الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Génie mécanique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ELABORATION D'UN LOGICIEL PERMETTANT DE CALCULER LES ACTIONS MECANIQUES APPLIQUÉES A L'EMBIELLAGE DU MOTEUR A COMBUSTION INTERNE

SYSTEME (BIELLE – BIELLETTE)

Proposé Par : M. BOUKABACHE

Etudié par : S. LAHCHEB

Dirigé par : M. BOUKABACHE

PROMOTION : JANVIER . 87

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi – EL-HARRACH – ALGER

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE
PROMOTEUR: Monsieur BOUKABACHE Mohamed
ELEVE INGENIEUR: MONSIEUR LAHCHEB SID ALI

وزارة التعليم العالي
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
فرع : الهندسة الميكانيكية
الموجه : محمد بوكعباش
الطالب المهندس : لحشب سيدعلي

الموضوع : حساب القوى الميكانيكية ضمن المنظومة دراع - عمود مرفقي بدراع مزدوج .

الملخص : يتمثل هذا المشروع في إعداد برنامج معلوماتي لحساب القوى الميكانيكية ضمن المنظومة دراع - عمودي مرفقي بذراع مزدوج . وتعيين نقاط التزييت على مستوى الإرتباطات المفصلية باستعمال الطريقة الشعاعية

Sujet: Elaboration d'un logiciel permettant de calculer les actions mécaniques appliquées à l'embiellage du moteur à combustion interne système (bielle - biellette).

Resumé: Ce projet consiste en l'élaboration d'un programme informatique permettant le calcul des actions mécaniques appliquées à l'embiellage d'un moteur à combustion interne système (bielle - biellette).
Ainsi que sur les tourillons du vilebrequin, et la determination des point de graissage au niveau des articulations. En utilisant la methode vectorielle.

Subject: Calculation of the mechanical actions inthe crank system of the engine (bielle - biellette).

Abstract: A computer programme permiting to determine the mechanical actions in the crank- system of an engine in (v) (bielle- biellette) system, using the vectoriat method.

– Dédicaces –

A ma regrettée mère

A mon père

A ma famille

A mes amis

Je dédie ce modeste travail.

- Remerciements -

Je remercie mon promoteur, monsieur Boukabach .M

pour son aide précieuse.

Ainsi que monsieur Madani madani, agent au lycée
technique d'Alger pour m'avoir aidé dans le tirage de la mémoire.

Que tous ceux qui ont de près ou de loin, contribués à l'élaboration

de ce projet, et, à ma formation, trouvent ici l'expression de
ma profonde reconnaissance, et mes plus vifs remerciements

S. Lahcheb

SOMMAIRE

PREAMBULE 1

1. INTRODUCTION 1

2. ETUDE CINEMATIQUE DU MOTEUR 2

2.1 ETUDE CINEMATIQUE DU SYSTEME BIELLE - BIELLETTE 2

2.1.1. Mise en place des repères 3

2.1.2. Formules de passage entre les differents repères 5

2.1.2.1. Passage du repère $(O,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)$ au repère $(O,\vec{X}_1,\vec{Y}_1,\vec{Z}_1)$ 5

2.1.2.2. Passage du repère $(O,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)$ au repère $(B,\vec{X}_2,\vec{Y}_2,\vec{Z}_2)$ 5

2.1.2.3. Passage du repère $(O,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)$ au repère $(O,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ 6

2.1.2.4 Passage du repère $(O,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)$ au repère $(D,\vec{X}_3,\vec{Y}_3,\vec{Z}_3)$ 7

2.1.3. Relations cinématiques fondamentales 8

2.1.3.1. Définition de l'angle φ 8

2.1.3.2. Définition de l'angle $\dot{\varphi}$ 9

2.1.3.3. Définition de $\ddot{\varphi}$ 9

2.1.3.4 Définition de l'angle ψ 10

2.1.3.5 Définition de $\dot{\psi}$ 11

2.1.3.6 Définition de $\ddot{\psi}$ 11

2.1.4. Etude cinématique du centre de gravité de la bielle 12

2.1.5. Etude cinématique du centre de gravité de la biellette 14

2.1.6. Cinematique du point B 15

2.1.7. Cinematique du point D 16

2.1.8. Cinématique du centre de gravité de la manivelle. 17

3. CALCUL DYNAMIQUE _ 18

3.1. ETUDE DYNAMIQUE DE LA BIELLE _ 20

3.1.1. Analyse des actions mécaniques appliqués à la bielle _ 20

3.1.2. Equations vectorielles fondamentales de la bielle 21

3.1.2.1. Calcul du moment dynamique de la bielle _ 22

3.1.2.2. Aplication 23

3.1.2.3 Calcul des moments des forces appliquées à la bielle par rapport à son centre de gravité _ 25

3.1.4. Equations scalaires de la bielle 27

3.2. ETUDE DYNAMIQUE DU PISTON 1 28

3.2.1. Analyse des actions mécaniques appliqués au piston 1 28

3.2.2. Equations vectorielles fondamentales du piston 1 30

3.2.2.1 Calcul du moment dynamique de la bielle 30

3.2.2.2 Aplication

3.2.2.3 Calcul des moments des forces appliquées au piston 1/C.G _ 31

3.2.3. Equations scalaires du piston 1 32

3.3. ETUDE DYNAMIQUE DE LA BIELLETTE _ 34

3.3.1. Analyse des actions mécaniques appliquées à la biellette 34

3.3.2. Equations vectorielles fondamentales de la biellette 35

3.3.2.1. Calcul du moment dynamique de la biellette 35

3.3.2.2 Calcul des moments des forces appliquées à la biellette/G_2 36

3.3.3. Equations scalaires de la biellette. 38

3.4. ETUDE DYNAMIQUE DU PISTON 2 — 39
3.4.1. Analyse des actions mécaniques appliquées au piston 2 — 39
3.4.2. Equations vectorielles fondamentales du piston 2 — 41
3.4.2.1. Calcul du moment dynamique du piston 2 — 41
3.4.2.2. Calcul des moments des forces appliquées au piston 2/C.G — 41
3.4.3. Equations scalaires du piston 2 — 44

3.5. ETUDE DYNAMIQUE DE LA MANIVELLE — 45
3.5.1. Analyse des actions mécaniques appliquées à la manivelle — 45
3.5.2. Equations vectorielles fondamentales de la manivelle — 46
3.5.2.1. Calcul du moment dynamique de la manivelle — 47
3.5.2.2. Calcul des moments des forces appliquées à la manivelle /C.G — 47
3.5.2.3 Equations scalaires de la manivelle — 49

