

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

26/87

14

وزارة التعليم والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

المركز الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention d'un diplôme d'ingénieur d'Etat

SUJET

Dimensionnement de la Manivelle d'un Vilebrequin

Proposé par :

M. BOUKABACHE

Etudié par :

BOUTALEB Salah

Dirigé par :

M. BOUKABACHE

PROMOTION : JANVIER 1987



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention d'un diplôme d'ingénieur d'Etat

SUJET

Dimensionnement de la Manivelle d'un Vilebrequin

Proposé par :

M. BOUKABACHE

Etudié par :

BOUTALEB Salah

Dirigé par :

M. BOUKABACHE

PROMOTION : JANVIER 1987

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention d'un diplôme d'ingénieur d'Etat

SUJET

Dimensionnement de la Manivelle d'un Vilebrequin

Proposé par :

M. BOUKABACHE

Etudié par :

BOUTALEB Salah

Dirigé par :

M. BOUKABACHE

PROMOTION : JANVIER 1987

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

وَالصَّلَاةِ
وَالسَّكِينِ
وَمَسَاكِينِهِ
وَالْحَالِينَ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Je tiens à remercier vivement mon promoteur
M^r MOHAMED BOUKABACHE pour l'aide qu'il
n'a pas cessé de m'apporter sur le sujet qui
me l'a proposé.

Que tous les professeurs qui ont contribué à ma
formation, et tous ceux qui ont participé du près ou
de loin à la réalisation de cette étude, trouvent ici
ma profonde gratitude et mes sincères remerciements.

DEDICACES

Je dédie ce travail à :

- mon père
- ma mère

Qui ont tant souffert pour me voir ainsi diplômé.
et à :

- mes frères
- mes sœurs

Qui n'ont pas cessé de m'aider chacun avec les moyens
dont il dispose.

Sans oublier toute la famille et mes amis.

1111) MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR.

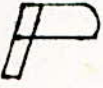
وزارة التعليم العالي

11- ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

11) DEPARTEMENT MECANIQUE

فرع الهندسة الميكانيكية



ROMOTEUR : BOUKABACHE.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة - BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

الموجه : محمد بوكعباش

11- LEVE INGENIEUR : BOUTALEB .S

الطالب المهندس : صالح بو طالب

الموضوع: ايجاد ابعاد ذراع عمود مرافقي

الملخص: تتمثل هذه الدراسة في اعداد برنامج معلوماتي
الحساب القوي المؤثرة على الذراع و ايجاد ابعاده وهذا
لكل من المحركات ذات الصنف الوحيد للاسطوانات
ومزدوجة الصنف على الشكل (V)

SUJET : 11) DIMENSIONNEMENT DE LA MANIVELLE D'UN VILLE BREQUIN.

RESUME: Cette étude consiste à l'Etablissement d'un programme
pour le calcul des efforts agissants sur la manivelle
d'un vilebrequin et son dimensionnement pour les moteurs
en lignes et en (V)

SUBJECT : THE CRANK CHEFT DIMENSIONNEMENT.

ABSTRACT : This study consiste in writing a program allowing
the efforts in the cranke cheft calculation and
his dimensionnement for the engines in line and (V).

SOMMAIRE

I -	INTRODUCTION	1
II -	ETUDE CINEMATIQUE DU SYSTEME	2
	BIELLE MANIVELLE	
1 -	MISE EN PLACE DES REPERES ET	2
	DEFINITION DES POINTS	
2 -	FORMULES DE PASSAGE ENTRE REPERES....	5
2.1	Coordonnées des vecteurs $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$	
	dans le repère $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.	
2.2	Coordonnées des vecteurs $\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2$	6
	dans le repère $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.	
2.3	Coordonnées des vecteurs $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$	
	dans le repère $(0, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$.	
2.4	Coordonnées des vecteurs $\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4$	7
	dans le repère $(0, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$	
2.5	Coordonnées des vecteurs $\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3$	
	dans le repère $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$	
3 -	RELATIONS CINEMATIQUES	9
3.1	Définition de l'angle φ et ψ	
3.2	Définition de $\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$	
3.3	Définition de $\ddot{\varphi}$ et $\ddot{\psi}$	10
4 -	CINEMATIQUE DES POINTS A, G, B, J, D	10
4.1	Cinématique du point A	
4.2	Cinématique du point G	11
4.3	Cinématique du point B	12
4.4	Cinématique du point J	13

4.5	Cinématique du point D	15
III	ETUDE DYNAMIQUE DU SYSTEME	17
	BIELLE-MANIVELLE	
1	MOTEUR EN LIGNE	
1.1	Etude dynamique du piston	
1.11	Equations vectorielles fondamentales du piston	18
1.12	calcul du moment dynamique	19
1.13	calcul des moments	
1.14	Equations scalaires du piston	20
1.2	Etude dynamique de la bielle	22
1.21	Equations vectorielles fondamentales de la bielle	
1.22	Calcul du moment dynamique	23
1.23	Calcul des moments	24
1.24	Equations scalaires de la bielle	25
1.3	Etude dynamique de la manivelle	27
1.31	Equations vectorielles fondamentales de la manivelle	28
1.32	calcul du moment dynamique	
1.33	calcul des moments	29
1.34	Equations scalaires de la manivelle	30
1.4	Système d'équations	32
1.5	Expression des efforts dans le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$	34
2	MOTEUR EN V	35
2.1	Etude dynamique du piston	36
2.11	Equations vectorielles fondamentales du piston	37
2.12	calcul des moments	38
2.13	Equations scalaires du piston	39
2.2	Etude dynamique de la bielle en fourche	40



2.2.1	Equations vectorielles fondamentales de la bielle en fourche.....	40
2.2.2	Calcul du moment dynamique	41
2.2.3	Calcul des moments	42
2.2.4	Equations scalaires de la bielle en fourche.....	
2.3	Etude dynamique de la manivelle.....	44
2.3.1	Calcul des moments	
2.3.2	Equations scalaires de la manivelle	45
2.3.3	Système d'équations	
IV	DIMENSIONNEMENT DE LA MANIVELLE.....	48
1.	GENERALITES	
2.	LA MANIVELLE.....	
3.	MOTEUR EN LIGNE	49
3.1	Effort de pression	
3.2	Effort tangentiel	52
3.4	Récapitulation	56
4.	MOTEUR EN V.....	58
4.1	Effort tangentiel	
4.2	Récapitulation	66
V	ORGANIGRAMME	68
VI	CONCLUSION.....	74

TABLE DES FIGURES

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

- Fig.-1.1 Représentation du système bielle - manivelle
- Fig.-1.2.a Passage du repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
- Fig.-1.2 b Passage du repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au repère $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
- Fig.-1.2 c Passage du repère $(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ au repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
- Fig.-1.2 c Passage du repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au repère $(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$
- Fig.-1.2 d Passage du repère $(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ au repère $(D, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$
- Fig.-2.1 Représentation des actions mécaniques sur le piston
- Fig.-2.2 Représentation des actions mécaniques sur la bielle
- Fig. 2.3 Représentation des actions mécaniques sur la manivelle
d'un moteur en ligne
- Fig.-2.4 Actions mécaniques sur la manivelle d'un moteur en V
- Fig.-2.5 Actions mécaniques sur la bielle en fourche
- Fig.-3.1 Déformations et contraintes au P.M.H
- Fig.-3.2 Déformation et contraintes à l'effort tangentiel maximal
- Fig.-3.3 Représentation des efforts au P.M.H de la 1^{er} bielle
- Fig.-3.4 Représentation des efforts tangentiels des deux bielles

NOTATIONS UTILISEES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

- θ angle de rotation du vilebrequin
 φ angle d'oscillation de la bielle en fourche
 $\dot{\varphi}$ vitesse angulaire de la bielle en fourche
 $\ddot{\varphi}$ accélération angulaire de la bielle en fourche
 ω vitesse angulaire du moteur
 R rayon de la manivelle
 r position du centre de gravité de la manivelle par rapport à l'axe du vilebrequin.
 K centre de gravité de la manivelle
 L L'entr'axe des bielles
 J centre de gravité de la bielle en fourche
 L_D distance entre J et le pied de la bielle
 Ω rotation instantanée
 Γ accélération linéaire
 M moment
 m_b masse de la bielle
 m_p masse du piston et ses accessoires
 δ moment dynamique.
 I_{GZ} moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité
 S section du piston
 $P(\theta)$ La pression en fonction de θ
 P_0 La pression du carter du moteur
 δ angle d'ouverture du V.
 M_m masse de la manivelle
 d_m diamètre du maneton

- a épaisseur du bras
 b largeur du bras
 $d_{e\epsilon}$ diamètre extérieur des tourillons
 $d_{i\epsilon}$ diamètre intérieur des tourillons
 L_A demi travé de la manivelle
 e distance entre bras et point d'application des réactions sur les tourillons
 S_b section du bras

Moteur en ligne

- σ_{fm} contrainte à la flexion du maneton
 σ_{fb} contrainte à la flexion des bras
 σ_b contrainte à la compression
 σ_{ft} contrainte à la flexion des tourillons
 σ_{ct} contrainte au cisaillement des tourillons
 τ_m contrainte de torsion du maneton
 τ_b contrainte de torsion des bras
 τ_t contrainte de torsion des tourillons

Moteur en V

Pour les moteurs en V on retrouve les même notations suivies en plus de l'indice V.

I - INTRODUCTION

Le vilebrequin formé de n manivelles constitue le dernier système de la chaîne cinématique qui est susceptible de transformer un déplacement rectiligne alternatif en un déplacement rotatif continu.

Le vilebrequin est, avec les pistons, la pièce la plus importante du moteur.

Pratiquement exempt de contrainte thermique, le vilebrequin est, par contre, soumis à des efforts mécaniques alternés d'autant plus sévères qu'ils varient notablement d'un point à un autre, De plus un vilebrequin n'est pas une pièce qu'il est admis de remplacer périodiquement, tant à cause de son prix que des travaux importants que son remplacement nécessite.

La manivelle étant une partie du vilebrequin soumise aux mêmes conditions que celui-ci, son dimensionnement est fort nécessaire; ce qui fera l'objet de notre étude.

II ETUDE CINÉMATIQUE DU SYSTÈME BIELLE-MANIVELLE

1. MISE EN PLACE DES REPÈRES ET DEFINITION DES POINTS.

L'étude d'un tel système nécessite la mise en place de cinq repères, qui engendrent les deux types de moteur, en ligne et en V (fig 1-1).

a. Repères fixes:

$(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au cylindre 1 "1^{er} ligne"

O : est le centre de l'axe du vilebrequin.

\vec{x}_0 : axe sur le plan horizontal du moteur.

\vec{y}_0 : axe du cylindre 1.

$(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ lié au cylindre 2 "2^{ème} ligne"

\vec{y}_3 : axe du cylindre 2,

$\vec{z}_3 = \vec{z}_0$: axe du vilebrequin.

le volant est placé sur le \vec{z}_0 positif.

b. Repères mobiles:

- lié au vilebrequin (manivelle), $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$:

\vec{y}_1 : axe portant la manivelle.

θ : angle de rotation du vilebrequin avec $\theta = (\vec{y}_0, \vec{OA})$.

β : angle de rotation du vilebrequin avec $\beta = (\vec{y}_3, \vec{OA})$.

$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\beta}{dt} = \omega$: vitesse angulaire du moteur,

considérée constante.

On note par $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$ ou $\overrightarrow{\Omega(m/0)} = \omega \vec{z}_0$: le vecteur rotation instantané du repère 1 (manivelle) par rapport au repère 0 autour de \vec{z}_0

- Lié à la bielle 1, $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$:

\vec{y}_2 : axe portant la bielle,

B : pied de la bielle.

\vec{z}_2 : axe passant par B et \perp à (\vec{x}_2, \vec{y}_2)

φ : angle de rotation de la bielle, $\varphi = (\vec{y}_2, \vec{BA})$.

On note par $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$ ou $\overrightarrow{\Omega(b1/0)} = \dot{\varphi} \vec{z}_0$: le vecteur rotation instantané du repère 2 (bielle 1) par rapport au repère 0 autour de \vec{z}_0 .

$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$: vitesse angulaire de la bielle 1

- Lié à la bielle 2: $(D, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$:

D : pied de la bielle.

\vec{y}_4 : axe portant la bielle $\perp \vec{x}_4$.

\vec{z}_4 : axe passant par D et \perp à (\vec{x}_4, \vec{y}_4)

ψ : angle de rotation de la bielle 2 avec $\psi = (\vec{y}_3, \vec{DA})$.

Soit $\overrightarrow{\Omega(4/0)} \sim \overrightarrow{\Omega(b2/0)} = \dot{\psi} \vec{z}_0$

$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$: vitesse angulaire de la bielle 2

c. Définition des points :

B, D : pieds des bielles, coulissant successivement sur les axes \vec{y}_0, \vec{y}_3 .

G, J : centres de gravité des deux bielles, tel que :

$$\overrightarrow{BG} = L_b \cdot \vec{y}_2 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DJ} = L_d \cdot \vec{y}_4$$

A : point d'articulation du système Bielle-manivelle.

R : rayon de la manivelle avec $\overrightarrow{OA} = R \vec{y}_1$

L : l'entr'axe des bielles, tel que

$$\overrightarrow{BA} = L \cdot \vec{y}_2 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DA} = L \cdot \vec{y}_4$$

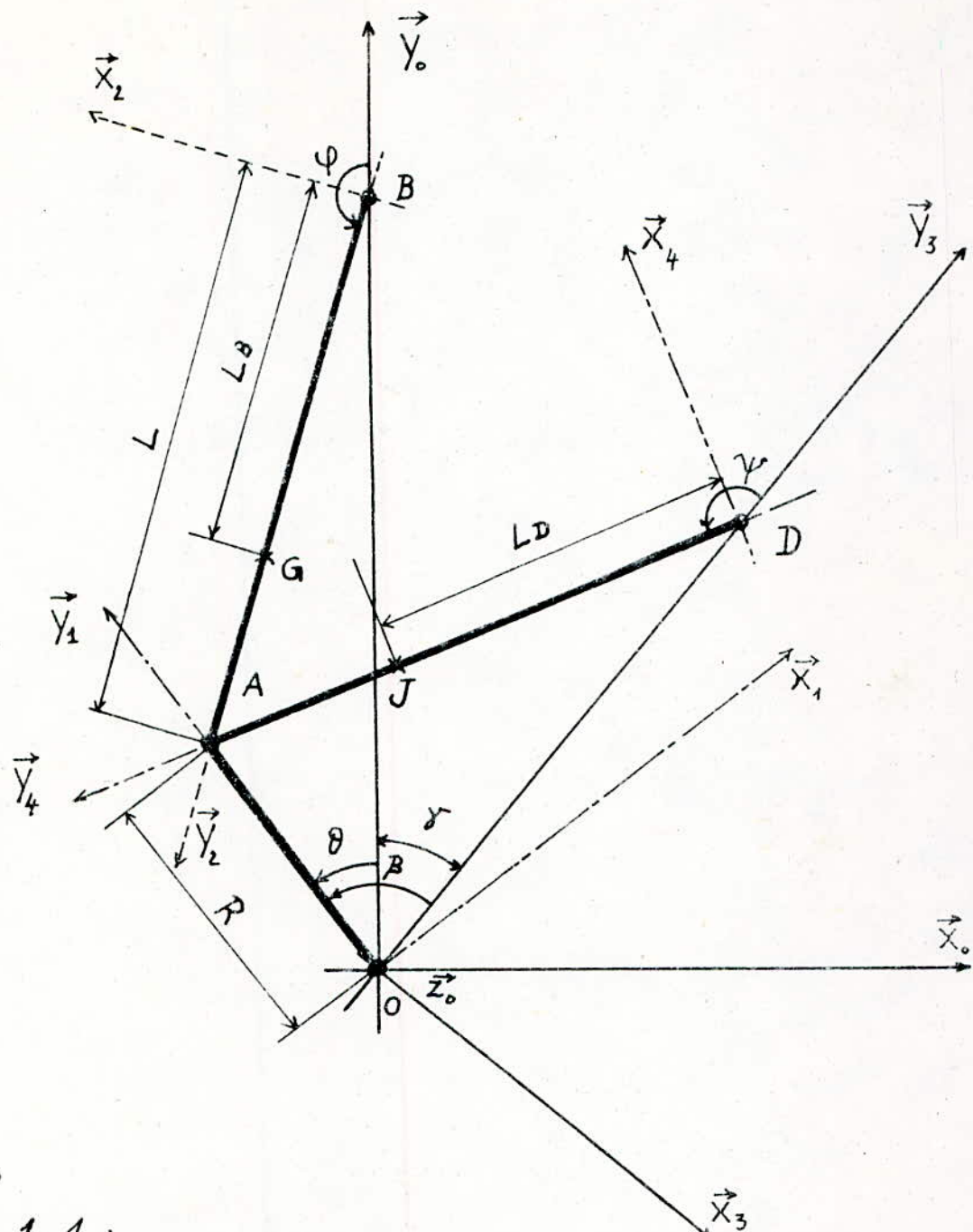


Fig 1.1 :
 Représentation du système Bielle - manivelle.
 δ : angle du V , constant.
 $\delta = 0$: moteur en ligne
 $\delta \neq 0$: moteur en V .

2. FORMULES DE PASSAGE ENTRE REPÈRES

2.1 Coordonnées des vecteurs

$\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$ dans le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

Le passage du repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ se fait par la projection des axes \vec{x}_1, \vec{y}_1 sur \vec{x}_0, \vec{y}_0 . (fig 2.2 a)

a - Vecteurs positions

$$\left\| \begin{aligned} \vec{x}_1 &= \cos \theta \cdot \vec{x}_0 + \sin \theta \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 &= -\sin \theta \cdot \vec{x}_0 + \cos \theta \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z}_1 &= \vec{z}_0 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

b - Vecteurs vitesses

Par définition:
$$\vec{v}(A, 1/0) = \frac{d^0 \vec{OA}}{dt}$$

La dérivée d'un vecteur \vec{OA} est donnée par la formule de BOUR:

$$\frac{d^0 \vec{OA}}{dt} = \frac{d^1 \vec{OA}}{dt} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \vec{OA}$$

Si \vec{OA} est fixe dans le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$$\frac{d^1 \vec{OA}}{dt} = \vec{0} \quad \text{donc :} \quad \frac{d^0 \vec{OA}}{dt} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \vec{OA}$$

Appliquée aux vecteurs positions définies précédemment on trouve :

$$\left\| \begin{aligned} \frac{d^0 \vec{x}_1}{dt} &= \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \vec{x}_1 = \omega \vec{z} \wedge \vec{x}_1 = \omega \vec{y}_1 \\ \frac{d^0 \vec{y}_1}{dt} &= \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \vec{y}_1 = \omega \vec{z} \wedge \vec{y}_1 = -\omega \vec{x}_1 \\ \frac{d^0 \vec{z}_1}{dt} &= \vec{0} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

2.2. Coordonnées des vecteurs

$\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2$ dans le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

On opère de la même façon que précédemment (fig 1.2.b)

a - Vecteurs positions.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_2 = \cos \varphi \cdot \vec{x}_0 + \sin \varphi \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y}_2 = -\sin \varphi \cdot \vec{x}_0 + \cos \varphi \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z}_2 = \vec{z}_0 \end{array} \right. \quad (3)$$

b - Vecteurs vitesses.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^0 \vec{x}_2}{dt} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \vec{x}_2 = \dot{\varphi} \vec{z} \wedge \vec{x}_2 = \dot{\varphi} \cdot \vec{y}_2 \\ \frac{d^0 \vec{y}_2}{dt} = \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \vec{y}_2 = \dot{\varphi} \vec{z} \wedge \vec{y}_2 = -\dot{\varphi} \cdot \vec{x}_2 \\ \frac{d^0 \vec{z}_2}{dt} = \vec{0} \end{array} \right. \quad (4)$$

2.3. Coordonnées des vecteurs

x_1, y_1, z_1 dans le repère $(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, (fig 1.2c).

a - Vecteurs position

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_1 = \cos \beta \cdot \vec{x}_3 + \sin \beta \cdot \vec{y}_3 \\ \vec{y}_1 = -\sin \beta \cdot \vec{x}_3 + \cos \beta \cdot \vec{y}_3 \\ \vec{z}_1 = \vec{z}_3 \end{array} \right. \quad (5)$$

b - Vecteurs vitesses

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^0 \vec{x}_1}{dt} = \overrightarrow{\Omega(1/3)} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\beta} \vec{z} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\beta} \cdot \vec{y}_1 \\ \frac{d^0 \vec{y}_1}{dt} = \overrightarrow{\Omega(1/3)} \wedge \vec{y}_1 = \dot{\beta} \vec{z} \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\beta} \cdot \vec{x}_1 \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\frac{d^0 \vec{z}_1}{dt} = \vec{0}$$

2.4. Coordonnées des vecteurs

$\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4$ dans le repère $(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, (Fig 1.2 d)

a. Vecteurs positions.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_4 = \cos \psi \cdot \vec{x}_3 + \sin \psi \cdot \vec{y}_3 \\ \vec{y}_4 = -\sin \psi \cdot \vec{x}_3 + \cos \psi \cdot \vec{y}_3 \\ \vec{z}_4 = \vec{z}_3 \end{array} \right. \quad (7)$$

b. Vecteurs vitesses

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^3 \vec{x}_4}{dt} = \overrightarrow{\Omega(4/3)} \wedge \vec{x}_4 = \psi \vec{z} \wedge \vec{x}_4 = \psi \cdot \vec{y}_4 \\ \frac{d^3 \vec{y}_4}{dt} = \overrightarrow{\Omega(4/3)} \wedge \vec{y}_4 = \psi \vec{z} \wedge \vec{y}_4 = -\psi \cdot \vec{x}_4 \\ \frac{d^3 \vec{z}_4}{dt} = \vec{0} \end{array} \right. \quad (8)$$

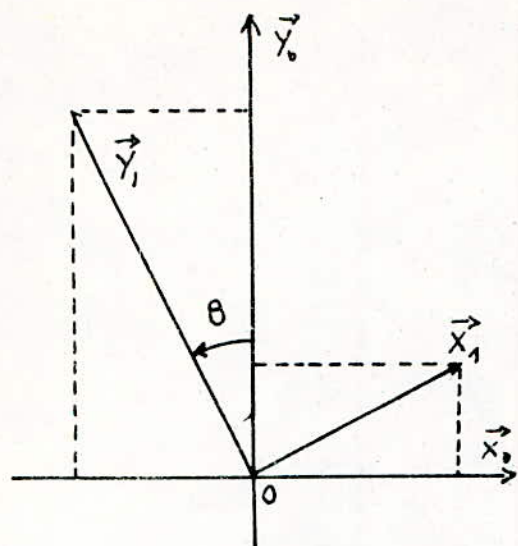
2.5. Coordonnées des vecteurs

$\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3$ dans le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

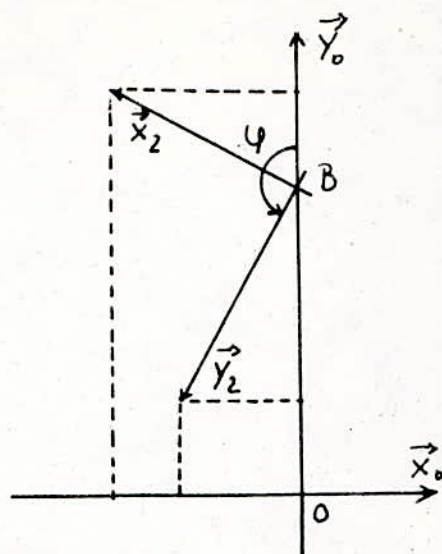
on note que le repère $(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est aussi fixe.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_3 = \cos \delta \cdot \vec{x}_0 - \sin \delta \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y}_3 = \sin \delta \cdot \vec{x}_0 + \cos \delta \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z}_3 = \vec{z}_0 \end{array} \right. \quad (9)$$

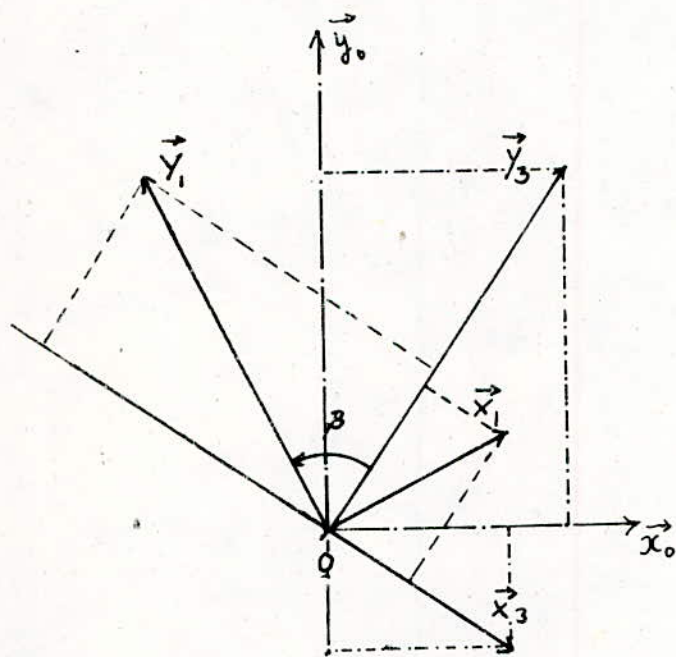
avec δ constant.



