الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention d'un diplôme d'ingénieur d'Etat

SUJET

Analyse de l'Influence des Eléments Actifs sur l'Efficacité d'un Système de Vibro-Isolation

Proposé par : Mr KSIAZEK

Etudié par : M. BENIDIR

Dirigé par : Mr KSIAZEK

PROMOTION : JANVIER 1987

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi - EL-HARRACH — ALGER

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention d'un diplôme d'ingénieur d'Etat

SUJET

Analyse de l'Influence des Eléments Actifs sur l'Efficacité d'un Système de Vibro-Isolation

Proposé par :
Mr KSIAZEK

Etudié par :
M. BENIDIR

Dirigé par :
Mr KSIAZEK

PROMOTION : JANVIER 1987

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi - EL-HARRACH — ALGER

Ministère de l'enseignement superieur et de la recherche scientifique — وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ecole nationale polytechnique — المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

Departement : Genie-Mecanique — فرع الهندسة الميكانيكية

Promoteur : Marek Ksiazek — الموجه : مارك كسيازك

Eleve ingenieur : Mohammed Benidir — الطالب المهندس : محمد بنيدير

الموضوع : تحليل تأثير العناصر الفعالة على فعالية نظام عازل للاهتزازات.

الملخص : يتمثل هذا المشروع في مقارنة فعالية المنظومات التي تحتوي على عناصر فعالة مع منظومات عازلة للاهتزازات مطاوعة كليا تحت تحريضات ذات كثافة طيفية معروفة من قبل.

Sujet : l'analyse d'influence des elements actifs sur l'efficacité d'un systeme de vibro-isolation.

Resumé : notre sujet consiste à comparer l'effécacité des systèmes comportant des elements actifs avec des systemes de vibro-isolation entierement passifs, pour des exitations de densités spectrales supposées connues.

Summary

Subject : Influence of active élements on vibro-isolation systemes.

Abstract : this study consists in comparing efficiencies of some vibro-isolation systemes with and without the active élements.

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS

Je tiens à remèrcier Monsieur Marek Ksiazek pour son aide et son suivi durant cette étude ainsi que tous ceux qui ont participés de loin ou de prés à la realisation de ce projet ainsi qu'a tous les enseignants qui ont contribués à ma formation.

DEDICACES

Je dedie ce modeste travail à :

- Mes parents
- Ma famille
- Mes amis.

I INTRODUCTION

Vibrations aleatoires :

tres souvent dans l'etude des processus dynamiques on est confronté à l'analyse d'influence possibles dont la nature ne nous est pas completement évidente.
Ces actions peuvent se presenter comme des perturba-tions exterieures aleatoires; par exemple les irregola-rités de la surface d'une route ou d'un revêtement d'aerodrome engendrant des vibrations dans les objets qui se deplacent, ect. lorsque ces influences aleatoires n'apportent pas d'ecarts importants dans le mouvement envisagé du système, elles peuvent êtres négligées, dans le cas contraire elles doivent faire l'objet d'une étude serieuse.
Ces dernières années avec l'evolution de la mecanique on s'est rendu compte que les perturbations periodiques classiques n'étaient pas éssentielles et que les methodes de la mecanique classique, fondées sur la notion de determinisme, n'étaient pas suffisantes pour comprendre et expliquer les effets physiques qui apparaissent par exemple avec les influences du profil d'une route, ect.

c'est pourquoi est apparue la necessité de construire un nouveau modele physique pour étudier ces processus dynamique et en particulier de construire un nouvel appareil mathematique permettant de decrire et de prendre en consideration de façon plus precise l'environnement d'influences non deterministe (aleatoire).

cet appareil mathematique a été a l'origine de la theorie des processus aleatoires.

theories de la vibration aleatoire.

A l'heure actuelle, la theorie de la correlation est l'une des methodes connues pour analyser les processus aleatoires; elle permet d'obtenir les caracteristiques Probabilistes de la sortie pour des caracteristiques connues de l'entrée.

Une condition est habituellement sous-entendue et supposée remplie lors de l'etude des processus aleatoires dans les systemes mecaniques, en particulier non stationnaires, à savoir : le processus comporte un nombre trés grand de realisations (c'est l'une des hypothèses qui autorisent l'utilisation de

l'appareil mathematique des processus aleatoires).
Pour étudier les processus stationnaires, l'adoption de l'hypothèse d'ergodicité du processus permet d'exami--ner une seule realisation au lieu de l'ensemble des realisations et permet d'obtenir une informa--tion suffisante pour prédire le comportement du système. Cette approche par les processus aleatoires s'avère tout a fait suffisante pour de nombreux problemes appliqués ce qui explique pourquoi la theorie de la correlation est si largement repandue.
toute fois il existe une classe de problème s'averant d'un grand interet pratique et pour lesquels les methodes de la theorie de correlation ne donne aucun resultat ; pour resoudre de tels problemes, ainsi que pour resoudre les problemes non lineaires on utilise l'appareil mathematique de la theorie des Processus de Markov.

Vibro-isolation

la vibro-isolation est l'ensemble des moyens techniques permettant d'attenuer l'effet des vibrations des système en mouvement dans le but d'economie, de securité ou de confort, elle utilise éssentielle-ment la theorie des processus aleatoires.

Cette vibro-isolation est assurée par:

- systemes actifs qui agissent par l'action des servo-mecanismes, de type pneumatiques ou électro-hydrauliques.
- systènes passifs qui agissent par l'action des ressorts et amortisseurs
- la combinaisons des deux systèmes.

II GENERALITES

2.1 Processus stochastiques et leurs caracteristiques

un processus stochastique peut être représenté par une fonction aleatoire $X(t)$ dans lequel le hasard intervient à chaque instant t.

La connaissance de $X(t)$ dans le passé et le present ne determine pas ses valeurs dans le futur.

2.2 Fonction de densité de probabilité

Soiet $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, \dots t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$ la fonction de repartition de Probabilité du $n^{\text{ième}}$ ordre

La densité de probabilité du $n^{\text{ième}}$ ordre est définie par:

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_i, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_i \dots \partial x_n}$$

cas particulier :

$w(x_1, t_1) = \dfrac{\partial F(x_1, t_1)}{\partial x_1}$ est la densité de Probabilité du Premier ordre.

2.3 Moyennes statistiques

esperance mathematique : $M\{X(t_1)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 w_1(x_1; t_1) dx_1$.

moyenne quadratique : $M\{X^2(t_1)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 w_1(x_1, t_1) dx_1$

2.4 Moyennes temporelles

Moyenne temporelle $\overline{x(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt$

Moyenne quadratique $\overline{x^2(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt$

2.5 Variance ou écart type

$$\sigma(t) = \overline{\left[x(t) - \overline{x(t)} \right]^2} = \overline{x^2(t)} - \left[\overline{x(t)} \right]^2$$

ou bien $\sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, w(x,t)\, dx - \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, w(x,t)\, dx \right\}^2$

2.6 Fonction d'auto-correlation

elle est definie en general comme étant la moyenne statistique d'un signal à un temps t_1 et de la valeur du même signal au temps $t_2 = t_1 + \tau$ soit :

$$\rho_{xx}(t_1, \tau) = M\left\{ x(t_1)\, x(t+\tau) \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2\, f(x_1, t_1 ; x_2, t_2)\, dx_1 dx_2$$

si le processus devient stationnaire la fonction d'auto-correlation est simplifiée et sera independante du temps dans lequel la moyenne statistique a été prise et par suite elle depend seulement du paramètre du temps τ. En outre avec l'hypothèse d'ergodicité on peut calculer la fonction d'auto-correlation avec la moyenne temporelle :

$$\rho_{xx}(\tau) = \overline{x(t)\,x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

On peut definir de la même façon la fonction de correlation mutuelle temporelle de deux signaux x et y produit par deux sources differents :

$$\rho_{xy}(\tau) = \overline{x(t)\,y(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,y(t+\tau)\,dt$$

2.7 Relation entre densité spectrale de puissance et fonction de correlation.

On demontre que la densité spectrale $S(\omega)$ et la fonction de correlation $\rho(\tau)$ sont liées par la relation :

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

On remarque que la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire est la transformée de Fourrier de la fonction de correlation.

2.8 Differents processus aleatoires

2.8.1 Processus stationnaires

La fonction de densité de probabité d'un processus stationnaire reste invariable quand on éffectue un

changement de l'origine du temps.
la fonction de densité d'ordre un est invariable avec le temps, celle du deuxième ordre depend seulement de la difference $\tau = t_2 - t_1$ et ainsi de suite.

$$m = x(t) = cte = E(X(t_1)) = E(X(t_2))$$

$$\sigma^2 = \nu = E\{X^2(t_1)\} - [E(x(t))]^2 = cte.$$

2.8.2 Processus ergodiques

un processus est dit ergodique si on a les moyennes temporelles sont égales aux moyenne statistiques. l'ergodicité est une proprieté extremement interessante car elle permet d'obtenir les caracteristiques d'un Processus aleatoire à partir d'un seul enregistrement Suffisament long, au lieu d'exiger la connaissance d'un trés grand nombre d'echantillons, donc Pour un processus stationnaire et ergodique il ya autant d'information dans un enregistrement de longue durée que dans de multiples realisations.

2.8.3 Processus Gaussiens

un processus est dit Gaussien si pour chaque ensemble Fini d'instant t_i $(i=1,2,\dots n)$, les variables $x_i = x(t_i)$ ont une densité de probabilité Gaussienne de la forme : $W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$

qui depend generalement des instants t_i auxquels on observe le processus.

2.9 Systême physiquement realisable

2.9.1 systême stable.

un systême est dit stable si à toute entrée bornée correspond une sortie bornée c'està dire

$\forall t \quad |x| \leq M_1 < +\infty$ correspond $|y| \leq M_2 < +\infty$

a/ dans le domaine du temps : la condition necessaire et suffisante et que la fonction de ponde-
-ration du systême soiet obsolument integrable :

$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < +\infty$ ce qui implique que sa reponse à l'impulsion unité doit s'annuler quand t tend vers l'infini.

b/ dans le domaine des frequences : la condition devient : $|H(i\omega)| = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| e^{-j\omega t} dt < +\infty$.

2.9.2 systême realisable

un systême est dit realisable si l'apparaition d'un signal à sa sortie ne peut précéder l'application d'un signal à son entrée (l'effet ne précède pas la cause.)

a/ dans le domaine du temps: un système est réali-
-sable si $h(t) = 0$ pour $t < 0$

b/ dans le domaine des frequences : Il faut que la fonction de transfert $H(s)$ ait pour domaine de convergence le demi plan defini par $Re(s) > \sigma_0$ où σ_0 est un nombre fini.

si un système est à la fois stable et realisable il est dit physiquement realisable.

a/ dans le domaine du temps: Il verifie le systeme suivant :

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty \\ h(t) = 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

b/ dans le domaine des frequences : si :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lg |H(i\omega)||}{1+\omega^2} d\omega < +\infty$$

2.10 Problimatique des critères

2.10.1 Hypothèses

Les hypothèses faites dans cette étude sont :

— Le système est lineaire et sa structure est connue

— Il est soumis uniquement aux vibrations verticales.

— L'exitation $\ddot{x}_0(t)$ est un processus normal, stationn-
-aire et ergodique, sa densité spectrale est une fonction rationnelle de ω^2.

— on suppose qu'il n'y a aucune action du système sur l'exitation.

2.10.2 Critères de la vibro-isolation

Generalement pour obtenir une meilleur vibro-isola-
-tion on cherche à avoir une acceleration du corps à vibro-isoler aussi petite que possible et un depla-
-cement relatif limité.

2.10.3 Critère de deplacement relatif

Soient :

$x_0(t)$ le signal d'entré du système.

$x(t)$ le signal de sortie du système

$\varepsilon(t)$ l'ecart defini par $x(t) - x_0(t)$.

Valeur moyenne quadratique de l'ecart s'ecrit

$$< \mathcal{E}^2(t) > = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathcal{E}^2(t)\, dt$$

notre but est de minimiser cette valeur.

