



Ecole Nationale Polytechnique
Département d'Automatique
Laboratoire de Commande des Processus



Thèse de Doctorat en Automatique

Option : Automatique

Présentée par :

ZIOUI Nadjet

Magister en Automatique de l'ENP

Intitulé

Commande Multivariable Robuste des Systèmes. Etude et Applications

Soutenue publiquement le **07 / 05 / 2014** devant le jury composé de :

Président :	HEMICI Boualem	MCA	ENP, Alger
Rapporteurs :	TADJINE Mohamed	Professeur	ENP, Alger
	BOUCHERIT Mohamed-Seghir	Professeur	ENP, Alger
Examineurs :	SAARI Hammoud	Professeur	INSM, Bousmail
	BALI Nouredine	MCA	USTHB, Alger
	BENZINEB Omar	MCA	USD, Blida

ENP 2014

Dédicaces

A mes parents

A ma famille

A la mémoire de Fatima ...

Remerciements

Je remercie, avant tout le Bon Dieu pour absolument tout ...

Je remercie mes encadreurs Professeurs M. TADJINE et M-S. BOUCHERIT, pour leur encadrement et leurs précieux conseils ; merci de toujours mettre la barre un peu plus haut et m'aider à donner le meilleur de moi-même.

Ma profonde reconnaissance et mes vifs remerciements s'adressent au Professeur B. BOUADJAR, pour nous avoir ouvert les portes du service de Dermatologie du CHU de Bab El Oued.

Je remercie infiniment Docteur M. MOSTEFAI, pour sa collaboration et pour le partage de données pratiques.

Je remercie enfin ma petite maman pour toutes nos séances de travail, pour le partage d'idées ... Merci d'être ma source d'inspiration. Merci maman pour tout du fond du cœur.

Table des matières

I	INTRODUCTION GÉNÉRALE	8
II	PRÉSENTATION DES OUTILS MATHÉMATIQUES UTILISÉS DANS LE CADRE DE CETTE THÈSE	11
1	Sur les Automates Hybrides.	11
1.1	Introduction.	11
1.2	Définition et composantes.	11
2	Sur les Équations aux Dérivées Partielles. (EDP)	12
2.1	Les types d'équations aux dérivées partielles	12
2.2	Discrétisation et convergence des algorithmes	14
3	Sur les modèles à compartiments.	15
4	Sur l'algèbre de Lie et le calcul matriciel.	15
4.1	Rappels des notions de base	15
4.2	Analyse de la commandabilité	17
4.3	Commande MIMO linéarisante par géométrie différentielle	18
5	Sur l'inversion matricielle.	19
6	Sur la commande multivariable robuste.	20
6.1	Sur la commande adaptative	20
6.1.1	Généralités	20
6.1.2	La commande adaptative MIMO	21
6.2	Sur la commande par Modes Glissants et ses variantes	23
6.2.1	Technique des Modes de Glissement d'ordre 1	23
6.2.2	Technique des Modes de Glissement d'ordre 1 généralisée au cas MIMO	24
6.2.3	Technique des Modes de Glissement d'ordre supérieur à 1	24
6.2.4	Sur le Twisting algorithm	25
6.2.5	Sur le Super-Twisting algorithm	25
7	Sur la théorie de croyance	26
7.1	Généralités et rappel de quelques notions	26
7.1.1	Définition	26
7.1.2	Sur le nombre de masse	27
7.1.3	Définition alternative de la fonction de croyance	27
7.1.4	Propriétés et cas particuliers	27
7.1.5	Sur la normalisation de la fonction de masse	27
7.1.6	Sur la combinaison des informations	28

7.1.7	Sur l'affaiblissement	28
7.2	Concept de la commande de confiance	28
7.2.1	La <i>commande de confiance</i> pour les systèmes SISO	28
7.2.2	La <i>commande de confiance</i> pour les systèmes MIMO	29

III ÉTUDE COMPARATIVE ENTRE PLUSIEURS TECHNIQUES DE COMMANDES ROBUSTES APPLIQUÉES A L'ÉOLIENNE 31

8	Sur les éoliennes.	31
8.1	Motivations.	31
8.2	Généralités et définitions de base.	32
8.2.1	Le vent.	32
8.2.2	Les types d'éoliennes.	32
8.3	Constituants de base.	35
8.4	Zones de fonctionnement d'une éolienne.	35
9	Présentation du système.	35
9.1	Sous-système aérodynamique.	36
9.2	Le sous-système de couplage mécanique (Multiplicateur).	36
9.3	Le sous-système génératrice et son système de pilotage.	37
10	Modélisation mathématique.	38
10.1	Modélisation analytique.	38
10.1.1	Modèle du sous-système aérodynamique.	38
10.1.2	Modèle du sous-système de couplage mécanique.	39
10.1.3	Modèle du sous-système génératrice et sous-système de pilotage.	40
10.1.4	Le Convertisseur de puissance	41
10.2	Mise sous forme d'Automate Hybride.	43
11	Synthèse des lois de commande.	47
11.1	Étude de la commandabilité	48
11.2	La commande classique par Backsteeping avec retour d'état simple	51
11.3	La commande par Modes Glissants simple	53
11.4	La commande par Modes Glissants-2 avec fonction filtre	54
11.4.1	Principe.	54
11.4.2	Application.	55
11.5	La commande adaptative	56
11.6	La commande "Twisting Algorithm"	58
11.7	La commande du convertisseur de puissance	59
12	Simulations et résultats.	59
12.1	Séquence de vitesses de vent considérée	59
12.2	Activité des switches	59

12.3	Résultats de la commande par Backstepping	61
12.4	Résultats de la commande classique par modes glissants	64
12.5	Résultats de la commande glissante d'ordre 2 sans fonction filtre, puis avec fonction filtre	64
12.6	Résultats de la commande adaptative	64
12.7	Résultats de la commande Twisting Algorithm	66
12.8	Signaux du convertisseur de puissance	66

IV ÉTUDE COMPARATIVE ENTRE PLUSIEURS TECHNIQUES DE COMMANDES ROBUSTES APPLIQUÉES À LA TUMEUR 68

13 Sur le cancer de la peau. 68

13.1	Généralités et définitions de base	68
13.1.1	Les origines du cancer.	69
13.1.2	Génétique et différents processus.	70
13.2	Le cancer de la peau et ses différents types	72
13.2.1	La peau.	72
13.2.2	Les cancers de la peau	72
13.2.3	Facteurs risque et prévention.	73
13.2.4	Symptômes et diagnostic.	74
13.3	Cycle cellulaire	75
13.3.1	Définition des phases du cycle cellulaire.	75
13.3.2	Régulation du cycle cellulaire.	77

14 Présentation et Modélisation du système. 79

14.1	Modélisation à base d'équations aux dérivées partielles.	79
14.1.1	Modèle avec trois types de cellules.	79
14.1.2	Modèle avec deux types de cellules.	83
14.1.3	Modèle avec un types de cellules.	83
14.1.4	Discrétisation du modèle avec trois types de cellules.	83
14.2	Modélisation à base de phases de cycle cellulaire.	84
14.2.1	Modèle à n compartiments.	84
14.2.2	Modèle à un seul compartiment.	85
14.2.3	Modèle à deux compartiments.	86
14.2.4	Modèle à trois compartiments.	88
14.2.5	Modélisation par des Automates Hybrides.	88

15 Synthèse des lois de Commande 92

15.1	Étude de la commandabilité	92
15.2	La commande par Modes de Glissement	94
15.3	La <i>commande de confiance</i> appliquée aux tumeurs	100
15.4	Application de la commande Super-Twisting	101

15.5 Synthèse de la commande classique PI, non robuste, à titre comparatif	102
16 Simulations et résultats.	102
16.1 Résultats de la commande de confiance	103
16.1.1 Simulations en boucle fermée	103
16.1.2 Simulations en boucle ouverte	103
16.1.3 Énergies de commande	105
16.2 Résultats de la commande par Modes de Glissement	105
16.3 Résultats de la commande Super-Twisting	107
16.4 Résultats de la commande classique PI	109
V CONCLUSION GÉNÉRALE	111
17 Annexes	113
17.1 Annexe (Rappel de quelques opérateurs mathématiques)	113
17.1.1 Le gradient	113
17.1.2 La divergence	113
17.1.3 Le rotationnel	113
17.1.4 Le Laplacien	113
17.1.5 Quelques formules de base	114
17.2 Annexe (Loi de Darcy)	114
17.3 Annexe (Conservation de la matière)	114
17.4 Aspects pratiques	115
17.4.1 Définition du système	115
17.4.2 Modélisation du système	115
17.4.3 Application de la commande de confiance	116
17.4.4 Rappel et application de la commande linéaire quadratique	116
17.4.5 Simulations et comparaison au données pratiques	117

Première partie

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'apparition de l'amplificateur à retour négatif avant la deuxième guerre mondiale a constitué un grand pas vers la commande avec chaîne de retour. De nombreux travaux à l'image de ceux de Bode (1932), Nyquist (1964) et Black (1977) ont permis de mettre en évidence l'étude de la stabilité dans le domaine fréquentiel.

La conception de la chaîne de Feedback en considérant les essais/erreurs a été l'objet principal des travaux durant les années 40. De telles études sont d'actualité à nos jours. L'approche consistait alors de définir des performances typiques au préalable, puis de modifier les lois de commande au fur et à mesure de manière itérative, jusqu'à obtention du meilleur compromis. La commande optimale a alors vu le jour vers la fin des années 50, où il a été montré qu'un retour optimal pouvait être établi en exprimant les objectifs sous forme d'intégrale du carré d'erreur de manière analytique, sans procéder par tâtonnement. La technique a été généralisée par la suite en particulier par Kalman.

Dans un même esprit de reprendre le principe de la commande optimale, la commande H_2 fit son apparition et a suscité l'intérêt des chercheurs pendant une vingtaine d'années, aboutissant à la parution de certaines approches importantes, vers la fin des années 70, notamment l'introduction de Yola (1976) de l'approche de paramétrisation du régulateur de manière effective, ainsi que la considération de Zames (1981) de la norme H_∞ en substitution de la norme H_2 , laissant place ainsi à de nombreux travaux relatifs à la commande optimale par H_∞ , ainsi que le concept de la stabilité robuste par Doyle, ou des performances robustes en présence d'incertitudes ou performance au normes majorées.

De manière parallèle à ces développements dans les domaines mathématiques et Génie Électrique, les techniques de la commande algorithmique à modèle (model algorithmic control - 1978) ainsi que la commande à matrice dynamique (dynamic matrix control - 1979) ont émergé, particulièrement cette dernière qui a été introduite et appliquée avec succès pour les problèmes de commande de systèmes complexes en industrie. [71]

La synthèse des lois de commandes robustes concernant les systèmes multivariables n'est pas très présente dans la littérature trouvée à l'exception de certaines généralisations de l'analyse des systèmes monovariables.

Les techniques généralement appliquées lors de la synthèse de commande pour les systèmes MIMO reposent sur la commande décentralisée, très utilisée en robotique, ainsi que la commande linéarisante par géométrie différentielle, aboutissant à des systèmes SISO découplés, permettant l'application des notions et techniques de commande robuste déjà développées et bien connues pour ce type de systèmes.

Nous utiliserons principalement cette dernière technique lors de l'élaboration des lois de commande dans notre document.

Notre thèse se présente en deux grands volets, qui résument deux applications relatives à la commande de l'évolution des tumeurs d'une part, et à la problématique de poursuite de courbe de puissance pour les éoliennes.

L'intérêt des chercheurs est de plus en plus croissant à l'égard des éoliennes. Cet intérêt est orienté principalement vers l'optimisation des structures mécaniques lors de la conception, vers l'électronique de puissance et la connexion au réseau ou vers la synthèse des lois de commande qui traite du problème de l'extraction de la puissance optimale, de même pour la robustesse de ces lois de commande vis à vis des perturbations et des erreurs de modélisation [13], [18], [32], [45], [47], [48], [51], [70], [84], [85], [86], [87].

L'importance de la robustesse des régulateurs n'est plus à démontrer. En effet des erreurs durant le processus de modélisation risquerait d'entraîner une mauvaise synthèse des lois de commande, et donc une mauvaise qualité de la puissance extraite. Ceci peut même engendrer des perturbations qui seront transmises au réseau tout au long du système.

Plusieurs articles dans la littérature ont traité du problème de commande des éoliennes [51], [86], [13]. Certaines solutions ont été suggérées afin de prendre en considération le souci de la robustesse, principalement des techniques basées sur l'estimation des nonlinéarités du système, ou la conception d'observateurs ou même la description structurée des incertitudes avec des régulateurs additionnels usuels tels que la commande PI classique ou même le retour d'état.

Dans le cadre de notre document, nous suggérons de résoudre le problème de robustesse par l'utilisation de certaines techniques de commande à l'image de la commande par modes de glissement classique et d'ordre 2, la commande adaptative ainsi que la commande par Twisting Algorithm. La commande par retour d'état simple sera également illustrée à des fins de comparaison, afin de souligner l'importance de la notion de robustesse lors de la synthèse des lois de commandes, et ses répercussions sur les résultats.

Quant à la deuxième application, l'intérêt des chercheurs pour l'étude, et plus spécifiquement la modélisation mathématique de l'évolution des tumeurs ne date pas d'hier. Cette modélisation mathématique a pour objectif principal la prédiction de l'évolution et du comportement dynamique de la tumeur, afin de pouvoir établir le traitement le mieux adapté.

Les modèles mathématiques proposés décrivent la dynamique des concentrations cellulaires dans la région tumorale. Les techniques d'élaboration de ces modèles se basent principalement sur les équations à dérivées partielles, ou sur le principe des modèles à compartiments [15], [17], [31], [38], [43], [57], [60], [80], [91], [24], [54], [9], [44], [82], [90], [67], [23], [99], [97], [100], [98].

Nous sommes convaincus que ces deux méthodes présentent des équivalences sous certaines suppositions et hypothèses simplificatrices.

L'approche des équations à dérivées partielles procure plus de précision lors de l'élaboration du modèle. Elle consiste à considérer les différents types de cellules et de substances dans la région tumorale, et de modéliser leurs concentrations correspondantes grâce à des équations de diffusion. Cependant, le système d'équations aux dérivées partielles résultant s'avère quelque peu complexe à résoudre et peut nécessiter des approximations et des techniques numériques de résolution qui introduisent des erreurs et des incertitudes.

Le modèle basé sur la technique des compartiments est relativement simple à implémenter. Cependant, il est moins précis que la technique précédente. Afin d'améliorer la précision de cette technique, un nombre élevé de compartiments devra être considéré, avec des paramètres constants et parfaitement connus, ce qui n'est pratiquement pas possible.

La modélisation mathématique d'un processus peut engendrer certaines erreurs dues à quelques

dynamiques ignorées ou omises. Les erreurs peuvent également provenir des incertitudes de la mesure, de la précision des algorithmes et des techniques d'identification des paramètres du modèle, sans oublier les approximations et les hypothèses simplificatrices.

La robustesse s'avère une caractéristique de poids à prendre en considération lors de la synthèse des lois de commande.

Grâce à l'évolution récente dans les techniques de contrôle du cycle cellulaire [66], de même pour les stratégies de commande [41], [46], [52], [55], [63], [65], les modèles et les thérapies sont en constante évolution [34], et certaines méthodes de commande ont été suggérées [57], [60], [91].

L'objectif principal dans cette partie est de présenter un nouveau concept de commande robuste basé sur la théorie de croyance. Technique que nous appellerons : *commande de confiance*.

La théorie de croyance a donné des résultats très satisfaisants dans de nombreux domaines, à l'image de la localisation des robots mobiles, le traitement d'image, le diagnostic médical ... etc. Cette approche a même été utilisée dans l'estimation d'état [76], [77].

La méthodologie que nous suggérons pour la conception de la commande de confiance repose sur la base de la théorie de croyance, en posant les questions appropriées et en considérant les sources adéquates d'information .

La robustesse de la loi de commande est primordiale, particulièrement pour des systèmes délicats où l'on n'a pas droit à l'erreur. C'est pour cette dernière raison que la commande de confiance a été établie de sorte à ne faire confiance qu'aux valeurs mesurées, et celles calculées, avec des degrés de confiances appropriés.

Comme application, l'évolution tumorale, considérée comme étant notre système, est présentée par ses modèles mathématiques. Le modèle adopté est celui reposant sur le principe des compartiments car très répandu et utilisé pour la description des systèmes biologiques et chimiques [30], [52], [50], [74], [16]. Plus spécifiquement, trois compartiments sont considérés.

Cette technique de commande sera simulée et ses résultats analysés et comparés à ceux d'autres techniques de commande robustes qui seront également illustrées pour ce système, dans une optique de comparaison, à l'image de la commande par Modes de Glissement et la commande par l'algorithme Super-Twisting. La commande PI classique sera également appliquée à titre illustratif.

Notre intérêt pour ces deux applications réside dans un souci de variété de modèles et d'applications. Deux modèles nonlinéaires et multivariés sont considérés à la base, avec un modèle carré fortement couplé pour l'application du système électrique en l'occurrence l'éolienne, et une deuxième application sur un système biologique rectangulaire. L'aspect linéaire des systèmes est indirectement traité puisque ces systèmes représentent un cas particulier de l'étude qui a été faite de manière générale pour les systèmes nonlinéaires. La considération des différents modes de fonctionnement de ces deux processus précédents a abouti à des modèles sous forme d'Automates Hybrides, considération qui ajoute une autre dimension aux modèles considérés.

Deuxième partie

PRÉSENTATION DES OUTILS MATHÉMATIQUES UTILISÉS DANS LE CADRE DE CETTE THÈSE

1 Sur les Automates Hybrides.

1.1 Introduction.

Un système hybride est un système dynamique qui présente un comportement à la fois discret et continu. Les systèmes hybrides trouvent leur application au niveau des systèmes industriels comme les robots, les systèmes microélectroniques et les équipements médicaux. Pour la modélisation de nos systèmes qui présentent la propriété d'être hybrides, nous utilisons un automate hybride qui est un modèle mathématique pour modéliser un système hybride. Il se présente comme un seul formalisme qui combine un automate de transitions pour représenter les changements discrets et des équations différentielles pour représenter les changements continus [21].

1.2 Définition et composantes.

Les Automates hybrides consistent en un ensemble fini de variables et un multigraphe ; des sommets et des arcs. Les arcs représentent les transitions discrètes sous des conditions d'affectation sur les variables. Les sommets décrivent l'évolution continue du système sous des contraintes dynamiques. Les Automates Hybrides se composent de [21] :

1. Variables réelles X ; mises sous forme vectorielle, dont une partie Y est commandable, ainsi qu'une évaluation de ces variables notée A .
2. Modes de commande ; ce sont les sommets représentés par l'ensemble V .
3. Condition d'invariance ; c'est un prédicat sur X - combinaison booléenne d'inégalités en fonction des variables de l'ensemble X - affecté à chaque mode de commande v de l'ensemble V .
4. Condition de flux ; une fonction flux affecte à chaque mode de commande une condition de flux, cette condition est un prédicat défini sur l'ensemble des variables X et leurs dérivées premières par rapport au temps.
5. Conditions initiales ; à chaque mode de commande est affectée une condition initiale qui est un prédicat sur X . Le contrôle de l'Automate Hybride doit commencer à partir du mode de commande où la condition initiale est aussi une condition d'invariance.

6. Commutation de commande ; est un couple de modes de commande (v, v') ; source et cible respectivement. L'ensemble des commutations de commande E contient un nombre fini d'arcs.
7. Conditions de saut ; c 'est un prédicat sur l'ensemble $X \cup Y'$, les y_i et y'_i représentent respectivement les valeurs commandables avant et après les commutations de commande. Seules les variables commandables sont mises à jour après commutation.
8. Évènement ; une fonction évènement affecte à chaque commutation de commande un évènement ou encore une action.

2 Sur les Équations aux Dérivées Partielles. (EDP)

Dans cette partie, des notions sur les Équations aux Dérivées Partielles (EDP) seront présentées [83], [29], [79], [94]. Certains types d'EDP usuelles les plus rencontrées dans la physique seront abordées et la résolution de celles-ci discutée.

2.1 Les types d'équations aux dérivées partielles

Une Équation aux Dérivées Partielles (EDP) est une relation entre une fonction inconnue z des variables indépendantes $x, y, t \dots$ et les dérivées partielles de z par rapport à $x, y, t \dots$ jusqu'à un ordre quelconque, soit (Eq. 1). Son ordre est celui de la dérivée partielle la plus élevée. Sa solution intégrale est toute fonction qui vérifie cette équation.

$$F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots etc \right) = 0 \quad (1)$$

Une EDP du premier ordre est de la forme (Eq. 2), et la forme générale d'une EDP du second ordre est (Eq. 3)

$$F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0 \quad (2)$$

$$F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (3)$$

$$A(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad (4)$$

Les équations les plus étudiées sont de la forme (Eq. 4), on en distingue les trois cas suivants

- $B^2 - AC > 0$ L'équation est dite hyperbolique (Équation des cordes vibrantes ou de D'Alembert)
- $B^2 - AC = 0$ L'équation est dite parabolique (Équation de chaleur ou de Fourier)

- $B^2 - AC > 0$ L'équation est dite elliptique (Équation du potentiel ou de Laplace)

On s'intéressera, particulièrement, dans ce qui suit, au deuxième type d'équations (paraboliques), puisqu'il s'agit, dans notre cas (Chapitre IV), de modéliser un phénomène de diffusion.

La plupart des phénomènes de diffusion sont régis par l'équation de chaleur (Eq. 5).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \Delta u \quad (5)$$

Tel que $\Delta u = \text{div}(\text{grad}(u))$

L'équation de chaleur (Eq. 5) s'écrit dans un repère orthonormé sous la forme (Eq. 6). S'agissant d'un problème unidimensionnel, cette équation se met sous la forme (Eq. 7).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7)$$

Si l'on pose $k^2 = 1$ (changement d'échelle sur l'axe des x), la solution de (Eq. 7), telle que $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = g(x)$, deviendra (Eq. 8)

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) g(x) dy \quad (8)$$

L'équation de diffusion, dans \mathbb{R} , avec second membre se donne par (Eq. 9), et sa solution, telle que $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = g(x)$, est donnée dans (Eq. 10)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x, t) \quad (9)$$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) g(x) dy + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4s}\right) h(y, t-s) dy \quad (10)$$

Dans l'espace \mathbb{R}^2 , la solution de $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, vérifiant $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x, y) = f(x, y)$, est donnée en (Eq. 11). La fonction $\frac{1}{4\pi t} \exp\left(-\frac{1}{4t}(x^2 + y^2)\right)$ étant sa solution fondamentale.

$$u(t, x, y) = \frac{1}{4\pi t} \iint \exp\left(-\frac{1}{4t} \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \right] \right) f(x, y) d\xi d\eta \quad (11)$$

Dans l'espace \mathbb{R}^3 , la solution s'écrit comme indiqué en (Eq. 12)

$$\iiint \exp\left(-\frac{1}{4t} \left[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2 \right] \right) f(x_1, x_2, x_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (12)$$

La solution de (Eq. 7) sur $a < x < b$ est obtenue (Eq. 13), en posant $y = x - a$.

$$w(y, t) = u(k(y + a), t) \quad (13)$$

La commande ainsi que les différentes simulations de nos systèmes, se font généralement de façon numérique. Une discrétisation spatiotemporelle est donc nécessaire.

2.2 Discrétisation et convergence des algorithmes

Afin d'établir l'aspect numérique du problème, l'approche la plus évidente consiste à définir un réseau régulier, ou une sorte de maillage spatiotemporel. La région normalisée $0 \leq x, y, z \leq 1$ est subdivisée en un nombre de petits éléments, en traçant des droites orthogonales à travers cette région. Un point de cette région est repéré par (x_i, y_j, z_k) , tels que

$$\begin{cases} x_i = x_0 + ih \\ y_j = y_0 + jh \\ z_k = z_0 + kh \end{cases} \quad i, j, k = 0, \dots, N \quad (14)$$

Avec h Le pas de discrétisation spatiale, tel que $Nh = 1$.

On note par u_{ijk}^n l'approximation de la solution exacte $u(x_i, y_j, z_k, \Delta_t)$.

Δ_t Étant le pas de discrétisation de l'échelle du temps.

Reste à définir l'algorithme d'intégration.

L'approche la plus naturelle consiste à utiliser l'algorithme d'Euler. On approxime la dérivée temporelle $\frac{\partial u}{\partial t}$ par (Eq. 15), et l'expression $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ par (Eq. 16)

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{ijk}^{n+1} - u_{ijk}^n}{\Delta_t} \quad (15)$$

$$\Delta u \approx \frac{1}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2) u_{ijk}^n \quad (16)$$

Tels que les opérateurs δ_x^2 , δ_y^2 et δ_z^2 , appliqués à u_{ijk}^n , sont donnés par (Eq. 17)

$$\begin{cases} \delta_x^2 u_{ijk}^n = u_{i+1,jk}^n - 2u_{ijk}^n + u_{i-1,jk}^n \\ \delta_y^2 u_{ijk}^n = u_{i,j+1,k}^n - 2u_{ijk}^n + u_{i,j-1,k}^n \\ \delta_z^2 u_{ijk}^n = u_{ij,k+1}^n - 2u_{ijk}^n + u_{ij,k-1}^n \end{cases} \quad (17)$$

Il est important, avant toute implémentation, de s'assurer de la stabilité et de la convergence d'un algorithme. Pour cela, les modes propres de l'équation ayant la forme (Eq. 18) seront définis.

$$C_{ijk}^{n+1} = \xi^n (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) e^{ik(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)} \quad (18)$$

Tels que

$\xi (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ Le module du mode propre

ι Un nombre complexe ($\iota = \sqrt{-1}$)

Ω_1, Ω_2 et Ω_3 Les fréquences (pulsations) du mode propre

La condition suffisante pour que l'algorithme soit stable et convergent est que le module du mode propre soit inférieur à 1 (Eq. 19).

$$|\xi (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)| < 1 \quad (19)$$

3 Sur les modèles à compartiments.

Le modèle basé sur le principe des compartiments est le modèle mathématique le plus utilisé dans la description des phénomènes et comportements biologiques [30], [57], [60]. Ce modèle se base principalement sur la définition des différentes étapes ou phases d'une évolution temporelle, et l'affectation d'un compartiment à chacune des étapes. On peut donc avoir autant de compartiments que de phases. Ceci ne signifie en aucun cas que ces compartiments seraient physiquement séparés, comme tel est le cas concernant les phénomènes chimiques, à titre d'exemple, où l'on a à la fois les composants chimiques initiaux et les résultats de la réaction dans la même solution en même temps.

On admet que la transition entre deux compartiments a lieu selon les équations (Eq. 20).

$$\begin{cases} \dot{N}_j = r_{j-1}N_{j-1} - r_jN_j \\ \dot{N}_{j+1} = r_jN_j - r_{j+1}N_{j+1} \end{cases} \quad (20)$$

Telle que N_j représente la concentration de la substance dans le $j^{ième}$ compartiment et r_j la constante de temps décrivant la dynamique de la transition du $j^{ième}$ vers le $(j+1)^{ième}$ compartiment.

En observant, par exemple, le $j^{ième}$ compartiment, l'on verra alors que les quantités y entrant et en sortant sont respectivement N_{j-1} et N_j , avec les dynamiques respectives $r_{j-1}N_{j-1}$ et r_jN_j .

On peut dire, finalement, que la dynamique d'évolution a une allure exponentielle, et noter que N_j quitte le $j^{ième}$ compartiment pour entrer dans le $(j+1)^{ième}$ et ainsi de suite.

4 Sur l'algèbre de Lie et le calcul matriciel.

4.1 Rappels des notions de base

Définition 1. Soit h une fonction de classe C^1 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . On appelle dérivée de Lie de h dans la direction f , notée $L_f h$, la fonction scalaire

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x_i}$$

Par cette formule, un champ de vecteurs f quelconque est identifié à l'opérateur différentiel linéaire L_f du premier ordre

$$L_f = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

L'itération de la dérivée de Lie se donne par

$$\begin{cases} L_f^k h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} \left(L_f^{k-1} h(x) \right) f(x) \\ L_f^0 h(x) = h(x) \end{cases}$$

Définition 2. Le crochet de Lie des champs de vecteurs $f \in \mathbb{R}^n$ et $g \in \mathbb{R}^n$ est le champ de vecteurs défini par

$$L_{[f,g]} = L_f L_g - L_g L_f$$

Ou encore ;

$$ad_f g = [f, g] = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(f_j(x) \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j(x) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Le crochet de Lie jouit entre autre de la propriété de l'antisymétrie

$$[g, f] = -[f, g]$$

L'itération du produit de Lie se donne par

$$\begin{cases} ad_f^k g(x) = [f, ad_f^{k-1} g(x)] \\ ad_f^0 g(x) = g(x) \end{cases}$$

Définition 3. Étant donné une application φ d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ dans un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^k , $k \geq 1$ (resp. analytique). On dit que φ est un difféomorphisme local de classe C^k (resp. analytique) dans un voisinage $U(x_0)$ d'un point x_0 de U , si φ est inversible de $U(x_0)$ dans un voisinage $V(\varphi(x_0))$ du point $\varphi(x_0)$ de V et si φ^{-1} est de classe C^k (resp. analytique).

On dit que φ est un homéomorphisme local de classe C^k (resp. analytique) si φ est de classe C^k (resp. analytique), localement inversible et son inverse est continue.

Les difféomorphismes locaux sont caractérisés par le résultat classique suivant :

Théorème. (d'inversion locale) Une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un difféomorphisme local de classe C^k , $k > 1$ au voisinage de x_0 est que son application linéaire tangente $D\varphi(x_0)$ soit bijective.

Remarque. L'application linéaire tangente $D\varphi(x_0)$, exprimée dans le système de coordonnées

locales x_1, x_2, \dots, x_n est au fait la matrice Jacobienne J définie par (Eq. 21). L'énoncé du théorème reviendrait, donc, à étudier l'inversibilité de cette matrice Jacobienne.

$$J = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (21)$$

4.2 Analyse de la commandabilité

La commandabilité fait partie des propriétés structurelles qui caractérisent les systèmes. Elle est indispensable dans les applications, pour qu'un système puisse être convenablement commandé. Elle sert d'introduction à de nombreuses questions d'ordre pratique, comme la planification et la poursuite de trajectoires.

La commandabilité pour les systèmes linéaires, ayant des équations d'état de la forme (Eq. 22), s'obtient à la condition nécessaire et suffisante : $Rang(M) = n$ (dimension de l'espace d'état).

$$\dot{x} = A + Bu \quad (x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m) \quad (22)$$

$$M = \begin{pmatrix} A & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} \quad (23)$$

Pour ce qui est des systèmes non linéaires, donnés par des équations de la forme (Eq. 24), l'on parlera alors de la commandabilité locale, qui se détermine grâce au critère $Rang(M_{NL}) = n$.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (24)$$

$$M_{NL} = \begin{pmatrix} ad_f g & ad_f^2 g & \dots & ad_f^{n-1} g \end{pmatrix} \quad (25)$$

La commandabilité locale d'un système, qu'il soit linéaire ou pas, peut être établie aisément en utilisant la définition et les deux lemmes qui suivent [88].

Considérons les systèmes continus et invariant dans le temps (Eq. 26).

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (26)$$

Tels que les états évoluent dans un sous-espace ouvert $X \subseteq \mathbb{R}^n$, pour un n donné. On suppose que $f(\cdot, u)$ est C^∞ dans x , pour chaque u dans U . L'ensemble des champs de vecteurs (Eq. 27) est associé au système (Eq. 26).

$$A := f_u = f(\cdot, u), u \in U \quad (27)$$

Définition [La condition de rang pour l'accessibilité (Accessibility Rank Condition)] L'algèbre de Lie d'un champ de vecteurs A_{LA} est appelé L'algèbre de Lie de l'accessibilité (Accessibility Lie Algebra) associée au système. La condition de rang pour l'accessibilité (ARC) à x^0 est vérifiée si $A_{LA}(x^0) = \mathbb{R}^n$.

En considérant plus spécifiquement les systèmes *control-affine* (Eq. 28), les deux lemmes qui suivent permettent d'affirmer que la condition sur le rang pour l'accessibilité signifie qu'il y a n crochets itérés formés à partir de $\{g_0(x), g_1(x)u_1, \dots, g_m(x)u_m\}$ qui sont linéairement indépen-

dants lorsqu'évalués en x^0 . [88]

$$\dot{x} = g_0(x) + g_1(x)u_1 + \cdots + g_m(x)u_m \quad (28)$$

Lemme 1. Pour un système control-affine, $A_{LA} = \{g_0(x), g_1(x)u_1, \dots, g_m(x)u_m\}_{LA}$

Lemme 2. Soit A une sous-ensemble de $V(O)$. On note $A_0 := A$, et de manière récursive, $A_{k+1} = \{[f, g]/f \in A_k, g \in A\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, de même pour $A_\infty := \bigcup_{k \geq 0} A_k$. Alors, A_{LA} est égal au span linéaire de A_∞ .

La condition suffisante, bien connue, de la commandabilité locale, en un point d'équilibre, est donnée par le théorème suivant [75].

Théorème. Le système (Eq. 24) est localement commandable en un point d'équilibre x_e de f si $[b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$ est de rang plein, tel que $b := g(x_e)$ et $A := \frac{\partial}{\partial x}f(x_e)$.

4.3 Commande MIMO linéarisante par géométrie différentielle

On résume dans ce qui suit les notions de la commande linéarisante par géométrie différentielle appliquée aux systèmes multivariables [63], [92]. Systèmes définis par leurs entrées $u \in \mathbb{R}^p$ et leurs sorties $y \in \mathbb{R}^p$, régis par des équations de la forme (Eq. 29)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (29)$$

On définit le degré relatif du système par le vecteur $r \in \mathbb{R}^p$

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_p \end{pmatrix} \quad (30)$$

r_i Étant le degré relatif associé à la sortie y_i . C'est aussi le nombre de fois qu'il faut dériver la sortie par rapport au temps afin de faire apparaitre au moins l'une des commandes.

Les dérivées successives des différentes sorties aboutissent au système d'équations (Eq. 31), de la forme $\underline{y}^r = \underline{L} + A(x)\underline{u}$.

$$\begin{pmatrix} y_1^{(r_1)} \\ y_2^{(r_2)} \\ \vdots \\ y_p^{(r_p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_f^{r_1-1} h_1 \\ L_f^{r_2-1} h_2 \\ \vdots \\ L_f^{r_m-1} h_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1 & L_{g_2} L_f^{r_1-1} h_1 & \cdots & L_{g_p} L_f^{r_1-1} h_1 \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2 & L_{g_2} L_f^{r_2-1} h_2 & \cdots & L_{g_p} L_f^{r_2-1} h_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_p & L_{g_2} L_f^{r_m-1} h_p & \cdots & L_{g_p} L_f^{r_m-1} h_p \end{pmatrix} \underline{u} \quad (31)$$

Sous réserve de la condition que $A(x)$ soit inversible, la commande linéarisante par géométrie différentielle se calcule par (Eq. 32).

$$\underline{u} = A^{-1}(x) [-\underline{L} + \underline{y}] \quad (32)$$

Le système prendra, alors, l'allure (Eq. 33).

$$\underline{y}^{(t)} = \underline{v} \quad (33)$$

C'est une commande qui procure, de plus, un découplage Entrées/Sorties, puisque chaque nouvelle commande v_i de $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ agit directement sur la sortie correspondante y_i .

5 Sur l'inversion matricielle.

Afin de résoudre un ensemble de systèmes d'équations linéaires, il est impératif de se familiariser avec des notions de calcul matriciel, notamment la détermination de l'inverse d'une matrice.

Le développement d'une solution générale, qui soit valide quelque soit la dimension de la matrice et son rang, est utile dans de nombreuses applications. L'on fait, alors, appel à l'inverse généralisée dont l'une des composantes la plus connue est pseudo inverse ou encore l'inverse de Moore-Penrose. L'utilité et l'efficacité de cette dernière ne sont plus à prouver, celle-ci ayant déjà fait ses preuves, notamment dans le calcul du modèle cinématique inverse des robots manipulateurs, où la matrice Jacobienne s'avère dans de nombreux cas non carrée. [33], [10], [81]

Les propriétés que doit satisfaire une matrice X , de dimension $(n \times m)$ qui serait l'inverse généralisée d'une matrice A de dimension $(m \times n)$ sont

1. $AXA = A$
2. $XAX = X$
3. $(AX)^T = AX$
4. $(XA)^T = XA$

La pseudo inverse existe toujours et est unique.

Lorsque la matrice possède un rang entier, le calcul de la pseudo inverse, notée A^+ , s'obtient par les expressions

$$A^+ = \begin{cases} A^T [AA^T]^{-1} & m \leq n \quad (34.a) \\ A^{-1} & m = n \quad (34.b) \\ [A^T A]^{-1} A^T & m \geq n \quad (34.c) \end{cases} \quad (34)$$

Dans le cas inverse, c'est-à-dire lorsque la matrice est quelconque, avec ou sans rang entier, l'on calcule la pseudo inverse en faisant appel à la Décomposition par Valeurs Singulières (SVD) (Eq. 35).

$$A = U\Sigma V^T \quad (35)$$

U et V sont respectivement les vecteurs propres gauche et droit correspondant aux matrices AA^T et $A^T A$.

Σ est la matrice diagonale portant les valeurs singulières σ_i , arrangées dans un ordre non croissant, et des valeurs nulles.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} \sigma_1^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} \sigma_2^2 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{1}{\sigma_r} \sigma_r^2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Cette décomposition permet de déterminer la pseudo inverse de la matrice A , en déterminant $\Sigma^+ = \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_i} \right)$, ($\frac{1}{\sigma_i} = 0$ lorsque $\sigma_i = 0$), et en écrivant

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T$$

Cette inverse généralisée satisfait toute les quatre propriétés énumérées, et coïncide avec A^{-1} lorsque A est régulière.

6 Sur la commande multivariable robuste.

6.1 Sur la commande adaptative

6.1.1 Généralités

La commande adaptative a pour principe d'ajuster le régulateur afin d'obtenir les performances désirées, lorsque les paramètres du systèmes sont inconnus ou présentent des variations au cours du temps.

A la commande adaptative, est souvent associée la notion du modèle de référence (*MRAC*). Ce modèle de référence décrit une dynamique que l'on souhaite poursuivre en boucle fermée. La loi de commande est alors synthétisée afin d'annuler l'erreur de poursuite de ce modèle de référence. Le principe de ce type de commande, consiste donc à estimer le vecteur des paramètres θ et à adapter la loi de commande à la valeur estimée, il s'agit de la commande directe (Fig. 1). [92], [20], [53]

Un autre concept de la commande adaptative consiste à estimer directement les paramètres du régulateur lui-même plutôt que ceux du système. On parle alors de commande adaptative auto-ajustable ou encore indirecte (Fig. 2).

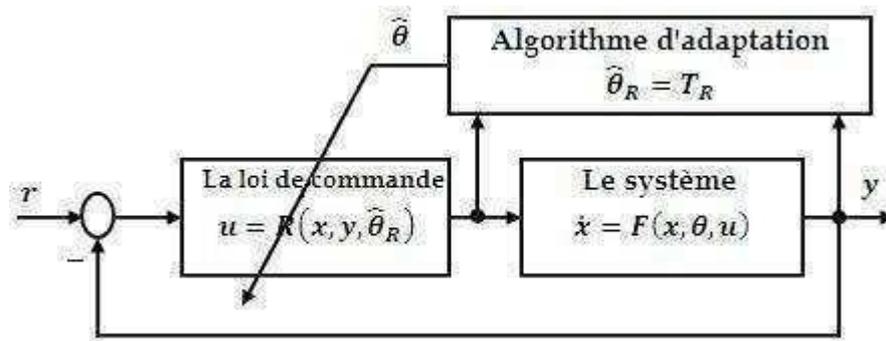


FIGURE 1 – Schéma de commande adaptative directe

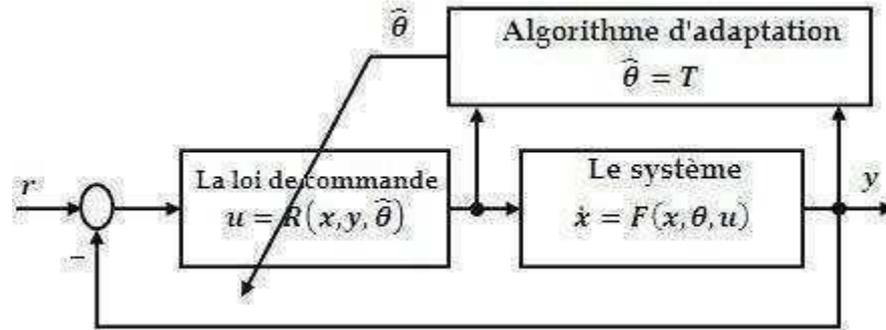


FIGURE 2 – Schéma de commande adaptative indirecte

6.1.2 La commande adaptative MIMO

On considère dans cette partie la classe des systèmes nonlinéaires ayant pour équations d'état (Eq. 36)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (36)$$

Où

$x \in \mathfrak{R}^n$ le vecteur d'état

$u \in \mathfrak{R}^m$ le vecteur de commande

$f \in \mathfrak{R}^n$ un vecteur de fonctions continues

$g(n \times m)$ une matrice de fonctions continues

$y \in \mathfrak{R}^p$ les signaux de sortie

Le modèle que l'on appellera nominal (Eq. 36) suppose une connaissance parfaite des paramètres du système.