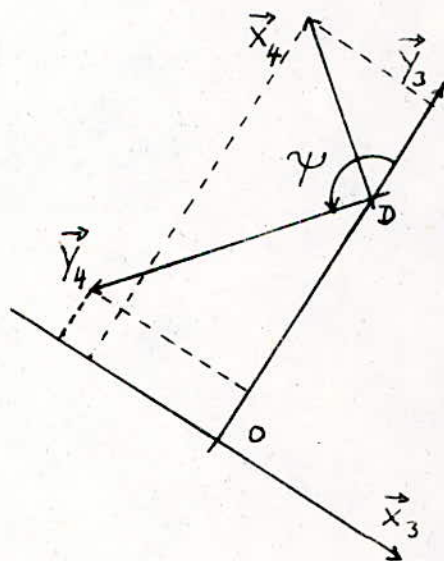
- a -



- b -



- c -



- d -

Fig 1.2 : passage entre les repères.

3 RELATIONS CINEMATIQUES

3.1 Définition de l'angle φ et ψ .

L'examen du système bielle-manivelle (fig 1-1) nous montre que, la projection du rayon de la manivelle est égale à ceux des entr'axes des deux bielles, successivement sur \vec{x}_0, \vec{x}_3 des deux repères fixes, nous allons en tirer deux relations cinématiques entre θ et φ , β et ψ .

Nous avons pour la 1^{er} bielle.

$$\vec{OA} = R\vec{y}_1 = -R \sin \theta \cdot \vec{x}_0 + R \cos \theta \cdot \vec{y}_0$$

$$\vec{BA} = L\vec{y}_2 = -L \sin \varphi \cdot \vec{x}_0 + L \cos \varphi \cdot \vec{y}_0$$

On constate que $-R \sin \theta = -L \sin \varphi$, (fig 1-1)

d'où
$$\sin \varphi = \frac{R}{L} \sin \theta \quad (10)$$

de même pour la deuxième bielle nous avons aussi:

$$\sin \psi = \frac{R}{L} \sin \beta \quad (11)$$

Comme: $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$ et $\sin^2 \varphi = \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \theta$

donc
$$\cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \theta}$$
 de même
$$\cos \psi = \pm \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \beta}$$

φ et ψ étant positifs et varient légèrement autour de π , leurs cosinus sont donc toujours négatifs.

Nous aurons donc:

$$\cos \varphi = -\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \theta}, \quad \cos \psi = -\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \beta} \quad (12)$$

3.2. Définition de $\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$

En dérivant les équations (10) et (11) par rapport au temps

on trouve :

$$\dot{\varphi} = \frac{R \cdot \omega \cdot \cos \theta}{L \cdot \cos \varphi} \quad (13); \quad \dot{\psi} = \frac{R \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta}{L \cdot \cos \psi} \quad (14)$$

3.3 Définition de $\ddot{\varphi}$ et $\ddot{\psi}$

$\ddot{\varphi}$ et $\ddot{\psi}$ sont les accélérations des deux bielle, si on dérive les équations 13 et 14 par rapport au temps on trouve :

$$\ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi = -\frac{R}{L} \cdot \omega^2 \sin \theta \quad (15)$$

$$\ddot{\psi} \cdot \cos \psi - \dot{\psi}^2 \cdot \sin \psi = -\frac{R}{L} \cdot \dot{\beta}^2 \sin \beta \quad (16)$$

Les relations (15) et (16), avec les relations (10) et (11) nous permettent de définir les accélérations des deux bielles :

$$\ddot{\varphi} = (\dot{\varphi}^2 - \dot{\theta}^2) \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (17)$$

$$\ddot{\psi} = (\dot{\psi}^2 - \dot{\beta}^2) \cdot \operatorname{tg} \psi \quad (18)$$

4. CINEMATIQUE DES POINTS A, G, B, J, D

4.1.1 POSITION de A

Le point A est sur l'axe \vec{y}_1 , qui porte la manivelle (Fig 1-1), ce point a été déjà définis successivement dans les repères 1 et 3

$$\vec{OA} = R \cdot \vec{y}_1 = -R \cdot \sin \theta \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \cos \theta \cdot \vec{y}_0$$

$$\vec{OA} = R \cdot \vec{y}_1 = -R \cdot \sin \beta \cdot \vec{x}_3 + R \cdot \cos \beta \cdot \vec{y}_3$$

4.1.2. Vitesse de A

Par définition :

$$V_A = \frac{d^{\circ} \vec{OA}}{dt}$$

$$V_A = \frac{d R \vec{y}_1}{dt} = -R \omega \cdot \vec{x}_1$$

La vitesse du point A est constante, elle est portée par une tangente au cercle.

4.1.3 Accélération de A

On note par \vec{T}_A le vecteur accélération du point A définie par :

$$\vec{T}_A = \frac{d^0 \vec{V}_A}{dt}$$

$$\vec{T}_A = -R \cdot \omega^2 \vec{y}_1$$

4.2.1. Position de G

Soient x_G, y_G, z_G les composantes du centre de gravité de la bielle dans le repère fixe.

$$\vec{OG} = \vec{OB} + \vec{BG} = x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0 + z_G \vec{z}_0$$

$$\vec{OB} = R \cos \theta \cdot \vec{y}_0 - L \cos \varphi \cdot \vec{y}_0$$

$$\vec{BG} = L_B \cdot \vec{y}_2 = -L_B \sin \varphi \cdot \vec{x}_0 + L_B \cos \varphi \cdot \vec{y}_0$$

donc :
$$\vec{OG} = -L_B \sin \varphi \cdot \vec{x}_0 + (R \cos \theta + (L_B - L) \cos \varphi) \vec{y}_0$$

on trouve :

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_B \sin \varphi \\ R \cos \theta + (L_B - L) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

4.2.2. Vitesse de G

on a :
$$\vec{V}_G = \frac{d^0 \vec{OG}}{dt} = \dot{x}_G \vec{x}_0 + \dot{y}_G \vec{y}_0 + \dot{z}_G \vec{z}_0$$

$$\vec{V}_G = -L_B \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{x}_0 - (\omega R \sin \theta + (L_B - L) \cdot \dot{\varphi} \sin \varphi) \cdot \vec{y}_0$$

on trouve :

$$\vec{V}_G = \begin{pmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ \dot{z}_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_B \cdot \dot{\varphi} \cos \varphi \\ -\omega R \sin \theta - (L_B - L) \cdot \dot{\varphi} \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

4.2.3 Accélération de G

$$\vec{T}_G = \frac{d^0 \vec{V}_G}{dt} = \ddot{X}_G \cdot \vec{x}_0 + \ddot{Y}_G \cdot \vec{y}_0 + \ddot{Z}_G \cdot \vec{z}_0$$

en utilisant l'équation (15) dans la dérivée \ddot{X}_G on trouve :

$$\vec{T}_G = \begin{pmatrix} \ddot{X}_G \\ \ddot{Y}_G \\ \ddot{Z}_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R}{L} L_B \cdot \omega^2 \sin \varphi \\ -(\omega^2 R \cos \theta + (L_B - L)(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

4.3.1. Position de B

X_B, Y_B, Z_B étant les composantes de B dans le repère fixe,

B est porté par \vec{y}_0 donc $\vec{OB} = Y_B \cdot \vec{y}_0 = (R \cos \theta - L \cos \varphi) \cdot \vec{y}_0$

$$\text{on trouve : } \vec{OB} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \cos \theta - L \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

4.3.2. Vitesse de B

$$\vec{V}_B = \frac{d^0 \vec{OB}}{dt} = \dot{X}_B \cdot \vec{x}_0 + \dot{Y}_B \cdot \vec{y}_0 + \dot{Z}_B \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{V}_B = -(R \omega \sin \theta - L \dot{\varphi} \sin \varphi) \cdot \vec{y}_0$$

$$\text{on trouve : } \vec{V}_B = \begin{pmatrix} \dot{X}_B \\ \dot{Y}_B \\ \dot{Z}_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ L \dot{\varphi} \sin \varphi - R \omega \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

4-3.3 Accélération de B

$$\vec{\Gamma}_B = \frac{d^2 \vec{V}_B}{dt^2} = \ddot{X}_B \cdot \vec{x}_0 + \ddot{Y}_B \cdot \vec{y}_0 + \ddot{Z}_B \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{\Gamma}_B = (L \ddot{\varphi} \sin \varphi + L \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - R \omega^2 \cos \theta) \cdot \vec{y}_0$$

avec : $\sin \varphi = \frac{R}{L} \sin \theta$ et $\cos \varphi = \frac{R \omega \cos \theta}{L \dot{\varphi}}$

donc on trouve :

$$\vec{\Gamma}_B = \begin{pmatrix} \ddot{X}_B \\ \ddot{Y}_B \\ \ddot{Z}_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \omega (\dot{\varphi} - \omega) \cos \theta + R \ddot{\varphi} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

4-4.1 Position de J (fig. 1-1).

J étant le centre de gravité de la bielle en fouche (cas des moteurs en -V-), dans le repère $(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

on a : $\vec{OJ} = \vec{OD} + \vec{DJ}$ où :

$$\vec{OD} = (R \cos \beta - L \cos \gamma) \cdot \vec{y}_3$$

$$\vec{DJ} = L_D \cdot \vec{y}_4 = -L_D \sin \gamma \cdot \vec{x}_3 + L_D \cos \gamma \cdot \vec{y}_3$$

Donc : $\vec{OJ} = -L_D \sin \gamma \cdot \vec{x}_3 + (L_D \cos \gamma + R \cos \beta - L \cos \gamma) \cdot \vec{y}_3$

En se servant de l'équation (11) on trouve :

Dans le repère $(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$.

$$\vec{OJ} = \begin{pmatrix} X_J \\ Y_J \\ Z_J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_D \frac{R}{L} \sin \beta \\ R \cos \beta + (L_D - L) \cos \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix}$$

pour exprimer \vec{OJ} dans le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, on se sert

de (9), ce qui nous permet d'obtenir :

$$\vec{OJ} = \begin{pmatrix} X_J \\ Y_J \\ Z_J \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -L_D \sin \psi \cos \delta + [R \cos \beta + (L_D - L) \cos \psi] \sin \delta \\ L_D \sin \psi \sin \delta + [R \cos \beta + (L_D - L) \cos \psi] \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

4-4.2 Vitesse de J

Dans le repère $(0, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, en utilisant l'équation (11) on trouve.

$$\vec{V}_J = \begin{pmatrix} \dot{X}_J \\ \dot{Y}_J \\ \dot{Z}_J \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -L_D \dot{\psi} \cos \psi \\ -R \dot{\beta} \sin \beta - (L_D - L) \dot{\psi} \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}$$

Dans le repère $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, on se sert de (9) on trouve :

$$\vec{V}_J = \begin{pmatrix} -L \dot{\psi} \cos \psi \cos \delta + (-R \dot{\beta} \sin \beta - (L_D - L) \dot{\psi} \sin \psi) \sin \delta \\ L_D \dot{\psi} \cos \psi \sin \delta + (-R \dot{\beta} \sin \beta - (L_D - L) \dot{\psi} \sin \psi) \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

4-4.3 Accélération de J

Dans le repère $(0, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, en utilisant les relations (16) et (11) avec :

$\dot{\beta} = \dot{\theta} = \omega$: vitesse angulaire de la manivelle.

On trouve :

$$\vec{T}_J = \begin{pmatrix} \ddot{X}_J \\ \ddot{Y}_J \\ \ddot{Z}_J \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 L_D \sin \psi \\ \dot{\psi} \cos \psi [\dot{\psi} (L - L_D) - L \omega] + \ddot{\psi} \sin \psi (L - L_D) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}$$

Dans le repère $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$:

$$\vec{T}_J = \begin{pmatrix} \ddot{X}_J \\ \ddot{Y}_J \\ \ddot{Z}_J \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 L_D \sin \psi \cdot \cos \delta + \\ - \omega^2 L_D \cdot \sin \psi \cdot \sin \delta + \\ 0 \\ + \sin \delta \cdot \left(\dot{\psi} \cos \psi \left[\dot{\psi} (L - L_D) - L \omega \right] + \ddot{\psi} \sin \psi \cdot (L - L_D) \right) \\ + \cos \delta \cdot \left(\dot{\psi} \cos \psi \left[\dot{\psi} (L - L_D) - L \omega \right] + \ddot{\psi} \sin \psi (L - L_D) \right) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

4-5.1 Position de D

D est le pied de la tige 2 coulissant sur l'axe \vec{y}_3 .
 Dans le repère $(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ on a :

$$\begin{aligned} \vec{OD} &= X_D \cdot \vec{x}_3 + Y_D \cdot \vec{y}_3 + Z_D \cdot \vec{z}_3 = Y_D \cdot \vec{y}_3 \\ &= (R \cos \beta - L \cos \psi) \cdot \vec{y}_3 \end{aligned}$$

donc :

$$\vec{OD} = \begin{pmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \cos \beta - L \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}$$

Dans le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ on a :

$$\vec{OD} = \begin{pmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} (R \cos \beta - L \cos \psi) \sin \delta \\ (R \cos \beta - L \cos \psi) \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

4-5.2. Vitesse de D

Dans le repère $(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ on a :

$$\vec{V}_D = \begin{pmatrix} \dot{X}_D \\ \dot{Y}_D \\ \dot{Z}_D \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R(\omega - \dot{\psi}) \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}$$

Dans le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{V}_D = \begin{pmatrix} \dot{X}_D \\ \dot{Y}_D \\ \dot{Z}_D \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -R(\omega - \dot{\psi}) \sin \beta \cdot \sin \delta \\ -R(\omega - \dot{\psi}) \sin \beta \cdot \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

4-5.3. Accélération de D

Dans le repère $(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ on a :

$$\vec{T}_D = \begin{pmatrix} \ddot{X}_D \\ \ddot{Y}_D \\ \ddot{Z}_D \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\omega(\dot{\psi} - \omega) \cos \beta + R\ddot{\psi} \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}$$

Dans le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{T}_D = \begin{pmatrix} \ddot{X}_D \\ \ddot{Y}_D \\ \ddot{Z}_D \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} R[\omega(\dot{\psi} - \omega) \cos \beta + \ddot{\psi} \sin \beta] \sin \delta \\ R[\omega(\dot{\psi} - \omega) \cos \beta + \ddot{\psi} \sin \beta] \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

III . ETUDE DYNAMIQUE DU SYSTEME BIELLE-MANIVELLE

La détermination des efforts sur les tourillons et le maneton nous fait passer par la mise en évidence des actions extérieurs appliquées au piston, à la bielle et à la manivelle.

III.1. MOTEUR EN LIGNE

1.1. ETUDE DYNAMIQUE DU PISTON

En isolant le piston (Fig 2-1) on peut mettre en évidence les actions extérieurs qui lui sont appliqués.

a. Action de l'axe du piston sur le piston en B

Le torseur des actions mécaniques au point B se réduit

à :

$$\tau_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_B \\ \vec{M}_B \end{array} \right\}, \quad \vec{m}_B = \vec{0} \quad \text{car } \vec{F}_B \text{ passe par le point B}$$

donc :

$$-\vec{F}_B = \begin{pmatrix} -X_B \\ -Y_B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{array}, \quad \vec{m}_B = \vec{0}$$

b. Action de la chemise sur le piston en C

La chemise étant immobile et géométriquement parfaite, elle n'exerce aucun moment sur le piston.

Le torseur est donc :

$$\tau_C = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_C \\ \vec{M}_C \end{array} \right\}$$

donc :

$$\vec{F}_c = \begin{pmatrix} X_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}, \quad \vec{M}_c = \vec{0}$$

c - Action des gaz sur le piston en P

On suppose que le piston est géométriquement parfait, et que sa tête est plate, et que la pression des gaz est uniformément répartie sur sa tête.

Donc il résulte un seul effort appliqué au centre du piston porté par $-\vec{y}_0$.

Le torseur au point P se réduit donc à : $\mathcal{L}_p = \begin{Bmatrix} \vec{F}_p \\ \vec{M}_p \end{Bmatrix}$

donc :

$$\vec{F}_p = + \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_p(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}, \quad \vec{M}_p = \vec{0} \quad \text{ou}$$

$$Y_p(\theta) = + S (P(\theta) - P_0)$$

S : la section du piston.

P(θ) : la pression des gaz en fonction de θ.

P₀ : la pression à l'intérieur du carter.

Remarque:

Nous avons négligé l'effort de frottement entre piston et chemise, car celui-ci fait intervenir d'autres paramètres indéfinis rendant le problème plus complexe.

1.1.1 EQUATIONS VECTORIELLES FONDAMENTALES DU PISTON.

$$\begin{cases} m_p \vec{\Gamma}(G_p, \text{piston}/o) = \sum \vec{F}_{\text{ext}} / \text{piston} & \text{I} \\ \vec{\delta}(\text{piston}/G_p) = \sum \vec{M}_{\text{ext}} / G_p & \text{II} \end{cases}$$

m_p : masse du piston et ses accessoires.

$\vec{\delta}(P/G_p)$: moment dynamique du piston par rapport au point G_p .

$\vec{\Gamma}_{G_p}$: accélération du piston.

B et G_p deux points liés au piston, (ils ont la même vitesse et la même accélération).

1.1.2. CALCUL DU MOMENT DYNAMIQUE.

Définition: Le moment dynamique est égale à la dérivée dans le repère fixe du moment cinétique par rapport au temps:

$$\vec{\delta}^*(P/G_p) = \frac{d^* \vec{\delta}(P/G_p)}{dt}$$

Le moment cinétique est par définition le produit du tenseur d'inertie par le vecteur rotation instantané.

$$\vec{\delta}^*(P/G_p) = \overline{\overline{I(P/G_p)}} \cdot \vec{\Omega}(P/O)$$

($\varphi, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$)

$\vec{\Omega}(P/O) = \vec{0}$, car le piston n'effectue pas de rotation.

donc: $\vec{V}^*(P/G_p) = \vec{0}$ et $\vec{\delta}^*(P/G_p) = \vec{0}$.

1.1.3. CALCUL DES MOMENTS.

Les moments des forces extérieures doivent être ramenés au centre de gravité du piston, soit: G_p .

Moment de $-\vec{F}_B$:

$$\begin{aligned} \vec{M}(-\vec{F}_B)/G_p &= \vec{M}(-\vec{F}_B)/B + \vec{G}_p B \wedge -\vec{F}_B \\ &= \vec{0} + \vec{G}_p B \wedge -\vec{F}_B \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{M}(-\vec{F}_B)/G_p = \begin{pmatrix} 0 \\ L_2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \wedge \begin{pmatrix} -X_B \\ -Y_B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 X_B \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ z_0 \end{matrix}$$

Moment de \vec{F}_C :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}(\vec{F}_C)/G_p &= \overrightarrow{M}(\vec{F}_C)/C + \overrightarrow{G_p C} \wedge \vec{F}_C \\ &= 0 + \overrightarrow{G_p C} \wedge \vec{F}_C \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{M}(\vec{F}_C)/G_p = \begin{pmatrix} \frac{D}{2} \\ L_4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \wedge \begin{pmatrix} X_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_4 X_C \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Moment de \vec{F}_p : $\overrightarrow{M}(\vec{F}_p)/G_p = 0$. car \vec{F}_p passe par G_p : centre de gravité du piston.