2.10.4 Critère de l'acceleration minimale

Pour des raisons de confort et de securité on cherche à minimiser l'acceleration du systeme de vibro-isolation la valeur quadratique moyenne de l'acceleration est:

$$< \ddot{x}_i^2 > = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \ddot{x}_i^2(t)\, dt.$$

On exige de notre système d'être à la fois souple pour avoir une acceleration minimale et d'être rigide pour limiter les deplacements relatifs ce qui parait contradictoire.
notre but consiste à trouver une solution optimale satisfaisant à chacun des deux critères sans avoir une influence entre eux.

2.10.5 Expression de la fonctionnelle.

Pour mettre au point un compromis entre les deux critère précédent il faut minimiser la fonctionnelle suivante :

$$C = < \mathcal{E}^2(t) > + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < \ddot{x}_i^2(t) >$$

où λ_i sont les multiplicateurs de Lagrange.

Prenons les hypothèses : $\varepsilon(t) = 0$ pour $t < 0$

$\ddot{x}_i(t) = 0$ pour $t < 0$.

$\langle \varepsilon(t) \rangle = 0$ et $\langle \ddot{x}_i(t) \rangle = 0$

La fonctionnelle s'écrit :

$$C = \sigma^2_{x-x_0} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \sigma^2_{\ddot{x}_i}$$

Dans notre cas $i = 1$. donc :

$$C = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda \, \sigma^2_{\ddot{x}_1}$$

2.10.6 Expression de la dispersion d'acceleration et du deplacement relatif.

on demontre que :

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H \frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s) \, ds$$

et

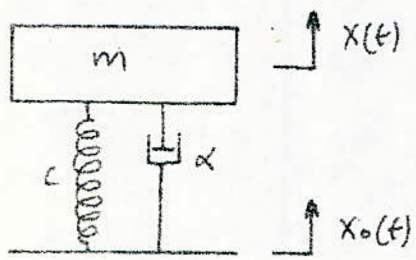
$$\sigma^2_{\ddot{x}_i} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H \frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_0}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s) \, ds$$

III SYSTEME DE UN DEGRE DE LIBERTE A STRUCTURE CONNUE

3.1 Systèmes passifs

3.1.1 Exitation de densité spectrale énergetique

$$S_{\ddot{x}_0}(s) = \sigma^2 = cte \quad (\text{bruit blanc})$$



c'est un système passif representé par un ressort de regidité c et un amortisseur de constante α. m represente la masse du corps à vibro-isoler.

a/ Equation du mouvement

Appliquons la deuxième loi de Newton à la masse m

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = m\gamma \qquad \gamma = \text{acceleration}.$$

on aura :

$$m\ddot{x} + c(x - x_0) + \alpha(\dot{x} - \dot{x}_0) = 0$$

On appliquons la transformation de Laplace et on supposons toutes les conditions initiales nulles on obtient :

$$(ms^2 + \alpha s + c)\,X(s) = (\alpha s + c)\,X_0(s)$$

d'ou

$$\frac{X(s)}{X_0(s)} = \frac{\alpha s + c}{ms^2 + \alpha s + c}$$

b/ Determination de dispersion d'acceleration

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 \sigma_0^2\, ds$$

on a : $\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0} = \frac{s^2 X}{s^2 X_0} = \frac{X}{X_0}$ donc $H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{\alpha s + c}{m s^2 + \alpha s + c}$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{\sigma_0^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{(\alpha s + c)(-\alpha s + c)\, ds}{(m s^2 + \alpha s + c)(m s^2 - \alpha s + c)}$$

d'aprés la table d'integration on a :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \sigma_0^2\, \frac{n_1^2 d_0 + n_0^2 d_2}{2\, d_0 d_1 d_2}$$

où $n_0 = c$; $n_1 = \alpha$; $d_0 = c$
$d_1 = \alpha$; $d_2 = m$

on remplaçant on obtient :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \sigma_0^2\, \frac{\alpha^2 + mc}{2\alpha m}.$$

c/ Determination de la dispersion de l'ecart relatif.

on a : $\frac{X - X_0}{\ddot{x}_0} = \frac{X - X_0}{s^2 X_0} = \frac{1}{s^2}\left(\frac{X}{X_0} - 1\right)$

donc : $H_{\frac{x - x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{1}{s^2}\left(H_{\frac{x}{x_0}}(s) - 1\right)$

$$H_{\frac{x - x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{1}{s^2}\left(\frac{\alpha s + c}{m s^2 + \alpha s + c} - 1\right) = \frac{-m}{m s^2 + \alpha s + c}$$

$$\sigma_{x - x_0}^2 = \frac{\sigma_0^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{(-m)(-m)\, ds}{(m s^2 + \alpha s + c)(m s^2 - \alpha s + c)}$$

d'apres la table

$$\frac{\sigma_{x - x_0}^2}{\sigma_0^2} = \frac{n_0'^2 d_2}{2\, d_0 d_1 d_2}$$

$n_0' = -m$ $d_0 = c$; $d_1 = \alpha$; $d_2 = m$

$$\sigma_{x - x_0}^2 = \sigma_0^2\, \frac{m^2}{2c\alpha}$$

d/ Expression de la fonctionnelle

$$G = \sigma_{x-x_0}^2 + \lambda\,\sigma_{\ddot{x}}^2 = \sigma_0^2\left(\frac{m^2}{2c\alpha} + \lambda\,\frac{\alpha^2 + mc}{2\alpha m}\right)$$

$$\frac{G}{\sigma_0^2} = \frac{m^3 + \lambda c\alpha^2 + \lambda m c^2}{2m\alpha c}$$

Les valeurs optimales de c et α doivent verifier le systeme d'equation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial c} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial G}{\partial \alpha} = 0 \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} (\lambda\alpha^2 + 2c\lambda m)(2m\alpha c) - (m^3 + \lambda c\alpha^2 + \lambda m c^2)(2m\alpha) = 0 \\ (2\alpha c\lambda)(2m\alpha c) - (m^3 + \lambda c\alpha^2 + \lambda m c^2)(2mc) = 0 \end{cases}$$

aprés simplification on obtient :

$$\begin{cases} \lambda c^2 - m^2 = 0 \\ \alpha^2 c\lambda - m^3 - \lambda m c^2 = 0 \end{cases} \quad \text{d'ou la solution} \quad \begin{cases} c = m/\sqrt{\lambda} \\ \alpha = m\sqrt{2}/\sqrt[4]{\lambda} \end{cases}$$

3.1.2 Exitation de densité spectrale énergetique

$$S_{\ddot{x}_0}(s) = \frac{\sigma_0^2\,\Omega^2}{\omega_0^2 - s^2}$$

a/ Determination de la dispersion d'acceleration

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{\sigma_0^2\,\Omega^2}{2\pi j}\int_{-\infty j}^{+\infty j}\left|\frac{\alpha s + c}{m s^2 + \alpha s + c}\right|^2 \frac{ds}{\omega_0^2 - s^2} =$$ on développons

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{\sigma_0^2\,\Omega^2} = \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{(\alpha s + c)(-\alpha s + c)\,ds}{(m s^2 + \alpha s + c)(\omega_0 + s)(m s^2 - \alpha s + c)(\omega_0 - s)}$$ d'aprés la table

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{\sigma_0^2\,\Omega^2} = \frac{n_1^2\, d_0 d_3 + n_0^2\, d_2 d_3}{2 d_0 d_3\,(-d_0 d_3 + d_1 d_2)}$$

avec $n_0 = c$; $n_1 = \alpha$; $n_2 = 0$; $d_0 = c\omega_0$; $d_1 = c + \alpha\omega_0$

$d_2 = m\omega_0 + \alpha$; $d_3 = m$.

On éffectuons les calculs:

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{\sigma_0^2\Omega^2} = \frac{\alpha^2 c\omega_0 m + m^2\omega_0 c^2 + m\alpha c^2}{2m^3 c\alpha\omega_0^3 + 2mc\alpha^2\omega_0^2 + 2mc^2\alpha\omega_0} = \frac{N_2}{D}$$

b/ Determination de la dispersion d'écart

$$\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{\sigma_0^2\Omega^2} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{(-m)(-m)\,ds}{(ms^2+\alpha s+c)(\omega_0+s)(ms^2-\alpha s+c)(\omega_0-s)}$$

$$\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{\sigma_0^2\Omega^2} = \frac{n_0'^2 d_2 d_3}{D} \quad \text{où} \quad n_0' = -m \ ; \ n_1' = 0 \ ; \ n_2' = 0$$

d_i $(i = 1,2,3)$ sont les mêmes qu'au point a/

$$\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{\sigma_0^2\Omega^2} = \frac{-m^2(m\omega_0 + \alpha)}{2m^2 c\alpha\omega_0^3 + 2mc\alpha^2\omega_0^2 + 2mc^2\alpha\omega_0} = \frac{N_1}{D}$$

c/ Expression de la fonctionnelle

$$G_1 = \sigma_{x-x_0}^2 + \lambda\,\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{N_1}{D} + \lambda\frac{N_2}{D} = \frac{N_1 + \lambda N_2}{D}$$

Les conditions d'optimisation sont:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_1}{\partial c} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial G_1}{\partial \alpha} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{\partial N_1}{\partial c} + \lambda\dfrac{\partial N_2}{\partial c}\right) D - (N_1 + \lambda N_2)\dfrac{\partial D}{\partial c} = 0 & (1) \\[2ex] \left(\dfrac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \lambda\dfrac{\partial N_2}{\partial \alpha}\right) D - (N_1 + \lambda N_2)\dfrac{\partial D}{\partial \alpha} = 0 & (2) \end{cases}$$

avec $\dfrac{\partial N_1}{\partial c} = 0$; $\dfrac{\partial N_1}{\partial \alpha} = -m^2$; $\dfrac{\partial N_2}{\partial c} = \alpha^2 m\omega_0 + 2cm^2\omega_0 + 2cm\alpha$

$\dfrac{\partial N_2}{\partial \alpha} = 2\alpha c\omega_0 m + mc^2$; $\dfrac{\partial D}{\partial c} = 2m^2\alpha\omega_0^3 + 2m\alpha^2\omega_0^2 + 4mc\alpha\omega_0$

$\dfrac{\partial D}{\partial \alpha} = 2m^2 c\omega_0^3 + 4mc\alpha\omega_0^2 + 2mc^2\omega_0$

on obtient :

① $(d\alpha^2 m\omega_0 + 2dcm^2\omega_0 + 2dcm\alpha)(2m^2c\alpha\omega_0^3 + 2mc\alpha^2\omega_0^2 + 2mc^2\alpha\omega_0) - (-m^3\omega_0 - m^2\alpha + d\alpha^2 c\omega_0 m + dm^2\omega_0 c^2 + dm\alpha c^2)(2m^2\alpha\omega_0^3 + 2m\alpha^2\omega_0^2 + 4mc\alpha\omega_0) = 0$

② $(-m^2 + 2d\alpha c\omega_0 m + dmc^2)(2m^2c\alpha\omega_0^3 + 2mc\alpha^2\omega_0^2 + 2mc^2\alpha\omega_0) - (-m^3\omega_0 - m^2\alpha + d\alpha^2c\omega_0 m + m^2 d\omega_0 c^2 + dm\alpha c^2)(2m^2c\omega_0^3 + 4mc\alpha\omega_0^2 + 2mc^2\omega_0) = 0$.