Nous nous intéressons dans ce qui suit à la commande adaptative à modèle de référence (*MRAC*), étant un type de commande très abordé dans la littérature, en plus de la simplicité d'implémentation et le sens physique des paramètres des modèles qui reste intègre.

La synthèse de la loi de commande en procédant par le principe *MRAC* implique le passage par deux étapes :

1. Une conception de la loi de commande autour d'un modèle nominal, où aucune erreur de

modélisation n'est tenue en compte.

2. L'estimation du vecteur des paramètres incertains.

La démarche suivie dans ce document est celle adoptée par [8].

L'on réécrit le modèle (Eq. 36) de sorte à faire ressortir les paramètres à adapter, en l'occurrence θ_{f_i} et θ_{g_j} .

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n_1} \theta_{f_i} f_i(x) + \sum_{j=1}^{n_2} \theta_{g_j} g_j(x) u \quad (37)$$

Où $f_i(x)$ et $g_j(x)$ sont des fonctions mesurables.

L'ignorance des valeurs réelles des paramètres du modèle du système permet de réécrire (Eq. 37) sous sa forme estimée

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n_1} \hat{\theta}_{f_i} f_i(x) + \sum_{j=1}^{n_2} \hat{\theta}_{g_j} g_j(x) u \quad (38)$$

Telles que

$\hat{\theta}_{f_i}$ et $\hat{\theta}_{g_j}$ sont les estimées de θ_{f_i} et θ_{g_j} respectivement.

S'agissant d'un rang égal à 1, la conception de la loi de commande en considérant le modèle nominal se fait par exemple en procédant par la méthode linéarisante découplante par géométrie différentielle. Elle aura pour expression

$$u = A(x)^{-1} [-L(x) + v] \quad (39)$$

Avec

v la nouvelle commande virtuelle dans la nouvelle base canonique z . Cette dernière existe sous la condition que $\phi(x)$ soit un difféomorphisme.

$$z = \phi(x) \quad (40)$$

Les termes de la commande (Eq. 39) peuvent s'établir aisément en dérivant successivement le vecteur de sortie afin de faire apparaître les variables de commande.

Dans une seconde étape, la commande obtenue pour le cas nominal sera utilisée afin de prendre en considération les paramètres incertains.

Le vecteur des paramètres θ étant inconnu, son estimée $\hat{\theta}$ sera utilisée. L'on écrira alors la nouvelle expression de la commande sous l'allure

$$\hat{u} = \hat{A}(x)^{-1} [-\hat{L}(x) + v] \quad (41)$$

Telle que $\hat{L} = \sum_{i=1}^{n_1} \hat{\theta}_{f_i} L_{f_i} h$ et $A = \sum_{j=1}^{n_2} \hat{\theta}_{g_j} L_{g_j} h$

L'on pose par la suite

$$\theta_f = \begin{pmatrix} \theta_{f_1} \\ \vdots \\ \theta_{f_{n_1}} \end{pmatrix}, \theta_g = \begin{pmatrix} \theta_{g_1} \\ \vdots \\ \theta_{g_{n_2}} \end{pmatrix} \text{ et } \theta = \begin{pmatrix} \theta_f \\ \theta_g \end{pmatrix}$$

L'on notera également par $\hat{\theta}_f$, $\hat{\theta}_g$ et $\hat{\theta}$ les estimées respectives de θ_f , θ_g et θ . Et par $\phi = \theta - \hat{\theta}$ l'erreur d'estimation.

Si les paramètres étaient constants ou variaient lentement au cours du temps, alors la dynamique des estimées serait

$$\dot{\hat{\theta}} = -eW \quad (42)$$

Tels que

$e = y - y_d$ l'erreur de poursuite

y et y_d les vecteurs de sorties et de sorties désirées

W le vecteur défini par

$$W = \left[L_{f_1} h \quad \cdots \quad L_{f_{n_1}} h \quad [L_{g_1} h \quad \cdots \quad L_{g_{n_2}} h] \left(\frac{-\hat{L} + v}{\hat{A}} \right) \right]^T$$

La loi de commande virtuelle sera donnée par

$$v = \dot{y}_d - K e \quad (43)$$

6.2 Sur la commande par Modes Glissants et ses variantes

6.2.1 Technique des Modes de Glissement d'ordre 1

La synthèse de loi de commande par la méthode des Modes de Glissement repose essentiellement sur le principe de la résolution des équations différentielles avec second membre discontinu. Cette approche se distingue aussi bien par la simplicité de sa synthèse que par la robustesse qu'elle procure au système commandé.

Soit le système nonlinéaire à commander [89], [92]

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (44)$$

Où

x représente la variable d'état

u la variable de commande

f une fonction continue

L'une des approches utilisées est de procéder tout d'abord à un choix de la surface de glissement $s(x)$, qui est une relation algébrique ou différentielle sur laquelle l'objectif de commande est

réalisé. Ensuite, le signal de commande u est calculée afin d'attirer le vecteur vers cette surface de glissement, puis le maintenir sur celle-ci.

Deux conditions sont donc à satisfaire :

L'attractivité, qui se réalise en assurant : $s\dot{s} < 0$

et l'invariance qui se résume par : $\dot{s} = 0$ pour $s = 0$

6.2.2 Technique des Modes de Glissement d'ordre 1 généralisée au cas MIMO

La généralisation aux systèmes MIMO s'établit en considérant m commandes, et en choisissant un vecteur de m surfaces de glissement

La condition d'attractivité deviendrait : $s^T \dot{s}$ définie négative

et celle de l'invariance se résumerait à : $\dot{s} = 0$ pour $s = 0$

Pour un système présentant les équations d'état (Eq. 45)

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (45)$$

Avec

$x(n \times 1)$ le vecteur d'état

$u(m \times 1)$ le vecteur de commande

f un vecteur de fonctions continues

Le choix de la commande (Eq. 46) permet de satisfaire les deux conditions précédentes.

$$u = \left[\frac{\partial s}{\partial x} g \right]^{-1} \left[-\frac{\partial s}{\partial x} f - K \text{sign}(s) \right] \quad (46)$$

6.2.3 Technique des Modes de Glissement d'ordre supérieur à 1

La technique de commande par Modes Glissants d'ordre supérieur procure aussi bien les avantages de la robustesse du principe des Modes Glissants classique, mais aussi et surtout permet de réduire, voire éliminer le phénomène de shattering.

Pour un système présentant les équations d'état (Eq. 44), soit la surface de glissement (Eq. 47).

$$s = s(t, x) \quad (47)$$

Où

$s(t, x)$ un vecteur de m fonctions continues

Les dérivations successives des fonctions s permet d'aboutir au vecteur des degrés relatifs r correspondant aux différentes variables de commande.

En prenant à titre d'exemple les différentes surfaces de glissement comme étant les $(r-1)^{ième}$ dérivées des sorties à commander, alors

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{\partial s}{\partial y^{(r-1)}} \times \frac{\partial y^{(r-1)}}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial y^{(r-1)}} y^{(r)} \\ &= L(x) + A(x)u \end{aligned} \quad (48)$$

Avec

$$\frac{\partial^k s}{\partial u} = 0 \text{ pour } k = 1, \dots, r-1 \text{ et } \frac{\partial^r s}{\partial u} \neq 0$$

La commande à appliquer est alors

$$u = A^{-1}(x)[-L(x) + K \text{sign}(s)] \quad (49)$$

Avec K une matrice diagonale contenant des constantes positives.

6.2.4 Sur le Twisting algorithm

On considère le système régi par l'équation (Eq. 44).

L'objectif de commande est décrit par une contrainte $S(t, x) = 0$ devant être satisfaite.

La commande dite "Twisting algorithm" implique un glissement d'ordre 2. Elle se donne par (Eq. 50) [62]

$$\dot{u} = \begin{cases} -u & \text{pour } |u| > 1 \\ -\alpha_m \text{sign}(S) & \text{pour } S\dot{S} \leq 0; |u| \leq 1 \\ -\alpha_M \text{sign}(S) & \text{pour } S\dot{S} > 0; |u| \leq 1 \end{cases} \quad (50)$$

Telles que les constantes $\alpha_M > \alpha_m > 0$.

Notre intérêt pour cette commande se traduit par le fait que celle-ci permet une convergence en un temps fini vers la variété de glissement $S = \dot{S} = 0$, en traduisant un nombre infini de rotations.

En pratique, et pour l'implémentation numérique, l'on suppose que S est déterminée à chaque intervalle de temps h .

La dérivée de S sera approximée par l'approche d'Euler, permettant d'écrire

$$\dot{S} \approx \frac{(S_{k+1} - S_k)}{h} \quad (51)$$

Telle que $S_k = S(t_k) = S(kh)$

h étant une grandeur positive, le signe de \dot{S} se retrouve déterminé par le signe de la différence $S_{k+1} - S_k$, qui sera notée par $\Delta S(t_k)$. L'expression (Eq. 50) devient alors

$$\dot{u} = \begin{cases} -u(t_k) & \text{pour } |u(t_k)| > 1 \\ -\alpha_m \text{sign}(S(t_k)) & \text{pour } S(t_k) \cdot \Delta S(t_k) \leq 0; |u(t_k)| \leq 1 \\ -\alpha_M \text{sign}(S(t_k)) & \text{pour } S(t_k) \cdot \Delta S(t_k) > 0; |u(t_k)| \leq 1 \end{cases} \quad (52)$$

6.2.5 Sur le Super-Twisting algorithm

Cette technique de commande est apparue afin de palier le besoin d'utiliser la dérivée de la variable de glissement, qui n'est pas toujours disponible [42]. C'est une commande utilisée pour des systèmes dont le degré relatif est inférieur ou égal à 2. Elle a largement été utilisée dans les travaux de recherche [14], [93]. Son expression (Eq. 53), (Eq. 54) et (Eq. 55) résulte de la somme de deux parties [62]; une partie ne présentant pas de dynamique u_2 , et une partie dynamique à

intégrer u_1 .

$$u = u_1 + u_2 \quad (53)$$

$$u_2 = \begin{cases} -\lambda |S_0|^\rho \operatorname{sign}(S) & ; |S| > S_0 \\ -\lambda |S|^\rho \operatorname{sign}(S) & ; |S| \leq S_0 \end{cases} \quad (54)$$

$$\dot{u}_1 = \begin{cases} -u & ; |u| > 1 \\ -\alpha \operatorname{sign}(S) & ; |u| \leq 1 \end{cases} \quad (55)$$

Telles que α et λ sont des constantes positives, et $\rho \in (0, 1)$, souvent pris égal à 0,5 [42], [14].

Dans la plu part des travaux trouvés dans la littérature [42], [14], [93], l'expression de la commande se réduit à la partie convergente, ne gardant ainsi que l'expression concernant ($|u| \leq 1$) pour \dot{u}_1 , et celle correspondant à ($|S| \leq S_0$) pour u_2 .

Du fait de sa structure même, cette commande présente des similitudes avec la commande classique PI , elle a d'ailleurs été considérée comme une généralisation nonlinéaire de celle-ci dans [14].

Notons, par ailleurs, que cette technique de Super-Twisting est également utilisée dans la construction d'observateurs d'état [42].

7 Sur la théorie de croyance

7.1 Généralités et rappel de quelques notions

Dans ce qui suit, nous rappelons les différentes notions de base relatives à la théorie de croyance (*Belief theory*). [78], [56], [64], [11], [69]

7.1.1 Définition

Étant donnée une question, soit Θ un ensemble fini des réponses possibles à cette question, appelé cadre de discernement, et 2^Θ , l'ensemble de tous les sous-ensembles de Θ :

$$2^\Theta = \{A / A \subseteq \Theta\} \quad (56)$$

Le sous-ensemble A peut inclure, en particulier, l'ensemble vide ϕ et l'ensemble plein Θ . Ceci représente l'affirmation que la vérité appartient à A . La fonction réelle $Bel : 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ est appelée fonction de croyance si et seulement si elle satisfait les trois axiomes suivants :

Axiome 1 $Bel(\phi) = 0$

Axiome 2 $Bel(\Theta) = 1$

Axiome 3 Pour tout entier n et sous-ensemble $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Theta$,

$$Bel\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{\substack{I \subset \{1, 2, \dots, n\} \\ I \neq \phi}} (-1)^{|I|+1} Bel\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \quad (57)$$

7.1.2 Sur le nombre de masse

Une fonction de masse de croyance est une application $m : 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$, vérifiant :

$$\sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1 \quad (58)$$

A est appelé élément focal.

7.1.3 Définition alternative de la fonction de croyance

Étant donné un nombre de probabilité $m(A)$, une fonction de croyance $Bel(A)$ est définie par :

$$Bel(A) = \sum \{m(B) / B \subseteq A\} \quad (59)$$

7.1.4 Propriétés et cas particuliers

Une fonction de masse est dite

1. *Normale* si et seulement si $m(\emptyset) = 0$, \emptyset n'est pas un élément focal de Θ
2. *Catégorique* si et seulement si $m(A) = 1$
3. *Vide* si et seulement si $m(\Theta) = 1$
4. *Bayésienne* si et seulement si tous ses éléments focaux sont des singletons de Θ ; $m(A) = 0$, $\forall A / |A| > 1$ ou

$$m(A) > 0 \Rightarrow |A| = 1$$

5. *Dogmatique* si et seulement si $m(\Theta) = 0$
6. *Consonante* si et seulement si tous ses éléments focaux sont emboîtés
7. *Simple* si et seulement si elle possède uniquement deux éléments focaux A et Θ , tels que $A \subset \Theta$ et $A \neq \emptyset$
8. *Spécialisée* si et seulement si elle possède uniquement trois éléments focaux A , \bar{A} et Θ tels que $A \cup \bar{A} = \Theta$ et $A, \bar{A} \neq \emptyset$

7.1.5 Sur la normalisation de la fonction de masse

La fonction de masse peut être normalisée en divisant chaque masse $m(A)$, $A \neq \emptyset$, par $1 - m(\emptyset)$.

$$m^*(A) = \begin{cases} \frac{m(A)}{1-m(\emptyset)} & \text{si } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } A = \emptyset \end{cases} \quad (60)$$

7.1.6 Sur la combinaison des informations

Il existe plusieurs opérateurs pour la combinaison des informations, en provenance de sources multiples. Nous nous intéressons juste à l'opérateur utilisé dans le cadre de cette thèse, en l'occurrence l'opérateur de Dempster.

Soit la combinaison par l'opérateur d'addition conjonctive

$$m_{\cap}(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C), \quad \forall A \subset \Theta \quad (61)$$

La combinaison par la méthode de Dempster, également appelée l'addition orthogonale \oplus , est donnée par

$$m_{\oplus}(A) = \frac{m_{\cap}(A)}{1 - m_{\cap}(\emptyset)} \quad (62)$$

7.1.7 Sur l'affaiblissement

Afin de prendre en considération la fiabilité accordée à une source d'information, un poids ou un coefficient de fiabilité $0 < \alpha_j < 1$ est introduit afin d'exprimer la confiance accordée à une source d'information S_j . Les coefficients α_j sont tels que

$$\alpha_j = \begin{cases} 1 & \text{si la source } S_j \text{ est totalement fiable} \\ 0 & \text{si la source } S_j \text{ n'est pas du tout fiable} \end{cases}$$

Une nouvelle fonction de masse est alors obtenue

$$m_{S_j} = \alpha_j m(A), \quad \forall A \neq \emptyset \quad (63)$$

7.2 Concept de la commande de confiance

Nous allons maintenant utiliser ce qui vient de précéder pour développer la *commande de confiance*. Nous commencerons par établir la méthode pour le cas des systèmes monovariables (SISO), puis nous généraliserons pour le cas des systèmes multivariables (MIMO).

7.2.1 La commande de confiance pour les systèmes SISO

Considérons le système monovariante, linéaire ou pas, que nous mettons sous une forme générale non linéaire afin d'inclure les deux cas de figure.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (64)$$

Telle que x est la variable d'état et u la variable de commande.

Nous considérons la sortie y comme étant la variable d'état elle-même.

Nous définissons également notre objectif de commande, ou notre variable de référence (dynamique ou pas) x_r .

La question que nous nous posons est la suivante :

Quelle valeur attribuer à la valeur de commande afin de pouvoir atteindre nos objectifs de commande ?

Lorsque la commande est une grandeur physique continue, même limitée, il existe un nombre infini de réponses. Pour cette raison, nous considérons un ensemble fini de singletons u_0, u_1, \dots, u_n .

Pour la prise de décision, nous tenons compte de deux sources d'information ;

S_1 la différence entre la valeur mesurée x_{mes} (ou la valeur observée) et la référence ;

et S_2 la différence entre la valeur x_{mod} en provenance d'un modèle mathématique, présentant éventuellement des erreurs de modélisation, et la référence.

Deux masses de distributions Bayésiennes m_1 et m_2 sont alors considérées, correspondant aux deux sources S_1 et S_2 respectivement, et nous utiliserons la méthode de Dempster pour la combinaison des deux sources d'information.

Les erreurs décrites précédemment sont normalisées, et leurs valeurs absolues sont tenues en compte. Les distributions de masse sont déterminées par

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 - |e_{1N}| \\ m_2 &= 1 - |e_{2N}| \end{aligned} \quad (65)$$

7.2.2 La commande de confiance pour les systèmes MIMO

L'une des approches, pour l'application de la commande de confiance aux systèmes MIMO, consiste à appliquer en premier lieu la commande linéarisante et découplante par géométrie différentielle, puis à introduire la commande virtuelle développée selon la méthodologie précisée précédemment pour les systèmes SISO résultants.

Considérons la forme générale pour les systèmes MIMO

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{g}(\underline{x}) \underline{u} \quad (66)$$

Où $\underline{x}(n \times 1)$ est le vecteur des variables d'état

$\underline{f}(n \times 1)$ est un vecteur de fonctions, linéaires ou pas, du vecteur d'état \underline{x}

$\underline{g}(n \times m)$ une distribution

$\underline{u}(m \times 1)$ le vecteur des variables de commande

En considérant le vecteur des variables d'état comme vecteur de sortie, nous réécrivons le système d'équations (Eq. 66), en termes d'erreurs de poursuite, puisqu'il s'agit de problème de poursuite de trajectoire.

$$\dot{e} = -\dot{x}_r + \underline{f}(\underline{x}) + \underline{g}(\underline{x}) \underline{u} \quad (67)$$

Où \underline{x}_r est le vecteur des références.

Dans un premier temps, nous considèrerons un ensemble fini de singletons $u_{j0}, u_{j1}, \dots, u_{jn}$ pour le signal de commande u_j .

La question que l'on se pose est la suivante ;

Quelles valeurs pour les signaux de commande u_j permettraient d'atteindre les objectifs de commande ?

Afin de simplifier le problème, nous allons, dans un premier temps, appliquer la commande linéarisante par géométrie différentielle (voir section 5 pour l'inversion matricielle). Après découplage des Entrées/Sorties, l'approche de la théorie de croyance sera appliquée aux nouvelles commandes virtuelles, avec un ensemble de singletons approprié pour chacune d'entre elles.

Pour la prise de décision, les deux sources d'information précédentes S_1 et S_2 seront considérées pour chacune des sorties, et deux distributions de masses Bayésiennes m_{1i} et m_{2i} seront associées à chaque $i^{\text{ème}}$ sortie.

Troisième partie

ÉTUDE COMPARATIVE ENTRE PLUSIEURS TECHNIQUES DE COMMANDES ROBUSTES APPLIQUÉES A L'ÉOLIENNE

Dans cette partie, nous introduisons l'un des systèmes sujets de notre application, en l'occurrence l'éolienne, ainsi que les définitions et notions correspondantes. Ce système nous a particulièrement intéressé de part son modèle multivariable non linéaire et fortement couplé [95]. Il présente d'autre part différentes zones de fonctionnement, résultant en un système tantôt carré tantôt rectangulaire. Une richesse en applications et en méthodes de synthèse des lois de commande se présente donc tout naturellement à nous.

8 Sur les éoliennes.

8.1 Motivations.

La consommation des énergies fossiles nous pousse à produire d'avantage de gaz à effet de serre, et de gaz carbonique en particulier. [6]

L'effet de serre modifie et perturbe le climat et l'équilibre de notre planète, et nuit considérablement à notre environnement, et il ne cesse de s'accroître avec une rapidité inquiétante. La lutte contre ce phénomène de nos jours est un objectif très important, et l'utilisation des énergies renouvelables va dans ce sens, en particulier l'énergie éolienne, qui s'avère être dans ce domaine très prometteuse. L'amélioration des éoliennes et de leur technologie reste un grand champ ouvert à la recherche et au développement. L'énergie éolienne offre plusieurs atouts :

- Il s'agit d'une énergie propre, qui ne pollue ni les eaux ni les sols, et permet une production de l'électricité sans émission des gaz à effet de serre, contrairement aux énergies fossiles.
- C'est une énergie durable. Elle utilise des matériaux dont le cycle de vie respecte l'environnement.
- Les éoliennes peuvent alimenter des sites isolés raccordés ou non au réseau électrique. Il s'agit donc d'une énergie décentralisée et proche des consommateurs. Elles peuvent également fournir de l'énergie sur le réseau en tant que producteur autonome.
- La mise en œuvre des parcs éoliens engendre des activités manufacturières, des activités de construction, de fabrication et de maintenance, ce qui crée un nombre considérable d'emplois.

8.2 Généralités et définitions de base.

8.2.1 Le vent.

Le vent est caractérisé par sa vitesse et sa direction qu'on peut déterminer grâce à différents appareils, notamment les anémomètres. Ces deux caractéristiques présentent toutes les deux un aspect aléatoire, mais dont on peut néanmoins effectuer des études statistiques afin d'en établir les prévisions et les fréquences.

Beaufort a établi, par exemple, une échelle qui divise les vents en fonction de leurs vitesses en 17 catégories, allant du vent calme et de la très légère brise (0 à 1 m/s) aux ouragans et cyclones (35 à 60m/s). [59]

Il a été vu également que le vent variait de façon cyclique, avec l'altitude par rapport au sol et selon la forme du relief.

Les études statistiques du vent sont très importantes. Elles fournissent, en effet, des informations nécessaires aux simulations et au dimensionnement des différents équipements notamment du point de vue résistance des matériaux.

Pour les études et notamment la simulation, il est important de préciser les séquences de vitesses de vent utilisées comme entrées injectées au système global. Deux approches peuvent être utilisées. Dans la première, on injecte une séquence de mesures réelles. L'avantage de cette méthode est de tester les performances réelles du système avec des données de terrain. L'inconvénient réside dans le fait que la simulation ne se fait que pour des séquences déjà mesurées, ne prenant pas en compte d'autres séquences ayant d'autres caractéristiques.

Une deuxième méthode plus flexible consiste à générer des vitesses de vent ($V_w(t)$ en *m/sec*) à partir d'un modèle qui prendra en compte différentes caractéristiques pouvant être choisies et modifiées par l'utilisateur, en agissant sur les paramètres du modèle.

Ce modèle comporte quatre parties qui sont : la valeur moyenne ($V_{wa}(t)$ en *m/sec*), une composante sous forme de rampe ($V_{wr}(t)$ en *m/sec*) - traduisant une augmentation de la vitesse du vent pendant un intervalle de temps donné -, une composante rafale ($V_{wg}(t)$ en *m/sec*) et une composante perturbation ($V_{wt}(t)$ en *m/sec*). Ce qui nous mène à écrire (Eq. 68) [7]

$$V_w(t) = V_{wa}(t) + V_{wr}(t) + V_{wg}(t) + V_{wt}(t) \quad (68)$$

Nous utiliserons donc cette deuxième méthode, par la suite, pour la génération des séquences de vitesse de vent, puisque celle-ci englobe tout les cas de figures rencontrés dans la nature. Elle nous permet, aussi, d'avoir une idée plus générale concernant le comportement dynamique de notre système.

8.2.2 Les types d'éoliennes.

De façon générale et selon la direction de l'axe des éoliennes, ces dernières se répartissent en deux catégories principales (Fig. 3) [7], [5]

- Éoliennes à axe horizontal

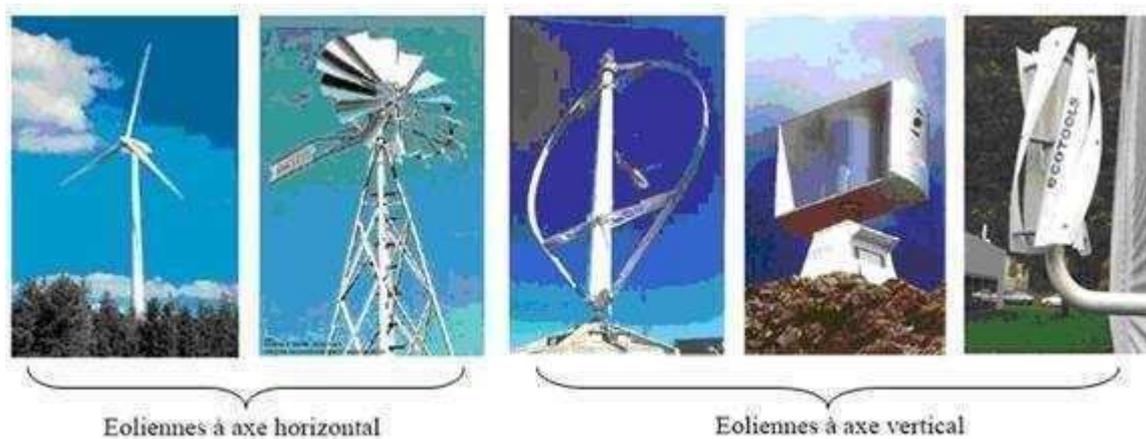


FIGURE 3 – Quelques exemples d'éoliennes

- Éoliennes à axe vertical

Dans la première catégorie, on distingue : les moulins à vent classiques, les éoliennes lentes et les éoliennes rapides. Plusieurs études ont été développées pour ce type d'éoliennes, et de nombreux dispositifs de régulation ont été élaborés. Pour les éoliennes à axe vertical, on trouve plusieurs modèles : les machines à trainée différentielle, celles à écran, celles à clapets battants, celles à pales tournantes et celles à variation cyclique, à aubes fixes et à aubes mobiles.

Selon la puissance générée, on peut, également, distinguer trois sortes d'éoliennes : celles générant une puissance entre 100Watts et 36KW, il s'agit des petites éoliennes domestiques. Avec une puissance générée entre 36KW et 250KW, l'éolienne est dite de moyenne puissance, valeurs au delà desquelles on parle d'éoliennes à grande puissance.

Du point de vue vitesse de rotation, on classe, aussi, les éoliennes en deux catégories : à vitesse fixe et à vitesse variable. (Fig. 4)

Les aérogénérateurs à vitesse fixe sont conçus pour un fonctionnement à une vitesse de rotation donnée. Les avantages de ce type de fonctionnement sont la simplicité du système électrique correspondant, sa robustesse grâce à l'évitement des fréquences de résonance et sa fiabilité prouvée, sans oublier le coût de réalisation assez faible. Ses inconvénients sont la consommation en énergie réactive non contrôlée, les vibrations mécaniques et le contrôle limité de la qualité de puissance. Du fait du fonctionnement à vitesse fixe, les fluctuations dues aux variations de vitesse de vent sont directement transmises à travers le couple mécanique vers la puissance électrique au réseau, ce qui conduit à des pertes en ligne considérables. Quant aux éoliennes fonctionnant à vitesse variable, et depuis ces dernières années, elles sont devenues le type prédominant parmi les installations éoliennes actuelles. Les éoliennes à vitesse variable sont conçues de sorte à extraire un maximum de puissance dans une large gamme de vitesses de vent. Grâce au caractère variable de la vitesse, on peut de façon continue extraire un maximum de puissance, tout en compensant les fluctuations de couple mécanique. Ces dernières présentent, néanmoins, des pertes dans les composants électroniques, un encombrement dû aux composants utilisés ainsi qu'un coût de réalisation relativement élevé.

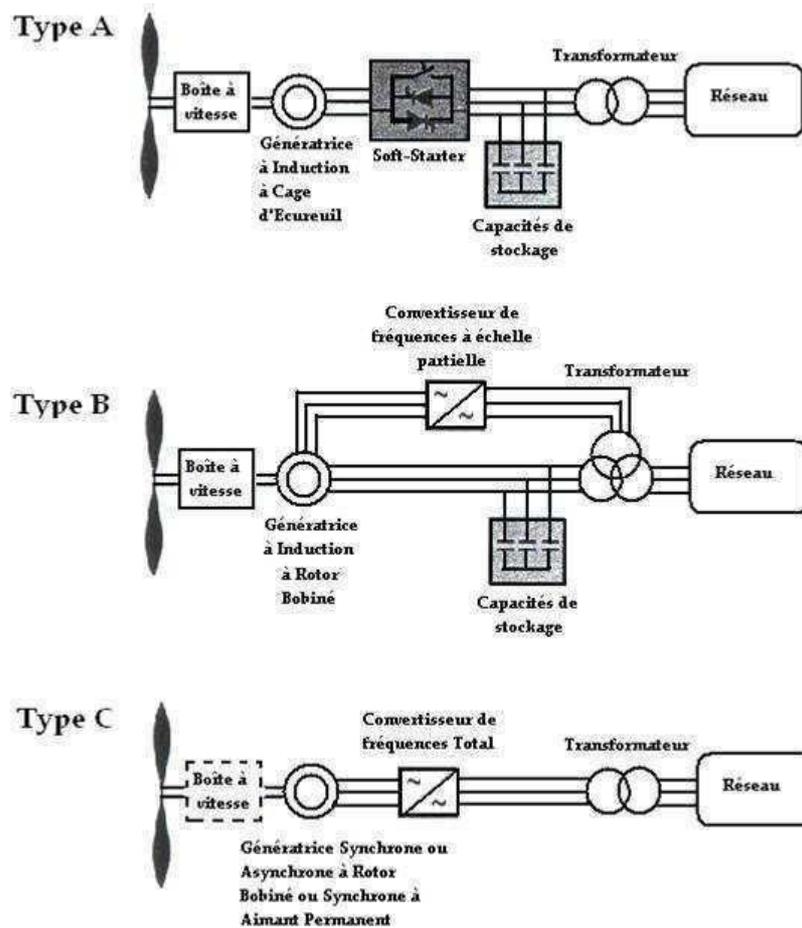


FIGURE 4 – Les configurations les plus utilisées actuellement pour les aérogénérateurs. [7]

Quant à la gestion du flux de la puissance, plusieurs types de convertisseurs sont utilisés, nous citerons les cinq les plus en vue, à savoir ; les convertisseurs Back to Back, Multi niveau, Tandem, Matriciel et Résonnant.

8.3 Constituants de base.

De manière générale, une éolienne comporte trois parties principales qui sont un sous-système aérodynamique, un sous-système de couplage mécanique et un sous-système comportant la génératrice et son dispositif de pilotage. [72], [18], [4]

La partie aérodynamique est la partie en contact direct avec le vent. Elle a pour rôle d'extraire l'énergie cinétique du vent en utilisant des profils aérodynamiques. Nous trouvons dans cette partie des constituants tels que le rotor et le dispositif d'orientation.

Le sous-système de couplage mécanique a pour rôle la transmission du mouvement. Le sous-système englobe tous les éléments de la chaîne de transmission mécanique ; tels que les arbres et éventuellement une boîte à vitesse.

Le sous-système, constitué de la génératrice et son système de pilotage, a pour rôle de transformer l'énergie mécanique en énergie électrique. Il a aussi pour objectif de procéder au raccordement au réseau. Les composantes trouvées dans ce sous-système sont, bien entendu, la génératrice elle-même ainsi que le convertisseur de puissance.

8.4 Zones de fonctionnement d'une éolienne.

Selon les vitesses de vent l'éolienne présente en général quatre zones de fonctionnement ; une première zone où les vitesses de vents ne sont pas suffisantes pour l'extraction d'une puissance significative. Une deuxième zone où les vitesses de vent procurent une puissance significative pour la production de l'énergie électrique, mais cette dernière n'est pas maximale. Une troisième zone où les vitesses de vent permettent de produire des niveaux d'énergie un peu plus élevés que la valeur maximale. Et enfin, une quatrième et dernière zone où le vent est très puissant, présentant des vitesses trop importantes susceptibles de détruire l'éolienne.

Les quatre zones de fonctionnement de notre système peuvent se résumer dans (Fig. 5).

Nous prenons pour la simulation une gamme de vitesses allant de 4 à 25 m/s, selon les chiffres indicatifs [5].

Des vitesses d'environ 4,5m/s (16,2Km/h) assurent l'amorçage de l'éolienne, 7m/s (25,2Km/h) représenterait une vitesse moyenne annuelle convenable, et au-delà de 25m/s (90Km/h), le vent serait trop fort, l'éolienne risquerait d'être endommagée, elle sera, alors, mise à l'arrêt.

9 Présentation du système.

L'éolienne, sujet de notre étude, est un prototype conçu au niveau de l'École Nationale Polytechnique d'Alger. Il s'agit d'une éolienne à axe vertical à profil variable pour le contrôle du débit de vent qui attaquera le rotor du système global. C'est un prototype qui a été conçu dans le cadre d'un projet de Magister 2008 [95].

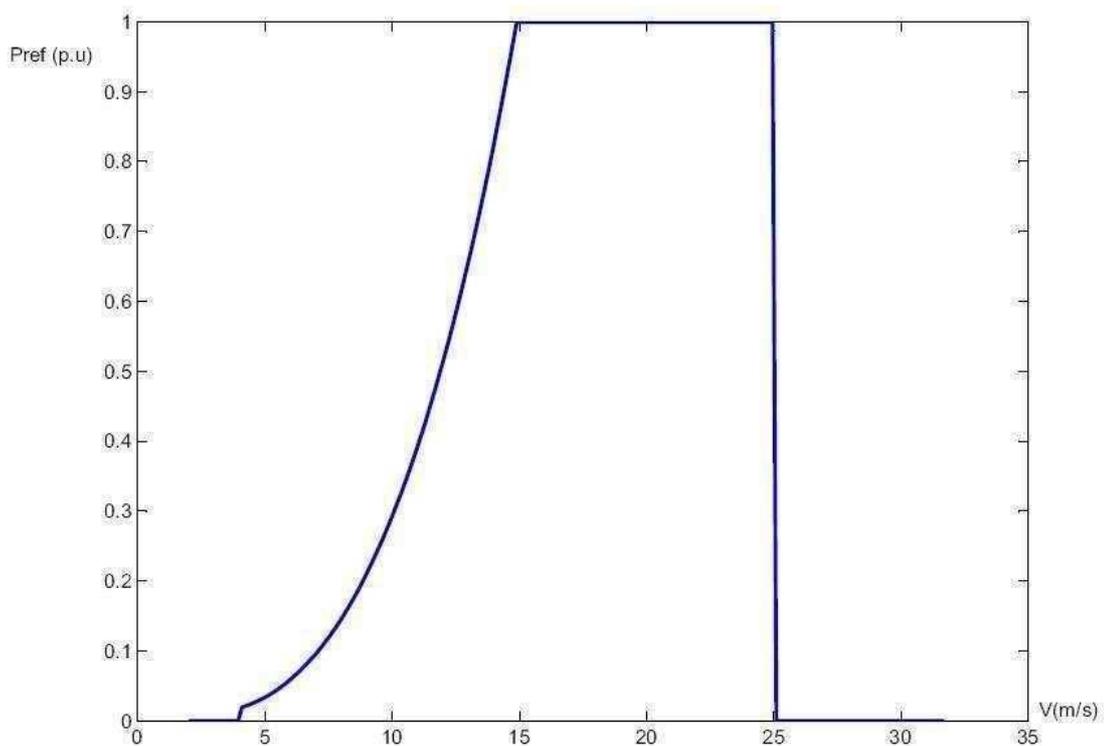


FIGURE 5 – Les quatre zones de fonctionnement de notre éolienne

L'éolienne, que nous appellerons désormais système, comporte différentes parties que nous résumerons dans ce qui suit ; [7]

9.1 Sous-système aérodynamique.

Cette partie comporte le rotor de Savonius muni d'une tuyère à profil variable. Elle permet d'accélérer le vent lorsque sa vitesse est faible, et d'assurer un rôle de protection pour l'éolienne pendant les périodes où le vent est très fort.

Les dimensions du rotor ont été choisies selon la puissance mécanique désirée en respectant les dimensions trouvées dans la bibliographie, et ce afin de pouvoir valider les modèles mathématiques. Le rotor de la turbine a été donc conçu à partir de deux fûts métalliques de diamètre d et de hauteur h . Les deux demis fûts sont intercalés avec une distance e telle que rapport $e/d = 1/6$, rapport pour lequel les performances sont optimales selon les expériences canadiennes (Messieurs Newmann et Lek Ah Chai de l'université de Mc Gill à Montréal) [59]. Le diamètre résultant du rotor est donc $D = 2d - e$ (Fig. 6).

Le rotor est disposé en deux étages décalés de $\frac{\pi}{2}$ l'un par rapport à l'autre, afin d'éviter les couples de démarrage négatifs, tout en préservant les mêmes performances pour l'éolienne [59]. La surface balayée par la turbine est donc $A_{wt} = 2HD = 2H(2d - e)$.

9.2 Le sous-système de couplage mécanique (Multiplicateur).

Il s'agit d'un ensemble d'arbres de la turbine et de la génératrice, ainsi qu'une éventuelle boîte à vitesse composée d'un système d'engrenage, qui sert principalement à multiplier la vitesse de

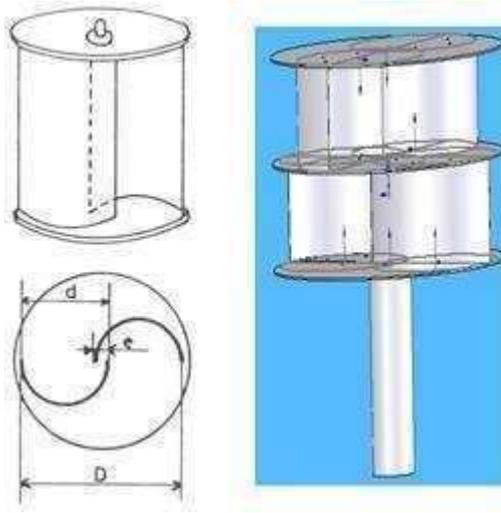


FIGURE 6 – Rotor de Savonius avec ses dimensions

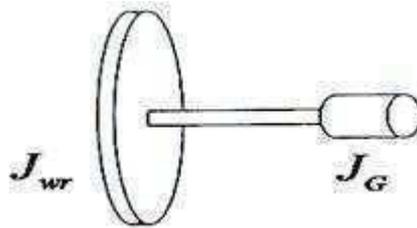


FIGURE 7 – Multiplicateur

rotation de la turbine à une valeur exploitable pour la génération de l'énergie au niveau de la génératrice (Fig. 7).

9.3 Le sous-système génératrice et son système de pilotage.

Ce sous-système comporte principalement une Génératrice synchrone à aimant permanent [28], [27], [61], [22], [12] Il s'agit d'une machine à courant alternatif dans laquelle la fréquence de la tension induite engendrée et la vitesse sont dans un rapport constant. Nous trouvons également dans ce sous-système le système de pilotage de la génératrice, en l'occurrence Convertisseur back to back, qui est un convertisseur de puissance bidirectionnel (Fig. 8) comportant deux convertisseurs de tension. Le bus continu a une tension amplifiée par rapport à la tension entre phases, afin d'avoir un contrôle total du courant du réseau électrique. L'étage redresseur sert à convertir la tension alternative en une tension continue. Il est commandé par modulation de largeur d'impulsion.

L'onduleur triphasé résulte du groupement de trois demi-ponts monophasés. Il est également commandé par modulation de largeur d'impulsion.

Les différentes parties de notre système étant définies, nous abordons dans ce qui suit la partie modélisation du système dans un but de commande.

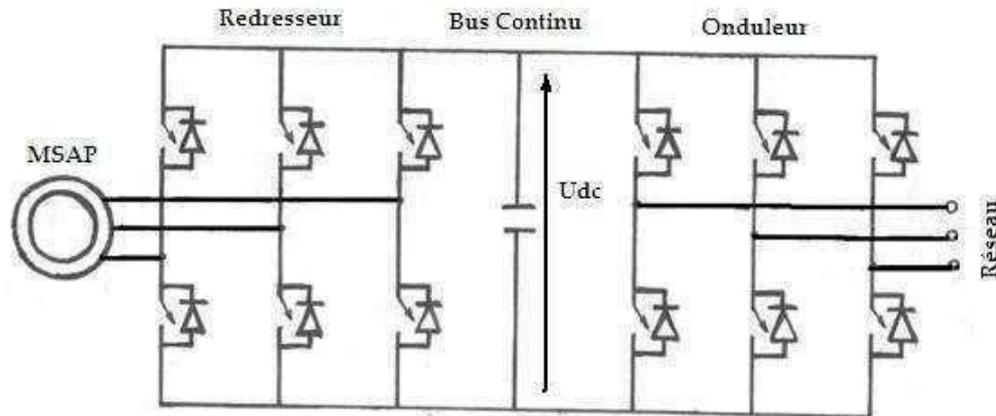


FIGURE 8 – Structure du convertisseur back to back

10 Modélisation mathématique.

La partie modélisation passera par deux étapes essentielles ; une première où différentes lois de la physique seront utilisées afin de poser les relations mathématiques liant les variables essentielles en termes de commande. Et une seconde étape durant laquelle le modèle sera mis sous sa forme hybride. Cette seconde étape se fera naturellement, selon les différents modes de fonctionnement du système, modes qui dépendront principalement des plages de vitesses du vent, et donc des valeurs des variables d'état du système.