1.1.4. EQUATIONS SCALAIRES DU PISTON.

La projection de l'équation vectorielle I sur le repère $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ donne:

Sur \vec{x}_0 : $m_p \ddot{X}_B = X_C - X_B$; $\ddot{X}_B = 0$

$$0 = X_C - X_B$$

Sur \vec{y}_0 : $m_p \ddot{Y}_B = -Y_p(\theta) - Y_B$

$$m_p [R \cdot \omega (\dot{\varphi} - \omega) \cos \theta + R \ddot{\varphi} \sin \theta] = -Y_p(\theta) - Y_B$$

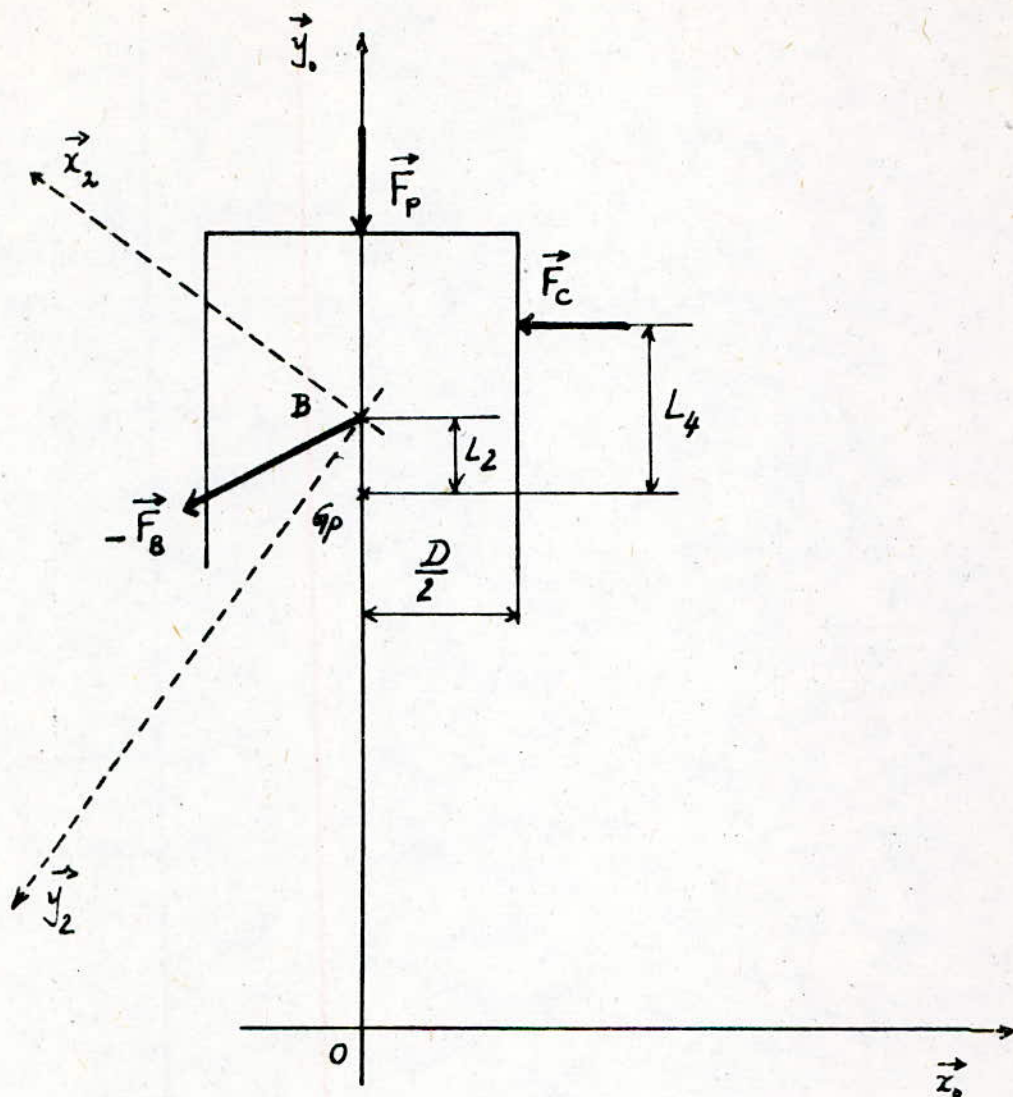
Sur \vec{z}_0 : $0 = 0$

La projection de l'équation vectorielle II sur le même repère donne:

Sur \vec{x}_0 : $0 = 0$

Sur \vec{y}_0 : $0 = 0$

Sur \vec{z}_0 : $0 = L_2 X_B - L_4 X_C$



$$\vec{G_p B} = L_2 \cdot \vec{y}_0$$

$$\vec{G_p C} = \frac{D}{2} \vec{x}_0 + L_4 \vec{y}_0$$

fig 2-1 Représentation des actions sur le piston.

II.1.2. ETUDE DYNAMIQUE DE LA BIELLE.

La bielle étant de même isolée, on met en évidence les actions \vec{F}_A, \vec{F}_B qui lui sont appliquées (fig. 2-2).

a - Action du piston sur la bielle en B

Le torseur de \vec{F}_B est $\tau_B = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_B \\ \vec{m}_B \end{matrix} \right\}$ où :

$$\vec{F}_B = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \vec{m}_B = 0$$

b - Action du maneton sur la bielle en A

Le torseur de \vec{F}_A est $\tau_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_A \\ \vec{m}_A \end{matrix} \right\}$ où :

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \vec{m}_A = \vec{0} \quad \text{car } \vec{F}_A \text{ passe par le point } A.$$

1.2.1. EQUATIONS VECTORIELLES FONDAMENTALES DE LA BIELLE.

$$\begin{cases} m_b \vec{\Gamma}(G \text{ bielle}/O) = \Sigma \vec{F}_{ext}/b & \text{I} \\ \vec{\delta}(bielle/G) = \Sigma \vec{M}(\vec{F}_{ext})/G & \text{II} \end{cases} \quad \text{où :}$$

m_b : masse de la bielle.

$\vec{\delta}(b/G)$: moment dynamique de la bielle.

$\vec{\Gamma}_G$: accélération de la bielle.

1.2.2. CALCUL DU MOMENT DYNAMIQUE

Comme il a été défini : $\overrightarrow{S^2}(b/G) = \frac{d^0 \overrightarrow{S^2}(b/G)}{dt}$.

$\overrightarrow{S^2}(b/G)$: est le moment cinétique de la bielle par rapport à son centre de gravité.

Le moment cinétique étant déjà défini on a :

$$\overrightarrow{S^2}(b/G) = \overline{\overline{I}(b/G)} \cdot \overrightarrow{\Omega}(b/O) \quad \text{où :$$

$\overrightarrow{\Omega}(b/O)$: est le vecteur rotation instantané de la bielle par rapport au repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

$\overline{\overline{I}(b/G)}$: est le tenseur d'inertie, donné ci-dessous

$$\overline{\overline{I}(b/G)} = \begin{vmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{vmatrix} \quad \text{où :$$

$A = I_{Gx}$: moment d'inertie de la bielle par rapport à l'axe Gx_2

$B = I_{Gy}$: moment d'inertie de la bielle par rapport à l'axe Gy_2

$C = I_{Gz}$: moment d'inertie de la bielle par rapport à l'axe Gz_2

$D = I_{Gxy}$: produit d'inertie de la bielle par rapport au plan xy

$E = I_{Gxz}$: produit d'inertie de la bielle par rapport au plan xz

$F = I_{Gyz}$: produit d'inertie de la bielle par rapport au plan yz

Pour une bielle possédant deux plans de symétrie, tous les produits d'inerties sont nuls, le tenseur d'inertie se réduit donc à :

$$\overline{\overline{I(b/G)}} = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{Gz} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Gy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Gz} \end{vmatrix} \text{ qui est le } \\ \text{tenseur principal} \\ \text{d'inertie}$$

Le vecteur rotation instantané de la bielle est donné par :

$$\overrightarrow{\Omega(b/o)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix}$$

le moment cinétique de la bielle devient :

$$\overrightarrow{\delta(b/G)} = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C\dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{\delta(b/G)} = C\dot{\varphi} \vec{z}_0, \text{ car } \vec{x}_2 = \vec{z}_0$$

d'où le moment dynamique de la bielle par rapport à G est :

$$\overrightarrow{\delta(b/G)} = \frac{d[C\dot{\varphi} \vec{z}_0]}{dt} = C\ddot{\varphi} \vec{z}_0 \quad \overrightarrow{\delta(b/G)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C\ddot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

1.2.3. CALCUL DES MOMENTS

On ramène les moments des forces extérieures appliquées à la bielle, à son centre de gravité G.

$$\text{Moment de } \vec{F}_B : \overrightarrow{M(\vec{F}_B)/G} = \overrightarrow{M_{\vec{F}_B/B}} + \overrightarrow{GB} \wedge \vec{F}_B \\ = 0 + -L_B \vec{y}_2 \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\text{Comme } \vec{y}_2 = -\sin\varphi \cdot \vec{x}_0 + \cos\varphi \cdot \vec{y}_0$$

donc :
$$\vec{M}(\vec{F}_B)/G = \begin{pmatrix} +L_B \sin \varphi \\ -L_B \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

d'où :
$$\vec{M}(\vec{F}_B)/G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_B (X_B \cos \varphi + Y_B \sin \varphi) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Moment de \vec{F}_A :
$$\begin{aligned} \vec{M}(\vec{F}_A)/G &= \vec{M}(\vec{F}_A)/A + \vec{GA} \wedge \vec{F}_A \\ &= \vec{0} + (L - L_B) \vec{y}_2 \wedge \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \end{aligned}$$

donc :
$$\vec{M}(\vec{F}_A)/G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L - L_B) [X_A \cos \varphi + Y_A \sin \varphi] \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

1-2.4. EQUATIONS SCALAIRES DE LA BIELLE

On opère de la même façon que pour le piston.

L'équation I :

Sur \vec{x}_0 :
$$m_b \ddot{X}_G = X_A + X_B$$

$$m_b \cdot \frac{L_B}{L} \cdot R \omega^2 \sin \theta = X_A + X_B$$

Sur \vec{y}_0 :
$$m_b \ddot{Y}_G = Y_A + Y_B$$

$$m_b \left[R \omega (\dot{\varphi} - \omega - \frac{L_B}{L} \dot{\varphi}) \cos \theta + R \ddot{\varphi} (1 - \frac{L_B}{L}) \sin \theta \right] = Y_A + Y_B$$

Sur \vec{z}_0 :
$$0 = 0$$

L'équation II

Sur \vec{x}_0 :
$$0 = 0$$

Sur \vec{y}_0 :
$$0 = 0$$

sur \vec{z}_0 :
$$\dot{\varphi} C = -(L - L_B) (X_A \cos \varphi + Y_A \sin \varphi) + L_B (X_B \cos \varphi + Y_B \sin \varphi)$$

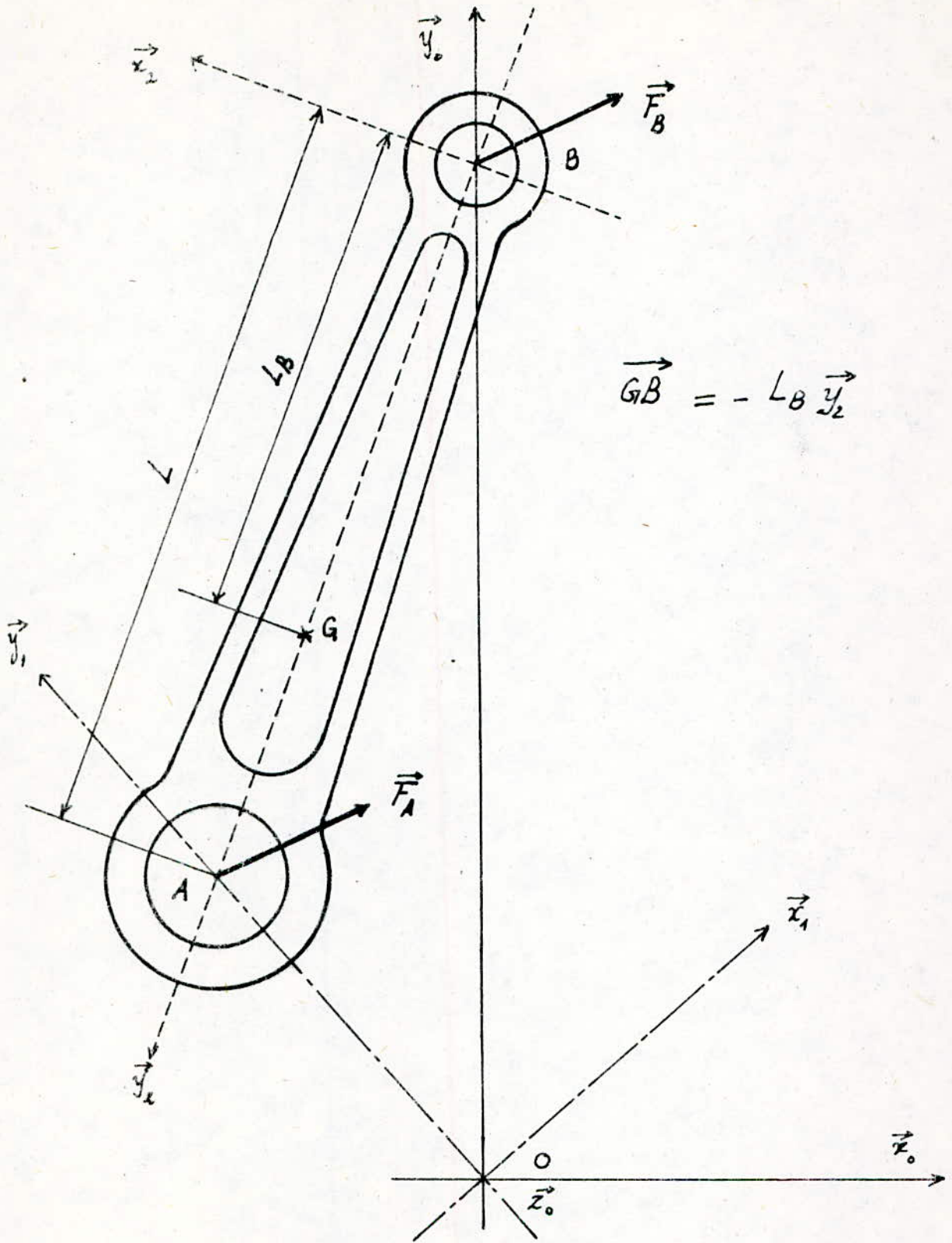


Fig 2-2 Représentation des actions sur la bielle.

4.3. ETUDE DYNAMIQUE DE LA MANIVELLE.

La manivelle qui est une partie du vilebrequin se compose :
D'un maneton, de deux flasques munies de contrepoids et de
deux tourillons .

La manivelle étant isolée (fig 2-3) ; on met en évidence les
efforts extérieurs $-\vec{F}_A$, \vec{F}_K et \vec{R}_e auxquels elle est soumise.

a - Action de la bielle sur le maneton en A .

Le torseur des actions mécanique au point A se réduit à :

$$\tau_A = \begin{Bmatrix} \vec{F}_A \\ \vec{m}_A \end{Bmatrix} \quad , \quad \vec{m}_A = \vec{0} \quad \text{car } \vec{F}_A \text{ passe par A}$$

$$\text{donc : } -\vec{F}_A = \begin{pmatrix} -X_A \\ -Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad , \quad \vec{m}_A = \vec{0}$$

b - Action des paliers sur les tourillons en O

Le torseur en O se réduit à : $\tau_e = \begin{Bmatrix} \vec{R}_e \\ \vec{m}_e \end{Bmatrix}$

avec $\vec{m}_e(\vec{R}_e)/O = \vec{0}$.

$$\text{d'où } \vec{R}_e = \begin{pmatrix} X_e \\ Y_e \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad \vec{m}_e = \vec{0}$$

La vitesse angulaire de la manivelle $\dot{\theta} = \omega$ étant constante,
 $\ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt}$ l'accélération de la manivelle est nulle.

L'effort d'inertie se réduit donc à une force centrifuge.

$\vec{F}_K = M_n \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \vec{y}_1$ où $\omega^2 \cdot r$: accélération centrifuge.

M_n : masse de la manivelle

r : rayon donnant la position du centre de gravité K de la manivelle .

1.3.1. EQUATIONS VECTORIELLES FONDAMENTALES DE LA MANIVELLE .

$$\begin{cases} M_m \cdot \vec{T}(K/O) = \Sigma \vec{F}_{ext} / K & \text{I} \\ \vec{\delta}(m/K) = \Sigma \vec{M}_{\vec{F}_{ext}} / K & \text{II} \end{cases} \quad \text{ou :}$$

M_m : masse de la manivelle , de centre de gravité K .

$\vec{T}(K/O)$: accélération centrifuge de la manivelle .

$\vec{\delta}(m/K)$: moment dynamique de la manivelle par rapport à K

1.3.2. CALCUL DU MOMENT DYNAMIQUE

La manivelle que nous avons choisi a deux plans de symétries, donc les produits d'inertie sont nuls, ce qui nous permet d'écrire :

$$\overline{\overline{I(m/K)}}_{(K, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix}$$

Comme $\vec{\Omega}(m/O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{z}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} = \omega \cdot \vec{z}_0$ avec $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$.

Le moment cinétique de la manivelle devient :

$$\vec{K}(m/K) = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{z}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C\omega \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{z}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix}$$

Le moment dynamique est donné par $\vec{\delta}(m/K) = \vec{0}$

car : $\frac{d\omega}{dt} = 0$.

1.3.3. CALCUL DES MOMENTS

On ramène les moments des forces extérieures au centre de gravité K de la manivelle.

Moment de $-\vec{F}_A$:

$$\vec{M}_{(-\vec{F}_A)/K} = \vec{M}_{(-\vec{F}_A)/A} + \vec{KA} \wedge -\vec{F}_A$$

$$= \vec{0} + (R-r)\vec{y}_1 \wedge \begin{pmatrix} -X_A \\ -Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

avec $\vec{y}_1 = -\sin\theta \cdot \vec{x}_0 + \cos\theta \cdot \vec{y}_0$

donc :

$$\vec{M}_{(-\vec{F}_A)/K} = \begin{pmatrix} -(R-r)\sin\theta \\ (R-r)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \wedge \begin{pmatrix} -X_A \\ -Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (R-r)(X_A\cos\theta + Y_A\sin\theta) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Moment de \vec{R}_e :

$$\vec{M}_{\vec{R}_e/K} = \vec{M}_{\vec{R}_e/O} + \vec{KO} \wedge \vec{R}_e$$

$$= \vec{0} + -r\vec{y}_2 \wedge \begin{pmatrix} X_e \\ Y_e \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

avec $\vec{y}_2 = -\sin\theta \cdot \vec{x}_0 + \cos\theta \cdot \vec{y}_0$

donc :

$$\vec{M}_{\vec{R}_e/K} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ -r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \wedge \begin{pmatrix} X_e \\ Y_e \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

d'où :

$$\vec{M}_{\vec{R}_e/K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r X_e \cos\theta + Y_e \sin\theta \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

1.3.4. EQUATIONS SCALAIRES DE LA MANIVELLE

On opère de la même façon que pour le piston et la bielle.

La projection de l'équation I donne :

$$\text{Sur } \vec{x}_0 : F_{Kx} = -X_A + X_e$$

$$\text{avec } F_{Kx} = F_K \sin \theta, F_{Ky} = F_K \cos \theta \text{ et } F_K = Mm\omega^2.r$$

$$\text{donc : } Mm.\omega^2.r \sin \theta = -X_A + X_e$$

$$\text{Sur } \vec{y}_0 : Mm.\omega^2.r \cos \theta = -Y_A + Y_e$$

$$\text{Sur } \vec{z}_0 : 0 = 0$$

La projection de l'équation II donne :

$$\text{Sur } \vec{x}_0 : 0 = 0$$

$$\text{Sur } \vec{y}_0 : 0 = 0$$

$$\text{Sur } \vec{z}_0 :$$

$$0 = (R-r) [X_A \cos \theta + Y_A \sin \theta] + r [X_e \cos \theta + Y_e \sin \theta] + C_m$$

Représentation des actions sur la manivelle

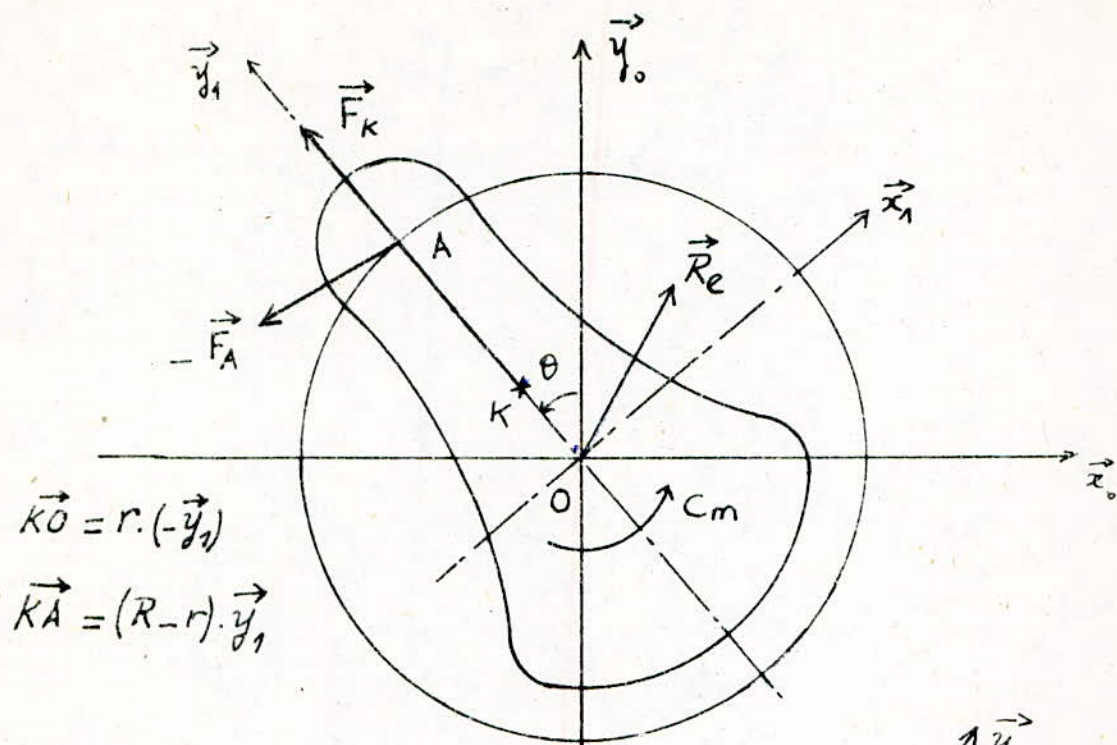


Fig 2-3 moteur en ligne.