4. DETERMINATION DES ACTIONS MÉCANIQUES APPLIQUÉES A L'EMBIELLAGE — 50
4.1 Determination de YB — 53
4.2 Determination de XD — 53
4.3 Determination XC — 57
4.4 Determination de YC — 57
4.5 Determination de YA — 57
4.6 Determination de XF — 57
4.7 Determination de Ye — 57
4.8 Determination de XB — 58
4.9 Determination de XA — 58
4.10 Determination de Xe — 58
4.11. Determination de XE — 58

5. DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES PHYSIQUES DE LA BIELLE 61
5.1. Masse de la bielle 61
5.2. Position du centre de gravité G_1 62
5.3. Moment d'inertie I_{Z_1} de la bielle 63

6. ETUDE THERMODYNAMIQUE DU MOTEUR 65
6.1. Cycle quasi-réel 65
6.2. Differentes phases du cycle quasi-réel 65
6.3. Expression de la pression pendant les phases du cycle 66
a- admission 66
b- compression 67
c- combustion 67
d- détente 68
e- échappement 68
6.43. Récapitulatif de la pression en fonction de θ 72

7. DETERMINATION DU DEPHASAGE DANS L'ALLUMAGE ENTRE LES PISTON 1 et 2 73
7.1. Ordre d'allumage d'un moteur V8 ; F8 L413 73
7.2. Numérotation des cylindres 73
7.3. Determination du dephasage . D. 73

8. ORGANIGRAMME 74

9. ANNEXE 75

10. CONCLUSION 85

BIBLIOGRAPHIE 88

TABLE DES FIGURES

2.1. Mécanisme bielle - biellette 2
2.2. Mise en place des repères 3
2.3. Passage du repère $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au repère $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ 5
2.4. Passage du repère $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au repère $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ 5
2.5. Passage du repère $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au repère $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ 6
2.6. Passage du repère $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au repère $(D, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ 7

3.0. Représentation des actions mécaniques appliquées à l'embiellage du vilebrequin 19
3.1. Representation des actions mécaniques appliquées à la bielle 20
3.2. Définition du tenseur d'inertie 23
3.3. Application des actions mécaniques appliquées au piston 1 28
3.4. Representation des actions mécaniques appliquées à la biellette 34
3.5 Analyse des actions appliquées au piston 2 39
3.6. Représentation des actions mécaniques appliquées à la manivelle 45

5.1. Masse de la tête de bielle 62
5.2. Masse du pied de bielle 62
5.3. Position du centre de gravité de la bielle 62
5.4. Mesure du moment d'inertie par pendulage 63

6.1. Cycle quasi - réel 65
6.2. déplacement piston 1 69
6.3. déplacement piston 2 71

PREAMBULE

Cette étude rentre dans le cadre d'un travail globale qui a pour but de determiner l'outil necessaire pour analyser, optimiser et controler le comportement vibratoire des moteurs à combustions internes ainsi que leur recepteurs.

1. INTRODUCTION

Avant l'apogée que connait acctuellement le moteur à réaction, les motoristes d'aviation concentraient leurs efforts vers la recherche de la puissance en augmentant le nombre de cylindres en se gardant de construire des moteurs encombrants et trops lourds.

Et ceci a vu naitre le moteur en étoile, qui est une extension du moteur systéme bielle + biellette qui est le sujet de notre presente étude

Le sujet comprend l'étude dynamique de l'embiellage, constituant le moteur systéme bielle + biellette, et la determination des actions mecaniques appliquées aux differents organes composants l'embiellage.
Ainsi que l'elaboration d'un programme informatique pour le calcul de ces actions et leurs tracées sur les differents reperes.

2. ETUDE CINEMATIQUE DU MOTEUR

Pour pouvoir calculer les actions mécaniques appliquées aux différents organes constituants l'embiellage de ce type de moteur, il importe de connaitre les déplacements, et, les accelerations des principaux organes mobiles.

2.1 ETUDE CINEMATIQUE DU SYSTEME BIELLE - BIELETTE.

L'étude cinématique du système est necessaire à l'étude dynamique du moteur.
Elle nous permet de connaitre le déplacement, la vitesse et l'accélération de chacun des centres de gravité des organes mobiles de l'embiellage de ce type de moteur.

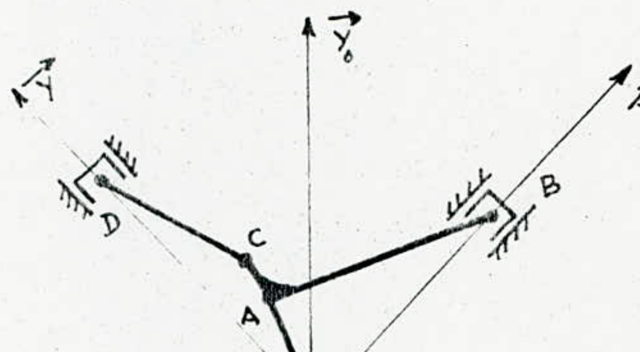


fig : 2.1 Mécanisme bielle + biellette.

Notez que les points A, B, C appartiennent à la bielle, DC représente la biellette, OA represente la manivelle.

2.1.1 MISE EN PLACE DES REPERES

L'étude cinématique du système bielle + biellette necessiste la mise en place de trois repères mobiles et deux repères fixes, qui sont representés sur la figure ci dessous.

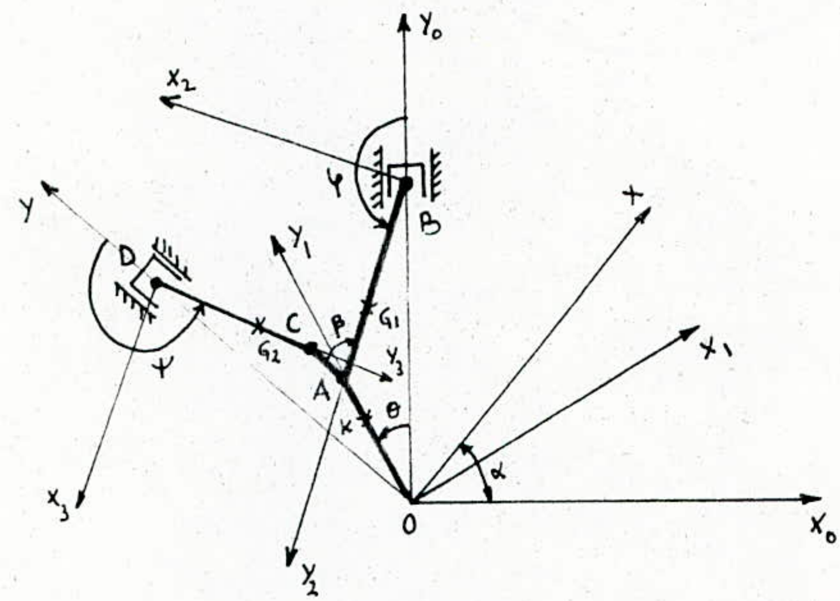


fig : 2.2 Mise en place des repères

Données géométriques :