10.1 Modélisation analytique.

Le modèle qui a été développé dans cette partie est un modèle de connaissance, qui découle des équations de la physique qui ont été détaillées pour chaque sous-système [95].

Nous essayerons, par la suite, de définir notre système de commande en mettant en évidence les variables d'entrée et de sortie en termes de commande.

10.1.1 Modèle du sous-système aérodynamique.

Le modèle du rotor se déduit de la relation de Betz (Eq. 69) [59], liant la vitesse de l'air à la puissance mécanique extraite du vent

$$P_{wt} = \frac{\rho}{2} A_{wt} C_p V_w^3 \quad (69)$$

Où

P_{wt} La puissance mécanique totale extraite du vent (*watts*)

ρ La densité de l'air (*Kg/m³*)

A_{wt} La surface balayée par le rotor de la turbine (*m²*)

C_p Le coefficient de puissance

V_w La vitesse du vent (*m/sec*)

Les expressions de C_p , pour le rotor de Savonius sont données par des relations qui dépendent essentiellement de la vitesse spécifique (Eq. 70)

$$\lambda = \frac{\omega_{wr}R}{V_w} \quad (70)$$

$R = d - \frac{e}{2}$ Le rayon de la turbine.

ω_{wr} La vitesse angulaire du rotor de la turbine (*rad/sec*)

$$C_p = \begin{cases} 0,53(\lambda - 0,2)(1,7 - \lambda) & \text{pour } 0,9 < \lambda < 1,6 \\ 0,5\lambda - 0,2\lambda^2 & \text{pour } 0 < \lambda < 0,9 \end{cases} \quad (71)$$

Les valeurs de fonctionnement optimal ont été observées pour des valeurs de $0,9 < \lambda < 1$.

Pour notre modélisation on s'intéressera plutôt au couple mécanique, qui se donne par la relation (Eq. 72)

$$\tau_{wt} = \frac{P_{wt}}{\omega_{wr}} \quad (72)$$

Avec

τ_{wt} Le couple mécanique (*N.m*)

Concernant le modèle de la tuyère, celui-ci se déduit aisément de l'application du principe de conservation de la matière ou en faisant appel à la définition du débit massique. Ce qui permet d'obtenir la relation (Eq. 73) liant les vitesses d'entrée V_e et de sortie V_s grâce aux sections à l'entrée A_e et à la sortie A_s de la tuyère.

$$V_s = \frac{A_e}{A_s} V_e = u_3 V_e \quad (73)$$

Nous supposons, à des fins de simplification, que les actionneurs qui pilotent cette tuyère ont pour modèle la valeur unité, bien que ceux-ci puissent être approximés par des modèles d'ordre 2. Ceci impliquera une rapidité de réponse de ces actionneurs par rapport au reste des différentes parties qui composent le système.

Nous soulignons finalement que le sous-système aérodynamique est défini par ses entrées V_w et ω_{wr} , et par sa sortie τ_{wt} .

10.1.2 Modèle du sous-système de couplage mécanique.

Le modèle du sous-système de couplage mécanique se donne par (Eq. 74)

$$J \frac{d\omega}{dt} = \tau_{wt} - \tau_{el} - B_m \omega \quad (74)$$

Où

$J = J_G + \frac{J_{wr}}{k}$ La constante d'inertie totale du système mécanique (somme des constantes d'inertie des rotors de la génératrice et de la turbine respectivement)

$B_m \omega$ Approximation linéaire des forces de frottements visqueux

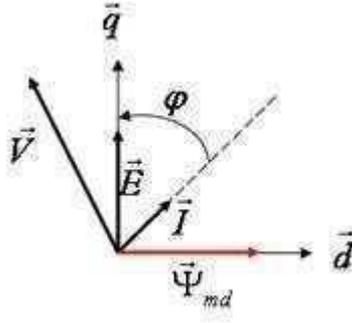


FIGURE 9 – Diagramme vectoriel indiquant les différentes grandeurs physiques du schéma d'Ischenberg

τ_{el} Le couple électromagnétique ($N.m$)

ω La vitesse de rotation de la génératrice (rad/sec)

k Le rapport de multiplication entre les vitesses de rotation des arbres

Le sous-système de couplage mécanique se trouve défini par ses entrées τ_{wt} et τ_{el} , et par sa sortie ω .

10.1.3 Modèle du sous-système génératrice et sous-système de pilotage.

Les équations électriques de la Machine Synchrone à Aimant Permanent (MSAP) se déduisent du schéma d'Ischenberg (Fig. 9).

Les équations de la MSAP sont généralement exprimées dans le système d'axes canonique $d - q$, orienté selon le rotor (Eq. 76). Le passage vers cette base s'obtient aisément grâce à l'application de la transformation de Park (Eq. 75) [26].

$$\begin{pmatrix} x_d \\ x_q \\ x_h \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\sin\theta & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \quad (75)$$

Telles que

x_d, x_q sont les grandeurs instantanées exprimées dans le repère $d - q$

x_h une composante homopolaire

x_a, x_b et x_c sont les grandeurs instantanées triphasées

θ est l'angle entre l'axe d et l'axe de référence du système triphasé

$$\begin{cases} v_d = R_s i_d + L_{sd} \frac{di_d}{dt} - L_{sq} \omega i_q \\ v_q = R_s i_q + L_{sq} \frac{di_q}{dt} - L_{sd} \omega i_d + \Psi_{md} \omega \end{cases} \quad (76)$$

Pour une application de commande à couple maximum [12], le couple électromagnétique sera proportionnel au courant i_q .

i_d, i_q Les courants statoriques dans la base $d - q$ (A)

v_d, v_q Les tensions statoriques dans la base $d - q$ (V)

R_s La résistance statorique (Ω)

L_{sd}, L_{sq} Les inductances du stator (H)

Ψ_{md} Le flux de l'aimant permanent exprimé dans la base $d - q$ (Weber)

Finalement, on ajoutera que les convertisseurs à découpage sont, en général, modélisés correctement par un simple gain [12].

Le système global défini par ses entrées sorties aura pour système d'équations (Eq. 77)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_s}{L_{sd}}x_1 + \frac{L_{sq}}{L_{sd}}x_2x_3 + \frac{1}{L_{sd}}u_1 \\ \dot{x}_2 = -\frac{R_s}{L_{sq}}x_2 + \frac{L_{sd}}{L_{sq}}x_1x_3 + \frac{\Psi_{md}}{L_{sq}}x_3 + \frac{1}{L_{sq}}u_2 \\ \dot{x}_3 = -\frac{B_m}{J}x_1 - \frac{1}{J}\tau_{el}(x_2) + \frac{1}{J}\tau_{wr}(x_3)u_3 \end{cases} \quad (77)$$

Avec les grandeurs $x^T = \left(x_1 \ x_2 \ x_3 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \right)^T = \left(i_d \ i_q \ \omega \ v_d \ v_q \ \left(\frac{A_e}{A_s}\right)^3 \right)^T$

Ce modèle peut être mis sous sa forme vectorielle (Eq. 78)

$$\dot{x} = \underline{L} + A u \quad (78)$$

Telles que

$$u = \begin{pmatrix} v_d & v_q & u_3 \end{pmatrix}^T$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_{sd}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{sq}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J}\tau_{wr}(x_3) \end{pmatrix}$$

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_{sd}}x_1 + \frac{L_{sq}}{L_{sd}}x_2x_3 \\ -\frac{R_s}{L_{sq}}x_2 + \frac{L_{sd}}{L_{sq}}x_1x_3 + \frac{\Psi_{md}}{L_{sq}}x_3 \\ -\frac{B_m}{J}x_1 - \frac{1}{J}\tau_{el}(x_2) \end{pmatrix}$$

Nos objectifs de commande constituent un problème de poursuite de trajectoire, nous réécrivons nos équations en termes d'erreurs de poursuites.

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -\dot{x}_{1r} - \frac{R_s}{L_{sd}}e_1 - \frac{R_s}{L_{sd}}x_{1r} + \frac{L_{sq}}{L_{sd}}x_2x_3 + \frac{1}{L_{sd}}u_1 \\ \dot{e}_2 = -\dot{x}_{2r} - \frac{R_s}{L_{sq}}e_2 - \frac{R_s}{L_{sq}}x_{2r} + \frac{L_{sd}}{L_{sq}}x_1x_3 + \frac{\Psi_{md}}{L_{sq}}x_3 + \frac{1}{L_{sq}}u_2 \\ \dot{e}_3 = -\dot{x}_{3r} - \frac{B_m}{J}e_3 - \frac{B_m}{J}x_{3r} - \frac{1}{J}\tau_{el}(x_2) + \frac{1}{J}\tau_{wr}(x_3)u_3 \end{cases} \quad (79)$$

Telles que

x_{1r}, x_{2r} et x_{3r} les références respectives des états x_1, x_2 et x_3 .

$e_1 = x_1 - x_{1r}, e_2 = x_2 - x_{2r}$ et $e_3 = x_3 - x_{3r}$ les erreurs de poursuite.

10.1.4 Le Convertisseur de puissance

Le convertisseur de puissance [72], [18] peut être aisément modélisé par un gain lorsque l'intérêt est porté sur le côté génératrice, supposant que la commande de celui-ci est parfaitement établie

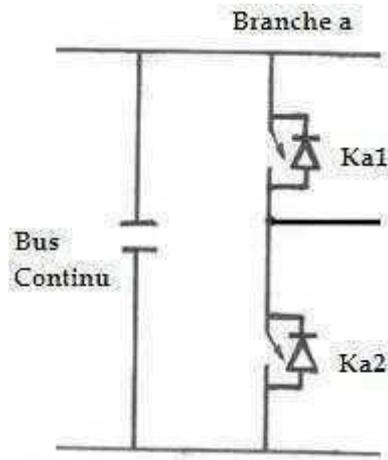


FIGURE 10 – Pont du convertisseur

et n'introduisant aucune perturbation.

Cela dit nous détaillons quelque peu, dans ce qui suit, la modélisation et l'analyse du fonctionnement du convertisseur en introduisant le principe de sa commande.

Le convertisseur que nous nous proposons d'étudier est un convertisseur de type Back to Back. Il contient un côté redresseur relié à la machine, et un côté onduleur permettant la connexion au réseau électrique. Ces deux étages sont séparés par une composante continue (Fig. 8).

Le convertisseur de puissance peut être perçu comme un ensemble de bras de ponts, composés d'interrupteurs commandables (Fig. 10).

Les différentes combinaisons des interrupteurs commandables (ouvert/fermé) permettent d'imposer aux bornes de chaque phase a , b ou c une tension V_a , V_b ou V_c valant $-U_{dc}$, 0 ou U_{dc} .

Le raisonnement pour l'onduleur, par exemple, nous pousse à considérer trois branches a , b et c , auxquelles sont attribuées les variables booléennes S_a , S_b et S_c , respectivement.

Les valeurs de ces variables booléennes dépendent essentiellement des états des interrupteurs associés ;

Branche 1 :

$S_a = 0$ si K_{a1} est ouvert et K_{a2} est fermé

$S_a = 1$ si K_{a1} est fermé et K_{a2} est ouvert

Branche 2 :

$S_b = 0$ si K_{b1} est ouvert et K_{b2} est fermé

$S_b = 1$ si K_{b1} est fermé et K_{b2} est ouvert

Branche 3 :

$S_c = 0$ si K_{c1} est ouvert et K_{c2} est fermé

$S_c = 1$ si K_{c1} est fermé et K_{c2} est ouvert

Les tensions résultantes sont alors données par :

$$\begin{aligned}
 V_a &= \frac{U_{dc}}{3} (2S_a - S_b - S_c) \\
 V_b &= \frac{U_{dc}}{3} (-S_a + 2S_b - S_c) \\
 V_c &= \frac{U_{dc}}{3} (-S_a - S_b + 2S_c)
 \end{aligned}
 \tag{80}$$

Nous résumons la définition du sous-système génératrice et sous-système de pilotage par ses entrées correspondant aux tensions v_d , v_q et u_3 , et aux sorties i_d , i_q et ω .

10.2 Mise sous forme d'Automate Hybride.

L'élaboration du modèle hybride repose essentiellement sur les équations sus-établies et les zones de fonctionnement de l'éolienne déjà citées et précisées dans la partie théorique de notre thèse, ainsi que les expressions du coefficient de puissance qui dépendent essentiellement de la vitesse du vent et de la vitesse de rotation du rotor de l'éolienne. Ce modèle hybride définirait tout naturellement les stratégies de commande adoptées pour l'éolienne.

Prenant en considération tous les paramètres que l'on vient de citer, une première approche intuitive consiste en la délimitation de quatre modes pour l'automate hybride de notre éolienne. Ces quatre modes correspondent en fait aux quatre zones de fonctionnement établis préalablement.

L'analyse du fonctionnement de l'éolienne en termes de qualité de puissance extraite, et donc celle du coefficient de puissance C_p ainsi que la vitesse spécifique λ , ajoute une nouvelle dimension à cette vision, et mène à considérer dans chaque zone, trois cas de figures ;

$$\begin{aligned} C_p &= 0,5\lambda - 0,2\lambda^2 && \text{pour } 0 < \lambda < 0,9 \\ C_p &= 0,3 && \text{pour } 0,9 < \lambda < 1 \\ 0,53(\lambda - 0,2)(1,7 - \lambda) &&& \text{pour } 1 < \lambda < 1,6 \end{aligned}$$

Pour l'élaboration de l'automate hybride [96], nous allons tout d'abord préciser les différents modes de fonctionnement de notre système ; associer les équations régissant le comportement du système à chaque mode ; et enfin, fixer les conditions de passage d'un mode de fonctionnement à un autre.

Dans la zone de fonctionnement 4, aucune commande ne sera appliquée, l'éolienne s'en trouvera à l'arrêt, pour des raisons de sécurité, aucune considération ne sera appliquée à λ puisque $\omega = 0$ et V_w est très grande.

Dans la zone 1, bien que la vitesse de vent V_w soit non nulle, elle est insuffisante pour l'amorçage de l'éolienne. Les commandes u_1 et u_2 sont nulles, mais la commande u_3 est à sa valeur maximale, dans l'attente d'une augmentation de V_w .

Dans la zone de fonctionnement 2, la vitesse du vent est considérable et suffit pour produire des puissances significatives, néanmoins ce sont des puissances qui sont en dessous de la puissance maximale souhaitée. L'objectif dans un tel cas de figure est d'extraire une puissance optimale ; puissance pour laquelle $C_p = 0,3$, il s'agit donc de poursuivre une courbe de puissance optimale.

Quant à la zone 3, la vitesse de vent est très importante, et l'objectif serait de limiter la production de l'énergie, afin de protéger l'éolienne, et plus spécifiquement sa génératrice.

Il est bien entendu question de prendre en considération les différentes valeurs de λ et par conséquent C_p dans ces deuxième et troisième zones.

Les différentes composantes de l'automate hybride relatif à notre éolienne sont les suivantes [96] ;

Les variables.

Il s'agit de l'ensemble $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ représentant les courants statoriques et de la vitesse angulaire.

Les modes de commande.

C'est l'ensemble V , donné par

$$V = \{u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max}, \\ u_{1opt} \& u_{2opt} \& u_{3max}, \\ u_{1max} \& u_{2max} \& u_{3on}, \\ u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3off}\}$$

Les éléments de cet ensemble correspondent respectivement aux modes *Arrêt*, *Production optimale*, *Production maximale*, et *Protection*.

Les conditions de flux.

Ces conditions correspondent aux systèmes équations différentielles régissant le comportement de notre système, ce qui correspond aux équations d'état ;

- Pour le mode Arrêt ;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_s}{L_{sd}}x_1 + \frac{L_{sq}}{L_{sd}}x_2x_3 + \frac{1}{L_{sd}}u_{1off} \\ \dot{x}_2 = -\frac{R_s}{L_{sq}}x_2 + \frac{L_{sd}}{L_{sq}}x_1x_3 + \frac{\Psi_{md}}{L_{sq}}x_3 + \frac{1}{L_{sq}}u_{2off} \\ \dot{x}_3 = -\frac{B_m}{J}x_1 - \frac{1}{J}\tau_{el}(x_2) + \frac{1}{J}\tau_{wr}(x_3)u_{3max} \end{cases}$$

- Pour le mode Production optimale ;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_s}{L_{sd}}x_1 + \frac{L_{sq}}{L_{sd}}x_2x_3 + \frac{1}{L_{sd}}u_{1opt} \\ \dot{x}_2 = -\frac{R_s}{L_{sq}}x_2 + \frac{L_{sd}}{L_{sq}}x_1x_3 + \frac{\Psi_{md}}{L_{sq}}x_3 + \frac{1}{L_{sq}}u_{2opt} \\ \dot{x}_3 = -\frac{B_m}{J}x_1 - \frac{1}{J}\tau_{el}(x_2) + \frac{1}{J}\tau_{wr}(x_3)u_{3max} \end{cases}$$

- Pour le mode Production maximale ;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_s}{L_{sd}}x_1 + \frac{L_{sq}}{L_{sd}}x_2x_3 + \frac{1}{L_{sd}}u_{1max} \\ \dot{x}_2 = -\frac{R_s}{L_{sq}}x_2 + \frac{L_{sd}}{L_{sq}}x_1x_3 + \frac{\Psi_{md}}{L_{sq}}x_3 + \frac{1}{L_{sq}}u_{2max} \\ \dot{x}_3 = -\frac{B_m}{J}x_1 - \frac{1}{J}\tau_{el}(x_2) + \frac{1}{J}\tau_{wr}(x_3)u_{3on} \end{cases}$$

- Pour le mode Protection ;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_s}{L_{sd}}x_1 + \frac{L_{sq}}{L_{sd}}x_2x_3 + \frac{1}{L_{sd}}u_{1off} \\ \dot{x}_2 = -\frac{R_s}{L_{sq}}x_2 + \frac{L_{sd}}{L_{sq}}x_1x_3 + \frac{\Psi_{md}}{L_{sq}}x_3 + \frac{1}{L_{sq}}u_{2off} \\ \dot{x}_3 = -\frac{B_m}{J}x_1 - \frac{1}{J}\tau_{el}(x_2) + \frac{1}{J}\tau_{wr}(x_3)u_{3off} \end{cases}$$

Les conditions d'invariance.

Ce sont les prédicats exprimés en termes de variables d'état ($0 < x_3 < 4\frac{k\lambda}{R}$) pour le mode *Arrêt*, ($4\frac{k\lambda}{R} < x_3 < 15\frac{k\lambda}{R}$) pour le mode *Production optimale*, ($15\frac{k\lambda}{R} < x_3 < 25\frac{k\lambda}{R}$) pour le mode *Production maximale*, et ($x_3 > 25\frac{k\lambda}{R}$) pour le mode *Protection*.

Les conditions initiales.

Données par ;

$$\left(\begin{array}{ccc} x_1(0) & x_2(0) & x_3(0) \end{array} \right)^T = (x_{10}, x_{20}, x_{30})^T$$

Les commutations de commande.

Elles sont données par l'ensemble E , des transitions discrètes possibles d'un mode de commande vers un autre.

$$\begin{aligned} E = \{ & (u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max}, u_{1opt} \& u_{2opt} \& u_{3max}), \\ & (u_{1opt} \& u_{2opt} \& u_{3max}, u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max}), \\ & (u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max}, u_{1max} \& u_{2max} \& u_{3on}), \\ & (u_{1max} \& u_{2max} \& u_{3on}, u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max}), \\ & (u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max}, u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3off}), \\ & (u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3off}, u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max}), \\ & (u_{1opt} \& u_{2opt} \& u_{3max}, u_{1max} \& u_{2max} \& u_{3on}), \\ & (u_{1max} \& u_{2max} \& u_{3on}, u_{1opt} \& u_{2opt} \& u_{3max}), \\ & (u_{1opt} \& u_{2opt} \& u_{3max}, u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3off}), \\ & (u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3off}, u_{1opt} \& u_{2opt} \& u_{3max}), \\ & (u_{1max} \& u_{2max} \& u_{3on}, u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3off}), \\ & (u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3off}, u_{1max} \& u_{2max} \& u_{3on}) \} \end{aligned}$$

Les conditions de saut.

Ce sont les prédicats associés aux commutations de commande, et sont définis pour chacune d'elles.

1. C_{12} ; Condition $x_3 > 4\frac{k\lambda}{R}$ pour $(u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max}, u_{1opt} \& u_{2opt} \& u_{3max})$
2. C_{21} ; Condition $x_3 \leq 4\frac{k\lambda}{R}$ pour $(u_{1opt} \& u_{2opt} \& u_{3max}, u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max})$

3. C_{13} ; Condition $x_3 > 15 \frac{k\lambda}{R}$ pour $(u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max}, u_{1max} \& u_{2max} \& u_{3on})$
4. C_{31} ; Condition $x_3 \leq 4 \frac{k\lambda}{R}$ pour $(u_{1max} \& u_{2max} \& u_{3on}, u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max})$
5. C_{14} ; Condition $x_3 > 25 \frac{k\lambda}{R}$ pour $(u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max}, u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3off})$
6. C_{41} ; Condition $x_3 \leq 4 \frac{k\lambda}{R}$ pour $(u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3off}, u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max})$
7. C_{23} ; Condition $x_3 > 15 \frac{k\lambda}{R}$ pour $(u_{1opt} \& u_{2opt} \& u_{3max}, u_{1max} \& u_{2max} \& u_{3on})$
8. C_{32} ; Condition $x_3 \leq 15 \frac{k\lambda}{R}$ pour $(u_{1max} \& u_{2max} \& u_{3on}, u_{1opt} \& u_{2opt} \& u_{3max})$
9. C_{24} ; Condition $x_3 > 25 \frac{k\lambda}{R}$ pour $(u_{1opt} \& u_{2opt} \& u_{3max}, u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3off})$
10. C_{42} ; Condition $x_3 \leq 15 \frac{k\lambda}{R}$ pour $(u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3off}, u_{1opt} \& u_{2opt} \& u_{3max})$
11. C_{34} ; Condition $x_3 > 25 \frac{k\lambda}{R}$ pour $(u_{1max} \& u_{2max} \& u_{3on}, u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3off})$
12. C_{43} ; Condition $x_3 \leq 25 \frac{k\lambda}{R}$ pour $(u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3off}, u_{1max} \& u_{2max} \& u_{3on})$

Les évènements.

Les évènements correspondant aux commutations de commande sont respectivement

- Application de u_{1opt} et u_{2opt} pour la poursuite de la puissance optimale,

pour $(u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max}, u_{1opt} \& u_{2opt} \& u_{3max})$

- Application de u_{1off} et u_{2off} avec arrêt de l'éolienne,

pour la commutation de commande $(u_{1opt} \& u_{2opt} \& u_{3max}, u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max})$

- Application de u_{1max} , u_{2max} et u_{3on} production de la puissance maximale,

pour $(u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max}, u_{1max} \& u_{2max} \& u_{3on})$

- Application de u_{1off} , u_{2off} et u_{3max} avec arrêt de l'éolienne,

pour la commutation de commande $(u_{1max} \& u_{2max} \& u_{3on}, u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max})$

- Application de u_{3off} , et fermeture totale de la tuyère,

pour la commutation de commande $(u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3max}, u_{1off} \& u_{2off} \& u_{3off})$

- Application de u_{3max} avec arrêt de l'éolienne,

pour la commutation de commande $(u_{1off}\&u_{2off}\&u_{3off}, u_{1off}\&u_{2off}\&u_{3max})$

- Application de u_{1max} , u_{2max} et u_{3on} , et extraction de la puissance maximale,

pour $(u_{1opt}\&u_{2opt}\&u_{3max}, u_{1max}\&u_{2max}\&u_{3on})$

- Application de u_{1opt} , u_{2opt} et u_{3max} poursuite de la puissance optimale,

pour $(u_{1max}\&u_{2max}\&u_{3on}, u_{1opt}\&u_{2opt}\&u_{3max})$

- Application de u_{1off} , u_{2off} et u_{3off} pour le freinage et l'arrêt de l'éolienne,

pour $(u_{1opt}\&u_{2opt}\&u_{3max}, u_{1off}\&u_{2off}\&u_{3off})$

- Application de u_{1opt} , u_{2opt} et u_{3max} , et poursuite de la puissance optimale,

pour $(u_{1off}\&u_{2off}\&u_{3off}, u_{1opt}\&u_{2opt}\&u_{3max})$

- Application de u_{1off} , u_{2off} et u_{3off} pour le freinage et l'arrêt de l'éolienne,

pour $(u_{1max}\&u_{2max}\&u_{3on}, u_{1off}\&u_{2off}\&u_{3off})$

- Application de u_{1max} , u_{2max} et u_{3on} , et extraction de la puissance maximale,

pour $(u_{1off}\&u_{2off}\&u_{3off}, u_{1max}\&u_{2max}\&u_{3on})$

Nous avons donc pu définir le modèle de notre éolienne sous la forme d'un Automate Hybride (Fig. 11). Ce modèle permet de tenir compte non seulement des équations d'états continues du système mais aussi des transitions discrètes d'un mode de fonctionnement à un autre, ce qui permet une gestion plus complète et concrète de la commande de notre système.

11 Synthèse des lois de commande.

Le développement des lois de commande concernera chaque mode de commande. Il va de soi que ces lois de commande se doivent d'être robustes et de prendre en considération toute éventuelle erreur commise lors de la phase de modélisation, ou de mesure ou même les dynamiques omises ou inconnues.

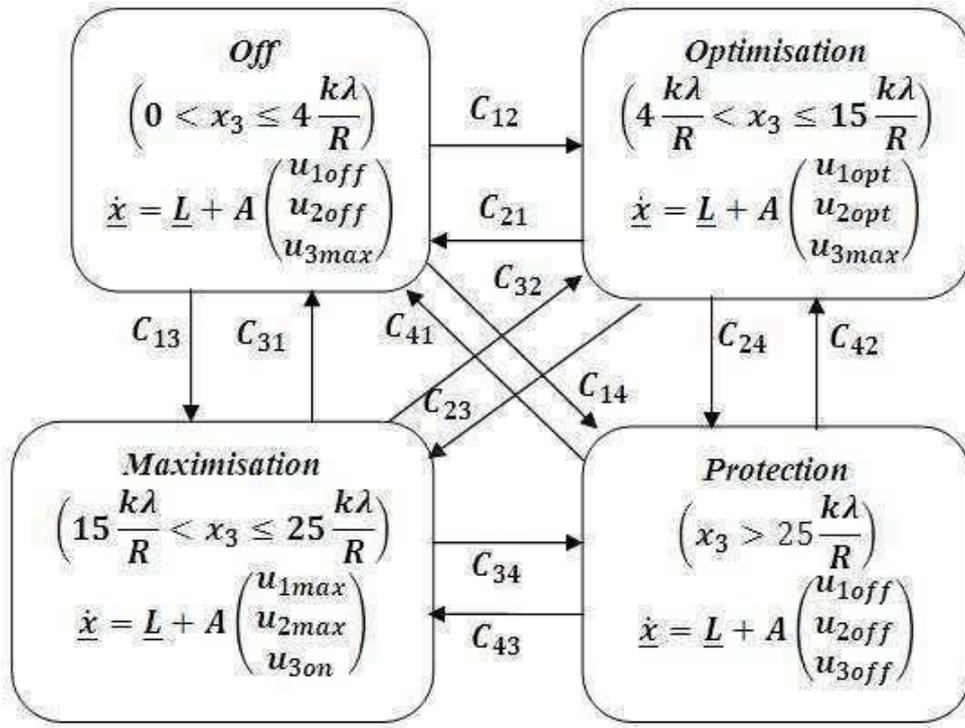


FIGURE 11 – Automate Hybride décrivant le comportement de l'éolienne.

Considération

Les lois de commande que nous développons concernent une certaine catégorie de systèmes qui présentent des équations d'état contenant au plus une variable de commande par équation. De plus, il serait préférable que le degré relatif correspondant à chaque sortie commandée n'excède la valeur 2, pour des raisons de stabilité, par analogie aux systèmes linéaires.

11.1 Étude de la commandabilité

La première étape importante et nécessaire, consiste en la vérification de la commandabilité de notre système. A cette fin, nous réécrivons notre système d'équations sous une forme adéquate, mettant en évidence les champs de vecteurs nécessaires à cette étude.

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 + g_3(x)u_3 \quad (81)$$

Nous procédons maintenant à l'étude de la commandabilité par rapport à chacune des variables de commande.

La commandabilité par rapport au signal de commande u_1 s'étudie via la matrice M_{u_1} définie par

$$M_{u_1} = \begin{pmatrix} g_1 & ad_f g_1 & ad_f^2 g_1 \end{pmatrix} \quad (82)$$

La commandabilité par rapport au signal de commande u_2 s'étudie via la matrice M_{u_2} définie par

$$M_{u_2} = \begin{pmatrix} g_2 & ad_f g_2 & ad_f^2 g_2 \end{pmatrix} \quad (83)$$

Nous étudions finalement la commandabilité par rapport à la troisième variable de commande grâce à la distribution M_{u_3} définie par

$$M_{u_3} = \left(g_3 \quad ad_f g_3 \quad ad_f^2 g_3 \right) \quad (84)$$

A titre d'exemple, les champs de vecteur relatifs à une éolienne à axe vertical munie de génératrice synchrone à aimant permanent et de rotor de type Savonius, se résument dans (Eq. 85), (Eq. 86), (Eq. 87) et (Eq. 88).

$$f(x) = \begin{pmatrix} -\alpha_0 x_1 + \alpha_1 x_2 x_3 \\ -\beta_0 x_1 + \beta_1 x_1 x_3 - \beta_2 \psi_m x_3 \\ -\gamma_0 x_3 - \gamma_1 \xi_2(x_2) \end{pmatrix} \quad (85)$$

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (86)$$

$$g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (87)$$

$$g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_2 \xi_3(x_3) \end{pmatrix} \quad (88)$$

Avec les paramètres

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{R_s}{L_{sd}}; & \alpha_1 &= \frac{L_{sq}}{L_{sd}}; & \alpha_2 &= \frac{1}{L_{sd}}; \\ \beta_0 &= \frac{R_s}{L_{sq}}; & \beta_1 &= \frac{L_{sd}}{L_{sq}}; & \beta_2 &= \frac{1}{L_{sq}}; \\ \gamma_0 &= \frac{B_m}{J}; & \gamma_1 &= \frac{k}{J}; & \gamma_2 &= \frac{1}{J}; \end{aligned}$$

Le calcul élémentaire, mais fastidieux, des matrices M_{u_1} , M_{u_2} et M_{u_3} a permis d'aboutir aux expressions suivantes ;

$$M_{u_1} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_0 \alpha_2 & \alpha_0^2 \alpha_2 + \alpha_0 \alpha_1 \beta_1 x_3 \\ 0 & -\alpha_0 \beta_1 x_3 & \sigma_{32}(x_2, x_3) \\ 0 & 0 & -3\alpha_0 \beta_1 \gamma_1 \beta_2 \psi_{md} x_3 \end{bmatrix} \quad (89)$$

$$M_{u_2} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_1 \beta_2 x_3 & \gamma_{31}(x_2, x_3) \\ \beta_2 & \beta_0 \beta_2 & \gamma_{32}(x_1, x_3) \\ 0 & 3\gamma_1 \beta_2 \psi_{md} & 3\gamma_1 \beta_2 \psi_{md} (\beta_0 - \gamma_0) \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$M_{u_3} = \begin{bmatrix} 0 & \xi_{21}(x_2, x_3) & \xi_{31}(x_1, x_2, x_3) \\ 0 & \xi_{22}(x_1, x_3) & \xi_{32}(x_1, x_2, x_3) \\ \gamma_2 \xi_3(x_3) & \gamma_0 \gamma_2 \xi_3(x_3) & \xi_{33}(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \quad (91)$$

A partir des résultats de calcul des matrices M_{u_1} et M_{u_2} , il paraît, clairement, que les états x_2 et x_3 sont localement commandables par u_1 , à la condition suffisante que l'état x_3 ne soit pas nul. Il apparait, par ailleurs que les trois états sont localement commandables par u_2 . Enfin, la détermination de la matrice M_{u_3} présente des calculs fastidieux, il suffirait de déduire à partir de sa première colonne la condition suffisante de la commandabilité de la troisième variable d'état, qui est la non nullité de celle-ci.

Nous pouvons résumer ce qui précède en disant que le système est complètement localement commandable tant que la troisième variable d'état n'est pas nulle. Ce qui signifie, étant donné le fait que cette variable n'est autre que la vitesse angulaire du rotor, que notre éolienne est commandable tant que celle-ci tourne. De plus, nous remarquons que chaque variable de commande peut commander la variable d'état correspondante. Nous pouvons donc penser à l'utilisation de commande linéarisante, découplante par géométrie différentielle.

Soulignons finalement que les composantes $\sigma_{32}(t)$, $\gamma_{31}(t)$, $\gamma_{32}(t)$, $\xi_{21}(t)$, $\xi_{22}(t)$, $\xi_{31}(t)$, $\xi_{32}(t)$ et $\xi_{33}(t)$ sont des expressions analytiques longues - avec plus ou moins de complexité - reliant les variables d'état aux paramètres du système. Leurs expressions respectives ne présentent cependant pas un intérêt primordial puisque la condition sur la vitesse de rotation x_3 est largement suffisante, étant donné le fait qu'il n'y ait pas de commande proprement dite lorsque l'éolienne est à l'arrêt ($x_3 = 0$).

Afin de commander une éolienne à vitesse variable, la stratégie la plus adoptée consiste à imposer une courbe optimale comme référence, puis de définir une loi de commande pour l'asservissement en vitesse qui permettrait de suivre cette courbe optimale. La composante q de la tension de la génératrice est alors utilisée pour commander la puissance (couple), pendant que la composante d est dédiée à la commande de la puissance réactive ou à l'annulation de la composante d du courant, s'agissant de la commande par couple maximum [12]. Cette dernière stratégie de commande sera utilisée dans le cadre de ce travail.

L'approche que nous venons de décrire, qui consiste à définir une courbe optimale à poursuivre, ne garantit nullement la convergence de la vitesse de rotation avant que la puissance n'atteigne sa propre référence. Nous proposons, comme première étape, l'utilisation de la commande par Backstepping, en définissant une fonction candidate de Lyapunov appropriée, afin de garantir que nos variables atteignent leurs références. Cette stratégie de commande n'est bien entendu pas robuste, raison pour laquelle, nous proposons une version robuste de celle-ci afin d'en comparer les résultats.

11.2 La commande classique par Backstepping avec retour d'état simple

Stratégie de commande dans le premier mode.

Dans ce mode, le système est libre. Aucune commande n'est appliquée concernant $u_1 = v_d$ et $u_2 = v_q$, exceptée pour la troisième commande u_3 qui prend sa valeur maximale.

Stratégie de commande pour le deuxième mode.

L'objectif, dans ce mode est la poursuite de courbe de production optimale de l'énergie, impliquant l'utilisation de la variable x_2 pour la commande de x_3 , et l'utilisation de la variable de commande $u_2 = v_q$ pour la commande de x_2 . L'utilisation de la méthodologie du Backstepping s'avère donc indispensable.

Le développement de la loi de commande par Backstepping nécessite la passage par des étapes. Dans notre cas, le système étant d'ordre 2, deux étapes sont nécessaires à l'élaboration de la loi de commande.

étape 1. Commander x_3 en utilisant x_2

Nous choisissons dans un premier temps la fonction candidate de Lyapunov

$$V_3 = \frac{1}{2} (x_3 - x_{3r})^2 \quad (92)$$

La dérivée temporelle de V_3 devra être définie négative

$$\dot{V}_3 = (x_3 - x_{3r}) (\dot{x}_3 - \dot{x}_{3r}) \quad (93)$$

La référence de x_2 est alors

$$x_{2r} = \frac{1}{-\gamma_1} [\gamma_0 x_3 - \gamma_2 \xi_3 u_3 + \dot{x}_{3r} - K_3 (x_3 - x_{3r})] \quad (94)$$

x_{2r} et x_{3r} sont les références respectives des deux variables d'état x_2 et x_3 , et K_3 une constante positive.

étape 2. Commander x_2 en utilisant u_2

A cette fin, nous définissons la fonction candidate de Lyapunov, ainsi que sa dérivée par rapport au temps.

$$V_2 = \frac{1}{2} (x_2 - x_{2r})^2 + \frac{1}{2} (x_3 - x_{3r})^2 \quad (95)$$

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{2} (x_2 - x_{2r}) (\dot{x}_2 - \dot{x}_{2r}) + \frac{1}{2} (x_3 - x_{3r}) (\dot{x}_3 - \dot{x}_{3r}) \quad (96)$$

La loi de commande est alors

$$u_2 = \frac{1}{\beta_2} [\beta_0 x_2 - \beta_1 x_1 x_3 + \beta_2 \psi_{md} x_3 + \dot{x}_{2r} - K_2 (x_2 - x_{2r})] \quad (97)$$

K_2 étant une constante positive.

La commande de la variable x_1 a pour objectif d'annuler cette variable d'état pour une commande par couple maximal. La méthodologie adoptée est celle de Lyapunov.

Nous définissons la fonction candidate de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} (x_1 - x_{1r})^2 \quad (98)$$

x_{1r} est une dynamique choisie convergeant vers zéro.

$$\dot{x}_{1r} = a_{m1}x_{1r} + b_{m1}r \quad (99)$$

Tels que

r est une référence nulle

$a_{m1}; b_{m1}$ sont les paramètres à choisir selon la dynamique désirée

La dérivée de V_1 se doit d'être définie négative. La loi de commande adoptée est alors ;

$$v_1 = \dot{x}_{1r} - K_1 (x_1 - x_{1r}) \quad (100)$$

Avec K_1 une constante positive choisie selon la dynamique désirée.

u_3 quant à elle gardera sa valeur maximale permettant un maximum d'énergie d'être disponible au niveau du rotor de la turbine.

Stratégie de commande pour le troisième mode.

L'objectif dans ce mode est la limitation des variables physiques, raison pour laquelle les références seront assignées aux valeurs maximales des sorties correspondantes.

Nous appliquerons tout d'abord la commande linéarisante découplante, pour ensuite appliquer un retour d'état simple.

$$u = A^{-1} [-L_e + v] \quad (101)$$

Avec v le vecteur des trois commandes virtuelles à déterminer.

Les expressions des commande virtuelles seront comme suit

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{x}_{1r} - K_1 (x_1 - x_{1r}) \\ v_2 &= \dot{x}_{2r} - K_2 (x_2 - x_{2r}) \\ v_3 &= \dot{x}_{3r} - K_3 (x_3 - x_{3r}) \end{aligned} \quad (102)$$

K_i (1, 2, 3) sont des constantes positives à fixer selon les dynamiques désirées.

Stratégie de commande pour le quatrième mode.

Dans ce dernier mode, les références seront mises à zéro, ce qui mettra le système hors service pour des raisons de protection. Les commandes auront quant à elles les mêmes expressions que

pour le mode précédent.

11.3 La commande par Modes Glissants simple

Stratégie de commande pour le premier mode.

De même que pour la commande précédente, le système est libre, dans ce premier mode. Aucune commande n'est appliquée concernant u_1 et u_2 , seule la troisième commande u_3 prend sa valeur maximale, dans l'attente de vitesses de vent plus importantes.

Stratégie de commande pour le deuxième mode.

La stratégie de commande adoptée est de considérer la commande linéarisante découplante, en laissant uniquement la composante $K_{x_2}x_2$ dans l'expression de l'équation (Eq. 77), telle que $K_{x_2} = \frac{Cste}{J}$. Après avoir suivi les différentes étapes de Backstepping, et ajouté la composante glissante, la commande totale aura pour expression (Eq. 103)

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{\beta_2} [\beta_0 x_2 - \beta_1 x_1 x_3 + \beta_2 \psi_{md} x_3 + v_2] \\ v_2 &= \dot{x}_{2r} - K_2 \text{sign}(x_2 - x_{2r}) \end{aligned} \quad (103)$$

Avec K_2 une constante positive déterminée selon la dynamique désirée, et v_2 la commande virtuelle à appliquer dans la nouvelle base, après linéarisation.

Afin de commander la composante d du courant, nous définissons la fonction candidate de Lyapunov (Eq. 98), avec la même référence x_{1r} à la dynamique convergeant vers zéro (Eq. 99). La dérivée de V_1 se devant d'être définie négative, la loi de commande adoptée est alors ;

$$v_1 = \dot{x}_{1r} - K_1 \text{sign}(x_1 - x_{1r}) \quad (104)$$

K_1 étant une constante positive imposant la dynamique désirée.

La troisième variable de commande quant à elle, reste à son maximum pour ce deuxième mode.

Stratégie de commande pour le troisième mode.

Il s'agit du mode de limitation des variables de sortie.

Les lois de commandes virtuelles, après application de la commande linéarisante et découplante, auront les expressions

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{x}_{1r} - K_1 \text{sign}(x_1 - x_{1r}) \\ v_2 &= \dot{x}_{2r} - K_2 \text{sign}(x_2 - x_{2r}) \\ v_3 &= \dot{x}_{3r} - K_3 \text{sign}(x_3 - x_{3r}) \end{aligned} \quad (105)$$

Stratégie de commande pour le quatrième mode.

Les commandes appliquées dans ce mode ont des expressions similaires à celles du mode 3, excepté pour les références qui se voient assignées à la valeur nulle. Le système sera mis hors service pour des raisons de protection.