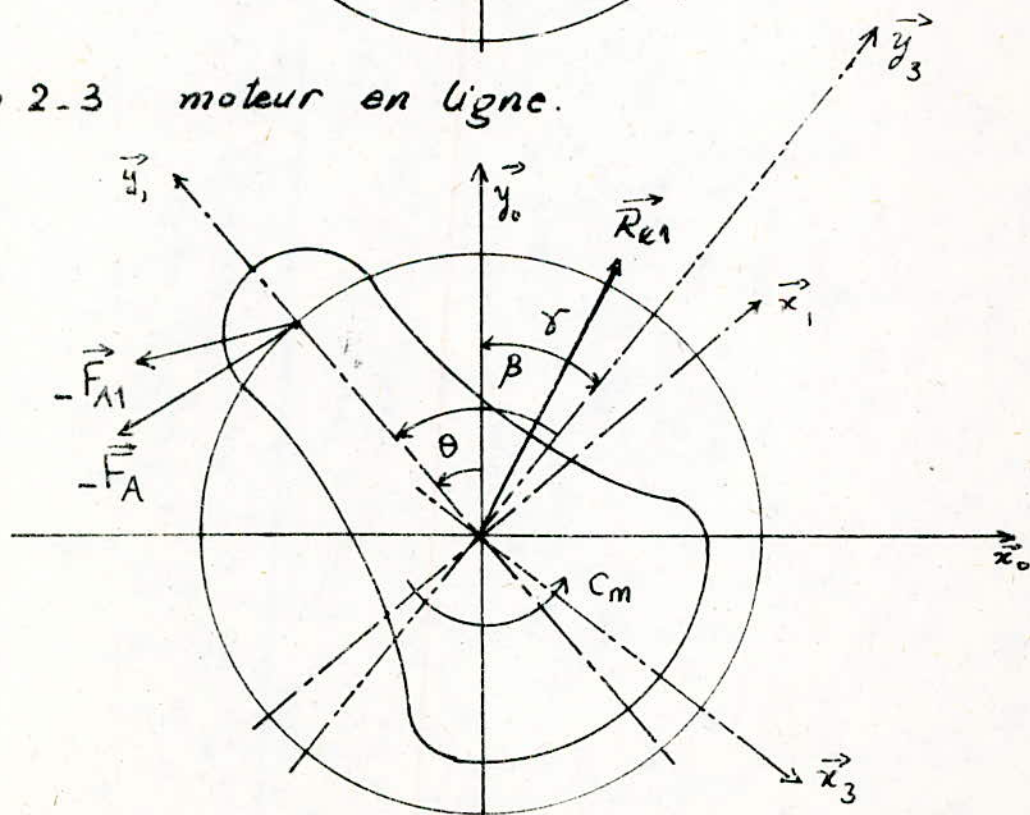


Fig 2-4. moteur en V..

1.4. SYSTEME D'EQUATIONS

Le système d'équation est donné par l'ensemble des équations des trois éléments étudiés séparément, on aura le système suivant :

- Piston :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = X_C - X_B \quad (1) \\ m_p [R \omega (\dot{\varphi} - \omega) \cos \theta + R \ddot{\varphi} \sin \theta] = -Y_p(\theta) - Y_B \quad (2) \\ 0 = L_2 \cdot X_B - L_4 \cdot X_C \quad (3) \end{array} \right.$$

- Bielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_b \cdot \frac{L-b}{L} \cdot R \omega^2 \cdot \sin \theta = X_A + X_B \quad (4) \\ m_b [R \omega (\dot{\varphi} - \omega - \frac{L-b}{L} \dot{\varphi}) \cos \theta + R \ddot{\varphi} (1 - \frac{L-b}{L}) \sin \theta] = Y_A + Y_B \quad (5) \\ \ddot{\varphi} I_{Gz} = -(L-L_b)(X_A \cos \varphi + Y_A \sin \varphi) + L_b(X_B \cos \varphi + Y_B \sin \varphi) \quad (6) \end{array} \right.$$

- Manivelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_m \cdot \omega^2 \cdot r \sin \theta = -X_A + X_e \quad (7) \\ M_m \cdot \omega^2 \cdot r \cos \theta = -Y_A + Y_e \quad (8) \\ 0 = (R-r) \cdot [X_A \cos \theta + Y_A \sin \theta] + r \cdot [X_e \cos \theta + Y_e \sin \theta] + C_m \quad (9) \end{array} \right.$$

Ce système est composé de 9 équations à 10 inconnues, ainsi le système est indéterminé.

Pour lever l'indétermination on a supposé que: $L_2 = L_4$.
Les équations (1) et (3) deviennent compatibles, d'où l'obtention de 8 équations à 8 inconnues.

La résolution du système d'équation précédant donne :

$$Y_B = -Y_p(\theta) - m_p \left[R \cdot \omega \cdot (\dot{\varphi} - \omega) \cdot \cos \theta + R \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin \theta \right]$$

$$X_A = m_b \left[R \cdot \omega \cdot \left(\dot{\varphi} - \omega - \frac{L_B}{L} \dot{\varphi} \right) \cos \theta + R \cdot \ddot{\varphi} \cdot \left(1 - \frac{L_B}{L} \right) \cdot \sin \theta \right] - Y_B$$

$$X_A = \frac{1}{L \cdot \cos \varphi} \left[L_B \cdot Y_B \sin \varphi - (L - L_B) Y_A \cos \varphi + m_b \cdot L_B^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - I_{Gz} \ddot{\varphi} \right]$$

$$X_B = -X_A + m_b \cdot L_B \cdot \omega^2 \cdot \sin \varphi$$

$$X_C = X_B$$

$$X_e = M_m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \sin \theta + X_A$$

$$Y_e = M_m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos \theta + Y_A$$

$$C_m = (r - R) \left[X_A \cos \theta + Y_A \sin \theta \right] - r \cdot \left[X_e \cos \theta + Y_e \sin \theta \right]$$

Les efforts auxquelles est soumise la manivelle sont :

* Effort de la bielle sur le maneton :

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \|\vec{F}_A\| = (X_A^2 + Y_A^2)^{\frac{1}{2}}$$

La direction de \vec{F}_A par rapport à l'axe \vec{x}_0 est définie par l'angle γ_A .

$$\gamma_A = \text{Arctg} \frac{Y_A}{X_A}$$

Effort des paliers sur les tourillons.

$$\vec{R}_e = \begin{pmatrix} X_e \\ Y_e \\ Z_e \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \|\vec{R}_e\| = (X_e^2 + Y_e^2)^{\frac{1}{2}}$$

La direction de \vec{R}_e par rapport à \vec{x}_0 est définie par l'angle γ_R

$$\gamma_R = \text{Arctg} \frac{Y_e}{X_e}$$

Le calcul des efforts X_A, X_e, Y_A et Y_e s'effectue sur micro-ordinateur dans l'ordre suivant :

On calcule d'abord Y_B ensuite Y_A, X_A, X_e et Y_e

1.5. EXPRESSION DES EFFORTS DANS LE REPÈRE

$(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Pour l'exploitation des résultats on a besoin de connaître les efforts appliqués à la manivelle dans son propre repère, pour cela il suffit lors du traitement informatique un changement de repère après résolution du système.

Les coordonnées des efforts \vec{F}_A et \vec{R}_e dans le repère mobile $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ sont les suivantes :

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_A \cdot \cos \theta + Y_A \cdot \sin \theta \\ -X_A \cdot \sin \theta + Y_A \cdot \cos \theta \\ Z_A \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix}$$

$$\vec{R}_e = \begin{pmatrix} X_e \cdot \cos \theta + Y_e \cdot \sin \theta \\ -X_e \cdot \sin \theta + Y_e \cdot \cos \theta \\ Z_e \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix}$$

II.2. MOTEUR EN V.

Un moteur multicylindre en V n'est rien d'autre qu'un ensemble de deux moteurs en ligne décalés l'un par rapport à l'autre d'un angle γ égale à l'angle au sommet du V, dit "Angle d'ouverture".

L'angle γ est donné par :

$\gamma = \frac{4\pi}{n}$ dans le cas des moteurs à 4 temps, soit :

- 45° pour un 16 cylindres
- 60° pour un 12 cylindres
- 90° pour un 8 cylindres
- 120° pour un 6 cylindres.

$\gamma = \frac{2\pi}{n}$ dans le cas des moteurs à 2 temps, soit :

- 30° pour un 12 cylindres
- 45° pour un 8 cylindres
- 60° pour un 6 cylindres.

On distingue deux types de moteurs en V.

- Les moteurs à deux bielles montés sur le même maneton (bielle en fourche) auquel on se limite.
- Les moteurs avec la première bielle montée sur le maneton et la deuxième bielle articulée sur la première (Bielle + biellette).

Le moteur en V, pouvant être considéré comme l'ensemble de deux moteurs en ligne, on ne fera l'étude dynamique que de la deuxième ligne Bielle-piston, dans le deuxième repère fixe. $(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$. Cette étude est tout à fait la même que celle de la première

ligne dans le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

2.1 ETUDE DYNAMIQUE DU PISTON

Le piston étant isolé on mettra en évidence les actions extérieures qui lui sont appliquées.

Ces actions seront données successivement dans les deux repères fixes $(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ et $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

a - Action de l'axe du piston sur le piston en D

D: étant le centre du pieds de la bielle en fourche.

$$-\vec{F}_D = \begin{pmatrix} -X_D \\ -Y_D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}, \quad \vec{m}_D = \vec{0}$$

$$-\vec{F}_D = \begin{pmatrix} -X_D \cdot \cos \gamma - Y_D \cdot \sin \gamma \\ +X_D \cdot \sin \gamma - Y_D \cdot \cos \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}, \quad \vec{m}_D = \vec{0}$$

b - Action de la chemise sur le piston en C1

C1: étant le point d'application de \vec{F}_{C1} sur le piston.

$$\vec{F}_{C1} = \begin{pmatrix} X_{C1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}, \quad \vec{m}_{C1} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{C1} = \begin{pmatrix} X_{C1} \cdot \cos \gamma \\ -X_{C1} \cdot \sin \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}, \quad \vec{m}_{C1} = \vec{0}$$

c. Action des gaz sur le piston en P1

Le piston est supposé géométriquement parfait de tête plate, et que la pression des gaz est uniformément répartie sur sa tête.

Il résulte donc un seul effort appliqué en P1 centre de la tête du piston porté par $-\vec{y}_3$.

$$\vec{F}_{P1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_{P1}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}, \quad \vec{M}_{P1} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{P1} = \begin{pmatrix} -Y_{P1}(\beta) \cdot \sin \gamma \\ -Y_{P1}(\beta) \cdot \cos \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}, \quad \vec{M}_{P1} = \vec{0}$$

2.1.1. EQUATIONS VECTORIELLES FONDAMENTALES DU PISTON 2

$$\begin{cases} m_p \cdot \vec{T}(J_p / 0) = \sum \vec{F}_{ext} / \text{Piston} & \text{I} \\ \delta(P / J_p) = \sum M \vec{F}_{ext} / J_p & \text{II} \end{cases}$$

où \vec{T}_{J_p} : accélération du deuxième piston.

$\delta(P / J_p)$: moment dynamique du piston par rapport à son centre de gravité J_p .

J_p, D deux points appartenant au piston donc ils auront une même vitesse et une même accélération, ($\vec{T}_{J_p} = \vec{T}_D$).

le piston coulissant sur l'axe \vec{y}_3 a pour accélération:

$$\vec{T}_D = \ddot{Y}_D \cdot \vec{y}_3$$

$$\text{avec } \vec{x}_3 = \cos \delta \cdot \vec{x}_0 - \sin \delta \cdot \vec{y}_0$$

$$\vec{y}_3 = \sin \delta \cdot \vec{x}_0 + \cos \delta \cdot \vec{y}_0$$

$$\vec{z}_3 = \vec{z}_0$$

$$\vec{F}_D = \begin{pmatrix} \ddot{Y}_D \cdot \sin \delta \\ \ddot{Y}_D \cdot \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Le piston n'effectuant pas de rotation, donc $\overline{\Omega(P/O)} = \vec{0}$
d'où $\overline{V(P/J_p)} = \vec{0}$

Donc le moment dynamique du piston par rapport à son centre de gravité est nul:

$$\overline{\delta(P/J_p)} = \vec{0}$$

2.1.2. CALCUL DES MOMENTS.

Les moments des forces extérieures sur le piston doivent être ramenés à son centre de gravité J_p .

Leur calcul se fait de la même manière que pour le premier piston (de la première ligne).

On donne donc les résultats des moments successivement dans les repères $(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ et $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Moment de $-\vec{F}_D$:

$$\overline{M(-\vec{F}_D)/J_p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 X_D \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}$$

$$\overline{M(-\vec{F}_D)/J_p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 X_D \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Moment de \vec{F}_{C1} .

$$\vec{M}(\vec{F}_{C1})/J_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_4 X_{C1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}, \quad \vec{M}(\vec{F}_{C1})/J_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_4 X_{C1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Moment de \vec{F}_{P1} .

$$\vec{M}(\vec{F}_{P1})/J_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}, \quad \vec{M}(\vec{F}_{P1})/J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

2-1.3. EQUATIONS SCALAIRES DU PISTON 2

La projection de l'équation I sur le repère $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, donne:

Sur \vec{x}_0 : $m_p \ddot{x}_D = X_{C1} \cos \delta - X_D \cos \delta - Y_D \sin \delta - Y_{P1}(\beta) \sin \delta$

Sur \vec{y}_0 : $m_p \ddot{y}_D = -X_{C1} \sin \delta - X_D \sin \delta + Y_D \cos \delta - Y_{P1}(\beta) \cos \delta$

Sur \vec{z}_0 : $0 = 0$

avec $\ddot{x}_D = [R \omega (\dot{\psi} - \omega) \cos \beta + R \ddot{\psi} \sin \beta] \cdot \sin \delta$

et $\ddot{y}_D = [R \omega (\dot{\psi} - \omega) \sin \beta + R \ddot{\psi} \cos \beta] \cdot \cos \delta$

La projection de l'équation II sur le même repère donne:

Sur \vec{x}_0 : $0 = 0$

Sur \vec{y}_0 : $0 = 0$

Sur \vec{z}_0 : $0 = L_2 X_D - L_4 X_{C1}$

2.2. ETUDE DYNAMIQUE DE LA BIELLE EN FOURCHE.

On opère de la même façon que pour le piston on aura : fig

a - Action du piston sur la bielle.

$$\vec{F}_D = \begin{pmatrix} X_D \\ Y_D \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}, \quad \vec{m}_D = \vec{0}$$

$$\vec{F}_D = \begin{pmatrix} X_D \cdot \cos \delta + Y_D \cdot \sin \delta \\ -X_D \cdot \sin \delta + Y_D \cdot \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}, \quad \vec{m}_D = \vec{0}$$

b - Action du maneton sur la bielle (noté \vec{F}_{A1}).

$$\vec{F}_{A1} = \begin{pmatrix} X_{A1} \\ Y_{A1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}, \quad \vec{m}_{A1} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{A1} = \begin{pmatrix} X_{A1} \cdot \cos \delta + Y_{A1} \cdot \sin \delta \\ -X_{A1} \cdot \sin \delta + Y_{A1} \cdot \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}, \quad \vec{m}_{A1} = \vec{0}$$

2.2.1. EQUATIONS VECTORIELLES FONDAMENTALES DE LA BIELLE EN FOURCHE.

$$\begin{cases} m_{b1} \vec{T}(J, 4/0) = \Sigma \vec{F}_{ext} / b & \text{I} \\ \delta(b/J) = \Sigma \vec{M}_{F_{ext}/J} & \text{II} \end{cases}$$

$\vec{\Gamma}_J$: accélération de la bielle en fourche de centre de gravité J, liée au repère 4 par rapport au repère 0.

$\vec{\delta}(b/J)$: moment dynamique de la bielle par rapport à J.

m_{b1} : masse de la bielle en fourche.

2.2.2. CALCUL DU MOMENT DYNAMIQUE .

Le vecteur rotation instantané de la bielle en fourche par rapport au repère $(0, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est :

$$\vec{\Omega}(b/3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_4 \\ \vec{y}_4 \\ \vec{z}_4 \end{matrix}$$

La bielle en fourche ayant deux plan de symétries, le tenseur d'inertie défini précédemment pour la première bielle se réduit à :

$$\overline{\overline{I}}(b/J) = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{vmatrix}$$

Le moment cinétique serait :

$$\vec{\sigma}(b/J) = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_4 \\ \vec{y}_4 \\ \vec{z}_4 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_1 \dot{\psi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_4 \\ \vec{y}_4 \\ \vec{z}_4 \end{matrix}$$

$$\vec{\sigma}(b/J) = C_1 \dot{\psi} \vec{z}_0 \quad \text{car } (\vec{z}_0 = \vec{z}_4)$$

La dérivée du moment cinétique nous donne le moment dynamique suivant :

$$\vec{\delta}(b/J) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_1 \dot{\psi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} .$$

2.2.3. CALCUL DES MOMENTS

On opère de la même façon que pour le piston on obtient les moments suivants :

Moment de \vec{F}_D .

$$\vec{M}(\vec{F}_D)/J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_D(X_D \cos \psi + Y_D \sin \psi) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}, \quad \vec{M}(\vec{F}_D)/J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_D(X_D \cos \psi + Y_D \sin \psi) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

Moment de \vec{F}_{A1} .

$$\vec{M}(\vec{F}_{A1})/J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (L_D - L)(X_{A1} \cos \psi + Y_{A1} \sin \psi) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}, \quad \vec{M}(\vec{F}_{A1})/J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (L_D - L)(X_{A1} \cos \psi + Y_{A1} \sin \psi) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

2.2.4. EQUATIONS SCALAIRES DE LA BIELLE

La projection de l'équation vectorielle I sur le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ donne :

$$\text{Sur } \vec{x}_0 : m_{b1} \ddot{x}_J = X_D \cdot \cos \delta + Y_D \sin \delta + X_{A1} \cdot \cos \delta + Y_{A1} \cdot \sin \delta$$

$$\text{Sur } \vec{y}_0 : m_{b1} \ddot{y}_J = -X_D \cdot \sin \delta + Y_D \cdot \cos \delta - X_{A1} \cdot \sin \delta + Y_{A1} \cdot \cos \delta$$

$$\text{Sur } \vec{z}_0 : 0 = 0$$

La projection de l'équation II sur le même repère donne :

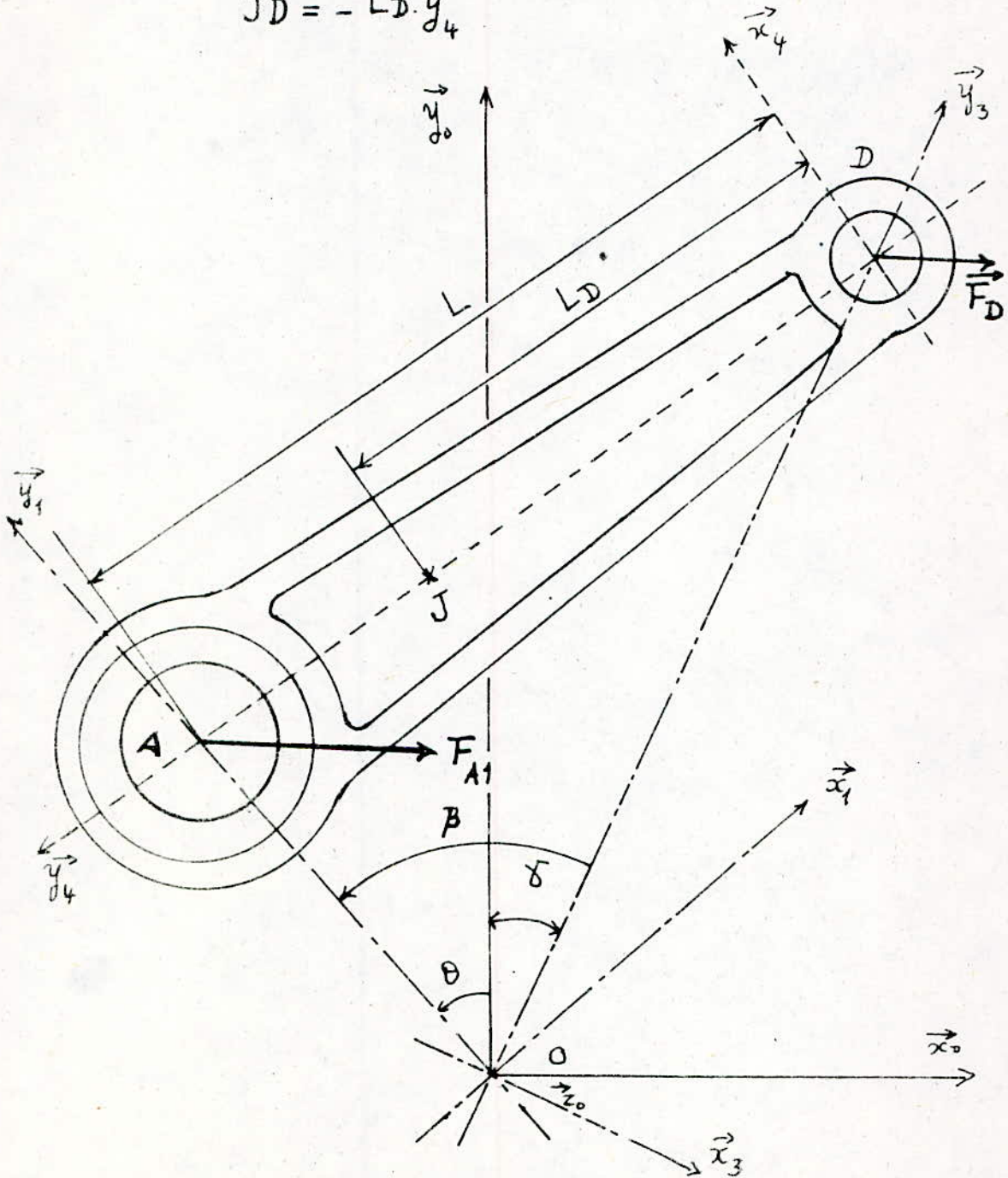
$$\text{Sur } \vec{x}_0 : 0 = 0$$

$$\text{Sur } \vec{y}_0 : 0 = 0$$

$$\text{Sur } \vec{z}_0 : C_1 \ddot{\psi} = L_D(X_D \cos \psi + Y_D \sin \psi) - (L - L_D)(X_{A1} \cos \psi + Y_{A1} \sin \psi)$$

fig 2-5 Representation des actions sur
la bielle en fourche.

$$\vec{J}_D = -L_D \cdot \vec{y}_4$$



2.3. ETUDE DYNAMIQUE DE LA MANIVELLE

La manivelle d'un moteur en V est soumise aux efforts $-\vec{F}_A$ et $-\vec{F}_{A1}$ des deux bielles, sur le maneton.

avec \vec{F}_A et \vec{F}_{A1} sont successivement les effort du maneton sur la première bielle et la bielle en fourche, et à l'effort des paliers sur les tourillons en O.

L'effort sur les tourillons est donné par :

$$\vec{R}_{e1} = \begin{pmatrix} x_{e1} \\ y_{e1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad \text{avec} \quad \vec{m}_e = \vec{0}$$

Les équations vectorielles fondamentales sont les même que celles de la manivelle d'un moteur en ligne.