Manivelle : $OA = R$ (rayon de la manivelle) ; $OK = r$ (distance du C.G de O)

Bielle : $AB = L_1$ (entraxe) ; $BG_1 = L_{G1}$ (distance CG – pieds de bielle)
$AC = L_3$ (distance point d'articulation bielle – axe de tête de bielle)

Biellette $CD = L_2$ (entraxe) ; $DG_2 = L_{G2}$ (distance CG – pied de biellette)

θ : Angle de rotation de la manivelle

φ : Angle de rotation de la bielle par rapport à l'axe $\vec{Y_0}$

ψ : Angle de rotation de la biellette par rapport à l'axe $\vec{Y}$

α : Angle du V

β : Angle $(\vec{AB}, \vec{AC})$ caractéristique de bielle.

Dans notre étude on supposera que la vitesse de rotation du moteur reste constante.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = cste \qquad (1)$$

Alors $\frac{d\omega}{dt} = \ddot{\theta} = 0$ l'accélération angulaire du moteur est tout le temps nulle. (2)

- $(O, \vec{X_0}, \vec{Y_0}, \vec{Z_0})$ est le repère fixe portant le déplacement du piston 1.
  - O : centre de l'arbre du vilebrequin
  - $\vec{Y_0}$: porte l'axe du piston 1
  - $\vec{Z_0}$: porte l'axe des tourillons du vilebrequin

- $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ est le repère fixe portant le déplacement du piston 2
  - $\vec{Y}$: l'axe du piston 2

- $(O, \vec{X_1}, \vec{Y_1}, \vec{Z_1})$ est le repère mobile lié au vilebrequin
  - $\vec{Y_1}$: porte la manivelle

On définit le vecteur rotation instantanné de la manivelle par rapport au repère fixe $(O, \vec{X_0}, \vec{Y_0}, \vec{Z_0})$ par :

$$\vec{\Omega}(m/o) = \dot{\theta} . \vec{Z_0} \qquad (3)$$

- $(B, \vec{X_2}, \vec{Y_2}, \vec{Z_2})$ repère lié à la bielle

$\vec{Y_2}$: Porte la bielle
B : Centre du pied de la bielle
φ : Angle de rotation de la bielle / axe $\vec{Y_0}$

$$\varphi = (\vec{Y_0}, \vec{BA})$$

De même on definit le vecteur rotation de la bielle par rapport au repère fixe $(O, \vec{X_0}, \vec{Y_0}, \vec{Z_0})$

$$\vec{\Omega}(b_1/_0) = \dot{\varphi} . \vec{Z_0} \qquad (4)$$

où $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$

- $(D, \vec{X_3}, \vec{Y_3}, \vec{Z_3})$ repère mobile lié à la biellette

$\vec{Y_3}$: Porte la biellette
D : Centre du pied de la biellette
ψ : Angle de rotation de la biellette / axe $\vec{Y_1}$

$$\psi = (\vec{Y_1}, \vec{DC})$$

De même on definit le vecteur rotation de la biellette par rappot au repère fixe $(O, \vec{X_1}, \vec{Y_1}, \vec{Z_1})$

$$\vec{\Omega}(b_2/\ ) = \dot{\psi} . \vec{Z}$$

où $\dot{\psi} = \dfrac{d\psi}{dt}$

Et comme le repère $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ n'a aucun deplacement par rappot au repère fixe $(O, \vec{X_0}, \vec{Y_0}, \vec{Z_0})$ Alors :

$$\vec{\Omega}(b_2/_0) = \dot{\psi} . \vec{Z_0} \qquad (5)$$

2.1.2 FORMULES DE PASSAGE ENTRE LES DIFFERENTS REPERES.

2.1.2.1 Passage du repère $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ au repère $(O, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$

Pour cela on exprime les coordonnées des vecteurs $\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1$ dans le reper $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$

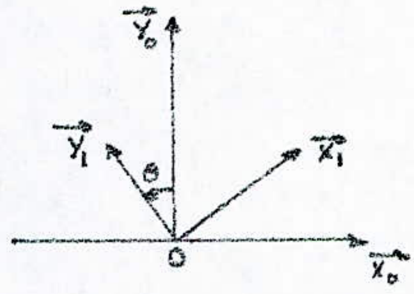


fig 2.3 passage du repère $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ au repère $(O, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$

Par projection on obtient :

$$\begin{cases} \vec{X}_1 = \vec{X}_0 \cos\theta + \vec{Y}_0 \sin\theta \\ \vec{Y}_1 = -\vec{X}_0 \sin\theta + \vec{Y}_0 \cos\theta \\ \vec{Z}_1 = \vec{Z}_0 \end{cases}$$

2.1.2.2 Passage du repère $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ au repère $(B, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$

Pour cela on exprime les coordonnées des vecteurs $\vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2$ dans le repère $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$.

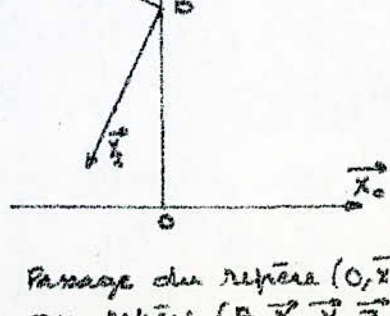


fig 2.4 Passage du repère $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ au repère $(B, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$.

