

La contrainte de flexion dans le maneton est:

$$\sigma_{f\text{man}} = \mathcal{M}_{f\text{man}} / (J_{f,v})$$

Le moment de torsion dans le maneton est donné par:

$$\mathcal{M}_{t_1} = -R_{AT} \cdot R \cdot \vec{z}_1$$

La contrainte de torsion dans le maneton est:

$$\tau_{t\text{man}} = \frac{\mathcal{M}_t}{J_{o/v}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{M}_{t\text{man}} = |\mathcal{M}_{t_1}|$$

$$J_{o/v} = \frac{\pi (d_{me}^4 - d_{mi}^4)}{32} / \frac{d_{me}}{2} = \frac{\pi}{16} \frac{d_{me} - d_{mi}}{d_{me}}$$

La contrainte résultante d'après la formule de

Poncelet est:

$$\sigma_{rel\ max} = 0,35 \sigma_{f\ max} + 0,65 \sqrt{\sigma_{f\ max}^2 + 4 \tau_{t\ max}^2}$$

La condition de résistance impose que:

$$d_{me} \geq \left[\frac{1}{\pi(1 - \kappa_m^4)} \sigma_{rel\ adm} \left(11,2 F_A l_A + 20,9 \sqrt{(F_A l_A)^2 + (T.R)^2} \right) \right]^{1/3}$$

3.1.2 Bras:

Les bras subissent des déformations complexes, à savoir:

- Une flexion dans le plan de la manivelle, due à \vec{N} , de moment: $\sigma_{f x_1} = -R'_{AN} e \vec{x}_1$

- Une flexion dans le plan de rotation, due à \vec{T} , de moment: $\sigma_{f z_1} = -R'_{AT} R \vec{z}_1$

Il s'agit d'une flexion déviée dans deux plans perpendiculaires, la contrainte à la flexion dans les bras est donnée par:

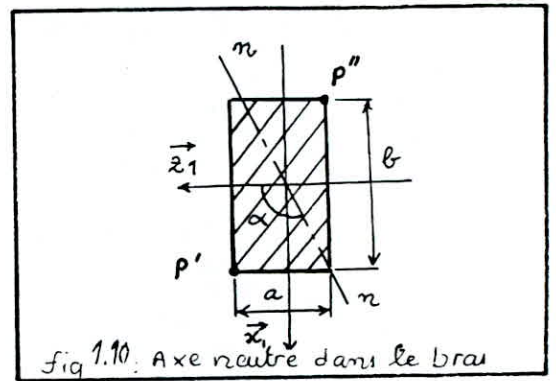
$$\sigma_f = \frac{\sigma_{f x_1} z_1}{I_{x_1}} - \frac{\sigma_{f z_1} x_1}{I_{z_1}}$$

L'axe neutre nn est caractérisé par: $\sigma_f = 0$

soit: $z_1 = \frac{M_{f x_1}}{I_{x_1}} \quad I_{z_1} = t y \alpha$

$x_1 = \frac{M_{f z_1}}{I_{z_1}} \quad I_{x_1} = t y \alpha$
d'où: $\alpha = \arctg \left(\frac{\sigma_{f x_1} I_{z_1}}{\sigma_{f z_1} I_{x_1}} \right)$

$$I_{z_1} = \frac{ab^3}{12} \quad \text{et} \quad I_{x_1} = \frac{ba^3}{12}$$



Les fibres les plus tendues et les plus comprimées sont au niveau de p_1 et p_2 , points les plus éloignés de l'axe neutre.

Le moment de torsion dû à l'effort F_A a pour expression: $\sigma_{t y_1} = R'_{TA} e \vec{y}_1$

La contrainte de torsion dans les bras est alors:

$$\sigma_{t\ bras} = \frac{\sigma_{t y_1}}{I_0 / \rho} \quad \text{avec:} \quad \frac{I_0}{\rho} = \frac{\frac{ab^3}{12} + \frac{ba^3}{12}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}} = \frac{ab \sqrt{a^2 + b^2}}{6}$$

La contrainte résultante est:

$$\sigma_{rel\ bras} = 0,35 \sigma_{f\ bras} + 0,65 \sqrt{\sigma_{f\ bras}^2 + 4 \tau_{t\ bras}^2}$$

3.1.3 Tourillons:

Les tourillons subissent:

- Une flexion due à l'effort radial \vec{N} , de moment: $\mathcal{C}_{f x_1} = -R'_{AN} e_A \vec{x}_1$

- Une flexion due à l'effort tangentiel \vec{T} , de moment: $\mathcal{C}_{f y_1} = -R'_{AT} e_A \vec{y}_1$

Le moment flechissant résultant est:

$$\mathcal{C}_f = \sqrt{\mathcal{C}_{f x_1}^2 + \mathcal{C}_{f y_1}^2}$$

- Une torsion due au couple moteur, de moment:

$$\mathcal{C}_{t z_1} = -TR \vec{z}_1$$

La contrainte de torsion dans les tourillons est:

$$\sigma_{t \text{ tour}} = \frac{\mathcal{C}_{t \text{ tour}}}{J_{o/c}} \text{ avec: } \mathcal{C}_{t \text{ tour}} = |\mathcal{C}_{t z_1}|$$

La contrainte équivalente dans les tourillons est:

$$\sigma_{\text{res tour}} = 0,35 \sigma_{f \text{ tour}} + 0,65 \sqrt{\sigma_{f \text{ tour}}^2 + \sigma_{t \text{ tour}}^2}$$

La condition de résistance impose que:

$$dte \geq \left(\frac{1}{\pi (1 - \kappa_t^4) \sigma_{\text{res adm}}} \left(11,2 F_A \cdot e + 20,8 \sqrt{(F_A e_A)^2 + (TR)^2} \right) \right)^{1/3}$$

F.4 MANIVELLE DU MOTEUR EN "U", SYSTEME BIELLE-BIELLETTTE:

La manivelle du moteur en U, système bielle-biellelette est vérifiée à l'action combinée de la bielle et de la biellelette sur le maneton.

La résultante \vec{F}_A de ces 2 efforts dans le repère polaire $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié à la manivelle s'exprime par:

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} x_{1A} \\ y_{1A} \\ z_{1A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \cos \theta + y_A \sin \theta \\ -x_A \sin \theta + y_A \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{x}_1 \end{pmatrix}$$

x_A et y_A étant les composantes de \vec{F}_A dans le repère fixe $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié à la première rangée de cylindres.

La composante radiale et tangentielle, y_{1A} et x_{1A} se traduisent dans les paliers adjacents par 2 réactions chacune, données par:

$$R_{AYIA} = R_{BYIA} = - \frac{Y_{IA}}{2} \vec{y}_1$$

$$R_{AXIA} = R_{BXIA} = - \frac{X_{IA}}{2} \vec{x}_1$$

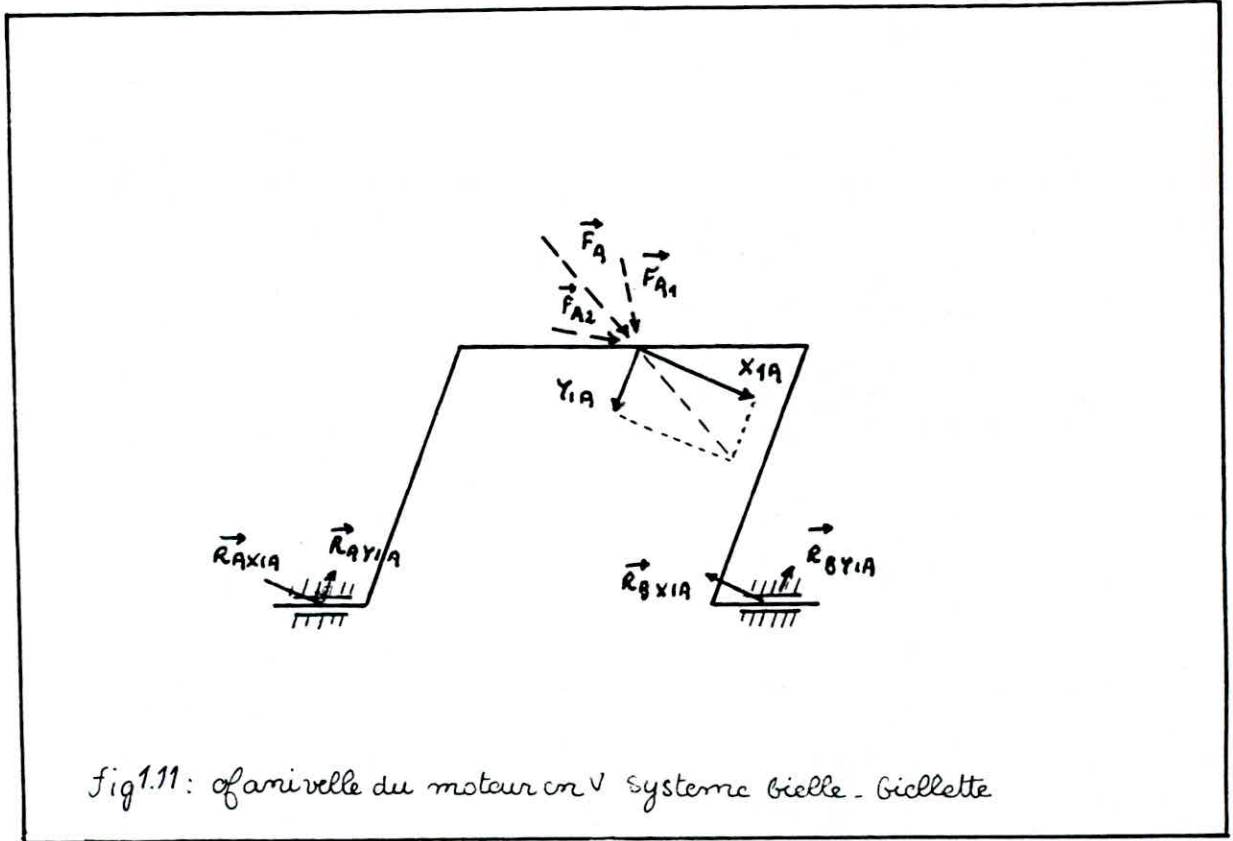


Fig 1.11: of arrivelle du moteur en V systeme bielle - Giellette

Sous l'effet de ces actions mécaniques les composants de la manivelle seront soumis aux sollicitations suivantes:

4.0 Maneton:

Chacun des efforts X_{IA} et Y_{IA} fait subir au maneton une flexion, ce dernier lui fait, en plus, subir une torsion.

La flexion dans le plan de rotation, due à l'effort radial Y_{IA} , a pour moment fléchissant:

$$M_{ofx} = - R_{AYIA} \cdot l_A \vec{x}_1$$

Celle dans le plan de la manivelle, due à l'effort tangentiel X_{IA} a pour moment fléchissant:

$$M_{ofy} = - R_{AXIA} \cdot l_A \vec{y}_1$$

Le moment fléchissant résultant est:

$$M_{of} = \sqrt{M_{ofx}^2 + M_{ofy}^2}$$

La contrainte de flexion dans le maneton est:

$$\sigma_{f \text{ man}} = \frac{M_{f \text{ man}}}{I/v}$$

Le moment de torsion dans le maneton, due à l'effort tangentiel X_{1A} est donné par:

$$\vec{M}_{t z_1} = -R_{A X_{1A}} R \vec{z}_1$$

La contrainte de torsion dans le maneton est:

$$\sigma_{t \text{ man}} = \frac{M_t}{J_0/v}$$

La contrainte résultante est:

$$\sigma_{res \text{ man}} = 0,35 \sigma_{f \text{ man}} + 0,65 \sqrt{\sigma_{f \text{ man}}^2 + 4 \sigma_{t \text{ man}}^2}$$

La condition de résistance est alors:

$$d_{me} \geq \left[\frac{1}{\pi (1 - k_m^2) \sigma_{res \text{ adm}}} (11,2 F_A l_A + 20,8 \sqrt{(F_A l_A)^2 + (X_{1A} R)^2}) \right]$$

4.1 Bras:

- Les bras sont quand à eux sollicités par:

- Une flexion dans le plan de la manivelle due à Y_{1A} , de moment fléchissant: $\vec{M}_{f x_1} = -R_{A Y_{1A}} e \vec{x}_1$

- Une flexion dans le plan de rotation due à X_{1A} , de moment fléchissant: $\vec{M}_{f y_1} = -R_{A X_{1A}} R \vec{y}_1$

La contrainte de flexion dans les bras est:

$$\sigma_{f \text{ bras}} = \frac{M_{f x_1}}{J_{x_1}} z - \frac{M_{f y_1}}{J_{y_1}} x$$

On détermine les contraintes maximales on considérant les angles les plus éloignés de l'axe neutre:

Le moment de torsion dans les bras dû l'effort tangentiel X_{1A} est donné par:

$$M_{t y_1} = R_{A X_{1A}} e \vec{y}_1$$

La contrainte de torsion dans les bras est:

$$\sigma_{t \text{ bras}} = \frac{M_t}{J_0/v}$$

La contrainte résultante

$$\sigma_{res \text{ bras}} = 0,35 \sigma_{f \text{ bras}} + 0,65 \sqrt{\sigma_{f \text{ bras}}^2 + 4 \sigma_{t \text{ bras}}^2}$$

Les bras sont également sollicités par une compression dont la contrainte est donnée par :

$$\sigma_c \text{ bras} = \frac{X_{1A}}{S_{\text{bras}}}$$

4.2 Touillons:

Les touillons sont sollicités par:

- Une flexion due à l'effort radial Y_{1A} , de moment fléchissant: $\mathcal{M}_{fx} = -R_A Y_{1A} \cdot e \vec{x}_1$

- Une flexion due à l'effort tangentiel X_{1A} , de moment fléchissant: $\mathcal{M}_{fy} = -R_A X_{1A} \cdot e \vec{y}_1$

Le moment fléchissant résultant est:

$$\mathcal{M}_{f\text{tour}} = \sqrt{\mathcal{M}_{fx}^2 + \mathcal{M}_{fy}^2}$$

La contrainte de flexion dans les touillons est:

$$\sigma_{f\text{tour}} = \frac{\mathcal{M}_{f\text{tour}}}{J/v}$$

- Une torsion due au couple moteur de moment:

$$\mathcal{M}_{t\text{tour}} = -X_{1A} \cdot R \vec{z}_1$$

La contrainte de torsion dans les touillons est:

$$\tau_{t\text{tour}} = \frac{\mathcal{M}_{t\text{tour}}}{J_c/v}$$

La contrainte équivalente dans les touillons est:

$$\sigma_{\text{res tour}} = 0,35 \sigma_{f\text{tour}} + 0,65 \sqrt{\sigma_{f\text{tour}}^2 + 4\tau_{t\text{tour}}^2}$$

La condition de résistance impose que:

$$dte \geq \left[\frac{1}{\pi(1-k_t^4)} \sigma_{\text{res adm}} \left(11,2 F_A \cdot e + 20,8 \sqrt{(F_A \cdot e)^2 + (X_{1A} R)^2} \right) \right]^{1/3}$$

7.5 MANIVELLE DU MOTEUR EN V, SYSTEME BIELLE-BIELLE

A FOURCHE:

La manivelle du moteur en V, système bielle-bielle à fourche est soumise à l'action de la bielle et celle de la bielle à fourche, cette dernière de part et d'autre de la première.

Dans le repère polaire $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié à la manivelle, ces deux forces ont pour expressions:

- Effort de la bielle sur la manivelle:

$$\vec{F}_{A1} = \begin{pmatrix} X_{1A1} \\ Y_{1A1} \\ Z_{1A1} \end{pmatrix} \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} X_{A1} \cos \theta + Y_{A1} \sin \theta \\ -X_{A1} \sin \theta + Y_{A1} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

$X_{1A1}, Y_{1A1}, Z_{1A1}$ étant les composantes de \vec{F}_{A1} dans le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié à la 1ère rangée de cylindres.

Celui de la bielle à fourche sur la manivelle:

$$\vec{F}_{A2} = \begin{pmatrix} X_{1A2} \\ Y_{1A2} \\ Z_{1A2} \end{pmatrix} \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} X_{A2} \cos(\theta - \gamma) + Y_{A2} \sin(\theta - \gamma) \\ -X_{A2} \sin(\theta - \gamma) + Y_{A2} \cos(\theta - \gamma) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

X_{2A}, Y_{2A}, Z_{2A} étant les composantes de \vec{F}_{A2} dans le repère lié à la seconde rangée de cylindres.

Le diagramme polaire résultant au niveau du maneton, dans le repère lié à la manivelle:

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2} = \begin{pmatrix} X_{1A} \\ Y_{1A} \\ Z_{1A} \end{pmatrix} \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} X_{A1} \cos \theta + Y_{A1} \sin \theta + X_{A2} \cos(\theta - \gamma) + Y_{A2} \sin(\theta - \gamma) \\ -X_{A1} \sin \theta + Y_{A1} \cos \theta - X_{A2} \sin(\theta - \gamma) + Y_{A2} \cos(\theta - \gamma) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

Cet effort se traduit dans chaque palier par 2 réactions données par:

$$\vec{R}_{Ax1} = \vec{R}_{Bx1} = -\frac{X_{1A}}{2} \vec{x}_1 \quad \text{et} \quad R_{Ay1} = R_{By1} = -\frac{Y_{1A}}{2} \vec{y}_1$$

Sous l'effet de ces actions mécaniques les composants de la manivelle seront soumis aux sollicitations suivantes:

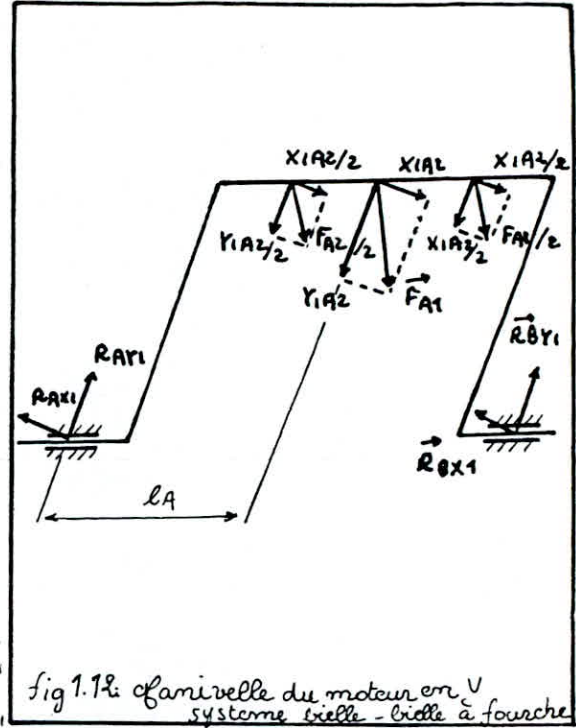
5.0 Maneton:

Chaque effort $X_{1A1}, Y_{1A1}, X_{1A2}, Y_{1A2}$ fait subir au maneton une flexion, ces deux derniers lui font en plus, une torsion

On redote de même, un cisaillement du maneton sous l'action combinée de chaque bras de la fourche et de la bielle.

L'effort radial X_{1A} , de la bielle sur le maneton fait subir à ce dernier une flexion dans le plan de la manivelle de moment fléchissant:

$$\vec{M}_{fx1A} = -R_{Ax1} l_A \vec{y}_1$$



L'effort radial X_{1A2} , de la bielle à fourche sur le maneton fait subir à ce dernier une autre flexion dans le plan de la manivelle de moment fléchissant:

$$\vec{M}_{f_{X_{1A2}}} = \frac{1}{2} Y_{1A2} l \vec{y}_1$$

Le moment fléchissant dans le plan de la manivelle:

$$\vec{M}_{f_{y_1}} = \vec{M}_{f_{X_{1A}}} + \vec{M}_{f_{X_{1A2}}}$$

L'effort tangentiel Y_{1A} , de la bielle sur le maneton fait subir à ce dernier une flexion dans le plan de rotation de moment fléchissant:

$$\vec{M}_{f_{Y_{1A}}} = - R_{A1} l_A \vec{x}_1$$

L'effort tangentiel Y_{1A2} , de la bielle à fourche sur le maneton fait subir à ce dernier une flexion dans le plan de rotation de moment fléchissant:

$$\vec{M}_{f_{Y_{1A2}}} = \frac{1}{2} Y_{1A2} l \vec{x}_1$$

Le moment fléchissant dans le plan de rotation est:

$$\vec{M}_{f_{x_1}} = \vec{M}_{f_{Y_{1A}}} + \vec{M}_{f_{Y_{1A2}}}$$

Le moment résultant est:

$$\vec{M}_{f_{man}} = \vec{M}_{f_{x_1}} + \vec{M}_{f_{y_1}}$$

La contrainte de flexion dans le maneton est:

$$\sigma_{f_{man}} = \frac{M_{f_{man}}}{J/c} \quad \frac{J}{c} = \frac{\pi}{32} \frac{d m_e^4 - d m_c^4}{d m_e}$$

De plus, le moment de torsion dans le maneton, due à X_{1A} donné par:

$$\vec{M}_{t_{man}} = - R_{A \times 1} \cdot l \vec{z}_1$$

La contrainte de torsion dans le maneton est alors:

$$\sigma_{t_{man}} = \frac{M_{t_{man}}}{J_0/c}$$

La contrainte résultante dans le maneton est:

$$\sigma_{res_{man}} = 0,35 \sigma_{f_{man}} + 0,65 \sqrt{\sigma_{f_{man}}^2 + 4 \sigma_{t_{man}}^2}$$

d'où la condition de résistance:

$$\sigma_{res_{man}} < \sigma_{res_{admissible}}$$

5.2 Tourillons:

Les tourillons sont sollicités à:

- Une flexion dans le plan de la manivelle due à l'effort radial Y_{1A} , de moment fléchissant: $\mathcal{M}_{x_1} = -R_{AY1} e \vec{x}_1$
- Une flexion dans le plan de rotation due à l'effort tangentiel X_{1A} , de moment fléchissant: $\mathcal{M}_{y_1} = -R_{AX1} e \vec{y}_1$

Le moment fléchissant résultant: $\mathcal{M}_{\text{tour}} = \sqrt{\mathcal{M}_{x_1}^2 + \mathcal{M}_{y_1}^2}$

La contrainte de flexion dans les tourillons est donnée par:

$$\sigma_{\text{tour}} = \frac{\mathcal{M}_{\text{tour}}}{J/v}$$

Une torsion due à X_{1A} , de moment: $\mathcal{M}_{t \text{ tour}} = -X_{1A} \cdot R \cdot \vec{z}_1$

La contrainte à la torsion dans les tourillons:

$$\tau_{t \text{ tour}} = \frac{\mathcal{M}_{t \text{ tour}}}{J_0/v}$$

D'où l'expression de la contrainte résultante:

$$\sigma_{\text{rés tour}} = 0,35 \sigma_{\text{tour}} + 0,65 \sqrt{\sigma_{\text{tour}}^2 + 4 \tau_{t \text{ tour}}^2}$$

La condition de résistance est alors:

$$d_{\text{mt}} \geq \left[\frac{32}{\pi (1 - K_t^4) \sigma_{\text{rés adm}}} \left(0,35 \mathcal{M}_{\text{tour}} + 0,65 \sqrt{\mathcal{M}_{\text{tour}}^2 + 4 \mathcal{M}_{t \text{ tour}}^2} \right) \right]^{1/2}$$

F.6 MANIVELLE DU MOTEUR EN V, SYSTEME BIELLES ACCOLEES:

Les manivelles des moteurs en V système bielles accolées sont soumises à l'action des 2 bielles placées côte à côte. L'exp

L'expression de ces efforts dans le repère polaire lié à la manivelle est la même que dans le cas du système bielle-bielle à fourche.

On a concernant l'effort de la bielle 1 sur la manivelle:

$$\vec{F}_{A1} = \begin{pmatrix} X_{1A1} \\ Y_{1A1} \\ Z_{1A1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

Celui de la bielle 2:

$$\vec{F}_{A2} = \begin{pmatrix} X_{1A2} \\ Y_{1A2} \\ Z_{1A2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix}$$

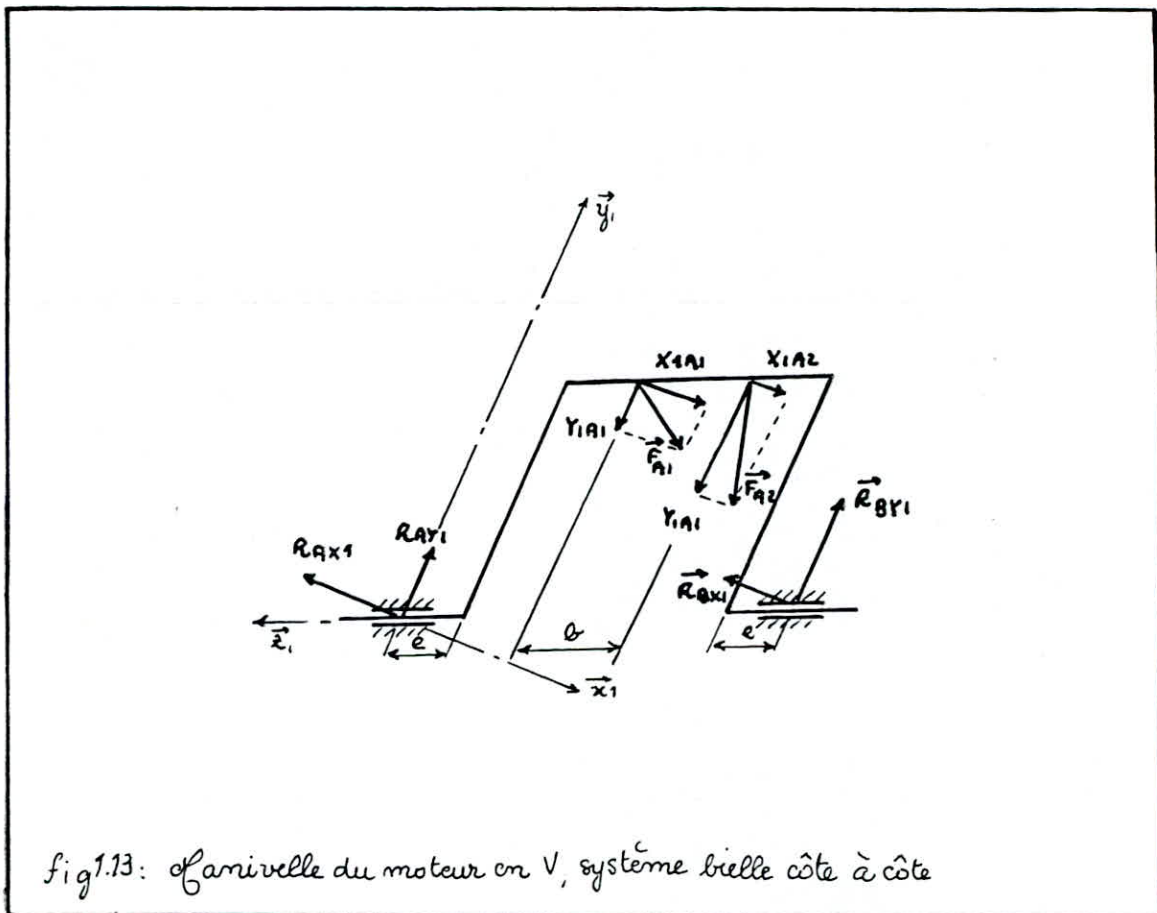


fig 1.13: manivelle du moteur en V, système bielle côte à côte

La résultante étant: $\vec{F}_A = \vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2}$

Ces efforts engendrent dans chaque palier un couple de réactions qu'on détermine par les conditions d'équilibre:

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{M}/O = 0 \end{cases} \text{ soient: } \begin{cases} -R_{AX1} - R_{BX1} + X_{1A} = 0 & \text{dans le plan de} \\ & \text{rotation,} \\ R_{BX1} \cdot l - X_{1A} l_A = 0 & \text{dans le plan de} \\ R_{BY1} + R_{BY2} - Y_{1A} = 0 & \text{la manivelle.} \\ R_{BY1} \cdot l - Y_{1A} l'_A = 0 \end{cases}$$

avec: $l = l_A + l_B = l'_A + l'_B$
d'où:

$$R_{BX1} = X_{1A} \frac{l_A}{l_A + l_B}$$

$$R_{AX1} = X_{1A} \frac{l_B}{l_A + l_B}$$

$$\text{ou: } l_A = \frac{\frac{l-B}{2} X_{1A1} + \frac{l+B}{2} X_{1A2}}{Y_{1A}}$$

$$R_{BY1} = Y_{1A} \frac{l'_A}{l_A + l_B}$$

$$R_{AY1} = Y_{1A} \frac{l'_B}{l_A + l_B}$$

$$l'_A = \frac{\frac{l-B}{2} Y_{1A1} + \frac{l+B}{2} Y_{1A2}}{Y_{1A}}$$

Sous l'effet de ces actions mécaniques, les composants de la manivelle sont sollicités comme suite:

6.0 Maneton:

Le problème cette fois ci n'est plus symétrique.

On distingue au niveau du maneton 3 zones distinctes.

La section la plus sollicitée est dans la médiane, entre les points d'action des 2 bielles.

Il s'agit d'une flexion déviée, on devra alors considérer 2 plans d'action, le plan radial et celui tangentiel.

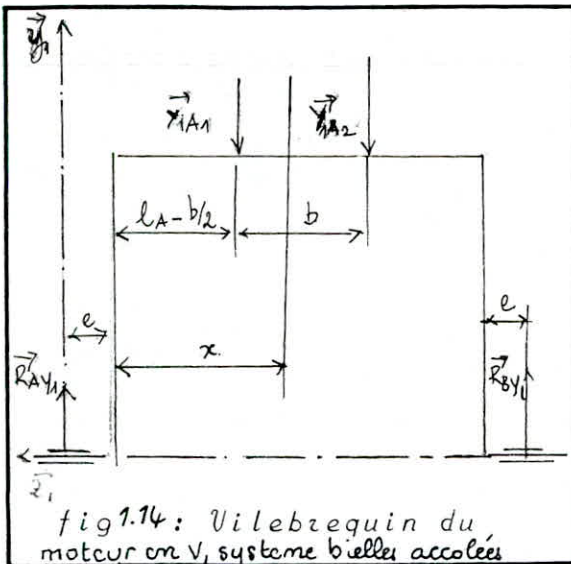


fig 1.14: Vilebrequin du moteur en V, système bielles accolées

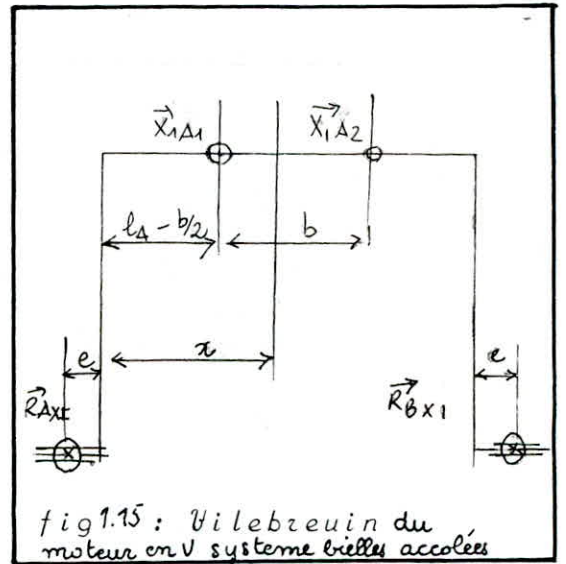


fig 1.15: Vilebrequin du moteur en V système bielles accolées

Le moment de flexion dans le plan radial, au niveau de la région médiane est donné en fonction de l'abscisse x par:

$$\vec{M}_f(x) = [-R_{Ay1} x + Y_{1A1} (x - (l_A - \frac{b}{2}))] \vec{x}_1$$

Celui dans le plan tangentiel est:

$$\vec{M}_f(x) = [-R_{Ax1} x + X_{1A1} (x - (l_A - \frac{b}{2}))] \vec{y}_1$$

La contrainte de flexion est donnée par:

$$\sigma_{f \max} = \frac{\partial \sigma_f}{\partial v} \quad \partial \sigma_f \text{ étant le moment de flexion dans la section dangereuse.}$$

Chaque point de cette zone est également à une torsion dont le moment vaut: $\partial \sigma_t \max = -R_{Ax1} \cdot R \vec{x}_1$

La contrainte de torsion est ainsi:

$$\sigma_t \max = \partial \sigma_t / (90/v)$$

La contrainte résultante est par suite:

$$\sigma_{res \max} = 0,35 \sigma_{f \max} + 0,65 \sqrt{\sigma_{f \max}^2 + 4 \sigma_t \max^2}$$

La condition de résistance est:

$$\sigma_{res \max} < \sigma_{res adm}$$

6.1 Bras:

Les bras sont sollicités par une flexion composée de compression due à l'effort radial Y_{1A} et une flexion compo-

sée de torsion due à l'effort tangentiel \vec{x}_{1A} .

La démarche est identique à celle envisagée pour le moteur en U, système bielle-bielle à fourche.

6.2 Tourillons:

Les tourillons sont sollicités par une flexion pure dans le plan de la manivelle, due à l'effort radial \vec{r}_{1A} , et une flexion composée de torsion dans le plan de rotation due à l'effort tangentiel \vec{x}_{1A} .

La démarche est également identique à celle développée pour le moteur en U, système bielle-bielle à fourche.

9. VERIFICATION DES DIMENSIONS DES ELEMENTS MOBILES DES
MOTEURS F4L 912 et F8U 913, PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS:

9.0 GENERALITES:

Le dimensionnement des éléments mobiles des moteurs en ligne et en "V", versions Diesel et essence est comme constaté dans les paragraphes précédents très délicat.

D'une façon générale, l'optimisation des formes peut faire appel aux deux méthodes suivantes, destinées d'ailleurs à se compléter mutuellement:

- La méthode de calcul par éléments finis,
- Les approches réalisées.

0.0 Méthode de calcul par éléments finis:

Cette dernière permet de prédéterminer la répartition des températures, celle des contraintes et les déplacements qu'elles entraînent (par rapport à un système de coordonnées lié à la pièce).

Cette voie théorique procède par approximations successives, qui concernent:

- Le mode de découpage ou maillage, qui fixe l'emplacement des noeuds pour lesquels l'ordinateur (convenablement programmé) fournit les valeurs calculées des trois paramètres sus-cités,
- Les modifications de forme dont on veut connaître l'influence.

Ceci théorique exige aussi de connaître expérimentalement (faisant appel aux techniques de la seconde méthode):

- Les conditions aux limites avec principalement les coefficients de transferts thermiques aux parois (cette connaissance ne peut en fait résulter que des confrontations entre résultats obtenus par voie théorique et par voie expérimentale),
- Les propriétés du matériau aux différentes températures susceptibles d'être rencontrées.

0.1 Méthode expérimentale:

Cette dernière permet:

- au cours d'essais au banc dans des conditions bien déterminées de mesurer principalement des températures en différents points de la pièce à dimensionner, et établir les diagrammes des charges appliqués,

- de vérifier par des tests de fonctionnement en endurance appropriés que les contraintes restent bien à un niveau suffisamment bas.

9.1 APPROCHE REALISEE:

En ce qui nous concerne, nous avons fait une approche dimensionnelle des parties mobiles des moteurs F4L 912 et F8U 913, par le programme "SAP 4", du département de Génie-Civil de l'Université de Berkeley en Californie, existant au niveau du centre de calcul de l'Université des Sciences et Technologie Houari Boumédiène (Bab Ezzouar).

Ce programme industriel comprend plusieurs types d'éléments, on cite:

- Les éléments barre,
- Les éléments poutres,
- Les éléments en contraintes planes,
- Les éléments brique,
- Les éléments de coques épaisse,
- Les éléments plaques et coques minces,
- Les éléments frontières,
- Les éléments de tuyauterie.

Selon le type d'élément choisi pour décrire la structure à vérifier, le programme donne les déplacements et les valeurs des diverses sollicitations (efforts et moments), qu'il faut composer par une des hypothèses de résistance des matériaux pour déduire les contraintes résultantes dans les différents noeuds.

9.2 CALCUL DES ELEMENTS MOBILES DES MOTEURS

F4L 912 et F8U 913:

2.0 Calcul du piston:

2.0.1 Maillage du piston:

Pour le maillage du piston, nous avons considéré l'élément 8, de coques épaisses.

Un tel élément peut posséder 8 à 21 noeuds.

Il peut prendre en compte un matériau orthotrope quelconque.

Le chargement peut consister en des pressions appliquées sur la surface, des efforts hydrostatiques, des forces d'inertie dans trois directions, et des effets thermiques.

Les résultats sont donnés sous forme de 6 contraintes

globales qui peuvent être calculées jusqu'à 7 endroits différents de l'élément.

Voulant, dans notre étude faire une approche par convergence du maillage envisagé, on a jugé bon de faire 2 maillages, l'un grossier, l'autre plus raffiné, et cela dans le but de comparer les résultats obtenus dans chaque cas.

La discrétisation a été faite pour les 2 modèles, et bien que les données ont été introduit sur fichier de données, nous n'avons pu, concernant le second maillage, avoir des résultats vu le facteur temps qui nous a un peu pressé.

Le piston des moteurs F4L 912 et F8U 913 présentant un plan de symétrie, leur maillage a été effectué sur une moitié de structure, les conditions aux limites adéquates permettent de tenir compte de l'autre moitié.

Les 2 maillages du piston ont été donnés par les figures et , la division en 2 moitiés de chacun d'eux a été pratiquée dans le seul but d'une meilleure visualisation et compréhension du modèle.

2.0.2 Résultats obtenus:

Les résultats obtenus concernant le premier maillage du piston sont donnés sur listing, de sortie.

2.1 Calcul de l'axe de piston:

2.1.1 Maillage de l'axe:

En ce qui concerne le maillage de l'axe, nous avons utilisé les éléments poutres, dénommés par l'indice ou chiffre 2.

L'élément de poutre spatial ainsi utilisé prend en compte la torsion, la flexion par rapport à 2 axes différents les déformations axiale et de cisaillement.

L'élément est prismatique et les cas de chargement peuvent comprendre un chargement inertiel dans les 3 directions et des forces données imposées aux extrémités.

Les forces (effort axial et effort tranchant) ainsi que les moments (de flexion et de torsion) sont calculés dans le système d'axes local de l'élément.

Le maillage de l'axe est donné ci-joint.

2.1.2 Résultats obtenus:

Les résultats obtenus sont de même donnés sur fichier de sortie.

2.2 Calcul de la bielle:

2.2.1 Maillage de la bielle:

De même le maillage de la bielle fait appel à 2 du programme "SAP 4", en l'occurrence l'élément spatial de poutre.

Pour des considérations de simplification de discrétisation, on a jugé bon décomposer la bielle en 3 parties le calcul de chacune se faisant à part.

Ainsi la bielle est décomposée en:

- sa tête,
- son corps,
- et son pied.

Le maillage de chaque partie est donné par la figure .

2.2.2 Résultats obtenus:

Les *OUTPUT* sont ci-joint donnés sur listing.

2.3 Calcul de la bielle à oeil:

2.3.1 Maillage de la bielle à oeil:

Le maillage de la bielle à oeil du moteur F8V 913 est analogue à celui de la bielle simple du moteur F4L 912.

2.3.2 Résultats obtenus:

Les résultats sont fournis sur papier listing.

2.4 Calcul de la biellette:

2.4.1 Maillage de la biellette:

Le maillage de la biellette est similaire à ceux de la bielle et de la bielle à oeil dans son principe.

Cependant, cette dernière étant symétrique par rapport à son plan médian d'encastrement, on ne considère dans son calcul que sa moitié.

Le maillage de la biellette est donné par la figure .

2.4.2 Résultats obtenus:

Les résultats obtenus sont fournis sur papier listing.

CHAPITRE
-2-
GRAISSAGE
DES PARTIES
INTERNES
DES MOTEURS EN
LIGNE ET EN "V"

Les pertes d'énergie traduites par le rendement mécanique du moteur, proviennent pour une part des chocs (dus à l'existence de jeux de fonctionnement et changement de portage des pièces en contact), ainsi que des vibrations engendrées par les variations périodiques des efforts. Elles résultent aussi et surtout des frottements qui se produisent au cours du déplacement des éléments en mouvement.

Dans un moteur, les frottements peuvent être décomposés de la façon suivante:

- Frottements internes des pièces déformables sous l'action des efforts qui leurs sont appliqués,
- Frottements internes des fluides en évolution (en raison de leur viscosité),
- Frottements entre parties mobiles en mouvement relatif avec interposition d'un lubrifiant.

Le rôle du graissage consiste donc à assurer la lubrification des surfaces en mouvement relatif, il est ainsi nécessaire au bon fonctionnement et à la longévité du moteur, en même temps qu'il réduit les pertes d'énergie par frottement à leur valeur minimale.

Un autre rôle lui est également attribué: il s'agit du transfert d'une partie de la chaleur dégagée par la combustion.

A. GENERALITES:

A.0 ASPECT HISTORIQUE:

L'histoire de la lubrification est très représentative de l'évolution d'une technique vers une discipline scientifique.

Les premiers écrits recensés sont ceux de Von Pauli qui déterminait l'importance de la nature des matériaux constituant les paliers, dont la finalité était de limiter l'énergie dissipée. Les faibles vitesses linéaires des surfaces en regard ne permettaient pas d'espérer un film hydrodynamique, ce dernier en effet, présentait des discontinuités et par suite des zones où les 2 solides se trouvaient en contact.

Dans une seconde étape de cette évolution, Hirtz étudia l'influence d'un film lubrifiant, donc déjà les contemporains comprenaient l'importance du rôle du troisième corps, et du coefficient de viscosité dynamique qui lui est associé.

Enfin, il faut attendre les travaux de Raleigh, qui suivirent, et la mise en place d'une théorie de Reynolds pour que s'impose la notion de force portante qui existe dans les films hydrodynamiques.

A.1 NECESSITE DU GRAISSAGE:

Pour réduire le frottement et l'usure entre 2 surfaces en mouvement relatif, il est commode de les séparer par un film fluide lubrifiant. Ce dernier peut être un liquide ou un gaz et la charge supportée par le mécanisme est créée soit par le mouvement des surfaces (cas hydrodynamique) soit par une source de pression extérieure (cas hydrostatique).

L'épaisseur du film doit être plus grande que la hauteur des aspérités des surfaces, sinon il y aurait contact en certains points des surfaces; on parlera encore de lubrification mixte ou lubrification limite.

A.2 SCHEMA DES PRINCIPAUX SYSTEMES DE LUBRIFICATION:

Le graissage des moteurs modernes se fait essentiellement par circulation d'huile sous pression, par écoulement sous l'action de la pesanteur et par projection.

La circulation sous pression est assurée par une pompe débitant dans un circuit composé de plusieurs éléments tels que clapet de régulation de pression, filtre, canneaux de liaison entre les différents organes à lubrifier...

Parmi les organes graissés sous pression, on trouve en principe:

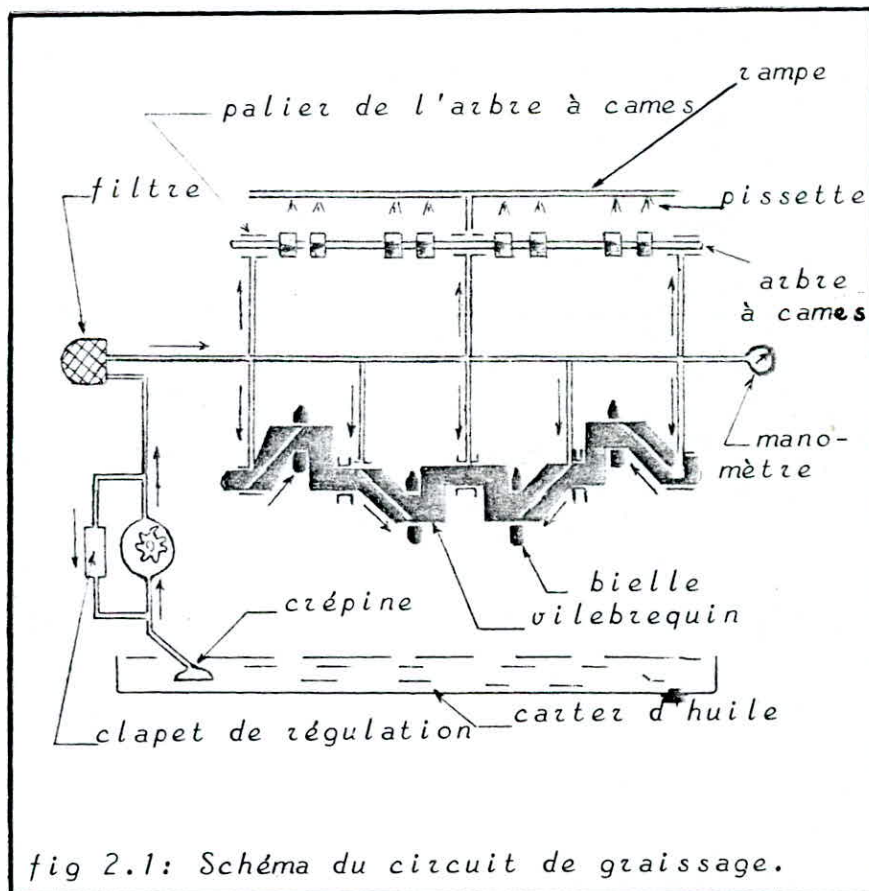
- Les paliers de ligne d'arbre (tourillons et manetons),
- Les paliers d'arbre à cames,
- La rampe de culbuteurs (sur les moteurs à arbre à cames latéral).

Les soupapes, les poussoirs, les engrenages de distribution, les cames, les cylindres, les pistons, etc..., sont lubrifiés par écoulement ou projection.

Il existe différentes dispositions de circuit de graissage parmi lesquelles on distingue les deux suivantes, d'ailleurs les plus courantes:

- Circuit sous pression à carter humide dont l'application est pratiquement généralisée pour les moteurs d'automobile de série ainsi que pour les moteurs Diesel de faible et moyenne puissance.

- Circuit sous pression à carter sec dont l'application est réservée aux moteurs de puissance spécifique élevée et aux moteurs de compétition.



A.3 LES FLUIDES LUBRIFIANTS:

Le choix du troisième corps à interposer entre les 2 éléments en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre est d'une importance capitale quand à la bonne lubrification des organes du moteur.

L'état de ce corps, sa nature chimique, sont conditionnées par des facteurs tels que les températures de fonctionnement et les vitesses de déplacement.

En ce qui nous concerne, on limitera notre étude aux lubrifiants liquides.

3.0 Lubrifiants liquides:

La mécanique des fluides visqueux suppose que la vitesse relative du fluide par rapport à la paroi est nulle.

En supposant les écoulements laminaires, la viscosité a un rôle déterminant:

3.0.1 Etude de la viscosité des liquides:

La viscosité dynamique μ est pour les liquides, une fonction décroissante de la température et croissante de la pression.

3.0.2 Propriétés des lubrifiants:

Les propriétés essentielles à attribuer à un lubrifiant sont:

- Le fluide doit mouiller les surfaces,
- Il doit avoir une température de vaporisation élevée,
- Il doit présenter une faible affinité avec l'oxygène,
- Il doit être passif vis à vis des surfaces,
- Il doit présenter une forte capacité calorifique afin de limiter les élévations de température locales.

3.0.3 Indice de viscosité:

Une huile est caractérisée par sa viscosité à une température donnée mais aussi par son indice de viscosité (travaux de Dean et Davis), qui sert de dénomination internationale aux huiles et qui caractérise les variations de μ avec T

Les huiles destinées à l'utilisation industrielle sont caractérisées par leur viscosité:

$$\mu = \mu(T)$$

qui est fournie par le raffineur, laquelle pour de faibles plages de température prend la forme:

$$\mu = \mu_0 e^{-a(T-T_0)} \quad (a > 0) \quad \text{dite equation de Reynolds.}$$

B. ETUDE DU GRAISSAGE DES PARTIES INTERNES DU MOTEUR:

B.O ETUDE DU GRAISSAGE DES PALIERS:

O.O Equation de la mécanique des films minces visqueux:

Dans ce chapitre, nous citerons les équations fondamentales de la mécanique des films minces visqueux qui permettent d'établir l'équation de Reynolds de lubrification, dont la résolution, compte tenu des conditions géométriques et cinématique permet de déterminer les caractéristiques d'un écoulement en film mince et en particulier sa portance.

O.O.1 Equations de base:

Le comportement d'un milieu continu est décrit par:

a/ La loi de conservation de la masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0$$

b/ La loi fondamentale de la dynamique:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

c/ La loi de conservation de l'énergie:

$$\rho \frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

d/ Et la loi de comportement rhéologique qui pour un fluide Newtonien s'écrit:

$$\tau_{ij} = (-p + \lambda \theta) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

où:

x_i et t sont les variables d'espace et du temps,

u_j les composantes de la vitesse,

ρ la masse volumique du fluide,

f_j les forces massiques extérieures,

τ_{ij} le tenseur de contraintes

E l'énergie interne,

K le coefficient de conductibilité thermique du fluide

T Sa température,

p la pression,

ε_{ij} le tenseur des taux de déformations,

θ le taux de dilatation cubique,

δ_{ij} le symbole de Kronecker,

λ et μ les coefficients de Navier, fonctions de l'espace et du temps.

0.0.2 Hypothèses de base:

Nous faisons les hypothèses suivantes:

a/ D'abord celles nécessaires pour l'application de l'équation de Reynolds, soient:

- Le lubrifiant est un fluide Newtonien,
- L'écoulement est laminaire,
- Le milieu est continu,
- Il n'y a pas de glissement aux contacts du film et de la surface portante.

b/ Ensuite celles qui concernent les efforts en jeu dans la condition d'équilibre du film, soient:

- Les effets d'inertie du fluide en mouvement sont négligeables,
- Le poids du fluide en jeu est également négligeable.

c/ Enfin, deux hypothèses, parfaitement admissibles, s'implifient beaucoup la mise en place des équations et la résolution de ces dernières, à savoir que:

- Le fluide est incompressible,
- La pression ne varie pas à travers l'épaisseur du film, vu que cette dernière est très faible devant les autres dimensions du contact.

0.1 Equation de Reynolds simplifiée:

Les équations de la mécanique des fluides minces, se basant sur les hypothèses ci-dessus, aboutissent à l'équation simplifiée de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \rho (U_1 - U_2) \frac{dh}{dx}$$

- où:
- h est le jeu de laminage,
 - μ est la viscosité dynamique du fluide,
 - x et z les coordonnées spatiales dans le plan de l'écoulement,
 - $U_1 - U_2$ la vitesse relative des surfaces en regard.