Le moteur ayant une vitesse angulaire ω constante le moment dynamique sera donc nul.

$$\overrightarrow{\delta(m/K)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

2.3.1. CALCUL DES MOMENTS

Les moments des efforts $-\vec{F}_A$, $-\vec{F}_{A1}$ et \vec{R}_e sur les axes \vec{x}_0 et \vec{y}_0 sont nuls, les seules composantes sont sur \vec{z}_0

$$\overrightarrow{M}(-\vec{F}_A)/K = [(R-r)(x_A \cos \theta + y_A \sin \theta)] \cdot \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{M}(-\vec{F}_{A1})/K = [(R-r)(x_{A1} \cos \beta + y_{A1} \sin \beta)] \cdot \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{M}(\vec{R}_{e1})/K = r(x_{e1} \cos \theta + y_{e1} \sin \theta) \cdot \vec{z}_0$$

2.3.2. EQUATIONS SCALAIRES DE LA MANIVELLE

La projection de l'équation I donne :

$$\text{Sur } \vec{x}_0: M_m \cdot \omega^2 \cdot r \sin \theta = -X_A - X_{A1} \cdot \cos \delta - Y_{A1} \cdot \sin \delta + X_{e1}$$

$$\text{Sur } \vec{y}_0: M_m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos \theta = -Y_A + X_{A1} \cdot \sin \delta - Y_{A1} \cdot \cos \delta + Y_{e1}$$

$$\text{Sur } \vec{z}_0: 0 = 0$$

La projection de l'équation II donne :

$$\text{Sur } \vec{x}_0: 0 = 0$$

$$\text{Sur } \vec{y}_0: 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Sur } \vec{z}_0: 0 = & (R-r)(X_A \cos \theta + Y_A \sin \theta) + (R-r)(X_{A1} \cos \beta + Y_{A1} \sin \beta) \\ & + r(X_{e1} \cos \theta + Y_{e1} \sin \theta) + C_{m1} \end{aligned}$$

2.3.3. SYSTEME D'EQUATIONS

La détermination des efforts sur la manivelle, qui serviront d'outil pour le dimensionnement, nécessite la résolution d'un système de 15 équations à 15 inconnues, le système d'équations à résoudre est le suivant :

Piston 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = X_C - X_B \quad 1 \\ m_p R \cdot \omega (\dot{\varphi} - \omega) \cdot \cos \theta + R \ddot{\varphi} \sin \theta = -Y_P(\theta) - Y_B \quad 2 \\ 0 = L_2 X_B - L_4 X_C \quad 3 \end{array} \right.$$

Piston 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_p \ddot{x}_D = X_{C1} \cdot \cos \delta - X_D \cdot \cos \delta - Y_D \cdot \sin \delta - Y_{P1}(\beta) \sin \delta \quad 4 \\ m_p \ddot{y}_D = -X_{C1} \cdot \sin \delta - X_D \cdot \sin \delta + Y_D \cdot \cos \delta - Y_{P1}(\beta) \cdot \cos \delta \quad 5 \\ 0 = L_2 \cdot X_D - L_4 \cdot X_{C1} \quad 6 \end{array} \right.$$

Bielle :

$$\begin{cases} m_b \cdot \frac{L_B}{L} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \sin \theta = X_A + X_B & 7 \\ m_b \left[R \cdot \omega \left(\dot{\varphi} - \omega - \frac{L_B}{L} \dot{\varphi} \right) \cos \theta + R \ddot{\varphi} \left(1 - \frac{L_B}{L} \right) \sin \theta \right] = Y_A + Y_B & 8 \\ \ddot{\varphi} \cdot I_{Gz1} = (L - L_B) (X_A \cdot \cos \varphi + Y_A \cdot \sin \varphi) + L_B (X_B \cdot \cos \varphi + Y_B \cdot \sin \varphi) & 9 \end{cases}$$

Bielle en fourche :

$$\begin{cases} m_{b1} \cdot \ddot{x}_J = X_D \cdot \cos \delta + Y_D \cdot \sin \delta + X_{A1} \cdot \cos \delta + Y_{A1} \cdot \sin \delta & 10 \\ m_{b1} \cdot \ddot{y}_J = -X_D \cdot \sin \delta + Y_D \cdot \cos \delta - X_{A1} \cdot \sin \delta + Y_{A1} \cdot \cos \delta & 11 \\ \ddot{\psi} I_{Gz2} = L_D (X_D \cdot \cos \gamma + Y_D \cdot \sin \gamma) - (L - L_D) (X_{A1} \cdot \cos \gamma + Y_{A1} \cdot \sin \gamma) & 12 \end{cases}$$

Manivelle :

$$\begin{cases} M_m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \sin \theta = -X_A - X_{A1} \cos \delta - Y_{A1} \cdot \sin \delta + X_{e1} & 13 \\ M_m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos \theta = -Y_A + X_{A1} \cdot \sin \delta - Y_{A1} \cdot \cos \delta + Y_{e1} & 14 \\ 0 = (R - r) (X_A \cdot \cos \theta + Y_A \cdot \sin \theta) + (R - r) (X_{A1} \cos \beta + Y_{A1} \cdot \sin \beta) & 15 \\ + r (X_{e1} \cos \theta + Y_{e1} \sin \theta) + C_{m1} & \end{cases}$$

La résolution d'un tel système en supposant que $L_2 = L_4$ donne Y_B, Y_A, X_A, X_B, X_C déjà déterminés pour le moteur en ligne, et le reste des efforts dans l'ordre suivant :

$$Y_D = -Y_{P1}(\beta) - \frac{m \ddot{x}_P}{\sin \delta}$$

$$X_D = \frac{1}{\sin \delta} \left[(Y_D - Y_{P1}(\beta)) \cdot \cos \delta - m_P \cdot \ddot{y}_D \right]$$

$$X_{C1} = X_D$$

$$X_{A1} = m_{b1} (\ddot{x}_J - \ddot{y}_J) - X_D$$

$$Y_{A1} = m_{b1} (\ddot{x}_J + \ddot{y}_J) - Y_D$$

Les efforts auxquelles est soumise la manivelle sont successivement \vec{F}_A , \vec{F}_{A1} et \vec{R}_{e1} effort de la bielle, la bielle en fourche, sur le maneton et la réaction des paliers sur les tourillons.

$$\|\vec{F}_A\| = (X_A^2 + Y_A^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\vec{F}_{A1}\| = (X_{A1}^2 + Y_{A1}^2)^{\frac{1}{2}}$$

La direction de \vec{F}_{A1} par rapport à l'axe \vec{x}_0 est définie par l'angle γ_{A1} :

$$\gamma_{A1} = \text{Arctg} \frac{Y_{A1}}{X_{A1}}$$

L'effort résultant sur le maneton est :

$$\|\vec{R}_A\| = (F_A^2 + F_{A1}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\vec{R}_{e1}\| = (X_{e1}^2 + Y_{e1}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Pour exploiter les résultats on a besoin de connaître les efforts \vec{F}_A , \vec{F}_{A1} , \vec{R}_A et \vec{R}_{e1} dans le repère lié à la manivelle : $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, pour cela il suffit lors du traitement informatique un changement de repère après résolution du système.

III DIMENSIONNEMENT DE LA MANIVELLE

III.1. GENERALITES .

Le vilebrequin d'un moteur à n cylindres est essentiellement:)

- Une poutre formée de n manivelles formant des travées, reposant sur $(n+1)$ appuis équidistants et alignés, travaillant sous flexions.
- Un arbre coude formé de n manivelles, angulairement décalées les unes par rapport aux autres, et soumises à des flexions et des couples d'amplitudes cycliques et déphasés.

En tant que poutre, le vilebrequin est l'objet de flèches de nature à compromettre le tourillonnement de l'arbre.

L'amplitude de toute flèche croît comme la puissance 3 de la longueur de la travée.

En tant qu'arbre, le vilebrequin est l'objet de torsion dont les contraintes se manifestent, au premier chef dans les tourillons.

III.2. LA MANIVELLE

L'objectif est de produire des vilebrequins à coût modéré qui, pour un poids et un encombrement aussi faible que possible, soient capables de supporter indéfiniment les charges maximales de service.

De ce qui précède, on conclut que, deux des caractéristiques fondamentales du matériau utilisé présentent une importance déterminante:

- Le module d'élasticité qui conditionne le dimensionnement générale.
- La limite d'endurance à la fatigue, qui conditionne la durée de vie, donc le prix de revient.

III.3. MOTEUR EN LIGNE

La manivelle, premier organe à transmettre sous forme de couple l'énergie développée par la combustion, elle doit résister à l'effort de pression et l'effort tangentiel.

3.1. EFFORT DE PRESSION.

L'effort $Y_p(\theta)$ au PMH, dû à la pression des gaz sur le piston de diamètre D , se traduit dans les paliers adjacents par deux réactions R_A et R_B . ($R_A = R_B$ pour $L_A = L_B$). Fig 3-1

$$\text{d'où : } \frac{R_A}{L_B} = \frac{R_B}{L_A} = \frac{Y_p(\theta)}{L_A + L_B}$$

$$Y_p(\theta) = S(P(\theta) - P_0) \quad \text{avec } S = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\text{pour } \theta = 0, \text{ piston au PMH, on aura : } R_A = R_B = \frac{Y_p(0)}{2}$$

a. Maneton:

Le maneton sous l'action de $Y_p(0)$, subit une flexion de moment $R_A \cdot L_A$, d'où la contrainte à la flexion σ_m .

$$\sigma_m = \frac{R_A \cdot L_A}{I/V} \quad \text{avec } \frac{I}{V} = \frac{\pi \cdot d_m^3}{32}$$

La condition de résistance du maneton à la flexion est:

$$\sigma_m \leq \sigma_{mad}$$

$$\frac{32 \cdot R_A \cdot L_A}{\pi d_m^3} < \sigma_{mad}$$

$$d_m \geq \left(\frac{32 \cdot R_A \cdot L_A}{\pi \sigma_{mad}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

d_m : diamètre du maneton.

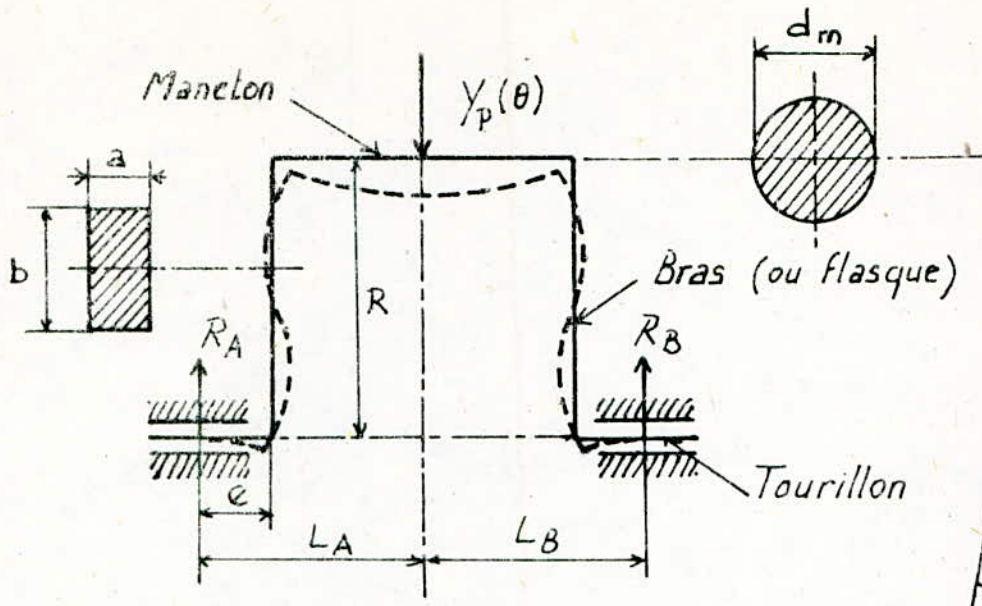


Fig 3.1 Déformations et contraintes au P.M.H

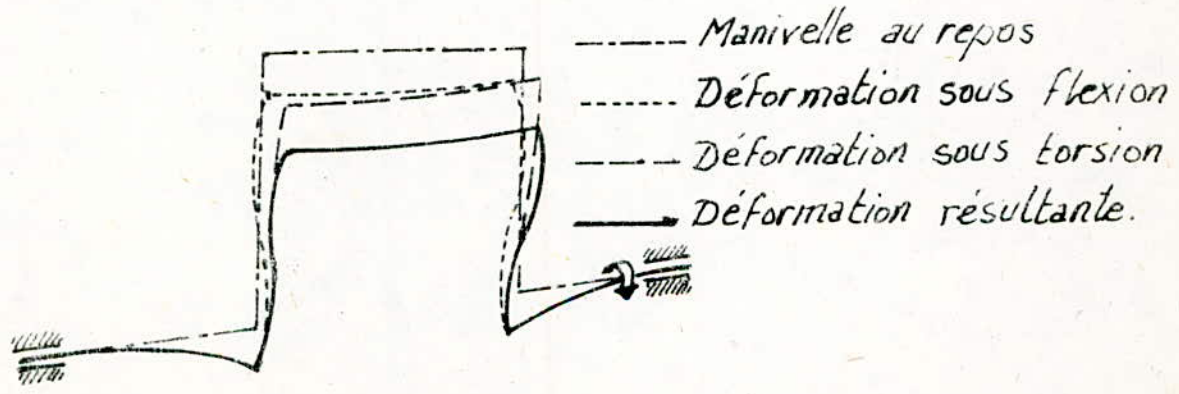
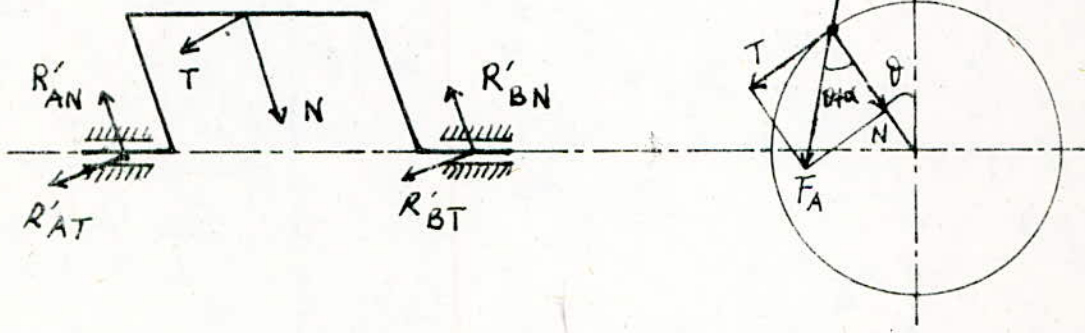


Fig-3.2 Déformations et contraintes dues à l'effort tangentiel maximal.

b. Bras.

Les bras subissent une compression et une flexion.

La contrainte due à l'effort de compression des bras est σ_b

$$\sigma_b = \frac{R_A}{a \cdot b} = \frac{R_A}{S_b}$$

La condition de résistance à la compression est ($\sigma_b \leq \sigma_{bad}$)

d'où $S_b \geq \frac{R_A}{\sigma_{bad}}$ avec $R_A = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{(P(0) - P_0)}{2}$.

L'effort provoquant la flexion de moment ($R_A \cdot e$) fig 3.1 entraîne une contrainte σ_{fb} sur les bras donnée par :

$$\sigma_{fb} = \frac{R_A \cdot e}{I/V} \quad \text{avec} \quad \frac{I}{V} = \frac{a^2 \cdot b}{6}$$

Condition de résistance :

$$\sigma_{fb} \leq \sigma_{fbad}$$

$$\frac{6 \cdot R_A \cdot e}{a \cdot S_b} \leq \sigma_{fbad} \quad \text{d'où} \quad a \geq \frac{6 \cdot R_A \cdot e}{S_b \cdot \sigma_{fbad}}$$

avec S_b étant déjà déterminé.

c. Tourillons :

Les tourillons sous l'effort de pression sont fléchis et cisailés.

Le moment fléchissant du tourillon est $M_f = R_A \cdot e$.

La condition de résistance à la flexion est :

$$\sigma_{ft} \leq \sigma_{ftad}$$

$$\frac{R_A \cdot e}{\frac{\pi}{32} \cdot \frac{(d_{ef}^4 - d_{if}^4)}{d_{ef}}} \leq \sigma_{ftad}$$

d_{et} : diamètre extérieur du tourillon

d_{it} : diamètre intérieur du tourillon.

avec $d_{it} = k \cdot d_{et}$.

$$\text{donc } \frac{R_A \cdot e}{\frac{\pi}{32} \cdot d_{et}^3 (1 - k^4)} \leq \sigma_{ftad}$$

$$\text{d'où } d_{et} \geq \left(\frac{R_A \cdot e}{\frac{\pi}{32} \cdot (1 - k^4) \sigma_{ftad}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

La condition de résistance au cisaillement est :

$$\frac{R_A}{S_T} \leq \sigma_{ctad}$$

$$\frac{4 \cdot R_A}{\pi (d_{et}^2 - d_{it}^2)} \leq \sigma_{ctad}$$

$$\text{d'où } d_{et} \geq \left(\frac{4 \cdot R_A}{\pi (1 - k^2) \cdot \sigma_{ctad}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

3.2. EFFORT TANGENTIEL

L'effort maximal F_A , de la bielle se produit à un angle θ après le PMH, (fig 3-2) et se décompose :

- en une force tangentielle, $T = F_A \cdot \sin(\theta + \alpha)$

- en une force radiale, $N = F_A \cdot \cos(\theta + \alpha)$

Chacun de ces deux efforts détermine sur chaque palier A et B une réaction donnée par :

$$\vec{R}_{AN} = \vec{R}_{BN} = \frac{\vec{N} \cdot L_B}{L_A + L_B} ; \quad \vec{R}_{AT} = \vec{R}_{BT} = \frac{\vec{T} \cdot L_B}{L_A + L_B}$$

a. Maneton :

Chacun des efforts \vec{N} et \vec{T} fait, par ailleurs, subir au maneton une flexion ; l'effort \vec{T} lui fait, en plus subir une torsion.

Le moment fléchissant dû à \vec{N} est (on prendra $L_A = L_B$):

$$M_N = \frac{N \cdot L_B}{L_A + L_B} \cdot L_A = \frac{N \cdot L_A}{2} = \frac{F_A \cdot L_A \cdot \cos(\theta + \alpha)}{2}$$

Celui dû à \vec{T} est :

$$M_T = \frac{T \cdot L_B}{L_A + L_B} \cdot L_A = \frac{T \cdot L_A}{2} = \frac{F_A \cdot L_A \cdot \sin(\theta + \alpha)}{2}$$

d'où on tire le moment fléchissant résultant par :

$$M_{Fm} = \sqrt{M_N^2 + M_T^2} = \frac{F_A \cdot L_A}{2}$$

La contrainte de flexion σ_{fm} est donnée par :

$$\sigma_{fm} = \frac{M_{Fm}}{\frac{I}{V}} \quad ; \quad \text{avec} \quad \frac{I}{V} = \frac{\pi d_m^3}{32}$$

on obtient finalement :

$$\sigma_{fm} = \frac{16 \cdot F_A \cdot L_A}{\pi d_m^3}$$

Le moment de torsion dû à \vec{T} est :

$$M_{tm} = \frac{T \cdot L_B}{L_A + L_B} \cdot R = \frac{T \cdot R}{2}$$

La contrainte due au moment de torsion est :

$$\tau_m = \frac{M_{tm}}{\frac{I_o}{V}} \quad ; \quad \text{avec} \quad \frac{I_o}{V} = \frac{\pi d_m^3}{16}$$

on obtient :

$$\tau_m = \frac{8 \cdot T \cdot R}{\pi \cdot d_m^3}$$

La condition de résistance du maneton à la flexion et la torsion conjuguées, provoquées par \vec{F}_A est $\sigma_{gm} \leq \sigma_{gmad}$
 où σ_{gm} : est la contrainte globale dans le maneton, qui est donnée par la formule de PONCELET

$$\sigma_{gm} = 0,35 \cdot \sigma_{fm} + 0,65 \cdot \sqrt{\sigma_{fm}^2 + 4 \tau_m^2} \leq \sigma_{gmad}$$

$$0,35 \cdot \left(\frac{16 \cdot F_A \cdot L_A}{\pi \cdot d_m^3} \right) + 0,65 \cdot \sqrt{\left(\frac{16 \cdot F_A \cdot L_A}{\pi \cdot d_m^3} \right)^2 + 4 \left(\frac{8 \cdot T \cdot R}{\pi \cdot d_m^3} \right)^2} \leq \sigma_{gmad}$$

d'où

$$d_m \geq \left(\frac{1}{\pi \cdot \sigma_{gmad}} \left(5,6 \cdot F_A \cdot L_A + 10,4 \cdot \sqrt{(F_A \cdot L_A)^2 + (T \cdot R)^2} \right) \right)^{\frac{1}{3}}$$

b. Bras :

Les bras quant à eux subissent des déformations complexes à savoir :

- une flexion dans le plan de rotation due à \vec{T} de moment, $M_{fT} = T \cdot R$
- une flexion dans le plan perpendiculaire à la rotation (due à \vec{N}) de moment $M_{fN} = N \cdot e$

Le moment fléchissant résultant, du bras est :

$$M_{fb} = \sqrt{(N \cdot e)^2 + (T \cdot R)^2}$$

La contrainte à la flexion des bras est donnée par :

$$\sigma_{fb} = \frac{M_{fb}}{\frac{I}{V}} \quad \text{avec} \quad \frac{I}{V} = \frac{a^2 \cdot b}{6} = \frac{S_b \cdot a}{6}$$

- une torsion due à \vec{T} , de moment M_{tb} tel que

$$M_{tb} = \frac{T \cdot L_A}{L_A + L_B} \cdot e = \frac{T \cdot e}{2}$$

La contrainte à la torsion est donnée par :

$$\tau_b = \frac{h \cdot M_{tb}}{b \cdot a^2}, \text{ où } h \text{ est fonction du rapport } \left(\frac{b}{a}\right).$$

Pour un rapport choisi de $\frac{b}{a} = 2$, (Aide mémoire calcul en construction mécanique, Page 97), donne $h = 4,065$ donc :

$$\tau_b = \frac{4,065 \cdot T \cdot e}{b \cdot a^2}$$

En appliquant la formule de PONCELET au calcul des contraintes des bras on trouve :

$$\sigma_{Gb} = \frac{1}{a \cdot S_b} \left[2,1 \cdot \sqrt{(N \cdot e)^2 + (T \cdot R)^2} + 0,65 \cdot \sqrt{36 \left[(N \cdot e)^2 + (T \cdot R)^2 \right] + 66,1 (T \cdot e)^2} \right]$$

de la condition de résistance $\sigma_{Gb} \leq \sigma_{Gbad}$ on trouve :

$$a \geq \frac{1}{S_b \cdot \sigma_{Gbad}} \left[2,1 \cdot \sqrt{(N \cdot e)^2 + (T \cdot R)^2} + 0,65 \cdot \sqrt{36 \left[(N \cdot e)^2 + (T \cdot R)^2 \right] + 66,1 (T \cdot e)^2} \right]$$

c. Tourillons .

Les tourillons subissent sous l'effort tangentiel.