Par projection on obtient :

$$\begin{cases} \vec{X_1} = \vec{X_0}\cos\psi + \vec{Y_0}\sin\psi \\ \vec{Y_1} = -\vec{X_0}\sin\psi + \vec{Y_0}\cos\psi \\ \vec{Z_2} = \vec{Z_0} \end{cases} \qquad (7)$$

2.1.2.3 Passage du repère $(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})$ au repère $(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Pour cela on exprime les coordonnées des vecteurs $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ dans le repère $(0,\vec{x_0},\vec{Y_0},\vec{z_0})$

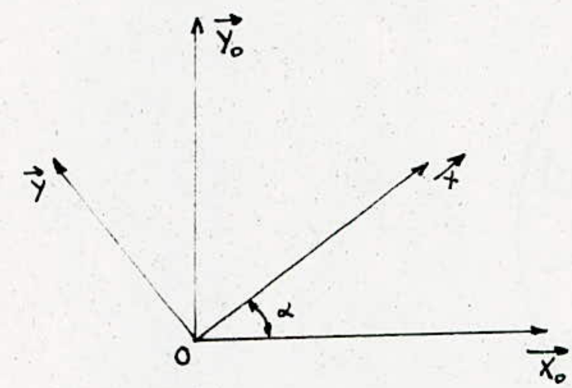


fig 2.5 Passage du repère $(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})$ au repère $(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Par projection on obtient

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{X_0}\cos\alpha + \vec{Y_0}\sin\alpha \\ \vec{y} = -\vec{X_0}\sin\alpha + \vec{Y_0}\cos\alpha \\ \vec{z} = \vec{Z_0} \end{cases} \qquad (8)$$

2.1.2.4 Passage du repère $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ au repère $(D, \vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_3)$

Pour cela on exprime les cordonnées des vecteurs $\vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_3$ dans le repère fixe $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$

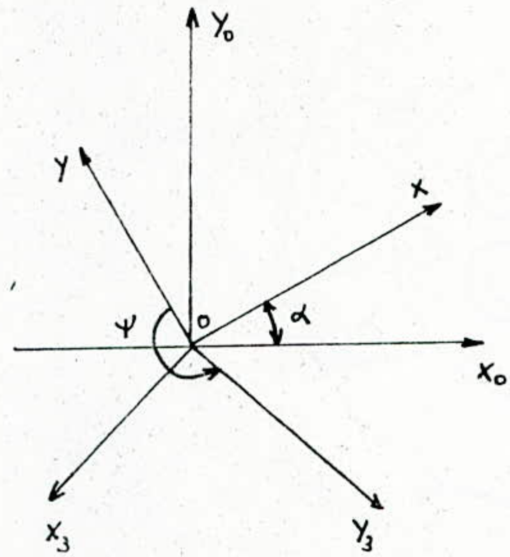


fig 2.6 Passage du repère $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ au repère $(D, \vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_3)$

Par projection on obtient :

$$\begin{cases} \vec{X}_3 = \vec{X}_0 \cos(\psi+\alpha) + \vec{Y}_0 \sin(\psi+\alpha) \\ \vec{Y}_3 = -\vec{X}_0 \sin(\psi+\alpha) + \vec{Y}_0 \cos(\psi+\alpha) \\ \vec{Z}_3 = \vec{Z}_0 \end{cases} \qquad (9)$$

Les formules de passage (6) ; (7) ; (8) ; (9). Nous permettront par la suite de connaitre les efforts dans les diffèrents repères, connaissant leurs composants dans les repères fixes $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ et $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$

2.1.3 RELATIONS CINEMATIQUES

2.1.3.1 Definition de l'angle φ

Relation cinématique fondamentale reliant θ et φ

Dans le repère $(O, \vec{X_1}, \vec{Y_1}, \vec{Z_1})$ on a :

$$\vec{OA} = R.\vec{Y_1} = R(-\vec{X_0}\sin\theta + \vec{Y_0}\cos\theta)$$

Et donc $\vec{OA} = -R\sin\theta\,\vec{X_0} + R\cos\theta\,\vec{Y_0}$

donc la projection du Vecteur $\vec{OA}$ sur $\vec{X_0}$ est :

$$-R\sin\theta$$

D'un autre côté dans le repère $(B, \vec{X_2}, \vec{Y_2}, \vec{Z_2})$ on a :

$$\vec{BA} = L_1\vec{Y_2} = L_1(-\sin\varphi\,\vec{X_0} + \cos\varphi\,\vec{Y_0})$$
$$= -L_1\sin\varphi\,\vec{X_0} + L_1\cos\varphi\,\vec{Y_0}$$

et il vient que la projection du vecteur $\vec{BA}$ sur $\vec{X_0}$ est :

$$-L_1\sin\varphi$$

Et comme le point A est commun au deux vecteurs Alors

$$R\sin\theta = L_1\sin\varphi \qquad (10)$$

et $$\sin\varphi = R/L_1\,\sin\theta = \frac{R}{L_1}\sin\theta$$

et comme φ varie legerement autour de π son cosinus est toujour negatif, et on a :

$$\cos\varphi = -\left(1 - \frac{R^2}{L_1^2}\sin^2\theta\right)^{1/2}$$

2.1.3.2 Définition de $\dot{\varphi}$

$\dot{\varphi}$ est la vitesse de rotation de la bielle, elle est égale à la dérivée de φ par rapport au temps.

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

Partant de la relation (10) : $\sin\varphi = \frac{R}{L_1} \sin\theta$

Et en dérivant les deux membres de cette équation par rapport au temps, il vient

$$\frac{d}{dt}(\sin\varphi) = \frac{d}{dt}\left(\frac{R}{L_1}\sin\theta\right)$$

Et comme R et L_1 sont constants, on obtient :

$$\dot{\varphi}\cos\varphi = \frac{R}{L_1}\dot{\theta}\cos\theta \qquad (12)$$

Comme $\dot{\theta} = \omega$, alors :

$$\dot{\varphi} = \frac{R}{L_1}\omega\frac{\cos\theta}{\cos\varphi} \qquad (13)$$

Qui est la relation exprimant $\dot{\varphi}$ en fonction de θ et φ déjàs définis

2.1.3.3 Définition de $\ddot{\varphi}$

$\ddot{\varphi}$ étant l'accélération angulaire de la bielle $= \frac{d\dot{\varphi}}{dt}$

En dérivant les deux membres de la relation (12) par rapport au temps on obtient

$$\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\cos\varphi) = \frac{d}{dt}\left(\frac{R}{L_1}\omega\cos\theta\right)$$

et $$\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi = -\frac{R}{L_1}\omega(\dot{\theta}\sin\theta)$$

Et la vitesse de rotation supposée constante, $\frac{d\omega}{dt} = 0$

Il vient $\quad \ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi = -\frac{R}{L_1}\,\omega^2 \sin\theta$

Et donc $\quad \ddot{\varphi} = \dfrac{\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \frac{R}{L_1}\,\omega^2 \sin\theta}{\cos\varphi}$

Et d'après la relation (10), nous obtenons :

$$\ddot{\varphi} = (\dot{\varphi}^2 - \omega^2)\,\mathrm{tg}\,\varphi \qquad (14)$$

Relation donnant $\ddot{\varphi}$ en fonction de $\dot{\varphi}$, ω et φ qui sont déjas exprimés en fonction de θ et les autres paramètres géométriques.