3.1.3 Exitation de densité spectrale ènergetique

$$S_{\ddot{x}_0}(s) = \frac{2\alpha_2\sigma_0^2(\Omega^2 - s^2)}{(\Omega^2+s^2)^2 - 4\alpha_2 s^2}$$

a/ Determination de la dispersion d'acceleration

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{2\alpha_2\sigma_0^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{(\alpha s+c)(-\alpha s+c)(\Omega+s)(\Omega-s)\,ds}{(ms^2+\alpha s+c)(\Omega^2+s^2+2\sqrt{\alpha_2}\,s)(ms^2-\alpha s+c)(\Omega^2+s^2-2\sqrt{\alpha_2}\,s)}$$

d'aprés la table :

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{2\alpha_2\sigma_0^2} = \frac{n_2^2 d_0 d_1 d_4 + (n_1^2 - 2n_0 n_2)d_0 d_3 d_4 + n_0^2(-d_1 d_4^2 + d_2 d_3 d_4)}{2d_0 d_4(-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)} = \frac{N_3}{D_3}$$

ou $n_0 = c\Omega$; $n_1 = c + \alpha\Omega$; $n_2 = \alpha$; $n_3 = 0$

$d_0 = c\Omega^2$; $d_1 = \alpha\Omega^2 + 2c\sqrt{\alpha_2}$; $d_2 = m\Omega^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha_2} + c$;

$d_3 = 2m\sqrt{\alpha_2} + \alpha$; $d_4 = m$ aprés tout calcul on a :

$N_3 = \alpha^3\Omega^4 cm + 2c^2\alpha^2\Omega^2 m\sqrt{\alpha_2} + 2m^2c^3\Omega^2\sqrt{\alpha_2} + c^3\alpha\Omega^2 m + 2m^2\alpha^2\Omega^4 c\sqrt{\alpha_2} + c\alpha^3\Omega^4 m + 4m^2c^2\alpha\Omega^3\sqrt{\alpha_2} + 2c^2\alpha^2\Omega^3 m + 2m^3\Omega^4 c^2\sqrt{\alpha_2} + 4m^2\alpha\alpha_2 c^2\Omega^2 + 2\alpha^2 mc^2\Omega^2\sqrt{\alpha_2} + m\alpha c^3\Omega^2$.

$$D_3 = 4m^3\Omega^6 c\alpha\sqrt{\alpha_2} + 8m^2\Omega^4\alpha^2 c\alpha_2 + 16m^2c^2\Omega^2\alpha\alpha_2\sqrt{\alpha_2} +$$
$$+ 4c\Omega^4 m\alpha^3\sqrt{\alpha_2} + 8c^2\Omega^2 m\alpha^2\alpha_2 + 4mc^3\Omega^2\alpha\sqrt{\alpha_2} - 8c^2\Omega^4 m^2\alpha\sqrt{\alpha_2}.$$

d/ Determination de la dispersion de l'ecart

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{2\alpha_2\sigma_0^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{(-m)(-m)(-\Omega+s)(-\Omega-s)\,ds}{(ms^2+\alpha s+c)(-\Omega^2+s^2+2\sqrt{\alpha_2}s)(ms^2-\alpha s+c)(\Omega^2+s^2-2\sqrt{\alpha_2}s)}$$

on obtient:

$$\frac{\sigma^2_{x-x_0}}{2\alpha_2\sigma_0^2} = \frac{n_1'^2 d_0 d_3 d_4 + n_0'^2(-d_1 d_4^2 + d_2 d_3 d_4)}{2d_0 d_4(-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)} = \frac{N_4}{D_4}$$

avec : $n_3' = 0$; $n_2' = 0$; $n_1' = -m$; $n_0' = -m\Omega$

d_i $(i = 1,2,3)$ sont les mêmes qu'au point a/

on a $D_3 = D_4$

$$N_4 = c\Omega^2\alpha m^3 + 2m^5\Omega^4\sqrt{\alpha_2} + 4m^4\Omega^2\alpha\alpha_2 + 2m^4\Omega^2 c\sqrt{\alpha_2} +$$
$$+ 2\alpha^2 m^3\Omega^2\sqrt{\alpha_2} + m^3\alpha\Omega^2 c.$$

c/ Expression de la fonctionnelle

$$C_1 = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda\sigma^2_{\ddot{x}} = 2\alpha_2\sigma_0^2\left(\frac{N_3+\lambda N_4}{D_3}\right)$$

Les conditions d'optimisation sont:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial N_3}{\partial c} + \lambda\dfrac{\partial N_4}{\partial c}\right)D_3 - (N_3+\lambda N_4)\dfrac{\partial D_3}{\partial c} = 0\\[2ex] \left(\dfrac{\partial N_3}{\partial \alpha} + \lambda\dfrac{\partial N_4}{\partial \alpha}\right)D_3 - (N_3+\lambda N_4)\dfrac{\partial D_3}{\partial \alpha} = 0\end{cases}$$

$\frac{\partial N_3}{\partial c} = \alpha \Omega^2 m^3 + 2 m^4 \Omega^2 \sqrt{\alpha_2} + m^3 \alpha \Omega^2$; $\frac{\partial N_3}{\partial \alpha} = c \Omega^2 m^3 + 4 m^4 \Omega^2 \alpha_2 +$
$+ 4\alpha m^3 \Omega^2 \sqrt{\alpha_2} + m^3 \Omega^2 c$; $\frac{\partial D_3}{\partial c} = 4 m^3 \Omega^6 \alpha \sqrt{\alpha_2} + 8 m^2 \Omega^4 \alpha^2 \alpha_2 +$
$32 m^2 c \Omega^2 \alpha \alpha_2 \sqrt{\alpha_2} + 4 \Omega^4 m \alpha^3 \sqrt{\alpha_2} + 16 c \Omega^2 m \alpha^2 \alpha_2 + 12 m c^2 \Omega^2 \alpha \sqrt{\alpha_2}$
$- 16 c \Omega^4 m^2 \alpha \sqrt{\alpha_2}$; $\frac{\partial D_3}{\partial \alpha} = 4 m^3 \Omega^6 c \sqrt{\alpha_2} + 16 m^2 \Omega^4 \alpha c \alpha_2$
$+ 16 m^2 c^2 \Omega^2 \alpha_2 \sqrt{\alpha_2} + 12 c \Omega^4 m \alpha^2 \sqrt{\alpha_2} + 16 c^2 \Omega^2 m \alpha \alpha_2 +$
$+ 4 m c^3 \Omega^2 \sqrt{\alpha_2} - 8 c^2 \Omega^4 m^2 \sqrt{\alpha_2}$.

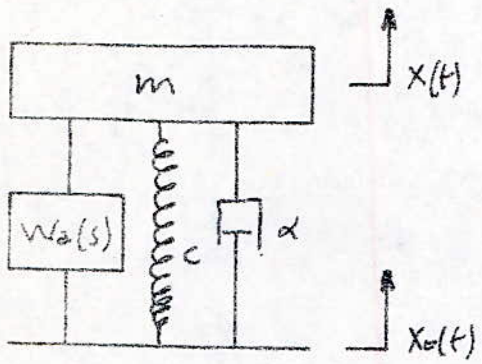
$\frac{\partial N_4}{\partial c} = \alpha^3 \Omega^4 m + 4 c \alpha^2 \Omega^2 m \sqrt{\alpha_2} + 6 m^2 c^2 \Omega^2 \sqrt{\alpha_2} + 3 c^2 \alpha \Omega^2 m +$
$+ 2 m^2 \alpha^2 \Omega^4 \sqrt{\alpha_2} + \alpha^3 \Omega^4 m + 8 m^2 c \alpha \Omega^3 \sqrt{\alpha_2} + 4 c \alpha^2 \Omega^3 m +$
$+ 4 c m^3 \Omega^4 \sqrt{\alpha_2} + 8 m^2 \alpha \alpha_2 c \Omega^2 + 4 \alpha^2 m c \Omega^2 \sqrt{\alpha_2} + 3 m \alpha c^2 \Omega^2$.

$\frac{\partial N_4}{\partial \alpha} = 3 \alpha^2 \Omega^4 c m + 4 c^2 \alpha \Omega^2 m \sqrt{\alpha_2} + c^3 \Omega^2 m + 4 m^2 \alpha \Omega^4 c \sqrt{\alpha_2}$
$+ 3 c \alpha^2 \Omega^4 m + 4 m^2 c^2 \Omega^3 \sqrt{\alpha_2} + 4 c^2 \alpha \Omega^3 m + 4 m^2 \alpha_2 c^2 \Omega^3 +$
$4 m c^2 \alpha \Omega^2 \sqrt{\alpha_2} + m c^3 \Omega^2$.

3.2 Systèmes actifs

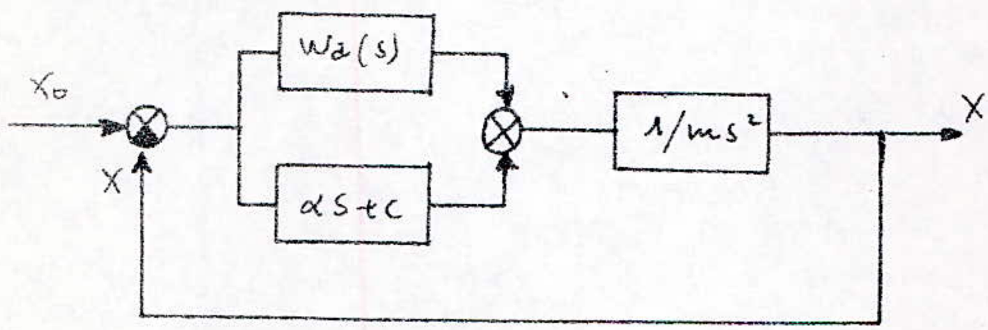
3.2.1 Exitation de densité spectrale énergetique

$$S_{\ddot{x}_0}(\delta) = \sigma_0^2 = cte.$$



c'est un système constitué d'un ou plusieurs systèmes asservis. On remarque que le système passif éxiste.

a/ schema bloc



On raison de la complexité des calculs on se limite au cas ou $W_a(s) = \dfrac{a}{1+bs}$

b/ Calcul de la fonction de transfert

$$H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\alpha b s^2 + (bc+\alpha)s + a + c}{mb s^3 + (m+\alpha b)s^2 + (bc+\alpha)s + a + c}$$

$$\frac{x - x_0}{\ddot{x}_0} = \frac{1}{s^2}\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{-m(1+bs)}{mb s^3 + (m+\alpha b)s^2 + (bc+\alpha)s + a + c}$$

c/ Calcul de la dispersion d'accelération

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{\alpha b s^2+(bc+\alpha)s+a+c}{bms^3+(m+\alpha b)s^2+(bc+\alpha)s+a+c}\right|^2 ds$$

d'aprés la table d'integration.

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{\sigma_0^2} = \frac{n_2^2 d_0 d_1 + (n_1^2 - 2n_0 n_2) d_0 d_3 + n_0^2 d_2 d_3}{2 d_0 d_3 (-d_0 d_3 + d_1 d_2)}$$

$n_0 = a+c$; $n_1 = bc+\alpha$; $n_2 = \alpha b$.

$d_0 = a+c$; $d_1 = bc+\alpha$; $d_2 = m+\alpha b$; $d_3 = mb$.

d/ Calcul de la dispersion de l'ecart

$$\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{-m(1+bs)}{mbs^3+(m+\alpha b)s^2+(\alpha+bc)s+a+c}\right|^2 ds$$

$$\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n_1'^2 - 2n_0' n_2') d_0 d_3 + n_0'^2 d_2 d_3}{2 d_0 d_3 (-d_0 d_3 + d_1 d_2)}$$

ou $n_0' = -m$; $n_1' = -mb$; $n_2' = 0$.

d_i $(i = 1,2,3)$ sont les mêmes qu'au c/

e/ Expression de la fonctionnelle

$$G = \sigma_{x-x_0}^2 + \lambda\,\sigma_{\ddot{x}}^2$$

$$= \sigma_0^2\,\frac{\lambda n_2^2 d_0 d_1 + (n_1'^2 - 2n_0' n_2' + \lambda n_1^2 - 2\lambda n_0 n_2) d_0 d_3 + d_2 d_3 (n_0'^2 + \lambda n_0^2)}{2 d_0 d_3 (-d_0 d_3 + d_1 d_2)}$$

posons $\dfrac{G}{\sigma_0^2} = \dfrac{N_G}{D_G}$

3.2.2 Exitation de densité spectrale énërgetique

$$S_{\ddot{x}_0}(s) = \frac{\sigma_0^2 \Omega^2}{\omega_0^2 - s^2}$$

a/ Calcul de la dispersion d'acceleration

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{\sigma_0^2 \Omega^2} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{n(s)\, n(-s)}{d(s)\, d(-s)}\, ds$$

avec $n(s) = \alpha b s^2 + (bc+\alpha)s + a + c$

$d(s) = \left[mbs^3 + (m+\alpha b)s^2 + (bc+\alpha)s + a + c\right](\omega_0 + s)$

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{\sigma_0^2 \Omega^2} = \frac{n_2^2 d_0 d_1 d_4 + (n_1^2 - 2n_0 n_2) d_0 d_3 d_4 + n_0^2(-d_1 d_4^2 + d_2 d_3 d_4)}{2 d_0 d_4 (-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)}$$

ou $n_3 = 0$; $n_2 = \alpha b$; $n_1 = bc + \alpha$; $n_0 = a + c$.