0.2 Régimes de fonctionnement des paliers:

En mécanique des films minces visqueux on définit 2 régimes de lubrification:

- Le régime transitoire,
- Et le régime permanent.

Un palier est en fonctionnement stationnaire si:

- La charge portante W ,
- Son axe central,
- La vitesse de rotation,

En d'autres termes, si les paramètres géométriques du contact et les vitesses des parois sont indépendantes du temps.

Par contre, le palier est en fonctionnement dynamique ou instationnaire si:

- La charge W est effectivement une fonction du temps, et on cherche la trajectoire qui en résulte pour l'arbre dans l'alésage afin de déterminer la hauteur minimale du film d'huile et pouvoir éviter les avaries éventuelles,

- La charge W est stationnaire mais l'arbre écarté de sa position d'équilibre par une perturbation est mobile par rapport à l'alésage: le problème est alors de savoir si la position d'équilibre est stable ou instable.

0.3 Épaisseur du film fluide:

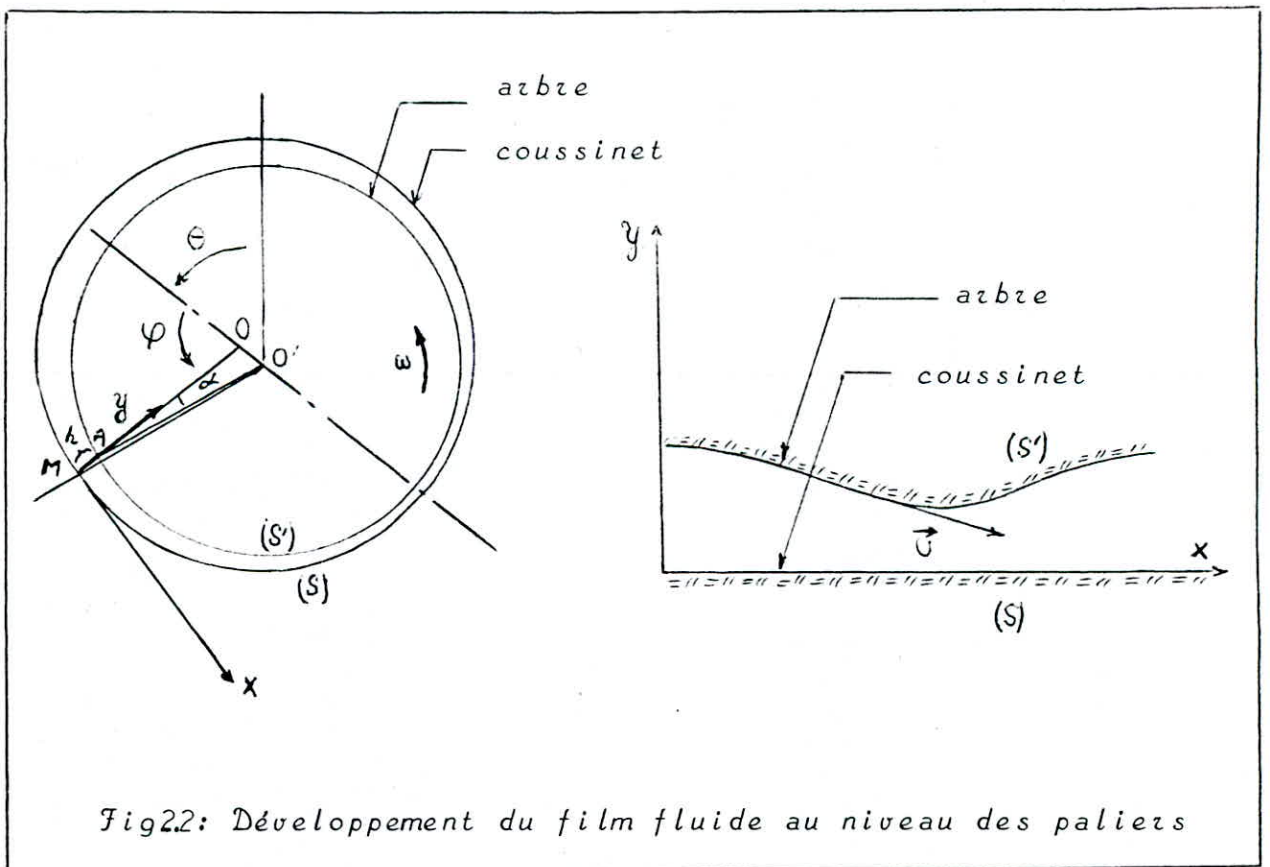


Fig22: Développement du film fluide au niveau des paliers

L'épaisseur

$$h = MA = R - OA$$

$$OO' \sin \varphi \text{ soit } e \sin \varphi = R' \sin \alpha$$

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{e}{R'} \sin \varphi \right)$$

$$\begin{aligned} OA &= R' \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi} = \frac{R'}{\sin \varphi} \left[\sin \varphi \cos \alpha - \sin \alpha \cos \varphi \right] \\ &= \frac{R'}{\sin \varphi} \left[\sin \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cos \varphi \right] \\ &= \frac{R'}{\sin \varphi} \left[\sin \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R'} \sin \varphi \right)^2} - \frac{e}{R'} \sin \varphi \cos \varphi \right] \\ &= R' \left[\sqrt{1 - \left(\frac{e}{R'} \right)^2 \sin^2 \varphi} - \frac{e}{R'} \cos \varphi \right] \end{aligned}$$

négligeant $\left(\frac{e}{R'} \right)^2 \sin^2 \varphi$ devant 1

$$OA = R' \left(1 - \frac{e}{R'} \cos \varphi \right) = R' - e \cos \varphi$$

$$h = R - R' + e \cos \varphi = C + e \cos \varphi = C \left(1 + \frac{e}{C} \cos \varphi \right) = C \left(1 + \varepsilon \cos \varphi \right)$$

0.4 Résolution de l'équation de Reynolds:

L'équation de Reynolds est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique, qui n'admet que dans quelques cas particulièrement simples une solution analytique.

Sommerfield a résolu cette équation en négligeant l'écoulement axial (hypothèse du palier infiniment long).

Une autre solution unidimensionnelle, plus représentative du point de vue physique a été proposée par Ockvirik et Dubois dans le cas où la longueur du palier est très faible devant son diamètre (palier infiniment court).

Pour les paliers de longueur finie, différentes méthodes de calcul ont été proposées: analogie électrique, méthodes variationnelles, développement en séries et méthodes numériques;

les méthodes actuellement utilisées sont pour la plupart, des méthodes numériques nécessitant l'utilisation de l'ordinateur.

La plus simple d'entre elles est la méthode des différences finies; celle des éléments finis peut également être employée.

0.4.1 Palier de dimension axiale infinie:

La dimension suivant z est infinie, c'est historiquement le premier cas qui a été résolu, car l'écoulement est régi par l'équation différentielle:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) = 6 U \frac{dh}{dx}$$

Le fluide lubrifiant étant supposé incompressible,
 U étant la vitesse tangentielle de l'arbre.

$$dx = R d\psi \quad h = C(1 + \varepsilon \cos \psi) \quad \text{n'est donc fonction que de } x.$$

L'intégration suppose le changement de variable:

$$1 - \varepsilon \cos \psi = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon \cos \psi}$$

$$\text{on a alors: } d\psi = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \frac{d\psi}{1 - \varepsilon \cos \psi}$$

et l'équation unidimensionnelle de Reynolds devient:

$$\frac{d}{d\psi} \left[\frac{1}{(1 - \varepsilon \cos \psi)^2} \frac{dp}{d\psi} \right] = \frac{6\mu UR}{C^2} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \frac{d}{d\psi} \left(\frac{1}{1 - \varepsilon \cos \psi} \right)$$

dont l'intégration 2 fois de suite, donne:

$$p(\psi) = A_1 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \psi - 2\varepsilon \sin \psi + \frac{\varepsilon^2}{4} \sin 2\psi + \frac{6\mu UR}{C^2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} (\psi - \varepsilon \sin \psi) + A_2$$

Les constantes A_1 et A_2 étant à déterminer par les conditions aux limites, à savoir:

$$p(0) = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{dp}{d\psi} \right|_{\psi = \psi_s} = 0$$

ψ_s L'angle associé à la fin de l'arc actif.

soit alors:

$$p(\psi) = \frac{6\mu RU}{C^2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \left\{ \psi - \varepsilon \sin \psi - \frac{2\psi - 4\varepsilon \sin \psi + \varepsilon^2 \psi + \varepsilon^2 \sin \psi \cos \psi}{2(1 - \varepsilon \cos \psi_s)} \right\}$$

$$\text{est défini par: } p(\psi_s) = 0$$

$$\text{soit: } \varepsilon (\sin \psi_s \cos \psi_s - \psi_s) + 2 (\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s) = 0$$

Par intégration de la pression, on obtient les composantes de la charge portante, soient:

$$W_x = \int_0^{\psi_s} p \cos \psi d\psi \quad \text{et} \quad W_y = \int_0^{\psi_s} p \sin \psi d\psi$$

d'où:

$$W = 3\mu U L \left(\frac{R}{C}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \frac{1}{(1-\epsilon \cos \psi_s)} \left\{ \frac{\epsilon^2 (1-\cos \psi_s)}{1-\epsilon^2} + 4(\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)^2 \right\}^{1/2}$$

L'angle de calage Θ est donné par :

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{W_y}{W_x}$$

soit :

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{2(\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)}{\epsilon \sqrt{\frac{1-\cos \psi_s}{1-\epsilon^2}}} = \frac{2(1-\epsilon^2)(\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)}{\epsilon (1-\cos \psi_s)^2}$$

L'intégration des moments des actions tangentielles aboutit au moment par rapport à l'axe de rotation caractérisant la résistance à l'avancement sur l'arbre :

$$C_a = \frac{4R^2 U L}{C} \frac{2\pi}{\sqrt{1-\epsilon^2}} + \frac{\epsilon W}{2} \sin \Theta$$

La résistance à l'avancement sur le coussinet est liée par la relation :

$$C_c + C_a = -W \sin \Theta$$

La valeur du couple sur l'arbre est donc plus importante que celle sur le coussinet.

0.4.2 Palier infiniment court :

Quand la largeur du palier est faible devant son diamètre, on peut faire l'approximation dite de Ockvirik et Dubois.

On suppose que le gradient de pression transversal (suivant z) est dominant relativement à celui le long de x .

L'équation de Reynolds s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) = 6U \frac{dh}{dx}$$

Une première intégration donne : $\frac{h^3}{\mu} \frac{dp}{dz} = 6U \frac{dh}{dx} z + \beta_1$

Une seconde intégration donne : $\frac{h^3}{\mu} p = 6U \frac{dh}{dx} \frac{z^2}{2} + \beta_1 z + \beta_2$

Les conditions aux frontières traduisent bien entendu, le raccordement avec la pression atmosphérique et on est bien entendu dans un problème de conditions à la frontière du film actif.

Soient :

$$p\left(+\frac{L}{2}\right) = p\left(-\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$d'o\grave{u}: p(x, z) = - \frac{3\mu U}{c^2 R} \left(z^2 - \frac{L^2}{4} \right) \frac{\varepsilon \cos \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^3}$$

Par int\egration et en supposant les conditions de Sommerfield, (film actif en entier), on d\eduit la charge portante:

$$W = \mu L U \left(\frac{L}{D} \right)^2 \left(\frac{R}{C} \right)^2 \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2} \left[16\varepsilon^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon^2) \right]^{1/2}$$

Le nombre de Sommerfield:

$$S = \frac{\mu N}{P_{moy}} \left(\frac{R}{C} \right)^2 = \frac{\mu N}{W} \left(\frac{R}{C} \right)^2 L D$$

vaut dans ces conditions:

$$S = \frac{1}{\left(\frac{L}{D} \right)^2} \frac{(1 - \varepsilon^2)^2}{\pi \varepsilon (16\varepsilon^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon^2))^{1/2}}$$

$$L'angle \text{ de calage est donn\^e par: } \tan \psi = - \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

La r\esistance \^a l'avancement sur l'arbre est donn\ee par:

$$f \frac{R}{C} = \frac{-2\pi^2 S}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

Ces r\esultats sont acceptables quand $L/D \leq 1/6$.

Il est \^a remarquer que les conditions de fronti\eres sont fix\ees par les imp\eratifs de cavitation au niveau du film.

0.4.3 Palier de dimension finie:

a/ Formulation isotherme:

Tr\es souvent, on admet que la masse volumique et la viscosit\ee ne varient pas selon l'\epaisseur du film.

L'equation de Reynolds se simplifie donc \^a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{dh}{dx} \quad \text{avec } h = c(1 + \varepsilon \cos \varphi)$$

Dans le cadre de la m\echanique des films minces visqueux, l'equation de Reynolds peut se simplifier encore car l'\epaisseur du film est tr\es faible devant sa longueur et sa largeur.

Pour mettre en \evidence les termes pr\edominants devant les autres, il est commode d'\ecrire cette equation avec des variables adimensionnelles, soient:

$$\bar{z} = \frac{z}{C} \quad \text{l'\epaisseur adimensionnelle}$$

$$\bar{p} = \frac{p}{6\mu U \left(\frac{R}{C} \right)^2} \quad \text{la pression adimensionnelle}$$

$$\bar{x} = \theta = \frac{x}{R} \quad \text{l'angle polaire}$$

$$\varphi = \frac{R}{L} \quad \text{le rapport entre rayon de l'arbre et largeur du coussinet.}$$

De plus, on admet souvent que la masse volumique et la viscosité ne varient pas selon l'épaisseur du film.

On remarque que:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{dx} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \Theta}$$

de même: $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

d'où: $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}}$ et $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{L} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}}$

soit: $\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(h^3 \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \right)$

et de la même manière: $\frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \right)$

en substituant h et p par leur expressions en fonction des variables adimensionnelles, soient:

$$h = \bar{h}C \quad \text{et} \quad p = 6\mu\omega \left(\frac{R}{C} \right)^2 \bar{p}$$

dans l'équation de Reynolds, on obtient:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\left(\bar{h}C \right)^3 6\mu\omega \left(\frac{R}{C} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right] + \frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\left(\bar{h}C \right)^3 6\mu\omega \left(\frac{R}{C} \right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right] = 6\mu\omega \frac{1}{R} C \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}$$

soit:

$$\frac{1}{R^2} C^3 6\mu\omega \left(\frac{R}{C} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{1}{L^2} C^3 6\mu\omega \left(\frac{R}{C} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 6\mu\omega \frac{1}{R} C \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}$$

finalement:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right) + \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}$$

ou encore:

$$3\bar{h}^3 \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{h}^3 \left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} + \zeta^2 \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{z}^2} \right) = \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}$$

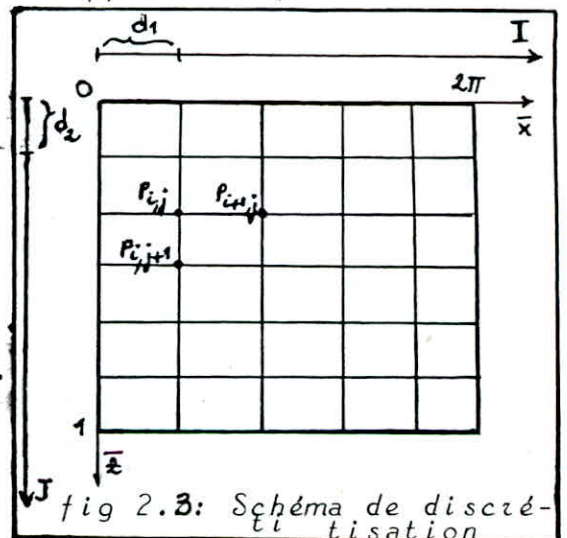
équation que l'on résout par les différences finies.

a/ Discrétisation:

Pour appliquer la méthode des différences finies, on développe le palier dans le sens circumférentiel et on découpe le domaine ainsi obtenu en un certain nombre de rectangles élémentaires.

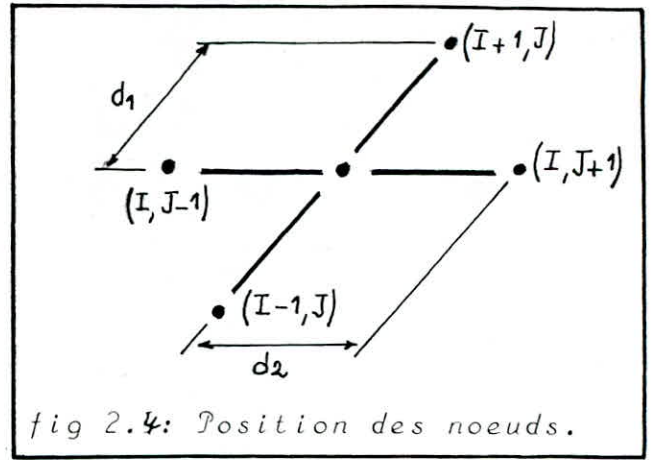
Les variables continues Θ ou \bar{x} et \bar{z} sont alors remplacées par les variables discrètes i et j .

Considérons le maillage bidimensionnel, suivant l'axe "x"



(indice l), suivant l'axe "z" (indice J) rectangulaire dans le cas général.

Chaque point de coordonnées générales (l, J) est considéré entouré de ses quatre voisins suivant les axes de référence et situés à la distance d_1 et d_2 respectivement.



La valeur de la pression p au point de coordonnées l, J en fonction de celles des points situés au voisinage de celui-ci.

On a les relations:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\bar{p}(I+1, J) - \bar{p}(I-1, J)}{2d_1}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\bar{p}(I+1, J) - 2\bar{p}(I, J) + \bar{p}(I-1, J)}{d_1^2}$$

$$\text{et: } \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\bar{p}(I, J+1) - 2\bar{p}(I, J) + \bar{p}(I, J-1)}{d_2^2}$$

En utilisant ces expressions, on obtient l'équation aux différences.

soit:

$$3\kappa^2(I) \frac{d\kappa}{d\bar{x}}(I) \frac{\bar{p}(I+1, J) - \bar{p}(I-1, J)}{2d_1} + \kappa^3(I) \left[\frac{\bar{p}(I+1, J) - 2\bar{p}(I, J) + \bar{p}(I-1, J)}{d_1^2} + \frac{\bar{p}(I, J+1) - 2\bar{p}(I, J) + \bar{p}(I, J-1)}{d_2^2} \right] = \frac{d\kappa}{d\bar{x}}(I)$$

soit:

$$\frac{3\kappa^2(I)}{2d_1} \frac{d\kappa}{d\bar{x}}(I) \bar{p}(I+1, J) - \frac{3\kappa^2(I)}{2d_1} \frac{d\kappa}{d\bar{x}} \bar{p}(I-1, J) + \frac{\kappa^3(I)}{d_1} \bar{p}(I+1, J) - \frac{2\kappa^3(I)}{d_1^2} \bar{p}(I, J) + \frac{\kappa^3(I)}{d_1^2} \bar{p}(I-1, J) + \frac{\kappa^3(I)}{d_2^2} \bar{p}(I, J+1) - 2\frac{\kappa^3(I)}{d_2^2} \bar{p}(I, J) + \frac{\kappa^3(I)}{d_2^2} \bar{p}(I, J-1) = \frac{d\kappa}{d\bar{x}}(I)$$

ou encore:

$$\left[\frac{3}{2d_1} \kappa^2(I) \frac{d\kappa}{d\bar{x}}(I) + \frac{\kappa^3(I)}{d_1^2} \right] \bar{p}(I+1, J) + \left[-\frac{3}{2d_1} \kappa^2(I) \frac{d\kappa}{d\bar{x}}(I) + \frac{\kappa^3(I)}{d_1^2} \right] \bar{p}(I-1, J) + \left[-2\frac{\kappa^3(I)}{d_1^2} - 2\frac{\kappa^3(I)}{d_2^2} \right] \bar{p}(I, J) + \frac{\kappa^3(I)}{d_2^2} \bar{p}(I, J+1) + \frac{\kappa^3(I)}{d_2^2} \bar{p}(I, J-1) = \frac{d\kappa}{d\bar{x}}(I)$$

$$\frac{h^3(I)}{d_2^2} \bar{p}(I, J) + \zeta^2 \frac{h^3(I)}{d_2^2} \bar{p}(I, J+1) + \zeta^2 \frac{h^3(I)}{d_2^2} \bar{p}(I, J-1) = \frac{dh}{d\bar{x}} (I)$$

où I varie de 1 à $m-1$

J varie de 1 à $n-1$.

soit en d'autres termes:

$$F_{i+1,j} \bar{p}_{i+1,j} + F_{i-1,j} \bar{p}_{i-1,j} + F_{i,j} \bar{p}_{i,j} + F_{i,j+1} \bar{p}_{i,j+1} + F_{i,j-1} \bar{p}_{i,j-1} = Q_{c,i}$$

avec:

$$F_{i+1,j} = \frac{h^2(I)}{d_1} \left(\frac{3}{2} \frac{dh}{d\bar{x}} (I) + \frac{h(I)}{d_1} \right)$$

$$F_{i-1,j} = \frac{h^2(I)}{d_1} \left(-\frac{3}{2} \frac{dh}{d\bar{x}} (I) + \frac{h(I)}{d_1} \right)$$

$$F_{i,j} = -\frac{2h^3(I)}{d_1^2} (1 + \zeta^2)$$

$$F_{i,j+1} = F_{i,j-1} = \zeta^2 \frac{h^3(I)}{d_2^2}$$

$$\text{et: } Q_{c,i} = \frac{dh}{d\bar{x}} (I)$$

a2/ Conditions aux limites:

Les conditions aux limites sur la pression sont celles de Reynolds:

- Dans la rainure d'alimentation $\bar{p}(\Theta, \bar{z}) = 0$, car l'alimentation a lieu à la pression atmosphérique prise comme référence,

- Sur les bords du coussinet $\bar{p}(\Theta, 1/2) = \bar{p}(\Theta, -1/2) = 0$,

- Sur la frontière de rupture du film $\bar{p}(\Theta_s, \bar{z}) = 0$,

l'abscisse de fin de l'arc actif, est déterminé par la condition:
 $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \Theta}(\Theta_s, z) = 0$.

a3/ Conditionnement du système d'équation:

Si l'on écrit les équations " aux différences finies " par rapport aux lignes, on obtient sous forme matricielle, une équation de la forme générale:

$$[F] [P] = [Qc]$$

avec: $[F]$ la matrice fluidité, de dimensions (k, k)

$[P]$ la matrice des pressions, de dimension (k) ,

$[Qc]$ la matrice colonne des conditions aux limites, de dimension (k)

k étant le nombre de points du maillage:

$k = 1.J$ 1 et J étant le nombre de lignes et de colonnes respectivement.

Les matrices $[F]$ et $[Qc]$ sont connues et calculables en chaque point à partir des données:

- Géométriques: dimensions, jeu de laminage,
- Hydraulique: viscosité de l'huile,
- Et des conditions aux limites: vitesses, pressions et débits.

La matrice $[P]$ des pressions est inconnue, le calcul de la valeur de la pression en chaque point, en fonction des conditions aux limites et des conditions initiales constitue le but principal qui permet ensuite la détermination de toutes les caractéristiques du dispositif.

L'examen attentif de la matrice de fluidité, concomitant à l'étude de la méthode de calcul pratique des coefficients de celle-ci, nous a permis de découvrir une décomposition liée à sa structure particulière.

Comme un grand nombre de matrices issues de la modélisation de systèmes physiques, celle-ci est une matrice "éparse", c'est à dire contenant un nombre relativement faible de termes non-nuls.

Écrite sous cette forme, la matrice $[F]$ comporte tous les termes de la diagonale principale et des deux diagonales adjacentes puis deux diagonales disposées symétriquement, et de largeur unité, tous les autres termes étant nuls.

Dans le cas d'un réseau de "l" lignes et "j" colonnes, on peut écrire:

- Nombre total de termes: $Nt = l \cdot j$
- Nombre de termes non-nuls: $N\emptyset = 4 \cdot l \cdot j - 2l - 2j$.

Si l'on décompose cette matrice en sous-matrices élémentaires, qui sont des matrices carrées contenant un nombre minimale de termes non-nuls nous distinguons, les diverses matrices suivantes:

- Une matrice colonne $P(j)$ représentant les pressions d'une ligne,
- Une matrice bande (tri-diagonale) : $A(j, j)$
- Deux matrices diagonales semblables $B(j, j)$ et $D(j, j)$,
- Une matrice colonne $C(j)$.

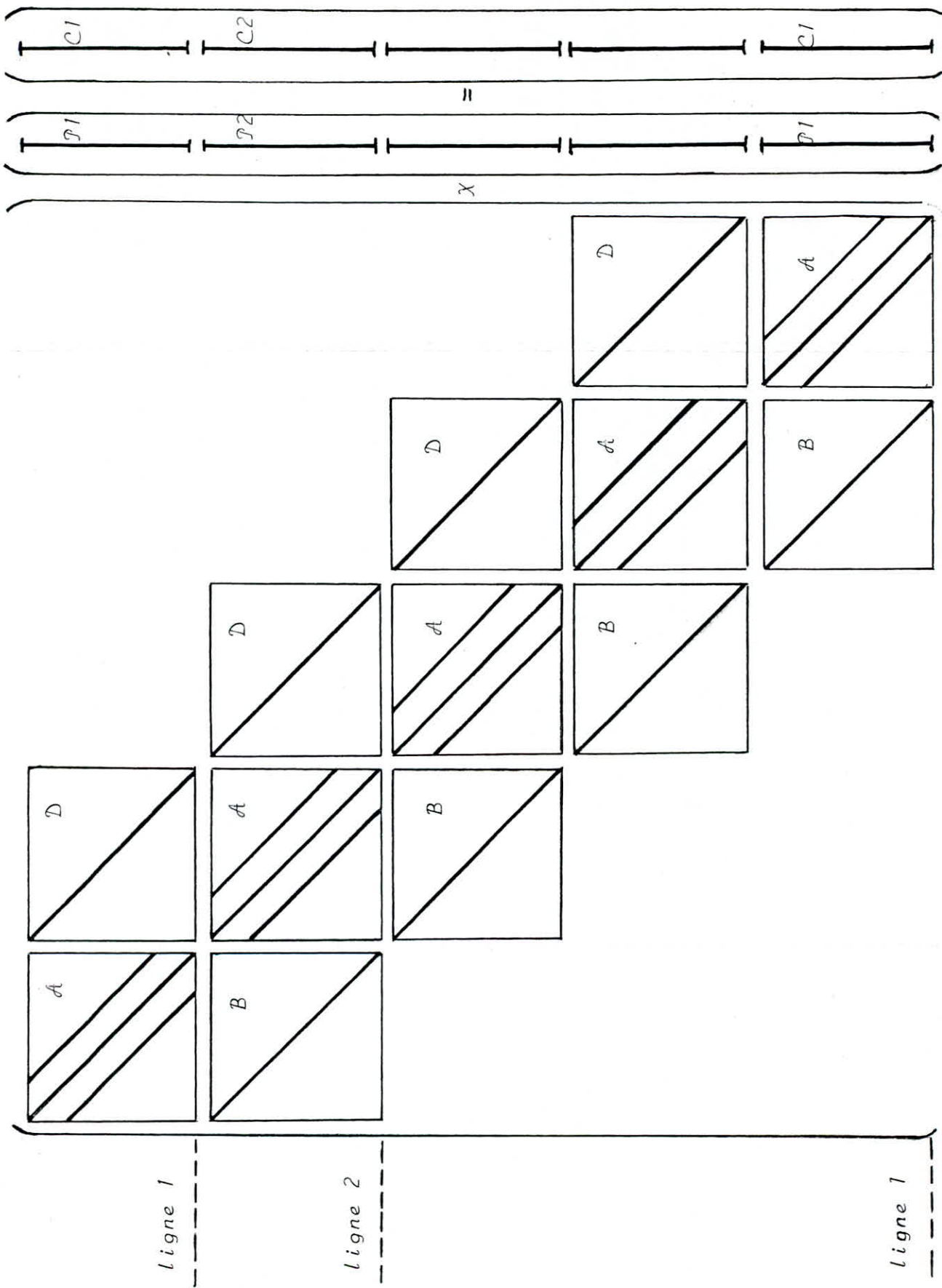


fig 2.5 Forme du système matriciel obtenu par les différences finies.

Et l'équation qui exprime la loi de conservation des débits s'écrit, pour une ligne "i" sous la forme matricielle:

$$B_i P_{i-1} + A_i P_i + D_i P_{i+1} = C_i$$

Toutes les matrices de coefficients ont une signification physique claire:

- La matrice $A(j, j)$ représente les débits existant entre les points du réseau situés sur une même ligne "i" ($1 \leq i \leq l$), dans le sens $(i, j) \rightarrow (i, j-1)$ et $(i, j) \rightarrow (i, j+1)$ et les débits vers les points correspondants des lignes adjacentes, dans le sens: $(i, j) \rightarrow (i-1, j)$ et $(i, j) \rightarrow (i+1, j)$.

- Les matrices $B(j)$ et $D(j)$ représentent les débits existants tout au long des "j" points de la ligne "i" entre les lignes adjacentes: $(i-1, j) \rightarrow (i, j)$ et $(i+1, j) \rightarrow (i, j) \quad \forall j / 1 \leq j \leq j$.

- La matrice $C(j)$ représentant les conditions aux limites de pressions, débits et vitesses.

a4/ Techniques de résolution:

Nous avons obtenu précédemment l'écriture matricielle:

$$[F][P] = [Qc]$$

où: $[F]$ et une matrice carrée d'ordre $l \cdot j = k$,

a4.1/ Technique directe:

La matrice $[F]$ étant non singulière, nous pouvons définir son inverse $[F]^{-1}$ et par suite:

$$[P] = [F]^{-1} [Qc]$$

a4.2/ Méthodes itératives:

Une technique itérative pour résoudre un système $Ax = b$ de n équation à n inconnues, commence par une approximation $x^{(0)}$ de la solution x, et génère une suite de vecteurs $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ convergeant vers x.

La plupart de ces techniques itératives utilisent un processus qui transforme le système $Ax = b$ en un système équivalent de la forme $x = Tx + c$

où: T est une matrice,
 c un vecteur.

Ayant sélectionné le vecteur initial $x^{(0)}$, la génération de vecteurs par approximations successives suivant la démarche:

$$x^{(k)} = T x^{(k-1)} + c$$

par ordinateur, pour chaque $k = 1, 2, \dots$

Dans la pratique, les techniques itératives sont rarement utilisées pour résoudre des systèmes linéaires de faible dimension, puisque le temps demandé pour une précision suffisante dépasse celui utilisant des techniques directes telles que la méthode d'élimination de Gauss.

Pour certains grands systèmes, particulièrement pour ceux de types spéciaux ayant plusieurs conditions aux limites tels les problèmes aux conditions aux limites et les équations différentielles aux dérivées partielles, ces méthodes itératives peuvent être bénéfiques en ce qui concerne capacité mémoire et temps d'exécution (résolution).

Théories de Jacobi et de Gauss-Seidel:

L'algorithme de la méthode itérative de Jacobi est: pour la résolution du système $Ax = b$, choisir une approximation initiale $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$,

Etape 1: initialiser k à 1

Etape 2: pour chaque valeur de $i = 1, 2, \dots, n$

calculer:

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1, j \neq i}^n (a_{ij} x_j^{(k-1)}) + b_i}{a_{ii}}$$

Etape 3: Si l'approximation sur $x^{(k)}$ s'avère satisfaisante aller à l'étape 4, sinon ajouter 1 à k et aller à l'étape 2.

Etape 4: le processus est terminé.

Une possibilité de stopper ou d'arrêter les itérations et de poser une condition de précision sur l'erreur absolue:

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|, \text{ Ou relative: } \frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k)}\|}$$

Une possible amélioration de l'algorithme de Jacobi suggère le calcul de $x_i^{(k)}$ pour chaque valeur de $i > 1$, utilisant les composantes $x_j^{(k)}$ pour $j < i$ et $x_j^{(k-1)}$ pour $j > i$, l'approximation se trouvant ainsi améliorée: c'est la méthode de Gauss-Seidel dont l'algorithme est le suivant:

Pour résoudre le système $Ax = b$, choisir une approximation initiale $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

Etape 1: initialiser k à 1

Etape 2: pour chaque valeur $i = 1, 2, 3, \dots, n$, calculer:

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij} x_j^{(k)}) - \sum_{j=i+1}^n (a_{ij} x_j^{(k-1)}) + b_i}{a_{ii}}$$

Etape 3: si l'approximation sur $x^{(k)}$ s'avère satisfaisante aller à l'étape 4 sinon ajouter 1 à k et aller à l'étape 2.

Etape 4: le processus est terminé.

Méthode de Relaxation:

Pour faire un meilleur sondage de la pression dans le film fluide, on est amené à augmenter le nombre de points ou noeuds du maillage, ce qui donnerait des matrices de fluidité assez grandes rendant les calculs plus lents et demandant plus de mémoire.

Pour cela, on fait recours à la méthode de relaxation, modifiant celle de Gauss-Seidel comme suit :

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + w \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}}$$

où $r_{ii}^{(k)}$ est la composante i du vecteur résiduel de la méthode de Gauss-Seidel correspondant à l'approximation du vecteur solution

$(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, dont l'expression est:

$$r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} - a_{ii} x_i^{(k-1)}$$

de façon que

$$x_i^{(k)} = (1-w) x_i^{(k-1)} + \frac{w}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right]$$

si $0 < w < 1$, les procédures sont appelées méthodes de sous-relaxation, et peuvent être utilisées pour obtenir la convergence de certains systèmes non convergents par la méthode de Gauss-Seidel.

si par contre $w > 1$, les procédures sont appelées méthodes de sur-relaxation, que nous considérons, vu qu'elles permettent l'accélération de convergence de système convergents par la méthode de Gauss-Seidel.

Ces méthodes sont abrégées par SOR (Successive Over-Relaxation).

L'intérêt de la méthode est donc d'accroître la vitesse de convergence.

La valeur de w conduisant à la convergence la plus rapide et déterminée par approches successives, une première approximation étant donnée par la formule:

$$w = 2 - \pi \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{I^2} + \frac{1}{J^2}}$$

I et J désignant le nombre de mailles dans les directions x et z .

L'algorithme de SOR est le suivant:

Pour résoudre le système linéaire $Ax = b$ où $a_{ii} \neq 0$ pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, choisir le paramètre w et le vecteur solution de départ $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

Etape 1: Initialiser k à 1,

Etape 2: Pour chaque $i=1,2,\dots,n$,
calculer:

$$x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{\alpha_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k-1)} \right)$$

Etape 3: Si $x^{(k)}$ s'avère satisfaisant, aller à l'étape 4,
sinon ajouter 1 à k et aller à l'étape 2

Etape 4: le processus est terminé.

Le critère d'arrêt de la méthode SOR est le même que celui des méthodes de Jacobi ou de Gauss-Seidel.

b/ Formulation adiabatique:

L'aspect énergétique est fondamental pour le palier, où l'évacuation thermique est difficile, particulièrement pour l'arbre qui généralement, est très mal ventilé.

Pour des réalisations poussées, et afin de limiter la chute de viscosité due à l'élévation de température, on peut concevoir un dispositif de refroidissement à circulation d'eau qui a pour finalité de limiter l'échauffement du coussinet.

Pour des réalisations moins performantes, on prévoit un bac à huile avec un échangeur de sorte que μ reste suffisamment élevée.

Le problème actuel est de déterminer la fonction:

$$T = T(x, z)$$

L'énoncé de Joule du premier principe de la thermodynamique se traduit pour une maille par:

$$[\Delta Q_x(I, J) + \Delta Q_z(I, J)] \mathcal{E} \Delta T(I, J) = \Delta \bar{\pi}^*(I, J)$$

Forme discrétisée du bilan d'énergie,

où: Q_x et Q_z désigne les débits entrant dans la maille suivant les directions x et z , donnés par:

$$\Delta Q_x(I, J) = \frac{S N C D^2}{2} \left\{ \frac{\bar{\pi} \mathcal{E}}{2} - \frac{\mathcal{E}^3}{24 \mu^*(I, J)} \left[\frac{P(I+1, J) - P(I-1, J)}{2R} \right] \right\}$$

$$\Delta Q_z(I, J) = \frac{R \mathcal{E}^3 C N D^2}{96 S \mu^*(I, J)} [P(I, J+1) - P(I, J-1)]$$

soit pour une technique itérative de relaxation,

$$T^{(n+1)}(I, J) = T^{(n)}(I, J) + \omega \left\{ \frac{\Delta \bar{\pi}^{*(n)}(I, J) + \mathcal{E} [\Delta Q_x^{(n)}(I-1, J) T^{(n+1)}(I-1, J) + \Delta Q_z^{(n)}(I, J+1) T^{(n)}(I, J+1)]}{\mathcal{E} [\Delta Q_x^{(n)}(I, J) + \Delta Q_z^{(n)}(I, J)]} \right\}$$

dont la résolution nécessite de connaître la loi de variation de viscosité usuellement adoptée:

$$\mu^*(I, J) = e^{-\alpha [T(I, J) - T_e]}$$

0.5 Détermination des caractéristiques des paliers:

0.5.1 Charge portante:

La valeur de la charge que peut supporter le contact est obtenue par intégration de la pression dans le film.

Dans le cas d'un contact plan, l'intégration est directe

$$W = \int_{(S)} p \, ds$$

où:

(S) est la surface de contact,
ds l'élément d'aire.

Dans les autres cas, il faut, avant intégration, projeter la pression sur trois axes perpendiculaires.

Les composantes W_i de la charge sont ainsi données par:

$$W_i = \int_{(S)} p \, \vec{n} \cdot \vec{e}_i \, ds$$

où:

\vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface,
 \vec{e}_i le vecteur unitaire porté par l'axe \vec{x}_i .

On obtiendra ainsi le module et la direction de la charge.

En développant le film fluide des paliers, et en passant aux variables discrètes, la charge portante est donnée par:

$$W = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J p_{i,j} S_{i,j}$$

En prenant tous les éléments de surface égaux,

$$S_{i,j} = \frac{S}{I \cdot J}$$

S étant la surface développée du palier, soit $S = \pi \cdot l \cdot d$,
l étant la largeur du palier,

d son diamètre,

$$\text{on aura: } W = \frac{S}{I \cdot J} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J p_{i,j}$$

soit:

$$p_{\text{moy}} = \frac{\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J p_{i,j}}{I \cdot J}$$

la pression moyenne,

on aura donc:

$$W = S \cdot p_{\text{moy}}$$

0.5.2 Débit de fluide:

Le débit utilisé en lubrification est:

- Le débit massique pour les fluides compressibles,
- Et celui volumique pour le fluide incompressibles.

Ces débits sont calculés par intégration à partir des composantes de la vitesse dans le film.

On a ainsi

$$m_i = \int_{(S_i)} \rho U_i ds$$

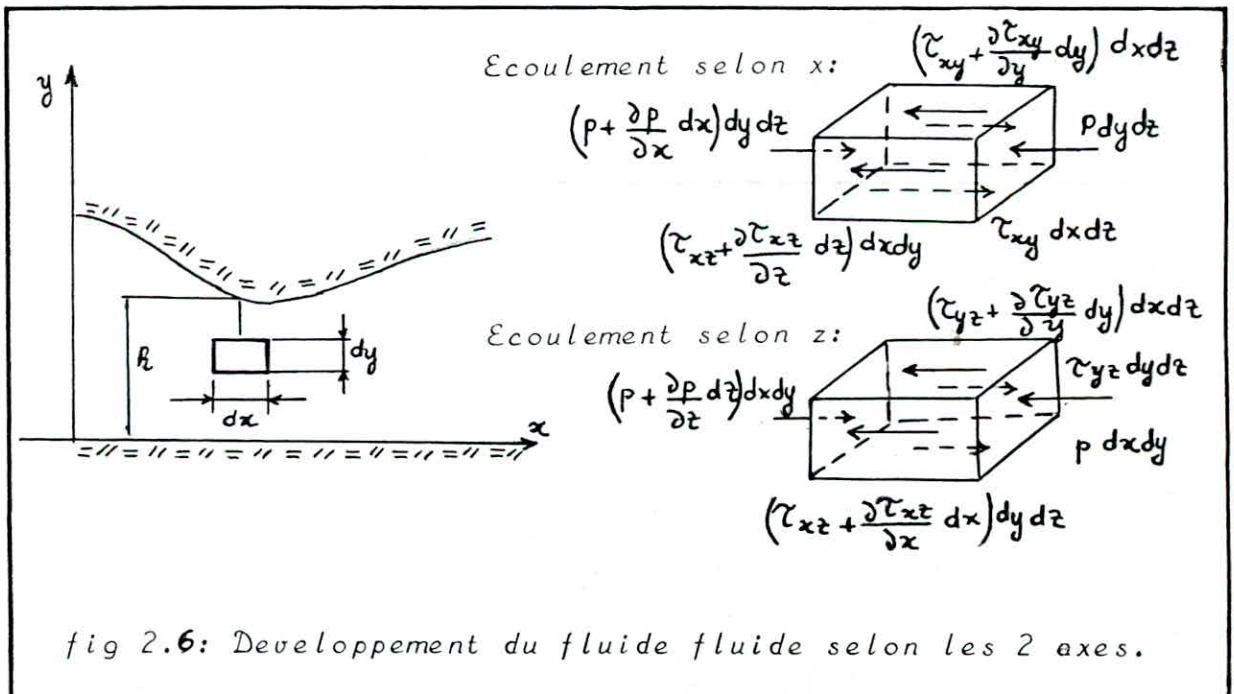
avec $i = 1, 2, 3$

Dans cette relation U_i et m_i sont respectivement la composante de la vitesse et du débit massique dans la direction \vec{x}_i et S_i est la section normale à i , à travers laquelle est calculé le débit.

Pour les fluides incompressibles, $\rho = \text{cte}$, et le débit volumique s'écrit:

L'intégration de telles équations nécessite la connaissance des composantes de la vitesse selon les directions correspondantes.

Considérant pour cela l'équilibre d'un parallélépipède élémentaire de côtés dx , dy et dz dans le film fluide développé.



Le parallélépipède est sollicité par :

- les contraintes de compression,
- les contraintes de cisaillement.

L'équation d'équilibre de toutes les forces donne :

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{xy} dx dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{xy} dx dz + p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz =$$

en simplifiant, on aura :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

utilisant l'équation de NEWTON : $\tau_{xy} = \mu \frac{\partial U}{\partial y}$

$$\text{soit alors : } \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\text{ou encore : } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Comme le fluide est très mince en direction de y , les gradients de vitesse dans le film seraient très grand par rapport à ceux qui se produisent dans la direction z .

$\frac{\partial U}{\partial z}$ peut être négligé vis-à-vis de $\frac{\partial U}{\partial y}$

$$\text{on aura donc : } \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

équation dont l'intégration 2 fois de suite donne :

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2$$

de même on peut montrer que :

$$W = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + C_3 y + C_4$$

Les constantes C_i étant à déterminer par les conditions au limites, à savoir : $U(y=0) = 0$

$$U(y=h) = r\omega$$

soient : $C_2 = 0$

$$\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 + C_1 h = r\omega$$

on aura :

$$C_1 = \frac{r\omega}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h$$

d'où :

$$U = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + \frac{y}{h} r\omega$$

et :

$$W(y=0) = 0$$

$$W(y=h) = 0$$

$$w(y=h) = 0$$

soient: $C_3 = 0$

$$\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} h^2 + C_3 h = 0$$

on aura:

$$C_3 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} h$$

d'où:

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h)$$

on déduit alors:

- le débit entraîné:

$$Q_x = \int_0^h U(l dy) = \int_0^h \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) - \frac{r\omega}{h} \right] l dy = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p l}{\partial x} \int_0^h (y^2 - hy) dy - \frac{r\omega l}{h} \int_0^h y dy = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p l}{\partial x} \left(\frac{y^3}{3} - h \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^h - \frac{r\omega l}{h} \frac{y^2}{2} \Big|_0^h = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p l}{\partial x} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} \right) - \frac{r\omega l}{h} \frac{h^2}{2}$$

soit:

$$Q_x = -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} l h^3 - r l \frac{h}{2} \omega$$

dans le cas discret, on aura:

$$Q_x = -\frac{1}{12\mu} \frac{P(I+1, J) - P(I-1, J)}{2d_1} l h^3(I) - r l \frac{h(I)}{2} \omega$$

- le débit de fuite:

$$Q_z = \int_0^h w(2\pi r dy) = \int_0^h \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h) \right] (2\pi r dy) = \frac{\pi r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \int_0^h (y^2 - hy) dy$$

$$dy = \frac{\pi r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{y^3}{3} - h \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^h = \frac{\pi r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} \right)$$

soit:

$$Q_z = -\frac{\pi r}{6} \frac{\partial p}{\partial z} h^3$$

dans le cas discret:

$$Q_z = -\frac{\pi r}{6\mu} h^3(I) \frac{P(I, J+1) - P(I, J-1)}{2d_2}$$

0.5.3 La force et le couple de frottement:

Les contraintes de cisaillement sont données par la loi de Newton:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{et} \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial W}{\partial y}$$

Utilisant les expressions de composantes U et W de la vitesse, on aura :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (2y - h) + \frac{r}{h} \omega$$

et:

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial z} (2y - h)$$

soient:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial P}{\partial x} \left(y - \frac{h}{2} \right) + \mu \frac{r}{h} \omega$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial P}{\partial z} \left(y - \frac{h}{2} \right)$$

Le calcul de la force ou du couple de frottement s'effectue sur l'une ou l'autre des parois des contacts, par intégration de la contrainte de cisaillement ou du couple élémentaire correspondant à la direction considérée.

Ainsi dans le cas d'un contact plan, les composantes F_{xx} et F_{xz} de la force de frottement sur le coussinet, dans les directions x et z s'écrivent:

$$F_{xx} \Big|_{\text{coussinet}} = \int_{(s)} \tau_{xy} (y=0) ds$$

$$F_{xz} \Big|_{\text{coussinet}} = \int_{(s)} \tau_{yz} (y=0) ds$$

Les composantes de la force de frottement F_{xx} et F_{xz} sur l'arbre se calculent de la même façon, à partir des contraintes de cisaillement sur la surface de l'arbre, pour $y = h$,

soient:

$$F_{xx} \Big|_{\text{arbre}} = \int_{(s)} \tau_{xy} (y=h) ds$$

$$F_{xz} \Big|_{\text{arbre}} = \int_{(s)} \tau_{xz} (y=h) ds$$

Il est à noter que tous les intégrales écrites ci-dessus sont calculées numériquement, dans le cas discret,

$$\text{Ainsi: } \tau_{xy}(y=0) = \frac{\partial P}{\partial x} \left(-\frac{h}{2} \right) + \rho \frac{r}{h} \omega = -\frac{h}{2} \frac{\partial P}{\partial x} + \rho \frac{r}{h} \omega$$

soit dans le cas discret:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(y=0) &= -\frac{h}{2} \frac{P(I+1, J) - P(I-1, J)}{2d_1} + \rho \frac{r}{h} \omega \\ &= -\frac{h}{4d_1} [P(I+1, J) - P(I-1, J)] + \rho \frac{r}{h} \omega \end{aligned}$$

de même:

$$\tau_{yz}(y=0) = -\frac{h}{4d_2} [P(I, J+1) - P(I, J-1)]$$

$$\tau_{xy}(y=h) = \frac{h}{4d_1} [P(I+1, J) - P(I-1, J)] + \rho \frac{r}{h} \omega$$

$$\text{et: } \tau_{yz}(y=h) = \frac{h}{4d_2} [P(I, J+1) - P(I, J-1)]$$

et par suite

$$F_{xx} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left\{ -\frac{h}{4d_1} [P(I+1, J) - P(I-1, J)] + \rho \frac{r}{h} \omega \right\} S_{i,j}$$

soit:

$$S_{i,j} = \frac{S}{I \cdot J} \text{ avec } S = \pi l d$$

d'où:

$$F_{xx} \Big|_{\text{cossinet}} = \frac{S}{I \cdot J} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left\{ -\frac{h}{4d_1} [P(I+1, J) - P(I-1, J)] + \rho \frac{r}{h} \omega \right\}$$

de même:

$$F_{xz} \Big|_{\text{cossinet}} = -\frac{S}{I \cdot J} \frac{h}{4d_2} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J [P(I, J+1) - P(I, J-1)]$$

$$F_{xy} \Big|_{\text{arbre}} = \frac{S}{I \cdot J} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left\{ \frac{h}{4d_1} [P(I+1, J) - P(I-1, J)] + \rho \frac{r}{h} \omega \right\}$$

$$F_{yz} \Big|_{\text{arbre}} = \frac{S}{I \cdot J} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J [P(I, J+1) - P(I, J-1)]$$

Les coefficients de frottement au coussinet et à l'arbre sont, selon une direction de l'écoulement donnée, obtenus par les rapports des forces de frottement correspondantes à la charge portante W ,

ainsi :

$$f_{xx} \Big|_{\text{coussinet}} = \frac{F_{xx} \Big|_{\text{coussinet}}}{W}$$

$$f_{xz} \Big|_{\text{coussinet}} = \frac{F_{xz} \Big|_{\text{coussinet}}}{W}$$

$$f_{xx} \Big|_{\text{arbre}} = \frac{F_{xx} \Big|_{\text{arbre}}}{W}$$

$$\text{et } f_{xz} \Big|_{\text{arbre}} = \frac{F_{xz} \Big|_{\text{arbre}}}{W}$$

B.1 ETUDE DU GRAISSAGE DES CHEMISES:

La rotation du maneton projette une importante quantité d'huile sur l'intérieur de la chemise, laquelle s'écoulerait naturellement vers le carter vilebrequin si le mouvement du piston, muni des segments, ne la pompait vers la chambre de combustion.

Le processus est schématisé ci-dessous et s'apparente donc à celui d'une pompe aspirante-refoulante.