2.1.3.4 Définition de l'angle ψ.

Qui est l'angle de rotation de la biellette autour de l'axe $\vec{Y}$.

Deuxième relation cinématique fondamentale.

D'après la figure 2.2 On voit que les vecteurs $\vec{OC}$ et $\vec{DC}$ ont même abscisse dans le repère $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ donc il vient sachant que $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$;

$$R\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) + L_3 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha - \beta - \varphi\right) = L_2 \sin(-\pi + \psi)$$
$$-R\sin(\theta - \alpha) + L_3 \sin(\alpha - \beta - \varphi) = -L_2 \sin\psi \qquad (15)$$

Et finalement : $\quad \sin\psi = \dfrac{R\sin(\theta - \alpha) - L_3 \sin(\alpha - \beta - \varphi)}{L_2} \qquad (16)$

Et on tire la valeure du cosinus de l'angle Ψ en fonction de son sinus.

$$\cos^2\Psi = 1 - \sin^2\Psi$$

Alors $$\cos\Psi = \pm\sqrt{1-\sin^2\Psi}$$

Et comme Ψ est un angle qui varie legèrement autour de π, et il est positif alors son cosinus est négatif

$$\cos\Psi = -\sqrt{1 - \frac{R\sin(\theta-\alpha) - L_3\sin(\alpha-\beta-\varphi)}{L_2}} \qquad (17)$$

2.1.3.5 Définition de l'angle $\dot\Psi$

Qui est la vitesse angulaire instantannée de la biellette autour de l'axe $\vec{Y}$

Derivons la relation (15) une fois par rapport au temps on obtient

$$L_2\,\dot\Psi\,\cos\Psi = \dot\theta R\cos(\theta-\alpha) + L_3\,\dot\varphi\,\cos(\alpha-\beta-\varphi) \qquad (18)$$

$$\dot\Psi = \left(\dot\theta R\cos(\theta-\alpha) + L_3\,\dot\varphi\,\cos(\alpha-\beta-\varphi)\right) / L_2\cos\Psi \qquad (19)$$

2.1.3.6 Definition de l'acceleration angulaire $\ddot\Psi$

En derivant une fois par rapport au temps l'égalité (18) on obtient:

$$L_2\ddot\Psi\cos\Psi - L_2\dot\Psi^2\sin\Psi = R\ddot\theta\cos(\theta-\alpha) - R\dot\theta^2\sin(\theta-\alpha) + L_3\ddot\varphi\cos(\alpha-\beta-\varphi)$$
$$+ L_3\dot\varphi^2\sin(\alpha-\beta-\varphi)$$

Et comme $\ddot{\theta} = 0$ Alors :

$$\ddot{\psi} = \frac{L_2 \dot{\psi}^2 \sin\psi - R\dot{\theta}^2 \sin(\theta-\alpha) + L_3 \ddot{\varphi} \cos(\alpha-\beta-\varphi) + L_3 \dot{\varphi}^2 \sin(\alpha-\beta-\varphi)}{L_2 \cos\psi}$$

2.1.4 ETUDE CINEMATIQUE DU CENTRE DE GRAVITE DE LA BIELLE

Soit G_1 le centre de gravité de la bielle, $\overrightarrow{OG_1}$ le vecteur position du point G_1, il est definit par :

$$\overrightarrow{OG_1} = \begin{pmatrix} x_{G1} \\ y_{G1} \\ z_{G1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \quad \text{où}$$

$$\begin{cases} x_{G1} = -\dfrac{R.L_{G1}}{L_1} \sin\theta \\ Y_{G1} = R.\cos\theta - (L_1 - L_{G1}) \cos\varphi \\ Z_{G1} = 0 \end{cases}$$

Expression de la vitesse du point G_1 notée $\overrightarrow{V_{G1}}$

Par definition $\overrightarrow{V_{G1}} = \dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{OG_1}) = \begin{pmatrix} \dot{x}_{G1} \\ \dot{y}_{G1} \\ \dot{z}_{G1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$

avec :

$$\begin{cases} \dot{x}_{G1} = \dfrac{d}{dt}(x_{G1}) = -\dfrac{R}{L_1} L_{G1}\, \omega \cos\theta \\ \dot{Y}_{G1} = \dfrac{d}{dt}(Y_{G1}) = R\sin\theta\,(\dot{\varphi} - \omega) - R\sin\theta \dfrac{L_{G1}}{L_1} \dot{\varphi} \\ \dot{Z}_{G1} = \dfrac{d}{dt}(Z_{G1}) = 0 \end{cases}$$

Et il vient finalement

$$\vec{V}_{G1/(O,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L_1} L_{G1} . \omega . \cos\theta \\ R \sin\theta \left(\dot{\varphi} - \omega - \frac{L_{G1}}{L_1} \dot{\varphi} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Expression de l'accélération du point G_1

Par définition l'accélération du centre de gravité noté Γ_{G1} est donnée par :

$$\vec{\Gamma}_{G1} = \frac{d}{dt} \left(\vec{V}_{G1} \right)$$

où $\vec{\Gamma}_{G1} = \ddot{X}_{G1} . \vec{X}_0 + \ddot{Y}_{G1} . \vec{Y}_0 + \ddot{Z}_{G1} . \vec{Z}_0$

Avec $$\ddot{X}_{G1} = \frac{d}{dt} \left(\dot{X}_{G1} \right) = \frac{L_{G1} . R . \omega^2 \sin\theta}{L_1}$$

$$\ddot{Y}_{G1} = \frac{d}{dt} \left(\dot{Y}_{G1} \right) = \frac{R}{L_1} \left[\left(\dot{\varphi}(L_1 - L_{G1}) - L_1 \omega \right) \cos\theta + \ddot{\varphi}(L_1 - L_{G1}) \sin\theta \right]$$

$$\ddot{Z}_{G1} = \frac{d}{dt} \left(\dot{Z}_{G1} \right) = \frac{d}{dt}(0) = 0$$