$d_0 = a\omega_0 + c\omega_0$; $d_1 = bc\omega_0 + \alpha\omega_0 + a + c$; $d_2 = m\omega_0 + \alpha b\omega_0 +$
$+ bc + \alpha$; $d_3 = mb\omega_0 + m + \alpha b$; $d_4 = mb$.

b/ Calcul de la dispersion d'ecart :

$$\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{\sigma_0^2 \Omega^2} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{n'(s)\, n'(-s)}{d(s)\, d(-s)}\, ds$$

$d(s)$ st la même qu'au point a/

$n'(s) = -mbs - m$; $n_3' = 0$; $n_2' = 0$; $n_1' = -mb$; $n_0' = -m$

$$\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{\sigma_0^2 \Omega^2} = \frac{n_1'^2 d_0 d_3 d_4 + n_0'^2(-d_1 d_4^2 + d_2 d_3 d_4)}{2 d_0 d_4 (-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)}$$

c/ Expression de la fonctionnelle

$$G'/\sigma_0^2 \Omega^2 = \frac{N}{D}$$

$N = \lambda n_2^2 d_0 d_1 d_4 + (n_1'^2 + \lambda n_1^2 - 2\lambda n_0 n_2) d_0 d_3 d_4 + (n_0'^2 + \lambda n_0^2)(-d_1 d_4 + d_2 d_3 d_4)$

$$D = 2 d_0 d_4 \left(- d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3 \right)$$

Conditions d'optimisation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial c} D - N \dfrac{\partial D}{\partial c} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial N}{\partial \alpha} D - N \dfrac{\partial D}{\partial \alpha} = 0 \end{cases}$$

e/ Condition de stabilité

selon le critère de Routh

$$\left| \begin{array}{ccc} mb & (bc+\alpha) & 0 \\ (m+\alpha b) & (a+c) & 0 \\ \dfrac{(m+\alpha b)(bc+\alpha) - mb(a+c)}{m+\alpha b} & 0 & \\ (a+c) & & \end{array} \right.$$

Il faut que les éléments de la première colonne soient tous positifs.

3.2.3 Exitation de densité spectrale energetique

$$S_{\ddot{x}_0}(s) = 2\alpha_2 N^2 \frac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2+s^2) - 4\alpha_2 s^2}$$

a/ Calcul de la dispersion d'acceleration

$n(s) = \alpha b s^3 + (\alpha b\Omega + bc + \alpha) s^2 + (bc\Omega + \alpha\Omega + a + c) s + a\Omega + c\Omega$

$d(s) = mbs^5 + (m + \alpha b + 2mb\sqrt{\alpha_2}) s^4 + (mb\Omega^2 + bc + \alpha + 2m\sqrt{\alpha_2} +$
$+ 2\alpha b\sqrt{\alpha_2}) s^3 + (m\Omega^2 + \alpha b\Omega^2 + a + c + 2bc\sqrt{\alpha_2} + 2\alpha\sqrt{\alpha_2}) s^2 +$
$(bc\Omega^2 + \alpha\Omega^2 + 2a\sqrt{\alpha_2} + 2c\sqrt{\alpha_2}) s + a\Omega^2 + c\Omega^2.$

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{2\alpha_2 N^2} = \frac{n_3^2 m_2 + (n_2^2 - 2n_1 n_3) m_2 + (n_1^2 - 2n_0 n_2) m_3 + n_0^2 m_4}{2\Delta_5}$$

où : $m_0 = \frac{1}{d_5}(d_3 m_1 - d_1 m_2)$ $\quad m_3 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_2 - m_1 d_4)$

$m_1 = -d_0 d_3 + d_1 d_2$ $\quad m_4 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_3 - m_2 d_4)$

$m_2 = -d_0 d_5 + d_1 d_4$ $\quad \Delta_5 = d_0(d_1 m_4 - d_3 m_3 + d_5 m_2)$

$n_4 = 0$; $n_3 = \alpha b$; $n_2 = \alpha b\Omega + bc + \alpha$; $n_1 = bc\Omega + \alpha\Omega + a + c$

$n_0 = a\Omega + c\Omega$; $d_5 = mb$; $d_4 = m + \alpha b + 2mb\sqrt{\alpha_2}$

$d_3 = mb\Omega^2 + bc + \alpha + 2m\sqrt{\alpha_2} + 2\alpha b\sqrt{\alpha_2}$; $d_0 = a\Omega^2 + c\Omega^2$

$d_2 = m\Omega^2 + \alpha b\Omega^2 + a + c + 2bc\sqrt{\alpha_2} + 2\alpha\sqrt{\alpha_2}$; $d_1 =$

$d_1 = bc\Omega^2 + \alpha\Omega^2 + 2a\sqrt{\alpha_2} + 2c\sqrt{\alpha_2}$.

b/ Calcul de la dispersion de l'ecart.

$$\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{2\alpha_2 N^2} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{n'(s)}{d(s)}\frac{n'(-s)}{d(-s)}\, ds$$

$n'(s) = -mbs^2 - (mb\Omega + m)s - m\Omega$

$d(s)$ st la même qu'au point a/

$n'_4 = 0$; $n'_3 = 0$; $n'_2 = -mb$; $n'_1 = -mb\Omega - m$; $n'_0 = -m\Omega$

$$\frac{\sigma^2_{x-x_0}}{2\alpha_2 N^2} = \frac{n'^2_2 m_2 + (n'^2_1 - 2n'_0 n'_2) m_3 + n'^2_0 m_4}{2\Delta_5}$$

c/ Expression de la fonctionnelle.

$$\frac{C'}{2\alpha_2 N^2} = \frac{m_2 (n'^2_2 + \lambda n_2^2 - 2\lambda n_1 n_3) + m_1 n_3^2 + m_3 (n'^2_1 - 2n'_0 n'_2 + \lambda n_1^2 - 2\lambda n_0 n_2) m_3}{2\Delta_5} +$$

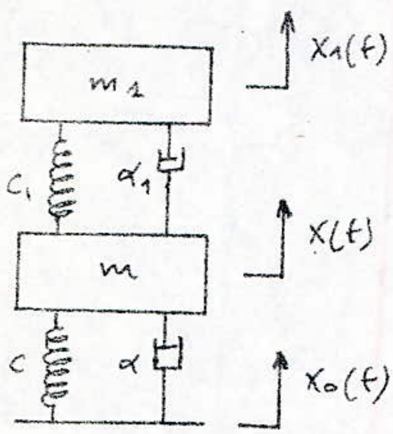
$$+ \frac{(n'^2_0 + \lambda n_0^2) m_4}{2\Delta_5}$$

IV SYSTEME DE VIBRO-ISOLA-TION A 2 DEGRES DE LIBERTE

4.1 Systèmes passifs

4.1.1 Exitation de densité spectrale énergetique

$S_{\ddot{x}_0}(s) = \sigma_0^2 = cte.$



Le système de vibro-isolation est constitué par : un ressort de regidité c et un amortisseur de constante α, m_1 étant la masse à vibro-isoler

les caracteristiques de ce système sont : $m_1 = 80{,}862$ kg $c_1 = 7961{,}05$ kg/s² ; $\alpha_1 = 141{,}688$ kg/s.

a/ Equation du mouvement

$$m\ddot{x} = -c(x - x_0) - \alpha(\dot{x} - \dot{x}_0) - c(x - x_2) - \alpha(\dot{x} - \dot{x}_1)$$

$$m_1\ddot{x}_1 = -c_1(x_1 - x) - \alpha_1(\dot{x}_1 - \dot{x})$$

On appliquons la transformation de Laplace on obtient

$$[ms^2 + (\alpha+\alpha_1)s + c + c_1)\,X(s) = (\alpha s + c)X_0(s) + (\alpha_1 s + c_1)X_1(s)$$

$$(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)\,X_1(s) = (\alpha_1 s + c_1)X(s).$$

b/ Determination de la dispersion d'acceleration

d'aprés les équations du mouvement on tire $H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s)$

$$H\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}(s) = \frac{\alpha_1\alpha s^2 + (\alpha_1 c + \alpha c_1)s + cc_1}{mm_1 s^4 + (m_1\alpha + m_1\alpha_1 + m\alpha_1)s^3 + (m_1 c + m_1 c_1 + \alpha\alpha_1 + mc_1)s^2 + (\alpha_1 c + \alpha c_1)s + cc_1}$$

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty j}^{+j\infty} \frac{n(s)\,n(-s)}{d(s)\,d(-s)}\,ds \quad \text{avec} \quad n(s) = \alpha_1\alpha s^2 + (\alpha_1 c + \alpha c_1)s + cc_1$$

$$d(s) = mm_1 s^4 + (m_1\alpha + m_1\alpha_1 + m\alpha_1)s^3 + (m_1 c + m_1 c_1 + \alpha\alpha_1 + mc_1)s^2 + (\alpha_1 c + \alpha c_1)s + cc_1$$

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{\sigma_0^2} = \frac{n_2^2 d_0 d_1 d_4 + (n_1^2 - 2n_0 n_2)d_0 d_3 d_4 + n_0^2(-d_1 d_4^2 + d_2 d_3 d_4)}{2d_0 d_4(-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)}$$

où $n_3 = 0$; $n_2 = \alpha\alpha_1$; $n_1 = \alpha_1 c + \alpha c_1$; $n_0 = cc_1$.

$d_4 = mm_1$; $d_3 = m_1\alpha + m_1\alpha_1 + m\alpha_1$; $d_2 = m_1 c + m_1 c_1 + \alpha\alpha_1 + mc_1$

$d_1 = \alpha_1 c + \alpha c_1$; $d_0 = cc_1$.

$n_2^2 d_0 d_1 d_4 = \alpha^2\alpha_1^3 c^2 c_1 mm_1 + \alpha^3\alpha_1^2 c c_1^2 mm_1$.

$n_1^2 - 2n_0 n_2 = \alpha_1^2 c^2 + \alpha^2 c_1^2$; $d_0 d_3 d_4 = mcc_1\alpha m_1^2 + m_1^2 m\alpha_1 cc_1 + m^2\alpha_1 m_1 cc_1$

$d_1 d_4^2 = m^2 m_1^2 \alpha_1 c + m^2 m_1^2 \alpha c_1$.

$d_2 d_3 d_4 = mm_1(m_1\alpha + m_1\alpha_1 + m\alpha_1)(m_1 c + m_1 c_1 + \alpha\alpha_1 + mc_1)$

c/ Determination de la dispersion de l'ecart relatif

$\frac{x - x_0}{\ddot{x}_0} = \frac{1}{s^2}\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)$ cherchons $\frac{x}{x_0}$ à partir des équations du mouvement on trouve :

$$\frac{x}{x_0} = \frac{m_1\alpha s^3 + (\alpha\alpha_1 + m_1 c)s^2 + (\alpha c_1 + c\alpha_1)s + cc_1}{mm_1 s^4 + (m\alpha_1 + m_1\alpha_1 + m_1\alpha)s^3 + (mc_1 + \alpha\alpha_1 + c_1 m_1 + m_1 c)s^2 + (\alpha c_1 + \alpha_1 c)s + cc_1}$$

donc $H\frac{x - x_0}{\ddot{x}_0}(s) = \frac{N}{D}$ avec

$N = -mm_1 s^2 - (m\alpha_1 + m_1\alpha_1)s - (mc_1 + m_1 c_1)$

$D = mm_1 s^4 + (m\alpha_1 + m_1\alpha_1 + m_1\alpha)s^3 + (mc_1 + \alpha\alpha_1 + c_1 m_1 + m_1 c)s^2 +$
$+ (\alpha c_1 + \alpha_1 c)s + cc_1$.

$$\frac{\sigma^2_{x-x_0}}{\sigma_0^2} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{n'(s)\,n'(-s)}{d(s)\,d(-s)}\,ds$$

$$n'(s) = -m_1 m s^2 - (m\alpha_1 + m_1\alpha_1)s - (m c_1 + m_1 c_1)$$

$d(s)$ est le même qu'au point b/.