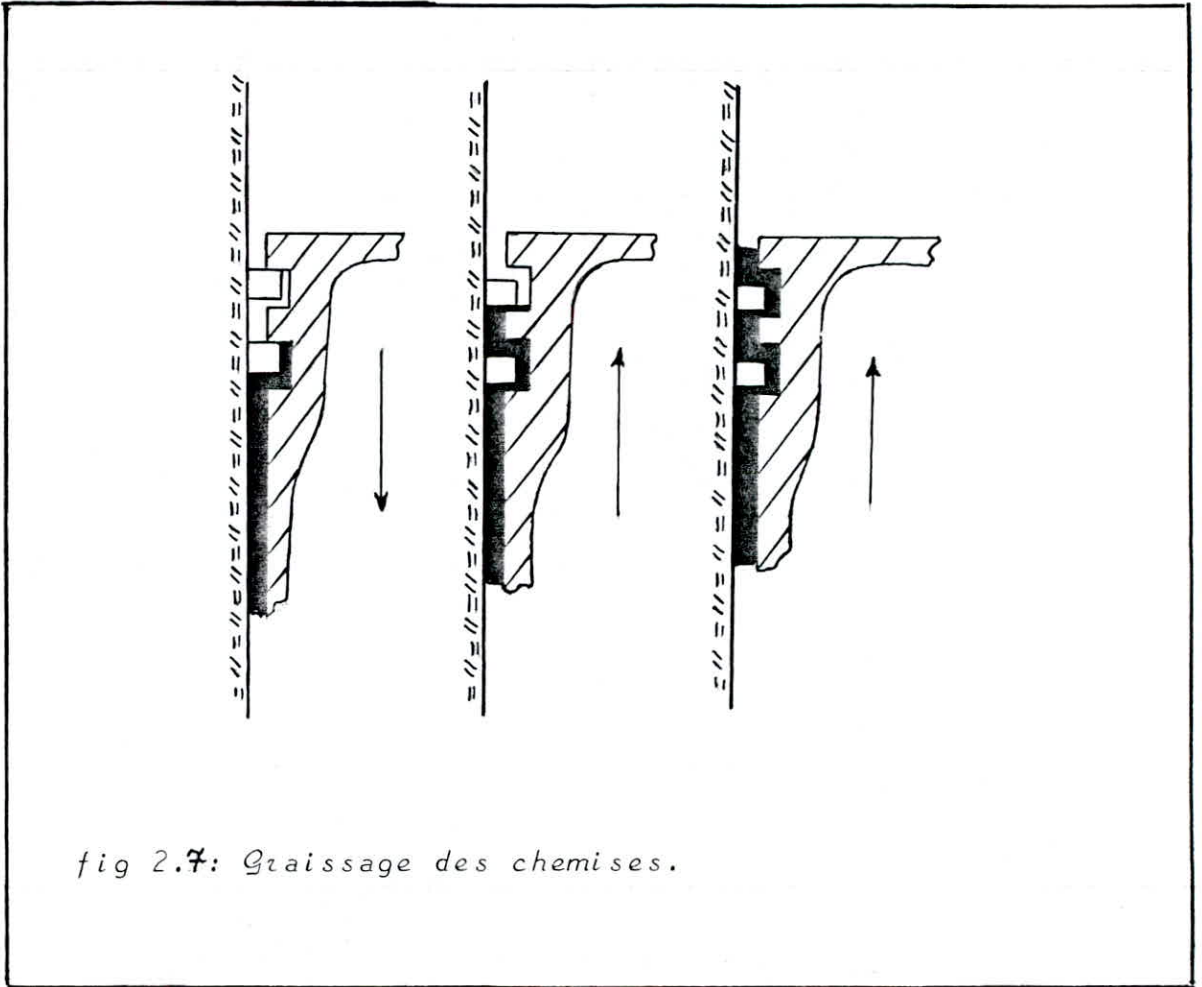


fig 2.7: Graissage des chemises.

Le rôle du segment de tête est déterminant. Il doit tout en restant lui même lubrifié, contrôler le débit final de l'huile afin d'éviter qu'un excès ne vienne encrasser la chambre de combustion et la gorge de tête.

B.2 ETUDE DU GRAISSAGE DU SYSTEME DE DISTRIBUTION:

2.0 Etude théorique:

2.0.1 Etablissement des équations du problème:

L'équation de continuité en coordonnées cylindriques s'écrit:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Celles de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = g_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Dans le cas d'un cylindre coulissant dans un autre, les conditions aux limites s'écrivent:

$$\begin{aligned} v_r = 0 \quad \text{pour } r = r_1 \text{ et } r = r_2 \quad \forall z \\ \text{et } v_\theta = 0 \quad \text{pour } r = r_1 \text{ et } r = r_2 \quad \forall z \end{aligned}$$

on prend pour solution essai: $v_r = 0$
 $v_\theta = 0$

L'équation de continuité devient:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \text{ soit } v_z \text{ est non fonction de } z.$$

Celles de Navier-Stokes deviennent quand à elles, en négligeant la pesanteur:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + 0 \\ 0 = 0 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \right) \end{array} \right.$$

Des 2 premières, on déduit que la pression est fonction de z et t seulement.

La dernière se met sous la forme:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\partial v_z}{\partial t} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \right)$$

De plus on fait remarquer que le problème est axisymétrique:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$$

Soit alors:

$$\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}}_{\text{fonction de } t \text{ et } z} = - \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial t} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)}_{\text{fonction de } t \text{ et } z}$$

fonction de t et z fonction de t et z

Pour que cette équation soit compatible, il faut que chaque membre soit fonction de t seulement.

On aura donc:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = f(t)$$

et

$$-\frac{\partial v_z}{\partial t} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = f(t)$$

2.0.2 Résolution des équations obtenues:

La résolution de l'équation en pression:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial z} = f(t)$$

donne: $p(t, z) = f(t) z + g(t)$

$g(t)$ étant une fonction du temps.

En supposant l'alimentation à pression constante (atmosphérique).

$$\text{soit } p(t, 0) = p_0, \quad g(t) = p_0$$

soit encore: $p(t, z) = p_0 + \int f(t) \cdot z$

La connaissance de $f(t)$ est indispensable, à la détermination du profil de pression et à la résolution de la seconde équation.

Cette dernière peut être obtenue expérimentalement par une série de mesures de la pression en un point de cote z donnée, à intervalle de temps donné.

La résolution de la seconde équation est encore plus délicat, cette dernière étant une fonction différentielle aux dérivées partielles du second ordre, à coefficients variables.

Transformant en premier lieu l'équation:

$$\gamma \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial v_z}{\partial t} = f(t)$$

par Laplace, en posant:

$$\hat{v}_z(t, r) = \int_0^{+\infty} v_z(t, r) e^{-\lambda t} dt$$

et en faisant remarquer que:

$$\frac{\partial \hat{v}_z}{\partial z} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial v_z}{\partial z} e^{-\lambda t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} d v_z$$

soit en intégrant par parties:

$$\frac{\partial \hat{v}_z}{\partial z} = v_z e^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty} - \int v_z d e^{-\lambda t} = v_z e^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} v_z e^{-\lambda t} dt$$

soit le résultats connu: $\frac{\partial \hat{v}_z}{\partial t} = \lambda \hat{v}_z$

vu que, pour $t=0$ $v_z(t, r)$ l'emporte sur $e^{-\lambda t}$ et est nulle d'après les conditions initiales du problème, alors que pour les temps larges, $e^{-\lambda t}$ l'emporte sur $v_z(t, r)$ et tend vers 0.

L'équation transformée par Laplace, de l'équation donnée, est ainsi:

$$\mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial r} \right) - \lambda \hat{u}_r = F(\lambda)$$

à variable r et paramétrisée par λ .

Posons $n^2 = \frac{\lambda}{\nu}$

Elle se met sous la forme:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial r} - n^2 \hat{u}_z = \frac{F(\lambda)}{\nu}$$

L'équation homogène de cette équation différentielle paramétrisée du second ordre:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial r} - n^2 \hat{u}_z = 0$$

est une équation de Bessel dont la solution est:

$$\hat{u}_z(\lambda, r) = B(\lambda) I_0(nr) + C(\lambda) K_0(nr)$$

I_0 et K_0 étant les fonctions de Bessel modifiées de première et seconde espèce respectivement.

Le second membre étant constant, on cherchera la solution particulière sous la forme d'une constante:

soit: $\hat{u}_z^* = -F(\lambda) / n^2 \nu$

ou encore: $-F(\lambda) / \lambda$

La solution totale est ainsi:

$$\hat{u}_z(\lambda, r) = B(\lambda) I_0(nr) + C(\lambda) K_0(nr) - \frac{F(\lambda)}{\lambda}$$

Les coefficients B et C sont à déterminer par les conditions aux limites du problème; soient:

pour $r = r_1$ $u_z(t, r) = V(t)$

$r = r_2$ $u_z(t, r) = 0$

dont les transformées par Laplace donnent:

$r = r_1$ $\hat{u}_z(\lambda, r) = V(\lambda)$

$r = r_2$ $\hat{u}_z(\lambda, r) = 0$

soit alors:

$$\begin{cases} V(\lambda) = B I_0(nr_1) + C K_0(nr_1) - \frac{F(\lambda)}{\lambda} \\ 0 = B I_0(nr_2) + C K_0(nr_2) - \frac{F(\lambda)}{\lambda} \end{cases}$$

On obtient ainsi un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues B et C :

$$\begin{cases} B I_0(nr_1) + C K_0(nr_1) = V(\lambda) + \frac{F(\lambda)}{\lambda} \\ B I_0(nr_2) + C K_0(nr_2) = \frac{F(\lambda)}{\lambda} \end{cases}$$

dont la résolution par la méthode de Cramer donne :

$$B = \Delta B / \Delta \quad \text{et} \quad C = \Delta C / \Delta \quad (\text{pour } \Delta \neq 0)$$

où :

$$\Delta = \begin{vmatrix} I_0(nr_1) & K_0(nr_1) \\ I_0(nr_2) & K_0(nr_2) \end{vmatrix} = I_0(nr_1) K_0(nr_2) - I_0(nr_2) K_0(nr_1)$$

$$\Delta B = \begin{vmatrix} V(\lambda) + \frac{F(\lambda)}{\lambda} & K_0(nr_1) \\ \frac{F(\lambda)}{\lambda} & K_0(nr_2) \end{vmatrix} = \left[V(\lambda) + \frac{F(\lambda)}{\lambda} \right] K_0(nr_2) - \frac{F(\lambda)}{\lambda} K_0(nr_1)$$

$$\Delta C = \begin{vmatrix} I_0(nr_1) & V(\lambda) + \frac{F(\lambda)}{\lambda} \\ I_0(nr_2) & \frac{F(\lambda)}{\lambda} \end{vmatrix} = \frac{F(\lambda)}{\lambda} I_0(nr_1) - \left[V(\lambda) + \frac{F(\lambda)}{\lambda} \right] I_0(nr_2)$$

soient alors :

$$B = \frac{\left[V(\lambda) + \frac{F(\lambda)}{\lambda} \right] K_0(nr_2) - \frac{F(\lambda)}{\lambda} K_0(nr_1)}{I_0(nr_1) K_0(nr_2) - I_0(nr_2) K_0(nr_1)}$$

et :

$$C = \frac{\frac{F(\lambda)}{\lambda} I_0(nr_1) - \left[V(\lambda) + \frac{F(\lambda)}{\lambda} \right] I_0(nr_2)}{I_0(nr_1) K_0(nr_2) - I_0(nr_2) K_0(nr_1)}$$

d'où par la transformation inverse de Laplace on trouve :

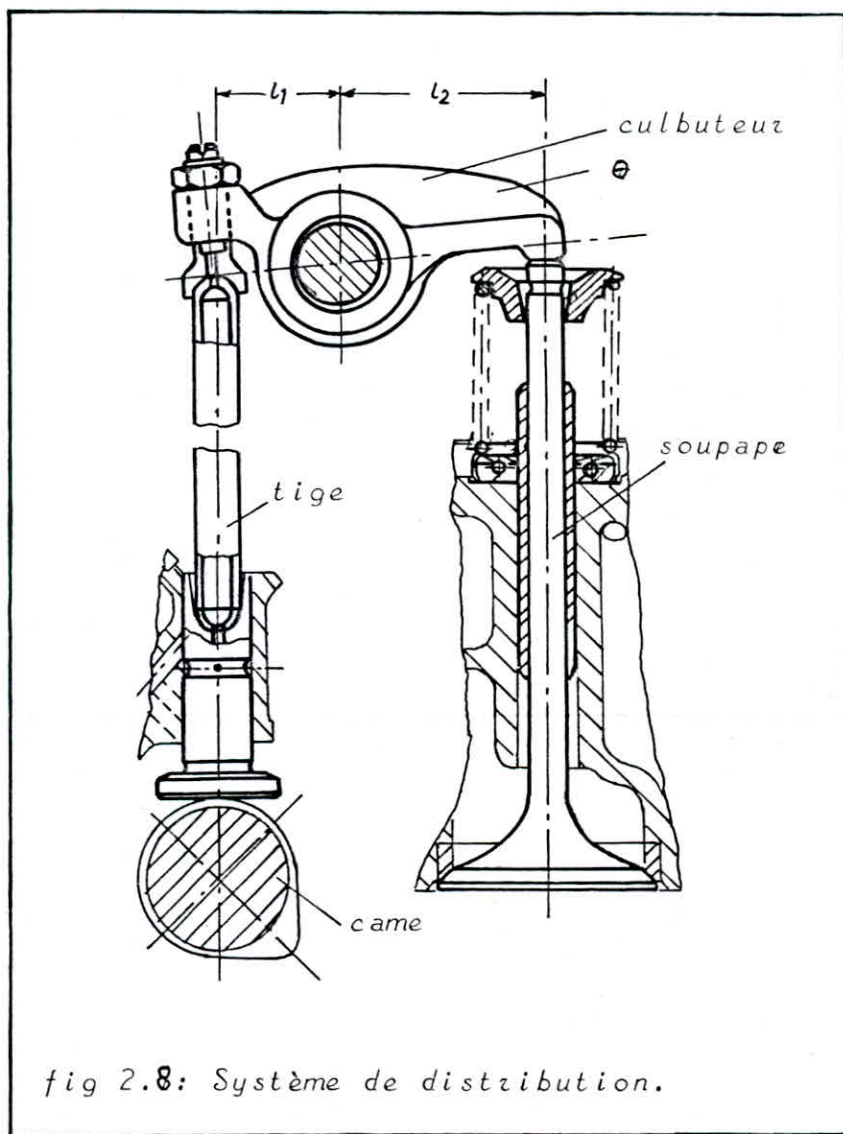
$$v(t, r) = \int_0^{+\infty} \hat{v}(\lambda, r) e^{\lambda t} d\lambda$$

2.1 Graissage de la tige et la soupape:

La méthode d'étude du graissage de la tige et de la soupape est un cas particulier de la méthode détaillée ci-dessus: il suffit en effet de déterminer la vitesse sur la paroi de la tige et de la soupape dans chaque cas étudié, en faisant appel à des relations cinématiques élémentaires, à partir d'un profil de came connu.

En général, la levée de la soupape est donnée point par point, et on est alors amené à résoudre le problème numériquement.

Aussi, les caractéristiques de graissage sont obtenues de la même manière que pour les paliers dont les relations et définitions ont été clairement établies.



CHAPITRE
-3-
EQUILIBRAGE
DES
MOTEURS
EN LIGNE
ET EN " V "

L'équilibrage des moteurs thermiques à pistons, en ligne et en "V", est d'une importance primordiale quand à la tenue des parties mobiles de la machine, et le bon fonctionnement de cette dernière.

Ce chapitre complète l'ensemble de l'étude théorique du moteur et à pour but de donner une assise mathématique aux divers choix réalisés lors de l'élaboration de moteurs à combustion.

A.O GENERALITES:

O.O Définition:

Par définition, un moteur est dit parfaitement équilibré si les réactions aux paliers sont constantes.

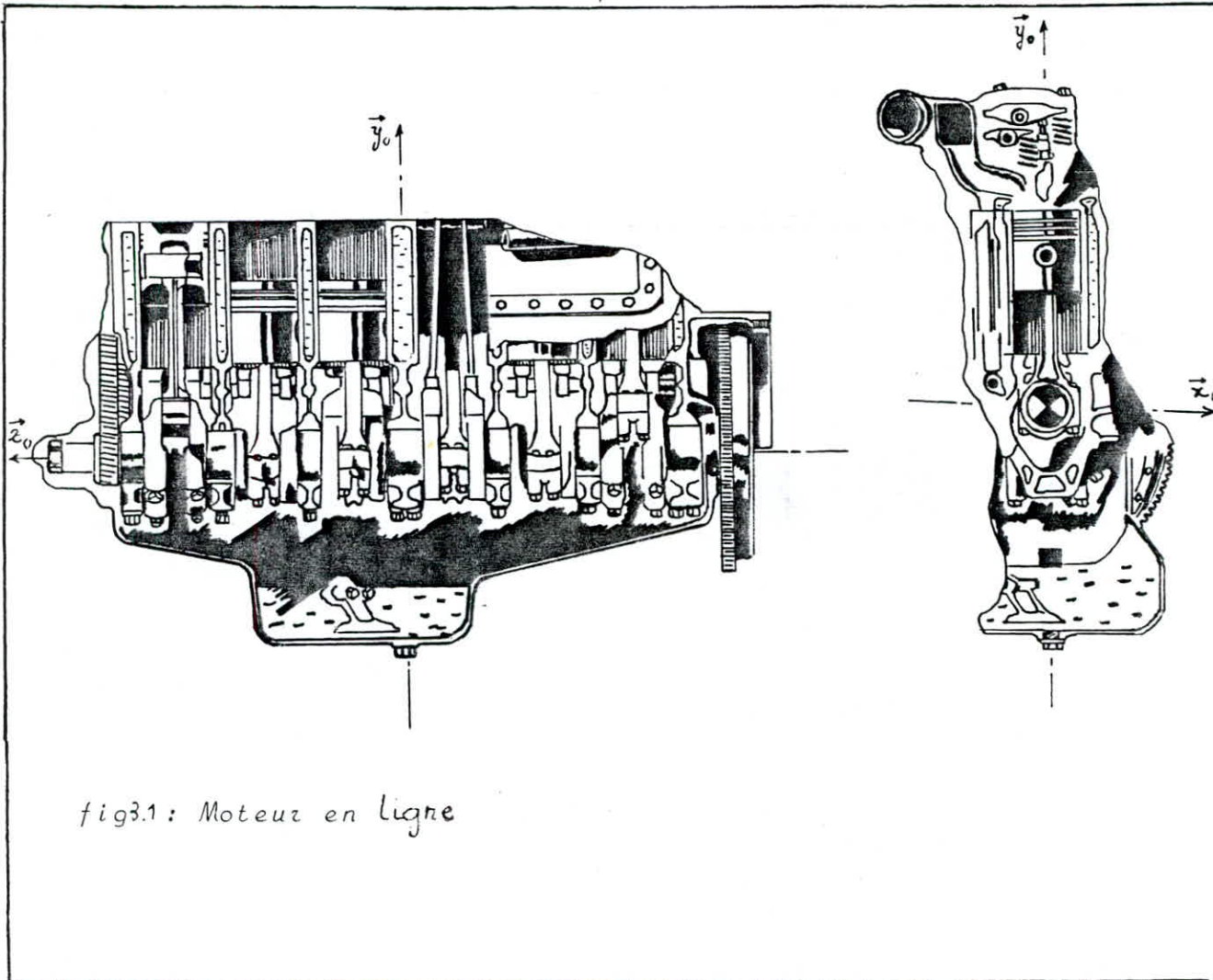


fig3.1: Moteur en ligne

Dans le cas contraire, le moteur se trouve soumis à des forces et des moments ou couples selon les trois axes:

L'effort selon \vec{x}_0 est dit de Tamis, ou de Ballant, celui selon \vec{y}_0 de Pilon ou de Rebondissement alors que le couple autour de \vec{x}_0 est appelé couple de Galop, ou de Tangage, celui autour de \vec{y}_0 de Lacet, celui autour de \vec{z}_0 étant le couple de Basculement ou de Roulis.

0.1 Etudes des différentes sollicitations subies par le moteur:

Dans ce qui suit, on ne s'intéressera qu'aux efforts dus aux inerties, ceux dus aux masses étant négligeables.

Les efforts dus aux gaz donnent naissance à un couple moteur et un couple de basculement non équilibrable.

0.2 Etude des forces dues aux inerties:

0.2.1 Inertie centrifuge:

L'inertie centrifuge est produite par la masse de la manivelle. Elle est constante et tourne autour de O à la vitesse Θ du vilebrequin. Elle est parfaitement équilibrable.

0.2.2 Inertie alternative:

L'inertie alternative est produite par la masse du piston assemblé.

Elle donne lieu à:

- Un couple moteur instantané, se composant avec celui dû au gaz, on ne l'équilibre donc pas,
- Un couple de basculement, se composant avec celui dû aux gaz. On ne l'équilibre que dans certains cas particuliers,
- Une force d'inertie verticale, parfaitement équilibrable.

0.2.3 Inertie de la bielle:

Le mouvement de la bielle est complexe. En effet, le mouvement d'un point quelconque de cette dernière résulte de la décomposition de deux mouvements;

- Translation de l'axe de pied de bielle (point A),
- Rotation de l'axe de la tête de bielle (point B).

Il s'ensuit le mouvement oscillatoire de son centre de gravité.

Un système dynamiquement équivalent à la bielle est tel que ce modèle et la bielle ont:

- même masse totale: $m_{\text{bielle}} = m_A + m_B$
- même centre de gravité: $m_A(L - L_1) = m_B L_1$
- même moment d'inertie central: $J_{\text{bielle}} = m_A(L - L_1)^2 + m_B L_1^2$

Ces trois conditions étant généralement incompatibles, on convient en pratique de satisfaire aux deux premières; une faible erreur entache ainsi le moment central d'inertie.

Dans ces conditions on obtient:

$$m_A = \frac{L_1}{L} m_{\text{bielle}} \text{ et } m_B = \frac{L - L_1}{L} m_{\text{bielle}}$$

La troisième équation définit le dit "moment d'inertie complémentaire":

$$\Delta J_{\text{bielle}} = J_{\text{bielle}} - m_{\text{bielle}} L_1(L - L_1).$$

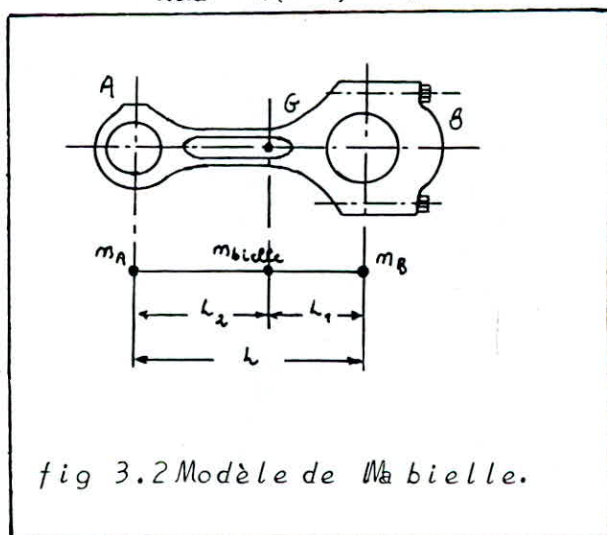


fig 3.2 Modèle de la bielle.

0.2.4 Résumé:

Les forces à équilibrer sont de 2 types:

a/ Une force d'inertie rotative:

Elle est due à la masse de la manivelle, et celle de la bielle en A.

La manivelle étant composée de 2 flasques de vilebrequin et d'un maneton, son centre de gravité est distant de l'axe de rotation de:

$$r_2 = \frac{2 m_{\text{flasque}} r_1 + m_{\text{maneton}} R}{2 m_{\text{flasque}} + m_{\text{maneton}}}$$

r_1 étant la distance, du centre de gravité des flasques à l'axe de rotation,

R , Le rayon de la manivelle (course/2)

La masse rotative est donc concentrée à:

$$r = \frac{m_{\text{manivelle}} r_2 + m_A R}{m_{\text{manivelle}} + m_A} \text{ de l'axe de rotation.}$$

Pour plus de commodité, on préfère effectuer les calculs avec une distance R , adoptant par le fait, une masse rotative fictive:

$$m_{\text{rot}} = \frac{(m_{\text{manivelle}} + m_A) r}{R}$$

b/ Une force d'inertie alternative, due à la masse alternative:

$$m_{\text{alt}} = m_{\text{piston assemble}} + m_B \text{ que nous supposons concentré en B.}$$

0.3 Nature des efforts et des couples engendrés par les forces d'inertie:

0.3.1 Force d'inertie rotative:

La force d'inertie rotative, due à la masse rotative est un vecteur d'intensité constante, tournant autour du point O à la vitesse Θ . Elle engendre une force verticale et une force horizontale d'ordre 1, donc:

- Un effort de tamis et un effort de pilon d'ordre 1 pour le moteur monocylindre,

- Un effort de tamis et de pilon et un couple de galop et de lacet d'ordre 1 pour le multicylindre en ligne.

0.3.2 Force d'inertie alternative:

La force d'inertie alternative due à la masse alternative est un vecteur d'intensité variable, dirigé selon l'axe vertical, que l'on décomposera en une somme d'efforts sinusoïdaux assimilables à des masses tournantes à la vitesse Ω du vilebrequin, $2\Omega, 4\Omega, 6\Omega, \dots$ engendrant une force verticale d'ordre $1, 2, 4, 6, \dots$, donc:

- Des efforts de pilon d'ordre $1, 2, 4, 6, \dots$ pour le monocylindre,

- Des efforts de pilon d'ordres $1, 2, 4, 6, \dots$ ainsi que des couples de galop de mêmes ordres pour le multicylindre en ligne.

A.1 EQUILIBRAGE DES MASSES ROTATIVES:

1.0 Etude théorique:

Tout corps tournant est soumis à une force d'inertie égale à la masse de ce corps par son accélération rotative et de sens contraire à cette dernière:

$$f_{I \text{ rot}} = -m \omega^2 \vec{r}(A)$$

1.1 Définitions:

Pour que les inerties rotatives soient parfaitement équilibrées, il faut et il suffit que l'axe de rotation soit un axe central d'inertie pour les masses rotatives.

Ceci nécessite pour un corps (S) considéré, 2 conditions:

- Condition 1:

Le centre de gravité du solide (S) doit se trouver sur l'axe de rotation z .

Pour cela on doit avoir:

$$\sum_{p \in (S)} x \, dm_p = 0$$

$$\sum_{p \in (S)} y \, dm_p = 0$$

- Condition 2:

L'axe z doit être un axe principal d'inertie pour le solide (S).

Pour cela on doit avoir:

$$\sum_{p \in (S)} x \, z \, dm_p = 0$$

$$\sum_{p \in (S)} y \, z \, dm_p = 0$$

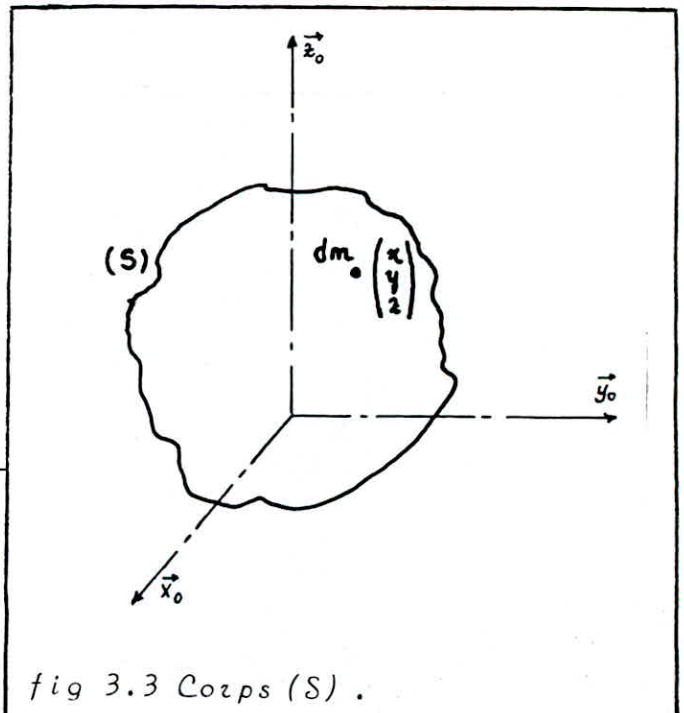


fig 3.3 Corps (S).

Les 4 sommes ci-dessus sont appelées "sommes fondamentales".

Corollaire: lorsque le plan médiant (plan perpendiculaire à l'axe de rotation, passant par le point central), est un plan de symétrie, les masses rotatives sont parfaitement équilibrées si le centre de gravité du solide formé par les masses rotatives est sur l'axe de rotation.

1.2 Équilibrage théorique parfait:

Pour équilibrer parfaitement les inerties rotatives, on place des masses dans des plans normaux à l'axe de rotation, de part et d'autre du plan contenant la masse à équilibrer.

Pour qu'un solide muni de n masses d'équilibrage soit parfaitement équilibré, il faut que les 4 sommes fondamentales soient nulles.

On aura ainsi, un système de 4 équations à $4n$ inconnues (chaque masse d'équilibrage étant définie par sa valeur et sa position).

Pour réaliser physiquement cet équilibrage, il y a une infinité de solutions possibles, on se fixe pour cela $4(n-1)$ inconnues et on détermine les 4 autres en résolvant le système aux sommes fondamentales.

Connaissant les masses rotatives et leurs coordonnées, un premier choix judicieux consiste à se fixer les plans d'équilibrage (z_i) et les ordonnées (y_i) des contre poids d'équilibrage selon les critères suivants:

- Placer les contre poids dans les prolongements des bras de manetons,
- Prendre R pour encombrement maximal afin de profiter du bras de levier et diminuer la masse.

Quand aux contrepoids, ils sont choisis selon la rigidité de la ligne d'arbre à obtenir.

A.2 EQUILIBRAGE DES MASSES ALTERNATIVES:

2.0 Équilibrage théorique:

La force d'inertie alternative est en module égale à la masse alternative multipliée par l'accélération alternative, et de sens opposé à celle-ci:

$$\vec{F}_{i\text{ alt}} = -m_{\text{alt}} \vec{r}(\theta) = -m_{\text{alt}} \frac{d^2 y_B}{dt^2} \vec{y}_0.$$

Pour équilibrer cette force non sinusoïdale, mais périodique, il faut la décomposer en une somme de forces sinusoïdales équilibrables.

2.1 Développement en série de Fourier:

Toute fonction périodique peut être décomposée en une série de Fourier.

La force alternative se décompose de la façon suivante:

On a: $y_\theta = R \cos \theta + L \cos(\pi - \varphi) = R \cos \theta - L \cos \varphi$

avec: $\sin \varphi = \frac{\sin \theta}{\lambda} \quad \lambda = \frac{L}{R}$

et: $\cos \varphi = -\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$

2.1.1 Développement en série de Taylor:

On rappelle que pour $x \ll 1$, $(1+x)^\alpha$ se décompose en:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha - i) x^n$$

Pour le cas particulier où $\alpha = 1/2$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{1/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - i\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1-2i}{2} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (-1) \prod_{i=0}^{n-1} (2i-1)}{\prod_{i=0}^{n-1} 2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} (2i-1)}{2^n} x^n \end{aligned}$$

On a donc:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (2i-1)}{2^n} x^n$$

Appliquant ce résultat pour $x = -\frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2}$

On aura: $\left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2}\right)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (2i-1)}{2^n} \left(-\frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (2i-1)}{2^n} (-1)^n$

Soit donc: $\frac{\sin^{2n} \theta}{\lambda^{2n}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (2i-1)}{2^n} \frac{\sin^{2n} \theta}{\lambda^{2n}}$

$$\left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2}\right)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (2i-1)}{n!} \frac{\sin^{2n} \theta}{\lambda^{2n}} \dots \dots \dots (1)$$

2.1.2 Transformation des puissances de fonctions circulaires en fonctions circulaires d'arcs multiples:

Utilisons la représentation complexe où:

$$z = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \bar{z} = \overline{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

la différence membre à membre des relations ci-dessus donne:

$$z - \bar{z} = 2i \sin \theta,$$

équation que l'on élève à la puissance m pour avoir:

$$(z - \bar{z})^m = (2i \sin \theta)^m$$

Utilisons la formulation du binôme de Newton:

$$(z - \bar{z})^m = \sum_{k=0}^m C_m^k z^{m-k} (-\bar{z})^k \quad \text{ou} \quad C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

On fait remarquer que d'après la formule de Moivre:

$$\bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^{-1} = (z)^{-1} = \frac{1}{z}$$

ce qui signifie que:

$$(z - \bar{z})^m = \sum_{k=1}^m C_m^k z^{m-k} (-1)^k = \sum_{k=1}^m (-1)^k C_m^k z^{m-2k}$$

Pour le cas particulier où m est pair (soit $m=2n$),

$$\begin{aligned} (z - \bar{z})^m &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2n}^k z^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{2n}^k z^{2(n-k)} + (-1)^n C_{2n}^n z^{2n} + \sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^k C_{2n}^k z^{2(n-k)} \\ C_{2n}^k z^{2(n-k)} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_{2n}^{n-k} z^{2k} + (-1)^n C_{2n}^n + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} C_{2n}^{n+k} z^{-2k} \\ &= (-1)^n C_{2n}^n + \sum_{k=1}^n \left[(-1)^{n-k} C_{2n}^{n-k} z^{2k} + (-1)^{n+k} C_{2n}^{n+k} \frac{1}{z^{2k}} \right] \end{aligned}$$

On fait remarquer que:

$$(-1)^{n-k} (-1)^{n+k} = (-1)^{n-k+n+k} = (-1)^{2n} = 1$$

ce qui revient à dire que $(-1)^{n-k}$ et $(-1)^{n+k}$ sont de même signe,

$$\text{et } C_{2n}^{n-k} = \frac{(2n)!}{(n-k)! (2n - (n-k))!} = \frac{(2n)!}{(n-k)! (n+k)!} = \frac{(2n)!}{(n+k)! (2n - (n+k))!} = C_{2n}^{n+k}$$

$$\text{d'où: } (z - \bar{z})^m = (-1)^n C_{2n}^n + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_{2n}^{n-k} \left(z^{2k} + \frac{1}{z^{2k}} \right)$$

Utilisons de nouveau la formule de Moivre:

$$z^{2k} = (\cos \theta + i \sin \theta)^{2k} = \cos 2k\theta + i \sin 2k\theta$$

$$\frac{1}{z^{2k}} = (z^{2k})^{-1} = \overline{z^{2k}} = \cos 2k\theta - i \sin 2k\theta$$

$$\text{d'où: } z^{2k} + \frac{1}{z^{2k}} = 2 \cos 2k\theta$$

$$\text{finalement: } (z - \bar{z})^m = (-1)^n C_{2n}^n + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_{2n}^{n-k} 2 \cos 2k\theta$$

$$\text{ou encore: } (z - \bar{z})^m = (-1)^n C_{2n}^n + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_{2n}^{n-k} \cos 2k\theta$$

d'autre part:

$$(z - \bar{z})^m = (2i \sin \theta)^m = 2^m i^m \sin^m \theta = 2^{2n} (i^2)^n \sin^{2n} \theta = 2^{2n} (-1)^n \sin^{2n} \theta$$

d'où par identification, on aura:

$$2^{2n} (-1)^n \sin^{2n} \theta = (-1)^n C_{2n}^n + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_{2n}^{n-k} \cos 2k\theta$$

$$\text{soit: } \sin^{2n} \theta = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k C_{2n}^{n-k} \cos 2k\theta}{2^{2n-1}} \dots \dots \dots (2)$$

2.1.3 Expression de $\cos \varphi$:

En remplaçant (2) dans (1), on aura:

$$\left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{d^2}\right)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{m-1} (2i-1)}{m! 2^m d^{2m}} \left[\frac{C_{2m}}{2^m} + \frac{\sum_{k=1}^m (-1)^k C_{2m}^{m-k} \cos 2k\theta}{2^{2m-1}} \right]$$

On obtient ainsi:

$$\left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{d^2}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{m-1} (2i-1)}{m! 2^m d^{2m}} \left[C_{2m}^m + 2 \sum_{k=1}^m (-1)^k C_{2m}^{m-k} \cos 2k\theta \right]$$

2.1.4 Expression du déplacement du piston:

On a: $y_B = R(1 - \cos\theta) + L(1 - \cos\varphi)$

dans laquelle on remplace φ , pour avoir:

$$y_B = R(1 - \cos\theta) + L \left\{ 2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (2j-1)}{i! 2^{3i} \lambda^{2i}} \left[C_{2i}^n + 2 \sum_{k=1}^i (-1)^k C_{2i-2k}^{n-k} \cos 2k\theta \right] \right\}$$

2.1.5 Expression de l'accélération du piston:

En dérivant 2 fois par rapport au temps l'expression de y ci-dessus, on aura:

$$\ddot{y}_B = R\dot{\theta}^2 \cos\theta + L \left\{ 0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (2j-1)}{i! 2^{3i} \lambda^{2i}} \left[0 + 2 \sum_{k=1}^i (-1)^k C_{2i-2k}^{n-k} (-2k\theta)^2 \cos 2k\theta \right] \right\}$$

soit:

$$\ddot{y}_B = R\omega^2 \cos\theta - L\omega^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (2j-1)}{i! 2^{3(i-1)} \lambda^{2i}} \sum_{k=1}^i (-1)^k k^2 C_{2i-2k}^{n-k} \cos 2k\theta$$

2.1.6 Expression de la force d'inertie alternative:

On sait que:

$$\vec{F}_{\text{alt}} = -m_{\text{alt}} \ddot{y}_B \vec{y}_0$$

soit en remplaçant \ddot{y}_B par l'expression ci-dessus:

$$\vec{F}_{\text{alt}} = m_{\text{alt}} \left[R\omega^2 \cos\theta - L\omega^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (2j-1)}{i! 2^{3(i-1)} \lambda^{2i}} \sum_{k=1}^i (-1)^k k^2 C_{2i-2k}^{n-k} \cos 2k\theta \right]$$

ou encore:

$$\vec{F}_{\text{alt}} = m_{\text{alt}} R\omega^2 \left[\cos\theta - \frac{L}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (2j-1)}{i! 2^{3(i-1)} \lambda^{2i}} \sum_{k=1}^i (-1)^k k^2 C_{2i-2k}^{n-k} \cos 2k\theta \right]$$

$$\text{finalement: } = m_{\text{alt}} R\omega^2 \left[\cos\theta - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (2j-1)}{i! 2^{3(i-1)} \lambda^{2i-1}} \sum_{k=1}^i (-1)^k k^2 C_{2i-2k}^{n-k} \cos 2k\theta \right]$$

Sous une forme explicite, l'expression de \ddot{y}_B s'écrit:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (2j-1)}{i! 2^{3(i-1)} \lambda^{2i-1}} \sum_{k=1}^i (-1)^k k^2 C_{2i-2k}^{n-k} \cos 2k\theta = \frac{\prod_{j=0}^0 (2j-1)}{1! 2^0 \lambda^1} \sum_{k=1}^1 (-1)^k k^2 C_2^{n-k} \cos 2k\theta \\ & + \frac{\prod_{j=0}^1 (2j-1)}{2! 2^3 \lambda^3} \sum_{k=1}^2 (-1)^k k^2 C_4^{n-k} \cos 2k\theta + \frac{\prod_{j=0}^2 (2j-1)}{3! 2^6 \lambda^5} \sum_{k=1}^3 (-1)^k k^2 C_6^{n-k} \cos 2k\theta \\ & + \frac{\prod_{j=0}^3 (2j-1)}{4! 2^9 \lambda^7} \sum_{k=1}^4 (-1)^k k^2 C_8^{n-k} \cos 2k\theta \dots = \frac{-1}{\lambda} (-C_2^0 \cos 2\theta) + \frac{-1(1)}{2 \cdot 2^3 \lambda^3} (-C_4^1 \cos 2\theta + 2^2 C_4^0 \cos 4\theta) \\ & + \frac{-1(1)(3)}{3 \cdot 2 \cdot 2^6 \lambda^5} (-C_6^2 \cos 2\theta + 2^2 C_6^1 \cos 4\theta - 3^2 C_6^0 \cos 6\theta) \\ & + \frac{-1(1)(3)(5)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^9 \lambda^7} (-C_8^3 \cos 2\theta + 2^2 C_8^2 \cos 4\theta - 3^2 C_8^1 \cos 6\theta \\ & + 4^2 C_8^0 \cos 8\theta + \dots) = -\frac{1}{\lambda} (-\cos 2\theta) - \frac{1}{2^4 \lambda^3} (-4 \cos 2\theta + 4 \cos 4\theta) \\ & - \frac{1}{2^7 \lambda^5} (-15 \cos 2\theta + 2^2 \cdot 6 \cos 4\theta - 3^2 \cos 6\theta) - \frac{5}{2^4 \lambda^7} (-56 \cos 2\theta + 2^2 \\ & \cdot 28 \cos 4\theta - 3^2 \cdot 8 \cos 6\theta) + 4^2 \cos 8\theta + \dots = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\lambda^3} + \frac{15}{128\lambda^5} + \frac{35}{512\lambda^7} + \dots \right) \cos 2\theta \\ & + \left(\frac{1}{4\lambda^3} + \frac{3}{16\lambda^5} + \frac{15}{128\lambda^7} + \dots \right) \cos 4\theta + \left(\frac{9}{128\lambda^5} + \frac{45}{512\lambda^7} + \dots \right) \cos 6\theta + \dots \end{aligned}$$

$$- \left(\frac{5}{256 \Delta^7} + \dots \right) \cos 8\theta + \dots$$

Soit alors: $\vec{F}_{I \text{ alt}} = m_{\text{alt}} R \omega^2 \left[\cos \theta - \left(\frac{1}{4 \Delta^3} + \frac{1}{128 \Delta^5} + \frac{15}{512 \Delta^7} + \dots \right) \cos 3\theta \right.$
 $\left. + \left(\frac{1}{4 \Delta^3} + \frac{3}{16 \Delta^5} + \frac{35}{256 \Delta^7} + \dots \right) \cos 5\theta - \left(\frac{1}{128 \Delta^5} + \frac{45}{512 \Delta^7} + \dots \right) \cos 7\theta + \left(\frac{5}{256 \Delta^7} + \dots \right) \cos 9\theta \dots \right]$

Remarque: Similairement à l'étude des masses rotatives, on supposera dans ce qui suit que R est l'encombrement maximal disponible, et ceci pour des simplifications de calculs.

Dans la réalité, on utilisera l'encombrement maximal disponible, ce qui définira une nouvelle masse de contre-poids telle que le produit masse fois distance reste constant.

2.2 Equilibrage des forces alternatives:

Les manivelles d'un multicylindre en ligne, 4 temps, sont calées à $\frac{4\pi}{n}$, n étant le nombre de cylindres.

Les efforts alternatifs de tout ordre engendrent des efforts de pilon et des couples de galop de même ordre. Ces derniers sont cependant nuls si le plan médian est plan de symétrie.

2.2.1 Composition des forces d'inertie alternatives d'ordre 1:

L'effort de pilon d'ordre 1 du moteur monocylindre étant

$$m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

celui du moteur n cylindres en ligne, 4 temps sera donc:

$$\sum_{j=0}^{n-1} m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos \left(\theta + j \frac{4\pi}{n} \right)$$

Afin d'évaluer cette expression, utilisons la représentation complexe:

Soit à évaluer: $\sum_{j=0}^{n-1} \cos(a + jb)$

Comme: $\cos(a + jb) = \text{Re} [\cos(a + jb) + i \sin(a + jb)] = \text{Re} e^{i(a + jb)}$

où Re désigne la partie réelle du nombre complexe considéré.

On évalue $\sum_{j=0}^{n-1} e^{i(a + jb)}$ et on déduit $\sum_{j=0}^{n-1} \cos(a + jb) = \sum_{j=0}^{n-1} \text{Re} e^{i(a + jb)}$

soit

$$\text{Re} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i(a + jb)}$$

soit donc à calculer:

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{i(a + jb)} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{ia + ijb} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{ia} e^{ijb} = e^{ia} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{ib})^j$$

où $\sum_{j=0}^{n-1} (e^{ib})^j$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison e^{ib} , dont la formulation nécessite d'envisager deux cas:

1er cas: $e^{ib} \neq 1$

Comme $e^{ib} = \cos b + i \sin b$, $e^{ib} = 1$ est équivalente à $\cos b + i \sin b = 1$

soient: $\cos b = 1$ et $\sin b = 0$ dont la solution est: $b = 2k\pi$ qui revient à dire que $\frac{b}{2\pi}$ est entier.

Donc si $\frac{b}{2\pi}$ n'est pas entier:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (e^{ib})^j = \frac{(e^{ib})^n - 1}{e^{ib} - 1} = \frac{e^{inb} - 1}{e^{ib} - 1}$$

soit: $\sum_{j=0}^{n-1} (e^{ib})^j = \frac{\cos nb + i \sin nb - 1}{\cos b + i \sin b - 1} = \frac{(\cos nb - 1) + i \sin nb}{(\cos b - 1) + i \sin b}$

utilisons les formules de duplication:

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

on aura: $\cos nb - 1 = -2 \sin^2 \frac{nb}{2}$ et $\sin nb = 2 \sin \frac{nb}{2} \cos \frac{nb}{2}$

soit alors: $(\cos nb - 1) + i \sin nb = -2 \sin^2 \frac{nb}{2} + i 2 \sin \frac{nb}{2} \cos \frac{nb}{2}$
 $= 2 \sin \frac{nb}{2} \left(-\sin \frac{nb}{2} + i \cos \frac{nb}{2} \right) = 2 \sin \frac{nb}{2} \left(i^2 \sin^2 \frac{nb}{2} + i \cos \frac{nb}{2} \right) = 2i \sin \frac{nb}{2} \left(\cos \frac{nb}{2} + i \sin \frac{nb}{2} \right) = 2i \sin \frac{nb}{2} e^{i \frac{nb}{2}}$

de même:

$$(\cos b - 1) + i \sin b = 2i \sin \frac{b}{2} e^{i \frac{b}{2}}$$

d'où:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (e^{ib})^j = \frac{2i \sin \frac{nb}{2} e^{i \frac{nb}{2}}}{2i \sin \frac{b}{2} e^{i \frac{b}{2}}} = \frac{\sin n \frac{b}{2}}{\sin \frac{b}{2}} e^{i(n-1) \frac{b}{2}}$$

ce qui permet d'écrire:

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{i(a+jb)} = e^{ia} \frac{\sin n \frac{b}{2}}{\sin \frac{b}{2}} e^{i(n-1) \frac{b}{2}} = \frac{\sin n \frac{b}{2}}{\sin \frac{b}{2}} e^{i \left[a + (n-1) \frac{b}{2} \right]}$$

soit: $\sum_{j=0}^{n-1} e^{i(a+jb)} = \frac{\sin n \frac{b}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \left\{ \cos \left[a + (n-1) \frac{b}{2} \right] + i \sin \left[a + (n-1) \frac{b}{2} \right] \right\}$

d'où: $\sum_{j=0}^{n-1} \cos(a+jb) = \frac{\sin n \frac{b}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \cos \left[a + (n-1) \frac{b}{2} \right]$

2ème cas: $e = 1$ soit $k = \frac{b}{2\pi}$ (entier)

$$\sum_{j=0}^{n-1} (e^{ib})^j = \sum_{j=0}^{n-1} 1 = n$$

soit alors:

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{i(a+jb)} = e^{ia} \cdot n = n (\cos a + i \sin a)$$

d'où: $\sum_{j=0}^{n-1} \cos(a+jb) = n \cos a$

Appliquons les résultats obtenus pour $a = \theta$ et $b = \frac{4\pi}{n}$.
On distinguera les 2 cas suivants:

1er cas: $\sin \frac{2\pi}{n} \neq 0$ soit $\frac{2\pi}{n} \neq k\pi$ ou en d'autres termes
 $\frac{2}{n}$ n'est pas entier.

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\theta + j \frac{4\pi}{n}\right) = \frac{\sin n \frac{4\pi}{2n}}{\sin \frac{4\pi}{2n}} \cos\left(\theta + (n-1) \frac{4\pi}{2n}\right) = \frac{\sin 2\pi}{\sin \frac{2\pi}{n}} \cos\left(\theta + (n-1) \frac{2\pi}{n}\right) = 0$$

L'effort d'ordre 1 du multicylindre est ainsi nul.

2ème cas: $\sin \frac{2\pi}{n} = 0$ soit $\frac{2}{n} = k$ (entier)

on remarque que: $\frac{4\pi}{n} = \frac{4\pi}{\frac{2}{k}} = 2k\pi$

d'où:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\theta + j \frac{4\pi}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \cos(\theta + 2k\pi) = \sum_{j=0}^{n-1} \cos\theta = n \cos\theta$$

soit:

$$\sum_{j=0}^{n-1} m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos\left(\theta + j \frac{4\pi}{n}\right) = n m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos\theta$$

L'effort de pilon d'ordre 1 du multicylindre est égal à n fois celui du monocylindre.

2.2.2. Composition des forces d'inertie alternatives d'ordre p :

L'effort de pilon d'ordre p du moteur monocylindre est:

$$K_p m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos p\theta \quad K_p \text{ étant de la forme } \pm \frac{c_k}{\Delta p-1}, \pm \frac{c_k}{\Delta p+1}$$

L'effort de pilon d'ordre p du moteur n cylindres en ligne, 4 temps est donc:

$$\sum_{j=0}^{n-1} K_p m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos p\left(\theta + j \frac{4\pi}{n}\right)$$

on distingue 2 cas:

1er cas: $\sin \frac{2\pi p}{n} \neq 0$ soit $\frac{p}{n}$ non entier,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos p\left(\theta + j \frac{4\pi}{n}\right) = \frac{\sin 2p\pi}{\sin \frac{2p\pi}{n}} \cos p\left(\theta + (n-1) \frac{2\pi}{n}\right)$$

L'effort de pilon d'ordre p du multicylindre est donc nul.

2ème cas: $\sin \frac{2\pi p}{n} = 0$ soit $\frac{p}{n}$ entier

$$\text{or } \frac{4\pi}{n} = \frac{2k\pi}{p} \text{ d'où } \sum_{j=0}^{n-1} K_p m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos p\left(\theta + j \frac{4\pi}{n}\right) = n K_p m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos p\theta$$

L'effort de pilon d'ordre p du multicylindre est ainsi égal à n fois celui du monocylindre.

Remarque: les efforts de pilon de tout ordre sont parfaitement équilibrables selon la théorie de l'équivalence entre une masse alternative et 2 masses rotatives.

2.2.3 Equilibrage d'un couple de galop selon la théorie de l'équivalence entre un couple alternatif et 4 masses rotatives:

Pour créer un couple de galop sans créer un couple de lacet ni d'effort de pilon, on a besoin de 4 masses.