Et il vient finalement

$$\vec{\Gamma}_{G1/(O,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)} = \begin{pmatrix} \frac{L_{G1} . R . \omega^2 . \sin\theta}{L_1} \\ \frac{R}{L_1} \left[\left(\dot{\varphi}(L_1 - L_{G1}) - L_1 \omega \right) \cos\theta + \ddot{\varphi}(L_1 - L_{G1}) \sin\theta \right] \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

2.1.5 ETUDE CINEMATIQUE DU CENTRE DE GRAVITE DE LA BIELLETTE

Soit G_2 ce point, et x_{G2}, y_{G2}, z_{G2} ses composantes dans le repère $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, $\overrightarrow{OG_2}$ vecteur position du point G_2 sera :

$$\overrightarrow{OG_2}/_{(0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \qquad \text{où}$$

$$\begin{cases} x_2 = -R\sin\theta + L_3 \sin(\varphi+\beta) + (L_2 - L_{G2}) \sin(\psi+\alpha) \\ y_{G2} = R\cos\theta - L_3 \cos(\varphi+\beta) - (L_2 - L_{G2}) \cos(\psi+\alpha) \\ z_{G2} = 0 \end{cases}$$

La vitesse du point G_2 : $\vec{V}_{G2} = \dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{OG_2}) = \begin{pmatrix} \dot{x}_{G2} \\ \dot{y}_{G2} \\ \dot{z}_{G2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$

où
$$\begin{cases} \dot{x}_{G2} = \dfrac{d}{dt}(x_{G2}) = -R\dot{\theta}\cos\theta + L_3\dot{\varphi}\cos(\varphi+\beta) + (L_2 - L_{G2})\dot{\psi}\cos(\psi+\alpha) \\ \dot{y}_{G2} = \dfrac{d}{dt}(y_{G2}) = -R\dot{\theta}\sin\theta + L_3\dot{\varphi}\sin(\varphi+\beta) + (L_2 - L_{G2})\dot{\psi}\sin(\psi+\alpha) \\ \dot{z}_{G2} = \dfrac{d}{dt}(z_{G2}) = 0 \end{cases}$$

L'accélération du point G_2 : $\vec{\Gamma}_{G2/(0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{V}_{G2}/(0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)\right) = \begin{pmatrix} \ddot{x}_{G2} \\ \ddot{y}_{G2} \\ \ddot{z}_{G2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$

où $\ddot{x}_{G2} = \dfrac{d}{dt}(\dot{x}_{G2})$; $\ddot{y}_{G2} = \dfrac{d}{dt}(\dot{y}_{G2})$; $\ddot{z}_{G2} = \dfrac{d}{dt}(\dot{z}_{G2})$.

finalement

$$\vec{\Gamma}_{G2/(0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} = \begin{pmatrix} R\dot{\theta}^2\sin\theta + L_3(\ddot{\varphi}\cos(\varphi+\beta) - \dot{\varphi}^2\sin(\varphi+\beta)) + (L_2 - L_{G2})(\ddot{\psi}\cos(\psi+\alpha) - \dot{\psi}^2\sin(\psi+\alpha)) \\ -R\dot{\theta}^2\cos\theta + L_3(\ddot{\varphi}\sin(\varphi+\beta) + \dot{\varphi}^2\cos(\varphi+\beta)) + (L_2 - L_{G2})(\ddot{\psi}\sin(\psi+\alpha) + \dot{\psi}^2\cos(\psi+\alpha)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

..1.6 CINEMATIQUE DU POINT B

B est le point se trouvant sur l'axe d'articulation de la bielle sur le piston 1

Position du point B dans le repère fixe $(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})$.

$$\vec{OB}_{(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\cos\theta + L_2\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

Vitesse du point B dans le repère $(\vec{0,X_0,Y_0,Z_0}) = V_{B/(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})} = \dfrac{d(\vec{OB})}{dt}$

Il vient

$$\vec{V_B}_{/(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})} = \begin{pmatrix} 0 \\ R(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

Accélération du point B dans le repère $(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})$

$$\vec{\Gamma_B}_{/(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})} = \frac{d}{dt}(\vec{V_B}_{/(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})}$$

Il vient

$$\vec{\Gamma_B}_{/(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\omega(\dot{\varphi}-\omega)\cos\theta + R\ddot{\varphi}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

2.1.7 CINEMATIQUE DU POINT D

D est le point sur l'axe d'articulation de la biellette sur le piston 2.

Et $\vec{OD}$ le vecteur position du point, il est définit dans le repère fixe $(0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ par :

$$\vec{OD}_{/(0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta + L_3\sin(\varphi+\beta) + L_2\sin(\psi-\alpha) \\ R\cos\theta - L_3\cos(\varphi+\beta) - L_2\cos(\psi-\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix}$$

- Vitesse du point D dans le repère $(0,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0) = \vec{V}_{D/(0,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)} = \frac{d}{dt}\left(\vec{OD}_{/(0,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)}\right)$

Il vient après dérivation/au temps

$$\vec{V}_{D/(0,\vec{X}_0,\vec{X}_0,\vec{Z}_0)} = \begin{pmatrix} -R\dot\theta\cos\theta + L_3\dot\varphi\cos(\varphi+\beta) + L_2\dot\psi\cos(\psi+\alpha) \\ -R\dot\theta\sin\theta + L_3\dot\varphi\sin(\varphi+\beta) + L_2\dot\psi\sin(\psi+\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix}$$

- Accélération du point D dans le repère $(0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$

$$\vec{\Gamma}_{D/(0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_{D/(0,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)}\right) \quad \text{Et},$$

$$\vec{\Gamma}_{D\,(0,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)} = \begin{pmatrix} R\dot\theta^2\sin\theta + L_3(\ddot\varphi\cos(\varphi+\beta) - \dot\varphi^2\sin(\varphi+\beta)) + L_2(\ddot\psi\cos(\psi+\alpha) - \dot\psi^2\sin(\psi+\alpha)) \\ -R\dot\theta^2\cos\theta + L_3(\ddot\varphi\sin(\varphi+\beta) + \dot\varphi^2\cos(\varphi+\beta)) + L_2(\ddot\psi\sin(\psi+\alpha) + \dot\psi^2\cos(\psi+\alpha)) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

2.1.8 CINEMATIQUE DU CENTRE DE GRAVITÉ DE LA MANIVELLE

Soit K ce point et x_K, y_K, z_K ses composantes dans le repère $(O,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})$

Le vecteur $\vec{OK}$ sera definit (voir fig 2.2) :

$$\vec{OK}_{/(O,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

La vitesse du point K : $\vec{V}_{K/(O,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})} = \frac{d}{dt}\left(\vec{OK}_{/(O,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})}\right)$

Il vient :

$$\vec{V}_{K/(O,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})} = \begin{pmatrix} -r\dot{\theta}\cos\theta \\ -r\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

L'acceleration du point K : $\vec{\Gamma}_{K/(O,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_{K/(O,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})}\right)$

Il vient :

$$\vec{\Gamma}_{K/(O,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})} = \begin{pmatrix} r\omega^2\sin\theta \\ -r\omega^2\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \qquad (2A)$$

3 CALCUL DYNAMIQUE

BUT : Determiner les actions mecaniques appliquées aux Differents organes composants le systeme bielle – biellette.