11.4 La commande par Modes Glissants-2 avec fonction filtre

11.4.1 Principe.

La stratégie de commande adoptée est de considérer une fonction filtre comme étant une surface de glissement. Étant donné le système d'équations (Eq. 106)

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = x_2 + \varphi_1(z) \\ \dot{z}_2 = x_3 + \varphi_2(z) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = u + \varphi_n(z) \end{cases} \quad (106)$$

Étant donnés les objectifs de commande, nous proposons la fonction

$$S = \left(z_1^{(n-1)} - z_{1r}^{(n-1)} \right) + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_j \left(z_1^{(j)} - z_{1r}^{(j)} \right) \quad (107)$$

$z_1^{(j)}$ est la $j^{\text{ème}}$ dérivée de la variable z_1 .

Cette fonction peut être vue comme un filtre avec des paramètres λ_j à choisir selon la dynamique désirée pour l'erreur de poursuite $(z_1 - z_{1r})$. La dérivée de S par rapport au temps donne (Eq. 108) ou (Eq. 109)

$$\dot{S} = \left(z_1^{(n)} - z_{1r}^{(n)} \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \left(z_1^{(j)} - z_{1r}^{(j)} \right) \quad (108)$$

$$\dot{S} = \left(u + \varphi_n(z) - z_{1r}^{(n)} \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \left(z_1^{(j)} - z_{1r}^{(j)} \right) \quad (109)$$

La loi de commande que nous considérons est telle que $S\dot{S} < 0$, garantissant la convergence de l'erreur de poursuite vers 0.

$$u = -\varphi_n(z) + z_{1r}^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \left(z_1^{(j)} - z_{1r}^{(j)} \right) - K \text{sign}(S) \quad (110)$$

Telle que K une constante positive.

Afin d'étudier la robustesse de cette loi de commande, on considèrera une erreur de modélisation $\Delta_m(x)$. La loi de commande prendra alors la forme (Eq. 111).

$$u = -\varphi_n(z) + z_{1r}^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \left(z_1^{(j)} - z_{1r}^{(j)} \right) - \Delta_m(z) - K \text{sign}(S) \quad (111)$$

Le produit $S\dot{S}$ vaudra alors

$$S\dot{S} = [\Delta_m(z) - K \text{sign}(S)] S \quad (112)$$

On peut clairement dire que cette commande est robuste vis à vis d'erreurs de modélisation n'excédant pas K dans leurs valeurs absolues.

11.4.2 Application.

Afin de commander notre système, nous avons d'abord appliqué la loi de commande (Eq. 113). Cette dernière est basée sur l'approche de la géométrie différentielle, permettant de passer vers une nouvelle base.

$$\underline{u} = A^{-1} [-\underline{L}_e + \underline{v}] \quad (113)$$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T$ est la nouvelle commande virtuelle à déterminer.

La méthodologie de commande étant définie, nous passons à son application à notre système.

Stratégie de commande dans le premier mode.

Dans ce mode, le système est libre. Aucune commande particulière n'est appliquée, excepté la troisième commande qui est assignée à sa valeur maximale.

Stratégie de commande pour le deuxième mode.

L'objectif, dans ce mode est de poursuivre la courbe optimale pour la puissance (couple). La dernière variable de commande sera toujours maintenue à sa valeur maximale, et nous appliquerons la méthode suggérée précédemment, en utilisant la fonction S , définie dans (Eq. 114).

$$S = (\dot{x}_3 - \dot{x}_{3r}) + \lambda (x_3 - x_{3r}) \quad (114)$$

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par (Eq. 115)

$$\dot{S} = (\ddot{x}_3 - \ddot{x}_{3r}) + \lambda (\dot{x}_3 - \dot{x}_{3r}) \quad (115)$$

La référence x_{3r} correspond à la courbe de la vitesse angulaire qui permettrait une extraction optimale de la puissance. S'agissant d'une éolienne à axe vertical à rotor de Savonius, alors la puissance optimale extraite est obtenue lorsque la vitesse spécifique est l'unité. La référence pour x_3 est alors (Eq. 116)

$$x_{3r} = \frac{kV_w}{R} \quad (116)$$

La loi de commande adoptée est donc

$$v_2 = \ddot{x}_{3r} - \lambda (\dot{x}_3 - \dot{x}_{3r}) - K_3 \text{sign}((\dot{x}_3 - \dot{x}_{3r}) + \lambda (x_3 - x_{3r})) \quad (117)$$

La commande de la composante d du courant s'établit avec la même démarche que celle du paragraphe (11.3).

v_3 est maintenue à zéro, étant donné l'objectif d'extraction de la puissance maximale. La loi de commande que nous avons déterminée précédemment présente des résultats avec un phéno-

mène de shattering, raison pour laquelle nous considérons un facteur additionnel dans cette loi de commande, qui est l'erreur de poursuite. Cette loi de commande prendra alors l'allure

$$v_1 = \dot{x}_{1r} - K_1 F_1 \text{sign}(x_1 - x_{1r}) \quad (118)$$

$$v_2 = \ddot{x}_{3r} - \lambda (\dot{x}_3 - \dot{x}_{3r}) - K_3 F_3 \text{sign}((\dot{x}_3 - \dot{x}_{3r}) + \lambda (x_3 - x_{3r})) \quad (119)$$

Cette dernière modification peut être vue comme un facteur de pondération pour les gains K_1 et K_3 qui augmente et diminue avec l'erreur de poursuite, ce qui améliore la qualité des signaux de sortie et des erreurs de poursuite. En d'autres termes, la loi de commande utilise des gains adaptatifs à la place des gains constants.

Stratégie de commande pour le troisième mode.

Dans ce mode, nous considérons trois sous-systèmes découplés. La stratégie de commande pour la composante d du courant restera la même. Le découplage sera total, contrairement au mode précédent, où la variable x_2 serait maintenue pour commander x_3 . Quant aux références, celles-ci seront assignées à des valeurs maximales afin de protéger le système. Les lois de commandes sont alors ;

$$\begin{cases} v_1 = \dot{x}_{1r} - K_1 F_1 \text{sign}(x_1 - x_{1r}) \\ v_2 = \dot{x}_{2r} - K_2 F_2 \text{sign}(x_2 - x_{2r}) \\ v_3 = \dot{x}_{3r} - K_3 F_3 \text{sign}(x_3 - x_{3r}) \end{cases} \quad (120)$$

Les facteurs de pondération F_i peuvent être une dynamique positive suivant l'évolution de l'erreur de poursuite. Pour la partie simulation, nous avons effectué des essais en considérant la valeur absolue de l'erreur de poursuite ainsi qu'une interpolation polynomiale dynamique d'ordre 5.

Stratégie de commande pour le quatrième mode.

Les références seront mises à zéro, ce qui mettra le système hors service pour des raisons de protection.

11.5 La commande adaptative

La commande adaptative appliquée est développée selon la méthode décrite dans la sous-section (6.1).

En se référant aux équations (Eq. 77), les paramètres à estimer sont définis selon (Eq. 121)

$$\begin{aligned} \theta_{11} &= \frac{R_s}{L_{sd}}; & \theta_{12} &= \frac{L_{sq}}{L_{sd}} & \text{et} & \theta_{13} &= \frac{1}{L_{sd}} \\ \theta_{21} &= \frac{R_s}{L_{sq}}; & \theta_{22} &= \frac{L_{sd}}{L_{sq}} & \text{et} & \theta_{23} &= \frac{1}{L_{sq}} \\ \theta_{31} &= \frac{B_m}{J}; & \theta_{32} &= \frac{k}{J} & \text{et} & \theta_{33} &= \frac{1}{J} \end{aligned} \quad (121)$$

Stratégie de commande pour le premier mode.

Comme précédemment, le système dans ce mode est libre, la dernière variable de commande est mise à sa valeur maximale, dans l'attente de vitesses de vent considérables.

Stratégie de commande pour le deuxième mode.

Il s'agit de poursuite de courbe de puissance optimale. Nous appliquerons tout d'abord la commande linéarisante découplante avec utilisation des paramètres estimés selon la méthode des Moindres Carrés Récurrents (MCR). Les expressions des commandes virtuelles se donnent par

$$v_1 = \dot{x}_{1r} - K_1 e_1 \quad (122)$$

$$v_2 = \ddot{x}_{3r} + \alpha_1 \dot{e}_3 + \alpha_0 e_3 \quad (123)$$

v_3 est mise à zéro

u_3 est assignée à sa valeur maximale pour une extraction maximale de l'énergie

Où K_1 , α_1 et α_0 sont des constantes à déterminer selon la dynamique désirée.

Stratégie de commande pour le troisième mode.

L'objectif dans ce mode est la limitation des différentes grandeurs physiques pour la sécurité de la structure et du système globalement. Après application de la commande linéarisante et découplante, en utilisant les paramètres estimés par les MCR, le système total sera vu comme trois systèmes SISO, et les commandes correspondantes sont comme suit

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{x}_{1r} - K_1 e_1 \\ v_2 &= \dot{x}_{2r} - K_2 e_2 \\ v_3 &= \dot{x}_{3r} - K_3 e_3 \end{aligned} \quad (124)$$

Stratégie de commande pour le quatrième mode.

Les commandes appliquées dans ce mode ont des expressions similaires à celles du mode 3, excepté pour les références qui se voient assignées à la valeur nulle.

Les différentes simulations que nous avons conduites ont aboutit à des résultats robustes par zone, mais non robuste face aux transitions d'une zone à l'autre.

En effet, les transitions d'une zone à l'autre introduisent des discontinuités, et donc des signaux rapides et riches en fréquence, qui pourraient se répercuter sur les variations des paramètres (variations équivalentes en variations paramétriques).

Le manque de robustesse lors des transitions peut donc tout simplement s'expliquer par le fait que la commande adaptative elle-même est conçue pour une robustesse vis à vis des variations paramétriques. En plus de l'hypothèse que ces variations soient très lentes, afin de pouvoir négliger les dérivées temporelles de ces paramètres, et aboutir à la dynamique de leurs estimées respectives.

11.6 La commande “Twisting Algorithm”

Stratégie de commande pour le premier mode.

De même que pour toutes les commandes précédentes, le système dans ce mode est libre, et la dernière variable de commande prend sa valeur maximale, dans l’attente de vitesses de vent considérables pour la production d’énergie signifiante.

Stratégie de commande pour le deuxième mode.

L’objectif, dans ce mode est la poursuite de la courbe optimale de la puissance (couple). La dernière variable de commande sera toujours maintenue à sa valeur maximale. Nous procédons par la méthode similaire à la commande par glissement simple, à laquelle nous substituons les parties glissantes par u_{Ti} ($i = 1, 2$), telles que

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{x}_{1r} + u_{T1} \\ v_2 &= \dot{x}_{2r} + u_{T2} \\ v_3 &= 0 \end{aligned} \quad (125)$$

$$\dot{u}_{Ti} = \begin{cases} -u_{Ti} & \text{pour } |u_{Ti}| > 1 \\ -\alpha_{mi} \text{sign}(S_i) & \text{pour } S_i \dot{S}_i \leq 0; |u_{Ti}| \leq 1 \\ -\alpha_{Mi} \text{sign}(S_i) & \text{pour } S_i \dot{S}_i > 0; |u_{Ti}| \leq 1 \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (126)$$

Telles que les S_i ($i = 1, 2$) sont les surfaces de glissement choisies dans notre application comme étant une dynamique de l’erreur de poursuite convergeant vers zéro.

La référence pour x_2 sera déterminée par la méthodologie du Backstepping. Et la référence pour x_3 est établie pour l’extraction de la puissance optimale. Quant à x_{1ref} , elle restera nulle pour une commande à couple maximal.

Stratégie de commande pour le troisième mode.

La commande pour ce mode est presque identique à la précédente, les référence diffèrent dans le sens où l’objectif de ce mode est celui de la limitation de l’énergie produite et des grandeurs physiques pour la protection de la structure. De plus, la commande découplante est appliquée directement, ne laissant aucune composante telle que pour l’application de la commande par Backstepping précédemment appliquée.

Les expressions des commandes sont données par (Eq. 127) et (Eq. 128), et les références seront assignées à leurs valeurs maximales.

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{x}_{1r} + u_{T1} \\ v_2 &= \dot{x}_{2r} + u_{T2} \\ v_3 &= \dot{x}_{3r} + u_{T3} \end{aligned} \quad (127)$$

$$\dot{u}_{Ti} = \begin{cases} -u_{Ti} & \text{pour } |u_{Ti}| > 1 \\ -\alpha_{mi} \text{sign}(S_i) & \text{pour } S_i \dot{S}_i \leq 0; |u_{Ti}| \leq 1 \\ -\alpha_{Mi} \text{sign}(S_i) & \text{pour } S_i \dot{S}_i > 0; |u_{Ti}| \leq 1 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (128)$$

Stratégie de commande pour le quatrième mode.

Dans ce mode toutes les variables de sortie auront des références nulles. La dernière variable de commande sera nulle, et le système mis hors service pour la protection de la structure physique.

11.7 La commande du convertisseur de puissance

Pour la commande du convertisseur [26], une synthèse de régulateur au préalable s'impose, donnant ainsi la référence à la tension, qui sera par la suite commandée par Modulation de Largeur d'Impulsion (MLI ou PWM).

Le principe de la commande par MLI consiste à générer une onde porteuse pour chaque phase, généralement choisie triangulaire. A cette porteuse sera comparée la tension en ligne consigne. Selon cette dernière erreur, les interrupteurs de la branche correspondante se verront ouverts ou fermés ;

Pour la branche *a* par exemple :

Si $V_{aRef} > V_p$ *alors* K_{a1} *est fermé* ($S_a = 1$)

Si $V_{aRef} < V_p$ *alors* K_{a2} *est fermé* ($S_a = 0$)

V_p étant la tension de la porteuse

V_{aRef} la tension de référence pour la tension V_a

12 Simulations et résultats.

12.1 Séquence de vitesses de vent considérée

Afin de générer des séquences de vitesses de vent pour notre système, nous faisons appel à la méthode de combinaison linéaire entre les différents types de vitesses, à savoir le modèle (Eq. 68). La figure (Fig. 12) illustre la séquence utilisée lors de la simulation ; il s'agit d'une rampe qui comporte des séquences de vitesses de vent balayant tous les modes de fonctionnement du système, et permettant aussi d'illustrer la poursuite de notre système.

12.2 Activité des switches

Les premières simulations ont été effectuées en supposant un modèle parfait sans erreurs de modélisations. On peut remarquer aisément le comportement de notre système dans chacun des modes, dont l'activité est illustrée dans la figure (Fig. 13), où le système effectue sa poursuite de courbe optimale, courbes maximales et les remises à zéro.

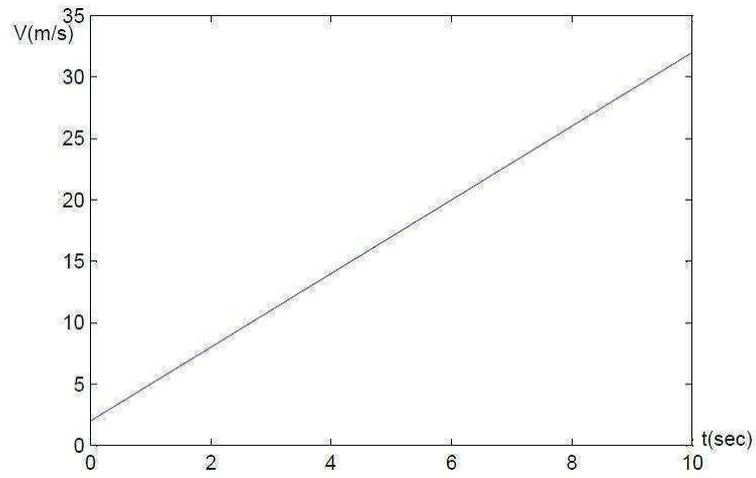


FIGURE 12 – Séquences de vitesses de vent utilisées pour la simulation.

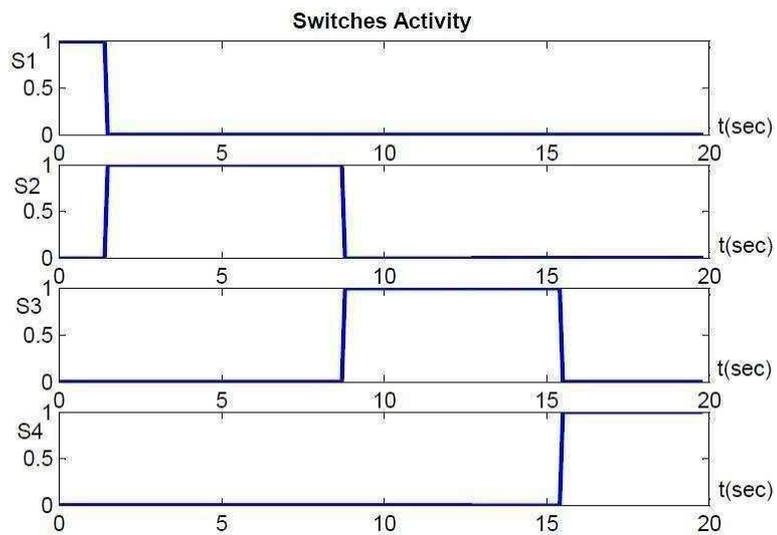


FIGURE 13 – L'activité des commutations de commande

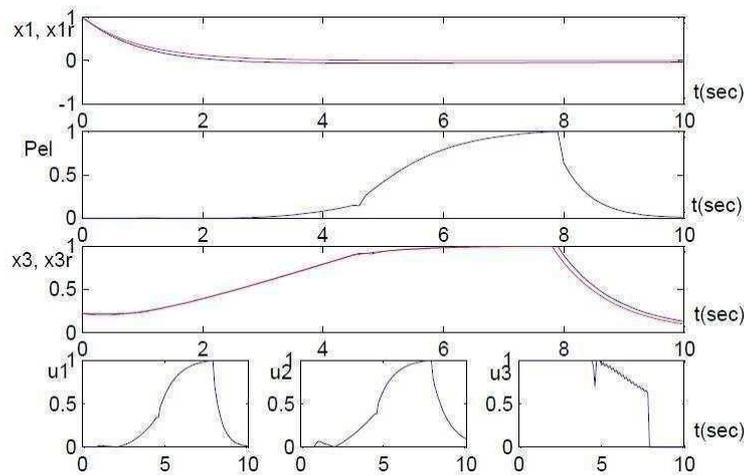


FIGURE 14 – Résultats de simulation, avec application de la commande classique par Backstepping, en ne considérant aucune erreur de modélisation

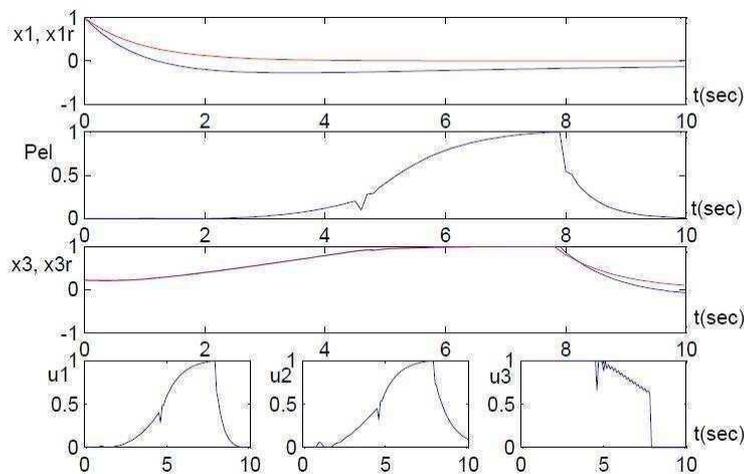


FIGURE 15 – Résultats de simulation, avec application de la commande classique par Backstepping, en considérant 30% d'erreurs sur les paramètres du modèle

12.3 Résultats de la commande par Backstepping

Ces premières simulations concernent l'application de la commande par Backstepping (Fig. 14), qui n'est bien entendu pas robuste, néanmoins, de par sa simplicité et la structure même du système, nous avons choisi de l'appliquer à titre comparatif avec les commandes robustes que nous avons développées dans la sous-section (11).

On constate clairement qu'une erreur de 30% (Fig. 15) sur le modèle a introduit des résultats de poursuite non satisfaisants. En effet, la composante i_d du courant s'éloigne de la référence nulle, ce qui ne satisfait plus la condition de la commande à couple maximum. On voit également que la vitesse angulaire ne suit plus la référence, ce qui signifie que la poursuite de la courbe de puissance optimale n'est plus garantie.

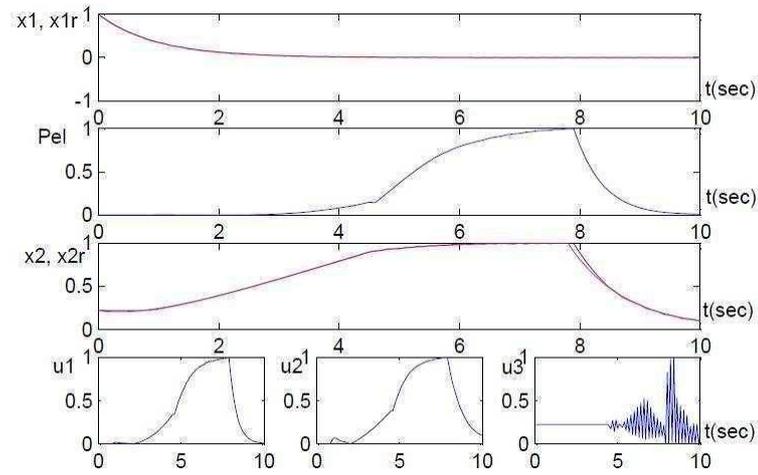


FIGURE 16 – Résultats de la commande glissante classique sans erreurs

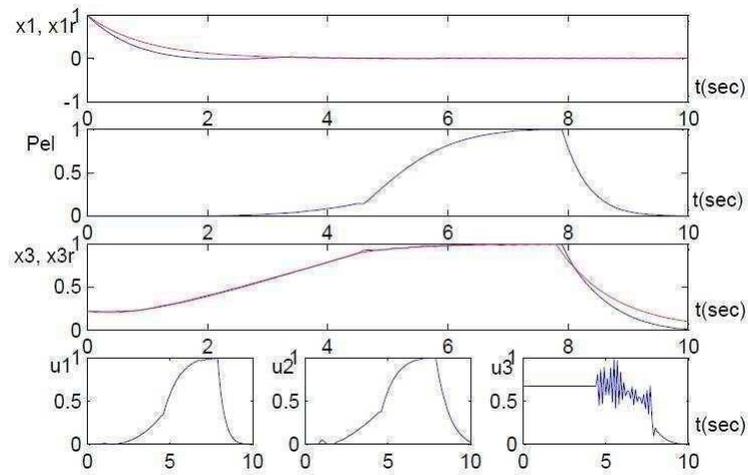


FIGURE 17 – Résultats de la commande glissante classique en présence d'erreurs

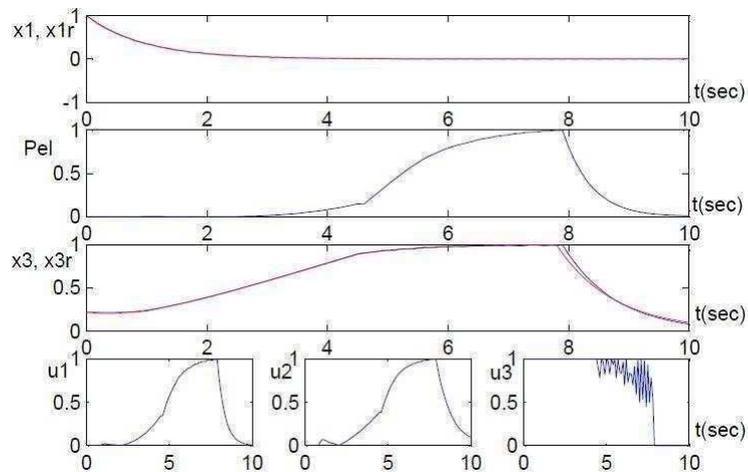


FIGURE 18 – Résultats de simulation de la commande glissante-2 avec fonction filtre et gain adaptatif, en considérant le modèle parfait

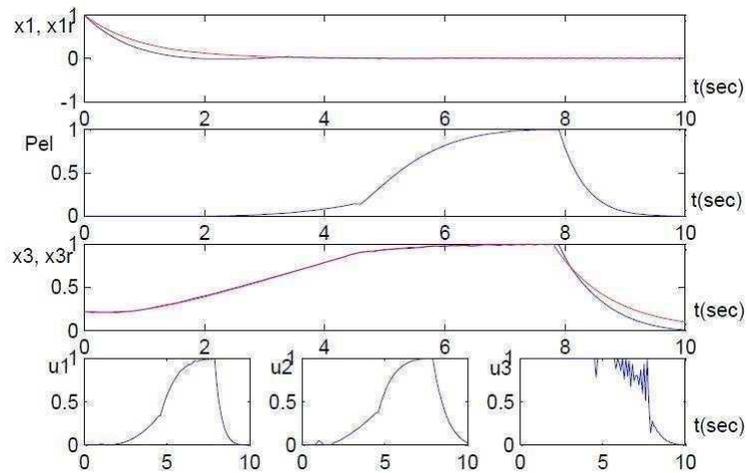


FIGURE 19 – Résultats de simulation de la commande glissante-2 avec fonction filtre et gain adaptatif, en considérant 30% d'erreurs sur les paramètres du modèle

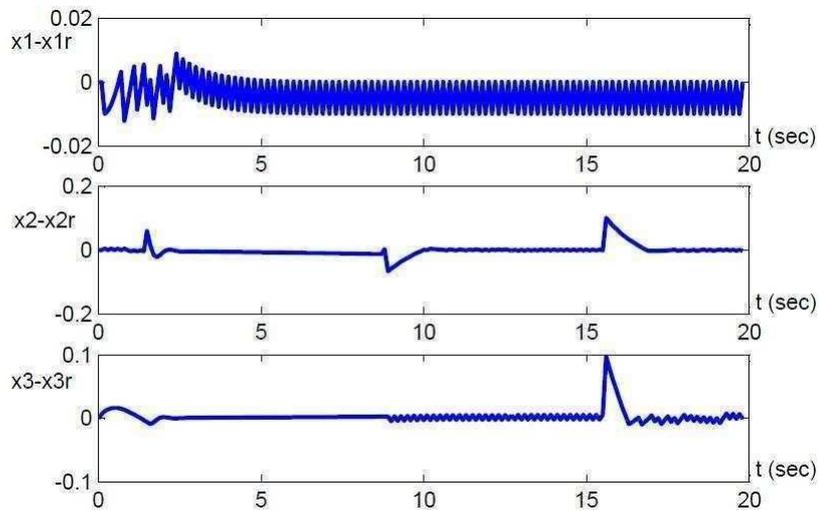


FIGURE 20 – Erreurs de poursuite correspondant à la commande glissante-2 sans fonction filtre, avec 30% erreurs sur les paramètres du modèle

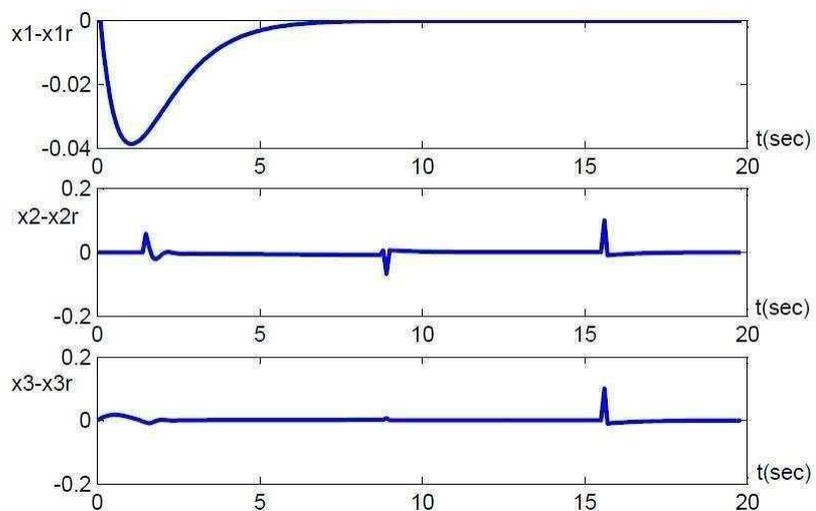


FIGURE 21 – Erreurs de poursuite correspondant à la commande glissante-2 avec fonction filtre et gain adaptatif, en introduisant 30% d'erreurs sur les paramètres du modèle

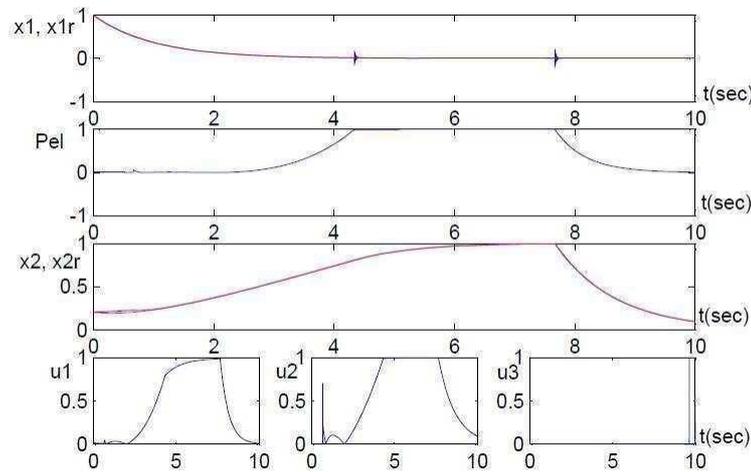


FIGURE 22 – Résultats de simulation pour la commande adaptative correspondant au modèle parfait

12.4 Résultats de la commande classique par modes glissants

Les simulations ont été établies pour deux cas de figures. Le modèle a d'abord été considéré parfait (Fig. 16), puis une erreur de modélisation a été introduite afin de tester la robustesse de la commande (Fig. 17).

Il apparaît clairement que cette commande présente des résultats de poursuite satisfaisant vis à vis des erreurs introduite.

12.5 Résultats de la commande glissante d'ordre 2 sans fonction filtre, puis avec fonction filtre

Les résultats de simulation correspondant à cette commande concernent également les deux cas de figure du modèle parfait (Fig. 18) et du modèle avec erreurs (Fig. 19).

Afin de mettre en évidence l'amélioration apportée par cette technique par rapport à la précédente, nous présentons les erreurs de poursuite. Il apparaît clairement que cette deuxième commande présente des courbes plus lisses (Fig. 21) par rapport à la commande glissante classique (Fig. 20), hormis les pics dûs aux commutations.

12.6 Résultats de la commande adaptative

Concernant la commande adaptative, on observe que les sorties convergent vers leurs références (Fig. 22) avec des pics importants lors des transitions.

Les résultats de simulation de la figure (Fig. 23), montrent clairement la convergence des sorties vers leurs références, avec la présence d'erreurs de modélisation de type variations paramétriques de 30%, ce qui illustre la robustesse de cette commande face à de telles erreurs de modélisation.

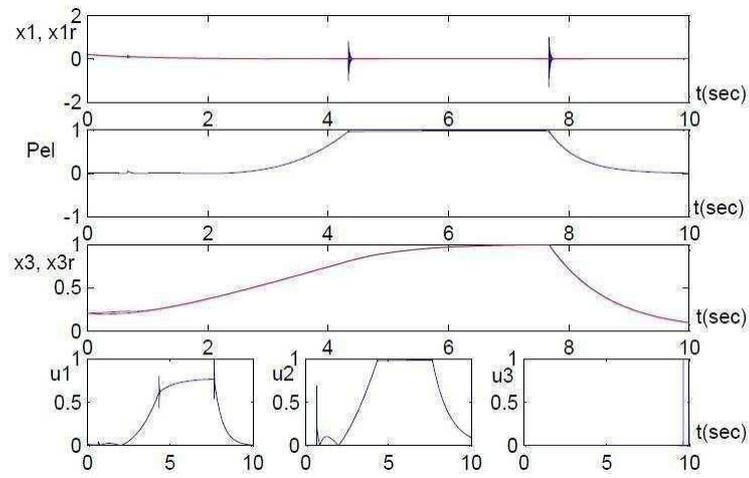


FIGURE 23 – Résultats de simulation pour la commande adaptative correspondant à 30% d'erreurs sur les paramètres du modèle

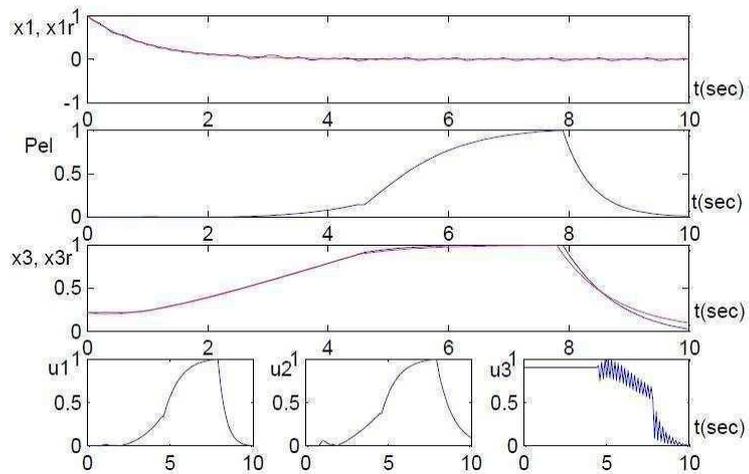


FIGURE 24 – Résultats correspondant au Twisting Algorithm

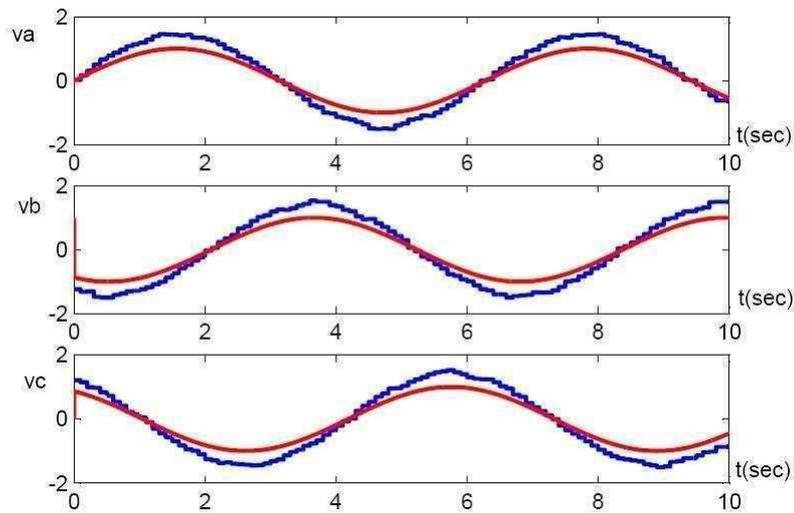


FIGURE 25 – Les trois tensions en utilisant une porteuse triangulaire

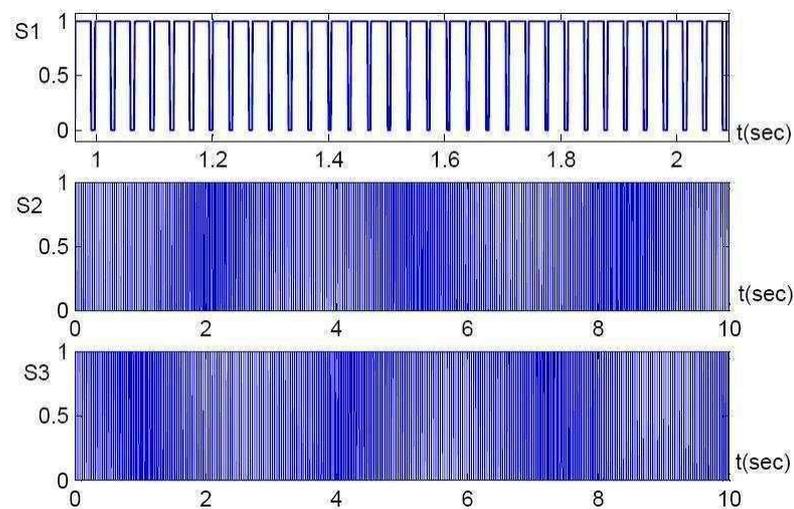


FIGURE 26 – Les signaux de commande, en utilisant une porteuse triangulaire

12.7 Résultats de la commande Twisting Algorithm

Concernant la commande du Twisting Algorithm, les résultats sont présentés en présence d'erreurs de modélisation (Fig. 24). Certaines oscillations persistent autour de la courbe consigne, néanmoins, elles sont moins rudes que les dents de scie de la commande glissante classique.

12.8 Signaux du convertisseur de puissance

Les résultats de simulations pour la commande du convertisseur sont présentés de sorte à mettre en évidence la différence porteuse sinusoïdale versus porteuse triangulaire. Il s'avère clairement que la porteuse sinusoïdale a donné des résultats plus convaincants en termes de précision et de qualité des signaux.

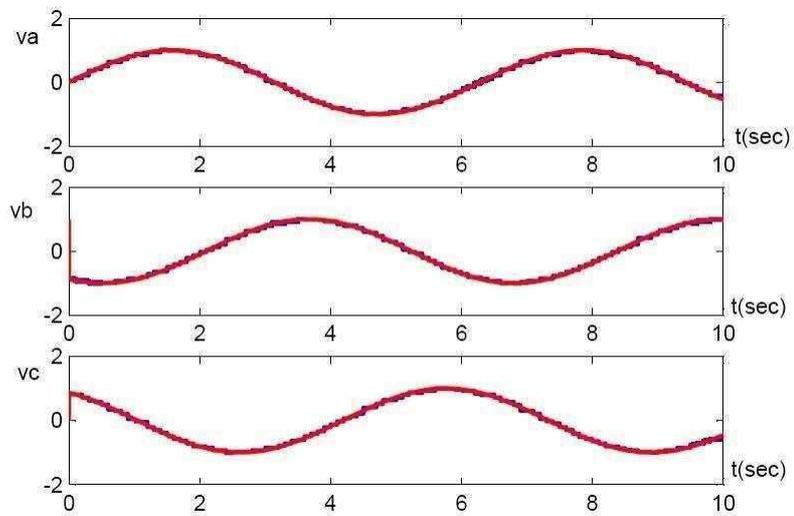


FIGURE 27 – Les trois tensions, en utilisant une porteuse sinusoïdale

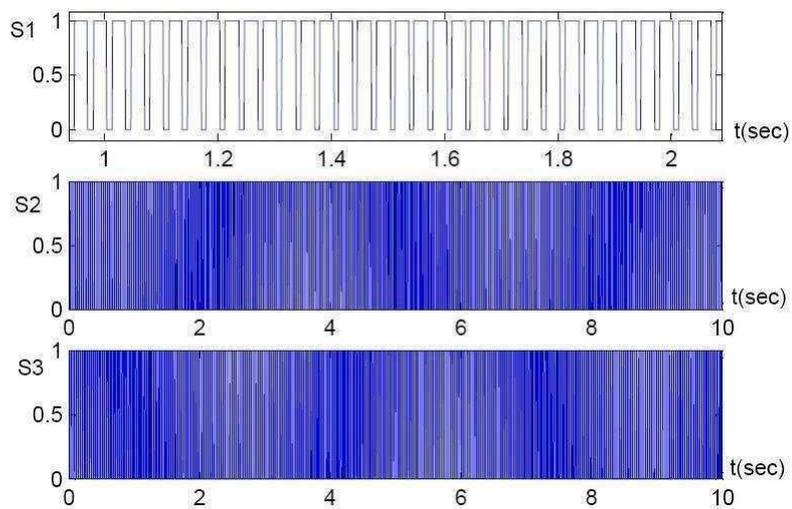


FIGURE 28 – Les signaux de commande des bras de convertisseur, en utilisant une porteuse sinusoïdale

Quatrième partie

ÉTUDE COMPARATIVE ENTRE PLUSIEURS TECHNIQUES DE COMMANDES ROBUSTES APPLIQUÉES À LA TUMEUR

Dans cette partie, nous procédons à l'application des notions théoriques que nous avons développées à une seconde application, en l'occurrence les tumeurs, et plus particulièrement aux tumeurs de la peau de type carcinome. Cette application a suscité un intérêt de part la nature non linéaire de son modèle mathématique qui diffère de celle du modèle de l'application précédente. Il en est de même pour la nécessité de commandes de type robuste, tenant en considération les éventuelles erreurs de modélisation lors de l'élaboration des lois de commande, où de telles erreurs ne sont pas tolérées particulièrement pour de telles applications délicates.

13 Sur le cancer de la peau.

13.1 Généralités et définitions de base

Cancer est un terme utilisé pour des maladies dans lesquelles les cellules se divisent sans contrôle, et sont capables de migrer vers d'autres tissus. Les cellules cancéreuses peuvent se propager vers d'autres parties du corps à travers le sang et les systèmes de lymphes.

Les propriétés des cancers sont [3] ;

1. Ils se divisent et se produisent avec une vitesse très supérieure à celle des cellules normales.
2. Ils migrent et continuent à se proliférer dans des régions occupées normalement par d'autres cellules (processus connu sous le terme métastase).

Il existe plus de cent différents types de cancers, la plupart d'entre eux se nomment selon l'organe ou le type de cellules dans lesquels ils commencent. Par exemple un cancer qui commence dans le colon est appelé cancer du colon.

Les types de cancer peuvent être groupés dans différentes catégories, les principales comprennent [3] ;

- *Les carcinomes.* Ce sont les cancers originaires de cellules épithéliales (zones composées uniquement de couches de cellules). Ils commencent dans la peau ou les tissus qui relient ou couvrent les organes internes. Nous nous intéressons, dans le cadre de notre travail de thèse, à ce type de cancer.
- *Les sarcomes.* Ce sont les cancers qui commencent dans les tissus de connexion ou de support, tels que les os, les cartilages, le gras, les muscles et les vaisseaux sanguins.