C'est le principe d'équilibrage d'un couple de galop s'il n'existe pas en même temps un couple de lacet ou un effort de pilon.

L'équilibrage d'un couple de galop d'ordre p peut être réalisé selon plusieurs méthodes, on cite:

a/ Méthode 1: deux arbres d'équilibrage.

C'est la méthode pour équilibrer un couple de galop d'ordre p . On utilise 2 arbres d'équilibrage tournant en sens inverse -verses à $p\theta$ et $-p\theta$ restant symétriques par rapport à \vec{y}_0 , portant chacun 2 masses égales, symétriques par rapport à \vec{y}_0 , placés - pour profiter au maximum de l'effet de bras de levier - le plus loin possible du centre de l'arbre, à une distance b représentant la position du dernier cylindre.

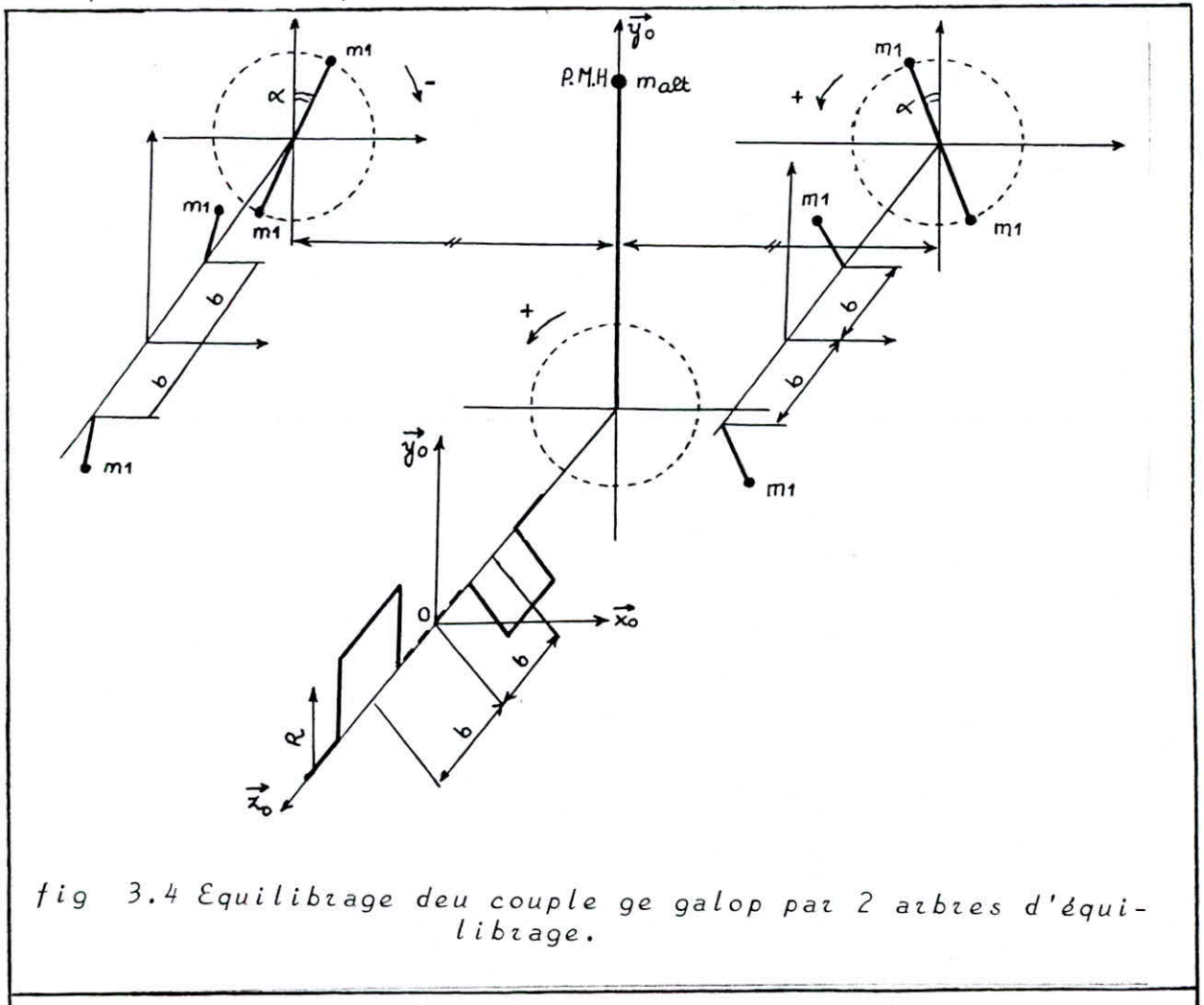


fig 3.4 Equilibrage d'un couple de galop par 2 arbres d'équilibrage.

Sur le vilebrequin, on ne rajoute aucun contrepoids.
 Remarque: pour l'ordre 1, l'arbre primaire engendre un couple de galop de valeur:

$$b m_1 R \dot{\theta}^2 \cos(2\pi - \alpha) - b m_1 R \dot{\theta}^2 \cos(\pi - \alpha) = 2 b m_1 R \dot{\theta}^2 \cos \alpha,$$

et un couple de lacet de valeur:

$$b m_1 R \dot{\theta}^2 \sin(2\pi - \alpha) - b m_1 R \dot{\theta}^2 \sin(\pi - \alpha) = 2 b m_1 R \dot{\theta}^2 \sin \alpha.$$

l'arbre primaire 2 engendre un couple de galop de valeur:

$$b m_1 R \dot{\theta}^2 \cos \alpha - b m_1 R \dot{\theta}^2 \cos(\alpha + \pi) = 2 b m_1 R \dot{\theta}^2 \cos \alpha,$$

et un couple de lacet de valeur:

$$b m_1 R \dot{\theta}^2 \sin \alpha - b m_1 R \dot{\theta}^2 \sin(\alpha + \pi) = 2 b m_1 R \dot{\theta}^2 \sin \alpha.$$

le couple de galop résultant de valeur $4 b m_1 R \dot{\theta}^2 \cos \alpha$ devra équilibrer celui dû aux masses alternatives, le couple de tamis résultant étant nul.

b/ Méthode 2: un arbre d'équilibrage primaire.

Cette méthode n'est applicable qu'à l'ordre 1, permettant d'utiliser le vilebrequin comme second arbre d'équilibrage les masses de l'arbre 2 - tournant dans le même sens et à la même vitesse que le vilebrequin - sont divisées en deux masses égales que l'on placera sur chaque bras de maneton.

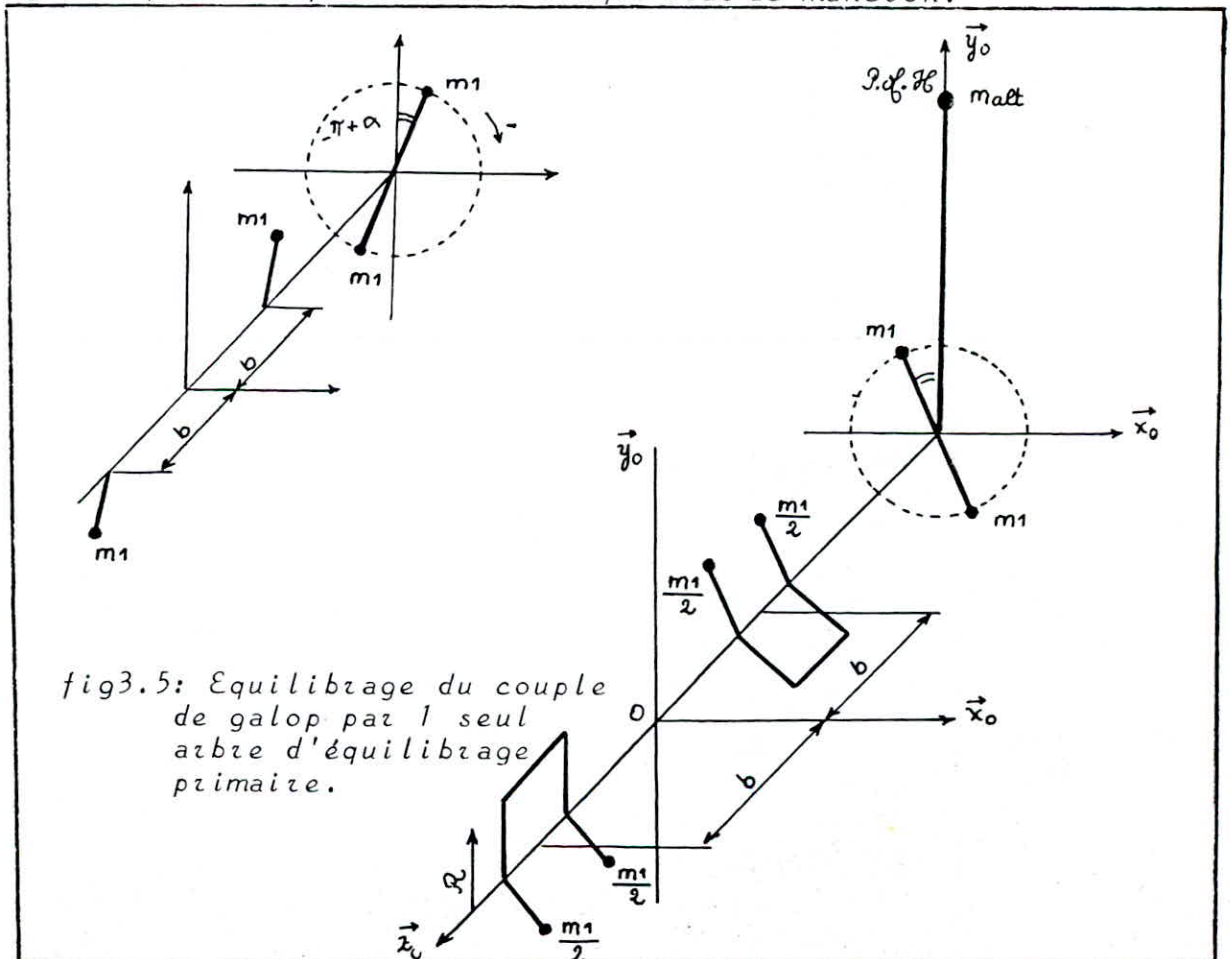


fig3.5: Equilibrage du couple de galop par 1 seul arbre d'équilibrage primaire.

c/ Méthode 3: sans arbre d'équilibrage primaire:

Cette méthode n'est également applicable qu'à l'ordre 1. Elle consiste à supprimer l'arbre primaire de la méthode 2 sans changer les contrepoids attachés au vilebrequin.

Ainsi le couple de galop d'ordre 1 n'est équilibré que de moitié, et apparaît un couple de lacet d'ordre 1 de valeur $2b m_1 R \theta^2 \sin \alpha$.

A.8 EQUILIBRAGE DU MOTEUR MONOCYLINDRE:

3.0 Equilibrage de la masse rotative:

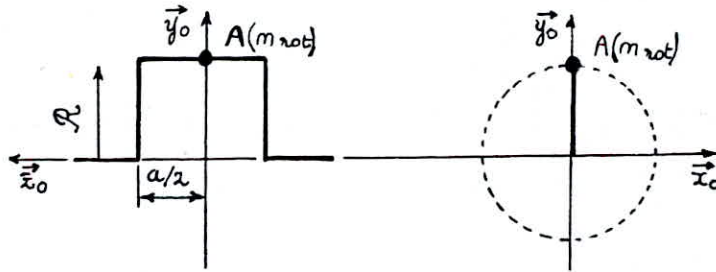


fig 3.6: Vilebrequin du moteur monocylindre.

Soit m_{rot} la masse rotative attachée au maneton, supposée concentrée en:

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Cette masse rotative est parfaitement équilibrable si les 4 sommes fondamentales sont nulles, soient:

$$\sum x m = 0. m_{rot} = 0$$

$$\sum y m = R m_{rot} \neq 0$$

$$\sum x z m = 0. 0. m_{rot} = 0$$

$$\sum y z m = R. 0. m_{rot}$$

ce qui n'est pas le cas.

En effet la moteur est soumis à:

- Un effort de tamis d'ordre 1, de valeur:
- Un effort de pilon d'ordre 1 de valeur:

Pour équilibrer la masse rotative, on place dans le prolongement des bras de maneton des masses m_1 et m_2 concentrées aux points M_1 et M_2 , de coordonnées:

$$OM_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad OM_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ -a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

on doit vérifier les 4 sommes fondamentales:

on impose alors:

$$\sum x m = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum y m = R m_{rot} + y_1 m_1 + y_2 m_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\sum x_2 m = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\sum y_2 m = y_1 \frac{a}{2} m_1 - y_2 \frac{a}{2} m_2 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

ainsi on obtient un système de 2 équations (2) et (4) à 4 inconnues m_1, m_2, y_1 et y_2 (2 équations des 4 sommes étant triviales).

Pour réaliser physiquement cet équilibrage, il existe une infinité de solutions possibles.

Celle envisagée consiste à utiliser 2 masses égales ($m_1 = m_2$).

L'équation (4) donne $y_1 = y_2$ que l'on remplace dans (2) on aura: $y_1 m_1 = -\frac{R}{2} m_{rot}$

on prendra pour y_1 la valeur maximale de l'encombrement soit R , et ceci afin que les contrepoids m_1 soient les plus faibles possibles, allégeant par le fait le vilebrequin.

On obtient dans ce cas:

3.1 Equilibrage de la masse alternative:

Le moteur monocylindre est soumis aux efforts de pilon de tout ordre, mais dans la pratique, on ne s'intéressera guère aux efforts d'ordres supérieurs à 2 vu que leur équilibrage est technologiquement difficile à réaliser, d'autant plus que leur intensité diminue très rapidement.

3.1.1 Equilibrage d'un effort de pilon selon la théorie de l'équivalence entre une masse alternative et 2 masses rotatives:

La force d'inertie alternative d'ordre p est:

comme $m_{alt} k_p R \omega^2 \cos p\theta = \frac{e^{ip\theta} + e^{-ip\theta}}{2}$ on peut la décomposer en 2 forces

centrifuges provoquées par 2 masses égales, l'une tournant à $p\theta$, l'autre à $-p\theta$, restant symétriques par rapport à l'axe \vec{y}_0 .

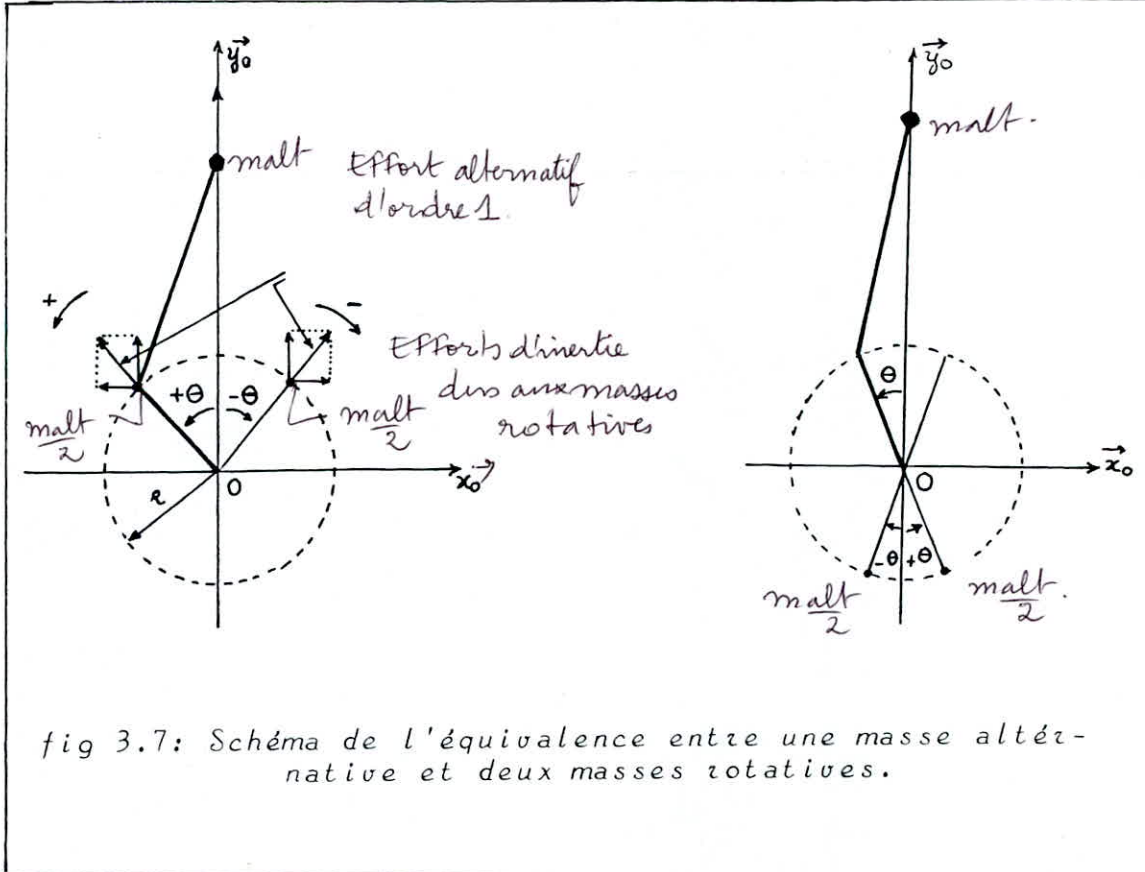


fig 3.7: Schéma de l'équivalence entre une masse alternative et deux masses rotatives.

3.1.2 Equilibrage théorique parfait:

Pour équilibrer parfaitement la force d'inertie alternative, il faut équilibrer chaque ordre séparément selon le principe de l'équivalence entre une masse alternative et 2 masses rotatives.

Pour équilibrer l'effort de pilon d'ordre p , il faut placer 2 masses égales de valeur $\frac{1}{2} k_p m_{alt}$, en phase ou en opposition avec le mouvement du piston selon les signes de l'une tournant à $+p\theta$, l'autre à $-p\theta$.

Ceci nécessite 2 arbres d'équilibrage.

Dans la pratique, on ne s'intéresse qu'à l'ordre 1 les autres ordres étant de valeurs décroissantes.

On se propose d'équilibrer:

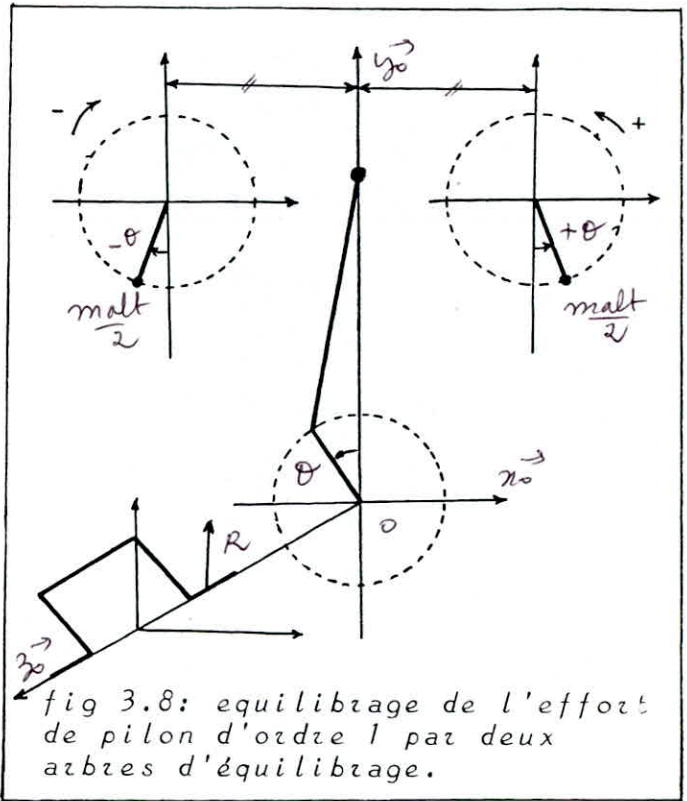
- L'effort de pilon d'ordre 1, de valeur: $m_{alt} R \dot{\theta}^2 \cos \theta$
- Celui d'ordre 2, de valeur: $m_{alt} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4 \cdot 1^3} + \dots \right) R \dot{\theta}^2 \cos 2\theta$

a/ Equilibrage de l'effort de pilon d'ordre 1:

a1/ Méthode 1: avec 2 arbres d'équilibrage primaires:

D'après le principe de l'équivalence entre une masse alternative et 2 masses rotatives, on peut équilibrer parfaitement l'effort de pilon d'ordre 1, en utilisant 2 arbres supportant les masses d'équilibrage, appelés "arbres d'équilibrage secondaires", alors que sur le vilebrequin on ne rajoute aucun contrepois.

Cette méthode est néanmoins très peu utilisée, vu qu'elle nécessite 2 lignes d'arbre entraînées par engrenages ou par chaîne et engrenages, ce qui entraîne une augmentation de bruit, de masse, d'encombrement, de perte par frottement et du prix de revient.

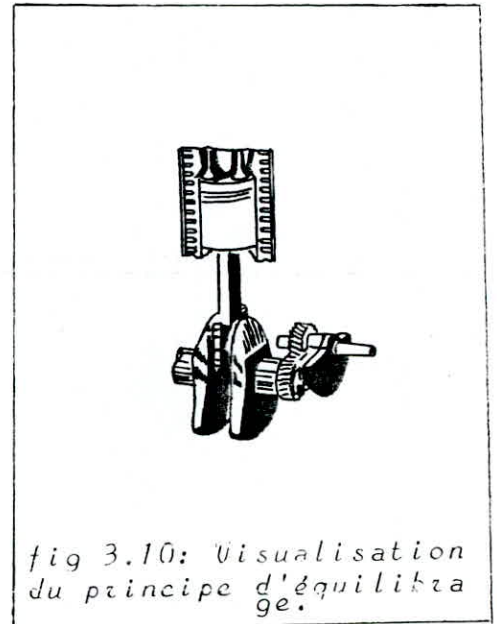
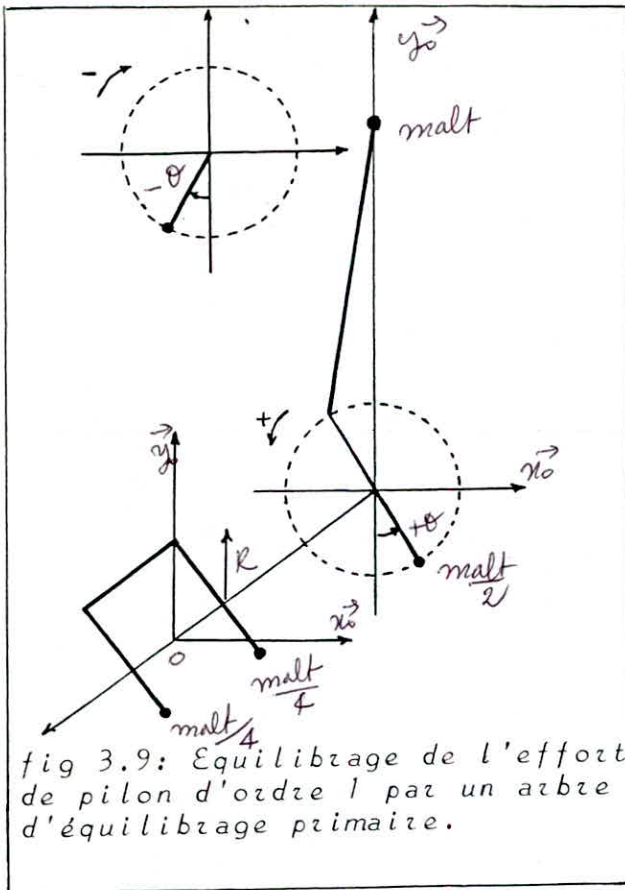


a2/ Méthode 2: avec un seul arbre d'équilibrage:

Cette méthode consiste à supprimer l'arbre d'équilibrage primaire tournant dans le même sens que le vilebrequin, et diviser la masse $\frac{m}{2}$ qui lui était affectée, en 2, chaque moitié $\frac{m}{4}$ étant placée sur le prolongement de chaque bras.

Ce procédé -illustré par la figure - permet l'équilibrage parfait de l'effort de pilon d'ordre 1 mais crée un couple de basculement non équilibrable, dû aux composantes de tarmis et de pilon de l'arbre primaire, s'ajoutant à celui du moteur.

Pour réduire ce couple de basculement, il faut rapprocher au maximum le centre de l'arbre primaire, à celui du vilebrequin.



a3/ Méthode 3: sans arbre d'équilibrage:

Cette méthode consiste à supprimer l'arbre primaire de la méthode 2, et de maintenir les valeurs des masses d'équilibrage sur le vilebrequin.

L'effort de pilon d'ordre 1 est ainsi équilibré à moitié, et il apparaît un effort de talis d'ordre 1 de valeur $\frac{m_{alt}}{2} R \theta^2 \sin \theta$

a4/ Méthode 4:

C'est une variante de la méthode 3, sauf que les contre-poids attachés au vilebrequin valent $k \cdot \frac{m_{alt}}{2}$

On distingue 2 cas particuliers et un 3ème assez général.

1er cas: $k=0,5$ c'est la méthode 3,

2ème cas: $k=1$ l'effort de pilon est parfaitement équilibré mais on crée un effort de talis d'ordre 1 de même valeur maximale.

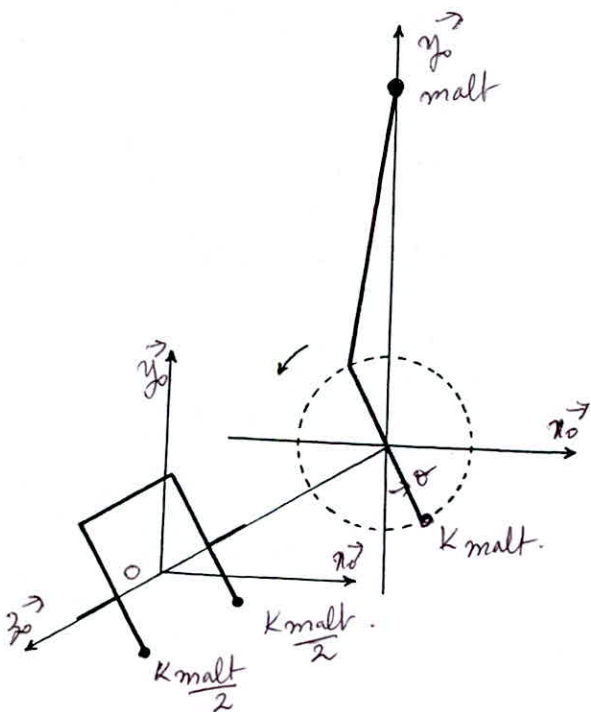


fig 3.11: Equilibrage de l'effort de pilon d'ordre 1 sans arbre d'équilibrage.

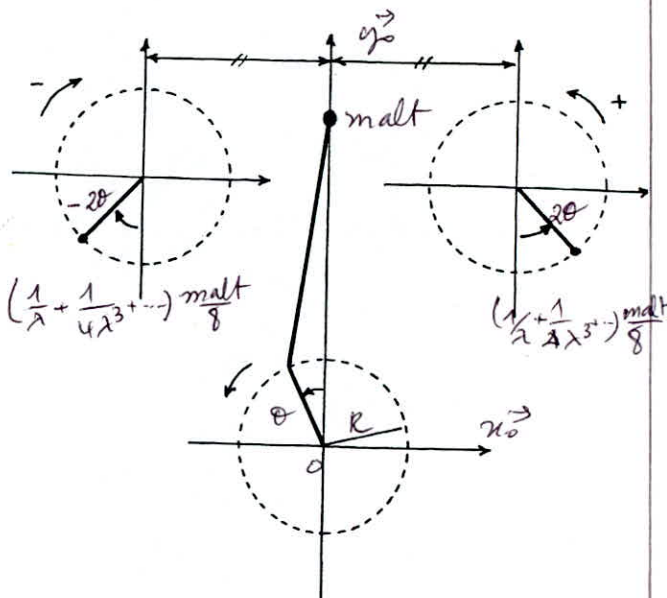


fig 3.12: Equilibrage de l'effort de pilon d'ordre 2.

3ème cas: $0,5 < k < 1$ l'effort de pilon d'ordre 1 n'est que partiellement équilibré, il reste un effort de pilon d'ordre 1 de valeur $(1-k)m_{alt} R \omega^2$ et apparaît un effort de tamis d'ordre 1 de valeur $km_{alt} R \omega^2 \sin \theta$

b/ Equilibrage de l'effort de pilon d'ordre 2. Méthode de Lancheester:

L'effort de pilon d'ordre 2 est équilibré selon le principe de l'équivalence entre une masse alternative et deux masses rotatives en utilisant deux arbres d'équilibrage munis de contrepoids, tournant à la vitesse 2θ et -2θ appelés arbres d'équilibrage secondaires.

En adoptant une disposition non symétrique par rapport à l'axe \vec{y}_0 , on peut créer un couple de basculement équilibrant partiellement le couple de basculement naturel du moteur, couple d'ordre 2.

A.4 EQUILIBRAGE DES MOTEURS MULTICYLINDRE EN LIGNE:

Les manivelles des moteurs multicylindres en ligne 4 temps, sont calées régulièrement à $\frac{4\pi}{n}$, n étant le nombre de cylindres.

Cette répartition symétrique des masses rotatives autour de l'axe de rotation assure souvent l'équilibrage naturel, en particulier si le plan médian est plan de symétrie, les couples de galop de tout ordre sont nuls et il suffit de vérifier que le centre de gravité est sur l'axe de rotation pour s'assurer de l'équilibrage des masses rotatives.

Les masses alternatives engendrent des efforts de pilon et des couples de galop de tout ordre, dont l'équilibrage est parfaitement réalisé en équilibrant chaque ordre selon le principe de l'équivalence entre une masse alternative et 2 masses rotatives; et un couple alternatif et 4 masses rotatives respectivement.

4.0 Moteur 2 cylindres en ligne, 4 temps:

Les manivelles sont calées à $\frac{4\pi}{2} = 2\pi$, le vilebrequin est ainsi symétrique par rapport au plan médian.

4.0.1 Equilibrage des masses rotatives:

Soit m_{rot} la masse rotative attachée à chaque maneton, supposée concentrée aux points A_1 et A_2 , de coordonnées:

$$OA_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad OA_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ -a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Pour que le moteur soit équilibré il suffit que les 2 premières sommes fondamentales sont nulles:

$$\sum x m = 0$$

$$\sum y m = 2R m_{rot} \neq 0$$

Ce qui n'est pas le cas.

En effet, le moteur est soumis à: -

- Un effort de tamis d'ordre 1, de valeur: $-2 m_{rot} R \theta^2 \sin \theta$,
- Un effort de pilon d'ordre 1, de valeur: $2 m_{rot} R \theta^2 \cos \theta$.

L'équilibrage des masses rotatives peut se réaliser suivant plusieurs manières:

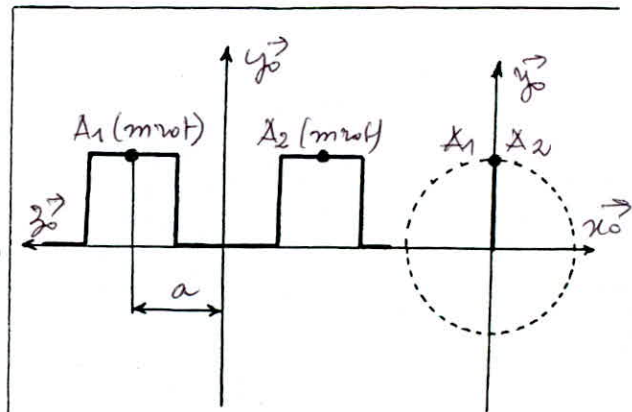


fig 3.13: Vilebrequin du moteur 2 cylindres, 4 temps.

a/ Equilibrage maneton par maneton:

Chaque maneton est équilibré séparément, comme pour le moteur monocylindre en plaçant 4 masses égales dans le prolongement de chaque bras de maneton à une distance y_1 telle que:

$$y_1 m_1 = -\frac{R}{2} m_{rot}$$

En prenant pour y_1 la valeur maximale de l'encombrement:

$$m_1 = \frac{m_{rot}}{2}$$

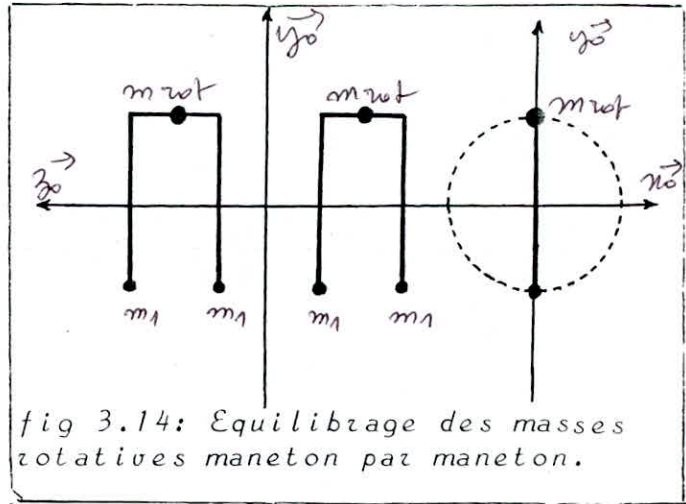


fig 3.14: Equilibrage des masses rotatives maneton par maneton.

b/ Equilibrage par 2 masses:

On distingue plusieurs cas:

b1/ Masses placées dans des plans symétriques:

Ces dernières peuvent être placées dans les plans intérieurs ou extérieurs.

Supposant qu'elles soient placées dans les plans extérieurs, c'est à dire aux points M_1 et M_2 définis par:

$$\vec{OM}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ 3a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \vec{OM}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ -3a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Pour avoir l'équilibrage des masses rotatives, il faut que les 4 sommes fondamentales soient nulles:

$$\sum x m = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum y m = 2R m_{rot} + y_1 m_1 + y_2 m_2 \dots \dots \dots (2)$$

$$\sum x z m = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\sum y z m = y_1 \frac{3a}{2} m_1 - y_2 \frac{3a}{2} m_2 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

Si on prends $y_1 = y_2$

(4) donne: $m_1 = m_2$

(2) donne: $y_1 m_1 = -R m_{rot}$

Soit pour $y_1 = -R$, $m_1 = m_{rot}$

Si on suppose par contre qu'elles soient placées dans les plans intérieurs, aux points M_1 et M_2 , de coordonnées:

$$\vec{OM}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \vec{OM}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ -a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

On devra avoir:

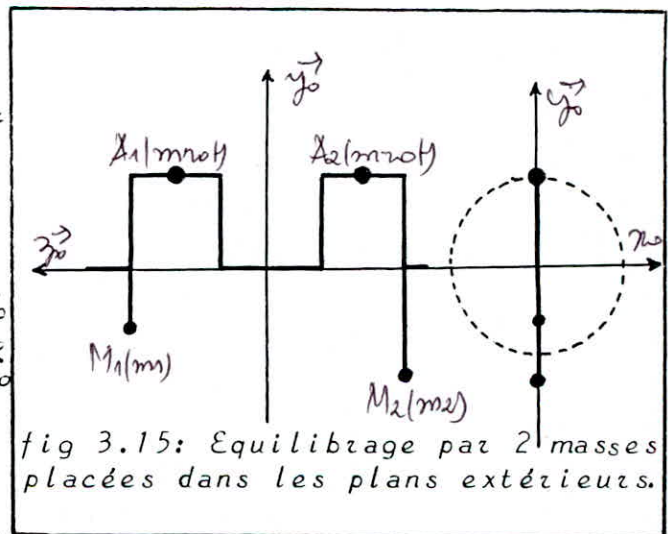


fig 3.15: Equilibrage par 2 masses placées dans les plans extérieurs.

$$\sum y m = 2 R m_{rot} + y_1 m_1 + y_2 m_2 = 0$$

$$\sum y z m = y_1 \frac{a}{2} m_1 - y_2 \frac{a}{2} m_2 = 0$$

Si $y_1 = y_2$

(4) donne: $m_1 = m_2$ et (2) donne: $y_1 m_1 = -R m_{rot}$

Soit pour $y_1 = -R$ $m_1 = m_{rot}$

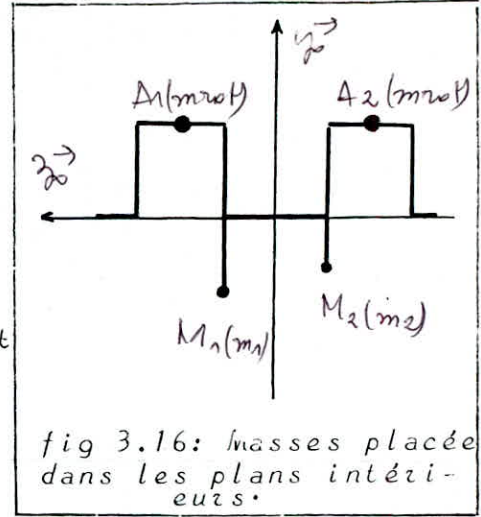


fig 3.16: masses placées dans les plans intérieurs.

b2/ Masses placées dans des plans non symétriques:

soit en M_1 et M_2 tels que:

$$\vec{OM}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ 3a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_c \\ \vec{z}_c \end{matrix} \text{ et } \vec{OM}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ -a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_c \\ \vec{y}_c \\ \vec{z}_c \end{matrix}$$

$$\sum x m = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum y m = 2 R m_{rot} + y_1 m_1 + y_2 m_2 = 0 \dots (2)$$

$$\sum x z m = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\sum y z m = y_1 \frac{3a}{2} m_1 - y_2 \frac{a}{2} m_2 = 0 \dots (4)$$

si on choisit: $y_1 = \frac{3}{2} y_2$

(4) donne: $3 m_1 = m_2$

(2) donne: $y_1 m_1 = -\frac{R}{2} m_{rot}$

en prenant: $y_1 = -R$

on obtient: $m_1 = \frac{m_{rot}}{2}$ et $m_2 = \frac{3 m_{rot}}{2}$

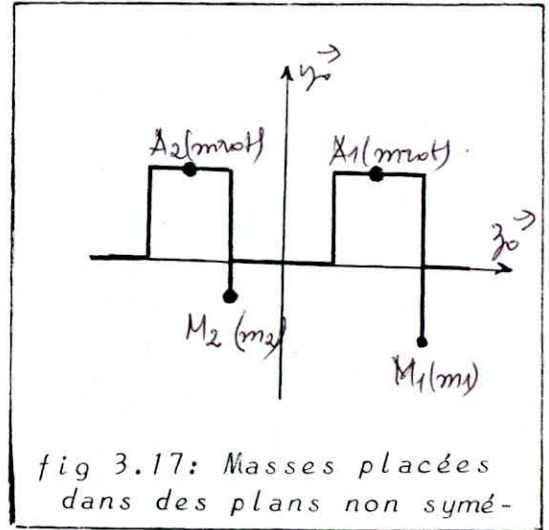


fig 3.17: Masses placées dans des plans non symé-

Conclusion: La position des masses d'équilibrage n'ayant pas d'influence sur la masse du vilebrequin, on choisira l'équilibrage maneton par maneton conduisant à la plus grande rigidité de la ligne d'arbre, donc aux plus faibles déformations locales du palier intermédiaire.

4.0.2 Equilibrage des masses alternatives:

a/ Effort de pilon:

L'effort de pilon d'ordre p est non nul si $\frac{z_p}{n}$ soit $\frac{y_p}{z} = p$ est entier, ce qui est le cas; cela signifie que tous les efforts de pilon sont présents, cependant seuls les ordres 1 et 2 sont d'intérêt pratique.

a1/ Ordre 1:

L'effort de pilon d'ordre 1 vaut:

$$2 m_{alt} R \dot{\theta}^2 \cos \theta.$$

Adoptant la méthode 3 d'équilibrage, on place 4 contre-poids de valeur égale à $\frac{m_{alt}}{4}$ dans le prolongement de chaque bras de maneton. Ainsi, il reste non équilibré un effort de pilon d'ordre 1 de valeur moitié et apparaît un effort de tamis d'ordre 1 de valeur:

$$m_{alt} R \dot{\theta}^2 \sin \theta$$

La masse additionnelle au vilebrequin est m_{alt} .

a2/ Ordre 2:

$$\text{L'effort de pilon d'ordre 2 vaut: } 2 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4 \cdot 1^3} + \dots \right) m_{alt} R \dot{\theta}^2 \cos 2\theta$$

Pour l'équilibrer, on adopte la méthode de Lanchester du monocylindre en multipliant par 2 tous les contre-poids portés par les arbres secondaires.

b/ Couples de galop:

Le plan médian étant plan de symétrie, tous les couples de galop sont nuls.

Conclusion: l'équilibrage parfait des masses rotatives nécessite des contre-poids de masses $2m_{rot}$, celui des masses alternatives - si on adopte le cas où l'effort de pilon non équilibré est égal à l'effort de tamis d'ordre 1 - nécessite une masse m_{alt} .

Le vilebrequin aura donc à porter une masse totale de $(2m_{rot} + m_{alt})$

Il reste non équilibré:

- les efforts de pilon d'ordres 2, 4, 6...
- l'effort de pilon d'ordre 1 de valeur: $m_{alt} R \dot{\theta}^2 \cos \theta$,
- l'effort de tamis d'ordre 1 de valeur: $m_{alt} R \dot{\theta}^2 \sin \theta$.

4.1 Moteur 3 cylindres en ligne, 4 temps:

Les manivelles sont calées à $\frac{4\pi}{3}$ soit 240°

4.1.1 Equilibrage des masses rotatives:

Soit m_{rot} la masse rotative attachée à chaque maneton, supposée concentrée aux points de coordonnées:

$$\vec{OA}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 2a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OA}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} R \\ R/2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \vec{OA}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} R \\ R/2 \\ -2a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

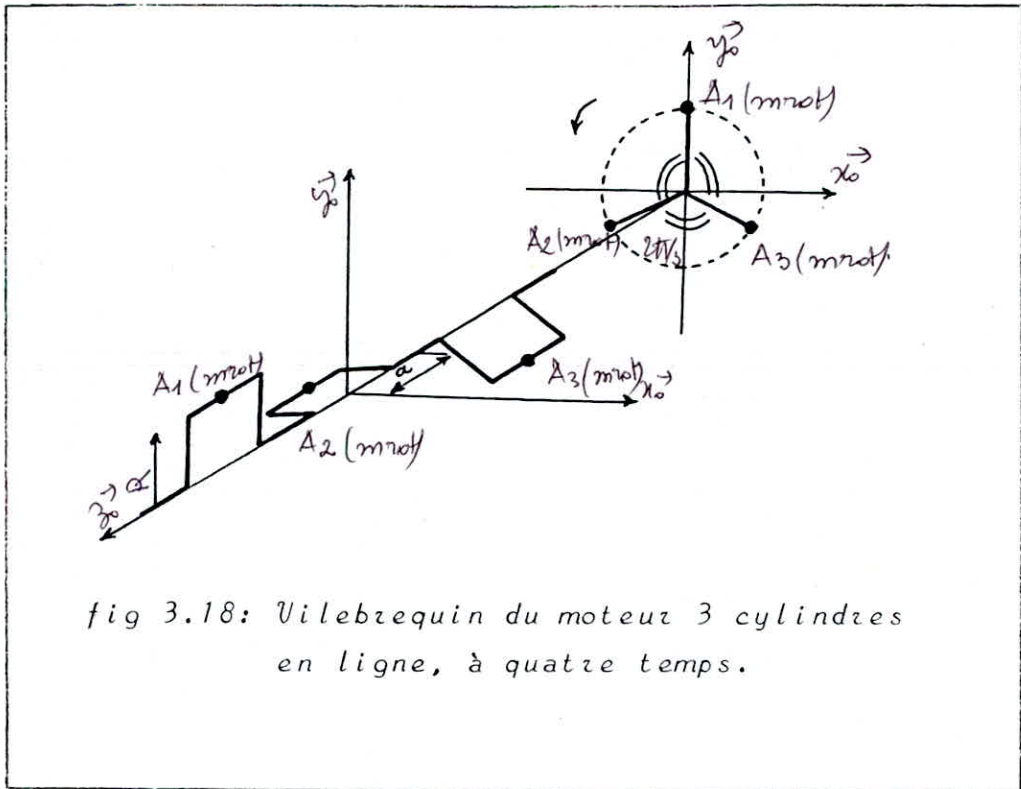


fig 3.18: Vilebrequin du moteur 3 cylindres en ligne, à quatre temps.

Les masses rotatives sont parfaitement équilibrées si les 4 sommes fondamentales sont nulles, soient:

$$\sum x m = 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} R m_{\text{rot}} + \frac{\sqrt{3}}{2} R m_{\text{rot}} = 0$$

$$\sum y m = R m_{\text{rot}} - \frac{R}{2} m_{\text{rot}} - \frac{R}{2} m_{\text{rot}} = 0$$

$$\sum x z m = 0 + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} R (-2a) m_{\text{rot}} = -\sqrt{3} R a m_{\text{rot}} \neq 0$$

$$\begin{aligned} \sum y z m &= R \cdot 2a m_{\text{rot}} + 0 - \frac{R}{2} (-2a) m_{\text{rot}} = 2R a m_{\text{rot}} + R a m_{\text{rot}} \\ &= 3 R a m_{\text{rot}} \neq 0 \end{aligned}$$

Ce qui n'est pas le cas.

En effet, le moteur est soumis à:

- Un effort de tamis d'ordre 1, de valeur:

$$\begin{aligned} -m_{\text{rot}} R \dot{\theta}^2 \left[\sin \theta + \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left(\theta + \frac{4\pi}{3} \right) \right] &= -m_{\text{rot}} R \dot{\theta}^2 \left(\sin \theta + 2 \sin \frac{\theta + \frac{2\pi}{3}}{3} \right) \\ -\frac{\theta + \frac{4\pi}{3}}{3} \cos \frac{\theta + \frac{2\pi}{3} - \theta - \frac{4\pi}{3}}{3} &= -m_{\text{rot}} R \dot{\theta}^2 \left[\sin \theta + 2 \sin \left(\theta + \pi \right) \cos \frac{\pi}{3} \right] = -m_{\text{rot}} \\ R \dot{\theta}^2 \left[\sin \theta + 2(-\sin \theta) \frac{1}{2} \right] &= 0 \end{aligned}$$

Un effort de pilon d'ordre 1:

$$\begin{aligned} m_{\text{rot}} R \dot{\theta}^2 \left[\cos \theta + \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(\theta + \frac{4\pi}{3} \right) \right] &= -m_{\text{rot}} R \dot{\theta}^2 \cos \theta + 2 \cos \frac{\theta + \frac{2\pi}{3}}{3} \\ +\frac{\theta + \frac{4\pi}{3}}{3} \cos \frac{\theta + \frac{2\pi}{3} - \theta - \frac{4\pi}{3}}{3} &= -m_{\text{rot}} R \dot{\theta}^2 \left[\cos \theta + 2 \cos \left(\theta + \pi \right) \cos \frac{\pi}{3} \right] = -m_{\text{rot}} \\ R \dot{\theta}^2 \left[\cos \theta + 2(-\cos \theta) \frac{1}{2} \right] &= 0 \end{aligned}$$

- Un couple de galop d'ordre 1, de valeur:

$$2 a m_{\text{rot}} R \dot{\theta}^2 \left[\cos \theta - \cos \left(\theta + \frac{4\pi}{3} \right) \right] = 2\sqrt{3} a m_{\text{rot}} \dot{\theta}^2 \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

Soit: $2\sqrt{3} a m_{\text{rot}} R \dot{\theta}^2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$

- Un couple de lacet d'ordre 1, de valeur:

$$2 a m_{\text{rot}} R \dot{\theta}^2 \left[\sin \theta - \sin \left(\theta + \frac{4\pi}{3} \right) \right] = -2\sqrt{3} a m_{\text{rot}} R \dot{\theta}^2 \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

Soit: $2\sqrt{3} a m_{\text{rot}} R \dot{\theta}^2 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$

dont l'équilibrage peut être obtenu selon plusieurs méthodes:

a/ Equilibrage maneton par maneton:

On place dans le prolongement de chaque bras de maneton une masse m_1 à une distance y_1 de l'axe de rotation.

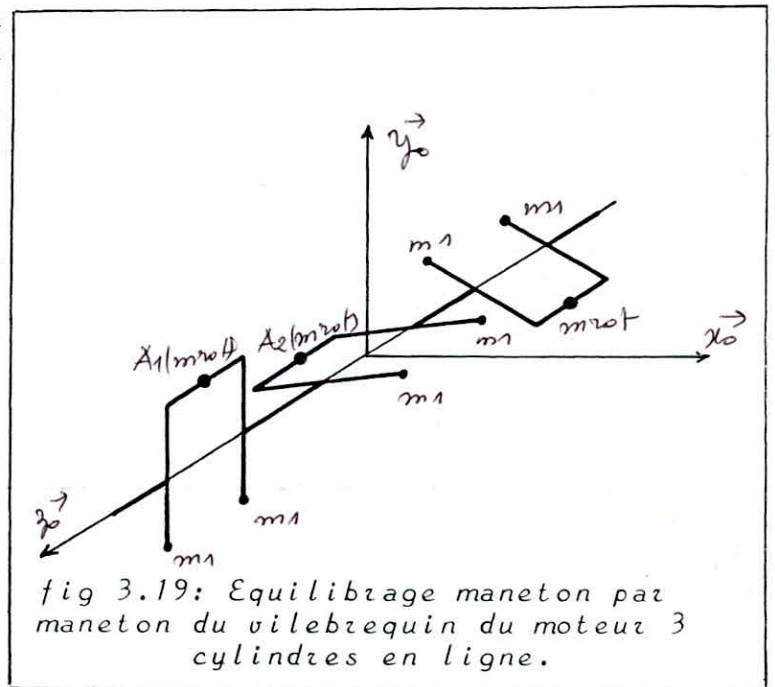
On doit vérifier les 4 sommes fondamentales dont la résolution aboutit à:

$$y_1 m_1 = -\frac{R}{2} m_{\text{rot}}$$

Soit en prenant $y_1 = -R$ comme encombrement maximal, on obtient:

$$m_1 = \frac{m_{\text{rot}}}{2}$$

La masse additionnelle est: $3 m_{\text{rot}}$



b/ Equilibrage par 2 masses:

Ces dernières peuvent être placées dans des plans symétriques au plan médian ou non.