$$\frac{\sigma^2_{x-x_0}}{\sigma_0^2} = \frac{n_2'^2 d_0 d_1 d_4 + (n_1'^2 - 2n_0' n_2') d_0 d_3 d_4 + n_0'^2(-d_1 d_4^2 + d_2 d_3 d_4)}{2 d_0 d_4 (-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)}$$

où $\quad n_3' = 0 \quad ; n_2' = -m m_1 \quad ; n_1' = -(m\alpha_1 + m_1\alpha_1) \,; n_0' = -m c_1 - m_1 c_1$

d/ Expression de la fonctionnelle.

$$\frac{G'}{\sigma_0^2} = \frac{N^*}{D^*} \qquad D^* = 2 d_0 d_4 (-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)$$

$$N^* = (n_2'^2 + \lambda n_2^2) d_0 d_1 d_4 + (n_1'^2 - 2n_0' n_2' + \lambda n_1^2 - 2\lambda n_0 n_2) d_0 d_3 d_4 +$$
$$+ (n_0'^2 + \lambda n_0^2)(-d_1 d_4^2 + d_2 d_3 d_4).$$

Conditions d'optimisation:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N^*}{\partial c} D^* - N^* \dfrac{\partial D^*}{\partial c} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial N^*}{\partial \alpha} D^* - N^* \dfrac{\partial D^*}{\partial \alpha} = 0 \end{cases}$$

4.1.2 Exitation de densité spectrale énergetique

$$S_{\ddot{x}_0}(s) = \frac{\sigma_0^2 \Omega^2}{\omega_0^2 - s^2}$$

a/ Determination de la dispersion d'acceleration

$$\frac{\sigma^2_{\ddot{x}}}{\sigma_0^2 \Omega^2} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{n(s)\,n(-s)}{d(s)\,d(-s)}\,ds \quad \text{avec : } n(s) = \alpha d_1 s^2 + (\alpha c_1 + c d_1)s + c c_1$$

$$d(s) = m m_1 s^5 + (m m_1 \omega_0 + m\alpha_1 + m_1\alpha_1 + m_1\alpha)s^4 + (m\alpha_1\omega_0 + m_1\alpha_1\omega_0 +$$
$$+ m_1\alpha\omega_0 + m c_1 + \alpha\alpha_1 + m_1 c_1 + m_1 c)s^3 + \alpha c_1 + \alpha_1 c + \omega_0 m c_1 + \omega_0 \alpha\alpha_1 +$$

$+ \omega_0 c_1 m_1 + \omega_0 m_1 c) s^2 + (c c_1 + \alpha c_1 \omega_0 + \alpha_1 c \omega_0) s + c c_1 \omega_0 .$

$$\frac{\sigma_{\dot{x}}^2}{\sigma_0^2 \Omega^2} = \frac{m_2 n_2^2 + (n_1^2 - 2 n_0 n_2) m_3 + n_0^2 m_4}{2 \Delta_5}$$

où : $n_4 = 0$; $n_3 = 0$; $n_2 = \alpha\alpha_1$; $n_1 = \alpha c_1 + \alpha_1 c$; $n_0 = c c_1$

$d_5 = m m_1$; $d_4 = m m_1 \omega_0 + m \alpha_1 + m_1 \alpha_1 + m_1 \alpha$; $d_3 = m \alpha_1 \omega_0 + m_1 \alpha_1 \omega_0 + m_1 \alpha \omega_0 + m c_1 + \alpha \alpha_1 + c_1 m_1 + m_1 c$; $d_2 = \alpha c_1 + \alpha_1 c + m_1 c_1 \omega_0 + \alpha \alpha_1 \omega_0 + m c_1 \omega_0 + m_1 c \omega_0$; $d_1 = c c_1 + \alpha c_1 \omega_0 + \alpha c \omega_0$; $d_0 = c c_1 \omega_0$.

$\Delta_5 = d_0 (d_1 m_4 - d_3 m_3 + d_5 m_2)$; $m_4 = \frac{1}{d_0} (d_2 m_3 - d_4 m_2)$

$m_3 = \frac{1}{d_0} (d_2 m_2 - m_1 d_4)$; $m_2 = - d_0 d_5 + d_1 d_4$;

$m_1 = - d_0 d_3 + d_1 d_2$; $m_0 = \frac{1}{d_5} (d_3 m_1 - d_1 m_2)$.

b/ Determination de la dispersion de l'ecart relatif

$$\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{\sigma_0^2 \Omega^2} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{n'(s)\, n'(-s)}{d(s)\, d(-s)} ds \quad ; n'(s) = - m m_1 s^2 - (m \alpha_1 + m_1 \alpha) s - (m c_1 + m_1 c_1)$$

$d(s)$ est le même que plus haut.

$$\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{\sigma_0^2 \Omega^2} = \frac{m_2 n_2'^2 + (n_1'^2 - 2 n_0' n_2') m_3 + n_0'^2 m_4}{2 \Delta_5}$$

$n_4' = 0$; $n_3' = 0$; $n_2' = - m m_1$; $n_1' = - m \alpha_1 - m_1 \alpha_1$; $n_0' = - m c_1 - m_1 c_1$

c/ Expression de la fonctionnelle

$$G' = \frac{\sigma_0^2 \Omega^2}{2\Delta_5} \cdot m_2 (n_2'^2 + \lambda n_2^2) + m_3 (n_1'^2 - 2 n_0' n_2' + \lambda n_1^2 - 2\lambda n_0 n_2) + m_4 (n_0'^2 + \lambda n_0^2)$$

$G' = \frac{N}{D}$ Les conditions d'optimisation sont :

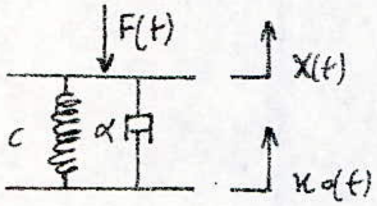
$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial c} D - N \frac{\partial D}{\partial c} = 0 \\ \frac{\partial N}{\partial \alpha} D - N \frac{\partial D}{\partial \alpha} = 0 \end{cases}$$

4.2 Systèmes actifs

4.2.1 Exitation de densité spectrale énergetique

$S_{\ddot{x}_0}(s) = \sigma_0^2 = cte.$

a/ Schema bloc du système

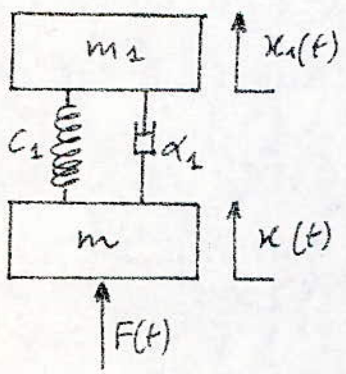


On decompose le système en deux parties et on faisant apparaitre la force interieur $F(t)$

L'equation du mouvement est : $0 = -F(t) - c(x - x_0) - \alpha(\dot{x} - \dot{x}_0)$

ou bien : $F(t) = c(x_0 - x) + \alpha(\dot{x}_0 - \dot{x})$

Deuxième partie :



les équations du mouvement sont :

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1(x_1 - x) - \alpha_1(\dot{x}_1 - \dot{x})$$

$$m \ddot{x} = F(t) - c_1(x - x_1) - \alpha_1(\dot{x} - \dot{x}_1)$$

On faisant la transformation de Laplace on obtient

$$(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1) X_1(s) = (\alpha_1 s + c_1) X(s)$$

$$(m s^2 + \alpha_1 s + c_1) X(s) = F(s) + (\alpha_1 s + c_1) X_1(s)$$

$$F(s) = (\alpha s + c)(X_0 - X)$$

ou bien on introduisant les accelerations

$$F(s) = \frac{\alpha s + c}{s^2} (\ddot{X}_0 - \ddot{X})$$

$$\ddot{X} (m s^2 + \alpha_1 s + c_1) = s^2 F(s) + (\alpha_1 s + c_1) \ddot{X}_1$$

$$\ddot{X}_1 (m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1) = (\alpha_1 s + c_1) \ddot{X}$$

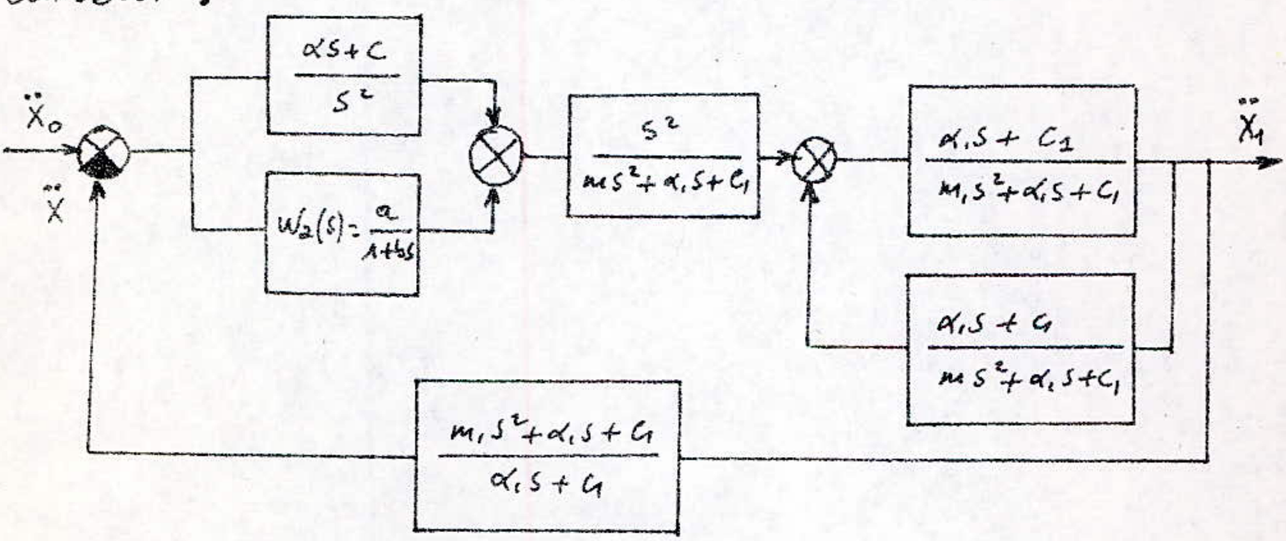
on rearrangeant on a :

$$F(s) = \frac{\alpha s + c}{s^2} (\ddot{X}_0 - \ddot{X})$$

$$\ddot{X}_1(s) = \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1} \ddot{X}(s)$$

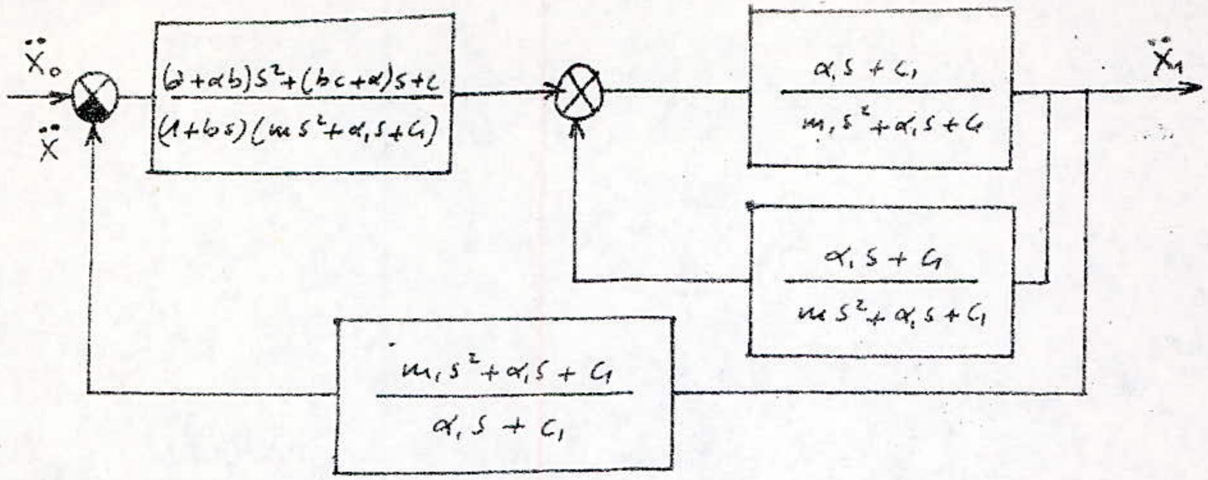
$$\ddot{X}(s) = \frac{s^2 F(s)}{m s^2 + \alpha_1 s + c_1} + \frac{\alpha_1 s + c_1}{m s^2 + \alpha_1 s + c_1} \ddot{X}_1(s).$$