- *Les leucémies.* Il s'agit des cancers qui commencent dans les tissus qui forment le sang, comme la moelle osseuse. Ils génèrent un grand nombre de cellules sanguines anormales dans le sang.
- *Lymphomes et myélomes.* Ce sont les cancers qui commencent dans le système immunitaire.
- *Cancers du système nerveux central.* Il s'agit des cancers qui commencent dans les tissus du cerveau et de la moelle épinière.

Autant de cancers que de tissus et organes humains, certains types plus répandus que d'autres.

13.1.1 Les origines du cancer.

Tous les cancers commencent dans les cellules. Afin de comprendre le cancer, il est nécessaire de savoir ce qui se passe lorsque les cellules normales deviennent cancéreuses.

Le corps comporte plusieurs types de cellules. Ces cellules se divisent de manière contrôlée, et se reproduisent lorsque nécessaire afin de préserver la santé du corps. Lorsque les cellules sont vieilles ou endommagées, elles meurent, et sont remplacées par d'autres cellules. Cependant, parfois le processus fonctionne mal, l'ADN de la cellule peut être endommagé ou modifié, produisant des mutations qui affectent l'évolution et la division normale des cellules. Dans ce cas, les cellules ne meurent pas quand il faut, et de nouvelles cellules se forment alors que le corps n'en a pas besoin. Ce supplément de cellules peut former une masse de tissu appelée tumeur. Certains cancers ne forment pas de tumeurs, comme la leucémie ; cancer de la moelle osseuse et du sang.

Toutes les tumeurs ne sont pas cancéreuses, elles peuvent être bénignes ou malignes ;

- *Tumeurs bénignes.* Ces tumeurs ne sont pas cancéreuses. Elles sont rarement menaçantes pour la vie de l'individu. Elles peuvent généralement être retirées, et dans la plupart des cas, elles ne reviennent pas. Les cellules des tumeurs bénignes n'envahissent pas les tissus qui les entourent, et ne se propagent pas vers d'autres parties du corps.
- *Tumeurs malignes.* Elles sont cancéreuses et plus menaçantes que les tumeurs bénignes. Elles représentent une menace pour la vie. Les cellules, dans ce genre de tumeurs, peuvent migrer à proximité des tissus, et se répandent sur les autres parties du corps. Cette migration du cancer d'une partie du corps vers une autre se nomme *métastase*.

Par ailleurs, le risque de développer un cancer peut être réduit en adoptant de bonnes habitudes et un style de vie bon pour la santé, comme manger de la nourriture saine, ne pas fumer et pratiquer des exercices physiques de façon régulière.

Notons finalement que plutôt le cancer est détecté et traité, plus les chances d'en guérir sont augmentées.

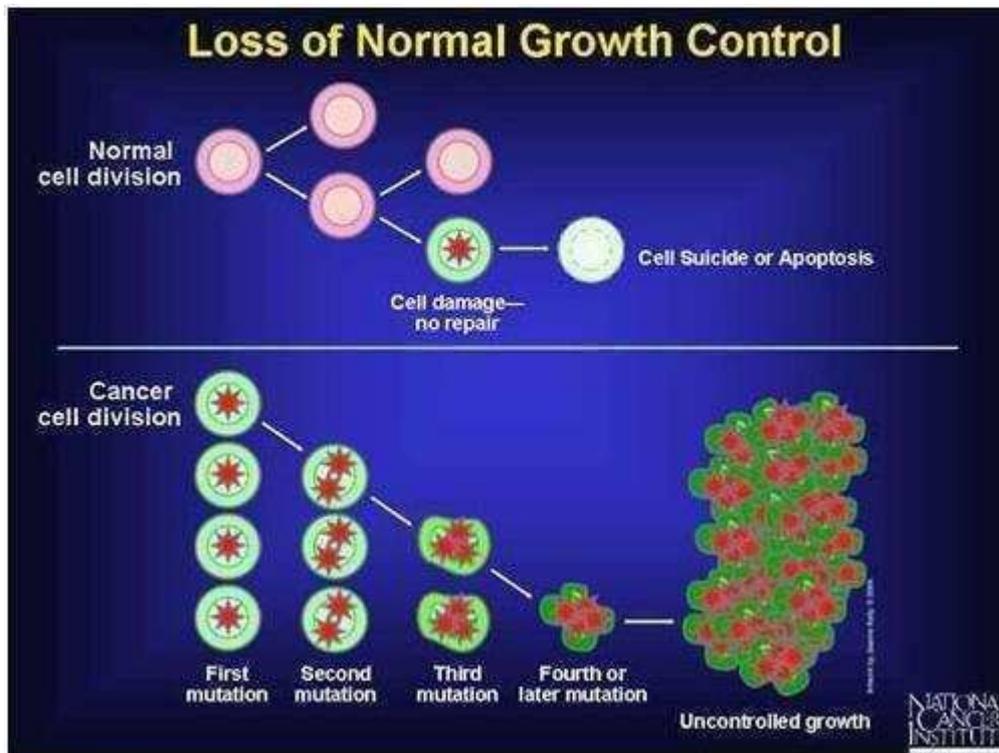


FIGURE 29 – Évolution anormale des cellules [3]

13.1.2 Génétique et différents processus.

A l'échelle mondiale, entre 100 et 350 personnes sur 100000 meurent de cancer chaque année. Le cancer est dû à des déficiences dans les mécanismes qui contrôlent habituellement la croissance et la prolifération des cellules. Au cours du développement normal et tout au long de la vie adulte, des systèmes intriqués de contrôle génétique régulent l'équilibre entre naissance et mort des cellules en réponse à des signaux qui soit induisent la prolifération, soit l'inhibent, soit mènent à la mort des cellules. Le rythme des naissances et des morts détermine la taille du corps adulte et la vitesse de croissance aboutissant à cette taille. Dans certains tissus adultes, la prolifération cellulaire est permanente, ce qui assure un renouvellement continu des tissus. Les cellules épithéliales intestinales, par exemple, ne vivent que quelques jours avant de mourir et d'être remplacées ; certains globules blancs sont renouvelés au même rythme, et les cellules cutanées ne survivent en général que pendant deux à quatre semaines avant de desquamer. Toutefois, les cellules de nombreux tissus adultes ne prolifèrent pas sauf durant un processus de réparation. Des cellules telles que les cellules cardiaques, musculaires et neurones peuvent rester fonctionnelles pendant de longues périodes ou même durant toute la vie d'un organisme.

La perte de la régulation cellulaire qui conduit à la plupart ou à tous les cas de cancer est due à une lésion génétique (Fig. 30). Des mutations dans deux grandes classes de gènes ont été impliquées dans la formation d'un cancer ; les proto-oncogènes et les gènes suppresseurs de tumeurs. Les premiers deviennent des oncogènes à la suite de mutations qui amplifient de manière excessive leur activité inductrice de prolifération. Ce qui peut être la conséquence d'une expression accrue du gène en question ou de la production d'un produit hyperactif. Les gènes suppresseurs de tumeur, normalement, inhibent la croissance, aussi leur déficience entraîne-t-elle une prolifération

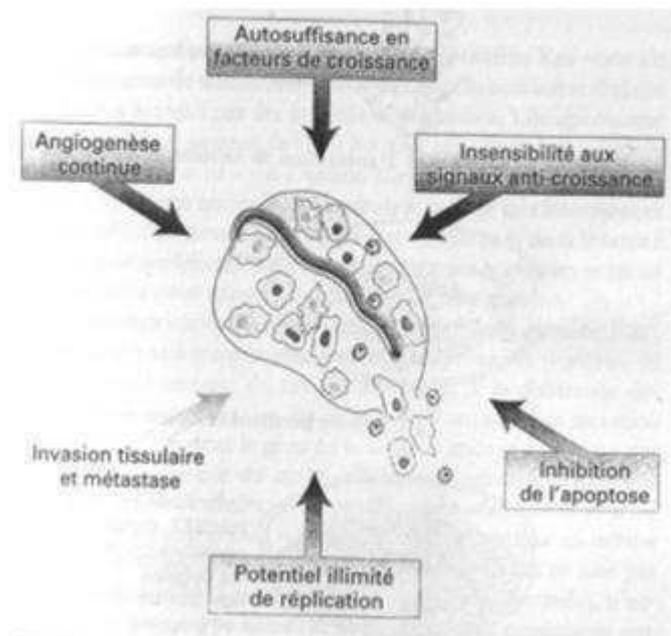


FIGURE 30 – Vue générale des changements cellulaires qui causent le cancer [66]

anormale.

De nombreux gènes dans ces deux classes codent des protéines qui contribuent à la régulation de la naissance (déroulement du cycle cellulaire) ou de la mort de la cellule par *apoptose* ; d'autres codent des protéines qui participent à la réparation de l'ADN endommagé. Le cancer se développe fréquemment à la suite de la mutation due à une exposition tout au long de la vie à des agents cancérigènes, dont font partie certains composés chimiques ou à l'irradiation par les ultraviolets.

Ainsi le processus cancérigène, appelé aussi *oncogenèse* ou tumorigenèse, dépend des effets de l'environnement sur un terrain génétique particulier. La plupart des cancers surviennent après que des gènes aient été altérés par des carcinogènes ou par des erreurs dans la copie ou la réparation de l'ADN. Les altérations de l'ADN qui réduisent la production de *protéines suppressives de tumeur* ou augmentent la production ou l'activation d'oncoprotéines constituent le fondement de la plupart des cancers.

Une cellule vivante meurt soit par *apoptose* ou par *nécrose*. Dans le premier cas la cellule se suicide après avoir reçu un signal extérieur lui ordonnant de le faire, ou lorsqu'il devient impossible de réparer certains dommages dans son mécanisme (comme son ADN). Lorsque la cellule ne reçoit pas suffisamment de nutriments, elle peut éventuellement mourir, il s'agit du processus de *nécrose*.

Une tumeur peut évoluer jusqu'à une taille typique d'environ 1 mm sans nécessiter un apport de nutriments, la tumeur est dite *avasculaire*. Afin de continuer son évolution, la tumeur nécessite de nouvelles sources de nutriments, elle sécrète des éléments chimiques appelés *facteurs d'évolution de tumeur*, qui stimulent la formation de nouveaux vaisseaux sanguins attirant les nutriments vers la tumeur. Ce processus se nomme *angiogénèse*. La tumeur développée durant cette étape se dit être *vascularisée*.

13.2 Le cancer de la peau et ses différents types

13.2.1 La peau.

La peau est l'organe le plus large du corps [3]. Elle protège contre la chaleur, la lumière, les blessures et les infections. Elle conserve l'eau et les matières grasses, et produit de la vitamine D.

L'épiderme est la couche supérieure de la peau. Elle se constitue pratiquement de cellules plates. Ces dernières sont les cellules dites *spino*. Sous les *spino cellules*, dans la partie la plus profonde de l'épiderme, se trouvent des cellules rondes appelées *baso cellules*. Il y a, aussi, des cellules appelées *mélanocytes* qui fabriquent le pigment (la couleur) qui se trouve dans la peau ; ces cellules se trouvent dans la partie la plus basse de l'épiderme.

Le derme se situe sous l'épiderme. Cette couche contient les vaisseaux sanguins, ainsi que les vaisseaux et ganglions lymphatiques. Certains de ces ganglions produisent la sueur ; qui aide à rafraîchir le corps. D'autres produisent le sébum ; qui est une sécrétion grasse visant à protéger la peau de la sécheresse. Ces substances atteignent la surface de la peau à travers des petites ouvertures appelées pores.

13.2.2 Les cancers de la peau .

Le cancer de la peau commence dans les cellules [36], [3], ces blocs qui construisent et forment la peau. Normalement, les cellules évoluent et se divisent pour former de nouvelles cellules. De manière quotidienne, les cellules vieillissent et meurent, et de nouvelles cellules prennent leur place. Par moment ce processus organisé et ordonné se passe mal. De nouvelles cellules se forment alors que la peau n'en a pas besoin, et les vieilles cellules ne meurent pas alors qu'elles le devraient. Ce supplément de cellules peut former une masse de tissu appelée une tumeur. Rappelons qu'une tumeur peut être bénigne ou maligne, et que ces dernières représentent un plus grand danger pour la vie. Cependant les deux types de cancer de peau les plus répandus, causent environ un décès sur les mille décès dus au cancer.

Les cancers de la peau se nomment selon le type de cellules dans lesquelles le cancer a commencé. On distingue essentiellement deux types histologiques de cancers cutanés ; les carcinomes et les mélanomes malins. Ces deux cancers sont différents par leur fréquence et par leur gravité.

Les carcinomes sont, probablement, les plus fréquents chez l'homme comme chez la femme, mais leur taux réel d'incidence est difficile à établir car, dans de nombreux cas, les sujets souvent âgés ne se font pas traiter, ou sont soignés au cabinet médical sans vérification histologique. L'enregistrement des cas incidents se borne souvent aux lésions vérifiées histologiquement, ce qui conduit à une sous-estimation du vrai taux d'incidence. Les données d'incidence qui existent dans la littérature mondiale sont donc sous-estimées.

Néanmoins, la fréquence de ces cancers est en augmentation constante, sans doute à cause de facteurs étiologiques communs.

Les carcinomes se composent histologiquement de deux types : les basocellulaires et les spinocellulaires. Les études montrent une incidence plus élevée chez les hommes que les femmes, avec une plus grande incidence des cancers basocellulaires. Quant à la répartition anatomique, les

lésions prédominent massivement sur la face chez les deux sexes.

Les carcinomes basocellulaires et spinocellulaires sont les cancers de peau les plus répandus, ils se forment habituellement sur le crâne, le visage, le cou, les mains et les bras. Ce sont les zones les plus exposées au soleil. Néanmoins, le cancer cutané peut se produire n'importe où sur le corps.

Les cancers basocellulaires évoluent lentement, et ont lieu généralement sur les régions du corps qui ont été exposées au soleil, mais plus fréquemment sur le visage. Ce type de cancer migre rarement vers d'autres régions du corps.

Les cancers spinocellulaires concernent également les régions exposées au soleil. Ils peuvent également toucher d'autres zones du corps, et migrent parfois vers les nœuds de lymphes et les organes internes du corps.

13.2.3 Facteurs risque et prévention.

La médecine ne peut expliquer les raisons pour lesquelles une personne plutôt qu'une autre développe un cancer cutané. Néanmoins, il est certain que le cancer n'est pas contagieux.

Les recherches montrent que certaines personnes sont plus disposées à développer un cancer de la peau. Ces personnes présentent ce que l'on appelle des facteurs risques. Il s'agit d'une caractéristique ou quelque chose qui augmente les chances de développer la maladie.

- *L'exposition aux rayons ultra violets (UVs).* Les sources de radiations UV sont le soleil, les lampes solaires, les lits ou stands de bronzage. Les risques de cancer de peau est lié à la durée d'exposition aux rayons UV. La majeure partie des cancers cutanés apparaissent après la cinquantaine, mais les dommages de peau ont lieu à un âge plus jeune. Toute personne est affectée par les rayons UV, mais les gens ayant une peau claire qui brûlent facilement présentent un plus grand risque. Il en est de même pour les personnes qui résident dans des régions qui reçoivent de grands niveaux de radiation UV. A noter que les rayons UV sont présents même par un temps froid ou nuageux.
- *Les cicatrices et les brûlures sur la peau.*
- *Certaines infections.*
- *L'exposition à l'arsenic au travail*
- *Ulcères de la peau ou inflammation chronique de la peau.*
- *Certaines maladies qui rendent la peau sensible au soleil (tel que l'albinisme).*
- *Radiothérapie.*
- *Certains traitements qui agressent le système immunitaire.*
- *L'historique personnel d'un ou plusieurs cancers de la peau.*

- *Les kératoses actiniques.* C'est un type de plaques qui évolue sur la peau, essentiellement dans des zones exposées au soleil, qui si elles ne sont pas traitées peuvent se transformer en carcinome spinocellulaire.

13.2.4 Symptômes et diagnostic.

La plupart des cancers de type baso cellulaire et spino cellulaire peuvent être guéris s'il sont trouvés et traités tôt.

Un changement dans la peau est le signe le plus commun du cancer de la peau. Il peut s'agir d'une nouvelle tumeur, une cicatrice qui ne guérit pas, ou un changement dans une vieille masse. Tous les cancers de la peau ne se ressemblent pas. La peau évolue pour prendre la forme d'une petite ampoule lisse brillante, pâle ou cirée ; ou bien une ampoule ferme et rouge ; ou encore une plaie ou une ampoule saignante ou développant une croûte. Elle peut aussi développer des régions rugueuses, sèches ou écaillées. Ou encore des tâches rouges ou marron rugueuses et écaillées.

Le cancer de la peau peut être douloureux, mais dans la majorité des cas, il est indolore.

Le diagnostic des carcinomes baso cellulaires est souvent facile. Cependant, il peut s'avérer incertain dans certains cas. Les éléments essentiels du diagnostic sont la fixité des lésions, la bordure perlée et la présence de télangiectasies, néanmoins, la biopsie est le seul moyen sûr pour diagnostiquer le cancer de la peau, où un échantillon est analysé sous microscope par des pathologistes.

Si la biopsie révèle un cancer, alors, le médecin détermine le stade de la maladie en se basant sur ; la taille de la tumeur, sa profondeur, ou encore si celle-ci a migré vers d'autres parties du corps. La classification pour les carcinomes est comme suit ;

- **Stade 0 :** Le cancer implique uniquement les couches supérieures de la peau, il s'agit d'un carcinome in situ.
- **Stade 1 :** La tumeur est d'environ 2cm ou moins de largeur, n'ayant pas de métastase de nœud de lymphé, ni de métastase distante.
- **Stade 2 :** La tumeur est entre 2 et 5 cm de largeur, voire plus, n'ayant pas de métastase de nœud de lymphé, ni de métastase distante.
- **Stade 3 :** le cancer a migré sous la peau, vers le cartilage, muscle, os, mais il n'a pas migré vers d'autres parties du corps.
- **Stade 4 :** le cancer a migré vers d'autres parties du corps .

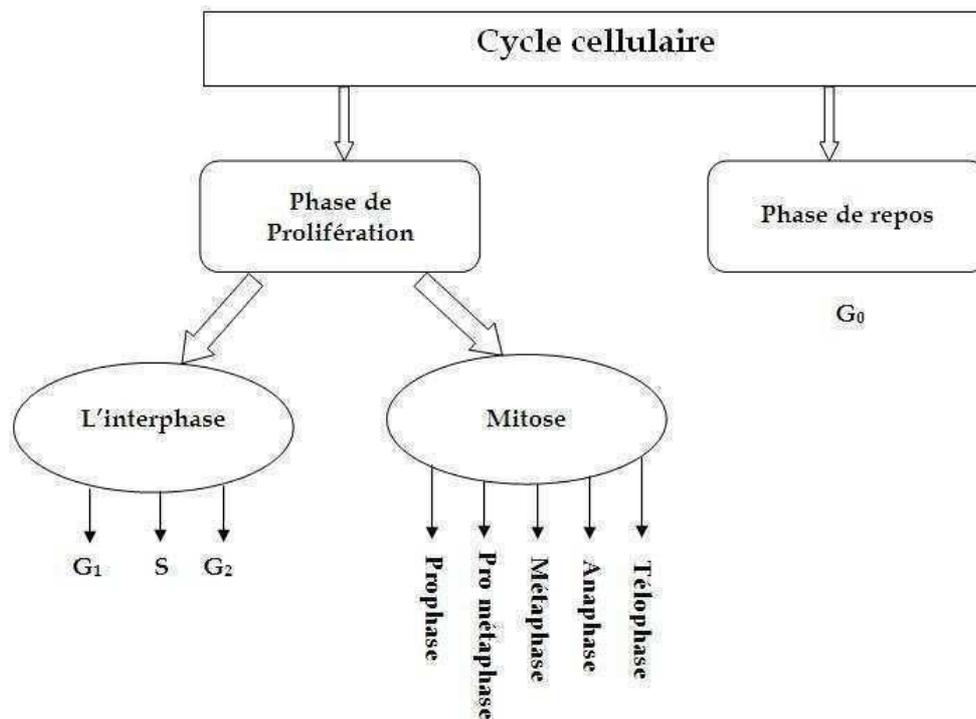


FIGURE 31 – Les phases du cycle cellulaire

13.3 Cycle cellulaire

13.3.1 Définition des phases du cycle cellulaire.

Au cours de leur développement, les cellules passent par ce que l'on nomme le *cycle cellulaire*. Il s'agit d'une suite d'étapes distinctes durant lesquelles des phénomènes ont lieu. Nous distinguons deux phases de ce cycle ; dites de prolifération et de repos (Fig. 31). Sans oublier que durant le cycle normal, certaines cellules peuvent être éliminées par *apoptose*. [31]

Phase de prolifération.

Par abus de langage, cette phase est souvent confondue avec le cycle cellulaire, car celle-ci a longtemps été considérée comme étant la seule phase du cycle cellulaire, avant la mise en évidence de la phase de repos.

Plusieurs phénomènes s'associent à cette phase de prolifération, qui elle-même se divise en deux phases principales ; l'interphase et la mitose, chacune de ces phases contient plusieurs étapes.

Notons également que le passage d'une étape à une autre a lieu suite à l'activation de récepteurs sur la cellule ou encore grâce à un gène approprié.

L'interphase. Qui se situe entre deux divisions cellulaires ; elle comprend plusieurs étapes dont les trois principales et successives sont notées G_1 , S et G_2 .

- La phase G_1 est une phase de croissance, sa durée est variable. Durant cette phase, la cellule croît et devient plus large, et la synthèse des protéines a lieu.
- La phase S est la phase de synthèse de l'ADN ; c'est l'étape qui suit directement la phase

G_1 . Durant cette deuxième phase, le facteur héréditaire est dupliqué, ainsi que chaque chromosome.

- La phase G_2 constitue la phase de contrôle. Après la synthèse de l'ADN durant la phase S , celui-ci est contrôlé et réparé si nécessaire, et la division proprement dite est préparée. En cas de dommages, irréversibles constatés, la cellule est orientée vers l'apoptose.

La mitose. Après l'interphase, la cellule entame la phase de mitose notée M , où ont lieu la séparation des chromosomes et la formation des cellules filles. Il s'agit de la dernière phase du cycle cellulaire. Durant cette phase, la cellule passe par plusieurs étapes qui sont ;

- La prophase
- La pro métaphase
- La métaphase
- L'anaphase
- La télophase ; qui se constitue de la caryocinèse et de la cytokinèse.

A la fin de la phase de prolifération - après la mitose - lorsque les deux cellules filles sont formées, ces dernières n'entament pas automatiquement un nouveau cycle cellulaire, et peuvent entrer dans ce que l'on appelle *phase de repos*.

Phase de repos.

C'est le stade quiescent du cycle cellulaire. Notée G_0 , c'est la phase durant laquelle l'activité de la cellule est ralentie et fortement réduite, en termes de croissance. Certaines cellules dites *différenciées*, cessent même de se diviser, et ne retournent jamais en phase de prolifération, telles que les neurones.

Lorsque la cellule quitte ce stade G_0 pour entamer un nouveau cycle, c'est toujours par la phase G_1 qu'elle commence. Ceci après un stimulus approprié. Il existe un gène, le CDC28, qui déclenche l'entrée en phase G_1 .

Mort cellulaire.

Rappelons, également, que la cellule peut mourir de deux manières ;

- *Nécrose.* Qui est un phénomène accidentel dû à un dommage tissulaire. Elle implique un groupe de cellules, et jamais une cellule unique.

- *Apoptose*. Qui a lieu lorsque la cellule n'est plus utile, endommagée ou défectueuse. C'est une mort cellulaire programmée. Elle survient en particulier pour éliminer un surplus de cellules. Elle intervient particulièrement durant la phase G_2 , afin d'éliminer les cellules ayant mal synthétisé leur ADN durant la phase S . Elle permet, donc, d'éviter la prolifération de cellules dysfonctionnelles.

Quant aux durées approximatives de chacune des phases, les cellules humaines en prolifération rapide parcourent le cycle cellulaire en 24 heures environ : la mitose durerait une trentaine de minutes, G_1 9 heures, la phase S 10 heures et G_2 4 heures et demi [66].

13.3.2 Régulation du cycle cellulaire.

Le cycle cellulaire est composé de l'interphase, durant laquelle la cellule prépare sa division, et de la phase mitotique (phase M) qui aboutit à la formation des deux cellules filles. L'interphase est constituée de plusieurs étapes ; les phases G_1 (Gap 1) et G_2 (Gap 2), ainsi que la phase S ; celle de la synthèse de l'ADN. [66]

L'évolution dans le cycle cellulaire est régie par des protéines appelées cyclines, qui sont synthétisées à des moments précis du cycle et dont la dégradation permet le passage d'une phase à une phase suivante. Les cyclines sont indispensables à l'activité des kinases CDKs (Cyclin Dependent Kinase). Le complexe CDK-Cycline est alors dit actif. Chaque complexe CDK-Cycline est activé pour une phase particulière (Fig. 32) : Les complexes CDK4/6-Cycline D, CDK2-Cycline E et CDK2-Cycline A coordonnent l'interphase alors que les complexes CDK1-Cycline A et CDK1-Cycline B régissent la mitose. [58]

La régulation des CDKs se fait moyennant un contrôle de l'activité des complexes CDK-Cycline. Cette activité est contrôlée par un équilibre de phosphorylation - déphosphorylation. Certaines phosphorylations sont indispensables à l'activité du complexe CDK-Cycline, d'autres entraînent son inhibition. Les résidus phosphorylés provoquant une inhibition devront être déphosphorylés pour permettre l'activité du complexe kinasique.

L'activité des complexes CDK-Cycline est également régulée par des protéines appelées CKIs (Cyclin dependent Kinase Inhibitors).

- *Les phosphorylations activatrices*. Les CDKs impliquées dans le cycle cellulaire sont phosphorylées sur un résidu thréonine (Thr-160 pour CDK2 et Thr-161 pour CDK1 chez l'homme), ce qui entraîne la stabilisation et l'activation du complexe CDK-Cycline. La kinase responsable de cette phosphorylation est la kinase CAK (CDK Activating Kinase), qui est elle-même une CDK (CDK7) et se lie à la cycline H.
- *Les phosphorylations inhibitrices*. L'activité des CDKs est inhibée par des phosphorylations sur des résidus thréonine et tyrosine (Thr-14 et Tyr-15 pour CDK1 et CDK2 chez l'homme). La phosphorylation de ces résidus est réalisée par les kinases Wee1 ou Myt1

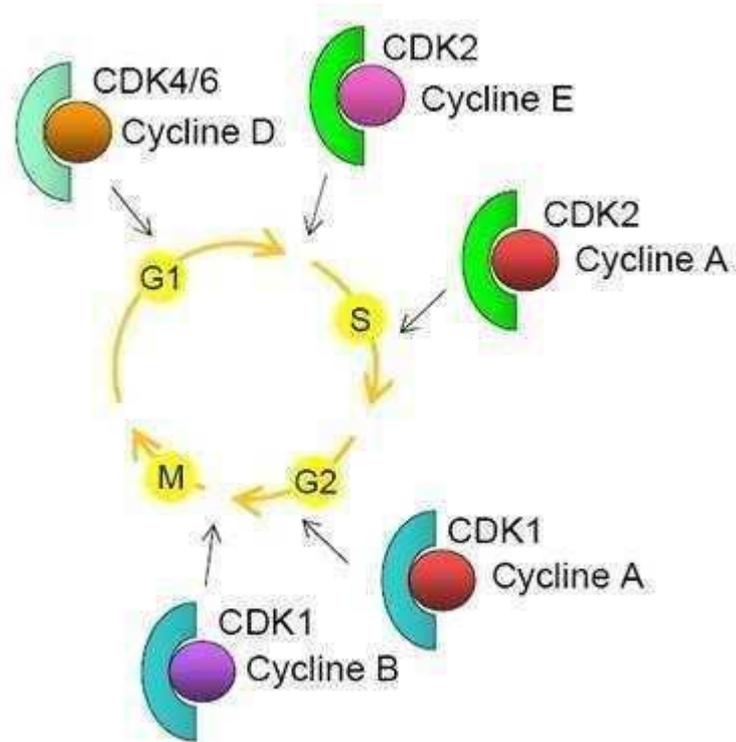


FIGURE 32 – Complexes CDK-Cycline intervenant durant le cycle cellulaire [58].

(Membrane-associated tyrosine- and threonine-specific cdc2-inhibitory kinase). La kinase Wee 1 ne phosphoryle que la tyrosine 15 alors que Myt 1 capable de phosphoryler les deux résidus.

- Les déphosphorylations activatrices. Les phosphates inhibiteurs doivent être retirés des CDKs pour que celles-ci assurent leurs fonctions kinasiques. Pour cela, des phosphatases de la famille des Cdc25 (Cdc25A, Cdc25B et Cdc25C chez l'homme) sont capables de retirer les phosphates inhibiteurs des résidus Tyr-15 et Thr-14. Cdc25A est décrit comme un régulateur fonctionnant seulement en G1/S alors que Cdc25B et C sont considérés comme actifs seulement en G2/M. Des études récentes ont démontré que les différentes isoformes de Cdc25 coopèrent pour réguler chaque transition du cycle.
- *Les CKIs*. Il existe deux familles d'inhibiteurs de CDKs (CKIs), la famille des INK4 (Inhibiteur de CDK4) et la famille des Cip1/Waf1/Kip1-2. Les protéines de la famille INK4 sont capables de se fixer et d'inhiber CDK4 et CDK6. Les INK4 sont composés de p16Ink 4a, p15Ink 4b, p18Ink 4c et p19Ink 4d. L'action de ces protéines entraîne un arrêt du cycle en G1 en formant des complexes ternaires INK4-CDK4/6-Cyclin D ou binaires INK4-CDK4/6. Les protéines de la famille de CKIs Cip1/Waf1/Kip1-2 incluant p21Cip1/Waf1 et p27Kip1 peuvent se fixer et inhiber le complexe CDK2- Cycline E. Il a également été montré que p27Kip1 est capable de s'associer au complexe kinasique CDK2- Cycline A. Les protéines p21Cip1/Waf1 et p27Kip1 peuvent également avoir une fonction activatrice et permettent l'assemblage du complexe CDK4-Cycline D.

14 Présentation et Modélisation du système.

La tumeur peut être perçue selon différentes perspectives. Pour un biologiste, elle serait une entité vivante qui se nourrit, évolue ... Pour un mathématicien ; un ensemble de compartiments non distincts, avec possibilité de passage de l'un vers l'autre. Du point de vue d'un spécialiste de la mécanique des fluides ; elle peut être assimilée à une région où différentes matières entrent et sortent et interagissent entre elles.

Notre regard d'automaticien, perçoit la tumeur comme un système, qu'il soit boîte noire, grise ou régi par les lois de la physique (modèle mathématique, avec plus ou moins de complexité), un système bien entendu défini par ses entrées sorties.

Au cours de son évolution, la tumeur a besoin d'éléments (nutriments), il s'agit donc d'un apport pour celle-ci, ou encore une variable qui agit sur notre "système". La finalité d'une étude semblable à la nôtre est bien évidemment d'essayer de connaître au mieux le comportement de la tumeur afin de mieux la traiter. Il est donc impératif de connaître le comportement de la tumeur face à l'introduction de traitement (ou de manière générale inhibiteurs), ce dernier peut être perçu également comme une entité entrante vers notre système.

Comme mentionné auparavant, l'intention est de traiter au mieux la tumeur en terme de volume (ou surface), mais aussi, et c'est tout aussi important, en terme de douleur éprouvée par le patient, puisqu'il y a lieu de souligner que beaucoup d'entre eux renoncent au traitement car souvent douloureux.

En termes de commande, le système se voit donc défini par ses entrées : nutriments et traitement (on s'intéresse à leurs concentrations respectives), ainsi que ses sorties : concentration des cellules cancéreuses (ou volume / surface de la tumeur) et intensité de la douleur (sur une échelle donnée). Une troisième entrée perturbation peut être ajoutée. Cette entrée regroupera d'autres variables et facteurs qui agissent sur la tumeur, avec des effets non prédominants.

Pour notre application, les entrées considérées sont le taux de cellules éliminées par le traitement, ainsi que le taux de cellules arrêtées grâce aux techniques de régulation du cycle cellulaire. Les sorties quant à elles sont les concentrations des cellules dans la région tumorale.

L'étape évidente et naturelle qui suivrait la définition du système consiste à établir la ou les relations entre ces différentes variables d'entrée et de sortie. Il s'agit de la modélisation.

14.1 Modélisation à base d'équations aux dérivées partielles.

14.1.1 Modèle avec trois types de cellules.

Soit une région tumorale $\Omega(t)$ qui varie avec le temps, et contient aussi bien des cellules cancéreuses que des cellules normales, ainsi que d'autres particules chimiques (comme l'oxygène). [43]

La relation entre les densités de ces différentes cellules et particules peut se mettre sous la forme d'une équation aux dérivées partielles avec un bon choix des conditions aux limites.

La difficulté dans l'analyse est le fait que la région $\Omega(t)$ soit l'une des inconnues du problème. Pratiquement une condition physique est imposée sur les limites de $\Omega(t)$, ce qui permet d'assurer

une solution unique pour la région $\Omega(t)$, ainsi que pour l'équation aux dérivées partielles dans $\Omega(t)$.

La composante la plus importante dans la solution est, certes $\Omega(t)$, puisque la connaissance de celle-ci permet de prédire si la tumeur évoluera ou pas, combien de temps cela prendra-t-il... etc.

Soit $c(t)$ la concentration des nutriments dans le sang (exemple : oxygène).

Pour les tumeurs avasculaires, le modèle d'évolution de $c(t)$ dans $\Omega(t)$ est donné par l'équation (Eq. 129)

$$\varepsilon_0 \frac{\partial c}{\partial t} = D_c \Delta c - \lambda c \quad (129)$$

Où D_c , λ et ε_0 sont des constantes positives, telles que

D_c Le coefficient de diffusion

λ La vitesse de consommation des nutriments

$\varepsilon_0 = \frac{T_d}{T_c}$ Le rapport entre le temps de diffusion du nutriment et le temps de l'évolution de la tumeur

L'équation correspondant aux tumeurs vasculaires est

$$\varepsilon_0 \frac{\partial c}{\partial t} = D_c \Delta c - \lambda c + \Gamma_v (c_B - c) \quad (130)$$

c_B La concentration du nutriment dans la vascularisation

Γ La vitesse de transfert du tissu sanguin

Le terme $\Gamma_v (c_B - c)$ dans (Eq. 130) peut être perçu comme la prise en compte de la concentration du nutriment après le début du processus d'angiogenèse.

Le changement de variables $c = \frac{\Gamma_v c_B}{\Gamma_v + \lambda} + c'$, en posant $\lambda' = \Gamma_v + \lambda$, dans l'équation (Eq. 130) permet d'obtenir

$$\varepsilon_0 \frac{\partial c'}{\partial t} = D_c \Delta c' - \lambda' c' \quad (131)$$

C'est une équation similaire à (Eq. 129), sauf que dans le cas vasculaire, c' peut prendre des valeurs négatives.

Afin de développer le modèle, il est considéré que la tumeur contient trois types de cellules

- *Les cellules proliférantes* - Elles ont une densité $p(o,t)$. Elles se prolifèrent à la vitesse $K_{PP}(c)$, deviennent tranquilles –ou *quiescentes* - avec une vitesse $K_{PQ}(c)$ et meurent à la vitesse $K_{PD}(c)$.
- *Les cellules tranquilles (quiescentes)* - Elles sont présentes par une densité $q(o,t)$, elles deviennent proliférantes à la vitesse $K_{QP}(c)$ et décèdent avec la vitesse $K_{QD}(c)$.
- *Les cellules mortes* - Elles ont une densité $n(o,t)$. On suppose qu'elles se décomposent, et qu'elles sont retirées à la vitesse K_R .

$o(x,y,z)$ est un point de la tumeur, repéré par ses coordonnées (x,y,z) .

Il y a, donc, un mouvement continu de cellules dans la région tumorale, à cause des phénomènes cités précédemment. Mouvement représenté par le champ de vitesse v .

Le principe de conservation de masse pour les trois types de cellules, dans la région tumorale $\Omega(t)$, est donné par le système d'équations (Eq. 132)

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(pv) = [K_{PP}(c) - K_{PQ}(c) - K_{PD}(c)]p + K_{QP}(c) & (132.a) \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \text{div}(qv) = K_{PQ}(c)p - [K_{QP}(c) + K_{QD}(c)]q & (132.b) \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(nv) = K_{PD}(c)p + K_{QD}(c)q - K_R n & (132.c) \end{cases} \quad (132)$$

Le tissu tumoral sera traité comme un milieu poreux, et les cellules en mouvement seront vues comme un débit de fluide dans ce milieu.

La vitesse d'un fluide est liée à sa pression par la loi de Darcy (Eq. 133)

$$v = -\beta \nabla \sigma \quad (\beta Cste > 0) \quad (133)$$

Afin de simplifier le modèle, on admet que toutes les cellules sont identiques en volume et en masse, et que leur densité est constante à travers la tumeur, ce qui permet d'écrire la relation (Eq. 134).

$$p + q + n = Cste = B \quad (134)$$

Avec un changement d'échelle, en posant $\beta = 1$ et $B = 1$, l'addition des trois équations (Eq. 132.a), (Eq. 132.b) et (Eq. 132.c) donne (Eq. 135)

$$\text{div}(v) = K_{PP}(c)p - K_R n \quad (135)$$

Cette dernière équation (Eq. 135) remplacera (Eq. 132.c) dans le modèle mathématique. Si de plus on tire n de (Eq. 134) telle que $n = 1 - p - q$, alors on obtient le système d'équations (Eq. 136), équations valables dans la région tumorale $\Omega(t)$, pour $t > 0$

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \frac{\partial c}{\partial t} = \Delta c - \lambda c & (136.a) \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \sigma \cdot \Delta p = f(c, p, q) & (136.b) \\ \frac{\partial q}{\partial t} = -\nabla \sigma \cdot \Delta q = g(c, p, q) & (136.c) \\ \Delta \sigma = -h(c, p, q) & (136.d) \end{cases} \quad (136)$$

Avec les fonctions f , g , et h définies par

$$\begin{cases} f(c, p, q) = [K_{PP}(c) - K_{PQ}(c) - K_{PD}(c)]p + K_{QP}(c) - h(c, p, q) \\ g(c, p, q) = K_{PQ}(c)p - [K_{QP}(c) + K_{QD}(c)]q - h(c, p, q) \\ h(c, p, q) = -K_R + [K_{PP}(c) + K_R]p + K_R q \end{cases} \quad (137)$$

Sont imposées, maintenant, des conditions aux frontières.

Soit $\Gamma(t)$ la frontière de $\Omega(t)$, et $c = \bar{c}$ la concentration constante du nutriment sur $\Gamma(t)$, pour $t > 0$

$$\sigma = \gamma\kappa \text{ sur } \Gamma(t), \text{ pour } t > 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial n_n} = -V_n \text{ sur } \Gamma(t), \text{ pour } t > 0$$

Avec

V_n La vitesse de la frontière libre

κ Le rayon de courbure moyen

γ Le coefficient de tension de la surface

n_n Le vecteur normal à la surface

On considère, maintenant, le traitement du cancer (exemple chimiothérapie). On utilisera le terme inhibiteurs qui regroupe tous les médicaments administrés de source externe, ainsi que les produits chimiques générés par le système immunitaire. Tous ces facteurs seront regroupés en un seul terme représenté par sa concentration, noté u . Le terme u est supposé satisfaire une équation aux dérivées partielles (Eq. 138) de type diffusion, dans la région tumorale $\Omega(t)$, pour $t > 0$

$$\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \gamma_u u \quad (138)$$

α_1 et γ_u sont des constantes positives.

Le terme $\gamma_u u$ représente la diminution de l'inhibiteur.

L'administration de l'inhibiteur engendre une diminution dans la concentration des nutriments, il sera donc ajouté dans (Eq. 129), du côté droit, avec un signe négatif. Avec l'administration des inhibiteurs, l'équation (Eq. 129) se met sous la forme (Eq. 139).

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{D_c}{\epsilon_0} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) - \frac{\lambda}{\epsilon_0} c - K_c u \quad (139)$$

K_c étant une constante positive dépendant de l'efficacité de l'inhibiteur.

Seront posées, maintenant, les conditions initiales, qui sont des fonctions données sur $\Omega(0)$; la région tumorale initiale qui elle aussi est donnée et connue à $t = 0$

$$\begin{cases} p(o, 0) = p_0(o) \geq 0 \\ q(o, 0) = q_0(o) \geq 0 \\ p_0(o) + q_0(o) \leq Cste (= 1) \\ c(o, 0) = c_0(o) \end{cases} \quad (140)$$

14.1.2 Modèle avec deux types de cellules.

Pour ce genre de modèle, la concentration en cellules mortes n'est pas prise en considération. Ces cellules sont supposées être retirées très vite de la région tumorale. Les équations deviennent ;

$$p + q = 1 \quad (141)$$

14.1.3 Modèle avec un types de cellules.

Pour ce modèle, seules les cellules proliférantes sont prises en considération ; $p \equiv 1$. Le modèle se réduit à deux équations (Eq. 129) et (Eq. 136.d).

La résolution du problème dépend des approximations et hypothèses émises, telle que la symétrie radiale.