Dans le cas de plans symétriques, on distingue 3 cas Possibles:

1er cas: masses placées dans les plans extérieurs:

Soient m_1 et m_2 les valeurs des contreponds supposées concentrées en M_1 et M_2 tels que :

$$\vec{OM}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \frac{5a}{2} \end{pmatrix} \vec{e}_0 \quad \text{et} \quad \vec{OM}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -\frac{5a}{2} \end{pmatrix} \vec{e}_0$$

Pour avoir l'équilibrage parfait des masses rotatives, les 4 sommes fondamentales doivent s'annuler, soient :

$$\sum x m = x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum y m = y_1 m_1 + y_2 m_2 = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\sum x z m = -\sqrt{3} a R m_{rot} + x_1 \frac{5a}{2} m_1 - x_2 \frac{5a}{2} m_2 = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\sum y z m = 3a R m_{rot} + y_1 \frac{5a}{2} m_1 - y_2 \frac{5a}{2} m_2 = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

Pour des masses identiques :

(1) donne $x_1 = -x_2$ et (2) donne $y_1 = -y_2$

dans (3) et (4) on aura : $x_1 m_1 = \frac{\sqrt{3}}{5} R m_{rot}$

$$\text{et } y_1 m_1 = -\frac{3}{5} R m_{rot}$$

Si R est l'encombrement maximal :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\text{or } x_1 = \frac{\sqrt{3}}{5} R \frac{m_{rot}}{m_1} \quad \text{et} \quad y_1 = -\frac{3}{5} R \frac{m_{rot}}{m_1}$$

$$\text{on obtient : } m_1 = \frac{2\sqrt{3}}{5} m_{rot}$$

$$\text{et par suite : } x_1 = \frac{a}{2}, \quad y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} R$$

La masse additionnelle au villegibrequin est :

$$4 \frac{\sqrt{3}}{5} m_{rot}$$

2ème cas: Masses placées dans les plans intermédiaires.

Similairement au 1er cas, on trouve :

$$m_1 = m_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} m_{rot}$$

$$\text{et : } \begin{cases} x_1 = \frac{R}{2} \\ y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} R \end{cases}$$

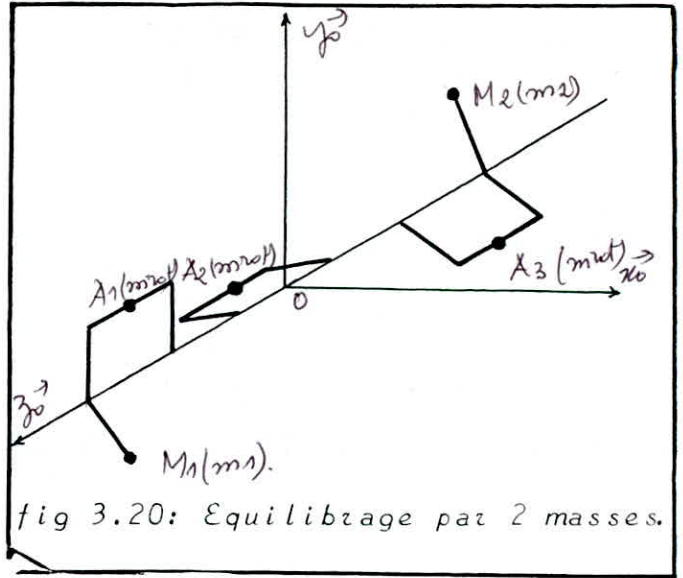


fig 3.20: Equilibrage par 2 masses.

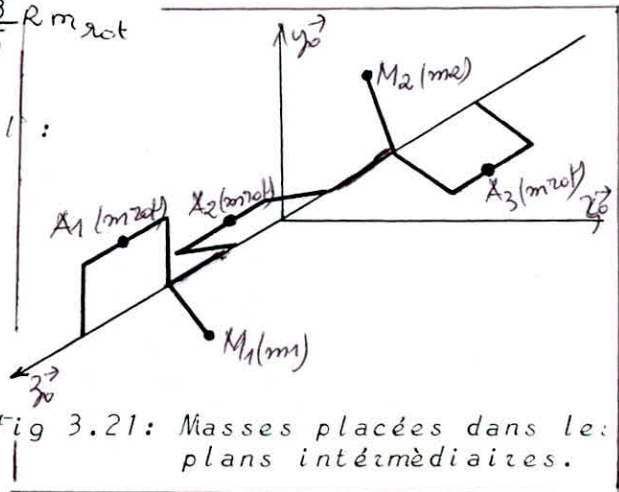
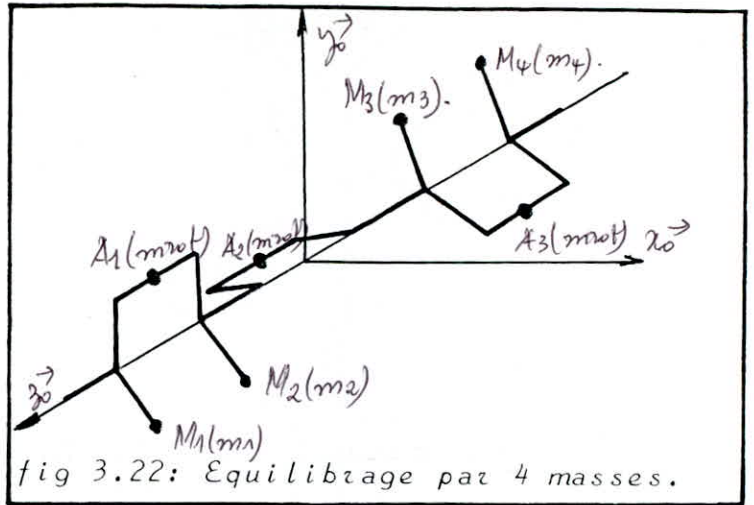


fig 3.21: Masses placées dans les plans intermédiaires.

Le contrepoids attaché au bras de la manivelle 1 est donc placé à 30° après le plan de celle-ci, l'autre symétriquement par rapport au point O.

La masse additionnelle au vilebrequin est de :

$$\frac{4}{\sqrt{3}} m_{rot}$$



3ème cas: masses placées dans les plans intérieurs :

Dans ce cas, on trouve :

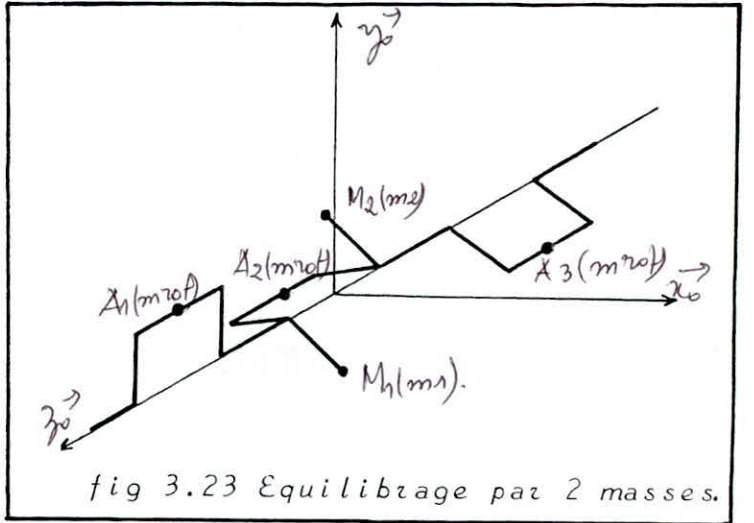
$$m_1 = m_2 = 2\sqrt{3} m_{rot}$$

et $\begin{cases} x_1 = \frac{R}{2} \\ y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} R \end{cases}$

L'emplacement des contrepoids est identique à celui du 2ème cas.

La masse additionnelle au vilebrequin est de

$$4\sqrt{3} m_{rot}$$



c/ Equilibrage par 4 masses :

Dans le cas où les 4 masses sont placées dans les extérieurs, soit aux points M_i tels que :

$$\vec{OM}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 5a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OM}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 3a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OM}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ -3a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \vec{OM}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ -5a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Pour que les masses rotatives soient équilibrées, il faut et il suffit que les 4 sommes fondamentales soient nulles, à savoir :

$$\sum x m = x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + x_4 m_4 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum y m = y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3 + y_4 m_4 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\sum x z m = -\sqrt{3} a R m_{rot} + x_1 \frac{5a}{2} m_1 + x_2 \frac{3a}{2} m_2 - x_3 \frac{3a}{2} m_3 - x_4 \frac{5a}{2} m_4 = 0 \dots (3)$$

$$\sum y z m = 3a R m_{rot} + y_1 \frac{5a}{2} m_1 + y_2 \frac{3a}{2} m_2 - y_3 \frac{3a}{2} m_3 - y_4 \frac{5a}{2} m_4 = 0 \dots (4)$$

Pour des masses identiques, on aura:

$$x_1 = x_2 \quad y_1 = y_2 \quad x_3 = x_4 \quad \text{et} \quad y_3 = y_4$$

dans (1): $x_1 = x_2 = -x_3 = -x_4$

(2): $y_2 = y_3 = -y_1 = -y_4$

(3): $m_1 x_1 = \frac{\sqrt{3}}{8} R m_{act}$

(4): $m_1 y_1 = -\frac{3}{8} R m_{act}$

Si on adopte R pour encombrement maximal: $x_1^2 + y_1^2 = R^2$

or: $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{8} R \frac{m_{act}}{m_1}$ et $y_1 = -\frac{3}{8} R \frac{m_{act}}{m_1}$

d'où: $m_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} m_{act}$

par suite: $x_1 = \frac{R}{2}$ et $y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} R$

Les contrepoids solidaires de la manivelle 1 sont calées à 30° après le plan passant par cette dernière, les 2 autres symétriquement par rapport au point O.

- La masse additionnelle au vilebrequin est de $\sqrt{3} m_{act}$

d/ Equilibrage par 6 masses:

Soit m_i la masse rotative supposée concentrée aux points M_i tels que:

$$\vec{OM}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 5a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OM}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 3a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OM}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OM}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ -a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OM}_5 = \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ -3a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OM}_6 = \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ -5a/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Pour que les masses rotatives soient parfaitement équilibrées, il faut que les 4 sommes fondamentales soient nulles, soient:

$$\sum x m = x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + x_4 m_4 + x_5 m_5 + x_6 m_6 = 0 \quad (1)$$

$$\sum y m = y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3 + y_4 m_4 + y_5 m_5 + y_6 m_6 = 0 \quad (2)$$

$$\sum x z m = -\sqrt{3} a R m_{tot} + x_1 \frac{5a}{2} m_1 + x_2 \frac{3a}{2} m_2 + x_3 \frac{a}{2} m_3 - x_4 \frac{a}{2} m_4 - x_5 \frac{3a}{2} m_5 - x_6 \frac{5a}{2} m_6 = 0 \quad (3)$$

$$\sum y z m = 3a R m_{tot} + y_1 \frac{5a}{2} m_1 + y_2 \frac{3a}{2} m_2 + y_3 \frac{a}{2} m_3 + y_4 \frac{a}{2} m_4 - y_5 \frac{3a}{2} m_5 - y_6 \frac{5a}{2} m_6 = 0 \quad (4)$$

Il est commode de placer les masses lourdes à l'intérieur pour équilibrer les couples et des masses juste suffisantes à l'intérieur pour éviter de très grandes déformations des paliers intermédiaires.

On prends alors: $m_1 = m_2 = m_5 = m_6$
 $m_3 = m_4$

Quand à leur emplacements plusieurs possibilités peuvent avoir lieu:

d1/ Trois masses dans la même position:

Pour:

$$x_1 = x_2 = x_3$$

$$y_1 = y_2 = y_3$$

$$x_4 = x_5 = x_6$$

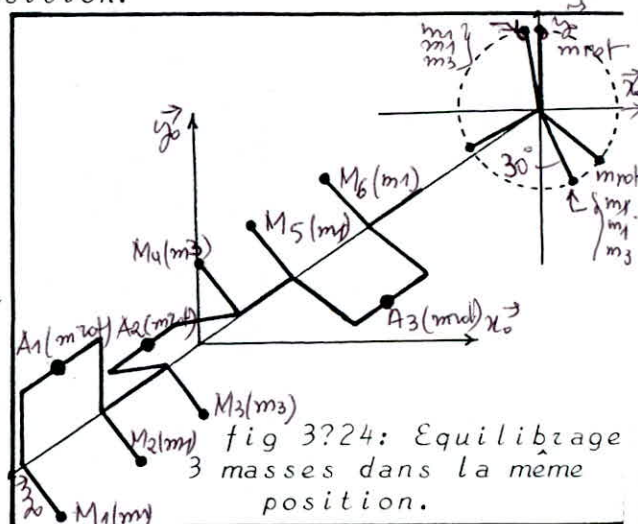
$$\text{et } y_4 = y_5 = y_6$$

(1) donne: $x_1 = x_2 = x_3 = -x_4 = -x_5 = -x_6$

(2) donne: $y_1 = y_2 = y_3 = -y_4 = -y_5 = -y_6$

(3) donne: $x_1 = \sqrt{3} R m_{rot} / (8m_1 + m_3)$

(4) donne: $y_1 = -3 R m_{rot} / (8m_1 + m_3)$



Prenons pour encombrement maximal R:

$$x_1^2 + y_1^2 = R^2$$

Soit: $8m_1 + m_3 = 2\sqrt{3} m_{rot}$

par suite: $x_1 = \frac{R}{2}$ et $y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} R$

Ainsi, 3 des 6 contrepoids sont placés à 30° après le plan de la première manivelle, les 3 autres symétriquement par rapport au point O, quand à leurs valeurs, plusieurs cas peuvent avoir lieu:

1er cas: Equilibrage par 4 masses égales:

$$m_3 = 0 \quad m_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} m_{rot} \quad (\text{c'est le cas c/}),$$

2ème cas: Equilibrage par 6 masses: égales:

$$m_3 = m_1 = \frac{2\sqrt{3}}{9} m_{rot}$$

La masse additionnelle au vilebrequin est $\frac{4\sqrt{3}}{3} m_{rot}$

3ème cas: Ce sont l'infinité de cas intermédiaires $0 < m_3 < m_1$

La valeur de m_3 est fonction de la rigidité des paliers intermédiaires désirée.

On peut rencontrer les cas suivants relatifs à la disposition courante:

Deux masses dans la même position.

Pour rigidifier les paliers intermédiaires, la position idéale des masses m_3 n'est pas à 30° des bras de maneton, mais dans le prolongement de ceux-ci.

On est donc amené, dans ce cas, à refermer les masses m_1 d'un angle vers le maneton 2 de façon à créer une force opposée à celle engendrée par les masses m_3 tel que:

$$2m_1 \sin \alpha = m_3$$

$$\text{En partant de } x_3 = x_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

$$\text{et } y_3 = y_4 = \frac{R}{2}$$

et en prenant le cas où: $x_1 = x_2$ $y_1 = y_2$ et $x_5 = x_6$ $y_5 = y_6$,

les 4 sommes fondamentales équivalentes à zéro donnent:

$$2x_1 m_1 + \sqrt{3} R m_3 + 2x_5 m_1 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$2y_1 m_1 + R m_3 + 2y_5 m_1 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$-\sqrt{3} a R m_{\text{rot}} + 4a x_1 m_1 - 4a x_5 m_1 = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$3a R m_{\text{rot}} + 4a y_1 m_1 - 4a y_5 m_1 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

dont la résolution en x_1, x_5, y_1 et y_5 donne:

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{8} R m_{\text{rot}} - 2m_3 \quad y_1 = \frac{R}{2} \frac{3m_{\text{rot}} + 2m_3}{m_1}$$

$$x_5 = -\frac{\sqrt{3}}{8} R \frac{m_{\text{rot}} + 2m_3}{m_1} \quad y_5 = \frac{R}{2} \frac{3m_{\text{rot}} - 2m_3}{m_1}$$

Si on prends R pour encombrement maximal: $x_1^2 + y_1^2 = R^2$ et $x_5^2 + y_5^2 = R^2$
d'où: $16m_1^2 - 4m_3^2 = 3m_{\text{rot}}^2$

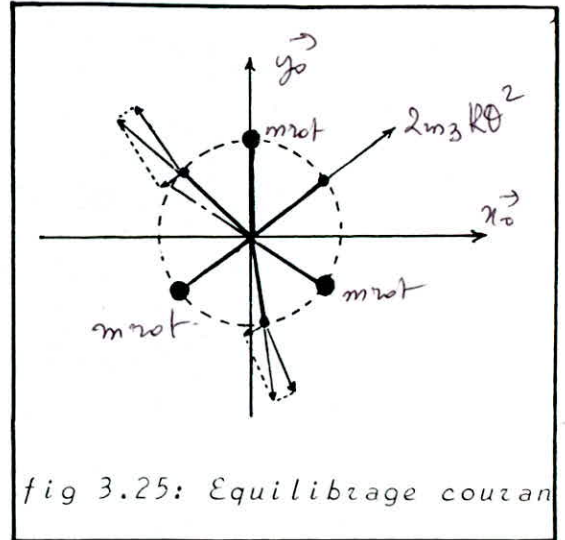
On distingue 3 cas possibles:

1er cas: Equilibrage par 4 masses égales:

$$m_3 = 0 \quad \text{soit } m_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} m_{\text{rot}}$$

$$\text{et par suite: } \begin{cases} x_1 = \frac{R}{2} \\ y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} R \end{cases} \quad \text{et: } \begin{cases} x_5 = -\frac{R}{2} \\ y_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} R \end{cases}$$

c'est le cas b/



2ème cas: Equilibrage maneton par maneton:

$$m_3 = m_1 = \frac{m_{rot}}{2}$$

et par suite: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -R \end{cases}$ et: $\begin{cases} x_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}R \\ y_5 = \frac{R}{2} \end{cases}$

3ème cas: Ce sont les cas intermédiaires où $0 < m_3 < m_1$.

La valeur de m_3 étant fonction de la rigidité à vouloir donner aux paliers intermédiaires.

4.1.2 Equilibrage des masses alternatives:

a/ Effort de pilon:

L'effort de pilon d'ordre p n'est pas nul si $\frac{2p}{n}$ soit $\frac{2p}{3}$ est entier.

a1/ Ordres 1, 2, 4:

$k = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}$ est possible. Les efforts de pilon d'ordres 1, 2, 4 sont donc nuls.

a2/ Ordre 6:

L'effort de pilon d'ordre 6 vaut:

$$\left(\frac{27}{128 \lambda^5} + \dots \right) m_{alt} R \theta^2 \cos 6\theta$$

on ne l'équilibre en pratique pas.

b/ Couples de galop:

b1/ Ordre 1:

Le couple de galop d'ordre 1 vaut:

$$2 a m_{alt} R \theta^2 \left[\cos \theta + \cos \left(\theta + \frac{4\pi}{3} \right) \right] = 2\sqrt{3} a m_{alt} R \theta^2 \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

soit: $2\sqrt{3} a m_{alt} R \theta^2 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$

Pour l'équilibrer, on utilise le principe de l'équivalence entre un couple alternatif et 4 masses rotatives.

Soit:

$$4b m_1 R \dot{\theta}^2 \cos \alpha + 2\sqrt{3} a m_{alt} R \dot{\theta}^2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \text{où } b = 2a$$

ou encore:

$$4m_1 \cos \alpha = -\sqrt{3} m_{alt} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

par identification:

$$\begin{cases} 4m_1 = \sqrt{3} m_{alt} \\ \cos \alpha = -\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \quad \text{d'où: } \begin{cases} m_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} m_{alt} \\ \alpha = \theta + \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

Remarque:

En supprimant l'arbre primaire -souvent le cas en pratique-, il reste non équilibré la moitié du couple de galop et apparaît un couple de lacet d'ordre 1, de valeur $\sqrt{3} a m_{alt} R \dot{\theta}^2 \sin\left(\theta + \frac{7\pi}{6}\right)$ soit $-\sqrt{3} a m_{alt} R \dot{\theta}^2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

La masse supplémentaire du vilebrequin est: $\frac{\sqrt{3}}{2} m_{alt}$

b2/ Ordre 2, 4, 6:

Les couples de galop d'ordre 2 et 4 valent respectivement:

$$\text{et: } 2\sqrt{3} a \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\lambda^3} + \dots \right) m_{alt} R \dot{\theta}^2 \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$-\sqrt{3} a \left(\frac{1}{2\lambda^3} + \frac{3}{8\lambda^5} + \dots \right) m_{alt} R \dot{\theta}^2 \cos\left(4\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

celui d'ordre 6 est nul.

Ces couples ne sont jamais équilibrés.

4.2: Moteur 4 cylindres en ligne, 4 temps:

Les manivelles sont calées à $\frac{4\pi}{n}$ soit 180° . Il ya donc, 2 vilebrequins possibles.

4.2.1 Equilibrage des masses rotatives:

a/ Vilebrequin à plan médian non symétrique:

Soit m_{rot} la masse rotative rotative attachée à chaque maneton, supposée concentrée aux points A_i de coordonnées:

$$\vec{OA}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 3a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OA}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ -a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OA}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ -a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \vec{OA}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ -3a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Les masses rotatives sont parfaitement équilibrées si les 4 sommes fondamentales sont nulles, à savoir:

$$\sum x m = 0$$

$$\sum y m = R m_{rot} - R m_{rot} + R m_{rot} - R m_{rot} = 0$$

$$\sum x z = 0$$

$$\sum y z m = R \cdot 3a m_{rot} - R a m_{rot} - R a m_{rot} + R \cdot 3a m_{rot} = 4 a R m_{rot} \neq 0$$

ce qui n'est pas le cas. Le moteur est ainsi soumis à un couple de galop et un autre de lacet d'ordre 1.

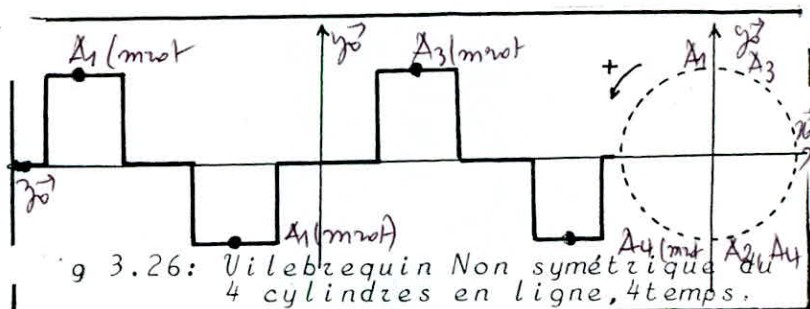
Ce vilebrequin n'est en fait jamais utilisé.

b/ Vilebrequin symétrique par rapport au plan médian:

Le plan médian étant plan de symétrie, le moteur n'est soumis à aucun couple.

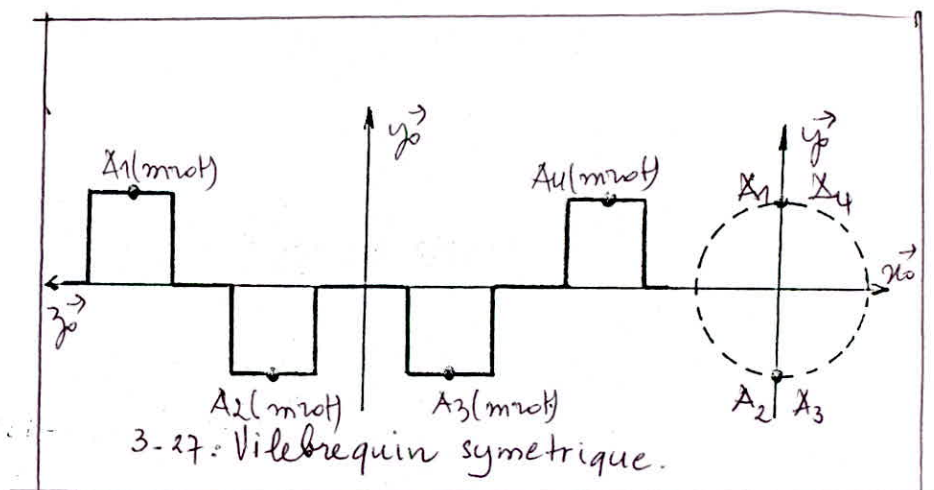
Ainsi les masses rotatives sont parfaitement équilibrées si les 2 premières sommes fondamentales sont nulles.

Les masses rotatives m_{rot} étant positionnées aux points A_i , donnés par:



$$\vec{OA}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 3a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OA}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{OA}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ -a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OA}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ -3a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$



On aura alors à vérifier que:

$$\sum x_m = 0$$

$$\sum y_m = R m_{alt} - R m_{alt} - R m_{alt} + R m_{alt} = 0$$

Ainsi l'équilibrage des masses totatives est naturellement réalisé. Cependant, pour réduire les déformations locales des paliers sous l'effet des forces centrifuges, et les contraintes dans le film d'huile, on muni le vilebrequin de contrepoids pour augmenter sa rigidité. Ces dernières doivent être disposées de façon symétrique par rapport au plan médian.

4.2.2 Equilibrage des masses alternatives:

a/ Efforts de pilon:

L'effort de pilon d'ordre p n'est pas nul si $\frac{2p}{\ell}$ soit $\frac{p}{2}$ est entier.

a1/ Ordre 1:

$k=1/2$ est impossible, l'effort d'ordre 1 est donc nul.

a2/ Ordre 2:

$k=2/2=1$ est possible,

L'effort de pilon d'ordre 2 vaut: $4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4 \cdot 1^3} + \dots \right) m_{alt} R \omega^2 \cos 2\theta$ et peut être équilibré par la méthode de Lancheater.

D'autre part, il est à noter qu'une disposition non symétrique des masses portées par les arbres secondaires, par rapport à l'axe y permet de créer un couple qui équilibre le couple de basculement "naturel" du moteur.

a3/ Ordres 4;6:

Les efforts de pilon d'ordre 4 et 6 valent:

$$- \left(\frac{1}{1^3} + \frac{3}{4 \cdot 1^5} + \dots \right) m_{alt} R \omega^2 \cos 4\theta$$

$$\text{et } \left(\frac{27}{64 \cdot 1^5} + \dots \right) m_{alt} R \omega^2 \cos 6\theta$$

et ne sont pratiquement pas équilibrés.

b/ Couple de galop:

Le plan médian étant plan de symétrie, tous les couples de galop sont nuls.

4.3 Moteur 6 cylindres en ligne, 4 temps:

Les manivelles sont calées à $\frac{4\pi}{6}$ soit 120° .

4.3.1 Equilibrage des masses rotatives:

La masse rotative attachée à chaque maneton est concentrée aux points A_i , de coordonnées:

$$\vec{OA}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 5a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OA}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 R \\ -R/2 \\ 3a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OA}_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 R \\ -R/2 \\ a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OA}_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 R \\ -R/2 \\ -a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OA}_5 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 R \\ -R/2 \\ -3a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \text{et } \vec{OA}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ -5a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

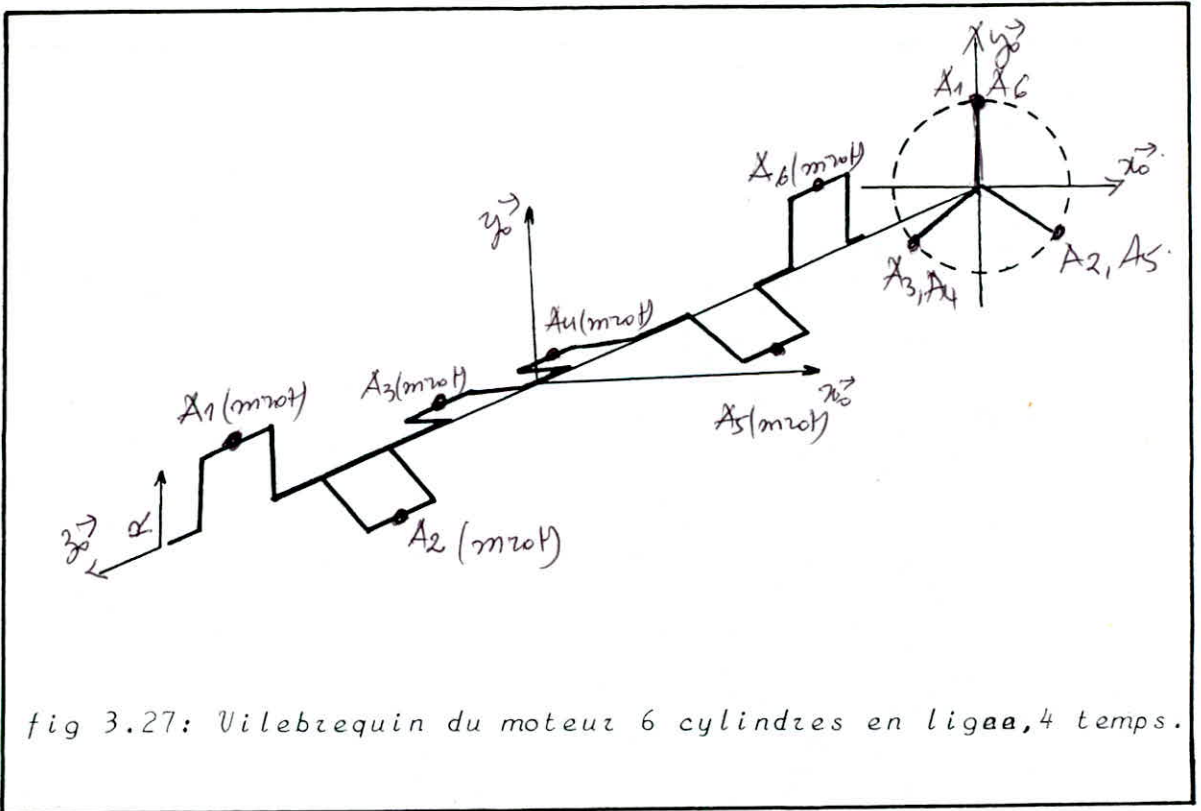


fig 3.27: vilebrequin du moteur 6 cylindres en ligne, 4 temps.

Le plan médian étant plan de symétrie, le moteur n'est soumis à aucun couple et les masses rotatives sont parfaitement équilibrées si les 2 premières sommes fondamentales sont nulles:

$$\sum x m = \frac{\sqrt{3}}{2} R m_{rot} - \frac{\sqrt{3}}{2} R m_{rot} - \frac{\sqrt{3}}{2} R m_{rot} + \frac{\sqrt{3}}{2} R m_{rot} = 0$$

$$\sum y m = R m_{rot} - \frac{R}{2} m_{rot} - \frac{R}{2} m_{rot} - \frac{R}{2} m_{rot} - \frac{R}{2} m_{rot} + R m_{rot} = 0$$

ce qui est vérifié.

Le vilebrequin se trouve ainsi naturellement équilibré sans apport de contrepoids. Ces dernières peuvent néanmoins servir à limiter les déformations locales des paliers.

4.3.2 Équilibrage des masses alternatives:

a/ Efforts de pilon:

L'effort de pilon d'ordre p n'est pas nul si (p entier).

a1/ Ordres 1, 2, 4:

$k=1, 2, 4$ est impossible, les efforts de pilon d'ordres 1, 2, 4 sont donc nuls.

a2/ Ordre 6:

$k=6/3=2$ est possible.

L'effort de pilon d'ordre 6 vaut:

$$\left(\frac{2\pi}{641^5} + \dots \right) m_{alt} R \theta^2 \cos 6\theta$$

on ne l'équilibre pas.

b/ Couple de galop:

Le plan médian étant plan de symétrie, tous les couples de galop sont nuls.

4.4 Moteur 8 cylindres en ligne, 4 temps:

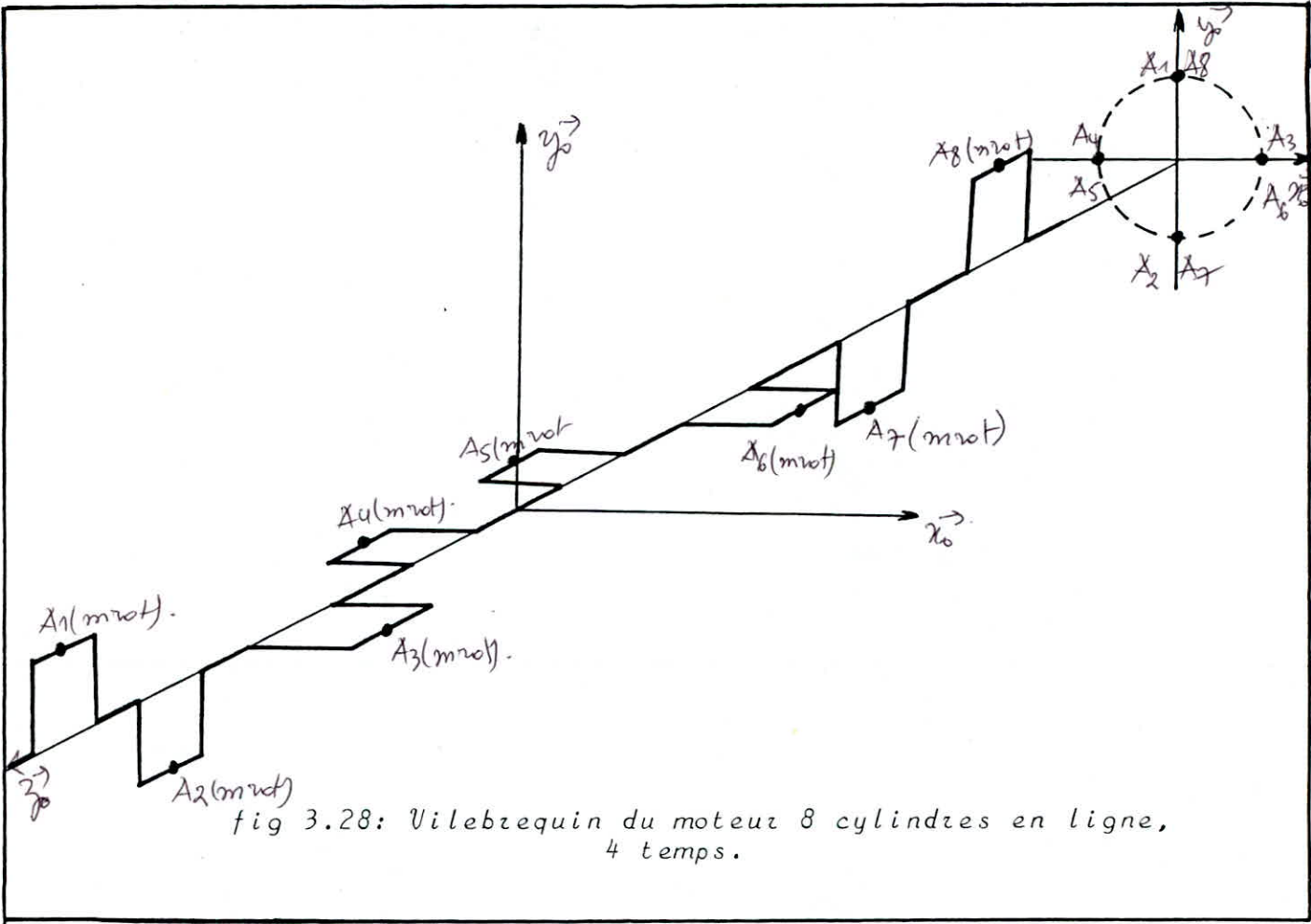
Les manivelles sont calées à $\frac{4\pi}{8}$ soit 90° .

4.4.1 Équilibrage des masses rotatives:

La masse rotative attachée à chaque maneton est concentrée aux points A_i de coordonnées:

$$\vec{OA}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 7a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OA}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ 5a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OA}_3 = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 3a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OA}_4 = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{OA}_5 = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OA}_6 = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ -3a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \vec{OA}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ -5a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \vec{OA}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ -7a \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$



Le plan médian étant plan de symétrie, le moteur n'est soumis à aucun couple et les masses rotatives sont parfaitement équilibrées si les 2 premières sommes fondamentales sont nulles, soient:

$$\sum x m = R m_{rot} - R m_{rot} - R m_{rot} + R m_{rot} = 0$$

$$\sum y m = R m_{rot} - R m_{rot} - R m_{rot} + R m_{rot} = 0$$

ce qui est le cas.

Le vilebrequin est ainsi naturellement équilibré.

4.4.2 Équilibrage des masses alternatives:

a/ Efforts de pilon:

L'effort de pilon d'ordre p n'est pas nul si $\frac{2p}{8}$ soit $\frac{p}{4} = k$ (entier).

a1/ Ordre 1, 2, 6:

$k = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ est impossible, les efforts de pilon d'ordres 1, 2; 6 sont tous nuls.

Ordre 4 :

$K = 1$ est possible

L'effort de pilon d'ordre 4 vaut :

On ne l'équilibre pas en pratique .

Couples de galop :

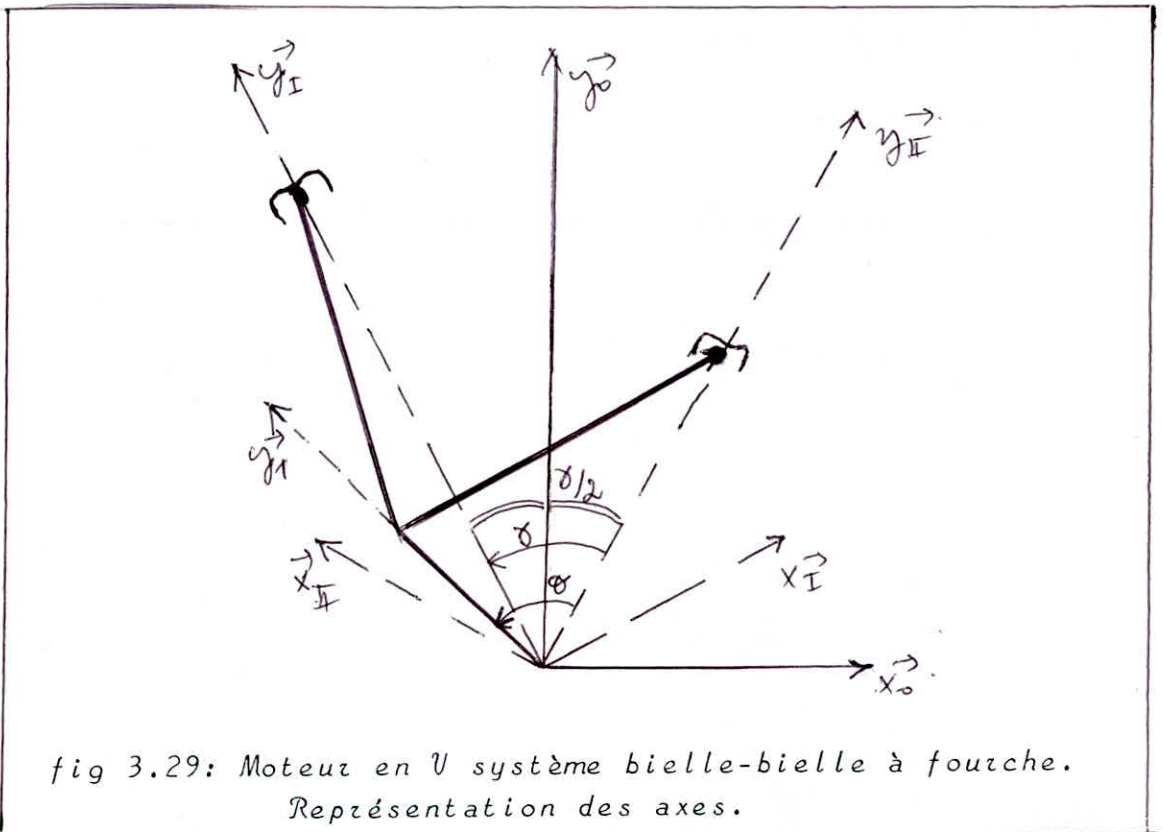
Le plan médian étant plan de symétrie, tous les couples de galop sont nuls.

B. ETUDE DE L'EQUILIBRAGE DES MOTEURS EN "V", SYSTEME BIELLE - BIELLE A FOURCHE.

B.O. GENERALITES :

De manière générale, un moteur multicylindre est constitué de 2 moteurs en ligne décalés d'un angle δ appelé "angle d'ouverture du V".

Pour que le couple moteur d'un multicylindre en V soit le plus régulier possible, l'angle δ d'ouverture doit être égal à $\frac{4\pi}{n}$, n étant le nombre de cylindres.



O.1 : Mise en place des repères - formules de passage:

Les efforts de tamis et de pilon ainsi que les couples de galop et de lacet dus aux masses rotatives et alternatives des moteurs en ligne sont portés par les axes $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{y}_2$.

Ils vont se composer pour donner des efforts et des couples résultants pour le moteur en "V", portés par \vec{x}_0 et \vec{y}_0 .

Les formules de changement de repères sont :

de : $(O, \vec{x}_I, \vec{y}_I, \vec{z}_I) \hat{=} (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\begin{cases} \vec{x}_I = \cos \frac{\delta}{2} \vec{x}_0 + \sin \frac{\delta}{2} \vec{y}_0 \\ \vec{y}_I = -\sin \frac{\delta}{2} \vec{x}_0 + \cos \frac{\delta}{2} \vec{y}_0 \\ \vec{z}_I = \vec{z}_0 \end{cases}$$

et de $(O, \vec{x}_{II}, \vec{y}_{II}, \vec{z}_{II})$ à $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$:

$$\begin{cases} \vec{x}_{II} = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \vec{x}_0 - \sin \frac{\theta}{2} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y}_{II} = \sin \frac{\theta}{2} \cdot \vec{x}_0 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z}_{II} = \vec{z}_0 \end{cases}$$

B.1 EQUILIBRAGE DES MASSES ROTATIVES:

L'équilibrage des masses rotatives est similaire à celui des moteurs multicylindre en ligne, cependant, la valeur de la masse rotative à adopter est la masse d'une tête de bielle, plus celle du demi-maneton ajoutées à celle d'un flasque.

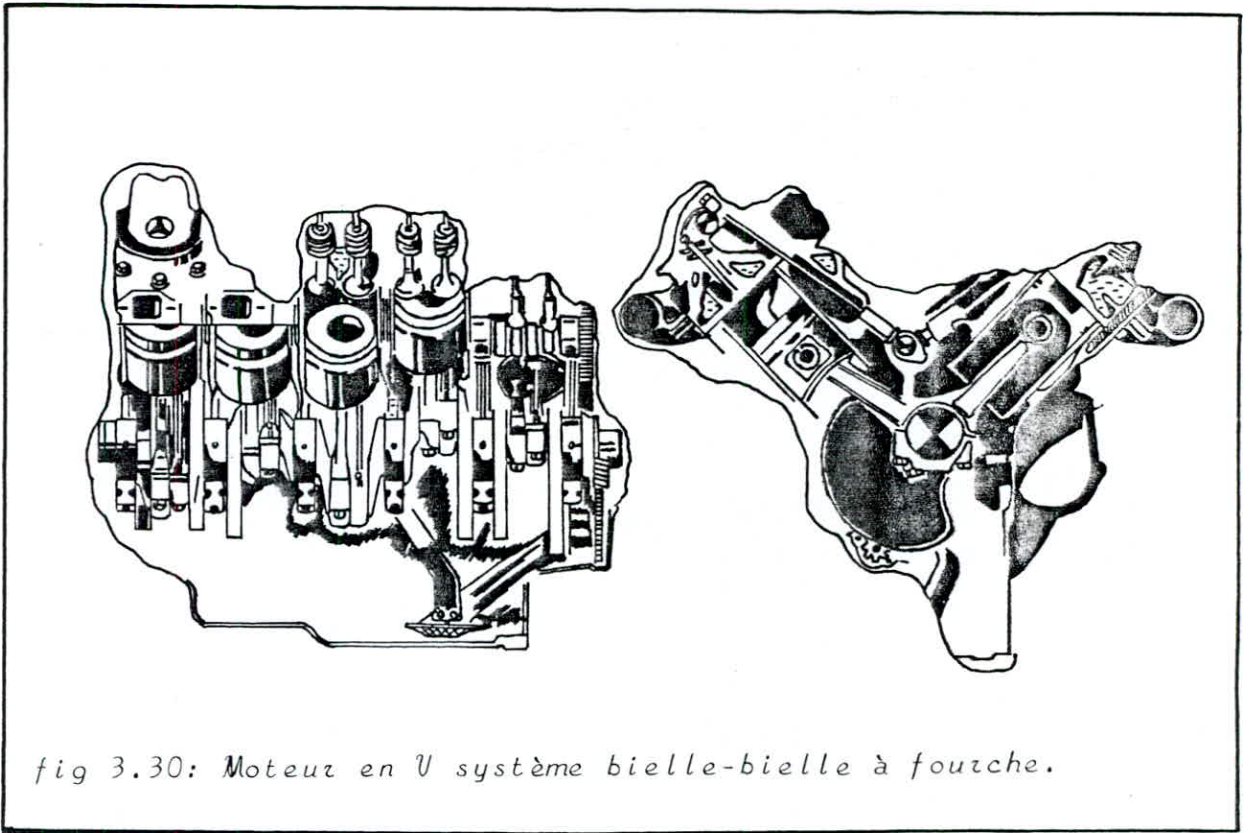


fig 3.30: Moteur en V système bielle-bielle à fourche.

B.2 EQUILIBRAGE DES MASSES ALTERNATIVES:

2.0 Composition des efforts de pilon d'ordre p :

L'effort de pilon d'ordre p du moteur en ligne vaut:

Le moteur de la rangée I a donc 1 effort de pilon d'ordre p de la forme:

$$k_p \cos p \left(\theta - \frac{\gamma}{2} \right) \vec{y}_I = k_p \cos p \left(\theta - \frac{\gamma}{2} \right) \begin{pmatrix} -\sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

De même celui de la rangée II est de la forme:

$$k_p \cos p \left(\theta + \frac{\gamma}{2} \right) \vec{y}_{II} = k_p \cos p \left(\theta + \frac{\gamma}{2} \right) \begin{pmatrix} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Ces deux efforts se composent pour donner la résultante

tante d'ordre p pour le moteur en V , système bielle-bielle à fourche.

$$\begin{pmatrix} k_p \sin \frac{\gamma}{2} \left[-\cos p \left(\theta - \frac{\gamma}{2} \right) + \cos p \left(\theta + \frac{\gamma}{2} \right) \right] \\ k_p \cos \frac{\gamma}{2} \left[\cos p \left(\theta - \frac{\gamma}{2} \right) + \cos p \left(\theta + \frac{\gamma}{2} \right) \right] \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{x}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -2k_p \sin \frac{\gamma}{2} \sin p \frac{\gamma}{2} \sin p \theta \\ 2k_p \cos \frac{\gamma}{2} \cos p \frac{\gamma}{2} \cos p \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{x}_0 \end{matrix}$$

c'est à dire en:

- Un effort de tamis d'ordre p , de valeur:
 $A_p \sin p \theta$ où: $A_p = -2k_p \sin \frac{\gamma}{2} \sin p \frac{\gamma}{2} (= cte)$
- Un effort de pilon d'ordre p , de valeur:
 $B_p \cos p \theta$ où: $B_p = 2k_p \cos \frac{\gamma}{2} \cos p \frac{\gamma}{2} (= cte)$

2.1 Equilibrage de la résultante des efforts de pilon d'ordre p :

Dans le cas général, les efforts de tamis et de pilon d'ordre p - non nuls - se composent en une résultante tournant à la vitesse $p\dot{\theta}$, d'intensité variable décrivant une ellipse centrée en O , de demi-axes A_p sur \vec{x}_0 et B_p sur \vec{y}_0 .

Cette résultante est parfaitement équilibrable en théorie.

Plusieurs méthodes de décomposition de l'ellipse en éléments simples conduisant au même équilibrage physique peuvent avoir lieu, parmi lesquelles:

2.1.1 Méthode 1: Ellipse = Cercle + Droite:

La résultante portée par l'ellipse $\begin{pmatrix} A_p \sin p \theta \\ B_p \cos p \theta \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix}$

est partiellement équilibrée par un effort tournant à la même vitesse, d'intensité égale à la valeur d'un demi-axe.

Si on oppose par exemple à l'ellipse $\begin{pmatrix} A_p \sin p \theta \\ B_p \cos p \theta \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix}$

le cercle de rayon égal au demi-axe sur \vec{x}_0 : $\begin{pmatrix} -A_p \sin p \theta \\ -A_p \cos p \theta \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix}$

la résultante serait partiellement équilibrée et reste non équilibré un effort alternatif sinusoidal porté par \vec{y}_0 , de valeur: $(B_p - A_p) \cos p \theta$ que l'on équilibre selon le principe de l'équivalence entre une masse alternative et 2 masses rotatives.

L'équilibrage théorique parfait de la résultante des efforts de pilon d'ordre p nécessite de faire tourner:

- Une masse calée en opposition, à la même vitesse $p\dot{\theta}$ que

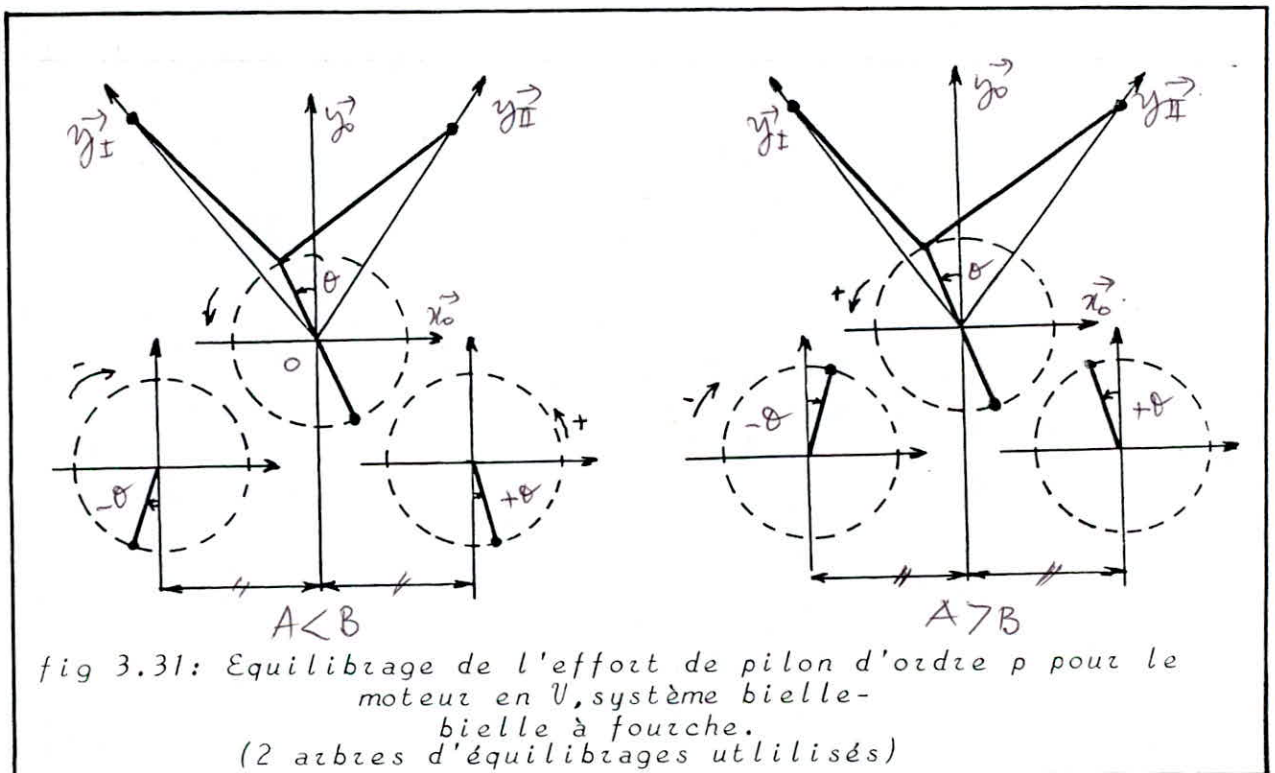
la résultante, dans le même sens, de valeur A_p .