Nous negligeons l'effet des frottements mecaniques ainsi que le poids des organes en mouvement.

Les actions sont :

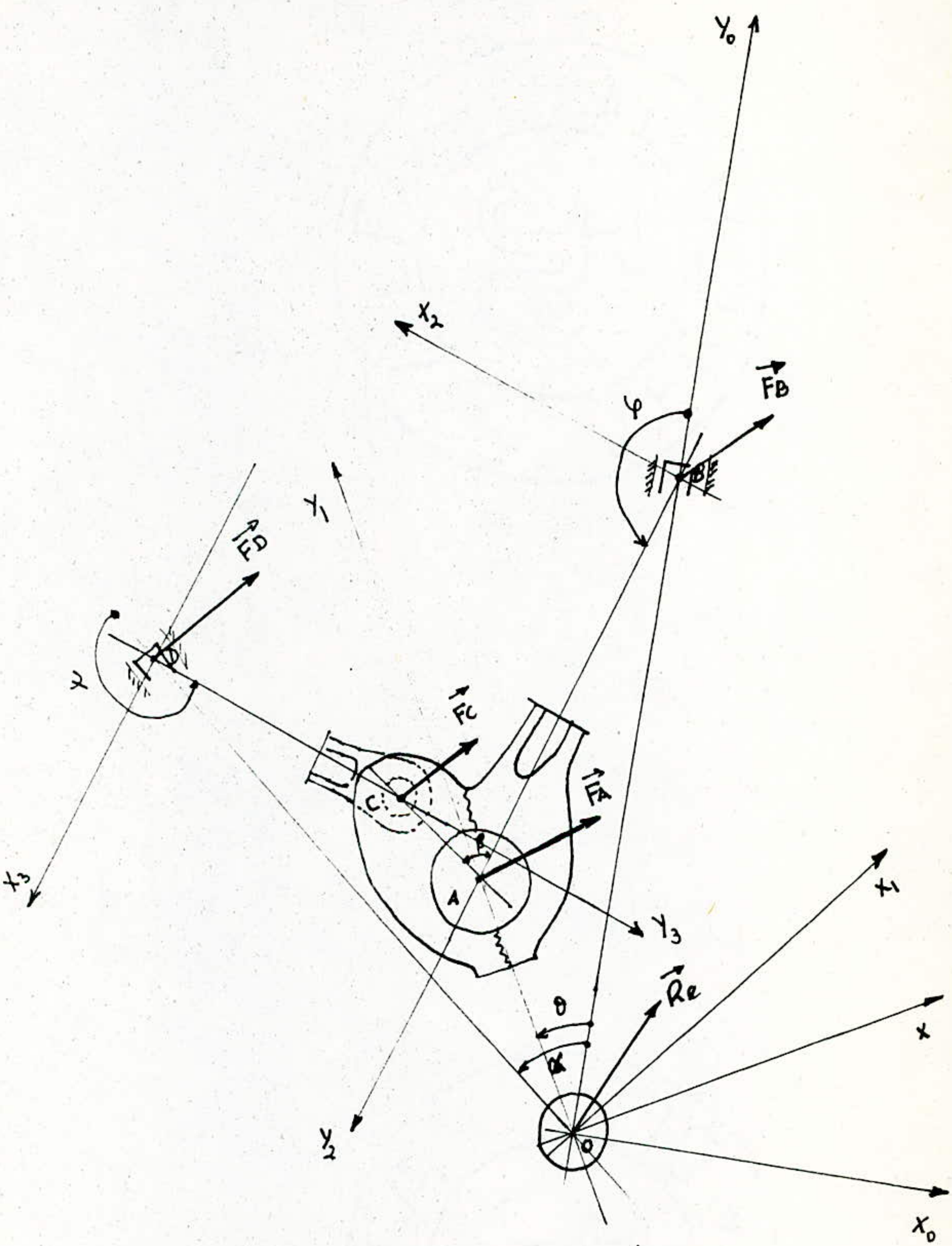
chemise 1 sur piston 1 : $\overrightarrow{FE}$ (1 seule composante $\vec{X}_E$)
piston 1 sur bielle : $\overrightarrow{FB}$ (2 composantes $\overrightarrow{XB}$ et $\overrightarrow{YB}$)
piston 2 sur chemise 2 : $\overrightarrow{FF}$ (1 seule composante $\overrightarrow{XF}$)
bielle sur maneton : $\overrightarrow{FA}$ (2 composantes $\overrightarrow{XA}, \overrightarrow{YA}$)
biellette sur piston 2 : $\overrightarrow{FD}$ (2 composantes $\overrightarrow{XD}, \overrightarrow{YD}$)
bielle sur biellette : $\overrightarrow{FC}$ (2 composantes $\overrightarrow{XC}, \overrightarrow{YC}$)
et enfin manivelle sur paliers : $\overrightarrow{FO}$ (2 composantes $\overrightarrow{XO}, \overrightarrow{YO}$)

- Dans cette étude on calcul les actions mécaniques des organes pris chacun isolement.

- On commencera par la bielle, puis le piston 1, biellette, piston 2, et enfin la manivelle.

- Les forces sont representées dans une position quelconque du systeme, lors du fonctionnement du moteur

- Pour chaque organe on établira les equations vectorielles fondamentales.