14.1.4 Discrétisation du modèle avec trois types de cellules.

A des fins de numérisation et de programmation, nous procédons à la discrétisation de ce modèle à base d'équations à dérivées partielles. La démarche adoptée est celle développée dans la sous-section (2.2), sur la base de l'utilisation d'un maillage spatiotemporel.

Nous procédons à la substitution des termes (Eq. 15) et (Eq. 16) dans (Eq. 129). Après développement, nous obtenons l'algorithme (Eq. 142)

$$C_{ijk}^{n+1} = C_{ijk}^n \left[1 - \left(\lambda + 6 \frac{D_c}{h^2} \right) \frac{\Delta_t}{\varepsilon_0} \right] + \frac{D_c \Delta_t}{h^2 \varepsilon_0} \left[C_{i+1,jk}^n + C_{i-1,jk}^n + C_{i,j+1,k}^n + C_{i,j-1,k}^n + C_{ij,k+1}^n + C_{ij,k-1}^n \right] \quad (142)$$

L'injection des modes propres (Eq. 18) dans (Eq. 142), permet d'obtenir (Eq. 143), qui représente l'expression de $\xi (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$

$$\xi (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = 1 - \frac{\lambda \Delta_t}{\varepsilon_0} - 4 \frac{D_c \Delta_t}{h^2 \varepsilon_0} \left(\sin^2 \left(\frac{\Omega_1 h}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\Omega_2 h}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\Omega_3 h}{2} \right) \right) \quad (143)$$

Rappelons que la convergence de notre algorithme repose sur la condition (Eq. 19). Cette condition est vérifiée, dans notre cas (voir Eq. 143), quelles que soient les valeurs de Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 , ce qui implique que notre algorithme est inconditionnellement stable et convergent.

Cette même approche, de vérification de la convergence, est appliquée à l'équation de la commande (Eq. 138). Après substitution de (Eq. 15) et (Eq. 16) dans (Eq. 138), l'on obtient l'algorithme (Eq. 144)

$$u_{ijk}^{n+1} = u_{ijk}^n \left[1 - \left(\gamma_u + \frac{6}{h^2} \right) \frac{\Delta_t}{\alpha_1} \right] + \frac{\Delta_t}{h^2 \alpha_1} \left[u_{i+1,jk}^n + u_{i-1,jk}^n + u_{i,j+1,k}^n + u_{i,j-1,k}^n + u_{ij,k+1}^n + u_{ij,k-1}^n \right] \quad (144)$$

L'injection de (Eq. 18) dans (Eq. 144) nous donne (Eq. 145), l'expression de $\xi_u(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ relatif à l'équation de la commande.

$$\xi_u(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = 1 - \frac{\gamma_u \Delta_t}{\alpha_1} - 4 \frac{\Delta_t}{h^2 \alpha_1} \left(\sin^2 \left(\frac{\Omega_1 h}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\Omega_2 h}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\Omega_3 h}{2} \right) \right) \quad (145)$$

Nous vérifions aisément la condition de convergence (Eq. 19), et nous déduisons ainsi la stabilité et la convergence inconditionnelle de notre algorithme de commande.

14.2 Modélisation à base de phases de cycle cellulaire.

14.2.1 Modèle à n compartiments.

Dans cette approche de modélisation [57], le modèle dynamique des cellules se construit sur la base des compartiments. Chaque compartiment comprend une phase ou un groupe de phases du cycle cellulaire. Ce dernier étant composé d'une séquence de phases traversées par chaque cellule, en l'occurrence ; G_1, S, G_2 et M , depuis sa naissance jusqu'à sa division et la formation des cellules filles.

Par la suite, les deux cellules filles entrent de nouveau en phase G_1 , ou restent quiescentes en entrant dans la phase G_0 . Après une période - généralement longue - passée en G_0 , ces cellules entament, à nouveau, la phase G_1 et recommencent un nouveau cycle.

Le temps de transition d'une phase à une autre est variable, en particulier durant les phases G_0 et G_1 , et cette variation est d'autant plus importante pour les cellules malignes. Néanmoins, dans cette modélisation, l'on supposera une transition exponentielle entre et dans les compartiments.

Le nombre moyen de cellules dans le $i^{\text{ème}}$ compartiment, à un temps donné t , sera noté par $N_i(t)$. De même, $x_i^+(t)$ et $x_i^-(t)$ dénotent, respectivement, les flux entrant au et sortant du $i^{\text{ème}}$ compartiment. On écrira, alors

$$\dot{N}_i(t) = x_i^+(t) - x_i^-(t) \quad (146)$$

Avec ;

$$x_i^-(t) = a_i N_i(t) \quad (147)$$

a_i étant l'inverse du temps de transition.

Le flux $x_i^+(t)$ entrant au compartiment i correspond au flux sortant du compartiment précédent, à savoir le compartiment $(i-1)$. L'on aura, alors

$$\dot{N}_i(t) = -a_i N_i(t) + a_{i-1} N_{i-1}(t) \quad i = 2, \dots, n \quad (148)$$

Où n est le nombre de compartiments considérés.

De plus, on aura, pour le premier compartiment

$$\dot{N}_1(t) = -a_1 N_1(t) + 2a_n N_n(t) \quad (149)$$

Rappelons que la dernière phase du cycle correspond à celle de la division cellulaire, ce qui apparaît, clairement, avec un facteur 2 dans l'équation (Eq. 149).

On considère, par ailleurs, trois éléments perturbateurs du cycle cellulaire

- *Élimination des cellules.* A un temps t , seule une fraction $u(t)$ ($0 < u < 1$) du flux sortant d'un compartiment i est viable, les cellules restantes sont mortes et ne sont plus considérées comme partie du système. Ceci se traduit par le système d'équations (Eq. 150).

$$\begin{cases} \dot{N}_i(t) = -a_i N_i(t) + a_{i-1} N_{i-1}(t) \\ \dot{N}_{i+1}(t) = -a_{i+1} N_{i+1}(t) + u a_i N_i(t) \end{cases} \quad (150)$$

- *Arrêt des cellules.* A un temps donné, le flux sortant d'un compartiment est réduit à une fraction $v(t)$ ($0 < v_m < v < 1$). Les cellules restantes se retrouvent bloquées (ou arrêtées) dans le compartiment i , ce qui se traduit par (Eq. 151). Les cellules ne peuvent pas être toutes arrêtées, raison pour laquelle v_m est strictement positif.

$$\begin{cases} \dot{N}_i(t) = -v(t) a_i N_i(t) + a_{i-1} N_{i-1}(t) \\ \dot{N}_{i+1}(t) = -a_{i+1} N_{i+1}(t) + v(t) a_i N_i(t) \end{cases} \quad (151)$$

- *Altération du temps de transition.* Le paramètre de la distribution exponentielle, représentant le temps de transition, subit une modification représentée par $y(t) > 0$. Ce paramètre peut s'allonger ou se réduire selon que $y(t)$ soit supérieur ou inférieur à 1. Ceci se met sous la forme (Eq. 152)

$$\begin{cases} \dot{N}_i(t) = -y(t) a_i N_i(t) + a_{i-1} N_{i-1}(t) \\ \dot{N}_{i+1}(t) = -a_{i+1} N_{i+1}(t) + y(t) a_i N_i(t) \end{cases} \quad (152)$$

Ces équations (Eq. 152) ressemblent nettement à celles formulées pour le cas de l'arrêt des cellules (Eq. 151), ceci est dû à la supposition de la forme exponentielle de la dynamique.

14.2.2 Modèle à un seul compartiment.

Le modèle le plus simple, selon cette approche, consiste à considérer que le traitement n'est pas spécifique à une certaine phase du cycle cellulaire. L'on considère, donc, le cycle cellulaire comme un seul compartiment. L'équation correspondante a pour forme (Eq. 153)

$$\dot{N}(t) = -aN(t) + 2uaN(t); \quad \begin{cases} N(0) = N_0 > 0 \\ 0 \leq u \leq 1 \end{cases} \quad (153)$$

Les valeurs 0 et 1 de la variable de commande $u(t)$ correspondent à l'administration de la dose maximale du traitement, et à la non administration du traitement, respectivement. Et c'est à partir de cette équation que l'on synthétise la loi de commande de $u(t)$ qui nous permettra d'imposer la dynamique désirée pour $N(t)$.

Remarquons que ce type de modèle, bien que présentant un certain manque de précision, est celui qui traduit le mieux ce qui se fait en pratique. En effet, le traitement est tel que les doses sont administrées à des intervalles bien définis, avec une appréciation visuelle de l'évolution de la tumeur au cours du temps. L'administration du traitement se fait de manière homogène sur toute la région tumorale, sans tenir compte des cellules appartenant à une phase plutôt qu'à une autre.

L'identification des paramètres de ce modèle se fait de manière nonlinéaire, de la façon suivante ;

Les intégrales (Eq. 154) sont tout d'abord évaluées, sur une séquence d'intervalles délimités par les points ($k = 0, \dots, n - 1$).

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{N}(t) dt + r \int_{t_k}^{t_{k+1}} N(t) dt = 2rc(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} N(t) dt \quad (154)$$

Ces intégrales peuvent se mettre sous la forme matricielle (Eq. 155)

$$\begin{pmatrix} N(t_1) - N(t_0) + r \int_{t_0}^{t_1} N(t) dt \\ \vdots \\ N(t_n) - N(t_{n-1}) + r \int_{t_{n-1}}^{t_n} N(t) dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r \int_{t_0}^{t_1} N(t) dt & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 2r \int_{t_{n-1}}^{t_n} N(t) dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(t_0) \\ \vdots \\ c(t_{n-1}) \end{pmatrix} \quad (155)$$

Les paramètres inconnus sont donc (Eq. 156)

$$\theta = \left(c(t_0) \quad \dots \quad c(t_{n-1}) \right)^T \quad (156)$$

Nous résolvons finalement le système (Eq. 155) comme un problème des moindres carrés.

14.2.3 Modèle à deux compartiments.

L'on considère, dans cette approche, que le cycle cellulaire est divisé en deux compartiments ; le premier comprendra la première étape de développement, à savoir G_1 , ainsi que la phase de synthèse de l'ADN, en l'occurrence S , tandis que le second compartiment regroupera la phase G_2 et celle de la mitose M . [60]

Notons par $N_1(t)$ et $N_2(t)$, respectivement, les concentrations de cellules du premier et du second compartiment décrits là-dessus, à un temps t donné.

Le modèle le plus simple consiste à utiliser la représentation exponentielle pour décrire la transition temporelle des cellules à travers un compartiment. Le temps de transition d'une cellule

à travers une phase est très variable, surtout en ce qui concerne les cellules malignes. L'on note par a_1 et a_2 les paramètres de la distribution exponentielle. Ces paramètres renvoient à l'inverse des temps de transition.

L'on suppose, par ailleurs, qu'aucun stimulus extérieur n'est présent, et que le flux sortant du premier compartiment est égal au flux entrant dans le second, ce qui permet d'écrire (Eq. 157)

$$\dot{N}_2(t) = -a_2 N_2(t) + a_1 N_1(t) \quad (157)$$

Pour l'obtention de l'équation du premier compartiment, l'on utilise le même principe, en considérant un facteur 2 dans l'équation dynamique correspondante ; ceci afin de mettre en évidence la division cellulaire et la formation de deux cellules filles. Ce qui permet de noter (Eq. 158)

$$\dot{N}_1(t) = -a_1 N_1(t) + 2a_2 N_2(t) \quad (158)$$

Ceci revient à dire que la dynamique des cellules dans un compartiment, lorsque les cellules ne subissent aucun stimulus extérieur, est donnée par une simple équation différentielle ordinaire d'ordre 1.

Le modèle du système se met donc sous la forme d'équations d'état linéaires (Eq. 159)

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = -a_1 N_1(t) + 2a_2 N_2(t) \\ \dot{N}_2(t) = -a_2 N_2(t) + a_1 N_1(t) \end{cases} \quad (159)$$

L'effet du traitement sera introduit, par la suite, en considérant que son seul effet sur les cellules est de les éliminer, en supposant également que son effet n'aura lieu que sur les phases G_2 et M , de manière sélective, tel que décrit dans (Eq. 160)

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = -a_1 N_1(t) + 2(1-u)a_2 N_2(t) & N_1(0) = N_{10} > 0 \\ \dot{N}_2(t) = -a_2 N_2(t) + a_1 N_1(t) & N_2(0) = N_{20} > 0 \end{cases} \quad (160)$$

Ou encore ;

$$\dot{N}(t) = AN(t) + Bu \quad (161)$$

Avec ;

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 2a_2 \\ a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$$

Et ;

$$B = \begin{pmatrix} -2a_2 N_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'un point de vue biologique, ceci revient à dire que le traitement serait plus efficace sur les cellules en phase de Mitose, puisque celles-ci seront plus vulnérables que les cellules normales. De plus le traitement dans cette phase empêchera la création de cellules filles.

Dans ce modèle, u représente la dose du traitement administré, avec $u = 0$ qui correspond au non traitement, et $u = 1$ à la dose maximale. L'on suppose qu'il y a un rapport direct entre la dose administrée et les cellules tuées dans la phase G_2/M , et que de toute manière, toutes les cellules quittent le compartiment G_2/M , ce pourquoi l'on note par $(1 - u)$ le rapport du nombre de cellules qui entrent dans le compartiment G_1/S .

14.2.4 Modèle à trois compartiments.

- *Modèle avec arrêt en S et élimination en G_2/M .* L'une des stratégies du traitement consiste à arrêter les cellules dans la phase S , puis de les libérer lorsqu'un autre traitement anti-cancer, relatif au compartiment G_2/M est à son maximum de potentiel d'élimination. Cette stratégie présente l'avantage de protéger d'avantage les cellules normales qui seraient moins exposées au traitement relatif à G_2/M . Le modèle, dans ce cas, implique la distinction des compartiments G_1 , S et G_2/M . Ce qui permet d'écrire les équations correspondantes (Eq. 162). Il ne resterait plus qu'à définir $u(t) \in [0, 1]$ et $v \in [v_m, 1]$ selon les objectifs de commande et les dynamiques désirées.

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = -a_1 N_1(t) + 2(1-u)a_3 N_3(t) & N_1(0) = N_{10} > 0 \\ \dot{N}_2(t) = -(1-v(t))a_2 N_2(t) + a_1 N_1(t) & N_2(0) = N_{20} > 0 \\ \dot{N}_3(t) = -a_3 N_3(t) + (1-v(t))a_2 N_2(t) & N_3(0) = N_{30} > 0 \end{cases} \quad (162)$$

- *Modèle avec recrutement de G_0 et élimination en G_2/M .* L'un des problèmes de traitement (en chimiothérapie) de certains cancers (leucémies) est le grand nombre de résidus de cellules dormantes dans G_0 , qui sont insensibles au traitement. Il est devenu possible, récemment, de recruter efficacement ces cellules grâce à des substances régulatrices, puis d'utiliser le traitement, une fois ces cellules recrutées. Dans ce modèle, les compartiments concernent les phases G_0 , G_1 et $S + (G_2/M)$, et les équations correspondantes sont (Eq. 163). Il s'agit, là encore, de trouver les lois de $u(t) \in [0, 1]$ et $y(t) \in [1, y_m]$ selon la dynamique désirée.

$$\begin{cases} \dot{N}_0(t) = -y(t)a_0 N_0(t) + 2b_0 u(t)a_2 N_2(t) & N_0(0) = N_{00} > 0 \\ \dot{N}_1(t) = -a_1 N_1(t) - y(t)a_0 N_0(t) + 2b_1 u(t)a_2 N_2(t) & N_1(0) = N_{10} > 0 \\ \dot{N}_3(t) = -a_2 N_2(t) + a_1 N_1(t) & N_2(0) = N_{20} > 0 \end{cases} \quad (163)$$

14.2.5 Modélisation par des Automates Hybrides.

Dans ce paragraphe, notre problème de modélisation comporte deux parties [97] ; une première consiste en la mise des modèles des systèmes étudiés sous une forme hybride, et une seconde partie dans laquelle il s'agit de développer des lois de commande robuste sur la base de ces modèles.

Pour une modélisation générale des systèmes hybrides, nous utilisons un automate hybride, c'est-à-dire un automate fini ayant des variables dont les valeurs évoluent d'une façon continue à travers le temps.

Pour ce faire, nous passons par trois étapes :

- Définir les différents modes de fonctionnement de notre système ;
- Établir les équations régissant le comportement du système dans chaque mode ;
- Spécifier les conditions de passage d'un mode de fonctionnement à un autre ;

Dans ce qui suit, nous allons procéder à la modélisation proprement dite de la tumeur sous la forme d'un automate hybride. Cette modélisation repose essentiellement sur la stratégie de traitement choisie, et les équations mathématiques associées.

La stratégie de traitement considérée consiste en l'arrêt des cellules dans la phase S , puis leur libération lors de l'administration du traitement anti-cancer, relatif au compartiment G_2/M qui sera à son maximum de potentiel d'*élimination*.

Les équations différentielles correspondant à cette stratégie de traitement sont (Eq. 162).

La variable v représente les effets des substances - pourcentage de cellules arrêtées - intervenant dans la régulation du cycle cellulaire, et qui seraient responsables de l'arrêt des cellules dans la phase S , ainsi que de la reprise du cycle par la suite. La variable u quant à elle, représente le pourcentage de cellules éliminées grâce au traitement administré.

L'on pose, pour la suite des développements, $x_1 = N_1$, $x_2 = N_2$ et $x_3 = N_3$.

Sans aucune intervention - aucune administration d'une quelconque substance - la tumeur continue son évolution sous les équations qui régissent sa dynamique. Dans ce cas, les variables de commande u et v seraient égales à la valeur nulle. Les variables d'état x_1 , x_2 et x_3 dans ce cas ne sont pas nulles, il en est de même pour leurs dérivées premières \dot{x}_1 , \dot{x}_2 et \dot{x}_3 , qui seraient même positives. Le comportement de la tumeur dans ce cas est régi par les dynamiques (Eq. 164)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a_1x_1(t) + 2a_3x_3(t) & x_1(0) = x_{10} > 0 \\ \dot{x}_2(t) = -a_2x_2(t) + a_1x_1(t) & x_2(0) = x_{20} > 0 \\ \dot{x}_3(t) = -a_3x_3(t) + a_2x_2(t) & x_3(0) = x_{30} > 0 \end{cases} \quad (164)$$

Ceci correspond à ce l'on nommera : le mode *libre*.

L'administration d'une substance, afin d'intervenir au niveau du cycle cellulaire, dans le but de stopper les cellules dans la phase S , correspond à une dynamique donnée par (Eq. 165)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a_1x_1(t) + 2(1-u)a_3x_3(t) & x_1(0) = x_{10} > 0 \\ \dot{x}_2(t) = -(1-v(t))a_2x_2(t) + a_1x_1(t) & x_2(0) = x_{20} > 0 \\ \dot{x}_3(t) = -a_3x_3(t) + (1-v(t))a_2x_2(t) & x_3(0) = x_{30} > 0 \end{cases} \quad (165)$$

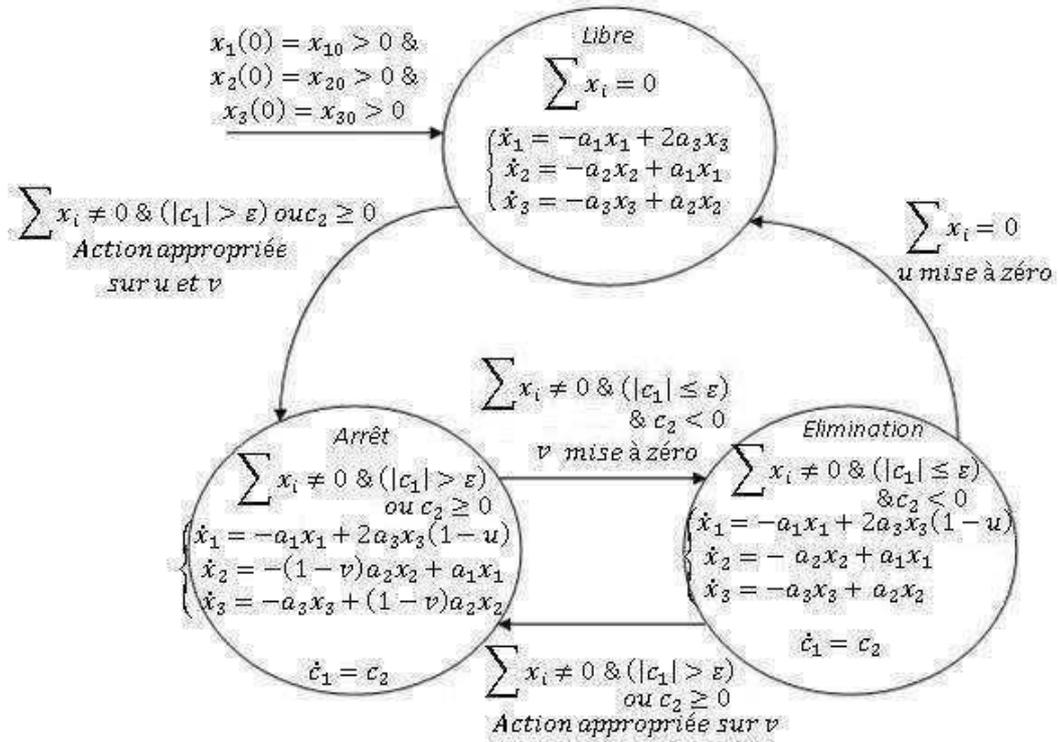


FIGURE 33 – Automate Hybride modélisant le comportement de la tumeur.

Nous appellerons ce mode de fonctionnement : mode *Arrêt*.

Finalement la libération des cellules à des fins d'élimination, moyennant un traitement, correspond au système d'équations (Eq. 166). Il s'agit dans ce cas du mode *Élimination*.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a_1x_1(t) + 2(1-u)a_3x_3(t) & x_1(0) = x_{10} > 0 \\ \dot{x}_2(t) = -a_2x_2(t) + a_1x_1(t) & x_2(0) = x_{20} > 0 \\ \dot{x}_3(t) = -a_3x_3(t) + a_2x_2(t) & x_3(0) = x_{30} > 0 \end{cases} \quad (166)$$

L'exécution de ce système est une séquence d'étapes déterminées par les changements d'états de la tumeur : entre modes *Libre*, *Arrêt* et *Élimination*. Les transitions entre ces modes se produisent selon des conditions bien définies qui devront être satisfaites. Entre deux transitions successives, la valeur du vecteur d'état évolue selon les équations différentielles qui dépendent essentiellement des états des variables de commande.

La figure (Fig. 33) illustre l'automate hybride décrivant le comportement de la tumeur.

Les différentes composantes de l'automate hybride relatif à la tumeur sont les suivantes [21]

- *Les variables*. Il s'agit de l'ensemble $X = \{x_1, x_2, x_3, c\}$ des concentrations des cellules durant ses différentes phases du cycle cellulaire. Autrement dit les concentrations des compartiments préalablement définis. Variables auxquelles nous ajoutons la variable c qui nous permettra de détecter le passage d'un mode à un autre. En effet lorsque celle-ci passe par zéro, la commande u serait à son optimum, de plus lorsque la dérivée temporelle première de c est négative, ceci signifiera qu'elle est à son maximum. Et inversement lorsque c ne

s'annule pas ou que sa dérivée temporelle s'avère positive ou nulle, ceci nous indiquerait que la commande u n'est pas à son optimum d'efficacité. La variable c représente au fait la dérivée temporelle du signal u .

- *Les modes de commande.* C'est l'ensemble $V = \{u_{off}\&v_{off}, u_{on}\&v_{on}, u_{on}\&v_{off}\}$. Les éléments de cet ensemble correspondent respectivement aux états *Libre*, *Arrêt* et *Élimination*.
- *Les conditions de flux.* Ces conditions correspondent aux systèmes d'équations différentielles régissant le comportement de notre système, ce qui correspond aux équations d'état (Eq. 164) pour le mode $(u_{off}\&v_{off})$, le système (Eq. 165) pour le mode $(u_{on}\&v_{on})$ et le système d'équations d'état (Eq. 166) pour le mode de commande $(u_{on}\&v_{off})$.
- *Les conditions d'invariance.* Ce sont les prédicats

$\{\sum x_i = 0\}$ pour le mode *Libre*,
 $\{(\sum x_i \neq 0) \& (|c| \geq \varepsilon \text{ ou } \dot{c} \geq 0)\}$ pour le mode *Arrêt*
 et $\{(\sum x_i \neq 0) \& (|c| \leq \varepsilon) \& (\dot{c} < 0)\}$ pour le mode *Élimination*.

- *Les conditions initiales.* Elles sont données par ;

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10} > 0 \\ x_2(0) &= x_{20} > 0 \\ x_3(0) &= x_{30} > 0 \end{aligned} \tag{167}$$

- *Les commutations de commande* se voient représentées par l'ensemble E des transitions discrètes possibles.

$$\begin{aligned} E = \{ & (u_{off}\&v_{off}, u_{on}\&v_{on}), (u_{on}\&v_{on}, u_{on}\&v_{off}), \\ & (u_{on}\&v_{on}, u_{on}\&v_{off}), (u_{on}\&v_{off}, u_{off}\&v_{off}) \} \end{aligned} \tag{168}$$

- *Les conditions de saut.* Ce sont les prédicats associés à, et définis pour chaque commutation de commande ; la condition $\sum x_i \neq 0 \& |c| > \varepsilon \mid \dot{c} \geq 0$ pour la commutation de commande $(u_{off}\&v_{off}, u_{on}\&v_{on})$; la condition $\sum x_i \neq 0 \& |c| \leq \varepsilon \& \dot{c} < 0$ pour la commutation de commande $(u_{on}\&v_{on}, u_{on}\&v_{off})$; la condition $\sum x_i \neq 0 \& |c| > \varepsilon \mid \dot{c} \geq 0$ pour la commutation de commande $(u_{on}\&v_{off}, u_{on}\&v_{on})$ et la condition $\sum x_i = 0$ pour la commutation $(u_{on}\&v_{off}, u_{off}\&v_{off})$.
- *Les évènements.* Un évènement est affecté à chaque commutation de commande ; *Actions appropriées sur u et v* pour la commutation de commande $(u_{off}\&v_{off}, u_{on}\&v_{on})$; *Mise à zéro de v* pour la commutation de commande $(u_{on}\&v_{on}, u_{on}\&v_{off})$; *Action appropriée sur v* pour la commutation de commande $(u_{on}\&v_{off}, u_{on}\&v_{on})$ et *Mise à zéro de u* pour la commutation de commande $(u_{on}\&v_{off}, u_{off}\&v_{off})$.

Nous avons donc pu traduire le comportement de notre système par un Automate Hybride. Ce modèle s'avère plus complet que l'utilisation des équations dynamiques à elles seules. En effet, ce modèle permet de tenir compte non seulement des évolutions spatiotemporelles continues du système mais aussi des transitions discrètes d'un mode de fonctionnement à un autre.

15 Synthèse des lois de Commande

Dans ce qui suivra, sera développée la loi de commande proprement dite, pour chacun des modes précédents. Cette loi de commande devra être robuste et prendre en considération toutes les éventuelles erreurs de modélisation et/ou de mesure. [99], [97], [100], [98].

La loi de commande que nous développons dans cette partie concerne une certaine catégorie de systèmes, présentant des équations d'état ayant au plus un signal de commande par équation. De plus, il est préférable que le degré relatif de chaque variable à commander n'excède pas la valeur deux, pour des raisons de stabilité.

15.1 Étude de la commandabilité

Avant de procéder au développement d'une quelconque loi de commande pour notre système, il est impératif de passer par une étape importante et nécessaire, qui est la vérification de la commandabilité du système. Car si ce dernier n'est pas commandable, il serait vain de se lancer dans des calculs parfois fastidieux, qui s'avèreraient au final inutiles.

Nous réécrivons les équations de notre système de manière exploitable à cette fin.

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u + g_2(x)v \quad (169)$$

Avec que les champs de vecteur

$$f(x) = \begin{pmatrix} -a_1x_1 + 2a_3x_3 \\ -a_2x_2 + a_1x_1 \\ -a_3x_3 + a_2x_2 \end{pmatrix} \quad (170)$$

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} -2a_3x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (171)$$

$$g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2x_2 \\ -a_2x_2 \end{pmatrix} \quad (172)$$

Nous vérifierons la commandabilité par rapport à chacune des commandes.

- *Commandabilité par rapport à u* ; celle-ci se voit étudiée via le calcul de la matrice M_u donnée par (Eq. 173)

$$M_u = \begin{pmatrix} -2a_3x_3 & \alpha & \beta \\ 0 & 2a_1a_3x_3 & \gamma \\ 0 & 0 & -2a_1a_2a_3x_3 \end{pmatrix} \quad (173)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 2a_3(a_3 - a_1)x_3 - 2a_2a_3x_2 \\ \beta &= -2a_1a_2a_3x_1 + \\ & 2a_2a_3(-2a_1 + a_2 + a_3)x_2 - 2a_3(a_1 - a_3)^2x_3 \\ \gamma &= 4a_1a_2a_3x_2 + (a_1 + a_2 - 2a_3)x_3 \end{aligned} \quad (174)$$

Il paraît clair que les états x_1 , x_2 et x_3 du système sont localement commandables par rapport à u à la condition suffisante que l'état x_3 ne soit pas nul.

- *Commandabilité par rapport à v* ; cette seconde se voit étudiée via le calcul de la matrice M_v déterminée comme suit

$$M_v = \begin{pmatrix} 0 & 2a_2a_3x_2 & \zeta \\ a_2x_2 & a_1a_2x_1 & \eta \\ -a_2x_2 & \lambda & \theta \end{pmatrix} \quad (175)$$

$$\begin{aligned} \zeta &= 4a_1a_2a_3x_1 - 2a_2a_3(a_1 - a_2 + a_3)x_2 \\ \eta &= -a_1a_2(a_1 - a_2)x_1 - 2a_1a_2a_3x_2 + 2a_1a_2a_3x_3 \\ \theta &= a_1a_2(a_1 - a_2 - 2a_3)x_1 + \\ & a_2a_3(a_2 - a_3)x_2 - 2a_1a_2a_3x_3 \\ \lambda &= -a_1a_2x_1 - a_2a_3x_2 \end{aligned} \quad (176)$$

Nous constatons que les deux états x_1 et x_3 (ou x_1 et x_2) du système sont localement commandables par rapport à v à la condition suffisante que l'état et x_2 ne soit pas nul. Et que les deux états x_2 et x_3 sont localement commandables par rapport à v à la condition suffisante que les états x_1 et x_2 ne soient pas nuls.

Au final, nous pouvons déduire que notre système est localement commandable à la condition suffisante que les trois états ne soient pas nuls. Sachant que ces états ne sont autres que les concentrations des cellules dans leurs phases du cycle cellulaire, ceci reviendrait à dire que notre système est commandable tant qu'il existe.

Notons, par ailleurs, que le mode non commandable par v est stable et qu'il tend exponentiellement vers la valeur nulle lorsque les objectifs de commande sont atteints par les deux états commandables.

L'étude de la commandabilité étant faite, nous pouvons passer au calcul des lois de commande proprement dites.

15.2 La commande par Modes de Glissement

La structure du système qui est nonlinéaire et multivariable, présentant deux entrées (u et v) et trois sorties ($y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ et $y_3 = x_3$), nous pousse tout naturellement à opter pour la commande par géométrie différentielle. De par la simplicité de celle-ci et la linéarisation ainsi que le découplage Entrées/Sorties qu'elle procure au système. Cette commande manque néanmoins d'une caractéristique importante à notre étude, qui est la robustesse aussi bien par rapport aux erreurs de modélisation que par rapport aux perturbations. Il va sans dire, donc, que l'on se doit de revoir ce type de commande, et de penser à une autre variante qui serait robuste. Nous détaillerons par la suite les étapes de calcul de cette commande et l'introduction d'un terme qui procurerait à celle-ci la robustesse qui lui fait défaut.

Le développement de cette loi de commande pourrait également présenter une embûche supplémentaire, qui réside dans le calcul de l'inverse de matrice. En effet, le calcul même de cette commande implique l'inversion d'une matrice dont on ne peut garantir l'existence de l'inverse pour le fait que son rang ne soit pas entier ou que celle-ci ne soit pas tout simplement carrée. Nous ferons alors appel dans un premier temps à la pseudo inverse, dans sa version simplifiée, puis, nous procéderons à l'utilisation d'une méthode de calcul plus généralisée de celle-ci.

Calculons tout d'abord les degrés relatifs correspondant à chacune des sorties. Pour cela, nous procédons à des dérivations successives de ces dernières

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 = -a_1x_1 + 2(1-u)a_3x_3 ; \text{ qui implique un degré relatif correspondant } r_1 = 1$$

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_2 = -a_2x_2(1-v) + a_1x_1 ; \text{ qui implique un degré relatif correspondant } r_2 = 1$$

$$\dot{y}_3 = \dot{x}_3 = -a_3x_3 + a_2x_2(1-v) ; \text{ qui implique un degré relatif correspondant } r_3 = 1$$

Afin de calculer la loi de commande par géométrie différentielle, on se doit d'écrire nos données sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \underline{L} + A(x)\underline{u} \quad (177)$$

$$\text{Tels que } \underline{L} = \begin{pmatrix} -a_1x_1 + 2a_3x_3 \\ -a_2x_2 + a_1x_1 \\ -a_3x_3 + a_2x_2 \end{pmatrix} ; A(x) = \begin{pmatrix} -2a_3x_3 & 0 \\ 0 & a_2x_2 \\ 0 & -a_2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

L'application directe de la commande linéarisante par géométrie différentielle, si la matrice $A(x)$ était carrée et de rang entier, donnerait une loi de commande ayant l'allure

$$\underline{u} = A^{-1}(x)[-L + w]$$

Où A^{-1} est l'inverse de $A(x)$ et w une nouvelle commande virtuelle, plus simple à déterminer, dans une nouvelle base où le système serait linéaire.

La matrice A n'étant pas carrée, nous avons recours à une autre méthode pour le calcul analytique de cette commande, en l'occurrence l'utilisation de la pseudo inverse A^+ . Nous calculerons par la suite la pseudo inverse généralisée, basée sur la décomposition à valeurs singulières, à titre comparatif et illustratif.

Le nombre de lignes étant inférieur au nombre des colonnes ($2 < 3$), nous utiliserons la formule appropriée (34.c) pour calculer cette pseudo inverse

$$A^+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2a_3x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a_2x_2} & -\frac{1}{2a_2x_2} \end{pmatrix} \quad (178)$$

Le calcul de la pseudo inverse généralisée, que l'on notera A_g^+ nécessite la factorisation de la matrice A en procédant à la décomposition selon les valeurs singulières. Les calculs donnent les résultats suivants :

$$\text{Du côté gauche } AA^T = \begin{pmatrix} 4a_3^2x_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2x_2^2 & -a_2^2x_2^2 \\ 0 & -a_2^2x_2^2 & a_2^2x_2^2 \end{pmatrix}$$

Avec des valeurs singulières $\sigma_1^2 = 4a_3^2x_3^2$, $\sigma_2^2 = 2a_2^2x_2^2$ et $\sigma_3^2 = 0$.

Et des vecteurs propres $v_{g1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $v_{g2} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T$

et $v_{g3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T$.

$$\text{Du côté droit } A^T A = \begin{pmatrix} 4a_3^2x_3^2 & 0 \\ 0 & 2a_2^2x_2^2 \end{pmatrix}$$

Avec des valeurs singulières $\sigma_1^2 = 4a_3^2x_3^2$, $\sigma_2^2 = 2a_2^2x_2^2$.

Et des vecteurs propres $v_{d1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ et $v_{d2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Les valeurs singulières communes au côté gauche et au côté droit sont $\sigma_1^2 = 4a_3^2x_3^2$, $\sigma_2^2 = 2a_2^2x_2^2$. On peut donc définir les matrices Σ et Σ^+ par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} -2a_3x_3 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}a_2x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Sigma^+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2a_3x_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}a_2x_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous permet de constituer nos matrices et procéder ainsi au calcul de la pseudo inverse généralisée

$$\begin{aligned}
A_g^+ &= \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2a_3x_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}a_2x_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2a_3x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a_2x_2} & -\frac{1}{2a_2x_2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{179}$$

Cette dernière méthode donne le même résultat que précédemment mais paraît un peu plus longue, elle offre néanmoins la garantie de l'existence ainsi que la possibilité de calculer la pseudo inverse quels que soient le rang et le nombre des lignes / colonnes de la matrice.

Finalement, la commande que nous implémenterons utiliserait A_g^+ au lieu de A^- et aurait l'allure (Eq. 180).

$$\underline{u} = A_g^+(x) M_d [-\underline{L} + w] \tag{180}$$

M_d est la matrice diagonale contenant les inverses des éléments diagonaux de la matrice AA_g^+ , et w une commande virtuelle à synthétiser selon la technique de commande adoptée.

Notons, au passage que cette pseudo inverse peut être de droite ou de gauche. Ceci signifie que dans un cas, elle donnerait une matrice identité parfaite lorsqu'elle est composée dans un sens, et que celle-ci donne une matrice carrée, mais pas identité, lorsqu'elle est composée dans l'autre sens. Dans ce dernier cas, il y aura perte d'informations pour certaines dynamiques, et des parties diagonales pour d'autres qui seront susceptibles d'être découplées et linéarisées. Il faudrait à ce moment là faire un choix de commande pour une partie des variables. Le nombre total des variables à commander serait alors de m , le nombre des variables de commande.

Cette méthode s'avère efficace dans le cas particulier où les dynamiques restantes satisfont les objectifs de commande lorsque les dynamiques commandées atteignent les leurs. Elle s'appliquerait donc bien à notre cas.

Cette loi de commande serait efficace si l'on connaissait parfaitement tous les paramètres du système, sans en oublier les moindres dynamiques, ce qui est loin d'être le cas en pratique. Ceci signifie, en d'autres termes, qu'en présence d'erreurs de modélisation et ou de mesure, notre commande ne serait plus précise et manque donc de robustesse. Pour ce faire, nous introduirons un terme qui pallierait à ce manque, et nous procédons de la manière suivante :

Nous introduisons, dans un premier temps, le vecteur $\Upsilon(x)$ des fonctions $L_f^{r_i-1}h_i$;

$$\Upsilon(x) = \begin{pmatrix} L_f^{r_1-1}h_1 \\ L_f^{r_2-1}h_2 \\ \vdots \\ L_f^{r_m-1}h_m \end{pmatrix} \quad (181)$$

De par la définition même du vecteur \underline{r} des degrés relatifs associés aux sorties $h_i(x) = y_i$, le vecteur $\Upsilon(x)$ peut également s'écrire en utilisant les intégrales $\int L_f^{r_i}h_i dt$;

$$\Upsilon(x) = \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \\ \vdots \\ \Upsilon_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int L_f^{r_1}h_1 dt \\ \int L_f^{r_2}h_2 dt \\ \vdots \\ \int L_f^{r_m}h_m dt \end{pmatrix} \quad (182)$$

La dérivée temporelle première de cet ensemble de fonctions que nous noterons $\dot{\Upsilon}(x)$ peut s'exprimer de la manière suivante ;

$$\begin{aligned} \dot{\Upsilon} &= \frac{d\Upsilon}{dt} \\ &= \frac{\partial \Upsilon}{\partial \underline{y}^{(r-1)}} \times \frac{\partial \underline{y}^{(r-1)}}{dt} \\ &= \frac{\partial \Upsilon}{\partial \underline{y}^{(r-1)}} \underline{y}^{(r)} \\ &= \frac{\partial \Upsilon}{\partial \underline{y}^{(r-1)}} \underline{L}(x) + \frac{\partial \Upsilon}{\partial \underline{y}^{(r-1)}} A(x) \underline{u} \\ &= \underline{L}(x) + A(x) \underline{u} \end{aligned} \quad (183)$$

Expression obtenue de par le fait que $\frac{\partial \Upsilon}{\partial \underline{y}^{(r-1)}} = 1$ et $\frac{\partial \underline{y}^{(r-1)}}{dt} = \underline{y}^{(r)} = \underline{L}(x) + A(x) \underline{u}$.

Le vecteur \underline{u} regroupe toutes les commandes u_i , de même pour le vecteur \underline{L} qui regroupe les termes $L_f^{r_i}h_i$.

Pour un choix de commande (Eq. 180), le problème de robustesse s'impose et subsiste. Nous reprendrons donc cette commande que nous réécrivons sous la forme (Eq. 184) ;

$$\underline{u} = A_g^+(x) M_d \left[- \begin{pmatrix} L_f^{r_1}h_1 \\ \vdots \\ L_f^{r_m}h_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \underline{K} \begin{pmatrix} \text{sign}(\Upsilon_1) \\ \vdots \\ \text{sign}(\Upsilon_m) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (184)$$

Équations que l'on réécrit sous la forme (Eq. 185)

$$\underline{u} = A_g^+(x) M_{dm} \left[-\underline{L}_m - \underline{K}_m \begin{pmatrix} \text{sign}(\Upsilon_1) \\ \vdots \\ \text{sign}(\Upsilon_m) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (185)$$

\underline{K} est une matrice de pondération de la forme $\text{diag}(K_i)$, avec des constantes K_i positives, et \underline{K}_m la version réduite de celle-ci.

M_{dm} est la matrice réduite de M_d .

Bien entendu, les équations auront été permutées de sorte à avoir en premier les dynamiques correspondant aux parties de matrices identité.

L'application de cette commande aboutirait à la dynamique ;

$$\dot{\Upsilon} = -\underline{K}_m \text{sign}(\Upsilon) \quad (186)$$

On voit clairement que l'on atteint nos objectifs de commande étant donné le fait que $\Upsilon \dot{\Upsilon} \leq 0$.