- une flexion due à \vec{N} de moment fléchissant (pour $L_A = L_B$)

$$M_{fN} = \frac{N \cdot L_A}{L_A + L_B} \cdot e = \frac{N \cdot e}{2}$$

- une flexion due à \vec{T} de moment fléchissant (pour $L_A = L_B$)

$$M_{fT} = \frac{T \cdot L_A}{L_A + L_B} \cdot e = \frac{T \cdot e}{2}$$

Le moment fléchissant résultant sur les tourillons est :

$$M_{ft} = \sqrt{M_{FN}^2 + M_{FT}^2} = \frac{F_A \cdot e}{2}$$

Le moment de flexion provoque une contrainte à la flexion telle que :

$$\sigma_{ft} = \frac{M_{ft}}{\frac{I}{V}} \quad \text{avec} \quad \frac{I}{V} = \frac{\pi}{32} d_{et}^3 (1-k^4)$$

$$\text{d'où} \quad \sigma_{ft} = \frac{16 \cdot F_A \cdot e}{\pi d_{et}^3 (1-k^4)}$$

- une torsion, due au couple moteur telle que

$$M_{tt} = T \cdot R$$

La contrainte à la torsion τ_t provoquée par le couple moteur est :

$$\tau_t = \frac{M_{tt}}{\frac{I_o}{V}} \quad \text{avec} \quad \frac{I_o}{V} = \frac{\pi}{16} d_{et}^3 (1-k^4)$$

$$\text{d'où} \quad \tau_t = \frac{16 \cdot T \cdot R}{\pi \cdot d_{et}^3 (1-k^4)}$$

La contrainte globale dans les tourillons (selon Poncelet) est :

$$\sigma_{Gt} = 0,35 \cdot \frac{16 \cdot F_A \cdot e}{\pi \cdot d_{et}^3 (1-k^4)} + 0,65 \cdot \frac{16}{\pi \cdot d_{et}^3 (1-k^4)} \cdot \sqrt{(F_A \cdot e)^2 + (2 \cdot T \cdot R)^2}$$

de la condition de résistance $\sigma_{Gt} \leq \sigma_{Gtab}$ on obtient :

$$d_{et} \geq \left[\frac{1}{\pi (1-k^4) \cdot \sigma_{Gtab}} \left(5,6 F_A \cdot e + 10,4 \cdot \sqrt{(F_A \cdot e)^2 + (2 \cdot T \cdot R)^2} \right) \right]^{\frac{1}{3}}$$

3.4. Récapitulation

En prenant L_A et e en fonction du diamètre de l'alésage du piston

(science et technique du moteur diesel Tom 2 page 362) tel que :

$$L_A = 0,7 D \quad ; \quad e = 0,4 D$$

avec :

L_A : la demi travée de la manivelle .

e : distance entre le flasque et le point d'application de la réaction sur les tourillons .

Le dimensionnement des différents éléments devient :

- Maneton .

$$d_{m1} \gg \left(\frac{22,4 \cdot R_A \cdot D}{\pi \cdot \sigma_{mad}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$d_{m2} \gg \left[\frac{1}{\pi \sigma_{gab}} \cdot \left(3,92 \cdot F_A \cdot D + 10,4 \sqrt{(0,7 F_A \cdot D)^2 + (T \cdot R)^2} \right) \right]^{\frac{1}{3}}$$

d'où $d_m \gg \text{Sup} (d_{m1}, d_{m2})$

- Bras .

On détermine la section tout d'abord par $S_b \gg \frac{R_A}{\sigma_{cad}}$

ensuite :

$$a_1 \gg \frac{6 \cdot R_A \cdot e}{S_b \cdot \sigma_{fbad}}$$

$$a_2 \gg \frac{1}{S_b \cdot \sigma_{gab}} \left[2,1 \sqrt{(0,4 \cdot N \cdot D)^2 + (T \cdot R)^2} + 0,65 \sqrt{36 [(0,4 \cdot N \cdot D)^2 + (T \cdot R)^2]} + 10,58 (T \cdot D)^2 \right]$$

d'où $a \gg \text{Sup} (a_1, a_2)$ et $b = \frac{S_b}{a}$

- Tourillons .

$$d_{et1} \gg \left(\frac{12,8 \cdot R_A \cdot D}{\pi (1-k^4) \sigma_{ftad}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{avec } k \approx 0,4$$

$$det_2 \gg \left(\frac{4 \cdot R_A}{\pi (1 - k^2) \cdot \sigma_{ctad}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$det_3 \gg \left[\frac{1}{\pi (1 - k^4) \sigma_{ctad}} \left(2,24 \cdot F_A \cdot D + 10,4 \sqrt{(0,4 \cdot F_A \cdot D)^2 + (2 \cdot T \cdot R)^2} \right) \right]^{\frac{1}{3}}$$

d'où $det \gg \text{Sup}(det_1, det_2, det_3)$ et $d_{it} = k \cdot det$.

4 - MOTEUR EN -V-

Pour $\theta = 0$, (fig 3.3) la manivelle et la bielle 1 se trouvent dans le même plan, donc le piston 1 est au P.M.H.

Dans cette position on note l'existence de l'effort de pression $Y_p(0)$, qui est radial, et l'effort maximal tangentiel, (\vec{F}_{A1}) de la bielle en fourche, qui se décompose en \vec{T}_1 et \vec{N}_1 tel que :

$$\vec{T}_1 = \vec{F}_{A1} \cdot \sin(\gamma + \chi) \quad ; \quad \vec{N}_1 = \vec{F}_{A1} \cdot \cos(\gamma + \chi).$$

a. Maneton.

Le maneton subit 3 flexions dues successivement à $Y_p(0)$, \vec{N}_1 et \vec{T}_1 de moment :

$$M_{FY} = R_A \cdot L_A \quad ; \quad M_{FN} = \frac{N_1 \cdot L_A}{2} \quad , \quad M_{FT} = \frac{T_1 \cdot L_A}{2}$$

de moment fléchissant résultant :

$$M_{fmv} = \sqrt{M_{FY}^2 + M_{FN}^2 + M_{FT}^2} = L_A \cdot \sqrt{R_A^2 + \frac{1}{4} \cdot F_{A1}^2}$$

provoquant une contrainte de flexion σ_{fmv} du maneton

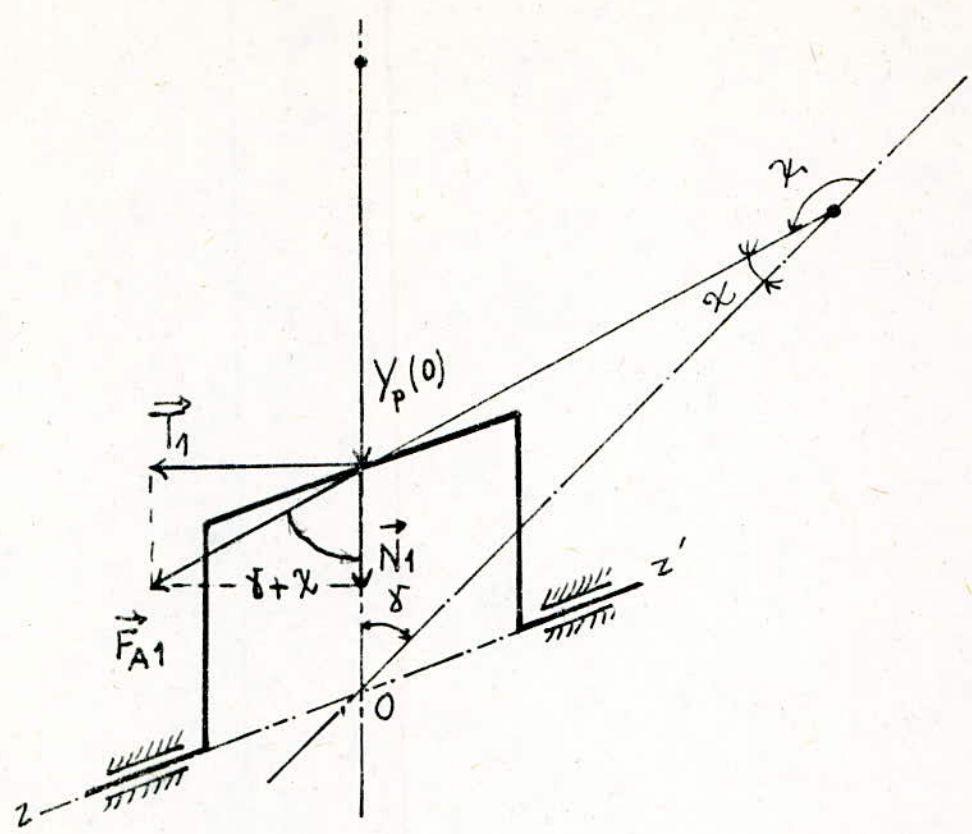


Fig-3.3 Représentation des efforts au PMH de la Première bielle.

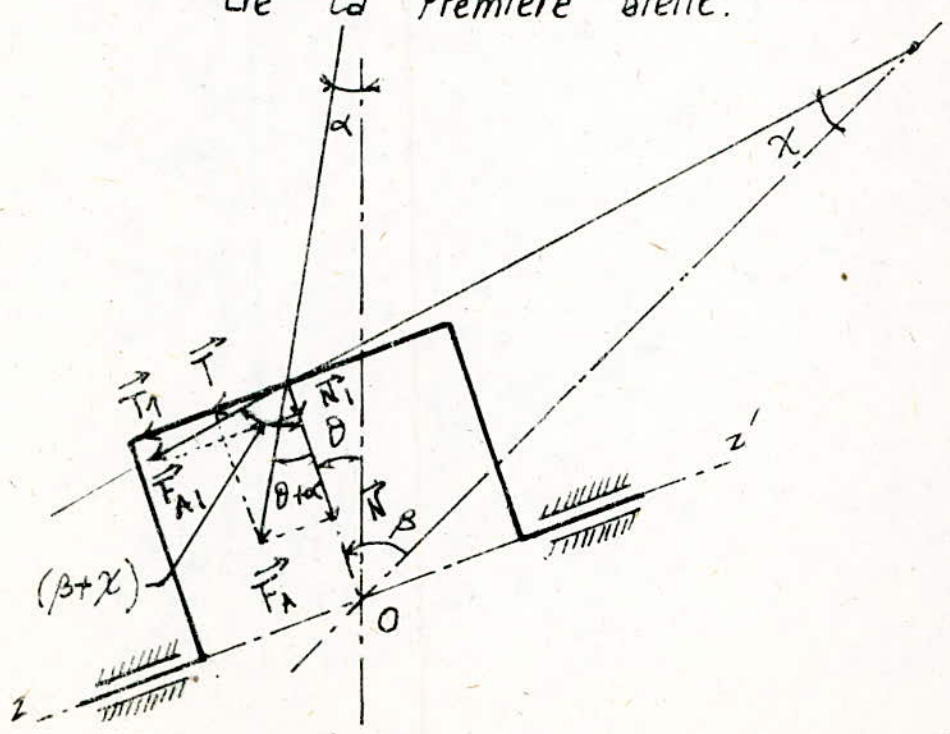


Fig-3.4 Représentation des efforts tangentiels des deux bielles.

telque :

$$\sigma_{f_{mv}} = \frac{M_{f_{mv}}}{\frac{I}{V}}, \quad \text{avec} \quad \frac{I}{V} = \frac{\pi d_{mv}^3}{32}$$

d'où :

$$\sigma_{f_{mv}} = \frac{32 \cdot L_A \cdot \sqrt{R_A^2 + \frac{1}{4} F_{A1}^2}}{\pi \cdot d_{mv}^3}$$

L'effort T_1 provoque en plus une torsion de moment $M_{t_{mv}}$ telque ($L_A = L_B$) :

$$M_{t_{mv}} = \frac{T_1 \cdot R}{L_A + L_B} \cdot L_B = \frac{T_1 \cdot R}{2}$$

La contrainte à la torsion du maneton est donc donnée par :

$$\tau_{m_v} = \frac{T_1 \cdot R \cdot 16}{2 \cdot \pi \cdot d_{mv}^3} = \frac{8 \cdot T_1 \cdot R}{\pi d_{mv}^3}$$

Le maneton étant soumis à une flexion et torsion conjuguées la contrainte globale (donnée par Poncelet) est :

$$\sigma_{G_{mv}} = 0,35 \cdot \sigma_{f_{mv}} + 0,65 \cdot \sqrt{\sigma_{f_{mv}}^2 + 4 \tau_{m_v}^2}$$

$$\sigma_{G_{mv}} = 11,2 \cdot \frac{M_{f_{mv}}}{\pi \cdot d_{mv}^3} + \frac{20,8}{\pi d_{mv}^3} \sqrt{M_{f_{mv}}^2 + M_{t_{mv}}^2}$$

La condition de résistance du maneton d'une manivelle d'un moteur en V, $\sigma_{G_{mv}} \leq \sigma_{G_{mv ad}}$, pour $\theta = 0$ donne :

$$d_{mv} \geq \left(\frac{1}{\pi \sigma_{G_{mv ad}}} \left(11,2 \cdot M_{f_{mv}} + 20,8 \cdot \sqrt{M_{f_{mv}}^2 + M_{t_{mv}}^2} \right) \right)^{\frac{1}{3}}$$

- Bras

Les bras subissent une compression de contrainte σ_c , pour que les bras résistent à cette contrainte, nous devons avoir :

$$\sigma_{cb} \leq \sigma_{cbad}$$

$$\frac{R_A}{S_b} \leq \sigma_{cbad} \quad \text{d'où} \quad S_b \geq \frac{R_A}{\sigma_{cbad}}$$

de même ils subissent sous l'action des deux bielles une flexion résultante de moment :

$$M_{fbv} = \sqrt{M_{FY_b}^2 + M_{FT_b}^2 + M_{FN_b}^2}$$

$$M_{fbv} = \sqrt{(R_A \cdot e)^2 + (T_1 \cdot R)^2 + (N_1 \cdot e)^2}$$

La contrainte à la flexion de chaque bras est :

$$\sigma_{fbv} = \frac{M_{fbv}}{\frac{I}{v}} = \frac{6 \cdot M_{fbv}}{S_b \cdot a}$$

en fin les bras subissent une torsion due à \vec{T} dont la contrainte est donnée par :

$$\tau_{bv} = \frac{h \cdot M_{tbv}}{b \cdot a^2} \quad \text{avec} \quad h = 4,065 \quad \text{pour} \quad \frac{b}{2} = 2$$

on trouve :

$$\tau_{bv} = \frac{4,065 \cdot M_{tbv}}{S_b \cdot a} \quad ; \quad M_{tbv} = T_1 \cdot e$$

La contrainte globale dans les bras donnée par la formule de PONCELET, serait donc :

$$\sigma_{gbv} = 0,35 \cdot \frac{6 \cdot M_{fbv}}{S_b \cdot a} + \frac{0,65}{S_b \cdot a} \sqrt{(6 \cdot M_{fbv})^2 + 4(4,065 M_{tbv})^2}$$

avec la condition de résistance ($\sigma_{gbv} \leq \sigma_{gbv \text{ ad}}$) on trouve:

$$a \geq \frac{1}{S_b \cdot \sigma_{gbv \text{ ad}}} \left[2,1 M_{fbv} + 0,65 \cdot \sqrt{(6 \cdot M_{fbv})^2 + 4(4,065 M_{tbv})^2} \right]$$

c. Tourillons .

Les tourillons subissent une flexion résultante des 3 actions $Y_p(0)$, N_1 et T_1 , de moment

$$M_{ftv} = \sqrt{(R_A \cdot e)^2 + \left(\frac{N_1 \cdot e}{2}\right)^2 + \left(\frac{T_1 \cdot e}{2}\right)^2}$$

$$M_{ftv} = e \cdot \sqrt{R_A^2 + \frac{1}{4} \cdot F_{A1}^2}$$

provoquant une contrainte à la flexion σ_{ftv}

$$\sigma_{ftv} = \frac{M_{ftv}}{\frac{I}{v}} = \frac{32 \det M_{ftv}}{\pi \cdot (d_{et}^4 - d_{it}^4)} ; \text{ avec } d_{it} = k \det$$

on trouve:

$$\sigma_{ftv} = \frac{32 \cdot M_{ftv}}{\pi \cdot d_{et}^3 (1 - k^4)}$$

et une torsion due à \vec{T} telle que :

$$\text{donnant une contrainte } \tau_{tv} = \frac{M_{ttv}}{\frac{I_0}{v}} \quad M_{ttv} = T_1 \cdot R$$

$$\tau_{tv} = \frac{16 \cdot M_{ttv}}{\pi \cdot d_{et}^3 (1 - k^4)}$$

en appliquant la formule de "PONCELET" on trouve :

$$\sigma_{gtv} = 0,35 \cdot \frac{32 M_{Ftv}}{\pi \cdot d_{et}^3 (1-k^4)} + \frac{0,65 \cdot 32}{\pi \cdot d_{et}^3 (1-k^4)} \cdot \sqrt{M_{Ftv}^2 + M_{ttv}^2}$$

de la condition de résistance des tourillons on tire :

$$d_{et} \gg \left[\frac{32}{\pi \cdot (1-k^4) \cdot \sigma_{gtvad}} \cdot \left(0,35 M_{Ftv} + 0,65 \cdot \sqrt{M_{Ftv}^2 + M_{ttv}^2} \right) \right]^{\frac{1}{3}}$$

On envisage parfois la résistance au cisaillement, donnée par :

$$\sigma_{ctv} \leq \sigma_{ctvad}$$

$$\frac{R_A}{\frac{\pi}{4} (d_{et}^2 - d_{it}^2)} \leq \sigma_{ctvad}$$

$$d_{et} \gg \left(\frac{4 \cdot R_A}{\pi \cdot (1-k^2) \cdot \sigma_{ctvad}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

4-1 EFFORTS TANGENTIELS

pour un angle θ de la manivelle, on aura \vec{F}_A et \vec{F}_{A_1} (dûes aux efforts successives de la bielle, et de la bielle en fourche) qui se décomposent : (Fig 3-4)

- en des forces tangentielles : $\vec{T} = \vec{F}_A \cdot \sin(\theta + \alpha)$

$$\vec{T}_2 = \vec{F}_{A_1} \cdot \sin(\beta + \chi),$$

- en des forces radiales : $\vec{N} = \vec{F}_A \cdot \cos(\theta + \alpha)$

$$\vec{N}_2 = \vec{F}_{A_1} \cdot \cos(\beta + \chi).$$

a. Maneton.

Sous l'effort $(\vec{T} + \vec{T}_2)$ et $(\vec{N} + \vec{N}_2)$, le maneton subit une flexion résultante de moment :

$$M_{Fmv'} = \sqrt{M_{FT'}^2 + M_{FN'}^2}$$

où :

$$M_{FT'} = \frac{(T + T_2) \cdot L_A \cdot L_B}{L_A + L_B} = \frac{(T + T_2) \cdot L_A}{2}$$

$$M_{FN'} = \frac{(N + N_2) \cdot L_A \cdot L_B}{L_A + L_B} = \frac{(N + N_2) \cdot L_A}{2}$$

Provoquant une contrainte à la flexion $\sigma_{Fmv'}$

$$\sigma_{Fmv'} = \frac{M_{Fmv'}}{\frac{I}{V}} = \frac{32 \cdot M_{Fmv'}}{\pi \cdot d_{mv}^3}$$

L'effort $(\vec{T} + \vec{T}_2)$ fait en plus subir au maneton une torsion de moment $M_{tmv'}$, provoquant une contrainte à la torsion $\tau_{mv'}$.

$$M_{tmv'} = \frac{(T + T_2) \cdot L_B \cdot R}{L_A + L_B} = \frac{(T + T_2) \cdot R}{2}$$

$$\tau_{mv'} = \frac{M_{tmv'}}{\frac{I_0}{V}} = \frac{16 \cdot M_{tmv'}}{\pi \cdot d_{mv}^3}$$

Pour résister aux efforts cités ci-dessus, qui agissent conjointement sur le maneton, la contrainte globale dans le maneton doit vérifier la condition suivante :

$$\sigma_G \leq \sigma_{G,mv'ad}$$

$$0,35 \cdot \frac{32 \cdot M_{Fmv'}}{\pi \cdot d_{mv}^3} + \frac{0,65 \cdot 32}{\pi \cdot d_{mv}^3} \cdot \sqrt{M_{Fmv'}^2 + M_{tmv'}^2} \leq \sigma_{G,mv'ad}$$

$$\text{D'où } d_{mv} \gg \left[\frac{32}{\pi \sigma_{Gmv'ad}} \left(0,35 \cdot M_{Fmv'} + 0,65 \cdot \sqrt{M_{Fmv'}^2 + M_{tmv'}^2} \right) \right]^{\frac{1}{3}}$$

b. Bras.

Sous l'action des forces tangentielle et normales chaque bras subit une flexion résultante de moment :

$$M_{Fbv'} = \sqrt{M_{f1}^2 + M_{f2}^2}$$

où

$$M_{f1} = (T + T_2) \cdot R \quad , \quad M_{f2} = (N + N_2) \cdot e$$

La contrainte à la flexion dans les bras est :

$$\sigma_{fbv'} = \frac{M_{fbv'}}{\frac{I}{v}} = \frac{6 \cdot M_{fbv'}}{S_b \cdot a}$$

Les forces tangentielle font en plus subir une torsion aux bras, de moment $M_{tbv'}$, provoquant une contrainte de torsion $\tau_{bv'}$

$$M_{tbv'} = \frac{(T + T_2) \cdot L_A \cdot e}{L_A + L_B} = \frac{(T + T_2) \cdot e}{2}$$

$$\tau_{bv'} = \frac{h M_{tbv'}}{b \cdot a^2} = \frac{4,065 M_{tbv'}}{S_b \cdot a}$$

La contrainte globale dans les bras est donc :

$$\sigma_{Gb} = 0,35 \cdot \frac{6 \cdot M_{fbv'}}{S_b \cdot a} + \frac{0,65}{S_b \cdot a} \cdot \sqrt{(6 \cdot M_{fbv'})^2 + (4,065 M_{tbv'})^2} \cdot 4$$

En exploitant la condition de résistance ($\sigma_{Gb} \leq \sigma_{Gbv'ad}$) on aboutit à :

$$a \gg \frac{1}{S_b \cdot \sigma_{Gbv'ad}} \left[2,1 M_{fbv'} + 0,65 \cdot \sqrt{(6 M_{fbv'})^2 + 4 \cdot (4,065 M_{tbv'})^2} \right]$$

c. Tourillons .