Pour l'ordre 1, cette masse peut être portée par le vilebrequin.

- Et 2 masses calées en opposition ou en phase selon que $A_p < B_p$ ou $A_p > B_p$, à la vitesse $+p\dot{\theta}$ et $-p\dot{\theta}$ restant symétriques par rapport à \vec{y}_0 , de valeur $|B_p - A_p|$.

Pour l'ordre 1, on peut reporter la masse de l'arbre primaire tournant dans le même sens que le moteur, sur le vilebrequin cependant, cette disposition introduit un couple de basculement d'ordre 1.

Les contrepoids doivent être placés symétriquement par rapport au plan médian afin de ne pas créer de couples.



2.1.2 Méthode 2: Ellipse = Cercle + Cercle:

À la résultante portée par l'ellipse $\begin{pmatrix} A_p \sin p\theta \\ B_p \cos p\theta \end{pmatrix}$ \vec{x}_0
 \vec{y}_0

on oppose un cercle de rayon égal à la demi-somme des demi-axes,

soit:
$$\begin{pmatrix} -\frac{A_p + B_p}{2} \sin p\theta \\ -\frac{A_p + B_p}{2} \cos p\theta \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix}$$

La résultante est partiellement équilibrée, il reste non équilibré un effort tournant d'intensité constante, de valeur:

$$\begin{pmatrix} \frac{A_p - B_p}{2} \sin p\theta \\ -\frac{A_p - B_p}{2} \cos p\theta \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix}$$

porté par un cercle de rayon $\frac{A_p - B_p}{2}$.

Ainsi, l'équilibrage théorique parfait de la résultante des efforts de pilon d'ordre p nécessite qu'on fasse tourner:

- Une masse calée en opposition à la même vitesse $p\dot{\theta}$ que la résultante, dans le même sens, de valeur: $\frac{A_p + B_p}{2}$

Pour l'ordre 1, cette masse peut être portée par le vilebrequin.

- Et une masse calée en opposition ou en phase selon que $A_p < B_p$ ou $A_p > B_p$, à la même vitesse et en sens inverse, de valeur:

$$\frac{|A_p - B_p|}{2}$$

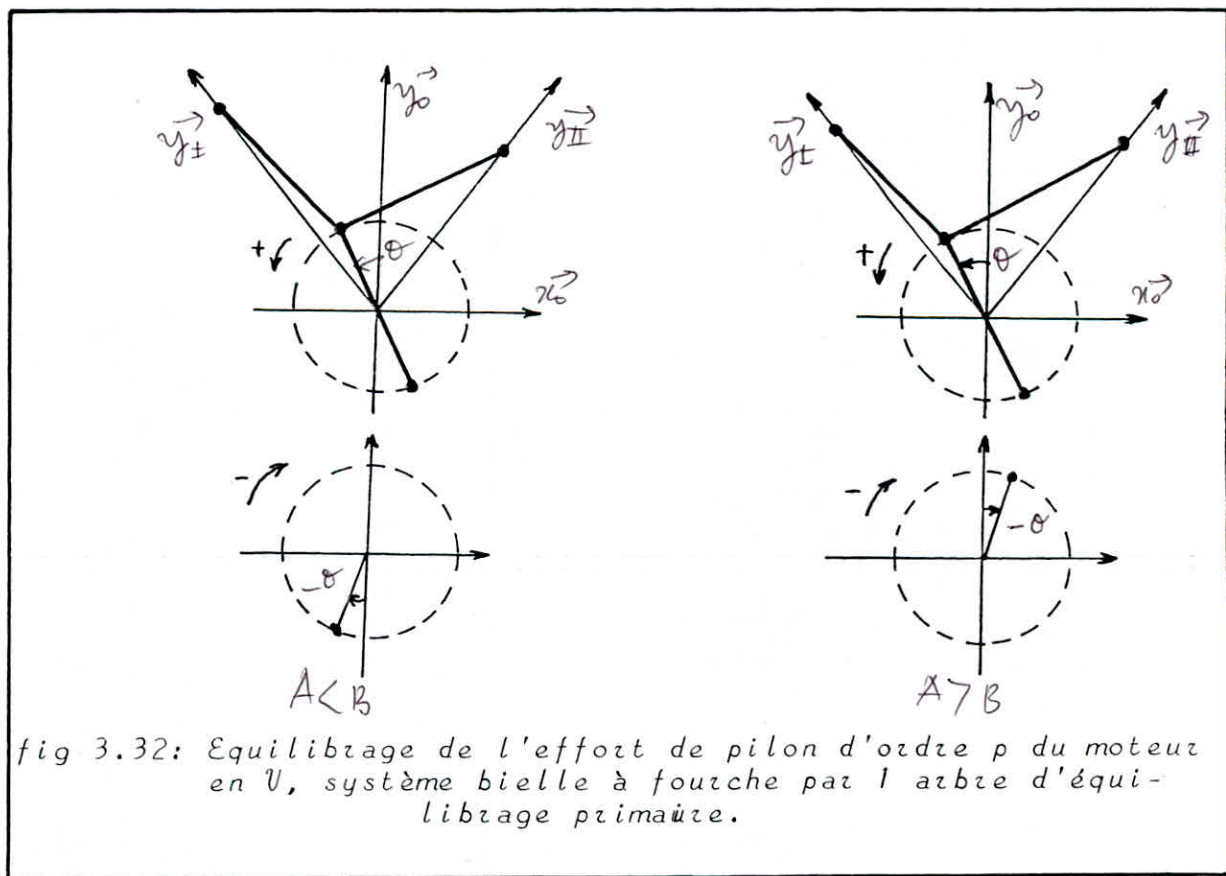


fig 3.32: Equilibrage de l'effort de pilon d'ordre p du moteur en V, système bielle à fourche par l'arbre d'équilibrage primaire.

2.1.3 Cas particuliers:

Plusieurs cas particuliers peuvent se présenter, parmi lesquels:

a/ L'ellipse est un cercle:

Ce cas correspond à $|A_p| = |B_p|$ qui a lieu pour

$$\sin \frac{\gamma}{2} \sin p \frac{\gamma}{2} = \pm \cos \frac{\gamma}{2} \cos p \frac{\gamma}{2}$$

$$\text{soit: } \operatorname{tg} p \frac{\gamma}{2} = \pm \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \pm \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right)$$

$$\text{en d'autres termes: } p \frac{\gamma}{2} = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) + k\pi$$

$$\text{soit alors: } k = \frac{\gamma}{2\pi} (p \pm 1) \mp \frac{1}{2}$$

Dans ce cas, les efforts de tamis et de pilon d'ordre p ne sont pas nuls, ils se composent en une résultante tournant à la vitesse $p\dot{\theta}$, d'intensité constante décrivant un cercle de centre O , de rayon A_p (ou B_p).

Cette résultante peut être parfaitement équilibrée en faisant tourner une masse à la même vitesse, dans le même sens calée en opposition, engendrant des efforts de valeur A_p .

b/ L'ellipse est une droite:

Ce cas correspond à $A_p = 0$ ou $B_p = 0$

soient:

$$\text{1er cas: } A_p = 0 \Rightarrow \sin \frac{\gamma}{2} \sin p \frac{\gamma}{2} = 0$$

entraînant:

$$- \text{ Soit } \frac{\gamma}{2} = k\pi \Rightarrow \gamma = 2k\pi \text{ (le moteur est en ligne),}$$

$$- \text{ Soit } p \frac{\gamma}{2} = k\pi \Rightarrow k = \frac{p\gamma}{2\pi} \text{ (entier).}$$

Dans ce cas, l'ellipse est une droite selon y , l'effort de tamis d'ordre p étant nul, la résultante est égale à l'effort de pilon d'ordre p de valeur: $B_p \cos p\theta$ parfaitement équilibrable selon la théorie de l'équivalence entre une masse alternative et 2 masses rotatives.

2ème cas: $\theta_p = 0 \Rightarrow \cos \frac{\gamma}{2} \cos p \frac{\gamma}{2} = 0$

entraînant:

- Soit $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \gamma = \pi + 2k\pi$ (moteur plat),

- Soit $p \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow k = \frac{1}{2} \left(\frac{p\gamma}{\pi} - 1 \right)$ (entier)

Dans ce cas, l'ellipse est une droite selon \vec{x}_0 , l'effort de pilon d'ordre p étant nul, la résultante est égale à l'effort de tamis d'ordre p , de valeur: $A_p \sin p \theta$ parfaitement équilibrable selon la théorie de l'équivalence entre une masse altérnative et 2 masses rotatives.

2.2 Composition des couples de galop d'ordre p :

Les moteurs en ligne ayant un couple de galop d'ordre p de la forme: $\kappa'_p \cos p(\theta + \beta) \vec{x}_0$, le moteur de la rangée a donc un couple de galop d'ordre p de la forme:

$$\kappa'_p \cos p\left(\theta + \beta - \frac{\gamma}{2}\right) \vec{x}_I = \begin{pmatrix} \kappa'_p \cos p\left(\theta + \beta - \frac{\gamma}{2}\right) \cos \frac{\gamma}{2} \\ \kappa'_p \cos p\left(\theta + \beta - \frac{\gamma}{2}\right) \sin \frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

et, celui de la rangée, est de même forme:

$$\kappa'_p \cos p\left(\theta + \beta + \frac{\gamma}{2}\right) \vec{x}_{II} = \begin{pmatrix} \kappa'_p \cos p\left(\theta + \beta + \frac{\gamma}{2}\right) \cos \frac{\gamma}{2} \\ -\kappa'_p \cos p\left(\theta + \beta + \frac{\gamma}{2}\right) \sin \frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Ces deux couples se composent pour donner le couple résultant d'ordre p pour le moteur en "V", système bielle-bielle à fourche:

soit:

$$\begin{pmatrix} \kappa'_p \cos \frac{\gamma}{2} \left[\cos p\left(\theta + \beta - \frac{\gamma}{2}\right) + \cos p\left(\theta + \beta + \frac{\gamma}{2}\right) \right] \\ \kappa'_p \sin \frac{\gamma}{2} \left[\cos p\left(\theta + \beta - \frac{\gamma}{2}\right) - \cos p\left(\theta + \beta + \frac{\gamma}{2}\right) \right] \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2\kappa'_p \cos \frac{\gamma}{2} \cos p \frac{\gamma}{2} \cos p(\theta + \beta) \\ 2\kappa'_p \sin \frac{\gamma}{2} \sin p \frac{\gamma}{2} \sin p(\theta + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

c'est à dire:

- Un couple de galop d'ordre p de valeur:

$$C_p \cos p(\theta + \beta) \text{ avec } C_p = 2\kappa'_p \cos \frac{\gamma}{2} \cos p \frac{\gamma}{2}$$

- Un couple de lacet, de valeur:

$$D_p \sin p(\theta + \beta) \text{ avec } D_p = 2\kappa'_p \sin \frac{\gamma}{2} \sin p \frac{\gamma}{2}$$

2.3 Equilibrage du couple résultant d'ordre p :

Dans le cas général, les couples de galop et de lacet d'ordre p ne sont pas nuls; ils se composent en une résultante tournant à la vitesse $p\Omega$, d'intensité variable, décrivant une ellipse centrée en O , de demi-axes C_p sur \vec{x}_0 et D_p sur \vec{y}_0 .

Cette résultante est parfaitement équilibrable en théorie.

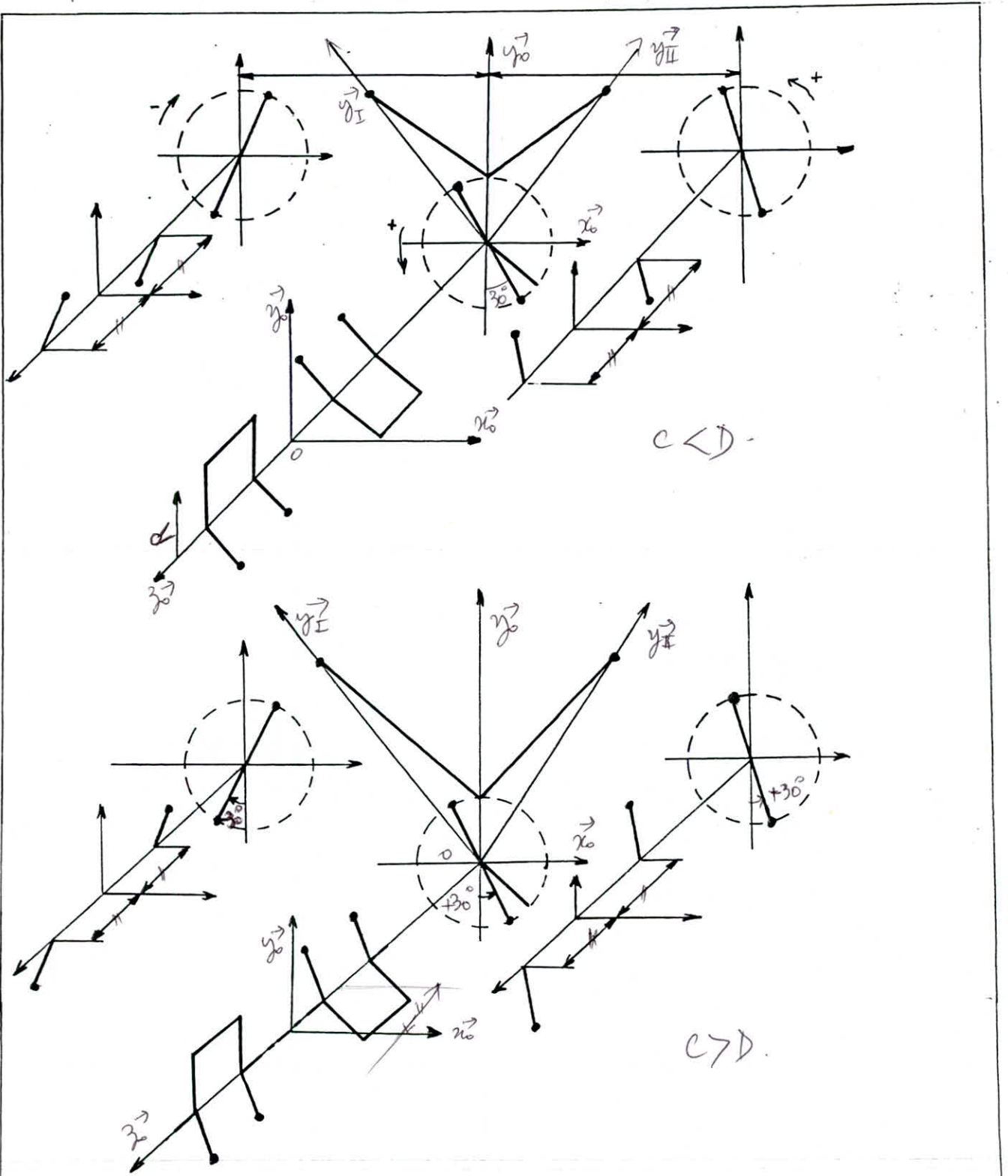


fig 3.33: Equilibrage du couple résultant d'ordre p par 2 arbres d'équilibrage.

Plusieurs méthodes de décomposition de l'ellipse en éléments simples conduisant au même équilibrage physique peuvent avoir lieu on cite:

2.3.1 Méthode 1: Ellipse = Cercle + Droite:

Le couple résultant porté par l'ellipse $\begin{pmatrix} C_p \sin p(\theta + \beta) \\ D_p \cos p(\theta + \beta) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix}$

est partiellement équilibré en opposant à cette dernière un cercle de rayon égal à l'un des demi-axes de l'ellipse.

Si on choisit par exemple le demi-axe sur \vec{y}_0 , le cercle sera alors:

$$\begin{pmatrix} -D_p \cos p(\theta + \beta) \\ -D_p \sin p(\theta + \beta) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix}$$

Il reste non équilibré un couple de galop d'ordre p de valeur: $(C_p - D_p) \cos p(\theta + \beta)$ que l'on équilibre selon le principe de l'équivalence entre un couple alternatif et 4 masses rotatives.

Ainsi, l'équilibrage théorique parfait des couples d'ordre p nécessite de faire tourner:

- 2 masses calées en opposition, décalées de β , symétriques par rapport au point O , à la même vitesse $p\theta$ que le couple résultant, dans le même sens, engendrant des couples de valeur D_p .

Pour l'ordre 1, les masses peuvent être portées par le vilebrequin.

- Et deux arbres d'équilibrage calés en opposition ou en phase selon que C_p, D_p ou $C_p, -D_p$, décalés de β , portant chacun 2 masses symétriques par rapport au point central, l'un tournant à $+p\theta$, l'autre à $-p\theta$, engendrant un couple de galop de valeur: $(C_p - D_p) \cos p(\theta + \beta)$

Pour l'ordre 1, les masses de l'arbre primaire tournant à la même vitesse que le moteur et dans son sens, peuvent être reportées sur le vilebrequin - sans créer de couple de basculement -.

2.3.2 Méthode 2: Ellipse = Cercle + Cercle:

Le couple résultant étant porté par une ellipse, on lui oppose un cercle de rayon égale à la moyenne des 2 demi-axes,

soit: $\begin{pmatrix} -\frac{C_p + D_p}{2} \sin p(\theta + \beta) \\ -\frac{C_p + D_p}{2} \cos p(\theta + \beta) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix}$

Le couple résultant est partiellement équilibré, il reste un couple tournant d'intensité constante, de valeur:

$$\begin{pmatrix} \frac{C_p - D_p}{2} \cos p(\theta + \beta) \\ -\frac{C_p - D_p}{2} \sin p(\theta + \beta) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \end{matrix}$$

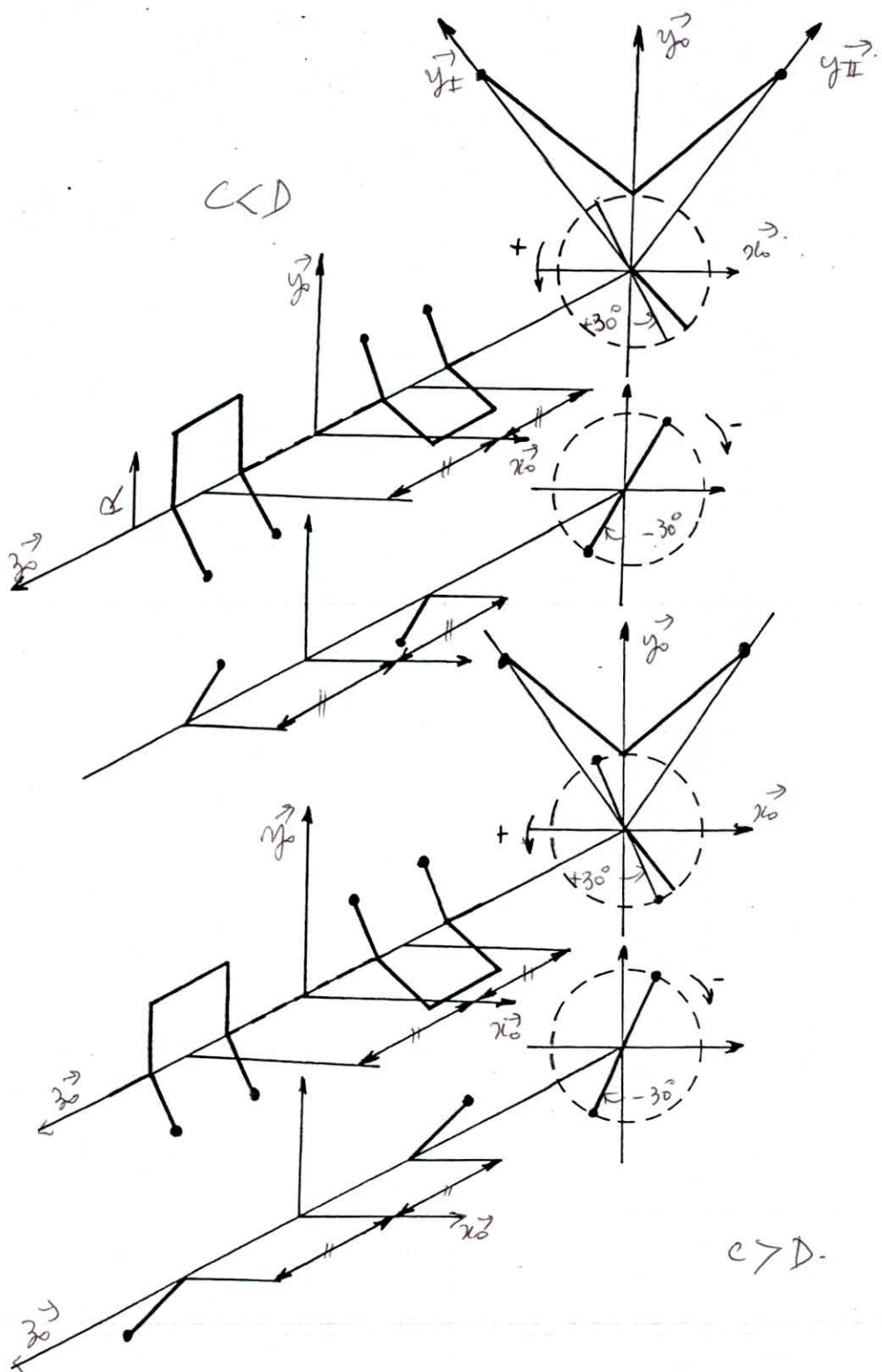


fig 3.34: Equilibrage du couple de galop résultant d'ordre P par un arbre d'équilibrage primaire.

porté par un cercle de rayon $\frac{C_p - D_p}{2}$, tournant en sens inverse, que l'on équilibre par 2 masses symétriques par rapport au point O, décalées de β , calées en opposition ou en phase selon les valeurs de C_p et D_p .

Ainsi, l'équilibrage théorique parfait des couples d'ordre p , nécessite de faire tourner:

- Deux masses calées en opposition, décalées de β , symétriques par rapport à O, à la même vitesse $p\Theta$ que le couple résultant, dans le même sens, engendrant des couples de valeur $C_p - D_p$.

Pour l'ordre 1, ces masses peuvent être portées par le vilebrequin.

- Et un arbre d'équilibrage calé en opposition ou en phase décalé de β , portant 2 masses symétriques par rapport au point central, tournant en sens inverse.

2.3.3 Cas particuliers:

Plusieurs cas particuliers peuvent se présenter, parmi lesquels, on cite:

a/ L'ellipse est un cercle:

Ceci a lieu pour $|C_p| = |D_p|$ soit $k = \frac{\gamma}{2\pi} (p \pm 1) \pm \frac{1}{2}$ (entier).

Dans ce cas, le couple de galop et de lacet d'ordre p ne sont pas nuls, ils se composent pour donner un couple résultant tournant à la vitesse $p\Theta$, d'intensité constante, décrivant un cercle de centre O et de rayon .

b/ L'ellipse est une droite:

Ceci a lieu pour $C_p = 0$ ou $D_p = 0$.

1er cas: $C_p = 0$ soit $k = \frac{1}{2} \left(p \frac{\gamma}{2} - 1 \right)$ (entier),

Dans ce cas l'ellipse est une droite portée par \vec{y}_0 .

Le couple de galop d'ordre p étant nul, le couple résultant est égal au couple de lacet d'ordre p , de valeur: $D_p \sin p(\Theta + \beta)$, que l'on équilibre selon le principe de l'équivalence entre un couple alternatif et 4 masses rotatives.

2ème cas: $D_p = 0$ soit $k = p \frac{\gamma}{2\pi}$ (entier).

Dans ce cas, l'ellipse est une droite portée par \vec{x}_0 .

Le couple de lacet d'ordre p est nul, le couple résultant est égal au couple de galop d'ordre p , de valeur: $C_p \sin p(\Theta + \beta)$, que l'on équilibre selon le même principe.

B.3 EQUILIBRAGE DES MOTEURS MULTICYLINDRE EN "V", SYSTEME BIELLE-BIELLE A FOURCHE:

3.0 Moteur 6 cylindres en "V", 4 temps:

3.0.1 Equilibrage des masses rotatives:

On utilise le vilebrequin du moteur 3 cylindres en ligne dont les couples de galop et de lacet valent:

$$2\sqrt{3} a m_{rot} R \dot{\theta}^2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6} - \frac{\gamma}{2}\right) \vec{x}_I = 2\sqrt{3} a m_{rot} R \dot{\theta}^2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6} - \frac{\gamma}{2}\right) \begin{pmatrix} -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Le couple de galop du moteur de la rangée I vaut alors:

$$2\sqrt{3} a m_{rot} R \dot{\theta}^2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6} - \frac{\gamma}{2}\right) \vec{x}_I = 2\sqrt{3} a m_{rot} R \dot{\theta}^2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6} - \frac{\gamma}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Celui du moteur de la rangée II vaut:

$$2\sqrt{3} a m_{rot} R \dot{\theta}^2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6} + \frac{\gamma}{2}\right) \vec{x}_{II} = 2\sqrt{3} a m_{rot} R \dot{\theta}^2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6} + \frac{\gamma}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

La composition de ces 2 couples donne le couple intermédiaire:

$$2\sqrt{3} a m_{rot} R \dot{\theta}^2 \left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6} - \frac{\gamma}{2}\right) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6} + \frac{\gamma}{2}\right) \right] \begin{pmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$= 4\sqrt{3} a m_{rot} R \dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \\ \sin^2\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Le couple de la dent du moteur de la rangée I vaut:

$$2\sqrt{3} a m_{rot} R \dot{\theta}^2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6} - \frac{\gamma}{2}\right) \vec{y}_I = 2\sqrt{3} a m_{rot} R \dot{\theta}^2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6} - \frac{\gamma}{2}\right) \begin{pmatrix} -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Celui du moteur de la rangée II vaut:

$$2\sqrt{3} a m_{rot} R \dot{\theta}^2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6} + \frac{\gamma}{2}\right) \vec{y}_{II} = 2\sqrt{3} a m_{rot} R \dot{\theta}^2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6} + \frac{\gamma}{2}\right) \begin{pmatrix} -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

La composition de ces 2 couples donne l'autre couple intermédiaire:

$$2\sqrt{3} a m_{rot} R \dot{\theta}^2 \left[\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6} - \frac{\gamma}{2}\right) + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6} + \frac{\gamma}{2}\right) \right] \begin{pmatrix} -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$= 4\sqrt{3} a m_{rot} R \dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} \sin^2\frac{\gamma}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \\ \cos^2\frac{\gamma}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Les couples intermédiaires se composent pour donner les couples résultants pour le moteur en "V", système bielle-bielle à fourche:

$$4\sqrt{3} a m_{\text{rot}} R \dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \\ \cos(\theta + \frac{\pi}{6}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = 4\sqrt{3} a m_{\text{rot}} R \dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{6}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

soient:

- Un couple de galop d'ordre 1, de valeur: $4\sqrt{3} a m_{\text{rot}} R \dot{\theta}^2 \cos(\theta + \frac{\pi}{6})$
- Un couple de lacet d'ordre 1, de valeur: $4\sqrt{3} a m_{\text{rot}} R \dot{\theta}^2 \sin(\theta + \frac{\pi}{6})$

dont l'équilibrage est similaire à celui du moteur 3 cylindres en ligne.

3.0.2 Equilibrage des masses alternatives:

a/ Composition des efforts:

Pour le moteur 3 cylindres en ligne, 4 temps, seul subsiste l'effort de pilon d'ordre 6 dont la valeur est:

$$\left(\frac{27}{128 \Delta^5} + \dots \right) m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos 6\theta$$

L'effort de pilon d'ordre 6 du moteur de la rangée I vaut:

$$\left(\frac{27}{128 \Delta^5} + \dots \right) m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos\left(6\theta - \frac{\gamma}{2}\right) \vec{y}_I = \left(\frac{27}{128 \Delta^5} + \dots \right) m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos\left(6\theta - \frac{\gamma}{2}\right) \begin{pmatrix} -\sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

Celui du moteur de la rangée II vaut:

$$\left(\frac{27}{128 \Delta^5} + \dots \right) m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos\left(6\theta + \frac{\gamma}{2}\right) \vec{y}_{II} = \left(\frac{27}{128 \Delta^5} + \dots \right) m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos\left(6\theta + \frac{\gamma}{2}\right) \begin{pmatrix} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

La composition de ces 2 efforts donne l'effort résultant du moteur en "V":

$$\left(\frac{27}{128 \Delta^5} + \dots \right) m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \left[\cos\left(6\theta - \frac{\gamma}{2}\right) + \cos\left(6\theta + \frac{\gamma}{2}\right) \right] \begin{pmatrix} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \left(\frac{27}{128 \Delta^5} + \dots \right) m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} -\sin \frac{\gamma}{2} \sin 3\gamma \sin 6\theta \\ \cos \frac{\gamma}{2} \cos 3\gamma \cos 6\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

soient:

- Un effort de tamis d'ordre 6, de valeur:

$$- 2 \left(\frac{27}{128 \Delta^5} + \dots \right) m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \sin \frac{\gamma}{2} \sin 3\gamma \sin 6\theta$$

- Un effort de pilon d'ordre 6, de valeur:

$$2 \left(\frac{27}{128 \Delta^5} + \dots \right) m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos 3\gamma \cos 6\theta$$

On distingue 3 cas particuliers:

- L'angle d'ouverture du "V" est de $\frac{4\pi}{6}$ soit 120°:

$$k = \frac{\gamma}{2\pi} = 2 \text{ est possible,}$$

les efforts de tamis et de pilon valent respectivement:

$$0 \text{ et } \left(\frac{27}{128} + \dots \right) m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos 6\theta$$

- Le "V" est ouvert à 60°;

$$k = \frac{\rho \delta}{2\pi} = 1 \text{ est possible,}$$

les efforts de tamis et de pilon valent: 0 et $-\left(\frac{27\sqrt{3}}{128} + \dots \right) m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos 6\theta$

- Le "V" est ouvert à 90°:

$$k = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho \delta}{\pi} - 1 \right) = 1 \text{ est possible,}$$

les efforts de tamis et pilon valent: $\left(\frac{27\sqrt{2}}{128} + \dots \right) m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \sin 6\theta$ et 0

b/ Composition des couples :

b1/ Ordre 1:

Le couple de galop d'ordre 1 du moteur 3 cylindres en ligne, 4 temps, vaut: $2\sqrt{3} a m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

Les couples de galop et de lacet du moteur en "V" valent:

$$4\sqrt{3} a m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{et } 4\sqrt{3} a m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

De même on distingue 3 cas particuliers:

- L'angle d'ouverture du "V" vaut 120°:

Le couple moteur instantané est parfaitement régulier.

Les couples de galop et de lacet d'ordre 1 valent:

$$\sqrt{3} a m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{et } 3\sqrt{3} a m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

dont la résultante est portée par une ellipse.

L'équilibrage théorique parfait nécessite ainsi 4 masses rotatives portées par le vilebrequin, de valeur $\frac{1}{4} \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{2} m_{\text{alt}}$ soit $\frac{\sqrt{3}}{4} m_{\text{alt}}$ et un arbre d'équilibrage primaire tournant en sens inverse portant des masses de valeur $\frac{\sqrt{3}}{4} m_{\text{alt}}$, décalées de $\frac{\pi}{6}$, placées à la distance $2a$ du point central de l'arbre, symétriques par rapport à celui-ci.

L'arbre d'équilibrage doit être calé en phase (car $C_p(D_p)$).

- L'angle d'ouverture du "V" est de 60°:

Les couples de galop et de lacet d'ordre 1 valent:

$$3\sqrt{3} a m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{et } \sqrt{3} a m_{\text{alt}} R \dot{\theta}^2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

que l'on équilibre partiellement selon la méthode Ellipse = Cercle + Droite, les masses attachées au vilebrequin étant les mêmes que précédemment, en valeur et position.

Il reste non équilibré un couple de galop d'ordre 1, valant $\sqrt{3} a m_{alt} R \dot{\theta}^2 \cos(\theta + \frac{\pi}{6})$ et un couple de lacet de même ordre de valeur $-\sqrt{3} a m_{alt} R \dot{\theta}^2 \sin(\theta + \frac{\pi}{6})$ que l'on équilibre par les arbres primaires calés en opposition ($C_p > D_p$).

- L'angle d'ouverture du "V" est de 90° :

$$k = \frac{\gamma}{2\pi} (p \pm 1) \mp \frac{1}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \quad \text{est possible.}$$

Les couples de lacet d'ordre 1 valent:

$$2\sqrt{3} a m_{alt} R \dot{\theta}^2 \cos(\theta + \frac{\pi}{6})$$

$$\text{et } 2\sqrt{3} a m_{alt} R \dot{\theta}^2 \sin(\theta + \frac{\pi}{6})$$

dont la résultante est portée par un cercle.

L'équilibrage théorique parfait nécessite 4 masses à placer sur le vilebrequin comme précédemment.

b2/ Ordre 2:

Pour les moteurs 3 cylindres, 4 temps, le couple de galop d'ordre 2 vaut:

$$2\sqrt{3} a \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4 \cdot 1^3} + \dots \right) m_{alt} R \dot{\theta}^2 \cos(2\theta - \frac{\pi}{6})$$

Les couples de galop et de lacet d'ordre 2 du moteur en "V" valent ainsi:

$$4\sqrt{3} a \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4 \cdot 1^3} + \dots \right) m_{alt} R \dot{\theta}^2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \gamma \cos(2\theta - \frac{\pi}{6})$$

et:

$$4\sqrt{3} a \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4 \cdot 1^3} + \dots \right) m_{alt} R \dot{\theta}^2 \sin \frac{\gamma}{2} \sin \gamma \sin(2\theta - \frac{\pi}{6})$$

- Pour un "V" ouvert à 120° :

$$\text{Les couples valent: } -\sqrt{3} a \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4 \cdot 1^3} + \dots \right) m_{alt} R \dot{\theta}^2 \cos(2\theta - \frac{\pi}{6})$$

$$\text{et } 3\sqrt{3} a \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4 \cdot 1^3} + \dots \right) m_{alt} R \dot{\theta}^2 \sin(2\theta - \frac{\pi}{6})$$

- Si le "V" est ouvert à 60° :

$$k = \frac{\gamma}{2\pi} (p \pm 1) \mp \frac{1}{2} = 0, \frac{2}{3} \quad \text{est possible,}$$

les couples valent/:

$$3 a \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4 \cdot 1^3} + \dots \right) m_{alt} R \dot{\theta}^2 \cos(2\theta - \frac{\pi}{6})$$

$$\text{et: } 3 a \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4 \cdot 1^3} + \dots \right) m_{alt} R \dot{\theta}^2 \sin(2\theta - \frac{\pi}{6})$$

- Si le "V" est ouvert à 90° :

$$k = \frac{1}{2} \left(\frac{p\gamma}{2} - 1 \right) = 0 \quad \text{est possible,}$$

les couples valent:

$$0$$

$$\text{et } 2\sqrt{6} a \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4 \cdot 1^3} + \dots \right) m_{alt} R \dot{\theta}^2 \sin(2\theta - \frac{\pi}{6})$$

Conclusion: Bien qu'un angle d'ouverture de 120° donne le plus régulier couple moteur instantané, on préfère ouvrir le moteur de 90° car les couples d'ordre 1 s'équilibrent facilement sans arbre primaire, et le couple d'ordre 2 est nul.

3.1 Moteur 8 cylindres en "V", 4 temps:

3.1.1 Equilibrage des masses rotatives:

Le vilebrequin du V8 est celui du moteur 4 cylindres en ligne, 4 temps.

Ce vilebrequin dit "à plat", n'est soumis à aucun effort ni à aucun couple, cependant des masses additionnelles peuvent améliorer sa rigidité.

3.1.2 Equilibrage des masses alternatives:

a/ Composition des efforts:

Le moteur 4 cylindres en ligne, 4 temps, est soumis aux efforts de pilon d'ordres 2, 4, 6..., d'où les efforts de tamis et de pilon du moteur en "V", système bielle-bielle à fourche.

a1/ Ordre 2:

$$-3 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4 \cdot 1^3} + \dots \right) m_{alt} R \theta^2 \sin \frac{\gamma}{2} \sin \gamma \sin 2\theta$$

et

$$8 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4 \cdot 1^3} + \dots \right) m_{alt} R \theta^2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \gamma \cos 2\theta$$

a2/ Ordre 4:

$$2 \left(\frac{1}{1^3} + \frac{3}{4 \cdot 1^5} + \dots \right) m_{alt} R \theta^2 \sin \frac{\gamma}{2} \sin 2\gamma \sin 4\theta$$

et

$$-2 \left(\frac{1}{1^3} + \frac{3}{4 \cdot 1^5} + \dots \right) m_{alt} R \theta^2 \sin \frac{\gamma}{2} \sin 2\gamma \cos 4\theta$$

a3/ Ordre 6:

$$- \left(\frac{9}{16 \cdot 1^5} + \dots \right) m_{alt} R \theta^2 \sin \frac{\gamma}{2} \sin 3\gamma \sin 6\theta$$

et

$$\left(\frac{9}{16 \cdot 1^5} + \dots \right) m_{alt} R \theta^2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos 3\gamma \cos 6\theta$$

b/ Composition des couples:

Le plan médian étant plan de symétrie, tous les couples sont nuls.

L'équilibrage des efforts de pilon des différents ordres se fait selon le principe de l'équivalence entre une masse alternative et 2 masses rotatives.

3.2 Moteur 12 cylindres en "V":

3.2.1 Equilibrage des masses rotatives:

Le vilebrequin du V12 est celui du moteur 6 cylindres en ligne, qui n'est soumis à aucun effort ni à aucun couple.

Il en sera de même pour le V12.

3.2.2 Equilibrage des masses alternatives:

Pour le moteur 6 cylindres en ligne, 4 temps, le plan médian étant plan de symétrie, tous les couples sont nuls, et seul subsiste l'effort de pilon d'ordre 6, d'où les efforts de tamis et de pilon d'ordre 6 du moteur en "V":

$$-\left(\frac{27}{32\lambda^5} + \dots\right) m_{alt} R\theta^2 \sin \frac{\gamma}{2} \sin 3\gamma \sin 6\theta$$

et

$$\left(\frac{27}{32\lambda^5} + \dots\right) m_{alt} R\theta^2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos 3\gamma \cos 6\theta$$

dont l'équilibrage parfait peut se réaliser par 4 masses rotatives solidaires au vilebrequin, disposées symétriquement par rapport au point O.

3.3 Moteur 16 cylindres en "V", 4 temps:

3.3.1 Equilibrage des masses rotatives:

On utilise le vilebrequin du moteur 8 cylindres en ligne, 4 temps, lequel n'est soumis à aucun effort ni à aucun couple.

Il en sera de même pour le V16.

3.3.2 Equilibrage des masses alternatives:

Pour le moteur 8 cylindres en ligne, 4 temps, les couples sont tous nuls, et seul subsiste l'effort de tamis et de pilon d'ordre 4, d'où les efforts de tamis et de pilon de même ordre, du moteur en "V":

$$2\left(\frac{2}{\lambda^3} + \frac{3}{2\lambda^5} + \dots\right) m_{alt} R\theta^2 \sin \frac{\gamma}{2} \sin 2\gamma \sin 4\theta$$

et

$$-2\left(\frac{2}{\lambda^3} + \frac{3}{2\lambda^5} + \dots\right) m_{alt} R\theta^2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos 2\gamma \cos 4\theta$$

dont l'équilibrage est similaire à celui du V12.

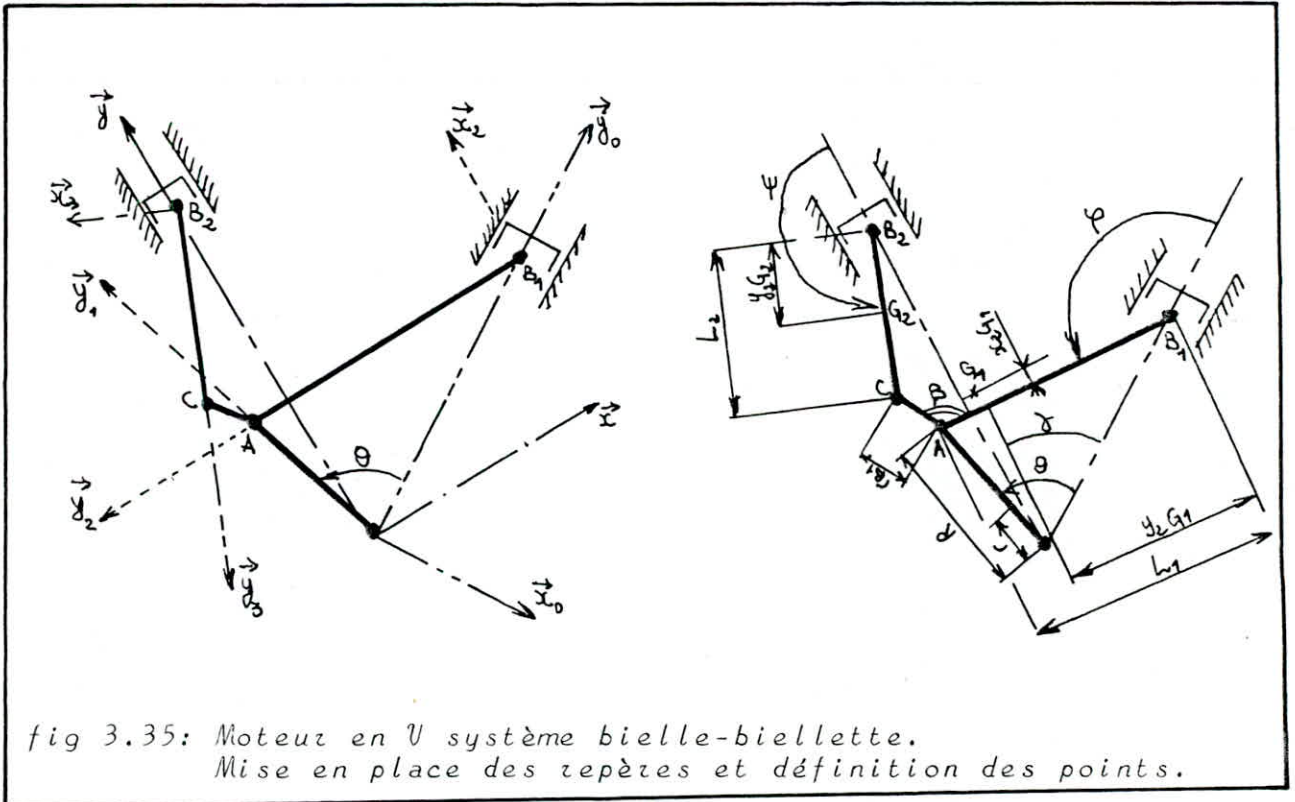
C. ETUDE DE L'EQUILIBRAGE DE MOTEUR en V, SYST BIELLE-BIELLETTE

C.O GENERALITES:

L'équilibrage du moteur en "V", système bielle-biellette, requiert une importance éprouvée vu l'utilisation de cette disposition dans des moteurs particuliers.

On étudiera dans ce qui suit l'équilibrage de tels moteurs, une application particulière étant réalisée au sein du moteur F8U913.

O.O Mise en place des repères- Représentation schématique:



O.1 Etude des forces dues aux inerties:

O.1.1 Inertie centrifuge:

Cette inertie produite par la masse de la manivelle, est constante en module et tourne autour du point central à la vitesse ω . Elle est parfaitement équilibrable.

O.1.2 Inertie altérnative:

Elle est produite par la masse des pistons assemblés, affectée dans les 2 rangées de cylindres.

elle donne à:

- Un couple moteur instantané dont la valeur moyenne est nulle, on ne l'équilibre donc pas,
- Un couple de basculement partiellement équilibré,
- Une force d'inertie verticale, théoriquement équilibrable.

O.1.3 Inertie de la bielle à oeil et de sa biellette:

Le mouvement de la bielle à oeil et de sa biellette est oscillatoire, on décompose fictivement chacune d'entre elles respectivement en 3 et 2 parties, tout en respectant les 3 conditions de réduction de masses, à savoir:

- La conservation de la masse,
- Le maintien de la position du centre de gravité,
- La conservation du moment central d'inertie.

Ainsi, la bielle maîtresse est décomposée en 3 masses, m_A, m_{B_1} et m_{C_1} concentrées respectivement en A, B_1 , et C_1 , satisfaisant les conditions suivantes:

$$m_A + m_{B_1} + m_{C_1} = M_B \dots \dots \dots (1)$$

$$m_A \vec{G_1 A} + m_{B_1} \vec{G_1 B_1} + m_{C_1} \vec{G_1 C} = \vec{0} \dots \dots \dots (2)$$

$$m_A G_1 A^2 + m_{B_1} G_1 B_1^2 + m_{C_1} G_1 C^2 = J_{bielle}/G_{122} \dots \dots \dots (3)$$

En exprimant les vecteurs $\vec{G_1 A}$, $\vec{G_1 B_1}$, et $\vec{G_1 C}$ dans le repère $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié à la bielle à oeil, soient:

$$\vec{G_1 A} = \begin{pmatrix} -x_{2G1} \\ L_1 - y_{2G1} \\ 0 \end{pmatrix} \vec{x}_2 \quad \vec{G_1 B_1} = \begin{pmatrix} -x_{2G1} \\ -y_{2G1} \\ 0 \end{pmatrix} \vec{x}_2 \quad \text{et} \quad \vec{G_1 C} = \begin{pmatrix} r_{B_1} \sin \beta - x_{2G1} \\ L_1 - r_{B_1} \cos \beta - y_{2G1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix}$$

l'équation (2) donne:

$$-m_A x_{2G1} - m_{B_1} x_{2G1} + m_{C_1} (r_{B_1} \sin \beta - x_{2G1}) = 0 \dots \dots \dots (2')$$

et

$$m_A (L_1 - y_{2G1}) - m_{B_1} y_{2G1} - m_{C_1} (L_1 - r_{B_1} \cos \beta - y_{2G1}) = 0 \dots \dots \dots (2'')$$

alors que l'équation (3) donne:

$$m_A [x_{2G1}^2 + (L_1 - y_{2G1})^2] + m_{B_1} (x_{2G1}^2 + y_{2G1}^2) + m_{C_1} [(r_{B_1} \sin \beta - x_{2G1})^2 + (L_1 - r_{B_1} \cos \beta - y_{2G1})^2] = J_{bielle}/G_{122} \dots \dots \dots (3')$$

On a donc un système de 4 équations (1), (2'), (2'') et (3'), à 3 inconnues m_A, m_{B_1} et m_{C_1} seulement.

La résolution des 3 premières donne:

$$m_A = \frac{-L_1 x_{2G1} + r_{B1} (x_{2G1} \cos \beta + y_{2G1} \sin \beta)}{L_1 r_{B1} \sin \beta} M_B$$

$$m_B = \frac{-x_{2G1} \cos \beta + (L_1 - y_{2G1}) \sin \beta}{L_1 \sin \beta} M_B$$

$$\text{et } m_{C1} = \frac{x_{2G1}}{r_{B1} \sin \beta} M_B$$

la 4ème devant être vérifiée.

En pratique, on définit un moment d'inertie complémentaire, égal à la différence entre le moment d'inertie réel de la bielle et celui du modèle, soit:

$$J_{\text{bielle}/G_1, z_2} - \left\{ \begin{array}{l} -L_1 x_{2G1} + r_{B1} (x_{2G1} \cos \beta + y_{2G1} \sin \beta) [x_{2G1}^2 + (L_1 - y_{2G1})^2] \\ + \frac{-x_{2G1} \cos \beta + (L_1 - y_{2G1}) \sin \beta}{L_1} (x_{2G1}^2 + y_{2G1}^2) + \frac{x_{2G1}}{r_{B1}} \sin \beta \end{array} \right\} M_B$$

mettant en évidence l'erreur du modèle.

Quant à la biellette, elle est décomposée en 3 masses m_{B2} et m_{C2} concentrées respectivement en B_2 et C , satisfaisant les conditions:

$$m_{B2} + m_{C2} = M_{Bt} \dots \dots \dots (4)$$

$$m_{B2} y_{3G2} = m_{C2} (L_2 - y_{3G2}) \dots \dots \dots (5)$$

$$m_{B2} y_{3G2}^2 + m_{C2} (L_2 - y_{3G2})^2 = J_{\text{bielle}/G_2, y_3} \dots \dots \dots (6)$$

Le système de 3 équations, à 2 inconnues (m_{B2} et m_{C2}) seulement dont la résolution des 2 premières donne:

$$m_{B2} = \frac{L_2 - y_{3G2}}{L_2} M_{Bt}$$

et:

$$m_{C2} = \frac{y_{3G2}}{L_2} M_{Bt}$$

Le moment d'inertie complémentaire de la bielle étant:

0.1.4 Conclusion:

Le modèle dynamiquement équivalent au mécanisme bielle-biellette est constitué de 2 masses alternatives m_{B1} et m_{B2} coulissant le long de \vec{y}_0 et \vec{y} , axes des rangées I et (II), d'une masse rotative m ajoutée à celle de la manivelle ramenée en A et d'une masse $m_C = m_{C1} + m_{C2}$ oscillant autour de A.

C.1 EQUILIBRAGE DES MASSES ROTATIVES:

La technique d'équilibrage des masses rotatives, adoptée dans le cadre de notre étude, consiste à équilibrer la masse m_c en premier lieu, puis la masse rotative résultante similairement aux procédés détaillés pour l'équilibrage des moteurs en ligne.