à partir de ces équations on établit le schema suivant :

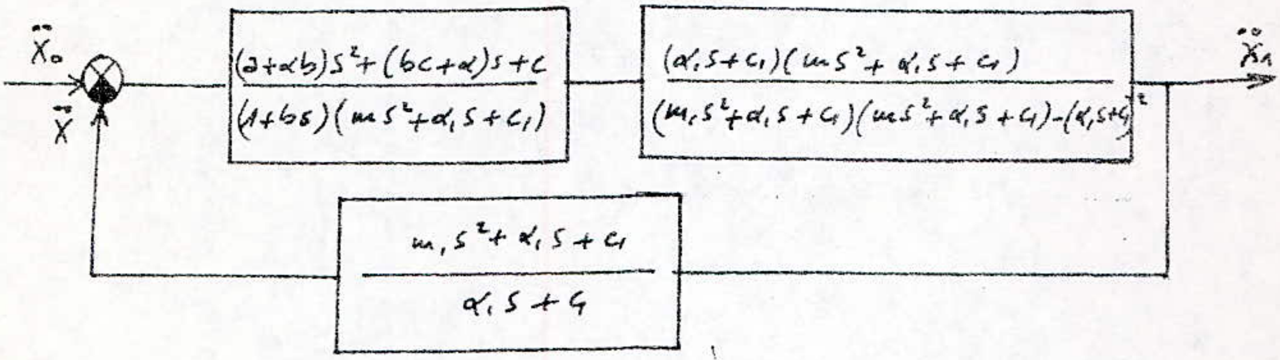


b/ Calcul de la fonction de transfert

Première étape.



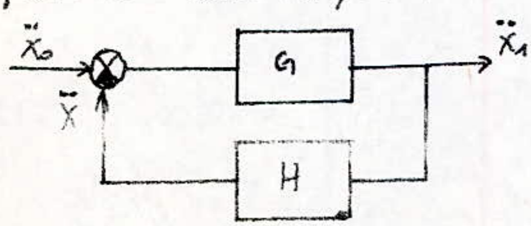
Deuxième étape



troisième étape.

Posons $$G = \frac{(\alpha_1 s+c_1)\left[(a+\alpha b)s^2+(bc+\alpha)s+c\right]}{(1+bs)\left[(m_1 s^2+\alpha_1 s+c_1)(ms^2+\alpha_1 s+c_1)-(\alpha_1 s+c_1)^2\right]}$$

et $H = \dfrac{m_1 s^2+\alpha_1 s+c_1}{\alpha_1 s+c_1}$ notre système se reduit à sa forme canonique :



$$H_{\frac{\ddot{X}_1}{\ddot{X}_0}}(s) = \frac{G}{1+GH}$$

On éffectuons tous les calculs on a $H_{\frac{\ddot{X}_1}{\ddot{X}_0}}(s) = \dfrac{N}{D}$

$N = (a\alpha_1 + \alpha b\alpha_1)s^3 + (bc\alpha_1 + \alpha\alpha_1 + ac_1 + \alpha bc_1)s^2 + (c\alpha_1 + bcc_1 + \alpha c_1)s + cc_1$

$D = bm_1m\,s^5 + (mm_1 + bm_1\alpha_1 + b\alpha_1 m + m_1 a + m_1\alpha b)s^4 + (m_1\alpha_1 +$
$+ \alpha_1 m + bm_1c_1 + bc_1m + m_1bc + m_1\alpha + \alpha_1 a + \alpha\alpha_1 b)s^3 + (m_1c_1 + c_1m +$
$+ m_1c + \alpha_1bc + \alpha_1\alpha + ac_1 + \alpha bc_1)s^2 + (\alpha_1c + bcc_1 + \alpha c_1)s + cc_2.$

c/ Determination de la dispersion d'acceleration

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{\sigma_0^2\Omega^2} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{n(s)\,n(-s)}{d(s)\,d(-s)}\,ds \quad \text{avec}$$

$n(s) = (a\alpha_1 + \alpha b\alpha_1)s^3 + (bc\alpha_1 + \alpha\alpha_1 + ac_1 + \alpha bc_1)s^2 + (c\alpha_1 +$
$+ bcc_1 + \alpha c_1)s + cc_1.$

$d(s) = bm_1m\,s^5 + (mm_1 + bm_1\alpha_1 + b\alpha_1m + am_1 + m_1\alpha b)s^4 +$
$+ (m_1\alpha_1 + \alpha_1m + bm_1c_1 + bc_1m + m_1bc + m_1\alpha + a\alpha_1 + \alpha\alpha_1b)s^3 +$
$+ (c_1m + m_1c_1 + m_1c + \alpha_1bc + \alpha\alpha_1 + ac_1 + \alpha bc_1)s^2 + (\alpha_1c + bcc_1 +$
$+ \alpha c_1)s + cc_1.$

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{\sigma_0^2\Omega^2} = \frac{1}{2\Delta_5}\left[n_3^2 m_1 + (n_2^2 - 2n_1n_3)m_2 + (n_1^2 - 2n_0n_2)m_3 + n_0^2 m_4 \right]$$

$n_4 = 0$; $n_3 = a\alpha_1 + \alpha b\alpha_1$; $n_2 = bc\alpha_1 + \alpha\alpha_1 + ac_1 + \alpha bc_1$

$n_1 = c\alpha_1 + bcc_1 + \alpha c_1$; $n_0 = cc_1$.

$d_5 = bm_1m$; $d_4 = mm_1 + bm_1\alpha_1 + b\alpha_1m + am_1 + m_1\alpha b$;

$d_3 = m_1\alpha_1 + \alpha_1m + bm_1c_1 + bc_1m + m_1bc + m_1\alpha + \alpha_1a + \alpha\alpha_1b$

$d_2 = c_1m + m_1c + \alpha_1bc + \alpha\alpha_1 + ac_1 + \alpha bc_1 + m_1c_1 -$

$d_1 = \alpha_1c + bcc_1 + \alpha c_1$; $d_0 = cc_2$.

$$\Delta_5 = d_0(d_1 m_4 - d_3 m_3 + d_5 m_2)$$

$$m_4 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_3 - d_4 m_2) \qquad m_0 = \frac{1}{\Delta_5}(m_1 d_3 - d_1 m_2)$$

$$m_3 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_2 - m_1 d_4) \qquad m_1 = -d_0 d_3 + d_1 d_2$$

$$m_2 = -d_0 d_5 + d_1 d_4 .$$

d/ Determination de la dispersion de l'ecart.

$$\frac{\sigma^2_{x-x_0}}{\sigma_0^2 \Omega^2} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{n'(s)\, n'(s)}{d(s)\, d(s)}\, ds$$

$$n'(s) = -b m m_1 s^3 - (m m_1 + b m_1 \alpha_1 + b \alpha_1 m)s^2 - (m_1 \alpha_1 + m \alpha_1 + b m_1 c_1 + b c_1 m)s - (m c_1 + m_1 c_1).$$

$d(s)$ est le même qu'au point c/

$n'_4 = 0$; $n'_3 = -b m_1 m$; $n'_2 = -m m_1 - b m_1 \alpha_1 - b \alpha_1 m$

$n'_1 = -m_1 \alpha_1 - m \alpha_1 - b m_1 c_1 - b c_1 m$; $n'_0 = -m c_1 - m_1 c_1$

e/ Expression de la fonctionnelle

$$C_1 = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda \sigma^2_{\ddot{x}}$$

$$\frac{C_1}{\sigma_0^2} = \frac{1}{2\Delta_5}\Big[(n_3'^2 + \lambda n_3) m_1 + (n_1'^2 - 2 n_1' n_3' + \lambda n_2^2 - 2\lambda n_1 n_3) m_2 + (n_1'^2 - 2 n_0' n_2' + \lambda n_1^2 - 2\lambda n_0 n_2) m_3 + (n_0'^2 + \lambda n_0^2) m_4\Big]$$

conditions d'optimisation :

$$\frac{\partial C_1}{\partial c} = 0 \qquad \frac{\partial C_1}{\partial \alpha} = 0$$

4.2.2 Exitation de densité spectrale énergetique

$$S_{\ddot{x}_0}(s) = \frac{\sigma_0^2 \Omega^2}{\omega_0^2 - s^2}$$

a/ Determination de la dispersion d'acceleration

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{\sigma_0^2 \Omega^2} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{n(s)\, n(-s)}{d(s)\, d(-s)}\, ds \qquad \text{avec :}$$

$n(s) = (a\alpha_1 + \alpha b\alpha_1) s^3 + (bc\alpha_1 + \alpha\alpha_1 + ac_1 + \alpha bc_1) s^2 + (c\alpha_1 + bcc_1 +$
$+ \alpha c_1) s + cc_1$.

$d(s) = bm_1m\, s^6 + (\omega_0 bmm_1 + mm_1 + bm_1\alpha_1 + b\alpha_1 m + m_1 a + m_1\alpha b) s^5 +$
$+ (\omega_0 mm_1 + \omega_0 bm_1\alpha_1 + \omega_0 b\alpha_1 m + \omega_0 m_1 a + \omega_0 m_1 \alpha b + m_1\alpha_1 + \alpha_1 m +$
$+ bm_1c_1 + bc_1m + m_1bc + m_1\alpha + \alpha_1 a + \alpha\alpha_1 b) s^4 + (\omega_0 m_1\alpha_1 + \omega_0\alpha_1 m +$
$+ \omega_0 bm_1c_1 + \omega_0 bc_1m + \omega_0 m_1bc + \omega_0 m_1\alpha + \omega_0\alpha_1 a + \omega_0\alpha\alpha_1 b +$
$+ m_1c_1 + mc_1 + m_1c + \alpha_1 bc + \alpha_1\alpha + ac_1 + \alpha bc_1) s^3 + (\omega_0 c_1 m +$
$+ \omega_0 m_1c_1 + \omega_0 m_1 c + \omega_0\alpha_1 bc + \omega_0\alpha\alpha_1 + \omega_0 ac_1 + \omega_0\alpha bc_1 + \alpha_1 c +$
$+ bcc_1 + \alpha c_1) s^2 + (\omega_0\alpha_1 c + \omega_0 bcc_1 + \omega_0\alpha c_1 + cc_1) s + \omega_0 cc_1$.

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{\sigma_0^2\Omega^2} = \frac{n_3^2 m_2 + (n_2^2 - 2n_1n_3) m_3 + (n_1^2 - 2n_0n_2) m_4 + n_0^2 m_5}{2\Delta_6}$$

ou $n_5 = n_4 = 0$; $n_3 = a\alpha_1 + \alpha b\alpha_1$; $n_2 = bc\alpha_1 + \alpha\alpha_1 + ac_1 + \alpha bc_1$

$n_1 = c\alpha_1 + bcc_1 + \alpha c_1$; $n_0 = cc_1$.