Les tourillons subissent une flexion résultante de moment

$$M_{Ftv'} = \sqrt{M_{f1}'^2 + M_{f2}'^2}$$

où

$$M_{f1}' = \frac{T+T_2}{2} \cdot e \quad , \quad M_{f2}' = \frac{N+N_2}{2} \cdot e$$

Provoquant une contrainte à la flexion des tourillons, $\sigma_{Ftv'}$

$$\sigma_{Ftv'} = \frac{M_{Ftv'}}{\frac{I}{V}} = \frac{32 \cdot M_{Ftv'}}{\pi \cdot d_{et}^3 (1-k^4)}$$

une torsion due au couple moteur $(T+T_2) \cdot R$

donc :

$$\tau_{ttv'} = \frac{M_{ttv'}}{\frac{I_0}{V}} = \frac{16 \cdot M_{ttv'}}{\pi \cdot d_{et}^3 (1-k^4)}$$

Pour résister aux efforts provoquant conjointement une contrainte globale σ_{gt} dans chaque tourillon, celle-ci doit être inférieure ou égale à $\sigma_{gtv'ad}$.

$$0,35 \cdot \frac{32 \cdot M_{Ftv'}}{\pi d_{et}^3 (1-k^4)} + 0,65 \cdot \frac{32}{\pi \cdot d_{et}^3 (1-k^4)} \cdot \sqrt{M_{Ftv'}^2 + M_{ttv'}^2} \leq \sigma_{gtv'ad}$$

d'où :

$$d_{et} \gg \left(\frac{32}{\pi \cdot (1-k^4) \cdot \sigma_{gtv'ad}} \cdot \left(0,35 M_{Ftv'} + 0,65 \cdot \sqrt{M_{Ftv'}^2 + M_{ttv'}^2} \right) \right)^{\frac{1}{3}}$$

4.2 Récapitulation .

- Maneton :

Le diamètre du maneton sera supérieur au plus grand des deux d_{m1} et d_{m2} .

donc : $dm_v \gg \text{Sup}(dm_{v1}, dm_{v2})$. avec :

$$dm_{v1} \gg \left[\frac{1}{\pi \cdot \tilde{\sigma}_{Gmvad}} \cdot (11,2 M_{f_{mv}} + 20,8 \cdot \sqrt{M_{f_{mv}}^2 + M_{t_{mv}}^2}) \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$dm_{v2} \gg \left[\frac{32}{\pi \cdot \tilde{\sigma}_{Gmv'ad}} \cdot (0,35 M_{f_{mv'}} + 0,65 \cdot \sqrt{M_{f_{mv'}}^2 + M_{t_{mv'}}^2}) \right]^{\frac{1}{3}}$$

- Bras .

On détermine tout d'abord la section S_b ensuite a et b .

$$S_b \gg \frac{R_A}{\tilde{\sigma}_{cb ad}}$$

$$a_1 \gg \frac{1}{S_b \cdot \tilde{\sigma}_{Gbrab}} \left[2,1 M_{f_{bv}} + 0,65 \sqrt{(6 M_{f_{bv}})^2 + 4(4,065 M_{t_{bv}})^2} \right]$$

$$a_2 \gg \frac{1}{S_b \cdot \tilde{\sigma}_{Gbv'ab}} \left[2,1 M_{f_{bv'}} + 0,65 \sqrt{(6 M_{f_{bv'}})^2 + 4(4,065 M_{t_{bv'}})^2} \right]$$

$$a \gg \text{Sup}(a_1, a_2) \quad , \quad b = \frac{S_b}{a}$$

-Tourillons.

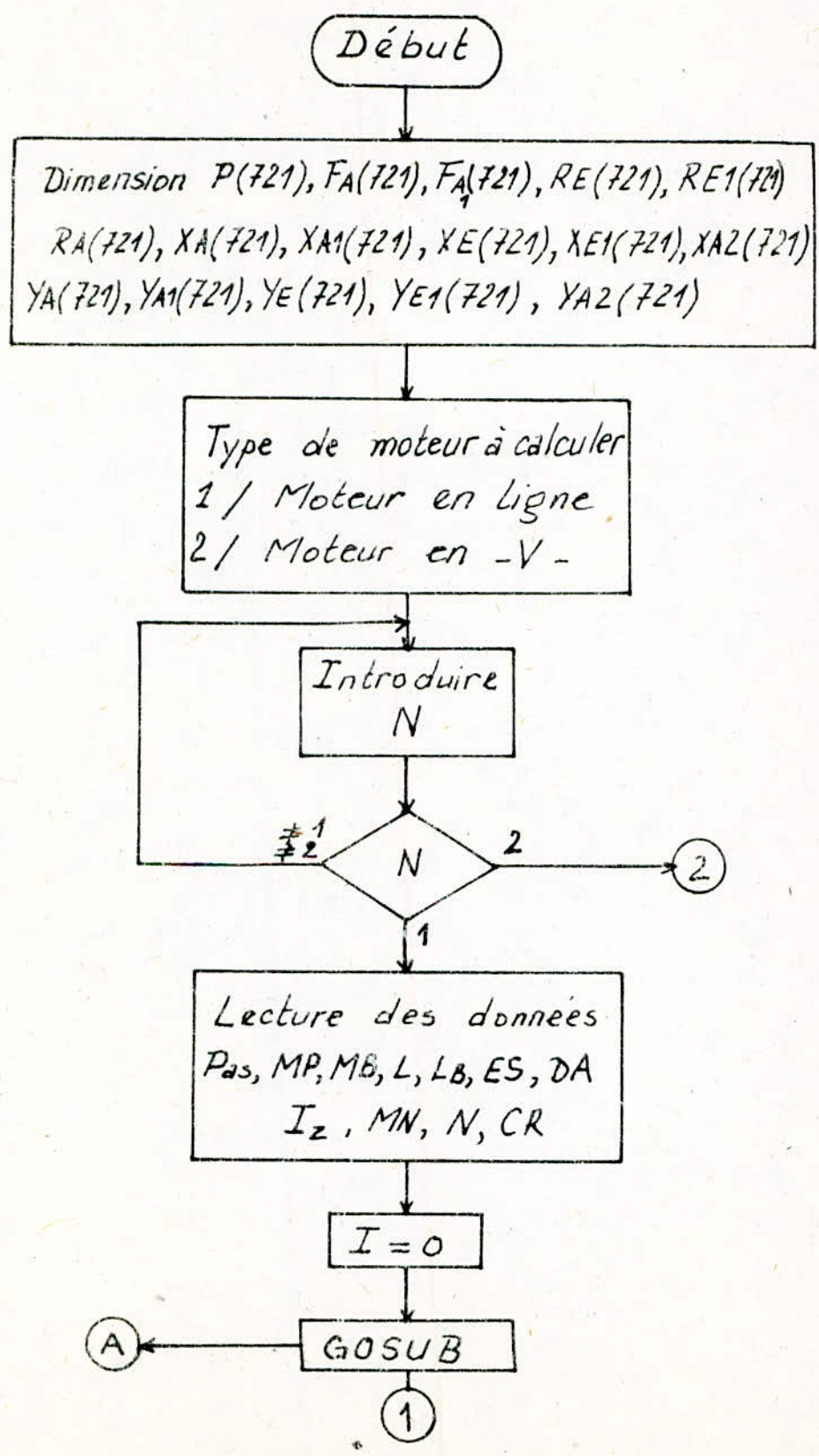
avec $k \approx 0,4$ on détermine : $det_1 \gg \left(\frac{4 \cdot R_A}{\pi \cdot (1-k^2) \tilde{\sigma}_{xad}} \right)^{\frac{1}{2}}$

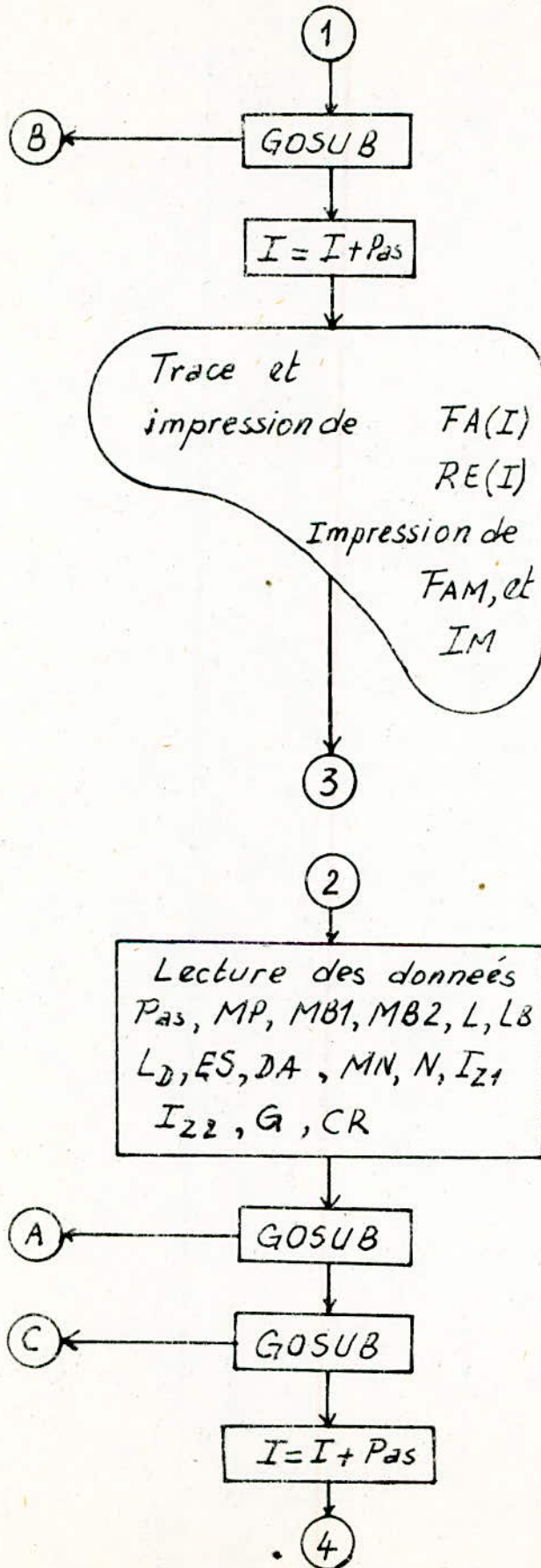
$$det_2 \gg \left[\frac{32}{\pi \cdot (1-k^4) \cdot \tilde{\sigma}_{Gtvab}} \cdot (0,35 M_{f_{tv}} + 0,65 \cdot \sqrt{M_{f_{tv}}^2 + M_{t_{tv}}^2}) \right]^{\frac{1}{3}}$$

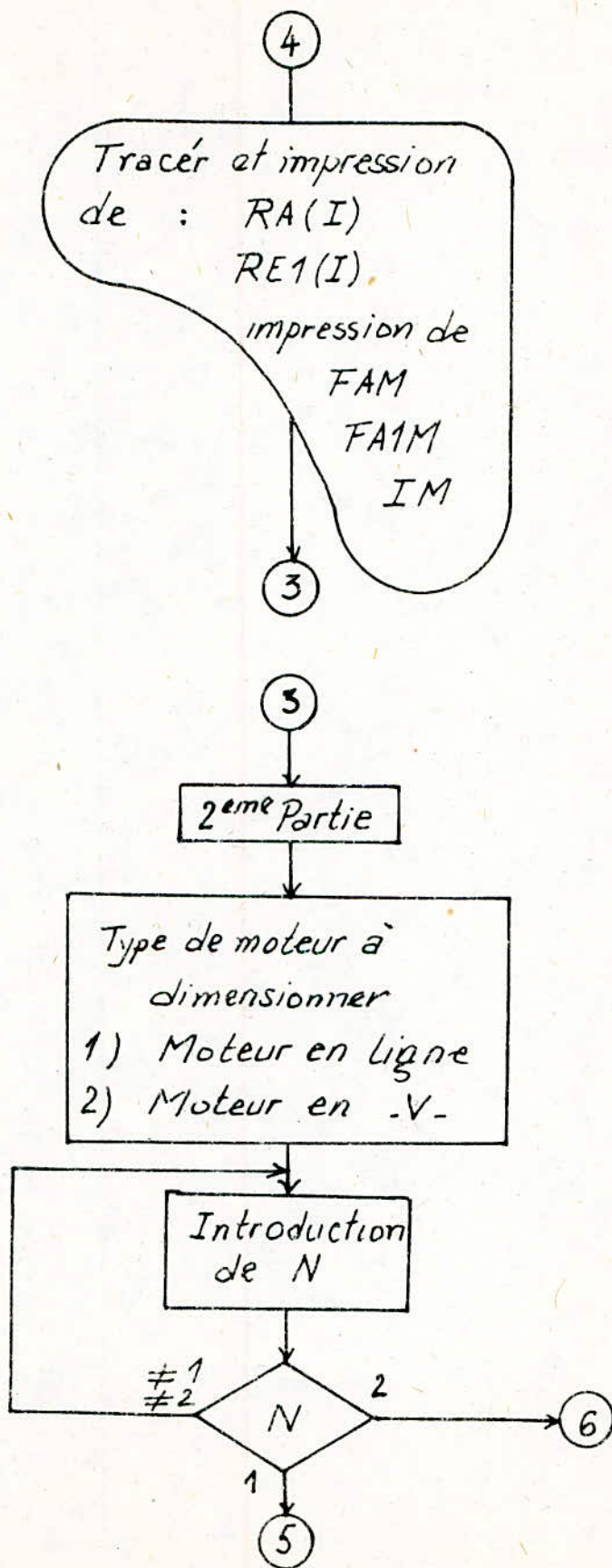
$$det_3 \gg \left[\frac{32}{\pi \cdot (1-k^4) \cdot \tilde{\sigma}_{Gtv'ab}} \cdot (0,35 M_{f_{tv'}} + 0,65 \cdot \sqrt{M_{f_{tv'}}^2 + M_{t_{tv'}}^2}) \right]^{\frac{1}{3}}$$

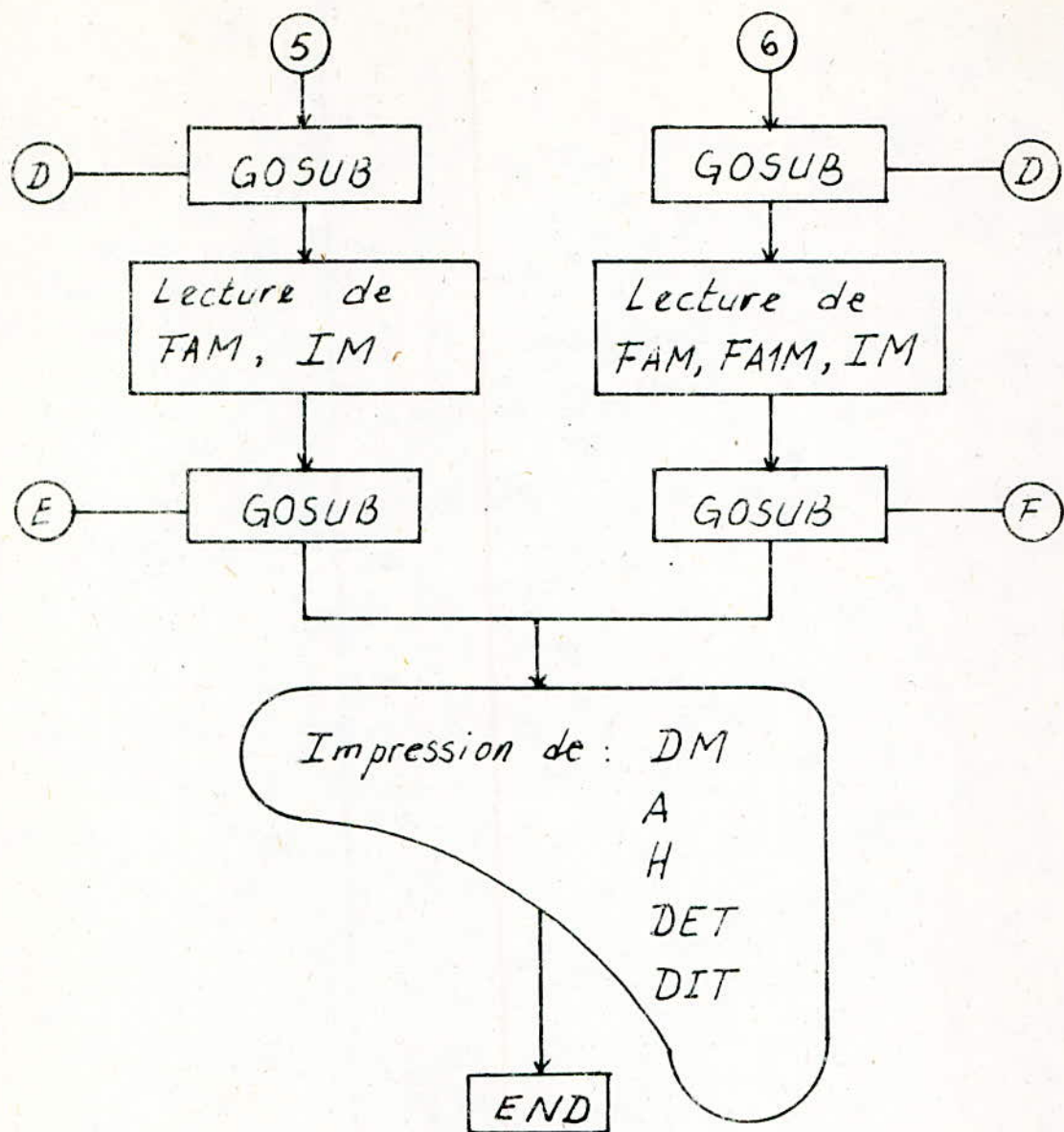
d'où $det \gg \text{Sup}(det_1, det_2, det_3)$, $d_{it} = k det$.

V ORGANIGRAMME









Sous Programme (A) :

Le sous programme (A) permet de calculer :
les différentes pressions du cycle thermodynamique.

Sous Programme (B) :

Le sous programme (B) permet de calculer :
les efforts $X_A, Y_A, X_E, Y_E, F_A, R_E$

Sous Programme (C) :

Le sous programme (C) permet de calculer :

Les efforts $X_A, Y_A, X_{A1}, Y_{A1}, X_{E1}, Y_{E1}, F_A, F_{A1}, R_{E1}, R_A$

Sous programme (D) :

Lecture des données.

$SG11, SG12, SG13, SG21, SG22, SG23, SGC, SGC1$ et k

Sous programme (E)

Le sous programme (E) permet de calculer les dimensions de la manivelle d'un vilebrequin d'un moteur en ligne :

DM, A, H, DET et DIT .

Sous Programme (F)

Le sous programme (F) permet de calculer les dimensions de la manivelle d'un vilebrequin d'un moteur en V

DM, A, H, DET et DIT .

Notations utilisées dans l'organigramme.

Les notations utilisées dans cet organigramme autre que celle qui ont déjà été définies sont :

Pas : le Pas de calcul

CR : La course du piston

DA : L'alésage du piston

ES : Le taux de compression

G : angle du V

FAM : effort tangentiel maximal de la bielle 1

IM : angle correspondant exprimé en degré

FAMM : effort tangentiel maximal de la bielle en fourche

SG11 : contrainte de flexion du maneton due à l'effort de pression

SG21 : contrainte globale du maneton due à l'effort tangentiel maximal

SG12 : contrainte de flexion des bras due à l'effort de pression

SGC : contrainte à la compression des bras due à l'effort de pression

SG22 : contrainte globale des bras due à l'effort tangentiel maximal

SG13 : contrainte de flexion des tourillons due à l'effort de pression

SGC1 : contrainte de cisaillement des tourillons due à l'effort de pression

SG23 : contrainte globale des tourillons due à l'effort tangentiel maximale.

DM : Diamètre du maneton

A : Epaisseur des bras

H : Largeur des bras

DET : Diamètre extérieur des tourillons

DIT : Diamètre intérieur des tourillons

k : Le rapport (DIT/DET)

CONCLUSION

Le dimensionnement de la manivelle d'un vilebrequin des moteurs multicylindres en ligne et en V, est conditionné par la détermination des actions mécaniques agissant sur la manivelle, et ainsi les contraintes résultantes sur les différents éléments qui la compose à savoir :

- Le maneton
- Les bras (ou Flasque)
- les tourillons .

Parmi les méthodes qui permettent de déterminer les efforts sur la manivelle, nous avons utilisé la méthode vectorielle qui révèle être la plus élaborée des méthodes mises à la disposition des constructeurs et qui s'adapte bien à une exploitation par ordinateur.

Pour terminer cette étude, on a jugé intéressant de mettre en évidence notre travail par une application sur un moteur fabriqué par la C.I.MO.TRA de type F4L912. En fin de compte les résultats ainsi obtenus sont dans l'ordre des résultats pratiques.

Esperons que ce modeste travail puisse enrichir le domaine de l'étude dynamique du système bielle-manivelle et le dimensionnement de la manivelle et ainsi contribuer à la compréhension de l'étude dynamique du moteur.

APPLICATION SUR UN MOTEUR F4L912

Les données utilisées dans cette application sont:

$$m_p = 1,635 \text{ kg}$$

$$m_b = 1,700 \text{ kg}$$

$$m_m = 2,800 \text{ kg}$$

$$\varepsilon = 17 \quad (\text{Taux de compression})$$

$$D = 0,1 \text{ m} \quad (\text{alésage du piston})$$

$$C = 0,12 \text{ m} \quad (\text{course})$$

$$L = 0,21 \text{ m} \quad (\text{l'entraxe de la bielle})$$

$$L_B = 0,14 \text{ m} \quad (\text{position du centre de gravité de la bielle par rapport à son pied})$$

$$I_z = 209,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

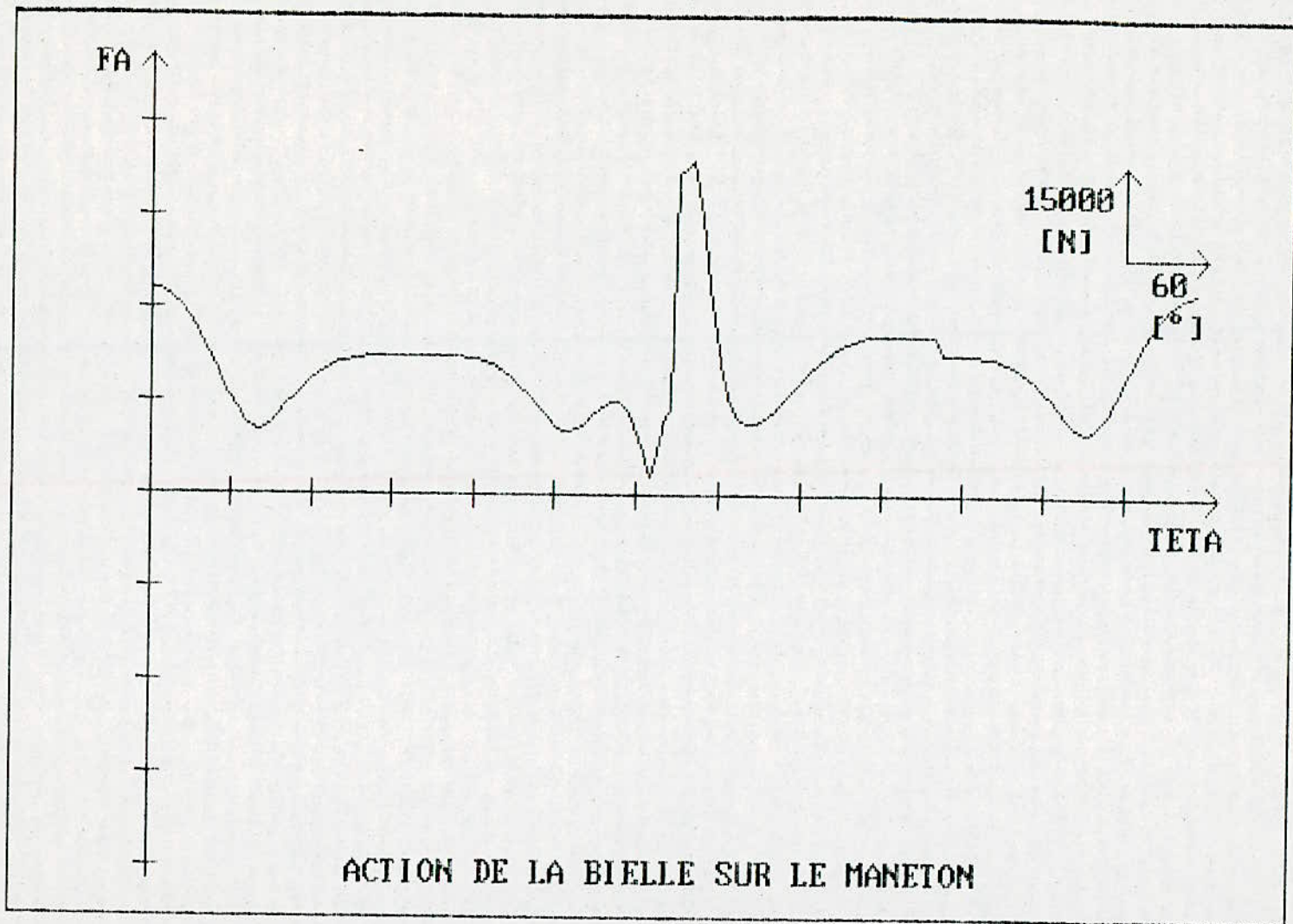
Pour le moteur en V on a pris les mêmes données avec un angle du V, $\alpha = 90^\circ$ qui est le moteur le plus équilibré.