1.0 Equilibrage de la masse m_c :

Cet équilibrage est réalisé en plaçant dans le prolongement de l'axe joignant les centres des axes, du maneton et de l'articulation des tête de bielles, une masse m'_c , à une distance AC' de A telles que: $m'_c AC' = m_c r_{B1}$

Les valeurs de m'_c et AC' sont pour cela fixées par des considérations de résistance et d'encombrement.

1.1 Equilibrage de la masse rotative résultante:

La manivelle se composant de 2 flasques et d'un maneton, son centre de gravité est distant de:

$$r_2 = \frac{2 m_{\text{flasque}} r_1 + m_{\text{maneton}} R}{2 m_{\text{flasque}} + m_{\text{maneton}}}$$

de l'axe de rotation.

r_1 étant celle des centres de gravité des flasques, R le rayon de la manivelle.

Pour des raisons simplificatrices, on ramène la masse rotative de la manivelle en A à la distance R de l'axe de rotation, soit:

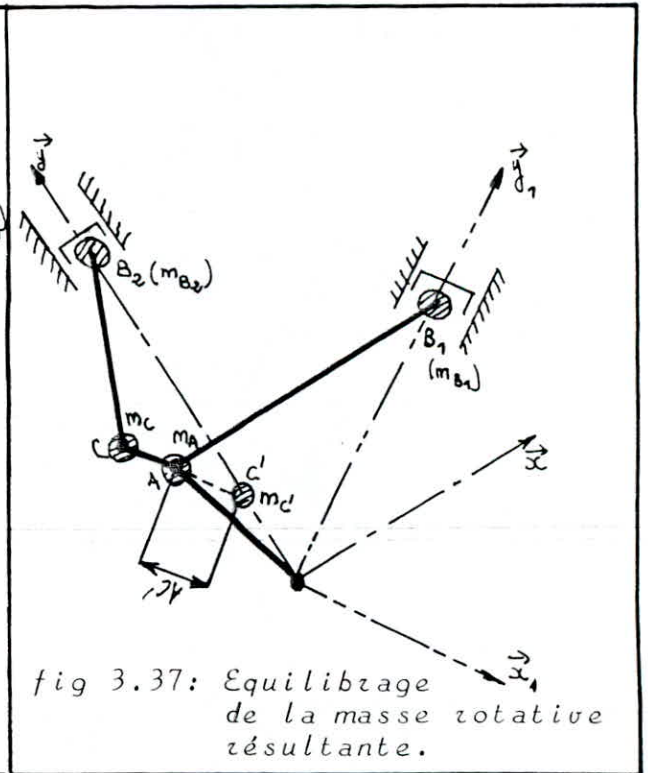
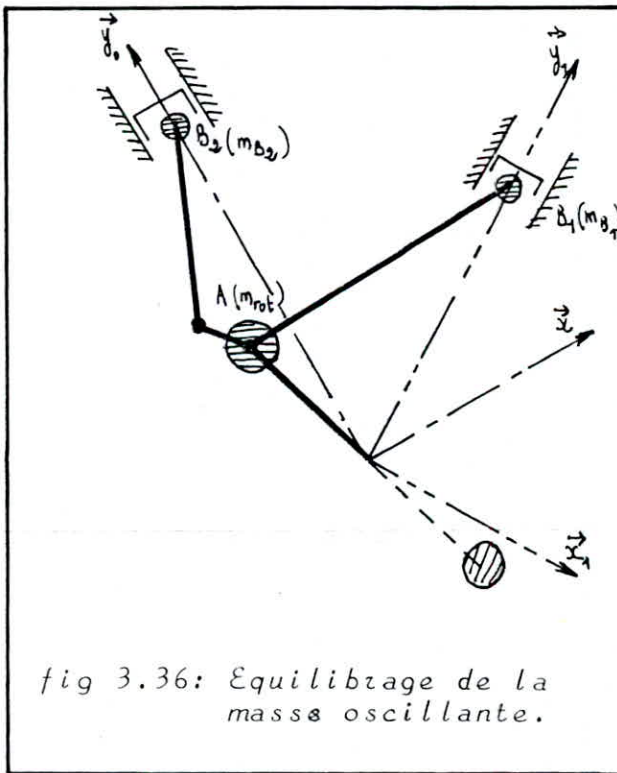
$$m_{\text{manivelle}/A} = m_{\text{manivelle}} \frac{r_2}{R}$$

D'où la masse fictive, concentrée en A est:

$$m_{\text{rot}} = m_{\text{manivelle}/A} + m_c + m'_c$$

L'équilibrage de cette masse est réalisé par des contrepoids placés dans le prolongements des bras de manetons devant satisfaire les 4 sommes fondamentales.

Ceci est parfaitement réalisable.



C.2 EQUILIBRAGE DES MASSES ALTERNATIVES:

Les masses alternatives m_{a1} et m_{a2} engendrent des efforts selon les axes \vec{y}_c et y d'ordres 1 et multiples:

La composition de ces efforts de pilon d'ordres multiples donne naissance à des efforts de tamis et de pilon du moteur en "V", système bielle-biellette.

2.0 Développement en série de Fourier:

La disposition bielle-biellette conduit à des courses de pied de bielle et de biellette différentes.

En effet les expressions des déplacements des pistons des rangées I et II ont pour expressions:

$$\text{- Rangée I : } U_1 = R(1 - \cos\theta) + L_1(1 - \cos\varphi)$$

$$\text{- Rangée II : } U_2 = R[1 - \cos(\theta - \delta)] + r_{B1}[1 + \cos(\varphi + \beta - \delta)] + L_2(1 + \cos\psi)$$

$$\text{avec: } \lambda_1 = \frac{L_1}{R} \quad \sin\varphi = \frac{\sin\theta}{\lambda_1} \quad \cos\varphi = -\sqrt{1 - \sin^2\varphi}$$

$$\sin\psi = \frac{R \sin(\theta - \delta) - r_{B1} \sin(\varphi + \beta - \delta)}{L_2} \quad \cos\psi = -\sqrt{1 - \sin^2\psi}$$

On remarque que, le déplacement du piston de la rangée I est analogue à celui du moteur en ligne moyennant le remplacement de L_1 par L .

On ne s'occupera dans ce qui suit que de celui de la 2^{de} rangée.

2.0.1 Expression de $\cos\psi$:

$$\sin\psi = \frac{R \sin(\theta - \delta) - r_{B1} \sin(\varphi + \beta - \delta)}{L_2}$$

comme:

$$\sin(\theta - \delta) = \sin\theta \cos\delta - \sin\delta \cos\theta$$

$$\sin(\varphi + \beta - \delta) = \sin\varphi \cos(\beta - \delta) + \cos\varphi \sin(\beta - \delta)$$

$$\text{avec: } \sin\varphi = \frac{\sin\theta}{\lambda_1}$$

et:

$$\cos\varphi = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (2i-1)}{n! 2^{3n} \lambda_1^{2n}} \left[C_{2n}^n + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k C_{2n}^{n-k} \cos 2k\theta \right]$$

soit alors:

$$\sin\psi = \frac{\sin\theta \cos\delta - \sin\delta \cos\theta}{L_2} - \frac{r_{B1}}{L_2} \left\{ \frac{\cos(\beta - \delta)}{\lambda_1} \sin\theta + \left[-1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (2i-1)}{n! 2^{3n} \lambda_1^{2n}} \left(C_{2n}^n + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k C_{2n}^{n-k} \cos 2k\theta \right) \right] \sin(\beta - \delta) \right\} \quad \text{avec: } \lambda_2 = \frac{L_2}{R}$$

et:
$$\cos \Psi = -\sqrt{1 - \sin^2 \Psi} = -(1 - \sin^2 \Psi)^{1/2}$$

Ψ étant voisin de π , $\sin \Psi$ est faible, et on peut ainsi décomposer $\cos \Psi$ en série de Taylor comme suit:

$$\cos \Psi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (2i-1)}{n! 2^n} \sin^{2n} \Psi$$

soit alors:

$$\begin{aligned} \cos \Psi = & -1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{m-1} (2j-1)}{m! 2^m} \left[\frac{\sin \theta \sin \delta - \sin \delta \cos \theta}{\lambda_2} - \frac{r_{B1}}{L_2} \left\{ \frac{\cos(\beta-\delta)}{\lambda_1} \sin \theta \right. \right. \\ & \left. \left. + \left[-1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (2j-1)}{n! 2^{2n} \lambda_1^{2n}} (C_{2n}^n + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k C_{2n}^{n-k} \cos 2k\theta) \right] \sin(\beta-\delta) \right\} \right]^{2m} \end{aligned}$$

2.0.2 Expression du déplacement du piston de la rangée II :

$$U_2 = R [1 - \cos(\theta - \delta)] + r_{B1} [1 + \cos(\Psi + \beta - \delta)] + C_2 (1 + \cos \Psi)$$

ou encore:

$$U_2 = R [1 - \cos \theta \cos \delta - \sin \theta \sin \delta] + r_{B1} [1 + \cos \Psi \cos(\beta - \delta) - \sin \Psi \sin(\beta - \delta)] + L_2 (1 + \cos \Psi)$$

En remplaçant $\cos \Psi$, $\sin \Psi$ et $\cos \Psi$ par leurs valeurs,

on aura:

$$\begin{aligned} U_2 = & R [1 - \cos \theta \cos \delta - \sin \theta \sin \delta] + r_{B1} \left\{ 1 + \left[-1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (2i-1)}{n! 2^{2n} \lambda_1^{2n}} (C_{2n}^n + \right. \right. \\ & \left. \left. 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k C_{2n}^{n-k} \cos 2k\theta) \right] \cos(\beta - \delta) - \frac{\sin \theta}{\lambda_1} \sin(\beta - \delta) \right\} + L_2 \left\{ 1 + 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m-1} (2j-1)}{m! 2^m} \right. \\ & \left. \left[\frac{\sin \theta \cos \delta - \sin \delta \cos \theta}{\lambda_2} - \frac{r_{B1}}{L_2} \left\{ \frac{\cos(\beta - \delta)}{\lambda_1} \sin \theta + \left[-1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (2i-1)}{n! 2^{2n} \lambda_1^{2n}} (C_{2n}^n + \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left. 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k C_{2n}^{n-k} \cos 2k\theta) \right] \sin(\beta - \delta) \right\} \right]^{2m} \right\} \end{aligned}$$

Cette expression de U_2 est assez compliquée pour être dérivée 2 fois. On préfère l'écrire sous sa forme explicite, et ne considérer que les termes prépondérants.

2.0.3 Forme explicite de U_2 :

Développons:

$$\begin{aligned} \cos \Psi = & -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (2i-1)}{n! 2^{2n} \lambda_1^{2n}} \left[C_{2n}^n + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k C_{2n}^{n-k} \cos 2k\theta \right] = -1 - \frac{1}{1! 2^2 \lambda_1^2} \left[C_2^1 + \right. \\ & \left. 2 \sum_{k=1}^1 (-1)^k C_2^{1-k} \cos 2k\theta \right] - \frac{1}{2! 2^4 \lambda_1^4} \left[C_4^2 + 2 \sum_{k=1}^2 (-1)^k C_4^{2-k} \cos 2k\theta \right] \\ & - \frac{1}{3! 2^6 \lambda_1^6} \left[C_6^3 + 2 \sum_{k=1}^3 (-1)^k C_6^{3-k} \cos 2k\theta \right] - \frac{1}{4! 2^8 \lambda_1^8} \left[C_8^4 + 2 \sum_{k=1}^4 (-1)^k C_8^{4-k} \cos 2k\theta \right] \dots \\ = & -1 - \frac{1}{2^2 \lambda_1^2} \left[2 + 2(-1) \cdot C_2^0 \cos 2\theta \right] - \frac{-1(1)}{2 \cdot 2^4 \lambda_1^4} \left[6 + 2(-C_4^1 \cos 2\theta + C_4^0 \cos 4\theta) \right] \\ & - \frac{1(1)(3)}{3 \cdot 2 \cdot 2^6 \lambda_1^6} \left[20 + 2(-C_6^2 \cos 2\theta + C_6^1 \cos 4\theta - C_6^0 \cos 6\theta) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{-1(1)(3)(5)}{4 \cdot 3 \cdot 2^2 \lambda_1^3} \left[70 + 2 \left(-C_8^3 \cos 2\theta + C_8^2 \cos 4\theta - C_8^1 \cos 6\theta + C_8^0 \cos 8\theta \right) \right] \dots \\
& = -1 + \frac{1}{2^3 \lambda_1^2} (2 - 2 \cos 2\theta) + \frac{1}{2^7 \lambda_1^4} (6 - 8 \cos 2\theta + 2 \cos 4\theta) + \frac{1}{2^{10} \lambda_1^6} (20 - 30 \cos 2\theta \\
& \quad + 12 \cos 4\theta - 2 \cos 6\theta) + \frac{5}{2^{15} \lambda_1^8} (70 - 112 \cos 2\theta + 56 \cos 4\theta - 16 \cos 6\theta + 2 \cos 8\theta) + \dots \\
& = -1 + \frac{1}{4 \lambda_1^2} (1 - \cos 2\theta) + \frac{1}{2^6 \lambda_1^4} (3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta) + \frac{1}{2^9 \lambda_1^6} (10 - 15 \cos 2\theta + 6 \cos 4\theta \\
& \quad - \cos 6\theta) + \frac{5}{2^{14} \lambda_1^8} (35 - 56 \cos 2\theta + 28 \cos 4\theta - 8 \cos 6\theta + \cos 8\theta) + \dots \\
& = -1 - \frac{1}{4 \lambda_1^2} - \frac{1}{4 \lambda_1^2} \cos 2\theta + \frac{3}{2^6 \lambda_1^4} - \frac{1}{2^4 \lambda_1^4} \cos 2\theta + \frac{1}{2^6 \lambda_1^4} \cos 4\theta + \frac{5}{2^8 \lambda_1^6} - \frac{15}{2^9 \lambda_1^6} \cos 2\theta \\
& \quad + \frac{3}{2^8 \lambda_1^6} \cos 4\theta - \frac{1}{2^9 \lambda_1^6} \cos 6\theta + \frac{175}{2^{14} \lambda_1^8} - \frac{35}{2^{11} \lambda_1^8} \cos 2\theta + \frac{35}{2^{12} \lambda_1^8} \cos 4\theta - \frac{5}{2^{11} \lambda_1^8} \cos 6\theta + \frac{5}{2^{14} \lambda_1^8} \cos 8\theta + \dots \\
& = \left(-1 + \frac{1}{4 \lambda_1^2} + \frac{3}{2^6 \lambda_1^4} + \frac{5}{2^8 \lambda_1^6} + \frac{175}{2^{14} \lambda_1^8} + \dots \right) - \left(\frac{1}{4 \lambda_1^2} + \frac{1}{2^4 \lambda_1^4} + \frac{15}{2^9 \lambda_1^6} + \frac{35}{2^{11} \lambda_1^8} + \dots \right) \\
& \quad \cos 2\theta + \left(\frac{1}{2^6 \lambda_1^4} + \frac{3}{2^8 \lambda_1^6} + \frac{35}{2^{12} \lambda_1^8} + \dots \right) \cos 4\theta - \left(\frac{1}{2^9 \lambda_1^6} + \frac{5}{2^{11} \lambda_1^8} + \dots \right) \cos 6\theta \\
& \quad + \left(\frac{5}{2^{14} \lambda_1^8} + \dots \right) \cos 8\theta + \dots
\end{aligned}$$

Soit en posant :

$$A_0 = -1 + \frac{1}{4 \lambda_1^2} + \frac{3}{2^6 \lambda_1^4} + \frac{5}{2^8 \lambda_1^6} + \frac{175}{2^{14} \lambda_1^8} + \dots$$

$$A_2 = - \left(\frac{1}{4 \lambda_1^2} + \frac{1}{2^4 \lambda_1^4} + \frac{15}{2^9 \lambda_1^6} + \frac{35}{2^{11} \lambda_1^8} + \dots \right)$$

$$A_4 = \frac{1}{2^6 \lambda_1^4} + \frac{3}{2^8 \lambda_1^6} + \frac{35}{2^{12} \lambda_1^8} + \dots$$

$$A_6 = - \left(\frac{1}{2^9 \lambda_1^6} + \frac{5}{2^{11} \lambda_1^8} + \dots \right)$$

et

$$A_8 = \frac{5}{2^{14} \lambda_1^8} + \dots$$

$$\cos \varphi = A_0 + A_2 \cos 2\theta + A_4 \cos 4\theta + A_6 \cos 6\theta + A_8 \cos 8\theta$$

$$\sin \varphi = \frac{R \cos(\theta - \delta) - r_{B1} \sin(\varphi + \beta - \delta)}{h_2}$$

avec:

$$\cos(\theta - \delta) = \cos \theta \cdot \cos \delta - \sin \theta \cdot \sin \delta$$

$$\sin(\varphi + \beta - \delta) = \sin \varphi \cdot \cos(\beta - \delta) + \sin(\beta - \delta) \cos \varphi$$

où: $\sin \varphi = \frac{\sin \theta}{\lambda_1}$, $\cos \varphi$ a été précédemment évalué,

$$\sin \varphi = \frac{\cos \theta \cos \delta - \sin \theta \sin \delta}{\lambda_2} - \frac{r_{B1}}{h_2} \left\{ \frac{\sin(\beta - \delta)}{\lambda_1} \sin \theta + \sin(\beta - \delta) \left[\left(-1 + \frac{1}{4\lambda_1^2} + \frac{3}{2^6\lambda_1^4} + \frac{5}{2^8\lambda_1^6} + \frac{175}{2^{14}\lambda_1^8} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2^9\lambda_1^6} + \frac{5}{2^{11}\lambda_1^8} + \dots\right) \cos 6\theta + \left(\frac{5}{2^{14}\lambda_1^8} + \dots\right) \cos 8\theta + \dots \right] \right\}$$

$$= \frac{\cos \delta}{\lambda_2} \cos \theta - \frac{\sin \delta}{\lambda_2} \sin \theta - \frac{r_{B1}}{h_2} \cdot \frac{\sin(\beta - \delta)}{\lambda_1} \sin \theta - \frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(-1 + \frac{1}{4\lambda_1^2} + \frac{3}{2^6\lambda_1^4} + \frac{5}{2^8\lambda_1^6} + \frac{175}{2^{14}\lambda_1^8} + \dots\right) + \frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(\frac{1}{2^9\lambda_1^6} + \frac{5}{2^{11}\lambda_1^8} + \dots\right) \cos 6\theta - \frac{r_{B1}}{h_2} \left(\frac{5}{2^{14}\lambda_1^8} + \dots\right) \sin(\beta - \delta) \cos 8\theta + \dots$$

$$+ \frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(\frac{1}{4\lambda_1^2} + \frac{1}{2^4\lambda_1^4} + \frac{15}{2^9\lambda_1^6} + \frac{35}{2^{11}\lambda_1^8} + \dots\right) \cos 2\theta - \frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(\frac{1}{2^6\lambda_1^4} + \frac{3}{2^8\lambda_1^6} + \frac{35}{2^{12}\lambda_1^8} + \dots\right) \cos 4\theta$$

$$+ \frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(\frac{1}{2^9\lambda_1^6} + \frac{5}{2^{11}\lambda_1^8} + \dots\right) \cos 6\theta - \frac{r_{B1}}{h_2} \left(\frac{5}{2^{14}\lambda_1^8} + \dots\right) \sin(\beta - \delta) \cos 8\theta + \dots$$

$$\text{soit: } \sin \varphi = -\frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(-1 + \frac{1}{4\lambda_1^2} + \frac{3}{2^6\lambda_1^4} + \frac{5}{2^8\lambda_1^6} + \frac{175}{2^{14}\lambda_1^8} + \dots\right)$$

$$- \left(\frac{\sin \delta}{\lambda_2} + \frac{r_{B1}}{h_2} \frac{\sin(\beta - \delta)}{\lambda_1}\right) \sin \theta + \frac{\cos \delta}{\lambda_2} \cos \theta + \frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(\frac{1}{4\lambda_1^2} + \frac{1}{2^4\lambda_1^4} + \frac{15}{2^9\lambda_1^6} + \frac{35}{2^{11}\lambda_1^8} + \dots\right) \cos 2\theta - \frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(\frac{1}{2^6\lambda_1^4} + \frac{3}{2^8\lambda_1^6} + \frac{35}{2^{12}\lambda_1^8} + \dots\right) \cos 4\theta + \frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(\frac{1}{2^9\lambda_1^6} + \frac{5}{2^{11}\lambda_1^8} + \dots\right) \cos 6\theta - \frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(\frac{5}{2^{14}\lambda_1^8} + \dots\right) \cos 8\theta$$

$$+ \frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(\frac{1}{2^9\lambda_1^6} + \frac{5}{2^{11}\lambda_1^8} + \dots\right) \cos 6\theta$$

$$- \frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(\frac{5}{2^{14}\lambda_1^8} + \dots\right) \cos 8\theta$$

soit en posant:

$$B_0 = -\frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(-1 + \frac{1}{4\lambda_1^2} + \frac{3}{2^6\lambda_1^4} + \frac{5}{2^8\lambda_1^6} + \frac{175}{2^{14}\lambda_1^8} + \dots \right)$$

$$B_{15} = -\left(\frac{\sin \delta}{\lambda_2} + \frac{r_{B1}}{h_2} \frac{\sin(\beta - \delta)}{\lambda_2} \right)$$

$$B_{1c} = \frac{\cos \delta}{\lambda_2}$$

$$B_{2c} = \frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(\frac{1}{4\lambda_1^2} + \frac{1}{2^4\lambda_1^4} + \frac{15}{2^8\lambda_1^6} + \frac{35}{2^{10}\lambda_1^8} + \dots \right)$$

$$B_{4c} = -\frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(\frac{1}{2^6\lambda_1^4} + \frac{3}{2^8\lambda_1^6} + \dots \right)$$

$$B_{6c} = \frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(\frac{1}{2^8\lambda_1^6} + \frac{5}{2^{10}\lambda_1^8} + \dots \right)$$

$$B_{8c} = \frac{r_{B1}}{h_2} \sin(\beta - \delta) \left(\frac{5}{2^{14}\lambda_1^8} + \dots \right)$$

$$\sin \Psi = B_0 + B_{15} \sin \theta + B_{1c} \cos \theta + B_{2c} \cos 2\theta + B_{4c} \cos 4\theta + B_{8c} \cos 8\theta + \dots$$

comme: $\cos \Psi = -\sqrt{1 - \sin^2 \Psi}$ où Ψ est voisin de π ,

soit alors:

$$\cos \Psi = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (2i-1)}{n! 2^n} \sin^{2n} \Psi$$

explicitement:

$$\begin{aligned} \cos \Psi &= -1 - \frac{\prod_{i=0}^0 (2i-1)}{1! 2} \sin^2 \Psi - \frac{\prod_{i=0}^1 (2i-1)}{2! 2^2} \sin^4 \Psi - \frac{\prod_{i=0}^2 (2i-1)}{3! 2^3} \sin^6 \Psi + \dots \\ &= -1 - \frac{-1}{2} \sin^2 \Psi - \frac{-1(1)}{2 \cdot 2^2} \sin^4 \Psi - \frac{-1(1)(3)}{3 \cdot 2 \cdot 2^3} \sin^6 \Psi + \dots \\ &= -1 + \frac{\sin^2 \Psi}{2} + \frac{\sin^4 \Psi}{8} + \frac{\sin^6 \Psi}{16} + \dots \end{aligned}$$

Evaluons séparément $\sin^2 \theta$, $\sin^4 \theta$...

sachant que:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ (i < j)}}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j$$

on aura:

$$\begin{aligned} \sin^2 \Psi &= B_0^2 + B_{15}^2 \sin^2 \theta + B_{1c}^2 \cos^2 \theta + B_{2c}^2 \cos^2 2\theta + B_{4c}^2 \cos^2 4\theta + B_{6c}^2 \cos^2 6\theta \\ &+ B_{8c}^2 \cos^2 8\theta + 2B_0 B_{15} \sin \theta + 2B_0 B_{1c} \cos \theta + 2B_0 B_{2c} \cos 2\theta + 2B_0 B_{4c} \cos 4\theta \\ &+ 2B_0 B_{6c} \cos 6\theta + 2B_0 B_{8c} \cos 8\theta + 2B_{15} B_{1c} \sin \theta \cos \theta + 2B_{15} B_{2c} \sin \theta \cos 2\theta \\ &+ 2B_{15} B_{4c} \sin \theta \cos 4\theta + 2B_{15} B_{6c} \sin \theta \cos 6\theta + 2B_{15} B_{8c} \sin \theta \cos 8\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2B_{1c} B_{2c} \cos \theta \cos 2\theta + 2B_{1c} B_{4c} \cos \theta \cos 4\theta + 2B_{1c} B_{6c} \cos \theta \cos 6\theta \\
 &+ 2B_{1c} B_{8c} \cos \theta \cos 8\theta + 2B_{2c} B_{4c} \cos 2\theta \cos 4\theta + 2B_{2c} B_{6c} \cos 2\theta \cos 6\theta \\
 &+ 2B_{2c} B_{8c} \cos 2\theta \cos 8\theta + 2B_{4c} B_{6c} \cos 4\theta \cos 6\theta + 2B_{4c} B_{8c} \cos 4\theta \cos 8\theta + \dots
 \end{aligned}$$

Utilisant les relations trigonométriques:

- De duplication:

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin a \cos a = \frac{\sin 2a}{2}$$

- Et de transformation de produits en sommes:

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}$$

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(b-a) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

on aura:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \psi &= B_0^2 + B_{1s}^2 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + B_{1c}^2 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + B_{2c}^2 \frac{1 + \cos 4\theta}{2} + B_{4c}^2 \frac{1 + \cos 12\theta}{2} + \dots \\
 &+ 2B_0 B_{1s} \sin \theta + 2B_0 B_{1c} \cos \theta + 2B_0 B_{2c} \cos 2\theta + 2B_0 B_{4c} \cos 4\theta + 2B_0 B_{6c} \cos 6\theta \\
 &+ 2B_0 B_{8c} \cos 8\theta + \dots + 2B_{1s} B_{1c} \frac{\sin 2\theta}{2} + 2B_{1s} B_{2c} \frac{\sin 3\theta - \sin \theta}{2} + 2B_{1s} B_{4c} \frac{\sin 5\theta - \sin 3\theta}{2} \\
 &+ 2B_{1s} B_{6c} \frac{\sin 7\theta - \sin 5\theta}{2} + 2B_{1c} B_{2c} \frac{\cos 3\theta + \cos \theta}{2} + 2B_{1c} B_{4c} \frac{\cos 5\theta + \cos 3\theta}{2} \\
 &+ 2B_{1c} B_{6c} \frac{\cos 7\theta + \cos 5\theta}{2} + \dots + 2B_{2c} B_{4c} \frac{\cos 6\theta + \cos 2\theta}{2} + 2B_{2c} B_{6c} \frac{\cos 8\theta + \cos 4\theta}{2} + \dots \\
 &+ 2B_{4c} B_{6c} \frac{\cos 10\theta + \cos 2\theta}{2} + 2B_{4c} B_{8c} \frac{\cos 12\theta + \cos 4\theta}{2} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \psi &= \left(B_0 + \frac{B_{1s}^2 + B_{1c}^2 + B_{2c}^2 + B_{4c}^2 + \dots}{2} \right) + (2B_0 B_{1s} - B_{1s} B_{2c} + \dots) \sin \theta \\
 &+ (2B_0 B_{1c} + B_{1c} B_{2c} + \dots) \cos \theta + (B_{1s} B_{1c} + \dots) \sin 2\theta + \left(-\frac{B_{1s}^2 B_{1c}}{2} + \frac{B_{1c}^2 B_{1s}}{2} + 2B_0 B_{2c} + B_{2c} B_{4c} + \dots \right) \cos 2\theta \\
 &+ (B_{1s} B_{2c} - B_{1s} B_{4c} + \dots) \sin 3\theta + (B_{1c} B_{2c} + B_{1c} B_{4c} + \dots) \cos 3\theta + \dots
 \end{aligned}$$

soit en posant:

$$C_0 = B_0 + \frac{B_{1s}^2 + B_{1c}^2 + B_{2c}^2 + B_{4c}^2}{2} + \dots$$

$$C_{1s} = 2B_0 B_{1s} - B_{1s} B_{2c} + \dots$$

$$C_{1c} = 2B_0 B_{1c} + B_{1c} B_{2c} + \dots$$

$$C_{2s} = B_{1s} B_{1c} + \dots$$

$$C_{2c} = -\frac{B_{1s}^2}{2} + \frac{B_{1c}^2}{2} + 2B_0 B_{2c} + B_{2c} B_{4c} + \dots$$

$$C_{3S} = B_{1S} B_{2S} - B_{1S} B_{2C} + \dots$$

$$C_{3C} = B_{1C} B_{2S} + B_{1C} B_{2C} + \dots$$

on aura:

$$\sin^2 \psi = C_0 + C_{1S} \sin \theta + C_{1C} \cos \theta + C_{2S} \sin^2 \theta + C_{2C} \cos^2 \theta + C_{3S} \sin^3 \theta + C_{3C} \cos^3 \theta + \dots$$

et par suite:

$$\begin{aligned} \sin^4 \psi &= C_0^2 + C_{1S}^2 \sin^2 \theta + C_{1C}^2 \cos^2 \theta + C_{2S}^2 \sin^2 2\theta + C_{2C}^2 \cos^2 \theta + C_{3S}^2 \sin^2 \theta + C_{3C}^2 \cos^2 3\theta + \dots \\ &+ 2C_0 C_{1S} \sin \theta + 2C_0 C_{1C} \cos \theta + 2C_0 C_{2S} \sin 2\theta + 2C_0 C_{2C} \cos 2\theta + 2C_0 C_{3S} \sin 3\theta \\ &+ 2C_0 C_{3C} \cos 3\theta + \dots + 2C_{1S} C_{1C} \sin \theta \cos \theta + 2C_{1S} C_{2S} \sin \theta \sin 2\theta + 2C_{1S} C_{2S} \sin \theta \cos 2\theta \\ &+ 2C_{1S} C_{3S} \sin \theta \sin 3\theta + 2C_{1S} C_{3S} \sin \theta \cos 3\theta + 2C_{1C} C_{2S} \cos \theta \sin 2\theta + 2C_{1C} C_{2C} \cos \theta \cos 2\theta \\ &+ 2C_{1C} C_{3S} \cos \theta \sin 3\theta + 2C_{1C} C_{3C} \cos \theta \cos 3\theta + 2C_{2S} C_{2C} \sin 2\theta \cos 2\theta + 2C_{2S} C_{3S} \sin 2\theta \sin 3\theta \\ &+ 2C_{2S} C_{3S} \sin 2\theta \cos 3\theta + 2C_{2C} C_{3S} \cos 2\theta \sin 3\theta + 2C_{2C} C_{3C} \cos 2\theta \cos 3\theta + \dots \end{aligned}$$

Utilisant les formules trigonométriques sus-citées;

on aura:

$$\begin{aligned} \sin^4 \psi &= C_0^2 + C_{1S}^2 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + C_{1C}^2 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + C_{2S}^2 \frac{1 - \cos 4\theta}{2} + C_{2C}^2 \frac{1 + \cos 4\theta}{2} + \dots \\ &+ 2C_0 C_{1S} \sin \theta + 2C_0 C_{1C} \cos \theta + 2C_0 C_{2S} \sin 2\theta + 2C_0 C_{2C} \cos 2\theta + 2C_0 C_{3S} \sin 3\theta \\ &+ 2C_0 C_{3C} \cos 3\theta + 2C_{1S} C_{1C} \frac{\sin 2\theta}{2} + 2C_{1S} C_{2S} \frac{\cos \theta - \cos 3\theta}{2} + 2C_{1S} C_{2C} \frac{\sin 3\theta - \sin \theta}{2} \\ &+ 2C_{1S} C_{3S} \frac{\cos 2\theta - \cos 4\theta}{2} + 2C_{1S} C_{3S} \frac{\sin 4\theta}{2} \\ &= \sin 2\theta + \dots + 2C_{1C} C_{2S} \frac{\sin 3\theta - \sin \theta}{2} + 2C_{1C} C_{2C} \frac{\cos 3\theta + \cos \theta}{2} + 2C_{1C} C_{3S} \frac{\sin 4\theta - \sin 2\theta}{2} \\ &+ 2C_{1C} C_{3C} \frac{\cos 4\theta + \cos 2\theta}{2} + 2C_{2S} C_{2C} \frac{\sin 4\theta}{2} + 2C_{2S} C_{3S} \frac{\cos \theta - \cos 5\theta}{2} + 2C_{2S} C_{3C} \frac{\sin 5\theta - \sin \theta}{2} \\ &+ 2C_{2C} C_{3S} \frac{\sin 5\theta - \sin \theta}{2} + 2C_{2C} C_{3C} \frac{\cos 5\theta - \cos \theta}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soit: } \sin^4 \psi &= \left(C_0^2 + \frac{C_{1S}^2 + C_{1C}^2 + C_{2S}^2 + C_{2C}^2}{2} + \dots \right) + (2C_0 C_{1S} - C_{1S} C_{2C} - C_{1C} C_{2S} + \dots) \sin \theta \\ &+ (2C_0 C_{1C} + C_{1S} C_{2S} + C_{1C} C_{2C} + C_{2S} C_{3S} + \dots) \cos \theta + (2C_0 C_{2S} + C_{1S} C_{1C} + C_{1S} C_{3C} + \dots) \\ &\sin 2\theta + \left(-\frac{C_{1S}^2}{2} + \frac{C_{1C}^2}{2} + 2C_0 C_{2C} + C_{1S} C_{3S} + \dots \right) \cos 2\theta + (2C_0 C_{3S} + C_{1S} C_{2C} \\ &+ C_{1C} C_{2S} + \dots) \sin 3\theta + (2C_{1S} C_{3C} - C_{1S} C_{2S} + C_{1C} C_{2C} + \dots) \cos 3\theta + \dots \end{aligned}$$

Posant:

$$D_0 = C_0^2 + \frac{C_{1S}^2 + C_{1C}^2 + C_{2S}^2 + C_{2C}^2}{2} + \dots$$

$$D_{1S} = 2C_0 C_{1S} - C_{1S} C_{2S} - C_{1C} C_{2S} + \dots$$

$$D_{1C} = 2C_0 C_{1C} - C_{1S} C_{2S} - C_{1C} C_{2S} + \dots$$

$$D_{25} = 2C_0 C_{25} + C_{15} C_{1C} + C_{15} C_{3C} + \dots$$

$$D_{3C} = 2C_{15} C_{3C} - C_{15} C_{25} + C_{1C} C_{2C}$$

On aura:

$$\sin^4 \psi = D_0 + D_{15} \sin \theta + D_{1C} \cos \theta + D_{25} \sin 2\theta + D_{2C} \cos 2\theta + D_{35} \sin 3\theta + D_{3C} \cos 3\theta + \dots$$

On pourra écrire que:

$$\cos \psi = -1 + \frac{1}{2} \left[C_0 + C_{15} \sin \theta + C_{1C} \cos \theta + C_{25} \sin 2\theta + C_{2C} \cos 2\theta + C_{35} \sin 3\theta + C_{3C} \cos 3\theta + \dots \right] + \frac{1}{2} \left[D_0 + D_{15} \sin \theta + D_{1C} \cos \theta + D_{25} \sin 2\theta + D_{2C} \cos 2\theta + D_{35} \sin 3\theta + D_{3C} \cos 3\theta + \dots \right]$$

$$\text{Soit: } \cos \psi = \left(-1 + \frac{C_0}{2} + \frac{D_0}{8} + \dots \right) + \left(\frac{C_{15}}{2} + \frac{D_{15}}{8} + \dots \right) \sin \theta + \left(\frac{C_{1C}}{2} + \frac{D_{1C}}{8} + \dots \right) \cos \theta + \left(\frac{C_{25}}{2} + \frac{D_{25}}{8} + \dots \right) \sin 2\theta + \left(\frac{C_{2C}}{2} + \frac{D_{2C}}{8} + \dots \right) \cos 2\theta + \left(\frac{C_{35}}{2} + \frac{D_{35}}{8} + \dots \right) \sin 3\theta + \left(\frac{C_{3C}}{2} + \frac{D_{3C}}{8} + \dots \right) \cos 3\theta + \dots$$

Et en posant:

$$E_0 = -1 + \frac{C_0}{2} + \frac{D_0}{8}$$

$$E_{15} = \frac{C_{15}}{2} + \frac{D_{15}}{8}$$

$$E_{1C} = \frac{C_{1C}}{2} + \frac{D_{1C}}{8}$$

$$E_{25} = \frac{C_{25}}{2} + \frac{D_{25}}{8}$$

$$E_{2C} = \frac{C_{2C}}{2} + \frac{D_{2C}}{8}$$

$$E_{35} = \frac{C_{35}}{2} + \frac{D_{35}}{8}$$

$$E_{3C} = \frac{C_{3C}}{2} + \frac{D_{3C}}{8}$$

On sera réduit à:

$$\cos \psi = E_0 + E_{15} \sin \theta + E_{1C} \cos \theta + E_{25} \sin 2\theta + E_{2C} \cos 2\theta + E_{35} \sin 3\theta + E_{3C} \cos 3\theta + \dots$$

On peut à présent écrire l'expression du déplacement du piston de la 2^{de} rangée sous sa forme explicite:

$$U_2 = R (1 - \cos \theta \cos \delta - \sin \theta \sin \delta) + r_{B_1} \left[1 + (A_0 + A_2 \cos 2\theta + A_4 \cos 4\theta + A_6 \cos 6\theta + \dots) \cos(\beta - \delta) - \frac{\sin(\beta - \delta)}{\lambda_1} \sin \theta \right] + L_2 (1 + E_0 + E_{15} \sin \theta + E_{1C} \cos \theta + E_{25} \sin 2\theta + E_{2C} \cos 2\theta + E_{35} \sin 3\theta + E_{3C} \cos 3\theta + \dots)$$

2.1 Expression de l'accélération du piston de la rangée II :

En dérivant 2 fois par rapport au temps, tout en supposant la vitesse de rotation constante:

$$\ddot{U}_2 = R \omega^2 (\cos \theta \cos \delta + \sin \theta \sin \delta) + r_{B_1} \omega^2 \left[-(4A_2 \cos 2\theta + 16A_4 \cos 4\theta + 36A_6 \cos 6\theta + \dots) \cos(\beta - \delta) + \frac{\sin(\beta - \delta)}{\lambda_1} \sin \theta \right] - L_2 \omega^2 (E_{15} \sin \theta + E_{1C} \cos \theta + 4E_{25} \sin 2\theta + 4E_{2C} \cos 2\theta + 9E_{35} \sin 3\theta + 9E_{3C} \cos 3\theta + \dots) = R \omega^2 \left\{ \cos \theta \cos \delta + \sin \theta \sin \delta + \frac{r_{B_1}}{R} \left[-(4A_2 \cos 2\theta + 16A_4 \cos 4\theta + 36A_6 \cos 6\theta + \dots) \cos(\beta - \delta) + \frac{\sin(\beta - \delta)}{\lambda_1} \sin \theta \right] - \frac{L_2}{R} (E_{15} \sin \theta + E_{1C} \cos \theta + 4E_{25} \sin 2\theta + 4E_{2C} \cos 2\theta + 9E_{35} \sin 3\theta + 9E_{3C} \cos 3\theta + \dots) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= R\omega^2 \left\{ \left(\sin \delta + \frac{r_{B1}}{R} \frac{\sin(\beta-\delta)}{\lambda_1} - \frac{l_2}{R} + \dots \right) \sin \theta + \left(\cos \delta - E_{1c} \frac{l_2}{R} + \dots \right) \cos \theta \right. \\
 &- \frac{l_2}{R} (4E_{2s} + \dots) \sin 2\theta + \left(-4A_2 \frac{r_{B1}}{R} - 4E_{2c} \frac{l_2}{R} + \dots \right) \cos 2\theta - \frac{l_2}{R} (9E_{3s} + \dots) \\
 &\left. \sin 3\theta - \frac{l_2}{R} (9E_{3c} + \dots) \cos 3\theta + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

2.2 Expression de la force d'inertie alternative au niveau de la rangée II:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{Ialt/II} &= F_{Ialt/II} \vec{y} = m_{altII} \ddot{U}_2 \vec{y} = m_{altII} R\omega^2 \left\{ \left(\sin \delta + \frac{r_{B1}}{R} \frac{\sin(\beta-\delta)}{\lambda_1} - \frac{l_2}{R} + \dots \right) \right. \\
 &\quad \sin \theta + \left(\cos \delta - E_{1c} \frac{l_2}{R} + \dots \right) \cos \theta - \frac{l_2}{R} (4E_{2s} + \dots) \sin 2\theta + \left(-4A_2 \frac{r_{B1}}{R} - 4E_{2c} \frac{l_2}{R} \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right) \cos 2\theta - \frac{l_2}{R} (9E_{3s} + \dots) \sin 3\theta - \left. \frac{l_2}{R} (9E_{3c} + \dots) \cos 3\theta + \dots \right\} \vec{y}
 \end{aligned}$$

en posant:

$$K_{1s} = \sin \delta + \frac{r_{B1}}{R} \frac{\sin(\beta-\delta)}{\lambda_1} - \frac{l_2}{R}$$

$$K_{1c} = \cos \delta - E_{1c} \frac{l_2}{R}$$

$$K_{2s} = -\frac{l_2}{R} (4E_{2s} + \dots)$$

$$K_{2c} = -4A_2 \frac{r_{B1}}{R} - 4E_{2c} \frac{l_2}{R} + \dots$$

$$K_{3s} = -\frac{l_2}{R} (9E_{3s} + \dots)$$

$$K_{3c} = -\frac{l_2}{R} (9E_{3c} + \dots)$$

$$\vec{F}_{Ialt/II} = m_{altII} R\omega^2 \left(K_{1s} \sin \theta + K_{1c} \cos \theta + K_{2s} \sin 2\theta + K_{2c} \cos 2\theta + K_{3s} \sin 3\theta + K_{3c} \cos 3\theta + \dots \right) \vec{y}$$

Les formules de passage des repères $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au repère (O, x, y, z) étant établies:

$$\begin{cases} \vec{x}_0 = \vec{x} \cos \frac{\delta}{2} - \vec{y} \sin \frac{\delta}{2} \\ \vec{y}_0 = \vec{x} \sin \frac{\delta}{2} + \vec{y} \cos \frac{\delta}{2} \\ \vec{z}_0 = \vec{z} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{x} = \vec{x}_0 \cos \frac{\delta}{2} + \vec{y}_0 \sin \frac{\delta}{2} \\ \vec{y} = -\vec{x}_0 \sin \frac{\delta}{2} + \vec{y}_0 \cos \frac{\delta}{2} \\ \vec{z} = \vec{z}_0 \end{cases}$$

La force résultante due aux masses alternatives vaut ainsi:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{Ialt} &= \vec{F}_{Ialt/I} + \vec{F}_{Ialt/II} = F_{Ialt/I} \vec{y}_0 + F_{Ialt/II} \vec{y} = m_{B1} R\omega^2 \left(\cos \theta + K_2 \cos 2\theta \right. \\
 &\quad \left. + K_4 \cos 4\theta + \dots \right) \left(\vec{x} \sin \frac{\delta}{2} + \vec{y} \cos \frac{\delta}{2} \right) + m_{BII} R\omega^2 \left(K_{1s} \sin \theta + K_{1c} \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. + K_{2s} \sin 2\theta + K_{2c} \cos 2\theta + K_{3s} \sin 3\theta + K_{3c} \cos 3\theta + \dots \right) \left(-\vec{x} \sin \frac{\delta}{2} + \vec{y} \cos \frac{\delta}{2} \right) \\
 &= \left\{ \left[m_{B1} (\cos \theta + K_2 \cos 2\theta + K_4 \cos 4\theta + \dots) \right] \sin \frac{\delta}{2} \vec{x} + \left[m_{B1} (\cos \theta + K_2 \cos 2\theta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + K_4 \cos 4\theta + \dots) + m_{B2} (K_{1s} \sin \theta + K_{1c} \cos \theta + K_{2s} \sin 2\theta + K_{2c} \cos 2\theta \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + k_{35} \sin 3\theta + k_{3c} \cos 3\theta + \dots \Big] \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \vec{Y} \Big\} R \omega^2 \\
 = & \left\{ \left[-m_{BII} k_{15} \sin \theta + (m_{BI} - m_{BII} k_{1c}) \cos \theta + (-m_{BII} k_{25} + \dots) \sin 2\theta + (m_{BI} k_2 - m_{BII} k_{2c} + \dots) \cos 2\theta \right. \right. \\
 & \left. \left. + (-m_{BII} k_{35} + \dots) \sin 3\theta + (-m_{BII} k_{3c} + \dots) \cos 3\theta + \dots \right] \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \vec{X} + \left[m_{BII} k_{15} \sin \theta + (m_{BI} \right. \right. \\
 & \left. \left. + m_{BII} k_{1c} + \dots) \cos \theta + (m_{BII} k_{25} + \dots) \sin 2\theta + (m_{BI} k_2 + m_{BII} k_{2c} + \dots) \cos 2\theta \right. \right. \\
 & \left. \left. + (m_{BII} k_{35} + \dots) \sin 3\theta + (m_{BII} k_{3c} + \dots) \cos 3\theta + \dots \right] \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \vec{Y} \right\} R \omega^2
 \end{aligned}$$

Soit en posant:

$$T_{15} = -m_{BII} k_{15} \sin \frac{\gamma}{2} \quad \text{et:} \quad P_{15} = m_{BII} k_{15} \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$T_{1c} = (m_{BI} - m_{BII} k_{1c} + \dots) \sin \frac{\gamma}{2} \quad P_{1c} = (m_{BI} + m_{BII} k_{1c} + \dots) \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$T_{25} = (-m_{BII} k_{25} + \dots) \sin \frac{\gamma}{2} \quad P_{25} = (m_{BII} k_{25} + \dots) \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$T_{2c} = (m_{BI} k_2 - m_{BII} k_{2c} + \dots) \sin \frac{\gamma}{2} \quad P_{2c} = (m_{BI} k_2 + m_{BII} k_{2c} + \dots) \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$T_{35} = (-m_{BII} k_{35} + \dots) \sin \frac{\gamma}{2} \quad P_{35} = (m_{BII} k_{35} + \dots) \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$T_{3c} = (-m_{BII} k_{3c} + \dots) \sin \frac{\gamma}{2} \quad P_{3c} = (m_{BII} k_{3c} + \dots) \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\vec{F}_{Ialt} = R \omega^2 \left[(T_{15} \sin \theta + T_{1c} \cos \theta + T_{25} \sin 2\theta + T_{2c} \cos 2\theta + T_{35} \sin 3\theta + T_{3c} \cos 3\theta + \dots) \vec{X} \right. \\
 \left. + (P_{15} \sin \theta + P_{1c} \cos \theta + P_{25} \sin 2\theta + P_{2c} \cos 2\theta + P_{35} \sin 3\theta + P_{3c} \cos 3\theta + \dots) \vec{Y} \right]$$

2.3 Equilibrage des inerties alternatives:

2.3.1 Composition des forces:

La force d'inertie alternante \vec{F}_{Ialt} se décompose en:

- Une série d'efforts de tamis d'ordres 1 et multiples: \rightarrow
 $R \omega^2 (T_{15} \sin \theta + T_{1c} \cos \theta + T_{25} \sin 2\theta + T_{2c} \cos 2\theta + T_{35} \sin 3\theta + T_{3c} \cos 3\theta + \dots) \vec{X}$

- Et une autre d'efforts de pilon de mêmes ordres: \rightarrow
 $R \omega^2 (P_{15} \sin \theta + P_{1c} \cos \theta + P_{25} \sin 2\theta + P_{2c} \cos 2\theta + P_{35} \sin 3\theta + P_{3c} \cos 3\theta + \dots) \vec{Y}$

Faisant remarquer que pour l'effort de tamis comme pour celui de pilon de tout ordre, moyennant les transformations trigonométriques suivantes:

$$a \sin x + b \cos x = a \sin x + \frac{b}{a} \cos x$$

soit: $\gamma / \cot \gamma = b$

on aura: avec $A = a / \sin \gamma$
 $a \sin x + b \cos x = a (\sin x + \cot \gamma \cos x) = a \left(\sin x + \frac{\cos \gamma \cos x}{\sin \gamma} \right) = \frac{a}{\sin \gamma} \cos(x - \gamma) = A \cos(x - \gamma)$

On peut ainsi écrire pour les efforts de tamis et ceux de pilon d'ordre p:

$$T_{ps} \sin p\theta + T_{pc} \cos p\theta = T_p \cos(p\theta - \gamma_p)$$

$$\text{où: } T_p = \frac{T_{ps}}{\sin \gamma_p}$$

$$\gamma_p = \text{arctg} \frac{T_{ps}}{T_{pc}}$$

de même:

$$P_{ps} \sin p\theta + P_{pc} \cos p\theta = P_p \cos(p\theta - \gamma_p)$$

$$\text{où: } P_p = \frac{P_{ps}}{\sin \gamma_p}$$

$$\gamma_p = \frac{P_{ps}}{P_{pc}}$$

Ainsi, les efforts de tamis et de pilon d'ordre p s'écrivent sous la forme:

$$T_p R \omega^2 \cos(p\theta - \varphi_p) \text{ et } P_p R \omega^2 \cos(p\theta - \varphi_p)$$

La composition de ces 2 efforts (de tamis et de pilon) d'ordre p est un vecteur d'intensité variable, tournant à la vitesse $p\dot{\theta}$, décrivant ainsi une ellipse centrée en O , de demi-axes $T_p R \omega^2$ et $P_p R \omega^2$ respectivement sur les axes \vec{x} et \vec{y} .

Cette résultante peut être théoriquement équilibrée selon les méthodes de décomposition de l'ellipse en éléments simples.

2.3.2 Composition des couples:

Les couples résultants du moteur en "U", système bielle-biellette sont obtenus en faisant le produit vectoriel des forces alternatives par vecteurs position.

$$\vec{C}_I = \sum_{\text{rangée}} [F_{I \text{ alt}} / I_n \wedge \vec{OA}_n + F_{I \text{ alt}} / I_n \wedge \vec{OA}_n]$$

Il est clair que cette définition ne peut s'appliquer que sur un moteur bien défini.