$d_6 = bmm_1$; $d_5 = \omega_0 bm_1m + mm_1 + bm_1\alpha_1 + b\alpha_1 m + am_1 + m_1\alpha b$

$d_4 = \omega_0 m_1 m + \omega_0 bm_1\alpha_1 + \omega_0 b\alpha_1 m + \omega_0 m_1 a + \omega_0 m_1\alpha b + m_1\alpha_1 + \alpha_1 m +$
$+ bm_1c_1 + bc_1m + m_1bc + m_1\alpha + \alpha_1 a + \alpha\alpha_1 b$.

$$d_3 = \omega_0 m_1 \alpha_1 + \omega_0 \alpha_1 m + \omega_0 b m_1 c_1 + \omega_0 b c_1 m + \omega_0 m_1 b c + \omega_0 m_1 \alpha +$$

$$+ \omega_0 \alpha_1 a + \omega_0 \alpha \alpha_1 b + c_1 m + m_1 c + \alpha_1 b c + \alpha \alpha_1 + a c_1 + \alpha b c_1 + m_1 c_1$$

$$d_2 = \omega_0 c_1 m + \omega_0 m_1 c + \omega_0 \alpha_1 b c + \omega_0 \alpha_1 \alpha + \omega_0 a c_1 + \omega_0 \alpha b c_1 +$$

$$+ \alpha_1 c + b c c_1 + \alpha c_1 + \omega_0 m_1 c_1$$

$$d_1 = \omega_0 \alpha_1 c + \omega_0 b c c_1 + \omega_0 \alpha c_1 + c c_1 \quad ; \quad d_0 = \omega_0 c c_1 .$$

et

$$\Delta_6 = d_0 \left(d_1 m_5 - d_3 m_4 + d_5 m_3 \right)$$

$$m_5 = \frac{1}{d_0} \left(d_2 m_4 - d_4 m_3 + d_6 m_2 \right)$$

$$m_4 = \frac{1}{d_0} \left(d_2 m_3 - d_4 m_2 + m_1 d_6 \right)$$

$$m_3 = d_0 d_5^2 + d_1 d_3 d_6 - d_1 d_4 d_5 \quad ; \quad m_1 = -d_0 d_1 d_5 + d_0 d_3^2 + d_1^2 d_4 - d_1 d_2 d_3$$

$$m_2 = d_0 d_3 d_5 + d_1^2 d_6 - d_1 d_2 d_5$$

$$m_0 = \frac{1}{d_6} \left(d_4 m_1 - m_2 d_2 - d_0 m_3 \right)$$

b/ Determination de la dispersion de l'écart relatif

$$\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{\sigma_0^2 \Omega^2} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{n'(s)\, n'(-s)}{d(s)\, d(-s)} ds$$

$$n'(s) = -b m_1 m s^3 - \left(m m_1 + b m_1 \alpha_1 + b \alpha_1 m \right) s^2 - \left(m_1 \alpha_1 + \alpha_1 m + \right.$$

$$\left. + b m_1 c_1 + b c_1 m \right) s - \left(m c_1 + m_1 c_1 \right).$$

$d(s)$ le même que précedement.

$$\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{\sigma_0^2 \Omega^2} = \frac{n_3'^2 m_2 + \left(n_2'^2 - 2 n_1' n_3' \right) m_3 + \left(n_1'^2 - 2 n_0' n_2' \right) m_4 + n_0'^2 m_5}{2 \Delta_6}$$

$$n_5' = n_4' = 0 \quad ; \quad n_3' = -b m m_1 \quad ; \quad n_2' = -m m_1 - b m_1 \alpha_1 - b \alpha_1 m$$

$$n_1' = -m_1 \alpha_1 - m \alpha_1 - b m_1 c_1 - b c_1 m \quad ; \quad n_0' = -m c_1 - m_1 c_1 .$$

c/ Expression de la Fonctionnelle.

$$G = \frac{\sigma_0^2 \Omega^2}{2\Delta c}\Big[m_2(n_3'^2 - \lambda n_3) + m_3(n_2'^2 - 2n_1'n_3' + \lambda n_2^2 + 2\lambda n_1 n_3) +$$

$$+ m_4(n_1'^2 - 2n_0'n_2' + \lambda n_1^2 + 2\lambda n_0 n_2) + m_5(n_0'^2 + \lambda n_0^2)\Big]$$

Conditions d'optimisation :

$$\frac{\partial G}{\partial c} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial \alpha} = 0$$

d/ Condition de stabilité

l'equation caracteristique est :

$D^* = D = 0$ (voir le point b/ page 38)

ecrivons D^* sous la forme :

$$D^* = D_5 S^5 + D_4 S^4 + D_3 S^3 + D_2 S^2 + D_1 S + D_0 .$$

$$\begin{array}{|cccc}
 & D_5 & D_3 & D_1 \\
 & D_4 & D_2 & D_0 \\
A = & \dfrac{D_5 D_2 - D_3 D_4}{D_4} & \dfrac{D_5 D_0 - D_1 D_4}{D_4} = B & 0 \\
B = & \dfrac{D_2(D_2 D_5 - D_3 D_4) - D_4(D_0 D_5 - D_1 D_4)}{D_2 D_5 - D_3 D_4} & D_0 & 0 \\
 & A - \dfrac{A D_0}{B} & 0 & \\
 & D_0 & & \\
 & 0 & &
\end{array}$$

Il faut que tous les élements de la première colonne soient de même signe pour que le système soit absolument stable.

$D_5 = b m_1 m$; $D_4 = m m_1 + b m_1 \alpha_1 + b \alpha_1 m + a m_1 + m_1 \alpha b$

$D_3 = m_1 \alpha_1 + \alpha_1 m + b m_1 c_1 + b c_1 m + m_1 b c + m_1 \alpha + a \alpha_1 + \alpha \alpha_1 b$

$D_2 = m_1 c_1 + m c_1 + m_1 c + \alpha_1 b c + \alpha_1 \alpha + a c_1 + \alpha b c_1$

$D_1 = \alpha_1 c + b c c_1 + \alpha c_1$; $D_0 = c c_1$.

```
C*********************-( CALCUL DES FONCTIONNELLES )-*******
C*********************** EXITATION BRUIT BLANC ************
C                                     ***************

C
      REAL M
      DO 20 RO=.1,.65,.05
      B=0.
      M=80
      ALAM=RO/(1.-RO)
      C=M/SQRT(ALAM)
      ALF=M*SQRT(2.)/ALAM**(1./4.)
      FONCT1=SQRT(2.)*ALAM**(0.75)
      E1=M*ALAM*C*ALF**2+M**4+M**2*C**2*ALAM
      E2=M*ALAM*ALF**2+2.*ALAM*M**2*C
      E3=ALF**3*C*ALAM+M**3*ALF+M*ALF*C**2*ALAM
      E4=ALF**3*ALAM-2.*M*C*ALAM*ALF+2.*M*ALF*ALAM*C
      E5=C**2*ALAM*ALF**2+M**3*C+M*ALAM*C**3
      E6=-2.*M*ALAM*ALF+M*ALAM*ALF
      E7=C*ALAM*ALF**2+M**3+M*ALAM*C**2
      E9=M**2*ALAM
      D1=2.*M*C*ALF
      D2=-2.*M**2
      D3=2.*M*ALF*C**2
      D4=-2.*M**2*C+2.*M*ALF**2
      D5=2.*C*M*ALF**2
      D7=2.*M**2*ALF
      D8=2.*M**2*C*ALF
      B1=E7*D2-E6*D1
      B2=E7*D4+2.*E5*D2+E6*D3-E4*D1
      B3=E5*D4+E7*D5-E4*D3-E3*D1
      B4=2.*(E7*D7-E2*D1-E9*D3)
      B5=2.*(E5*D7+E7*D8-E2*D3-E1*D1)
      B6=-2.*E9*D1
      B7=E6*D7-E9*D4-E2*D2
      B8=E4*D7+E6*D8-E2*D4-E1*D2-E9*D5
      B9=E5*D5-E3*D3
      B10=2.*(E5*D8-E1*D3)
      B11=E3*D7-E2*D5+E4*D8-E1*D4
      B12=E3*D8-E1*D5
      B13=-D2*E9
      Y1=1.E+3*B1+1.E+2*B2+1.E+1*B3+B9
      Y2=1.E+2*B4+1.E+1*B5+1.E+3*B6+B10
      Y3=1.E+3*B7+1.E+2*B8+1.E+1*B11+B12+1.E+4*B13
8     S=B
      B=SQRT(-(Y3+Y1*B**3)/Y2)
      IF(ABS(B-S).LT.1.E-07) GO TO 22
      GO TO 8
22    V=12800.
      T=80.
      P=9050.987
      IF(P*(ALAM**(-0.75))*(B**2)+(V*(ALAM**(-0.5))-T)*B+
     1 P*(ALAM**(-0.25)).GT.0.) GO TO 31
      GO TO 20
31    X1=1.E+1*E7+E5
```

```
      X2=1.E+2*E6+1.E+1*E4+E3
      X3=1.E+1*E2+E1+1.E+2*E9
      R1=1.E+1*D1+D3
      R2=1.E+2*D2+1.E+1*D4+D5
      R3=1.E+1*D7+D8
      FONCT2=(X1*(B**2)+X2*B+X3)/(R1*(B**2)+R2*B+R3)
      WRITE(1,*),'------------------------------------------------------------'
      WRITE(1,*),'RO=',RO,'FONCT1=',FONCT1,'FONCT2=',FONCT2
20    CONTINUE
      STOP
      END
```

résultat pour a = 5 — *Fonct1 : représente C/σ_0^2 du système passif*
Fonct2 : celle du système actif.

RO=	0.1000000	FONCT1=	0.2721655	FONCT2=	0.2721942
RO=	0.1500000	FONCT1=	0.3850519	FONCT2=	0.3851161
RO=	0.2000000	FONCT1=	0.5000000	FONCT2=	0.5001175
RO=	0.2500000	FONCT1=	0.6204032	FONCT2=	0.6205965
RO=	0.3000000	FONCT1=	0.7490872	FONCT2=	0.7493360
RO=	0.3500000	FONCT1=	0.8889575	FONCT2=	0.8894009
RO=	0.4000000	FONCT1=	1.043390	FONCT2=	1.044031
RO=	0.4500000	FONCT1=	1.216613	FONCT2=	1.217525
RO=	0.5000001	FONCT1=	1.414214	FONCT2=	1.415503
RO=	0.5500001	FONCT1=	1.643909	FONCT2=	1.645729
RO=	0.6000001	FONCT1=	1.916830	FONCT2=	1.919416
RO=	0.6500001	FONCT1=	2.249827	FONCT2=	2.253556
RO=	0.7000001	FONCT1=	2.669917	FONCT2=	2.675426
RO=	0.7500001	FONCT1=	3.223711	FONCT2=	3.232169
RO=	0.8000001	FONCT1=	4.000002	FONCT2=	4.013796
RO=	0.8500001	FONCT1=	5.194110	FONCT2=	5.218967
RO=	0.9000002	FONCT1=	7.348479	FONCT2=	7.402672
RO=	0.9500002	FONCT1=	12.87008	FONCT2=	13.05823

a = 1

RO=	0.2000000	FONCT1=	0.5000000	FONCT2=	0.5000049
RO=	0.2500000	FONCT1=	0.6204032	FONCT2=	0.6204113
RO=	0.3000000	FONCT1=	0.7490872	FONCT2=	0.7490996
RO=	0.3500000	FONCT1=	0.8889575	FONCT2=	0.8889760
RO=	0.4000000	FONCT1=	1.043390	FONCT2=	1.043417
RO=	0.4500000	FONCT1=	1.216613	FONCT2=	1.216651
RO=	0.5000001	FONCT1=	1.414214	FONCT2=	1.414263
RO=	0.5500001	FONCT1=	1.643909	FONCT2=	1.643986
RO=	0.6000001	FONCT1=	1.916830	FONCT2=	1.916940
RO=	0.6500001	FONCT1=	2.249827	FONCT2=	2.249987
RO=	0.7000001	FONCT1=	2.669917	FONCT2=	2.670155
RO=	0.7500001	FONCT1=	3.223711	FONCT2=	3.224080
RO=	0.8000001	FONCT1=	4.000002	FONCT2=	4.000610
RO=	0.8500001	FONCT1=	5.194110	FONCT2=	5.195223
RO=	0.9000002	FONCT1=	7.348479	FONCT2=	7.350960
RO=	0.9500002	FONCT1=	12.87008	FONCT2=	12.87911