Les contraintes admissibles du matériaux utilisé pour la manivelle, dues à l'effort de pression et l'effort tangentiel maximal sont successivement

- Maneton : $\sigma_{fad} = 15 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$, $\sigma_{gad} = 17 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$

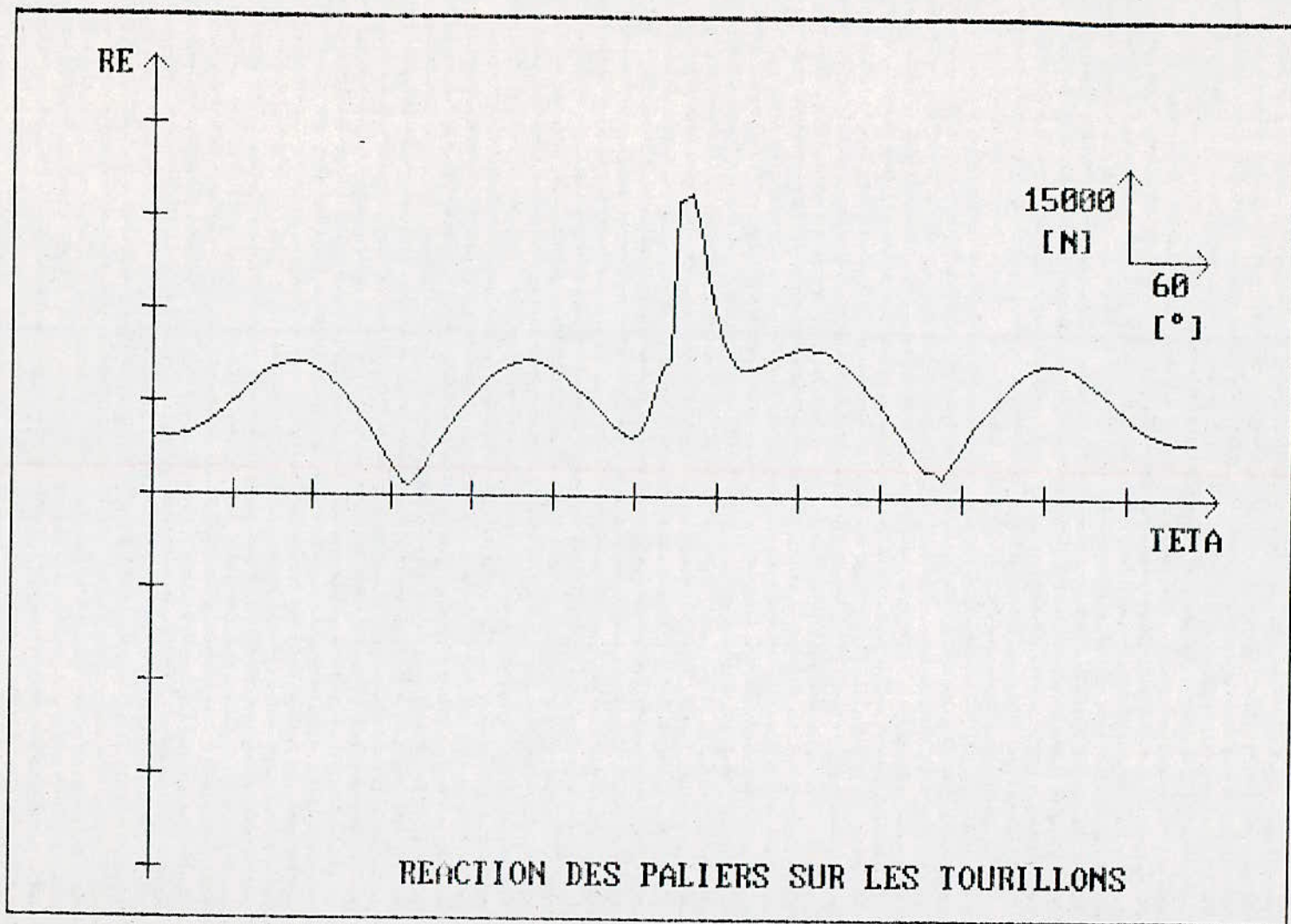
- Bras : $\sigma_{fad} = \sigma_{cab} = 14 \cdot 10^7$, $\sigma_{gab} = 13 \cdot 10^7 \dots$

- Tourillons : $\sigma_{fad} = \sigma_{ciad} = 6 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$, $\sigma_{gad} = 12 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$



MOTEUR EN LIGNE

ACTION DE LA BIELLE SUR LE MANETON



MOTEUR EN LIGNE

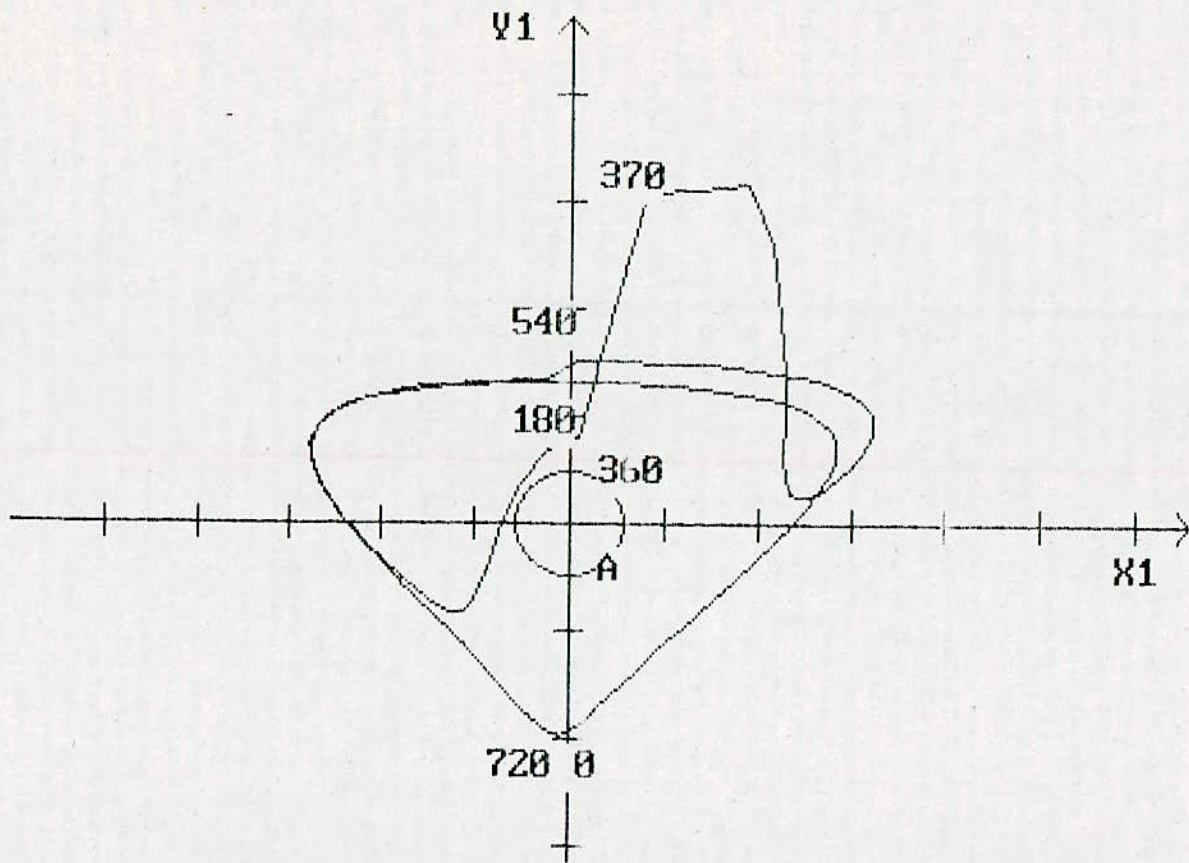


DIAGRAMME POLAIRE DE FA DANS LE REPERE
LIE AU MANETON

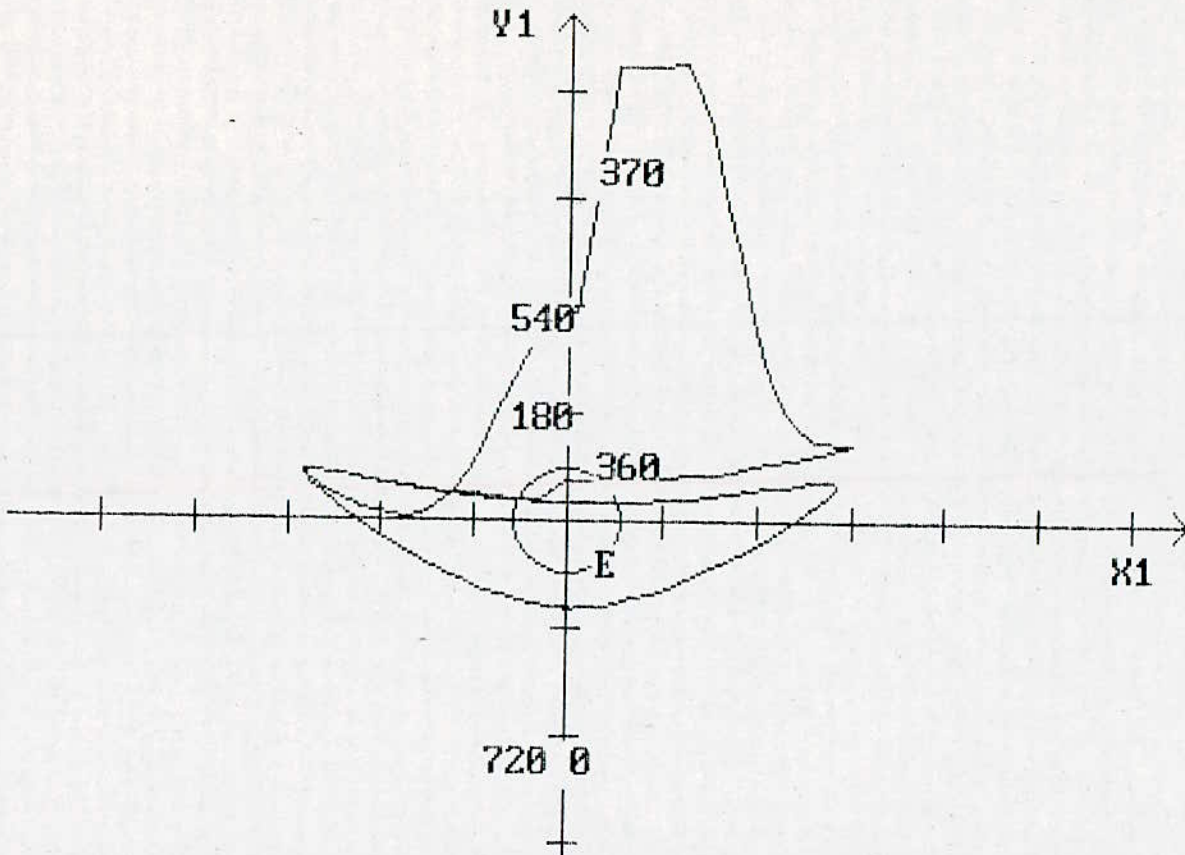


DIAGRAMME DE L'EFFORT EXERCE PAR LES PALIERS
SUR LES TOURILLONS LIE AU MANETON

*** M A N E T O N ***

=====

LE DIAMETRE DU MANEON DOIT ETRE \geq à : 41.36518 mm

*** B R A S ***

=====

L' EPAISSEUR A DES BRAS DOIT ETRE \geq à : 24 mm

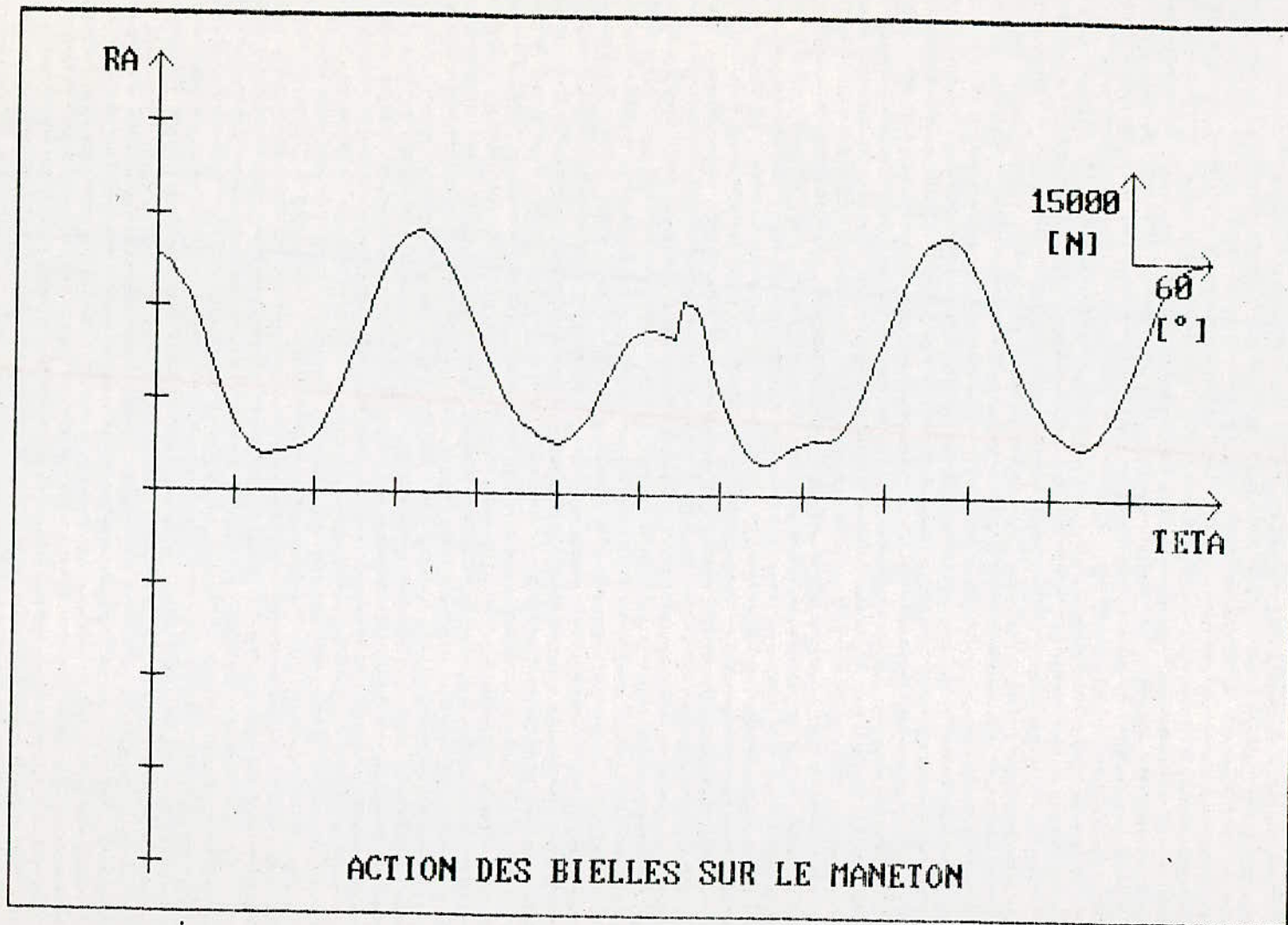
LA LARGEUR H DES BRAS DOIT ETRE \geq à : 48 mm

*** T O U R I L L O N S ***

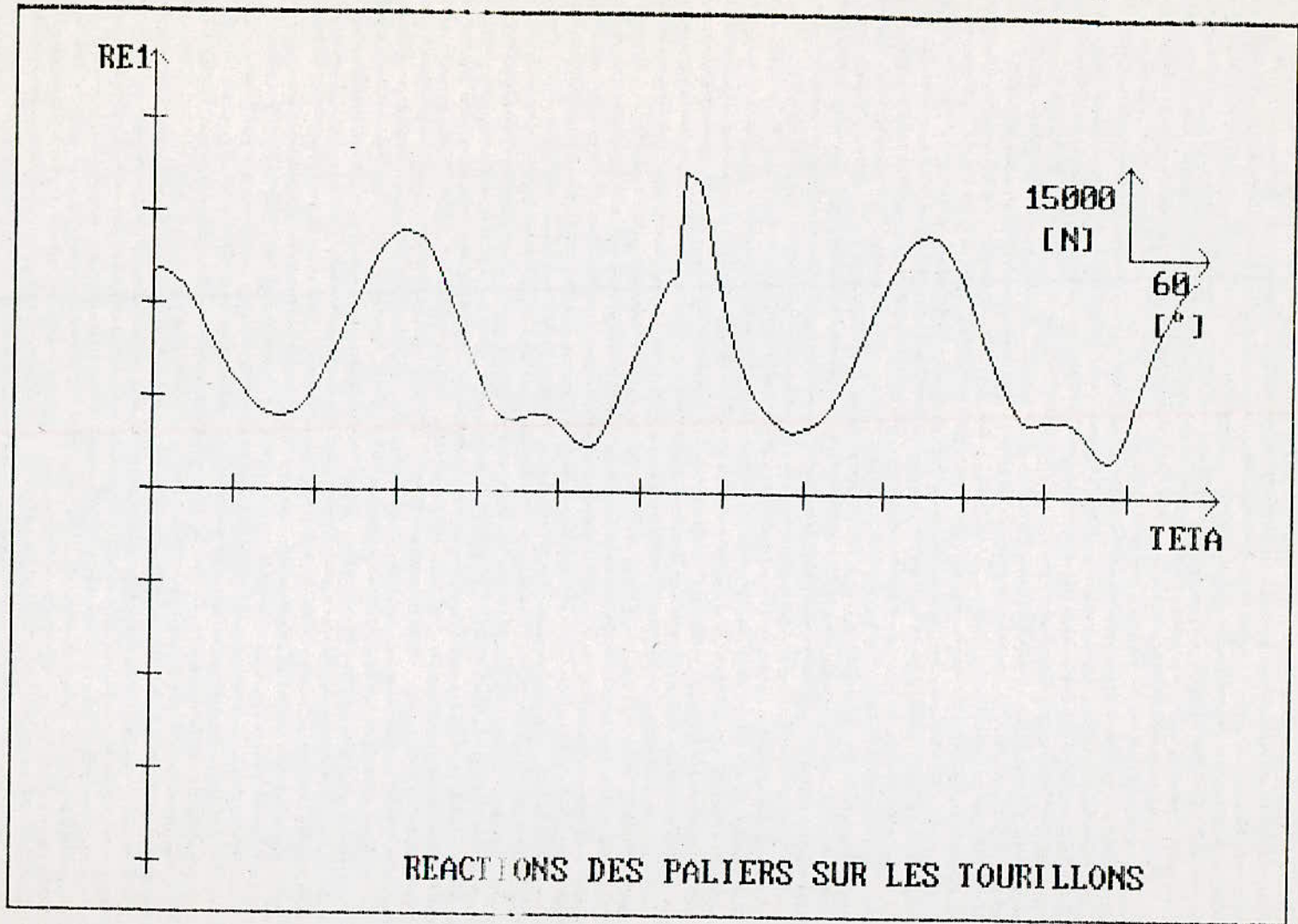
=====

LE DIAMETRE EXTERIEUR DOIT ETRE \geq à : 55.41186 mm

LE DIAMETRE INTERIEUR DOIT ETRE \geq à : 22.16474 mm



MOTEUR EN - V-



MOTEUR EN - V -

*** M A N E T O N ***

=====

LE DIAMETRE DU MANEON DOIT ETRE \geq à : 32.38457 mm

*** B R A S ***

=====

L'EPAISSEUR A DES BRAS DOIT ETRE \geq à : 24.02681 mm

LA LARGEUR H DES BRAS DOIT ETRE \geq à : 48.05363 mm

*** T O U R I L L O N S ***

=====

LE DIAMETRE EXTERIEUR DOIT ETRE \geq à : 58.73657 mm

LE DIAMETRE INTERIEUR DOIT ETRE \geq à : 23.49463 mm

BIBLIOGRAPHIE

- B.SWOBODA Mécanique des moteurs alternatifs
Société des éditions technip
- M.SERRUYS Moteur à combustion interne
Etude et réalisation mécanique du moteur
Edition scientifique RIBER
- R. BRUN Science et technique du moteur diesel
industriel et de transport tome 2
Société des éditions technip
- QUILLET Encyclopédie des sciences industrielles
- R.ROUDIL Moteurs diesel
DUNOD
- A.CAMPA Mécanique par les problèmes
R.CHAPPERT Résistance des matériaux
R.PICAND FOUCHER
- C. ELOY Calcul en construction mécanique
(aide mémoire)
DUNOD
- S.GOTTFRIED Programmation basic série schaum
Edition française Bernard LEGRAND