De plus, le raisonnement serait identique lorsqu'il s'agira de poursuite de trajectoire, en considérant

$$\Upsilon(x) = \begin{pmatrix} \int L_f^{r_1} h_1 dt - y_{1ref} \\ \int L_f^{r_2} h_2 dt - y_{2ref} \\ \vdots \\ \int L_f^{r_m} h_m dt - y_{mref} \end{pmatrix} \quad (187)$$

Et ;

$$\underline{L}_m = \begin{pmatrix} L_f^{r_1} h_1 - \dot{y}_{1ref} \\ L_f^{r_2} h_2 - \dot{y}_{2ref} \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m - \dot{y}_{mref} \end{pmatrix} \quad (188)$$

Remarquons qu'en présence d'erreurs de modélisation et d'erreurs de mesure ρ_m , la dynamique à laquelle on aboutirait serait plutôt

$$\dot{\Upsilon} = -\underline{K}_m \text{sign}(\Upsilon) + \rho_m \quad (189)$$

Ces erreurs de modélisation devront donc être majorées par les différents gains K_i de la matrice \underline{K}_m .

On prendra bien entendu, pour l'étape commande, les sorties $h_i(x) = y_i = x_i$, $i = 1, 2, 3$.

La transformation, après application de la commande, que nous appellerons "semi-linéarisante", consiste à prendre comme futures variables $z_i = y_i = x_i$, $i = 1, 2, 3$.

Nous devons nous assurer que cette transformation est un difféomorphisme, noté $\varphi(x) = \underline{z}$. Pour ce faire, il suffit de vérifier que la matrice Jacobienne J correspondante est régulière, ce qui est tout à fait le cas pour notre système. En effet, le calcul de cette matrice Jacobienne aboutit à la matrice identité (Eq. 190).

$$J = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (190)$$

Nous allons maintenant appliquer ce qui vient d'être développé à notre système, en précisant que nos objectifs de commande sont l'annulation des trois concentrations de cellules et donc l'annulation des variables d'état x_i ou encore z_i .

Dans le mode Libre.

Il va sans dire qu'aucune commande ne sera appliquée dans ce mode. L'on notera par conséquent $u = v = 0$.

Dans le mode Arrêt.

Nous choisissons de commander les deux variables x_1 et x_2 , et nous obtenons les expressions suivantes pour nos deux commandes

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{2a_3x_3} \times [\dot{x}_{1r} + a_1x_1 - 2a_3x_3 - K_1 \text{sign}(x_1 - x_{1r})] \\ v = \frac{1}{a_2x_2} [\dot{x}_{2r} - a_1x_1 + a_2x_2 - K_2 \text{sign}(x_2 - x_{2r})] \end{cases} \quad (191)$$

Le choix entre les dynamiques x_2 et x_3 , pour la commande, revient au fait que le terme a_2x_2v intervient, avec deux signes différents, dans les équations du système correspondant à ces deux dynamiques. Ceci revient à faire un choix de considération entre : cellules arrêtées dans le mode actuel ou cellules n'entrant pas dans le mode suivant, ce qui correspond à une même affirmation.

Dans le mode élimination.

Nous adoptons les lois de commande $u = -\frac{1}{2a_3x_3} \times [\dot{x}_{1r} + a_1x_1 - 2a_3x_3 - K_1 \text{sign}(x_1 - x_{1r})]$ et $v = 0$.

Les références x_{ir} que l'on considèrera, pour les deux modes 2 et 3, ont des dynamiques choisies (Eq. 192), convergeant vers zéro.

$$\dot{x}_{ir} = a_{mi}x_{ir} + b_{mi}r \quad (i = 1, 2) \quad (192)$$

Tels que

r est une consigne assignée à zéro.

a_{mi} et b_{mi} sont les paramètres des dynamiques choisies.

Nous développerons, pour la suite de cette section, des lois de commande, en utilisant différentes techniques, dans le deuxième mode, ce mode faisant intervenir les deux variables de com-

mande u et v , ceci à des fins de comparaison.

15.3 La commande de confiance appliquée aux tumeurs

La commande que nous appliquons, dans cette sous-section, est celle décrite dans le dernier paragraphe de la sous-section (Eq. 7.2). La synthèse de la loi de commande s'établit selon les étapes suivantes ;

Étape 1. Le choix d'un nombre approprié de réponses possibles (singletons). Le choix du nombre des réponses, dans les intervalles $[u_{min}, u_{max}]$ et $[v_{min}, v_{max}]$, est très important. En effet, un nombre important de réponses signifierait que deux possibilités consécutives sont trop proches, et qu'il n'y aurait pas de grande différence entre leur critère respectif lors de la prise de décision. Ceci ne ferait qu'augmenter, de manière inutile, le temps d'exécution de l'algorithme de commande.

Par ailleurs, le choix d'un nombre insuffisant de réponses, réduit la précision et peut nous induire à passer à côté de la vérité (la commande permettant d'atteindre les objectifs de commande).

Étape 2. Après avoir effectué un choix adéquat d'un nombre approprié de valeurs équidistantes pour les paires (u_k, v_l) , l'étape suivante consiste à calculer les différentes sorties, en utilisant le modèle mathématique avec chaque paire de singletons (u_k, v_l) . Ceci afin de générer les différentes valeurs X_{mod} , en utilisant la relation (Eq. 193)

$$\dot{x}_{mod} = \underline{f}(x_{mod}) + \underline{g}(x_{mod})(u_k, v_l)^T \quad (193)$$

Il en est de même pour les valeurs mesurées (ou estimées) X_{mes} , qui devront elles aussi être déterminées.

Étape 3. Par la suite, les sources S_1 et S_2 sont consultées avec la méthode décrite précédemment. Les paramètres d'affaiblissement α_1 et α_2 sont introduits, décrivant la confiance allouée à chaque source d'information, tels que spécifiés dans (Eq. 63).

Lors de la simulation, nous choisirons d'attribuer $\alpha_1 = 0,75$ pour la première source, et $\alpha_2 = 0,85$ pour la seconde. Ce qui revient à dire que l'on fera plus confiance aux valeurs mesurées qu'à celles résultant du modèle mathématique, lors de la prise de décision.

Les matrices de distribution de masses M_1 et M_2 sont ensuite formées. Elles contiennent les distributions de masses calculées pour chacune des paires (u_k, v_l) , selon les deux sources d'information, en utilisant (Eq. 65).

Étape 4. Dans cette étape, la matrice de prise de décision M est déterminée selon (Eq. 61) et (Eq. 62), combinant ainsi chaque $m_1(k, l)$ et $m_2(k, l)$ de M_1 et M_2 , respectivement, pour chaque paire (u_k, v_l) .

Étape 5. L'étape finale concerne la prise de décision. Elle repose sur le choix de la paire (u_k, v_l) permettant de maximiser le critère de prise de décision. Ceci correspond à l'élément maximum de la matrice M . La paire (u_k, v_l) correspondante sera retenue et appliquée au système réel.

Remarque

Les lois de commande telles que présentées dans les sous-sections (15.2) et (15.3) présentent bien entendu un phénomène de shattering, dû à la partie glissante pour la commande glissante, et aux discontinuités dues aux choix et aux prises de décision pour la commande de confiance. Ce phénomène est dû également au fait que les gains associés à la partie glissante u_{sl} et à la partie de confiance $u_{bel-applied}$ restent constants. Raison pour laquelle nous prendrons en considération une dynamique ϕ , décroissante avec l'erreur de poursuite (e_i) - pouvant être à titre d'exemple la valeur absolue de l'erreur de poursuite ou encore une interpolation polynomiale décroissant avec cette même erreur - et représentant l'adaptation en gain des parties présentant les discontinuités dans les expressions des deux lois de commandes, afin de réduire considérablement ce phénomène. Ces parties discontinues des commandes deviendraient (Eq. 194 - Eq. 195)

$$u_{sl} = -K_{sl} |\phi| \text{sign}(\Upsilon) \quad (194)$$

$$u_{bel-applied} = K_{bel} |\phi| u_{bel} \quad (195)$$

K_{sl} et K_{bel} étant deux constantes positives, et u_{sl} , $u_{bel-applied}$, et u_{bel} sont la nouvelle partie glissante appliquée, la nouvelle et l'ancienne parties discontinues de la commande de confiance appliquée, respectivement.

15.4 Application de la commande Super-Twisting

La commande par super-Twisting appliquée au système (Eq. 165) implique l'application préalable de la commande linéarisante découplante (Eq. 196), afin de parvenir à un nouveau système contenant deux sous-systèmes monovariabiles représentés respectivement par l'entrée v_1 et la sortie x_1 , concernant le premier sous-système, et par l'entrée v_2 et la sortie x_2 pour le second.

$$\begin{cases} u = -\frac{1}{2a_3x_3} \times [\dot{x}_{1r} + a_1x_1 - 2a_3x_3 + v_1] \\ v = \frac{1}{a_2x_2} [\dot{x}_{2r} - a_1x_1 + a_2x_2 + v_2] \end{cases} \quad (196)$$

Par la suite, la synthèse de la commande Super-Twisting peut être établie de la manière suivante.

$$v_j = u_{j1} + u_{j2} \quad (197)$$

$$u_{j2} = \begin{cases} -\lambda_j |S_{j0}|^p \text{sign}(S_j) & ; |S_j| > S_{j0} \\ -\lambda_j |S_j|^p \text{sign}(S_j) & ; |S_j| \leq S_{j0} \end{cases} \quad (198)$$

$$\dot{u}_{j1} = \begin{cases} -v_j & ; |v_j| > 1 \\ -\alpha_j \text{sign}(S_j) & ; |v_j| \leq 1 \end{cases} \quad (199)$$

Telles que

v_j ($j = 1, 2$) sont les commandes virtuelles, après application de la commande linéarisante ;

S_j et S_{j0} sont respectivement la surface de glissement et la valeur limite inférieure de celle-ci, correspondant à la $j^{\text{ième}}$ variable de commande virtuelle ;

u_{j1} et u_{j2} sont les deux composantes de la commande Super-Twisting, pour la $j^{\text{ième}}$ variable de commande virtuelle ;

ρ , λ_j et α_j sont des constantes positives ;

Pour l'application, la valeur 0.5 a été choisie pour le paramètre ρ . Les surfaces de glissement ont été considérées comme étant les erreurs de poursuite $S_j = y_j - y_{jref}$.

15.5 Synthèse de la commande classique PI, non robuste, à titre comparatif

La synthèse de la commande PI (Eq. 200), a également impliqué une commande linéarisante au préalable, à la suite de laquelle une commande PI a été appliquée pour chacun des système SISO obtenu.

Il va de soi que la dynamique x_3 reste stable, comme indiqué dans l'étape de l'étude de la commandabilité du système.

$$\begin{aligned} v_1 &= -\dot{y}_{1ref} + K_{p1}e_1 + K_{i1} \int e_1 dt \\ v_2 &= -\dot{y}_{2ref} + K_{p2}e_2 + K_{i2} \int e_2 dt \end{aligned} \quad (200)$$

16 Simulations et résultats.

Les simulations ont été établies pour plusieurs cas de figure. Nous avons supposé avoir un modèle ne présentant aucune erreur de modélisation, puis nous avons introduit des erreurs de modélisation constantes et sinusoïdales pour l'étude de la robustesse. De plus nous avons pris en considération certains aspects et limitations physiques ; tels que le fait que les concentrations ne peuvent être des grandeurs négatives, de même pour les commandes qui sont limitées par la valeur unité, puisqu'il s'agit de rapports et pourcentages, étant donné le fait qu'il soit impossible d'éliminer et arrêter plus que ce qu'il n'existe comme cellules. D'autre part des simulations ont été effectuées, à titre comparatif, concernant les techniques de commande précédemment développées, pour des erreurs de modélisation allant jusqu'à 50% sur les paramètres du système. Une comparaison a également été faite avec des simulations considérant des références variables, afin d'apprécier les performances de poursuite de manière théorique. Puis finalement, des simulations de commandes en boucle ouverte ont été effectuée afin de mieux se rapprocher de ce qui se fait en pratique.

Les résultats de simulation concernent les trois concentrations des trois types de cellules. Ces résultats sont présentés en système unitaire (per unit system).

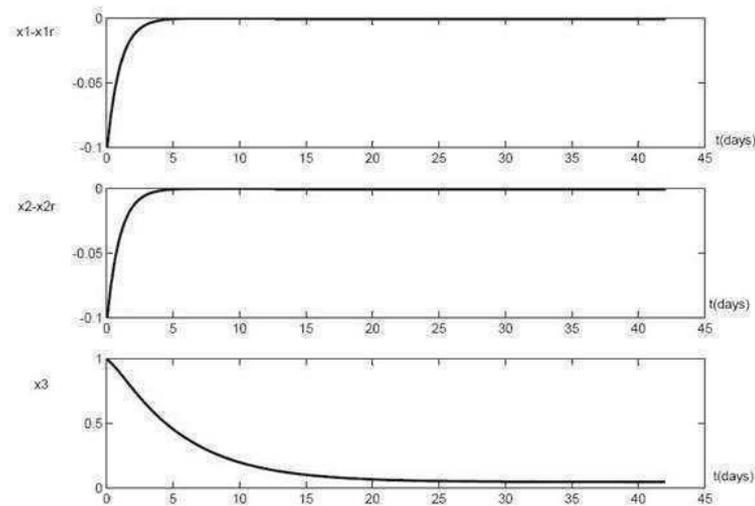


FIGURE 34 – Les erreurs de poursuite pour la commande de confiance, et la concentration du troisième compartiment

Les paramètres utilisés sont inspirés de données pratiques, reposant sur la durée réelle de chacune des phases du cycle cellulaire ;

$$a_1 = 0.091; a_2 = 0.125 \text{ et } a_3 = 0.200;$$

16.1 Résultats de la commande de confiance

16.1.1 Simulations en boucle fermée

Pour la méthode de commande de confiance, les résultats sont présentés, dans un premier temps, pour une référence variable, afin d’apprécier les performances de poursuite. On voit clairement que les erreurs de poursuite convergent vers zéro, même en présence d’erreurs de modélisation et de mesures (Fig. 34).

16.1.2 Simulations en boucle ouverte

Les résultats précédents sont bien évidemment théoriques, puisque la commande en boucle fermée est très difficile à réaliser en pratique. Elle nécessiterait la continuité des mesures. Raison pour laquelle des simulations en boucle ouverte ont été faites. Où la commande est calculée off-Line, puis implémentée par la suite, en utilisant les valeurs estimées des sorties, valeurs plus appropriées pour la pratique.

Les résultats montrent que la commande de confiance donnerait de meilleurs résultats en pratique (Fig. 35). Les concentrations en cellules diminuent considérablement par rapport aux résultats de la commande par modes de glissement (Fig. 38).

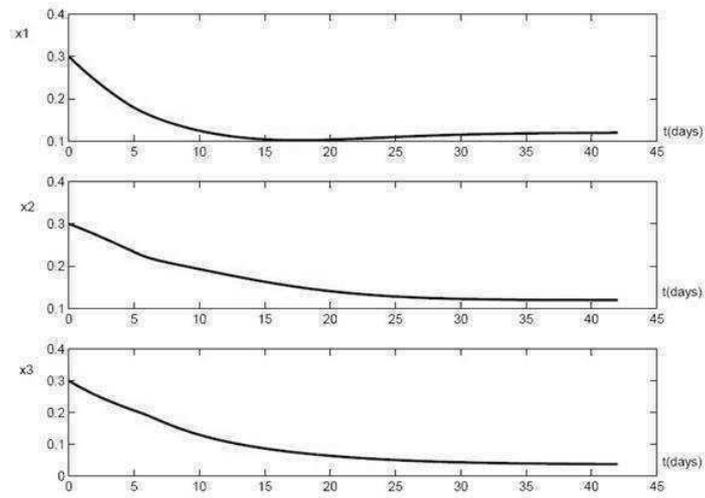


FIGURE 35 – Résultats de simulation pour la commande de confiance en boucle ouverte

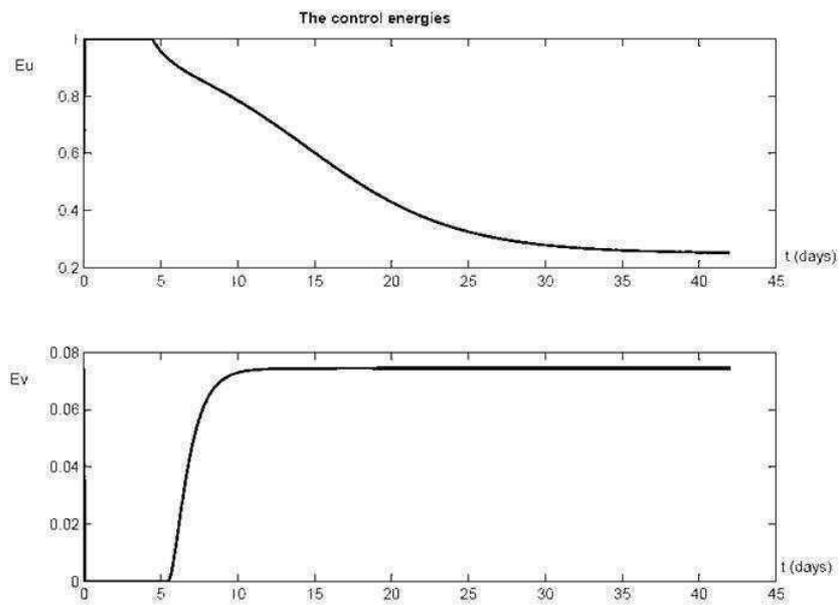


FIGURE 36 – Énergies des variables de commande pour la commande de confiance

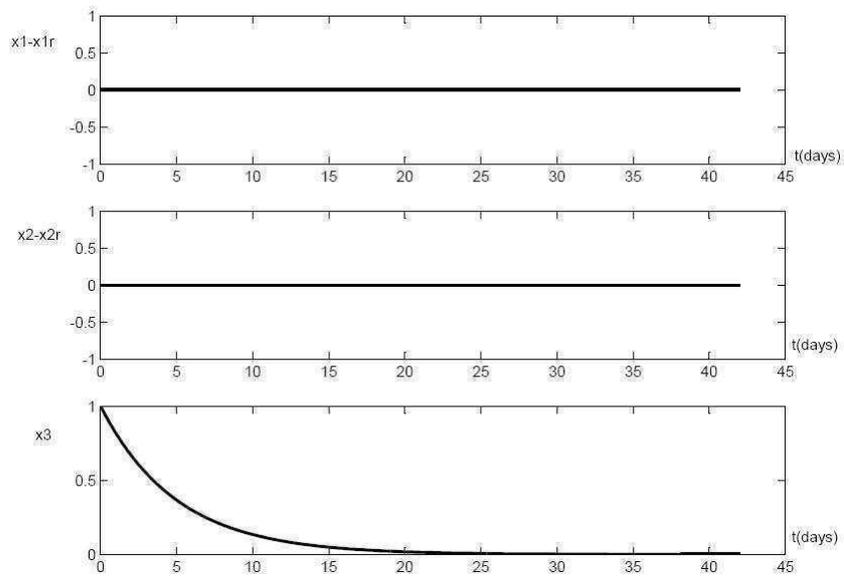


FIGURE 37 – Les erreurs de poursuite pour la commande par Modes de glissement, et la concentration cellulaire du troisième compartiment

16.1.3 Énergies de commande

Notre intérêt pourrait aussi porter sur les énergies des variables de commande, illustrées dans (Fig. 36).

Nous pouvons voir que la seconde variable de commande présente une énergie relativement faible, mais pas pour la première variable de commande qui concerne la substance d'élimination des cellules. Ce qui expliquerait l'efficacité constatée dans les résultats.

Le système a répondu de manière robuste pour la commande de confiance, dans tous les cas de figure et a présenté de meilleurs résultats, particulièrement concernant la commande en boucle ouverte. Ceci peut être expliqué par le fait que la loi de commande ne dépend pas principalement des valeurs issues des modèles ou des valeurs mesurées ou estimées, mais de la confiance accordée à chacune d'entre elles.

16.2 Résultats de la commande par Modes de Glissement

Concernant la deuxième loi de commande, les résultats sont également présentés, en premier lieu, pour la boucle fermée (Fig. 37). Les résultats montrent de bonnes performances en boucle fermée également.

Concernant la boucle ouverte, les résultats sont présentés dans (Fig. 38). Ces résultats sont moins concluants que ceux de la commande de confiance.

Les résultats relatifs au énergies de commande sont illustrés par la figure (Fig. 39). Nous pouvons voir que la seconde variable de commande présente une énergie nettement supérieure à celle obtenue avec la commande de confiance.

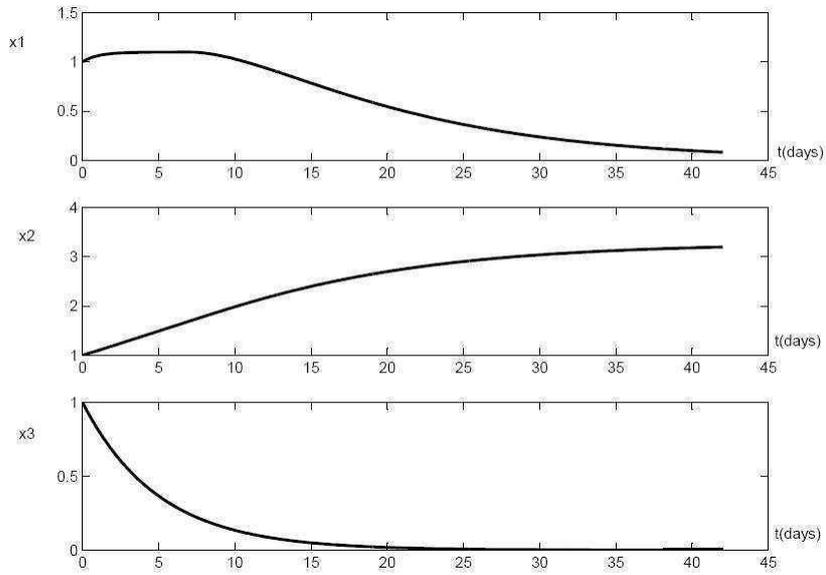


FIGURE 38 – Résultats de simulation pour la commande glissante appliquée en boucle ouverte

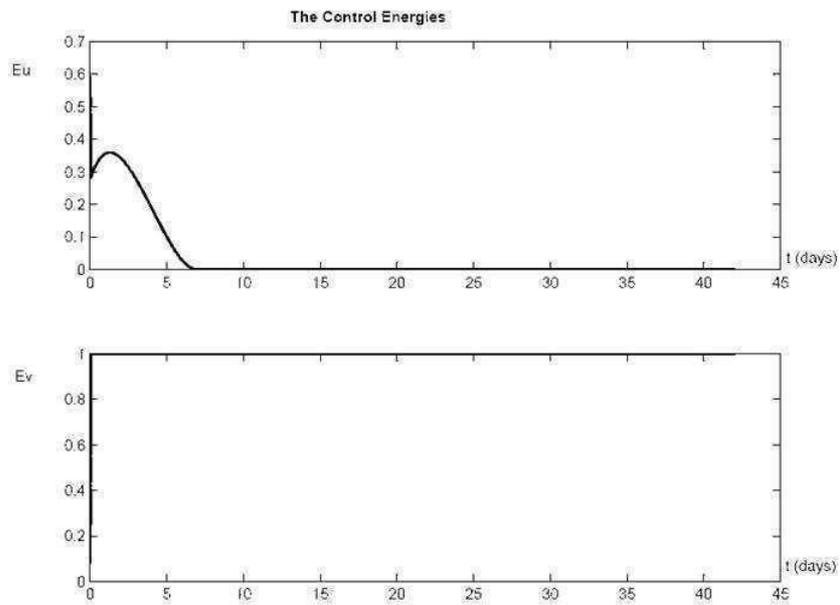


FIGURE 39 – Énergies des variables de commande pour la technique de commande glissante

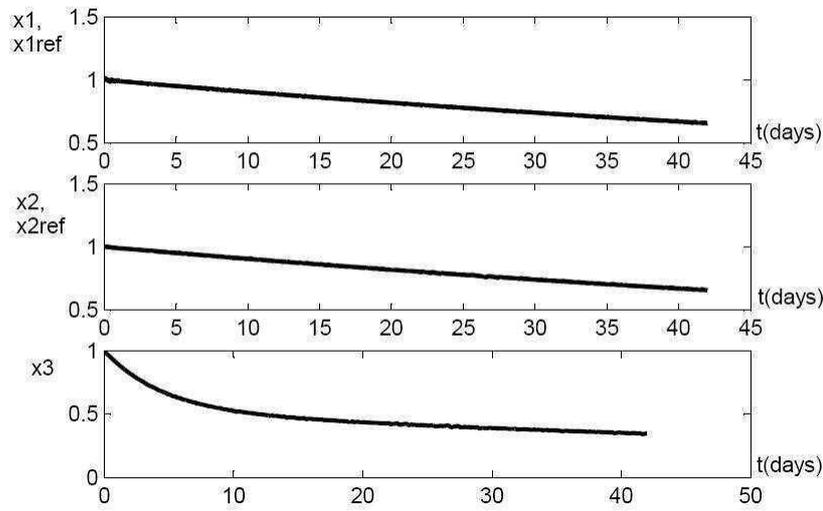


FIGURE 40 – Erreurs de poursuite pour la commande Super-Twisting

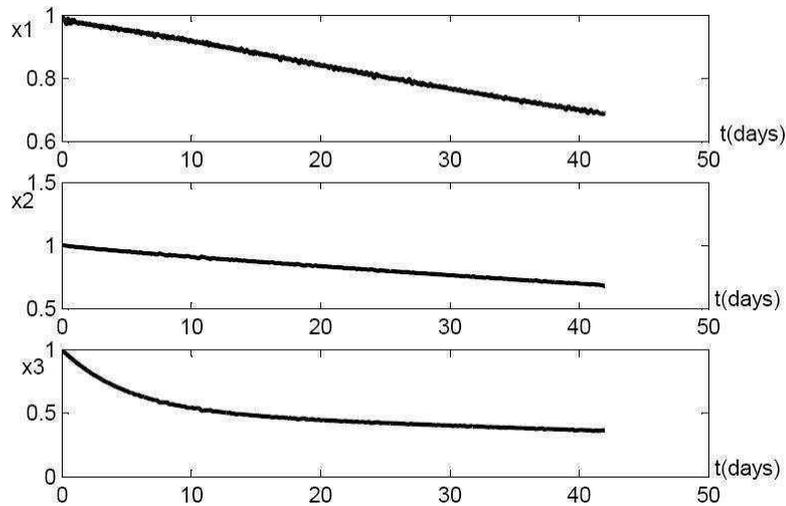


FIGURE 41 – Résultats de la commande Super-Twisting en boucle ouverte

16.3 Résultats de la commande Super-Twisting

Nous présentons tout d'abord les résultats de la commande en boucle fermée, afin d'en apprécier les performances de poursuite de trajectoire.

Les résultats correspondant aux sorties ainsi qu'aux variables de référence sont présentés dans (Fig. 40).

La commande en boucle ouverte a également été établie et simulée. Sont présentés les résultats correspondants dans (Fig. 41).

Notre intérêt s'est également porté sur les énergies de commande (Fig. 42) et (Fig. 43).

Nous présentons finalement les résultats montrant la convergence vers les surfaces de glissement choisies (Fig. 44). Nous pouvons constater une convergence sous forme d'encerclement de l'origine.

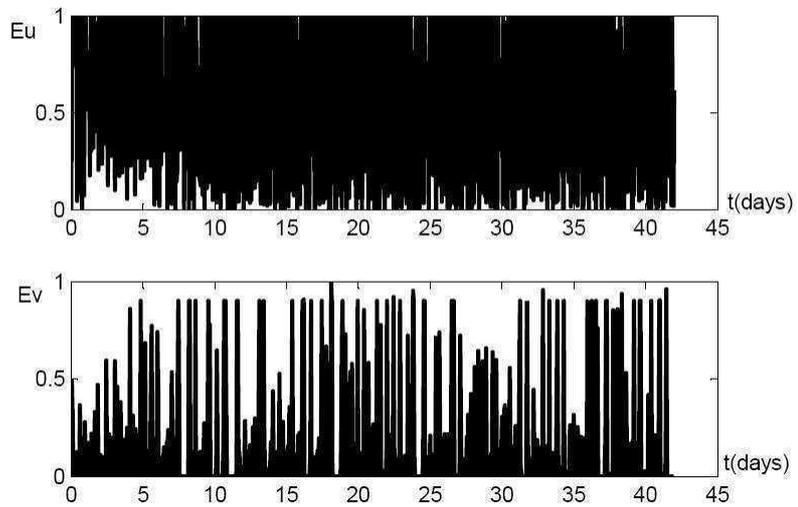


FIGURE 42 – Énergies de commande correspondant à la commande Super-Twisting

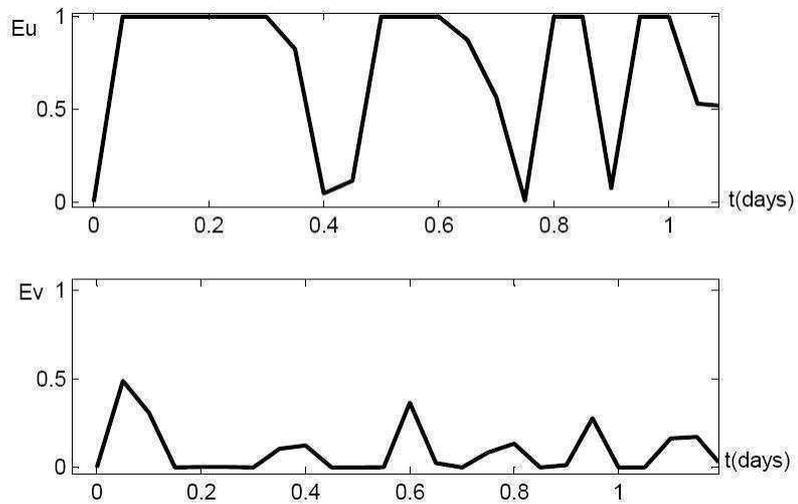


FIGURE 43 – Énergies de la commande correspondant au Super-Twisting algorithm, sur un horizon d'une journée (premier jour)

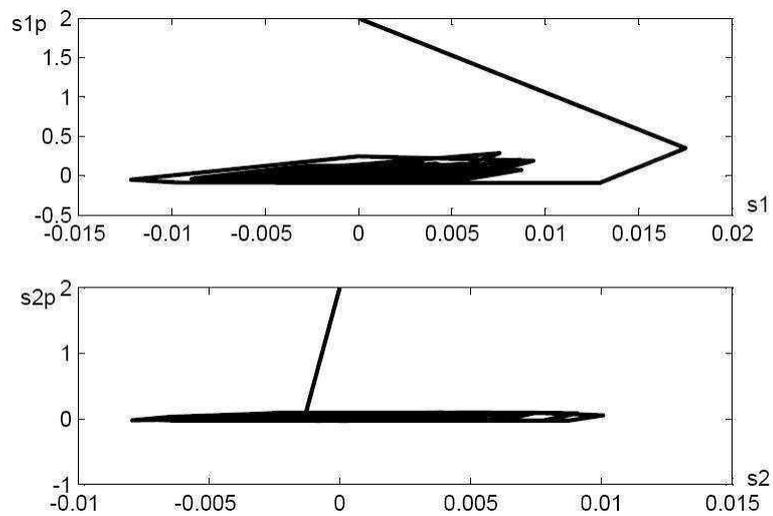


FIGURE 44 – Dérivées des surfaces de glissement fonction des surfaces de glissement pour illustrer la convergence de celles-ci.

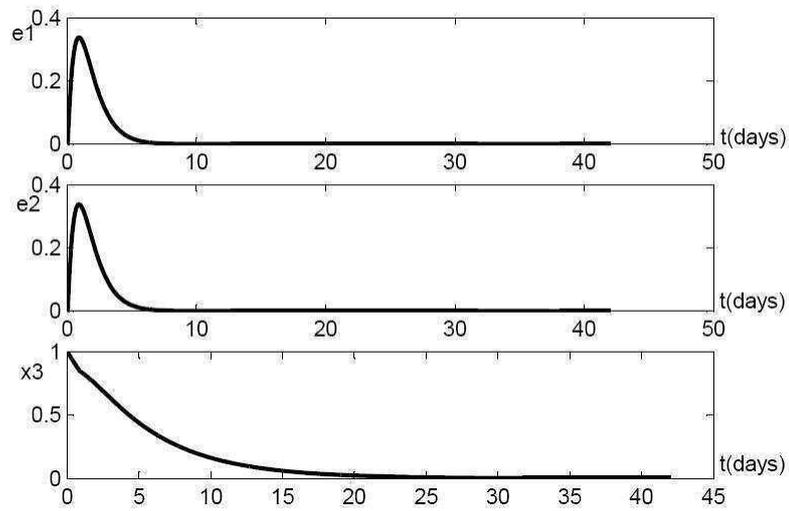


FIGURE 45 – Résultats de poursuite en boucle fermée, correspondant à la commande classique PI

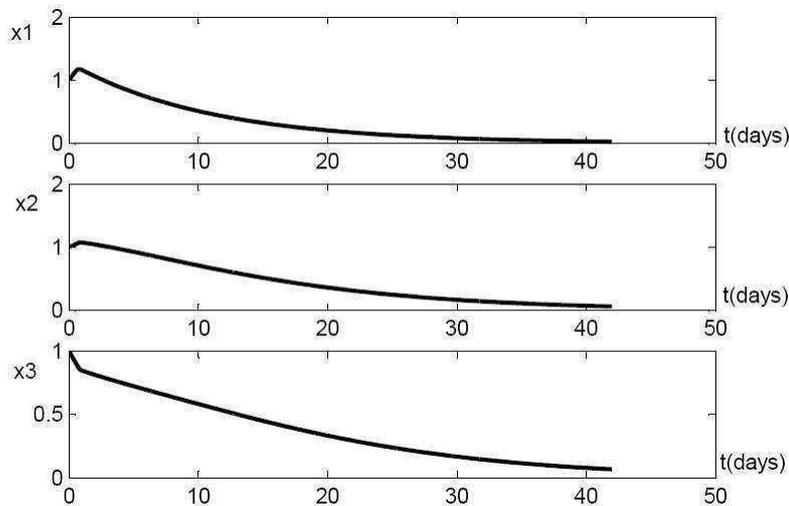


FIGURE 46 – Les résultats de commande en boucle ouverte, correspondant à la commande classique PI

16.4 Résultats de la commande classique PI

Rappelons que cette technique de commande a été appliquée uniquement à titre comparatif.

Nous nous sommes donc intéressés aux résultats correspondants à la poursuite en boucle fermée (Fig. 45), à la commande en boucle ouverte (Fig. 46) ainsi qu'aux énergies de commande (Fig. 47).

Afin de tester la robustesse, sachant bien que que cette commande n'est pas robuste, à titre comparatif avec les autres techniques, une erreur de modélisation a été introduite, de type échelon sur les paramètres du modèle.

On voit clairement que les résultats de poursuite en boucle fermée, ainsi que les résultats de la boucle ouverte, en présence d'erreurs de modélisation ne sont pas satisfaisants (Fig. 48) et (Fig. 49). Il en est de même pour les énergies de commande (Fig. 47) qui s'avèrent assez gourmandes par rapport aux autres techniques.

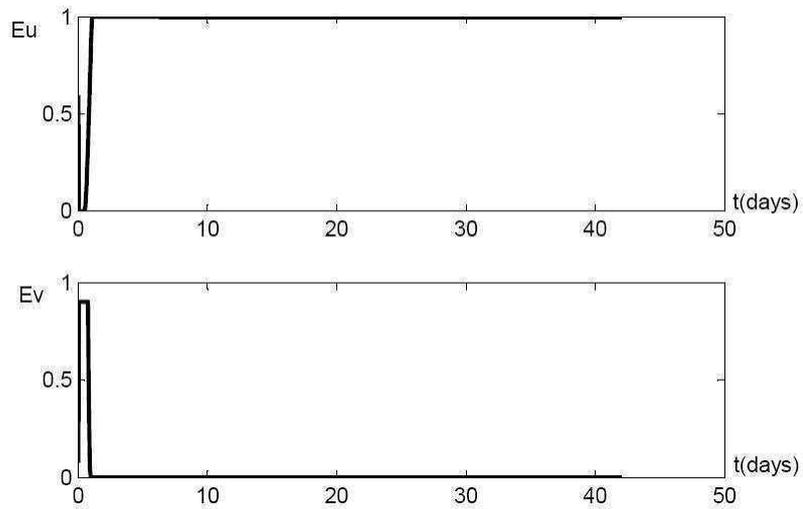


FIGURE 47 – Énergies de la commande PI appliquée à la commande de tumeur

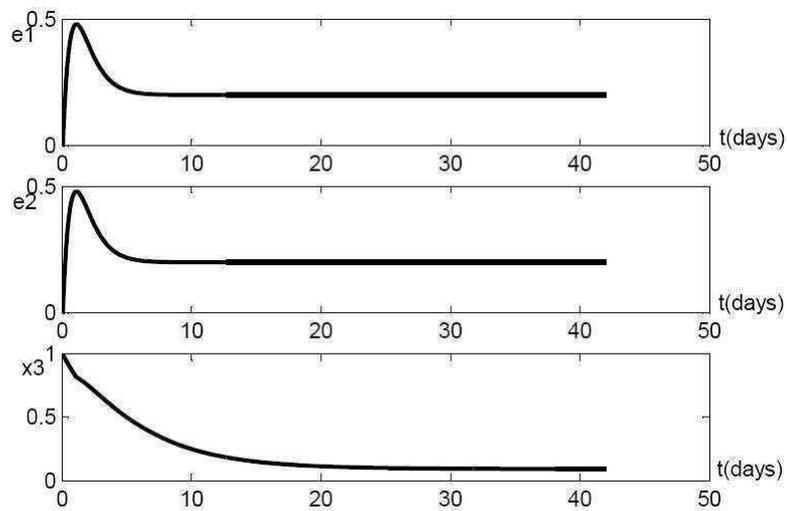


FIGURE 48 – Résultats de poursuite en boucle fermée, pour la commande PI, en présence d'erreurs de modélisation

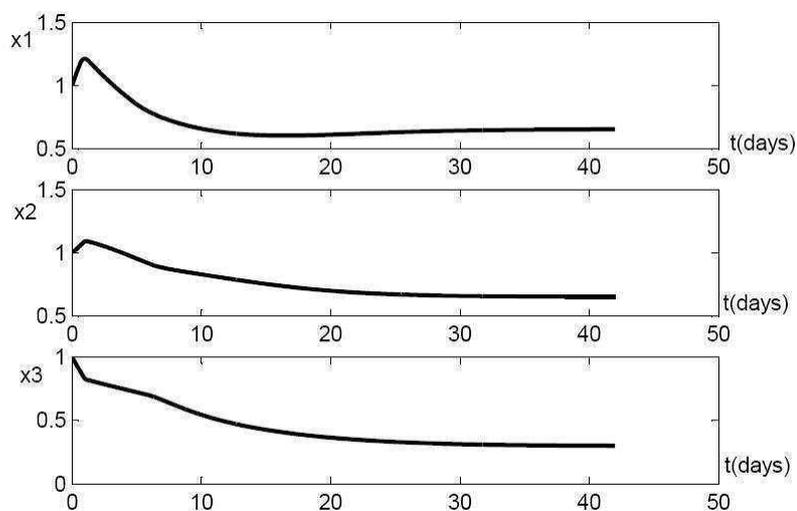


FIGURE 49 – Résultats en boucle ouverte, pour la commande PI, en présence d'erreurs de modélisation

Cinquième partie

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le travail présenté dans ce document, enveloppe un certain nombre de points correspondant à des applications bien spécifiques, avec des méthodes justifiées. Il a été présenté sous forme de problématique globale qui visait à étudier les techniques de commande robuste dédiées au systèmes multivariables, et d'en proposer quelques techniques et solutions pour améliorer les techniques existantes.

Deux applications ont été illustrées. La motivation de ces choix réside principalement dans un souci de variété des modèles afin d'illustrer au mieux les techniques étudiées, dans une optique de généralisation des méthodologies.

La première application concernait la poursuite d'une courbe de puissance déterminée pour une éolienne. Cette courbe est définie dans un souci d'extraction de la puissance optimale d'une part, et de protection du processus d'autre part. L'étude a été donc focalisée sur la partie du générateur. Un ensemble de commandes robustes et de solutions ont été présentées dans le cadre de cette application dans une optique de comparaison.

Le système a d'abord été présenté par ses entrées/sorties en termes de commande. Il a été subdivisé en plusieurs sous-systèmes élémentaires afin de simplifier l'étape de modélisation. Quatre zones de fonctionnement ont été mises en évidence et ont découlé des objectifs et des stratégies de commande.

Les commandes établies sont des techniques robustes bien connues à l'image de la commande adaptative, dont les résultats de test de robustesse étaient quelque peu prévisibles. Celle-ci ayant montré une robustesse par zone de fonctionnement et quelques faiblesses lors des transitions. Ces faiblesses reviennent au principe même de la synthèse de cette loi de commande qui se voit dédiée à la robustesse vis à vis des changements paramétriques qui se voulaient à dynamiques lentes, en opposition aux dynamiques de transitions entre modes de fonctionnement qui représentent des dynamiques relevant des hautes fréquences.