a = 10

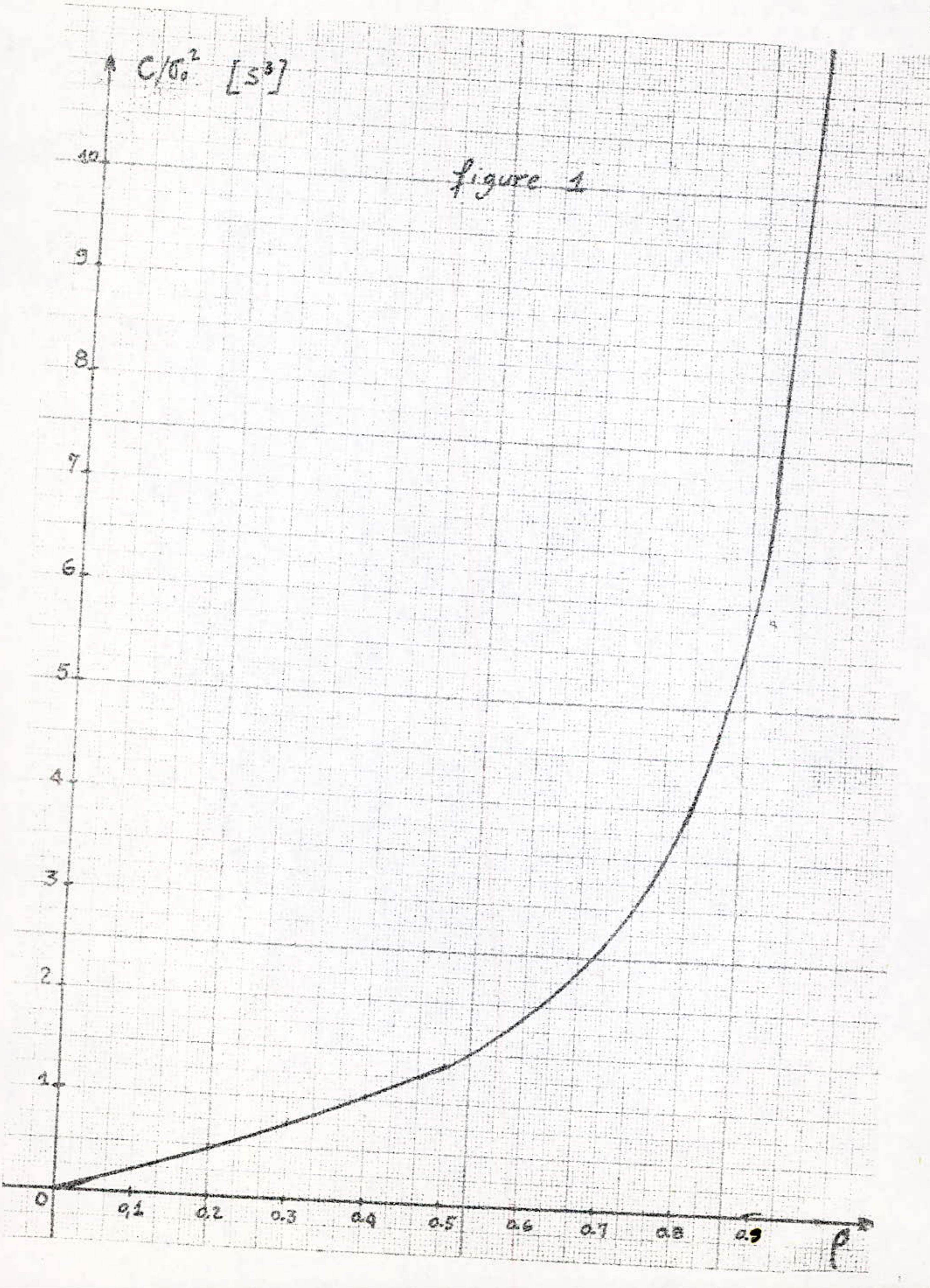
RO=	0.1000000	FONCT1=	0.2721655	FONCT2=	0.2722777
RO=	0.1500000	FONCT1=	0.3850519	FONCT2=	0.3853012
RO=	0.2000000	FONCT1=	0.5000000	FONCT2=	0.5004541
RO=	0.2500000	FONCT1=	0.6204032	FONCT2=	0.6211477
RO=	0.3000000	FONCT1=	0.7490872	FONCT2=	0.7502326
RO=	0.3500000	FONCT1=	0.8889575	FONCT2=	0.8906499
RO=	0.4000000	FONCT1=	1.043390	FONCT2=	1.045827
RO=	0.4500000	FONCT1=	1.216613	FONCT2=	1.220067
RO=	0.5000001	FONCT1=	1.414214	FONCT2=	1.419071

a = 1.5

RO=	0.2000000	FONCT1=	0.5000000	FONCT2=	0.5000108
RO=	0.2500000	FONCT1=	0.6204032	FONCT2=	0.6204212
RO=	0.3000000	FONCT1=	0.7490872	FONCT2=	0.7491150
RO=	0.3500000	FONCT1=	0.8889575	FONCT2=	0.8889990
RO=	0.4000000	FONCT1=	1.043390	FONCT2=	1.043450
RO=	0.4500000	FONCT1=	1.216613	FONCT2=	1.216699
RO=	0.5000001	FONCT1=	1.414214	FONCT2=	1.414335
RO=	0.5500001	FONCT1=	1.643909	FONCT2=	1.644081
RO=	0.6000001	FONCT1=	1.916830	FONCT2=	1.917076
RO=	0.6500001	FONCT1=	2.249827	FONCT2=	2.250184
RO=	0.7000001	FONCT1=	2.669917	FONCT2=	2.670447
RO=	0.7500001	FONCT1=	3.223711	FONCT2=	3.224531
RO=	0.8000001	FONCT1=	4.000002	FONCT2=	4.001352
RO=	0.8500001	FONCT1=	5.194110	FONCT2=	5.196576
RO=	0.9000002	FONCT1=	7.348479	FONCT2=	7.353958
RO=	0.9500002	FONCT1=	12.87008	FONCT2=	12.88987

a = 0.5

RO=	0.4000000	FONCT1=	1.043390	FONCT2=	1.043396
RO=	0.4500000	FONCT1=	1.216613	FONCT2=	1.216622
RO=	0.5000000	FONCT1=	1.414214	FONCT2=	1.414227
RO=	0.5500000	FONCT1=	1.643909	FONCT2=	1.643928
RO=	0.6000000	FONCT1=	1.916829	FONCT2=	1.916857
RO=	0.6500000	FONCT1=	2.249827	FONCT2=	2.249867
RO=	0.7000000	FONCT1=	2.669916	FONCT2=	2.669977
RO=	0.7500001	FONCT1=	3.223711	FONCT2=	3.223804
RO=	0.8000001	FONCT1=	4.000001	FONCT2=	4.000155
RO=	0.8500001	FONCT1=	5.194108	FONCT2=	5.194391
RO=	0.9000001	FONCT1=	7.348475	FONCT2=	7.349108
RO=	0.9500001	FONCT1=	12.87007	FONCT2=	12.87239


C/σ_0^2 [s^3]
figure 1
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
ρ

V APPLICATIONS

On a fait cinq applications pour differents valeurs de a ($a = 0.5$; 1 ; 1.5 ; 5 ; 10) et pour éxitation bruit blanc ($S\ddot{x}_0(s) = \sigma_0^2$), d'aprés les résultats trouvés et reportés sur le graphe de la figure 1 qui represente l'evolution de la fonctionnelle optimum (C/σ_0^2) en fonction de ρ qui est donné par la relation $\lambda = \lambda_0 \dfrac{\rho}{1-\rho}$ où λ est le multiplicateur de Lagrange, si on prend $\lambda_0 = 1$; ρ variera entre 0 et 1, ainsi λ peut prendre toutes les valeurs reelles positives.

On remarque que toutes les courbes des fonctionnelles optimums des differents cas sont superposables, ce qui implique que le système passif et le système actif donnent les mêmes resultats, de ce fait le système actif qui a pour fonction de transfert $w_a(s) = \dfrac{a}{1+bs}$ et pour éxitation bruit blanc, n'améliore pas l'isolation vibratoire

VI CONCLUSION

1 La determination du système de vibro-isolation optimum est obtenue en minimisant la fonctionn- -elle en supposant :

a/ que notre système de vibro-isolation est lineaire, realisable et stable.

b/ que les spectres des frequences d'exitations sont connues

c/ qu'on vibro-isole des systèmes à paramètres discrets.

2 - On a considéré aussi qu'il n'ya que des vibrations verticales, mais en réalité il ya d'autres mouvements et oscillations dans les 3 directions de l'espace.

3 - Pour l'exitation bruit blanc $S\ddot{x}_0(s) = \sigma_0^2$ la fonctionnelle optimum obtenue pour le système passif et pour le systeme actif sont égales ce qui implique que le système actif n'ameliore pas l'isolation vibratoire du systeme mecanique.

4 - Il est souhaitable que le sujet sera poursuivie afin d'obtenir l'influence du système actif sur le systeme mecani- -que pour d'autre type d'éxitation.

TABLE DINTEGRATION

$$I_n = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{n(s)\,n(-s)}{d(s)\,d(-s)}\,ds$$

$$n(s) = n_{n-1}s^{n-1} + n_{n-2}s^{n-2} + \cdots + n_0$$

$$d(s) = d_n s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_0$$

$$I_1 = \frac{n_0^2}{2d_0 d_1} \qquad I_2 = \frac{n_1^2 d_0 + n_0^2 d_2}{2 d_0 d_1 d_2}$$

$$I_3 = \frac{n_2^2 d_0 d_1 + (n_1^2 - 2n_0 n_2) d_0 d_3 + n_0^2 d_2 d_3}{2 d_0 d_3 (-d_0 d_3 + d_1 d_2)}$$

$$I_4 = \frac{n_3^2(-d_0^2 d_3 + d_0 d_1 d_2) + (n_2^2 - 2n_1 n_3) d_0 d_1 d_4 + (n_1^2 - 2n_0 n_2) d_0 d_3 d_4 +}{2 d_0 d_4 (-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)}$$

$$+ \frac{n_0^2(-d_1 d_4^2 + d_2 d_3 d_4)}{2 d_0 d_4 (-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)}$$

$$I_5 = \frac{1}{2\Delta_5}\Big[n_4^2 m_0 + (n_3^2 - 2n_2 n_4) m_1 + (n_2^2 - 2n_1 n_3 + 2n_0 n_4) m_2 + (n_1^2 - 2n_0 n_2) m_3 +$$

$$+ n_0^2 m_4\Big]$$

où $m_0 = \frac{1}{d_5}(d_3 m_1 - d_1 m_2)$ $\qquad m_3 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_2 - d_4 m_1)$

$m_1 = -d_0 d_3 + d_1 d_2$ $\qquad m_4 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_3 - d_4 m_2)$

$m_2 = -d_0 d_5 + d_1 d_4$ $\qquad \Delta_5 = d_0(d_1 m_4 - d_3 m_3 + d_5 m_2)$

$$I_6 = \frac{1}{2\Delta_6}\Big[n_5^2 m_0 + (n_4^2 - 2n_3 n_5) m_1 + (n_3^2 - 2n_2 n_4 + 2n_1 n_5) m_2 + (n_2^2 - 2n_1 n_3 +$$

$$+ 2n_0 n_4) m_3 + (n_1^2 - 2n_0 n_2) m_4 + n_0^2 m_5\Big]$$

où : $m_0 = \frac{1}{d_6}(d_4 m_1 - d_2 m_2 + d_0 m_3)$ $\qquad m_4 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_3 - d_4 m_2 + d_6 m_1)$

$m_1 = -d_0 d_1 d_5 + d_0 d_3^2 + d_1^2 d_4 - d_1 d_2 d_3$ $\qquad m_5 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_4 - d_4 m_3 + d_6 m_2)$

$m_2 = d_0 d_3 d_5 + d_1^2 d_6 - d_1 d_2 d_5$ $\qquad m_3 = d_0 d_5^2 + d_1 d_3 d_6 - d_1 d_4 d_5$

$$\Delta_6 = d_0(d_1 m_5 - d_3 m_4 + d_5 m_3)$$

BIBLIOGRAPHIE

1 - GC Newton, Jr - Leonard A - Gould - James F. Kaiser
Analytical Design of linear feed back Controls
N.Y John Willey et sons, Inc London 1957

2 - V.V Solodovnikov
Dynamique statistique des systèmes linéaires de commande automatique
Dunod Paris 1965.

3 - V. A. Svetlickij
Vibrations aleatoires des systemes mecanique
traduit du Russe par Albert Coubat.

4 - G. Flory
Formulaire de mathematiques speciales
Vuibert 1978.

5 - Marek Ksiazek et M. Kerdjoudj
construction analytique d'un système optimum de V.I du corps d'un homme operateur assis.
ENPA Promotion Juin 1985.

6 - Marek Ksiazek et M. Trbi
Comparaison d'efficacités de certains systèmes de vibro-isolation.
ENPA Promotion Juin 1985.

7 - M - SPIEGEL
Probabilité et statistique
Serie schaum 1984.