On peut d'une autre manière composer les couples d'inertie agissant au niveau des rangées I et II.

Celui relatif à la rangée I est analogue au couple obtenu pour le moteur en ligne, à savoir l'expression du couple de galop d'ordre p :

$$K'_p \cos p(\theta - \varphi) \vec{x}_0$$

Le moteur de la rangée I a donc un couple de galop et de lacet d'ordre p de la forme:

$$K'_p \cos p(\theta - \varphi) \vec{x}_0 = K'_p \cos p(\theta - \varphi) \begin{pmatrix} \cos \frac{\chi}{2} \\ \sin \frac{\chi}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

En ce qui concerne le couple agissant au niveau de la rangée II, une analogie permet de formuler son expression; soit:

$$[K''_{ps} \sin p(\theta + \varphi) + K''_{pc} \cos p(\theta + \varphi)] \vec{x}$$

Le moteur de la rangée II a donc un couple de galop et de lacet d'ordre p de la forme:

$$[K''_{ps} \sin p(\theta + \varphi) + K''_{pc} \cos p(\theta + \varphi)] \vec{x} = K''_{ps} \sin p(\theta + \varphi) + K''_{pc} \cos p(\theta + \varphi) \begin{pmatrix} \cos \frac{\chi}{2} \\ -\sin \frac{\chi}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Ces 2 couples se composent pour donner le couple résultant d'ordre p pour le moteur en "U", système bielle-biellette:

$$\begin{pmatrix} [K''_{ps} \sin p(\theta + \xi) + (K'_p + K''_{pc}) \cos p(\theta + \xi)] \cos \frac{\gamma}{2} \\ [-K''_{ps} \sin p(\theta + \xi) + (K'_p - K''_{pc}) \cos p(\theta + \xi)] \sin \frac{\gamma}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

c'est à dire:

- Un couple de galop d'ordre p de la forme:

$$C_g \sin p(\theta + \xi) + C_c \cos p(\theta + \xi) \quad \text{où:} \quad \begin{aligned} C_g &= K''_{ps} \cos \frac{\gamma}{2} \\ C_c &= (K'_p + K''_{pc}) \cos \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

- Un couple de lacet d'ordre p de la forme:

$$D'_c \sin p(\theta + \xi) + D_c \cos p(\theta + \xi) \quad \text{où:} \quad \begin{aligned} D_g &= -K''_{ps} \sin \frac{\gamma}{2} \\ D_c &= (K'_p - K''_{pc}) \sin \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

Ces parties de couples de galop et de lacet d'ordre p prises 2 à 2 se composent en un couple résultant tournant à la vitesse $p\dot{\theta}$, d'intensité variable, décrivant ainsi 2 ellipses, de centres O , de demi-axes $(C_g \text{ et } D_g)$ et $(C_c \text{ et } D_c)$ respectivement sur les axes \vec{x}_0 et \vec{y}_0 .

Ces couples sont parfaitement équilibrables en théorie par décomposition de l'ellipse en éléments simples, mais on tient à préciser que seul l'ordre 1 est d'intérêt pratique.

D. ETUDE DE L'EQUILIBRE DES MOTEURS EN "V" SYSTEME BIELLES ACCOLEES.

D.O GENERALITES:

En première investigation, on peut considérer le moteur en V, système bielle accolées comme étant composé de deux rangées de cylindres faisant un angle δ entre elles.

La manivelle d'un tel moteur est formée d'un long maneton, divisé en deux moitiés décalées d'un angle α et distantes d'une largeur de bielle approximativement.

En général, un moteur en V, système bielles accolées est construit de façon que les deux bielles travaillent côte à côte sur le même maneton, en d'autres termes, $\alpha = 0$ cependant l'angle δ d'ouverture du V doit satisfaire la condition de conformité et meilleure régularité du couple moteur à savoir,

$$\delta = \frac{720}{n} \quad n \text{ étant le nombre de cylindres.}$$

Si on choisit un angle δ' différent de δ , soit pour des raisons d'encombrement, soit que l'on veut avoir partout le même angle du V pour une suite de constructions de moteurs en V, de nombres de cylindres différents, on peut quand même obtenir la régularité cyclique, en utilisant des coudes déplacés d'un angle:

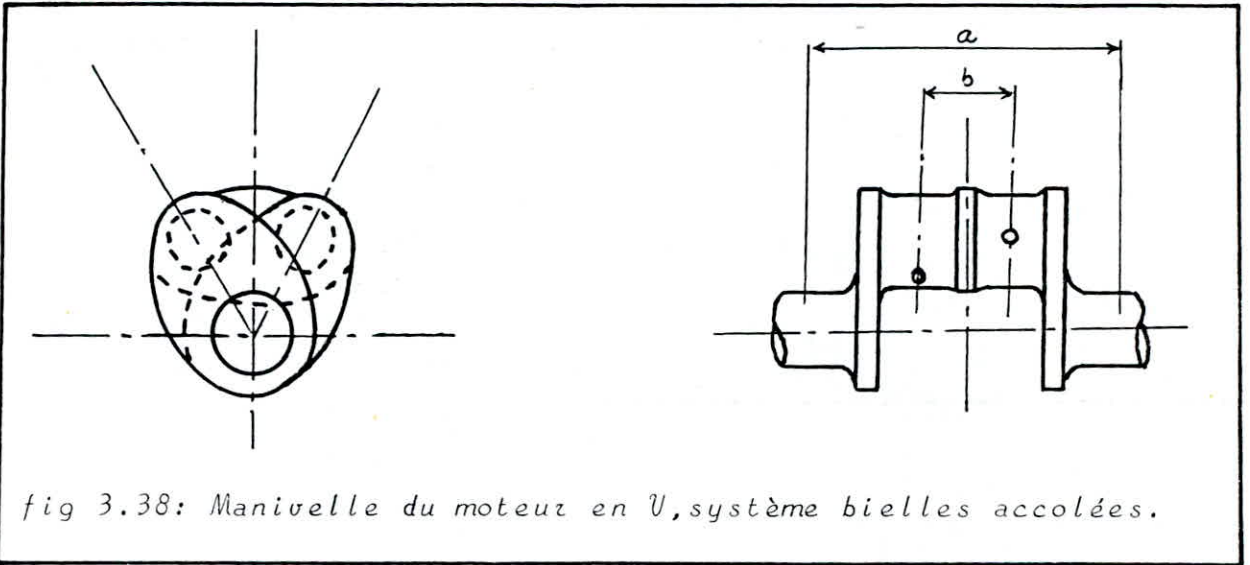
$$\alpha = \delta' + j\delta \quad \text{où } j = 0, 1, 2, \dots$$

On obtient ainsi une unité particulière de moteurs en V, système bielles accolées.

On cite à titre d'exemple, le moteur 8 cylindres en V de type Ford M12, dont $\delta = 60^\circ$ et $\alpha = 240^\circ$, où le moteur pris comme exemple d'application de cette partie formé de 8 cylindres en V, à 4 temps dont δ et α valent tous deux 60° . Ce dernier est connu sous le nom de GMC DC 37 de la "Corporation Général Motors".

D.1 EQUILIBRAGE DES MASSES ROTATIVES:

Les bielles du moteur en V, système bielles accolées identiques à celles des moteurs en ligne, leur modèle dynamiquement équivalent est ainsi le même.



Chaque masse rotative est constituée de celle de la bielle, ajoutée à la masse d'une demi-manivelle.

Ces dernières engendrent des efforts d'intensité constante, tournant à la vitesse du vilebrequin, se composant chacune en un effort de tamis et un autre de pilon d'ordre 1.

En adoptant le repère $(O, \vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c)$ où \vec{y}_c porte la bissectrice de l'angle α , les efforts de tamis s'éliminent mutuellement, ceux de pilon s'ajoutent pour donner l'effort de pilon d'ordre 1 du moteur en V, système bielles accolées, soit:

$$F_{\text{rot}} = 2 m_{\text{rot}} r \omega^2 \cos \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

Cette dernière est parfaitement équilibrable par des contrepoids tournant à la vitesse du vilebrequin, dans un sens et dans l'autre.

De plus, les masses rotatives engendrent dans le cas de moteurs dont le nombre de cylindres dépasse 2, des couples de galop et de lacet d'ordre 1.

Cependant, l'adoption de vilebrequin dont le plan médian est plan de symétrie permet d'éliminer ces derniers.

D.2 EQUILIBRAGE DES MASSES ALTERNATIVES:

Les masses oscillantes, composées de celles des pistons et des pieds de bielles engendrent des efforts d'ordres multiples que l'on décompose en vecteurs tournant dans un sens et dans l'autre, selon les procédures déjà illustrées.

Les forces dues aux masses oscillantes d'ordre 1, se composent

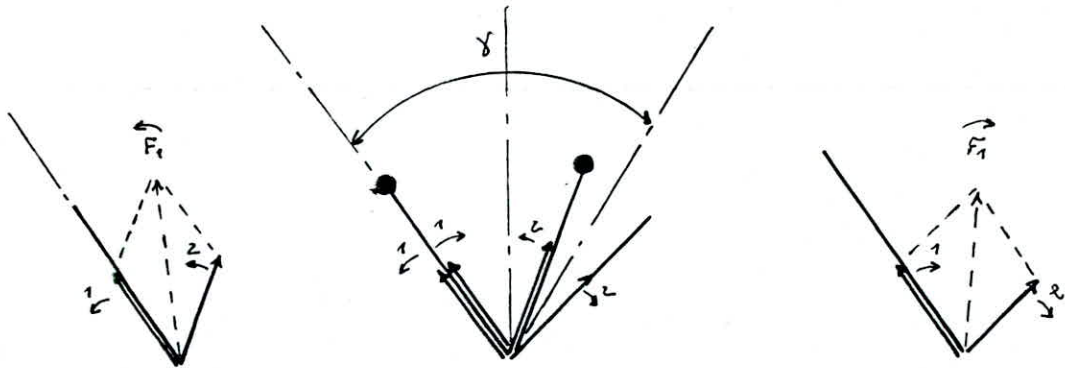


fig 3.39: Equilibrage des masses alternatives d'ordres 1 et 2.

En 2 forces de masse, \vec{F}_I et \vec{F}_I tournant inversement à la vitesse du vilebrequin:

et $\vec{F}_I = m_{alt} r \omega^2 \cos \frac{\alpha}{2} \dots \dots \dots (2)$

$\vec{F}_I = m_{alt} r \omega^2 \cos (\gamma - \frac{\alpha}{2}) \dots \dots \dots (3)$

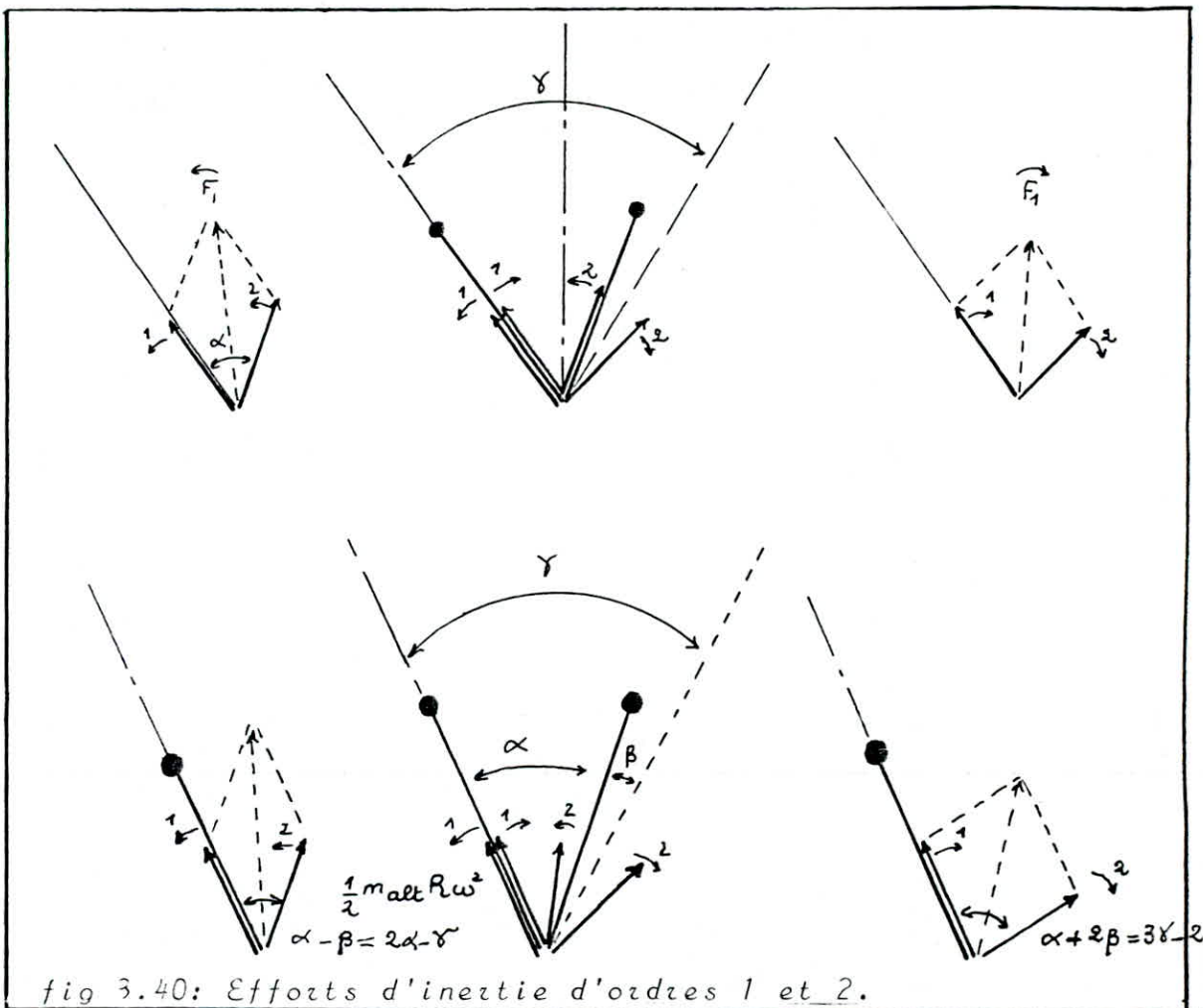
m_{alt} étant la masse oscillante d'une unité de cylindres.

\vec{F}_I est décalée par rapport aux coudes de $\frac{\alpha}{2}$, \vec{F}_I d'un angle $\gamma - \frac{\alpha}{2}$.

Des relations (1), (2), et (3), on peut prévoir une compensation totale des forces d'inertie par des contrepoids sur le vilebrequin et ceci pour tous les moteurs en V dont le vilebrequin présente une symétrie et $\gamma - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$.

Pour un tel cas, les forces des masses rotatives dans le sens du vilebrequin peuvent d'après les relations (1), (2) être compensées par des contrepoids placés sur le vilebrequin alors que celles tournant dans le sens inverse sont, d'après l'équation (3), nulles, vu que $\gamma - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$.

Cette disposition est courante pour les moteurs en V système bielles accolées, ces dernières travaillant côte à côte sur le même maneton ($\gamma = 90^\circ, \alpha = 0^\circ$), où pour les moteurs en V avec des manivelles décalées de tel que $\gamma - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$, soit par exemple $\gamma = 60^\circ$ et $\alpha = -60^\circ$.



De même, les forces dues aux masses oscillantes d'ordre 2 se composent (fig 4), en 2 forces d'inertie, qui tournent inversement avec une vitesse double de celle du vilebrequin, $\vec{F}_{II} \pm \vec{F}_{II}$ où:

$$\vec{F}_{II} = m_{alt} \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \lambda \cos\left(\alpha - \frac{\gamma}{2}\right) \dots \dots \dots (5)$$

et $\vec{F}_{II} = m_{alt} \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \lambda \cos\left(\frac{3}{2}\gamma - \alpha\right) \dots \dots \dots (6)$

Si les 2 demi-manetons sont décalés d'une distance b (fig (1) et ((2)), des moments de sens contraire d'ordres 1 et 2 résultent de ce déplacement comme l'illustre les

figures (5) et (6):

$$\vec{M}_1 = \frac{1}{2} m_{alt} r \omega^2 b \sin \frac{\alpha}{2} \quad (7)$$

$$\vec{M}_1 = \frac{1}{2} m_{alt} r \omega^2 b \sin \left(\delta - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (8)$$

$$\vec{M}_2 = \frac{1}{2} m_{alt} r \omega^2 \lambda b \sin \left(\alpha - \frac{\gamma}{2} \right) \quad (9)$$

$$\vec{M}_2 = \frac{1}{2} m_{alt} r \omega^2 \lambda b \sin \left(\frac{3\gamma}{2} - \alpha \right) \quad (10)$$

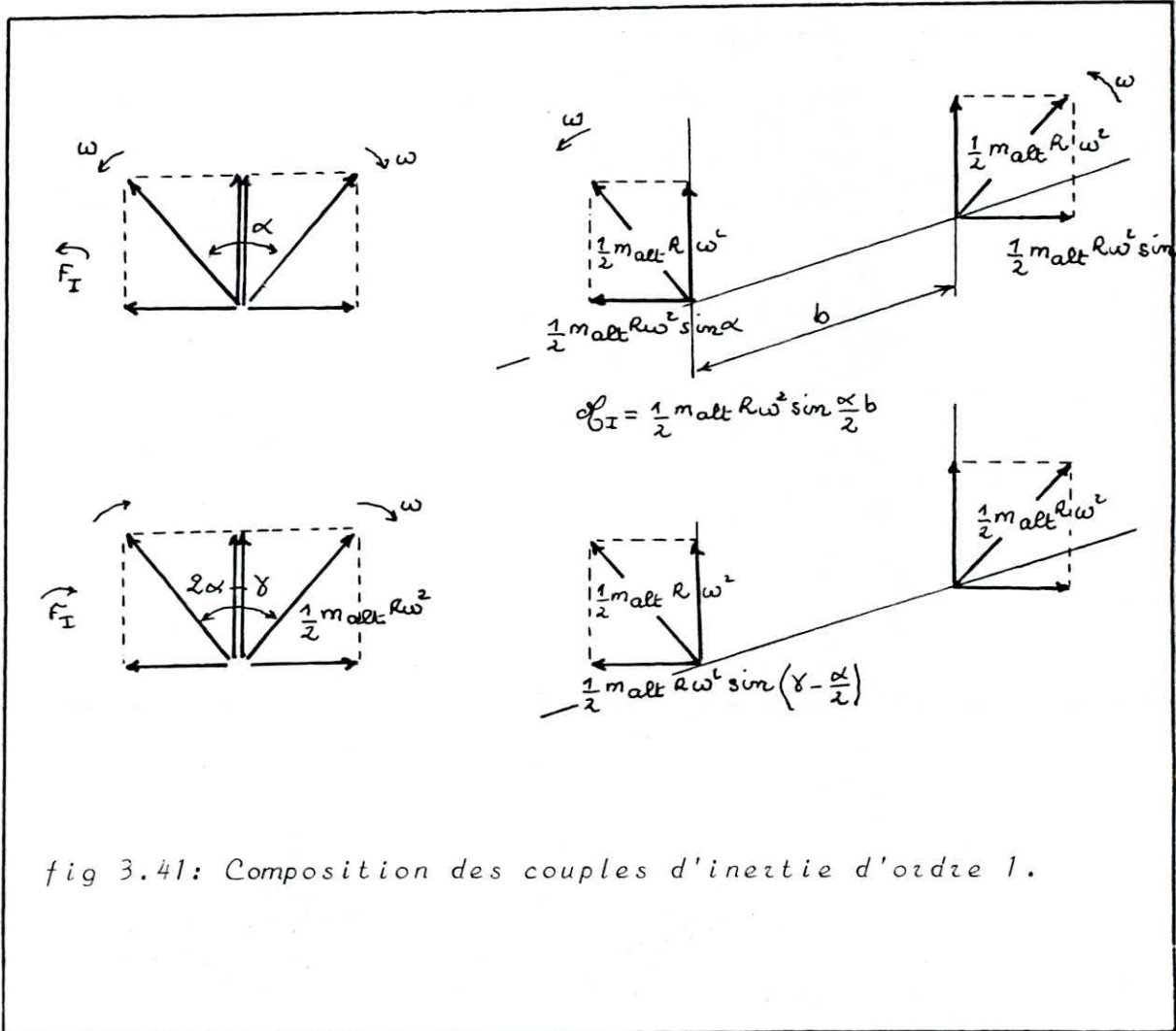
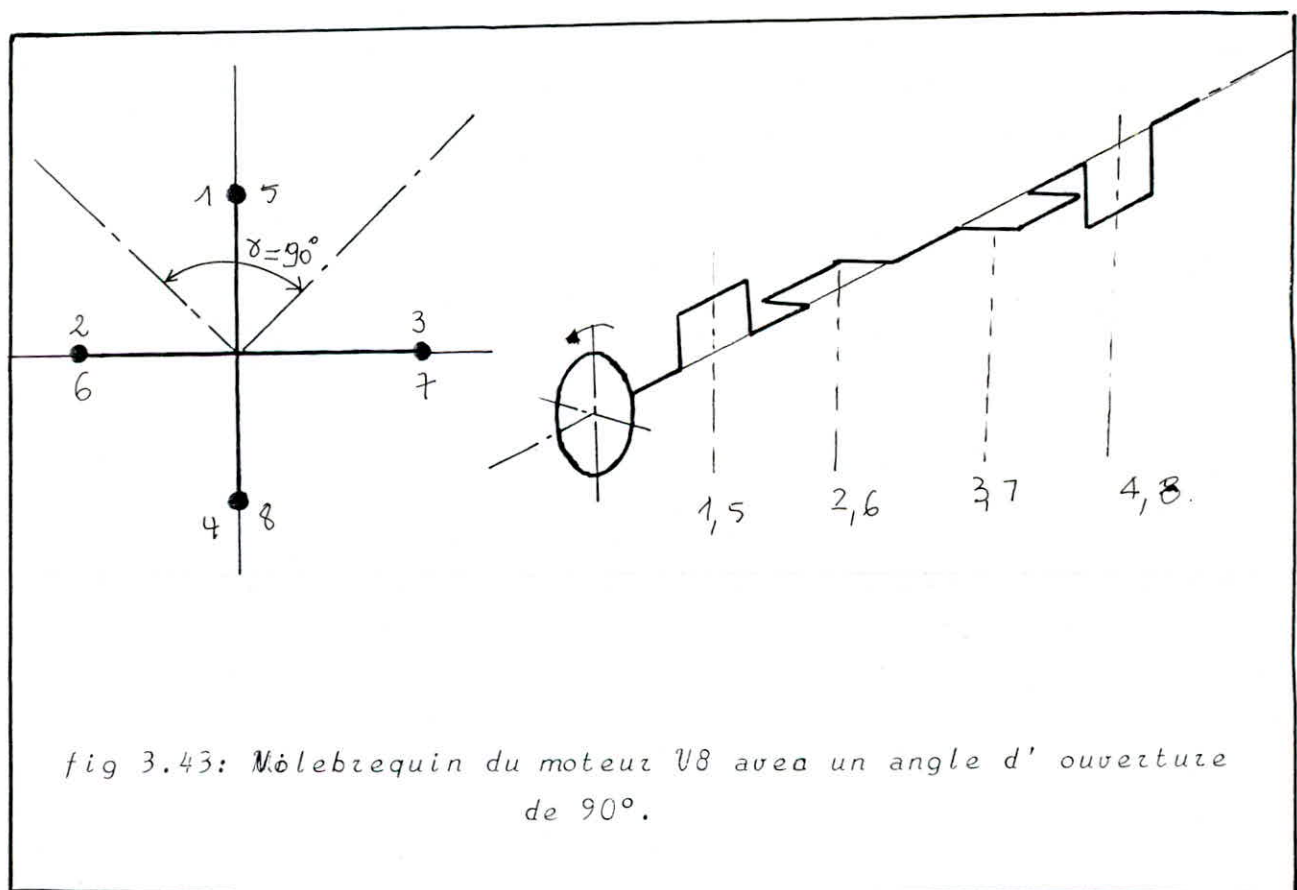
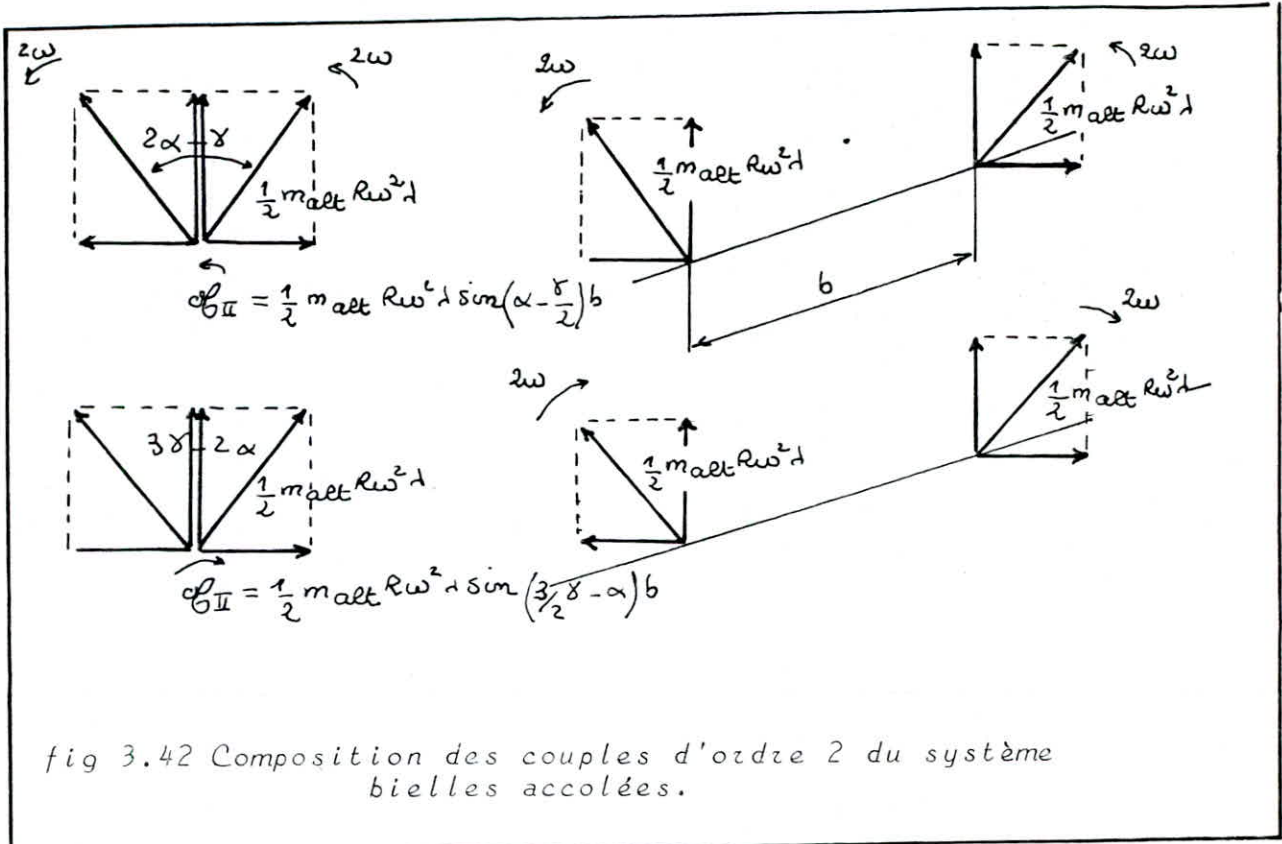


fig 3.41: Composition des couples d'inertie d'ordre 1.

Le moment \vec{M}_1 peut être facilement équilibré puisque 2 vecteurs de forces $\frac{1}{2} m_{alt} r \omega^2$ tournant dans le sens du vilebrequin sont complètement compensés par des contrepoids, comme déjà illustrés précédemment sur les figures (5) et (6).



Les forces de masses rotatives de l'ordre 1 et 2 (equs (1) à (6)) peuvent à présent être composées selon les règles déjà établies pour les moteurs en ligne.

Il est à noter que les forces et moments d'inertie sont nuls pour les lignes d'arbre dont le plan médian est plan de symétrie.

Les moments de masses rotatives d'ordres 1 et 2 résultent des forces de masses rotatives d'ordres 1 et 2 (equs (1) et (2)), dans un moteur complet composé de plusieurs unités de moteurs en V sont déterminés d'après les mêmes règles que pour les moteurs en ligne, à l'égard de la grandeur et la direction.

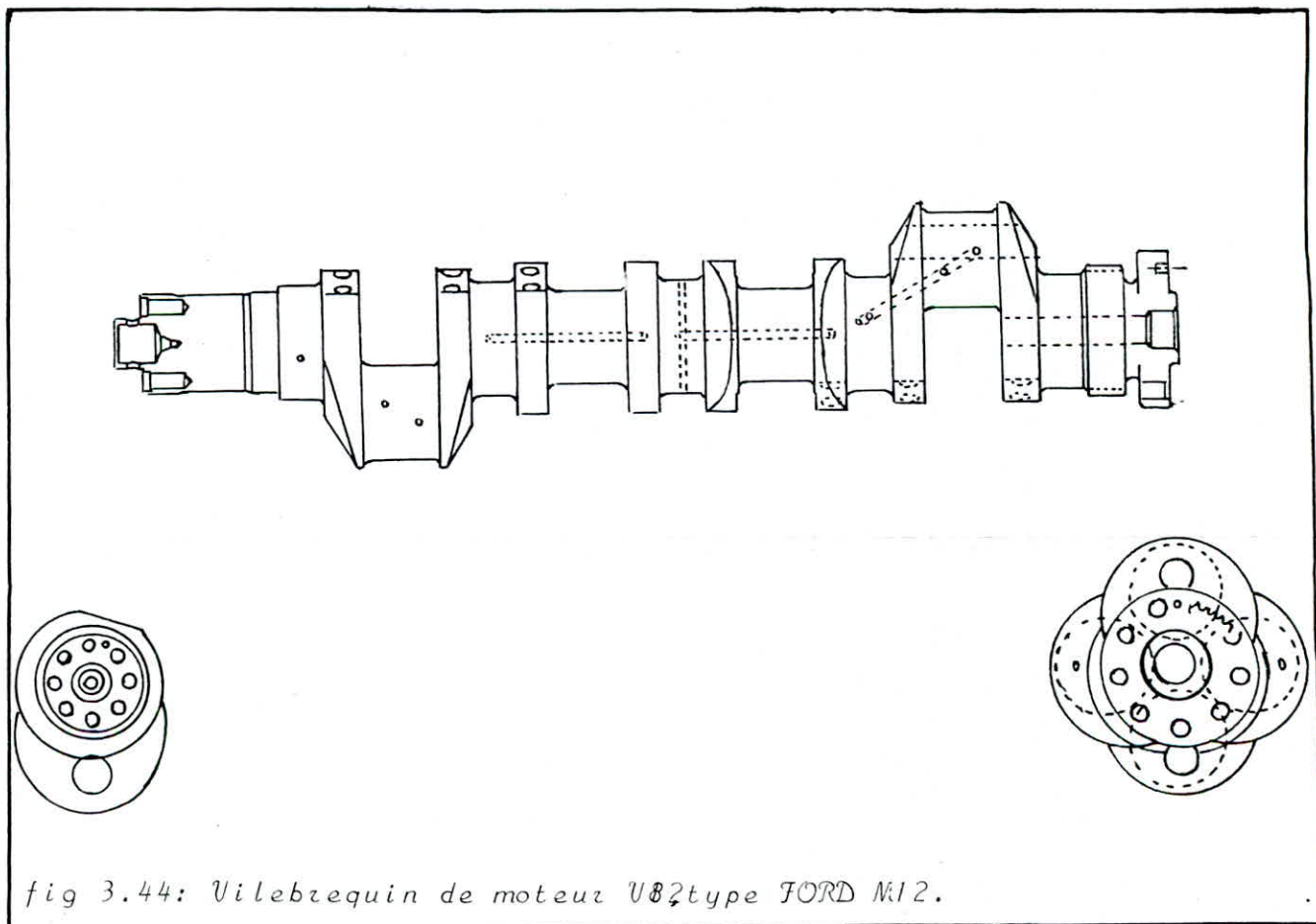
D.3 EQUILIBRAGE DE MOTEUR EN V SYSTEME BIELLES ACCOLEES:

3.0. Moteur 8 cylindres, à 4 temps avec un angle d'ouverture de 90° :

Il s'agit ici de la construction normale d'un moteur en V à 8 cylindres avec 2 bielles disposées sur le même maneton.

L'équilibrage parfait peut être obtenu en ajoutant des contrepoids au vilebrequin.

Un tel vilebrequin est représenté par la figure 7 :



Dans ce type de moteurs $\delta = 90^\circ$ et l'angle de déplacement des coudes est $\alpha = 0^\circ$, puisque les 2 bielles se trouvent portées par le même maneton.

Les relations déduites antérieurement relativement aux forces d'ordre 1 donnent pour le même moteur considéré, d'après l'équ (1):

$$F_{rot} = 2 m_{rot} r \omega^2 \cos 0$$

puisque l'équ () se rapporte au cas général de 2 coudes déplacés d'un angle α l'un par rapport à l'autre. Le facteur 2 résulte du fait que pour les moteurs 8 cylindres, avec une ouverture du V de 90° , les coudes ne sont pas déplacés, et les bielles se trouvent côte à côte.

Pour m_{rot} , il faut prendre dans ce cas la moitié de la masse de la manivelle ajoutée à celle d'une bielle en A, soit:

$$m_{rot} = \frac{m_{mani}}{2} + m_A$$

Il en résulte de l'équ (2):

$$\vec{F}_1 = m_{alt} r \omega^2 \cos 0$$

et de l'équ (3):

$$\vec{F}_2 = m_{alt} r \omega^2 \cos 90^\circ$$

La force d'inertie rotative d'ordre 1 tournant dans le sens contraire du vilebrequin est nul, celles dans le sens de dernier F_{rot} se combine avec F_1 pour donner une force tournante F_r à la vitesse du vilebrequin, dans le sens de ce dernier.

soit:

$$\vec{F}_r = (2 m_{rot} + m_{alt}) r \omega^2$$

Cette dernière est parfaitement équilibrable par les contrepoids placés sur le vilebrequin, cependant ces dernières engendrent des moments d'inertie à la compensation desquelles, on pourrait disposer à chaque coude des contrepoids pour compenser F_r à chaque coude, avec quoi aussi le moment d'inertie d'ordre 1 serait totalement équilibré.

Il est à noter cependant que cette technique nécessite de nombreux et importants contrepoids pouvant provoquer des vibrations rotatives.

Il est plus avantageux, de déterminer le moment d'inertie d'ordre 1 d'après les règles déjà exposées, selon la figure 9:

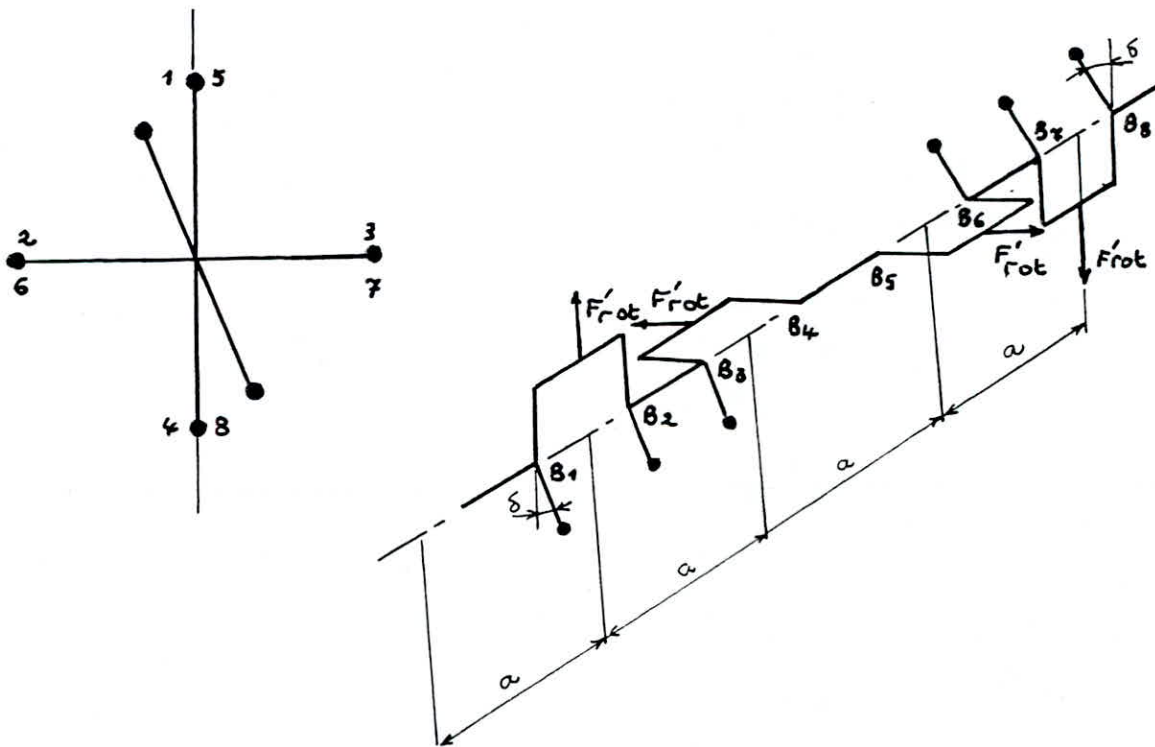


fig 3.45: Equilibrage des masses rotatives du V8, système bielles côte à côte.

Ainsi:

$$M_I = \sqrt{10} (2m_{rot} + m_{rot}) r \omega^2 a$$

Ce moment tourne dans le sens du vilebrequin et est décalé par rapport au plan des coudes 1 et 4 d'un angle de $18,4^\circ$.

Dans ce plan, il faut disposé des contrepoids produisant un contre-moment équilibrant celui des inerties M_I .

Ces derniers sont à cet effet convenablement disposés aux montants B1 et B3, respectivement B6 et B8, allégeant par le fait les appuis principaux 2 et 4.

Il est opportun de faire en sorte que les montants B_1 et B_3 soient un peu plus grands pour pouvoir y disposer de plus grands contrepoids.

En effet, dans le cas contraire, il serait difficile d'arranger les contrepoids nécessaires à l'intérieur du carter, particulièrement pour les moteurs à grande vitesse, quoi que cela soit très efficace à cause des grandes distances.

Un tel arrangement altère la compensation des moments fléchissant à l'intérieur et produit une sollicitation de flexion supplémentaire dans le vilebrequin.

Avec de tels arrangements de contrepoids (fig (9)) le moteur est complètement compensé par le 1er ordre.

Les moments d'inertie d'ordres 1 et 2 dues aux déplacements b le long de l'axe de la bielle (equs (6°), (7) et (8)) se composent comme des forces de masse correspondants aux 4 manivelles disparaissent vu que le vilebrequin présente une symétrie par rapport au plan médian (fig 8).

Les forces d'inertie de second ordre (equs (4), et (5)), et les moments résultant de second ordre sont de même égaux à zéro pour les mêmes raisons de symétrie, comme on le constate sur le vilebrequin (symétrie centrale) et sur l'arrangement des bielles (symétrie par rapport à l'axe central perpendiculaire).

3.1. Moteur à 4 temps, 8 cylindres, avec un angle d'ouverture de 60° :

Pour des raisons d'encombrement, il est parfois désiré de diminuer l'angle d'ouverture du \mathcal{V} , par exemple $\delta' = 60^\circ$.

Dans ce cas une suite d'allumages uniformes ne serait pas garantie vu que:

$$\delta' = \frac{720}{2} = \frac{720}{8} = 90^\circ$$

Cependant, pour obtenir quand même une suite uniforme et donc un moment de torsion ou couple régulier, il convient de décaler les coudes des unités du \mathcal{V} d'un angle α l'un par rapport à l'autre.

La condition pour une suite d'allumages est dans ce cas $\delta' = \alpha$, c'est à dire, les coudes sont aussi déplacés d'un angle de 60° l'un par rapport à l'autre (fig 10).

D'après les equs (1) à (3) il résulte maintenant pour les forces d'inertie rotatives d'une unité du \mathcal{V} :

$$F_r = 2 m_{rot} r \omega^2 \cos \frac{\alpha}{2} \quad \alpha = 60^\circ$$

soit: $F_r = 2 m_{rot} r \omega^2 \cdot 0.866$

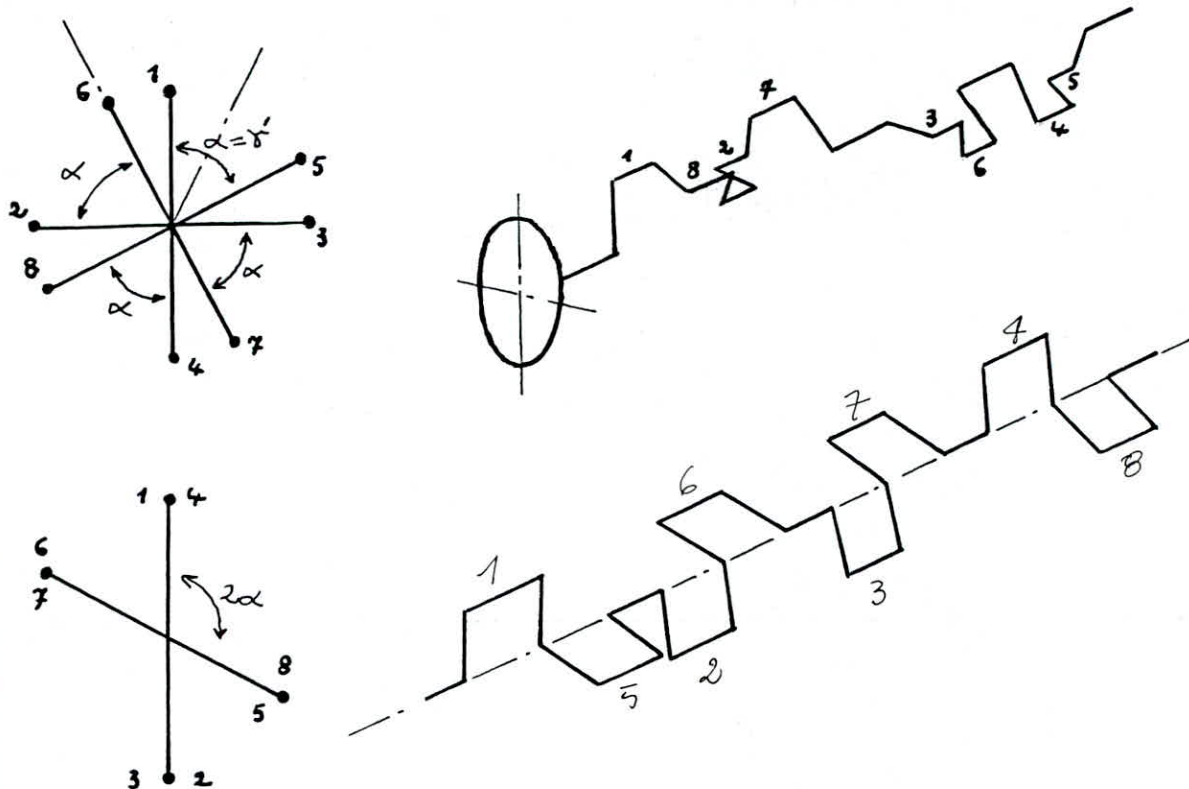


fig 3.46: Vilebrequin du V8, type GMC DC 37.

$$\vec{F}_I = m_{alt} r \omega^2 \cos \frac{\delta}{2}$$

soit: $\vec{F}_I = m_{alt} r \omega^2 0.866$

donnant lieu à: $F'_r = (2m_{rot} + m_{alt}) r \omega^2 0.866$

tournant dans le sens du vilebrequin et reste en arrière de la manivelle 1 de l'angle $\frac{\delta}{2} = 30^\circ$.

$$\vec{F}_I = m_{alt} r \omega^2 \cos(\delta - \frac{\delta}{2}) \text{ où: } \delta - \frac{\delta}{2} = 30^\circ$$

$$\vec{F}_I = m_{alt} r \omega^2 0.866$$

\vec{F}_I tournant contrairement au sens de rotation du vilebrequin et est, si la manivelle 1 se trouve à la position extrême par l'angle $\delta - \frac{\delta}{2} = 30^\circ$, contre celle déplacée contrairement au sens du vilebrequin.

Similairement à l'exemple précédent, les forces d'inertie du premier ordre se compensent vu la symétrie centrale que présente le vilebrequin.

Analogiquement à la (fig 1) on obtient pour moments d'inertie d'ordre 1:

- Tournant dans le sens du vilebrequin:

$$\widehat{M}_I = \sqrt{10} F_r' a$$

\widehat{M}_I Restant en arrière de la manivelle 1, d'un angle:

$$\frac{\alpha}{2} - 18,4^\circ \text{ soit } 11,6^\circ.$$

Ce moment \widehat{M}_I peut-être compensé par des contrepoids placés sur le vilebrequin d'après les règles données dans l'exemple précédent (fig 11).

- Tournant contre le sens du vilebrequin:

$$\widehat{M}_I = \sqrt{10} \widehat{F}_I a$$

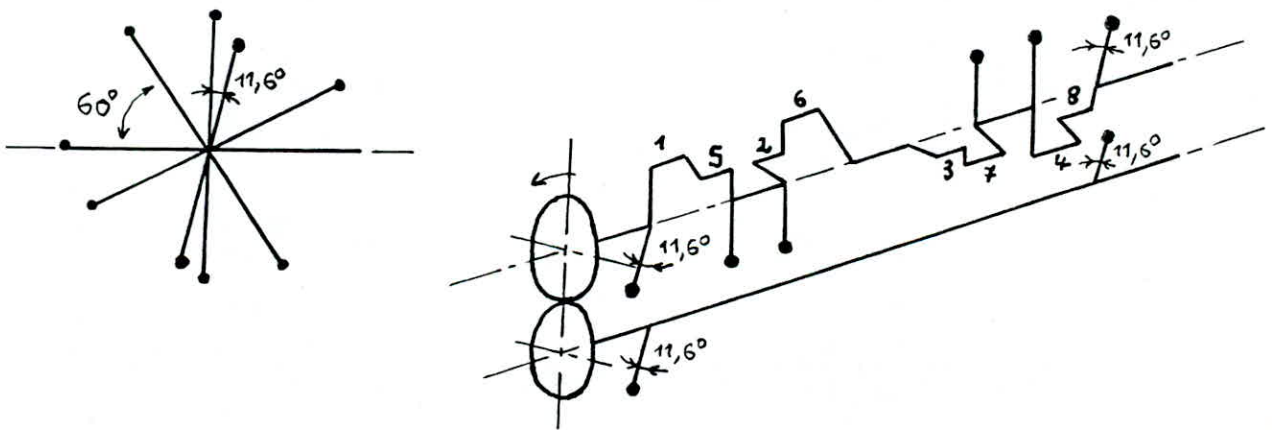


fig 3.47: Equilibrage du vilebrequin du moteur V8, type GMC DC37.

CONCLUSION

Le présent ouvrage permet d'avoir une meilleure assise et compréhension améliorée de cette machine thermique qu'est le moteur à combustion interne.

Cette étude détaillée sur le dimensionnement des organes mobiles, le graissage et l'équilibrage du moteur doit cependant être améliorée et enrichie avant de passer au stade de réalisation.

En effet, vu le facteur temps qui nous a un peu limité on aurait pu faire une analyse dimensionnelle poussée, par la méthode des éléments finis, avec étude de convergence du maillage, laquelle serait, je l'espère, reprise par d'autres élèves ingénieurs.

Aussi, nous n'avons considéré, concernant le graissage des paliers, que le cas stationnaire, lequel repose sur certaines hypothèses simplificatrices, alors que le régime transitoire ou instationnaire est plus réaliste, traduisant par le fait le fonctionnement réel des paliers.

Je tiens de même à souligner le rôle prépondérant que détient l'aspect expérimental dans de telles analyses de pointe, les plus élémentaires étant, la Photoplastisymétrie, dont le but est de localiser les contraintes et renforcer la structure dans les endroits sollicités, les sondes de pression pour explorer les zones graissées sous charges, ainsi que la Stroboscopie permettant de visualiser la position des centres de gravité des élément tournant, pour l'équilibrage du vilebrequin en particulier, dont l'effet est prépondérant, en souhaitant que nos responsables axeront leurs efforts pour équiper nos laboratoires.

Enfin, j'espère que ce modeste travail a atteint le but recherché, et que par son intermédiaire, j'aurais contribué à la réalisation du premier moteur Algérien.

***** BIBLI O G R A P H I E *****

A. OUVRAGES



- 1/ Pistons pour moteur a combustion interne.
par Bernard Girounet et Guy Louradour
Professeur a l'E.N.S.A.M de Paris
Docteurs es Sciences
- 2/ Science et technique du moteur Diesel et de transport.
par R. Brun
Societe technique
- 3/ Quillet 'Encyclopedie des Sciences industrielles'
Tome : Mecanique - Application - Transport.
- 4/ Quillet 'Encyclopedie Technique de l'Ingénieur'
Tome: B.3
- 5/ Di Konstruktion Schnelllaufender Verbrennungsmotoren.
- 6/ Policopie: Element de lubrification
par R. Boudet
Departement Mecanique
- 7/ Les lubrifiants moteur. Pertes par frottement et usure
Publication de l'institut francais du petrol.
Editions technip
- 8/ Graissage et Tribologie. Complements techniques.
par R. Lefevre
Edition technip
- 9/ Mecanique des Moteurs Alternatifs.
par B. Szwedda
Societe des editions technique.



B. THESES D'INGENIEURAT

- 1/ Programme de Calcul des Elements mobiles des moteurs Diesel.
par Nacer Amrouni.
Promotion Janvier 87
- 2/ Synthèse sur l'analyse dynamique des parties internes des moteurs en ligne et en V
par Rezal Ayad
promotion juin 87
- 3/ Dimensionnement de la manivelle d'un vilebrequin.
par Salah Boutaleb
promotion janvier 87
- 4/ Etude des graissages des parties internes du moteur.
par Naceur Driss
promotion janvier 87
- 5/ Programme d'équilibrage des moteurs alternatifs en ligne et en V
par A. Rarrbo
promotion janvier 87

C. COURS

- 1/ Cours de methodes Numeriques
Enseigne par Monsieur S.Rechak
- 2/ Cours de transfert de chaleur
Enseigne par Monsieur Aidoun
- 3/ Cours de mecanique des fluides et gazodynamique
Enseigne par Monsieur A.Bahmouze