Les techniques de commande glissante ont été illustrées, à l'image de la commande glissante classique, la commande d'ordre 2 avec une fonction filtre appropriée, de même pour la commande par Twisting algorithm. Ces dernières techniques ont montré des résultats de simulation satisfaisants en termes de robustesse vis à vis des erreurs de modélisation et des signaux de transition entre modes de commande.

Un gain adaptatif a été inséré dans l'expression de la composante glissante de la loi de commande afin de remédier au problème de pompage, et de lisser les différents signaux. Ce gain présente une dynamique positive croissante avec l'erreur et vice versa.

Cette solution de structure variable pour le gain a été proposée et implémentée pour les deux applications de ce document, afin de palier le problème du pompage (shattering) de la composante glissante, cette modification a montré des courbes plus lisses lors des différents tests de simulation.

Enfin une proposition pour améliorer les signaux de commande du convertisseur a été émise. Elle consiste en l'utilisation d'une porteuse sinusoïdale plutôt qu'une porteuse triangulaire. Les résultats de simulation ont montré une nette amélioration des signaux correspondants.

Tout au long du travail de cette thèse, quelques points méritent d'être soulevés, dans un souci d'amélioration plus que d'autre, notamment le manque de bibliographie relative à une théorie proprement dite dédiée à la commande robuste de manière générale, et à l'aspect MIMO plus spécifiquement. Il en est de même pour l'aspect hybride des systèmes. Il est à souligner par ailleurs la difficulté rencontrée pour l'obtention des données pratiques précises relatives aux deux applications de cette thèse.

Une fonction d'interpolation par rapport aux séquences vides lors de l'acquisition des données pratiques a été proposée afin de procéder à l'étape d'identification paramétriques des modèles.

La modélisation sous forme d'Automate Hybride a été adoptée. Elle repose sur l'aspect même du fonctionnement des processus étudiés, dans l'objectif de couvrir tous les modes de fonctionnement des systèmes, pour une meilleure synthèse des lois commandes.

Le concept de la commande de confiance a été proposé. Cette commande se base principalement sur les principes de la théorie de confiance. Cette commande se voulait être robuste afin de palier le problème des incertitudes et des erreurs de modélisation. La robustesse de cette technique de commande réside dans le fait qu'elle ne dépend pas directement du vecteur d'état en soi mais plutôt des mesures (ou estimations) et des valeurs calculées découlant de modèles mathématiques préalablement établis, avec des pondérations et des degrés de confiance alloués à chacune des sources, à l'appréciation du constructeur. Cette technique a été testée aussi bien pour les systèmes SISO que pour les systèmes MIMO, et a présenté des résultats de simulation qui appuient la robustesse de cette méthode de commande de manière très satisfaisante.

Cette technique de commande a été appliquée à la commande de l'évolution de la tumeur. La tumeur considérée comme système, a été modélisée par l'approche des compartiments, méthode prisée et idéale pour la modélisation des systèmes biologiques et chimiques.

Les simulations présentées dans le cadre de cette application biologique ont été établies on-Line puis off-Line, afin de se rapprocher le plus de la réalité, qui ne met souvent pas à disposition les données et les mesures de manière continue.

A des fins de comparaison, d'autres commandes ont été illustrées reposant principalement sur les principes de la géométrie différentielle, avec ajout d'une composante dépendant de la technique adoptée, à l'image de la commande glissante classique, la commande glissante avec structure variable pour le gain, la commande adaptative, la commande par Super Twisting Algorithm, et la commande PI classique afin de souligner la problématique de robustesse.

La synthèse de la commande basée sur la géométrie différentielle implique l'inversion de matrices. L'applicabilité de cette technique était naturellement dédiée à des systèmes carrés. Une généralisation aux systèmes rectangulaires (m entrées et p sorties, avec $m \neq p$) a été proposée et implémentée. La solution fait appel au calcul de la pseudo inverse, et les résultats correspondant sont jugés satisfaisants.

Nous sommes convaincus que les différentes solutions relatives aux commandes considérées pourraient trouver application parmi d'autres types de systèmes.

17 Annexes

17.1 Annexe (Rappel de quelques opérateurs mathématiques)

L'objet de cette annexe est de rappeler certains des principaux opérateurs de l'analyse vectorielle [1], [2], [37], très utilisés dans différents domaines notamment la physique, et donc nécessaire à la modélisation mathématique et à la compréhension des différents phénomènes physiques régissant les systèmes étudiés.

17.1.1 Le gradient

Il s'agit d'un opérateur "Nabla" ∇ appliqué à un champ scalaire $f(x, y, z)$.

En coordonnées cartésiennes, dans un espace muni d'un repère orthonormé (O, u_x, u_y, u_z) , le vecteur ∇f ou *grad f* (gradient f) s'écrit :

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} u_x + \frac{\partial f}{\partial y} u_y + \frac{\partial f}{\partial z} u_z \\ \text{ou encore } \nabla f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y + \frac{\partial}{\partial z} u_z \right) f \\ \text{ou encore } \nabla f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f\end{aligned}$$

17.1.2 La divergence

Il s'agit du produit scalaire de l'opérateur "Nabla" ∇ et d'un champ de vecteur V .

La divergence $\nabla \cdot V = \text{div} V$ résulte en un scalaire, elle ne dépend pas de la base choisie. Exprimée en coordonnées cartésiennes, elle s'écrit :

$$\nabla \cdot V = \text{div} V = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Tel que $V = V_x u_x + V_y u_y + V_z u_z$

17.1.3 Le rotationnel

Le rotationnel d'un vecteur V s'obtient grâce au produit vectoriel de l'opérateur "Nabla" ∇ et ce vecteur V .

En coordonnées cartésiennes, il s'exprime par :

$$\begin{aligned}\text{rot } V &= \nabla \wedge V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) u_x + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) u_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) u_z\end{aligned}$$

17.1.4 Le Laplacien

C'est un opérateur différentiel, noté Δ ou encore ∇^2 .

Appliqué à un scalaire f , en coordonnées cartésiennes, il s'exprime comme suit :

$$\Delta f = \text{div grad } f = \frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2} + \frac{\partial f^2}{\partial z^2}$$

17.1.5 Quelques formules de base

$$\text{rot grad } f = \vec{0}$$

$$\text{div rot } f = \vec{0}$$

$$\nabla (fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$$

$$\nabla (fV) = (\nabla f)V + f(\nabla V)$$

$$\nabla (U \wedge V) = (\text{rot } U)V - U(\text{rot } V)$$

$$\text{rot } (fV) = (\nabla f) \wedge V + f(\text{rot } V)$$

17.2 Annexe (Loi de Darcy)

La loi de Darcy [49], [73] fut établie suite à une étude menée par Darcy afin d'améliorer la qualité des filtres à sable pour la purification des eaux d'alimentation de la Ville de Dijon 1856. Il a été observé que le débit Q d'un filtre (milieu poreux) est proportionnel à sa section droite S (constante) perpendiculairement à l'écoulement, proportionnel à la différence des charges hydrostatiques ΔH sur les faces d'entrée et de sortie et inversement proportionnel à son épaisseur L .

$$Q = SA \frac{\Delta H}{L}$$

Pour la généralisation de la loi de Darcy, le fluide est considéré comme animé d'un mouvement dans une direction quelconque, avec une vitesse ayant des composantes u , v et w , suivant les trois axes, avec une pression p .

$$\begin{aligned} u &= -K \frac{\partial P}{\partial x} \\ v &= -K \frac{\partial P}{\partial y} \\ w &= -K \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}$$

K est une constante donnée.

17.3 Annexe (Conservation de la matière)

En considérant un volume fermé V , délimité par une surface fermée S .

Le bilan sur le contenu du volume V traduit la conservation de la matière.

En l'absence de terme de création, l'équation locale de conservation de la matière [25] s'écrit

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_N) = 0$$

\vec{j}_N étant le vecteur de densité de particules.

n la densité particulaire.

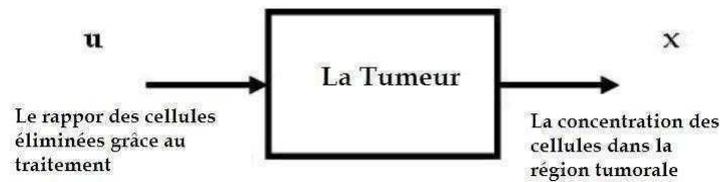


FIGURE 50 – Le système défini par son entrée et sa sortie

17.4 Aspects pratiques

Au cours d'un stage effectué au sein du Service Dermatologie du CHU Lamine Debaghine de Bab El Oued. Trente cas de tumeurs cutanées de type carcinome basocellulaire traitées à la PDT (Photo Dynamic Therapy) ont été étudiés. Au cours de ce stage, des courbes d'évolution des tailles/surfaces des tumeurs ont été relevées et juxtaposées à des courbes théoriques calculées et déduites par interpolation polynômiale.

Dans cette annexe, quelques aspects pratiques de notre travail sont présentés. Une étude comparative pour un cas de figure est présentée. Des résultats sous forme de courbe d'évolution pratique sont présentés. A cette courbe est comparée une deuxième courbe issue de l'application de la commande optimale. Enfin une courbe issue de l'application de la commande de confiance est présentée, dans un esprit de comparaison des performances en termes de robustesse.

17.4.1 Définition du système

Notre processus étant une région tumorale, avec des cellules et des distributions homogènes. Il s'agit d'une tumeur de type carcinôme basocellulaire. S'agissant d'un autre type de tumeur, les résultats restent valides en considérant d'autres substances, interagissant dans la région tumorale, comme étant des perturbations.

D'un point de vue commande, la tumeur est définie par ses entrée/sortie en termes de commande (Fig. 50), et elle est représentée par les lois de la physique (modèles mathématiques plus ou moins complexes liant l'entrée et la sortie). L'entrée du système est la quantité des cellules éliminées par le traitement, pendant que la sortie considérée est la concentration des cellules dans la région tumorale.

17.4.2 Modélisation du système

Pour la modélisation du système, l'on note par x la concentration des cellules dans la région tumorale qui sera considérée comme étant la variable d'état ainsi que la sortie du système.

Le modèle adopté pour cette partie est celui correspondant à un seul compartiment. Ce modèle traduit l'approche adoptée en pratique où la région tumorale est considérée comme une seule entité. Ce modèle est donné par l'équation (Eq. 201).

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + 2(1-u)ax(t) \quad (201)$$

L'étape suivante consiste à synthétiser la loi de commande $u(t) \in [0, 1]$ permettant d'imposer la dynamique désirée.

La vérification de la commandabilité du système a conduit à dire que ce dernier est commandable à la condition que la variable d'état ne soit pas nulle. Ceci revient à dire que la tumeur peut être traitée tant qu'elle est présente.

Précisons enfin que notre objectif de commande est évidemment la minimisation voire l'annulation de la concentration des cellules dans la région tumorale.

17.4.3 Application de la commande de confiance

Pour le développement de cette loi de commande, nous nous baserons essentiellement sur le modèle (Eq. 201). Pour le calcul numérique, ce modèle est discrétisé en approximant \dot{x} par $\frac{x(k+1)-x(k)}{h}$, ce qui permet d'obtenir le modèle discrétisé (Eq. 202).

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + h[-ax_k + 2a(1-u_k)x_k] \\y_k &= x(kh) = x_k\end{aligned}\tag{202}$$

Tels que : h la période d'échantillonnage. x_k , y_k et u_k sont respectivement la variable d'état calculée, la variable de sortie et la commande déterminées à l'instant $t_k = kh$.

La valeur mesurée x_{mesk} est supposée disponible à l'instant $t = kh$.

On définit ensuite la courbe de référence x_{ref} , et l'on se pose la question d'intérêt : quelle valeur de la variable de commande u permettrait d'atteindre les objectifs de commande et de poursuivre la trajectoire de référence x_{ref} ?

Cette question sera posée à chaque instant $t_k = kh$. A chacun de ces instants, un nombre de valeurs pour la variable u sera considéré comme des réponses possibles.

Pour cette application, nous considérons 11 valeurs (réponses possibles à notre question d'intérêt). Ces valeurs sont 0, 0.1, 0.2, ..., 1. Pour chacune de ces valeurs (réponses), les masses m_1 et m_2 sont calculées. La masse m_1 est associée à la valeur issue du modèle x_{modk} , et la masse m_2 est associée à la valeur mesurée x_{mesk} .

Nous choisissons de faire plus confiance aux valeurs issues des mesures qu'à celles issues du modèle, à cause du fait que le modèle comporte des incertitudes liées aux dynamiques omises ou inconnues, en plus de l'utilisation des valeurs mesurées lors de l'identification des paramètres. Lors de la combinaison des données par la méthode de Dempster, nous affectons à la première source (modèle) le paramètre d'affaiblissement $\alpha_1 = 0.5$ inférieur à $\alpha_2 = 0.75$ qui est affecté à la deuxième source (mesure).

17.4.4 Rappel et application de la commande linéaire quadratique

La loi de commande développée dans cette partie est basée sur l'approche de la commande optimale. Il s'agit d'une commande très utilisée dans des travaux relatifs à la commande de tumeur [35], [68], [39], [19], [40], [60].

Pour un système donné par ses équations d'état [92] (Eq. 203)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\y &= Cx\end{aligned}\tag{203}$$

Tel que x est le vecteur d'état du système, u le vecteur de commande et y la sortie du système. L'objectif est de trouver le retour d'état optimal u permettant de minimiser le critère J .

$$J = \frac{1}{2} \int (x^T Qx + u^T Ru) dt \quad (204)$$

Telles que Q et R des matrices définies positives.

La commande optimale pour un tel système est donnée par :

$$u = -R^{-1} B^T P x \quad (205)$$

Telle que P la solution de l'équation de Riccati.

Nos objectifs de commande pour cette application relèvent de la poursuite de trajectoire, nous réécrivons nos équations en termes d'erreur de poursuite e .

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_r = -\dot{x}_r + ax - 2axu \quad (206)$$

Telle que x_r est une courbe de référence qui tend vers zero.

Avant d'appliquer la commande optimale, la commande linéarisante (Eq.) est établie en premier lieu, aboutissant vers un système SISO linéaire, et possédant une nouvelle commande virtuelle v à déterminer selon l'approche de la commande linéaire quadratique.

$$u = -\frac{1}{2ax} (\dot{x}_r - ax + v) \quad (207)$$

Le système linéarisé aura pour équation :

$$\dot{e} = v \quad (208)$$

Les matrices correspondant au nouveau système sont telles que $A = 0$ et $B = 1$.

Le critère à minimiser est J_L , il est donné par :

$$J_L = \int_0^{\infty} (re^2 + qv^2) dt \quad (209)$$

r et q sont des constantes positives.

L'équation de Riccati correspondante est donnée par $q - p^2$, telle que p une constante positive à déterminer.

La solution de l'équation de Riccati est donc $p = \sqrt{rq}$, ce qui permet d'exprimer la commande virtuelle v par :

$$v = -\sqrt{\frac{q}{r}} e \quad (210)$$

17.4.5 Simulations et comparaison au données pratiques

Les résultats de simulation sont présentés dans le système unitaire (per unit system).

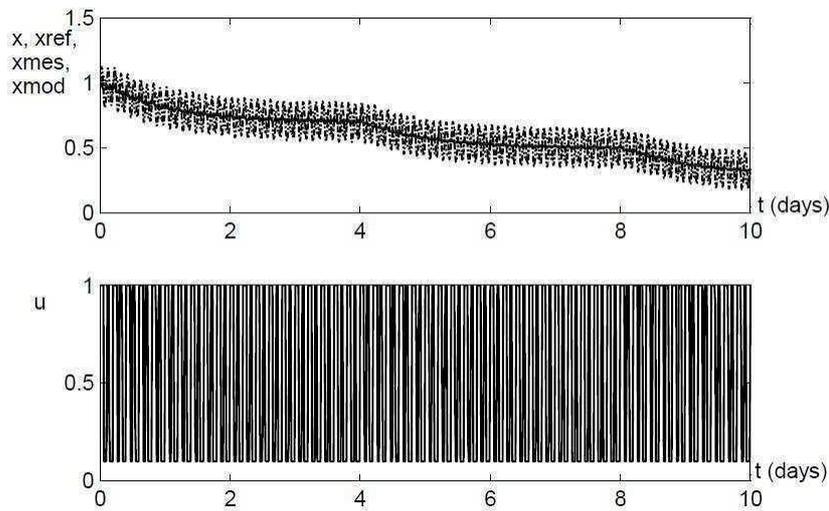


FIGURE 51 – Résultats de la commande de confiance

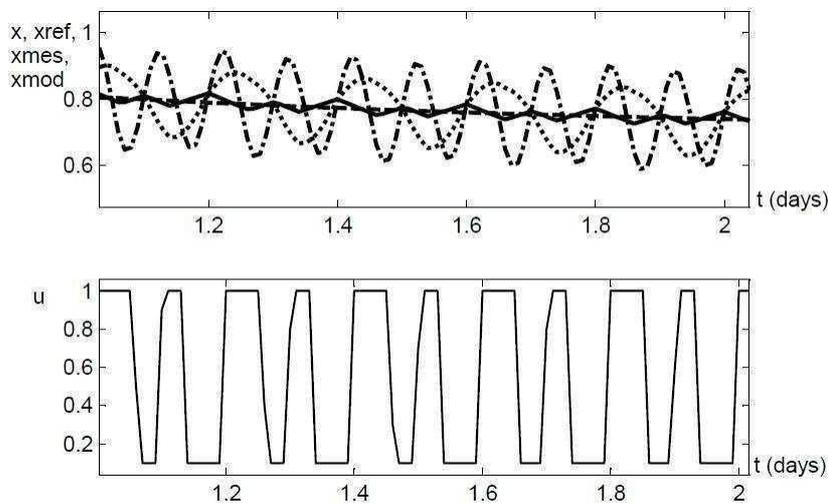


FIGURE 52 – Résultats de la commande de confiance sur une journée

Pour ce qui est de la commande de confiance, les résultats de simulation (Fig. 51) et (Fig. 52) montrent que la sortie suit sa référence en présence des erreurs de modélisation. On note par ailleurs que la commande présente certaines discontinuités. Ceci peut être résolu en adoptant un gain variable [98].

Concernant la commande optimale, les résultats ont été moins concluants en introduisant des erreurs de modélisation de 2% (Fig. 53). Ceci revient au fait que cette commande est introduite afin de minimiser la variable, et que ceci n'implique explicitement l'annulation de celle-ci. On peut également mettre l'accent sur l'énergie de commande qui est nettement supérieure à celle que présente la commande de confiance.

Nous présentons finalement les résultats pratiques (Fig. 54) correspondant à une commande de type réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre avec retard pur.

On constate que la commande de confiance offre un temps de convergence plus court par rapport aux résultats de la pratique ainsi que ceux obtenus avec la commande optimale.

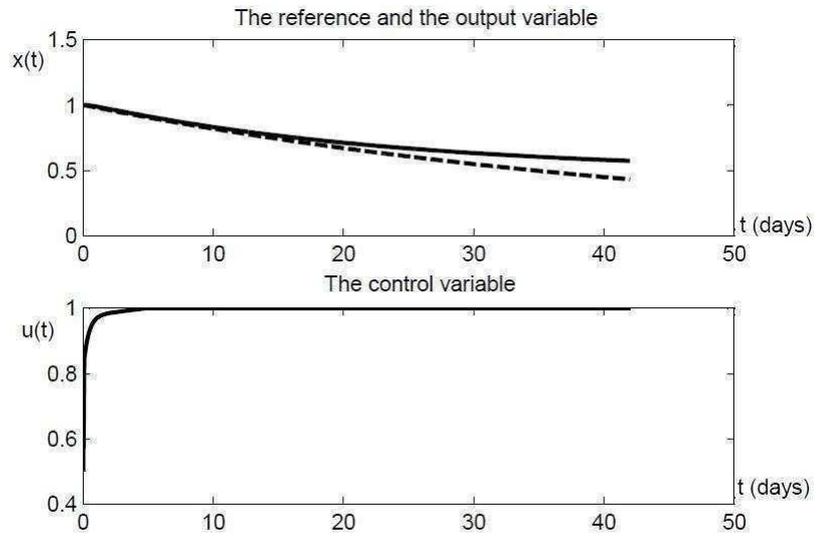


FIGURE 53 – Résultats de la commande optimale

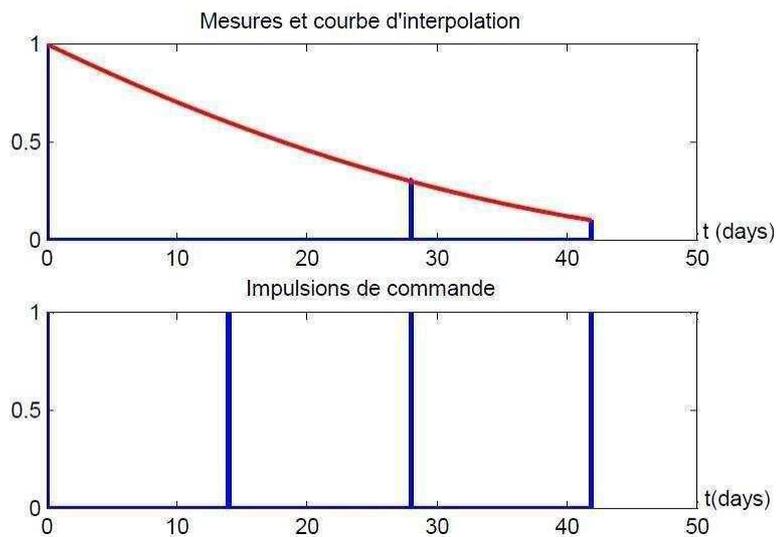


FIGURE 54 – Résultats pratiques pour l'un des cas

References

- [1] http://melusine.eu.org/syracuse/immae/mp/physique-chimie/elements_analyse_vectorielle.pdf.
- [2] <http://sin-web.paris.ensam.fr/IMG/pdf/rappel-math.pdf>.
- [3] <http://www.cancer.gov/>.
- [4] http://www.espace-eolien.fr/Eolien/kesaco_tech.htm.
- [5] http://www.etapenergie.com/petite_eolienne.html.
- [6] www.adem.fr.
- [7] T. Ackermann. Wind power in power systems. *Wind Engineering*, 30(5):447–449, 2006.
- [8] L.B.E.N. AMOR. Commande non linéaire d’un moteur à réluctance variable. thèse de phd en génie électrique, école polytechnique de montréal. 1996.
- [9] Edmond A Auzenne, Charles E Seeney, Amirali N Hamir, and Jim Klostergaard. Anti-tumor activity of drug-loaded magnetic nanoparticles. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 49(1):336–342, 2013.
- [10] P. Azad. *Visual Perception for Manipulation and Imitation in Humanoid Robots*, volume 4. Springer Verlag, 2009.
- [11] V. Berge Cherfaoui. contribution à la gestion des incertitudes en fusion multi capteurs application à la perception du contexte de conduite, hdr université de technologie de compiegne. 2009.
- [12] N. Bernard. Machine synchrone: De la boucle ouverte a l’autopilotage. *Revue 3EI*, (30):24–39, 2002.
- [13] A. Boyette. Contrôle-commande d’un générateur asynchrone à double alimentation avec système de stockage pour la production éolienne. thèse de doctorat en génie électrique de l’université henri poincaré - nancy i. 2006.
- [14] V. Bregeault. Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants. thèse de doctorat en automatique et informatique appliquée de l’école centrale de nantes. 2010.
- [15] C.J.W. Breward, H.M. Byrne, and C.E. Lewis. A multiphase model describing vascular tumour growth. *Bulletin of mathematical biology*, 65(4):609–640, 2003.
- [16] Tizano Callegari, Andrea Caumo, and Claudio Cobelli. Bayesian two-compartment and classic single-compartment minimal models: comparison on insulin modified ivgtt and effect of experiment reduction. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 50(12):1301–1309, 2003.

- [17] B.I. Camara. Complexité de dynamiques de modèles proie-prédateur avec diffusion et applications. thèse de doctorat en mathématiques appliquées (systèmes dynamiques) de l'université du havre. 2009.
- [18] H. Camblong. Minimisation de l'impact des perturbations d'origine éoliennes dans la génération d'électricité par des aérogénérateurs à vitesse variable. thèse de doctorat en automatique de l'école nationale supérieure d'arts et métiers centre de bordeaux. 2003.
- [19] Siddhartha P Chakrabarty and Floyd B Hanson. Optimal control of drug delivery to brain tumors for a distributed parameters model. In *American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005*, pages 973–978. IEEE, 2005.
- [20] VV Chalam. *Adaptive control systems: Techniques and applications*, volume 39. CRC, 1987.
- [21] M. Charfi. *Modélisation et synthèse de contrôleurs des systèmes hybrides linéaires. Mémoire M.Sc. en Mathématique et Informatique*. Université de Sherbrooke., 1999.
- [22] J.D. Chatelain and J. Neiryck. *Machines électriques*. Presses polytechniques romandes, 1983.
- [23] Xinjian Chen, R Summers, and Jianhua Yao. Kidney tumor growth prediction by coupling reaction-diffusion and biomechanical model. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 60(1), 2013.
- [24] Ting-Li Chien, Chung-Cheng Chen, and Chiou-Jye Huang. Feedback linearization control and its application to mimo cancer immunotherapy. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 18(4), 2010.
- [25] N. CHOIMET. Nouveau précis de thermodynamique pc psi (les nouveaux précis). *Recherche*, 67:02, 2004.
- [26] G.O. Cimuca. Système inertiel de stockage d'énergie associé a des générateurs éoliens. thèse de doctorat en génie électrique de l'école nationale supérieure d'arts et métiers centre de lille. 2005.
- [27] M.Lavabre CL.Toussaint. *Cours d'électrotechnique, fascicule 2, machines à courant continu*. Dunod, Paris, 1978.
- [28] M.Lavabre CL.Toussaint. *Cours d'électrotechnique, Tome II, machines électriques, machines à courant continu asservissement linéaire*. Berti Editions, Alger, 1993.
- [29] S. Colombo. *Les Équations aux dérivées partielles en physique et en mécanique des milieux continus*. Masson, 1976.

- [30] J.P. Corriou. *Commande de procédés chimiques: réacteurs et colonnes de distillation*. Hermès science, 2001.
- [31] F. Crauste. Etude mathématique d'équations aux dérivées partielles hyperboliques modélisant les processus de régulation des cellules sanguines-applications aux maladies hémato-logiques cycliques. *These, Université de Pau*, 2005.
- [32] J.P. Da Costa, H. Pinheiro, T. Degner, and G. Arnold. Robust controller for dfig of grid connected wind turbines. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, (99):1–1, 2010.
- [33] B.N. Datta. *Numerical linear algebra and applications*. Society for Industrial Mathematics, 2010.
- [34] P. DE LA PDT. La photothérapie dynamique en dermatologie.
- [35] Lisette G De Pillis and A Radunskaya. A mathematical tumor model with immune resistance and drug therapy: an optimal control approach. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 3(2):79–100, 2001.
- [36] L. Dubertret. Cancers cutanés paris flammation médecine. *Sciences*, 1992.
- [37] P. Dupont. *Exercices de mathématiques*, volume 1. De Boeck Supérieur, 2005.
- [38] R. Eftimie, J.L. Bramson, and D.J.D. Earn. Interactions between the immune system and cancer: A brief review of non-spatial mathematical models. *Bulletin of mathematical biology*, 73(1):2–32, 2011.
- [39] Awad El-Gohary. Chaos and optimal control of cancer self-remission and tumor system steady states. *Chaos, Solitons & Fractals*, 37(5):1305–1316, 2008.
- [40] Awad El-Gohary. Chaos and optimal control of equilibrium states of tumor system with drug. *Chaos, Solitons & Fractals*, 41(1):425–435, 2009.
- [41] M. French, C. Szepesvári, E. Rogers, and J. Wiley. *Performance of nonlinear approximate adaptive controllers*. Wiley Online Library, 2003.
- [42] L. Fridman, J. Moreno, and R. Iriarte. *Sliding Modes After the First Decade of the 21st Century: State of the Art*, volume 412. Springer Verlag, 2011.
- [43] A. Friedman. Cancer models and their mathematical analysis. *Tutorials in Mathematical Biosciences III*, pages 223–246, 2006.
- [44] M Garbey and G Zouridakis. Modeling tumor growth: from differential deformable models to growth prediction of tumors detected in pet images. In *Engineering in Medicine and Biology Society, 2003. Proceedings of the 25th Annual International Conference of the IEEE*, volume 3. IEEE, 2003.

- [45] O. Gergaud. *Modélisation énergétique et optimisation économique d'un système de production éolien et photovoltaïque couplé au réseau et associé à un accumulateur*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan, 2009.
- [46] U. Grenander and M.I. Miller. *Pattern theory: from representation to inference*. Oxford University Press, USA, 2007.
- [47] Y. Guo, S.H. Hosseini, J.N. Jiang, and C.Y. Tang. Voltage/pitch control for maximization and regulation of active/reactive powers in wind turbines with uncertainties. In *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, pages 3956–3963. IEEE, 2010.
- [48] M.E. Haque, M. Negnevitsky, and KM Muttaqi. A novel control strategy for a variable speed wind turbine with a permanent magnet synchronous generator. In *Industry Applications Society Annual Meeting, 2008. IAS'08. IEEE*, pages 1–8. Ieee, 2008.
- [49] A. Houpeurt. *Éléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux*. Éditions Technip, 1975.
- [50] Ping Huang, S Niokal, and B Chance. A four compartment model of oxygen delivery to muscle tissue from capillary. In *Bioengineering Conference, 2002. Proceedings of the IEEE 28th Annual Northeast*, pages 259–260. IEEE, 2002.
- [51] E. Iyasere, M. Salah, D. Dawson, and J. Wagner. Nonlinear robust control to maximize energy capture in a variable speed wind turbine. In *American Control Conference, 2008*, pages 1824–1829. IEEE, 2008.
- [52] R. Johansson. *System modeling & identification*. prentice hall. 1993.
- [53] A. Kaddouri. *Étude d'une commande non-linéaire adaptative d'une machine synchrone à aimants permanents. Thèse de PHD*. Université Laval, 2000.
- [54] RAS Kala and DJ Auxillia. Periodic output feedback controller for cancer treatment with optimization. In *Communication Control and Computing Technologies (ICCCCT), 2010 IEEE International Conference on*, pages 282–287. IEEE, 2010.
- [55] RE Kass and PW Vos. *Geometrical foundations of asymptotic inference*. john wily & sons, inc, new york, 1997.
- [56] S. Kharbouche. *Fonctions de croyance et indexation multimodale*. PhD thesis, Université de Rouen Discipline: Traitement du Signal et des Images présentée par Saïd KHARBOUCHE Soutenue le 8 décembre 2006 devant le jury composé de: O. COLOT Professeur, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2008.

- [57] M. Kimmel and A. Swierniak. Control theory approach to cancer chemotherapy: Benefiting from phase dependence and overcoming drug resistance. *Tutorials in Mathematical Biosciences III*, pages 185–221, 2006.
- [58] R. Le Bouffant. Facteurs de traduction et mécanismes de surveillance du cycle cellulaire. thèse de doctorat en biologie de l'université de Rennes I. 2007.
- [59] D. Le Gourières. Énergie éolienne: Théorie, conception et calcul pratique des installations. Eyrolles, Paris. 1982.
- [60] U. Ledzewicz and H. Schättler. Optimal bang-bang controls for a two-compartment model in cancer chemotherapy. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 114(3):609–637, 2002.
- [61] V. Léger and A. Jameau. *Conversion d'énergie, électrotechnique, électronique de puissance: résumé de cours, problèmes corrigés: BTS électrotechnique, IUT génie électrique, licence EEA*. Ellipses Edition Marketing, 2001.
- [62] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6):1247–1263, 1993.
- [63] J. Lévine. Analyse et commande des systèmes non linéaires. *Notes de cours de l'École Nationale des Ponts et Chaussées*, 5, 2004.
- [64] L. Liu and R. Yager. Classic works of the Dempster-Shafer theory of belief functions: An introduction. *Classic Works of the Dempster-Shafer Theory of Belief Functions*, pages 1–34, 2008.
- [65] L. Ljung. *System identification*. Wiley Online Library, 1999.
- [66] H. Lodish, A. Berk, P. Matsudaira, C.A. Kaiser, and J. Darnell. *Biologie moléculaire de la cellule*. De Boeck Supérieur, 2005.
- [67] Paolo Magni, Nadia Terranova, Francesca Del Bene, Massimiliano Germani, and Giuseppe De Nicolao. A minimal model of tumor growth inhibition in combination regimens under the hypothesis of no interaction between drugs. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 59(8):2161–2170, 2012.
- [68] RB Martin, ME Fisher, RF Minchin, and KL Teo. Optimal control of tumor size used to maximize survival time when cells are resistant to chemotherapy. *Mathematical biosciences*, 110(2):201–219, 1992.
- [69] D. Mercier, T. Denœux, and M.H. Masson. Belief function correction mechanisms. *Foundations of Reasoning under Uncertainty*, pages 203–222, 2010.

- [70] G. Michalke, A.D. Hansen, and T. Hartkopf. Control strategy of a variable speed wind turbine with multipole permanent magnet synchronous generator. In *2007 European Wind Energy Conference and Exhibition*, 2007.
- [71] Manfred Morari and Evangelos Zafiriou. *Robust process control*. Prentice Hall, New Jersey, 1989.
- [72] L. Moreau. Modélisation, conception et commande de génératrices à réluctance variable basse vitesse. thèse de doctorat en électronique et génie électrique de l'université de nantes. 2005.
- [73] A. Musy and M. Soutter. *Physique du sol*, volume 6. PPUR, 1991.
- [74] Raymond F Muzic Jr and Gerald M Saidel. Distributed versus compartment models for pet receptor studies. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 22(1):11–21, 2003.
- [75] K. Nam and A. Arapostathis. A sufficient condition for local controllability of nonlinear systems along closed orbits. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 37(3):378–380, 1992.
- [76] G. Nassreddine, F. Abdallah, and T. Denœux. A new state estimation method for dynamic system using interval analysis and belief function theory. umr cnrs 6599 heudiasyc université de technologie de compiègne. 2008.
- [77] G. Nassreddine, F. Abdallah, and T. Denœux. A state estimation method for multiple model systems using belief function theory. In *Information Fusion, 2009. FUSION'09. 12th International Conference on*, pages 506–513. IEEE, 2009.
- [78] B. Quost. *Combinaison de classifieurs binaires dans le cadre de la théorie des fonctions de croyance*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 2006.
- [79] H. REINHARD. Equations aux dérivées partielles: introduction (1 et 2 cycles écoles d'ingénieurs)(sciences sup). *Recherche*, 67:02, 2001.
- [80] T. Roose, S.J. Chapman, and P.K. Maini. Mathematical models of avascular cancer. *Siam Review*, 49(2):179–208, 2007.
- [81] R.J. Schilling. *Fundamentals of robotics: analysis and control*. Simon & Schuster Trade, 1996.
- [82] Davorka Sel, Alenka Macek Lebar, and Damijan Miklavcic. Feasibility of employing model-based optimization of pulse amplitude and electrode distance for effective tumor electroporation. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 54(5):773–781, 2007.

- [83] G. Serane. *Mathématiques de la physique appliquée: à l'usage des candidats au certificat de TMP, des élèves-ingénieurs et des ingénieurs*. Dunod, 1965.
- [84] D.M. Simmons. Wind power. *Park Ridge, NJ, Noyes Data Corp.(Energy Technology Review, No. 6), 1975. 316 p., 1, 1975.*
- [85] M. Singh, V. Khadkikar, and A. Chandra. Grid synchronisation with harmonics and reactive power compensation capability of a permanent magnet synchronous generator-based variable speed wind energy conversion system. *Power Electronics, IET*, 4(1):122–130, 2011.
- [86] C. Sloth, T. Esbensen, M.O.K. Niss, J. Stoustrup, and P.F. Odgaard. Robust lmi-based control of wind turbines with parametric uncertainties. In *Control Applications,(CCA) & Intelligent Control,(ISIC), 2009 IEEE*, pages 776–781. Ieee, 2009.
- [87] M. Soliman, O. Malik, and D. Westwick. Multiple model predictive control for wind turbines with doubly fed induction generators. *Sustainable Energy, IEEE Transactions on*, (99):1–1, 2011.
- [88] E.D. Sontag. *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems*, volume 6. Springer Verlag, 1998.
- [89] M.C. Sosse Alaoui. Commande et observateur par modes glissants d'un système de pompage et d'un bras manipulateur. 2009.
- [90] Simon Stute, Sébastien Vauclin, Hatem Necib, Nicolas Grotus, Perrine Tylski, Niklas S Rehfeld, Sébastien Hapdey, and Irène Buvat. Realistic and efficient modeling of radiotracer heterogeneity in monte carlo simulations of pet images with tumors. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 59(1).
- [91] A. Świerniak. Direct and indirect control of cancer populations. *TECHNICAL SCIENCES*, 56(4), 2008.
- [92] M. Tadjine. *Notes de cours Automatique avancée*. Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 2006.
- [93] Claudio Vecchio. Sliding mode control: theoretical developments and applications to uncertain mechanical systems. 2008.
- [94] Pascal Viot. Méthode d'analyse numérique. 2003.
- [95] N. Zioui. Conception, modélisation et commande d'une éolienne à axe vertical. 2008.
- [96] N. ZIOUI, O. STIHI, M. TADJINE, and M-S. BOUCHERIT. Design of hybrid automata model and control for wind turbines. May 07-09, 2012.

- [97] N. ZIOUI, M. TADJINE, and M-S. BOUCHERIT. Design of a hybrid automata model and robust control for tumors using the three compartments approach. 06 to 08 December 2012.
- [98] N. ZIOUI, M. TADJINE, and M-S. BOUCHERIT. Concept of belief theory based robust control design and application to tumors growth control. *The Mediterranean Journal of Measurement and Control*, 9(3):81–91, 2013.
- [99] N. ZIOUI, M. TADJINE, and M-S. BOUCHERIT. Mathematical modeling and control of the spacetime evolution of carcinoma tumors. November 22-24, 2011.
- [100] N. ZIOUI, M. TADJINE, and M-S. BOUCHERIT. Super-twisting algorithm approach to control tumors growth. October 29-31, 2013.

ملخص

إن الهدف الرئيسي من هذه الأطروحة يكمن في دراسة تقنيات التحكم المتينة، و التي يستهدف تطبيقها على الأنظمة المتعددة المتغيرات. في إطار هذا العمل، تم إستهداف نظامين: الأول يتمثل في محرك هوائي ذو معادلات رياضية لا خطية، يتطلب استراتيجيات تحكم تختلف من حيز تحكم إلى آخر، مما أدى إلى إعتبار تمثيله الرياضي من نوع آلة هجينة. أما النظام الثاني، فيتمثل في التحكم في التطور الفضائي-الزمني للسرطان، الذي يتمثل في نظام بيولوجي متعدد المتغيرات، لا خطي و مستطيل. تم إقتراح عدة حلول في إطار هذين التطبيقين، نذكر منها: إستعمال شبه مقلوب المرصوفة في إطار حساب دالة التحكم المعتمدة على أساس الهندسة التفاضلية للأنظمة الغير مربعة، إقتراح دالة من أجل تسوية منحنيات التحكم ذات الحالات المنزلقة. كما تم إقتراح مبدا التحكم الثقة، الذي يستمد مبدئه من نظرية الإيمان، والتي أبدت نتائج متينة و مستحسنة.

الكلمات الأساسية: التحكم المتين - تحكم الثقة - الحالات المنزلقة - التحكم المكيف - الأنظمة المتعددة المداخل و المخارج - الورم - السرطان - المحركات الهوائية.

RÉSUMÉ

L'objet principal de cette thèse est l'étude des différentes stratégies de commande robustes dédiées à l'application sur des systèmes multivariables. Deux processus ont été ciblés pour les différentes applications: l'éolienne et la tumeur. Le premier système défini présente un modèle non linéaire et des stratégies de commande variant selon les modes de commande dans lesquels le système évolue. Une modélisation de type Automate Hybride a donc été considérée. Le deuxième système correspond à l'évolution spatio-temporelle de la tumeur. Il s'agit d'un système multivariable non linéaire et rectangulaire. Des solutions ont été proposées de part et d'autre pour la synthèse des lois de commande notamment: l'utilisation de la pseudo-inverse pour la synthèse de la commande par géométrie différentielle appliquée aux systèmes non carrés; l'introduction de fonction filtre pour lisser les courbes concernant la commande glissante; et l'introduction du concept de la commande de confiance, basée sur la théorie de croyance, qui s'est avérée robuste et ayant donné des résultats très satisfaisants.

Mots clef : Commande robuste - Commande de confiance - Modes glissants - Commande adaptative - Systèmes MIMO - Tumeurs - Cancer - Éoliennes.

ABSTRACT

The main aim of this thesis is the study of several robust control strategies for MIMO systems. Two systems were considered in this study. The first one is the wind turbine. This system presents a nonlinear mathematical model, with control strategies that vary according to the control mode of the system, for that, a hybrid automata model is considered. As a second system, the space-time evolution of the tumor is considered. It is basically a biological process, with MIMO nonlinear and rectangular mathematical model. Solutions are suggested for both systems, during the control synthesis, particularly: the use of the pseudo-inverse for the differential geometry control computation, for non square systems; the introduction of a filter function to smooth out the curves for the sliding modes control; and the introduction of the trust control concept, inspired by the belief theory, which proved to be robust and gave satisfying results.

Key words : Robust control - Trust control - Sliding modes - Adaptive control - MIMO systems - Tumors - Cancer - Wind turbines.