3.0 Représentation des actions mécaniques appliquées à l'embiellage et le vilebrequin.

3.1 ETUDE DYNAMIQUE DE LA BIELLE

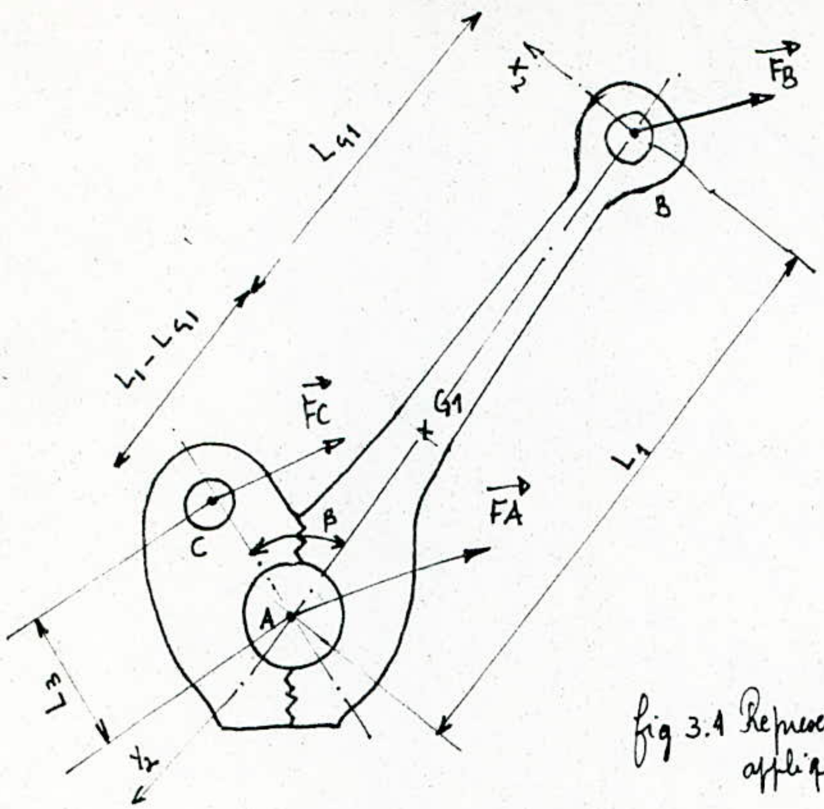


fig 3.4 Représentation des actions mécaniques appliquées à la bielle.

3.1.1 ANALYSE DES ACTIONS MECANIQUES APPLIQUÉES A LA BIELLE

On isole la bielle, il y a 3 actions mecaniques appliquées à celle-ci

- l'action du maneton sur la bielle en A : τ_A
- l'action de l'axe du piston 1 sur la bielle en B : τ_B
- l'action de la biellette sur la bielle en C : τ_C

La liaison du type verrou en A, nous permet d'ecrire.

$$\begin{cases} \vec{F_A} \cdot \vec{Z_0} = \vec{0} \\ \vec{M_A} \cdot \vec{Z_0} = \vec{0} \end{cases}$$

Donc le torseur des actions mécaniques au point A se resume à :

$$\tau_A \begin{cases} \vec{F_A} \\ \vec{M_A} \end{cases} \quad ; \quad \vec{F_A} = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{M_A} = \vec{0}$$

De même que le point A, en B, nous avons une liaison du type verrou, donc :

$$\mathcal{T}_B : \begin{cases} \vec{F_B} \\ \vec{\mathcal{M}_B} \end{cases}$$

où $\vec{F_B} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$ et $\vec{\mathcal{M}_B} = \vec{0}$

Ainsi que pour le point C, nous avons une liaison du type verrou, donc:

$$\mathcal{T}_C : \begin{cases} \vec{FC} \\ \vec{\mathcal{M}_C} \end{cases}$$

où $\vec{FC} = \begin{pmatrix} \vec{XC} \\ \vec{YC} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$ et $\vec{\mathcal{M}_C} = \vec{0}$.

3.1.2 EQUATIONS VECTORIELLES FONDAMENTALES DE LA BIELLE

Nous appliquons à la bielle les équations fondamentales de la dynamique:

$$\begin{cases} m_{bielle} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G1/(O,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})}} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}_{/bielle} & \text{(I)} \\ \overrightarrow{\delta^2_{(bielle/G1)}} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}ext/G1} & \text{(II)} \end{cases}$$

où :

$m_{bielle} = mb_1$

$\overrightarrow{\delta^2_{(bielle/G1)}}$: moment dynamique de la bielle par rapport à son centre de gravité G1, exprimé dans le repère $(O, \vec{X_2}, \vec{Y_2}, \vec{Z_2})$

3.1.2.1 CALCUL DU MOMENT DYNAMIQUE DE LA BIELLE

Le moment dynamique de la bielle par rapport à son centre de gravité G1, exprimé dans le repère $(O, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$ est égal à la dérivée première / temps du moment cinétique de cette bielle par rapport au centre de gravité G1 exprimé dans le repère $(O, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$.

$$\overrightarrow{\delta^2_{(bielle/G1)}} = \frac{d}{dt} \left(\sigma^2(bielle/G1) \right)$$

Le moment cinétique de la bielle par rapport à son centre de gravité G1 exprimé dans le repère $(O, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$ est égal au produit du tenseur d'inertie de la bielle par rapport à son centre de gravité G1 exprimé dans le repère $(G1, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$ par le vecteur rotation de la bielle dans le repère $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$

$$\overrightarrow{\sigma^2(bielle/G1)} = \underset{(G1, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)}{\overline{\overline{I}}(bielle/G1)} \cdot \overrightarrow{\Omega}(bielle/0)$$

Le tenseur d'inertie et le vecteur rotation doivent être exprimés dans le même repère

Dans un cas général d'un solide (S), on définit le tenseur d'inertie $\underset{(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})}{I(S/G)}$ du solide (S) par rapport à son centre de gravité G, exprimé dans le repère $(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ par :

$$\underset{(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})}{\overline{\overline{I(S/G)}}} = \begin{Vmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{Vmatrix}$$

A,B,C sont les moments d'inertie par rapport au centre de gravité G sur les axes $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$. D, E et F sont les produits d'inertie par rapport au centre de gravité G sur les axes $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$

$$A = \iiint_{P\in(S)} (y^2+z^2)\, dm_P$$

$$B = \iiint_{P\in(S)} (x^2+z^2)\, dm_P$$

$$C = \iiint_{P\in(S)} (x^2+y^2)\, dm_P$$

$$D = \iiint_{P\in(S)} yz\, dm_P$$

$$E = \iiint_{P\in(S)} xz\, dm_P$$

$$F = \iiint_{P\in(S)} xy\, dm_P$$

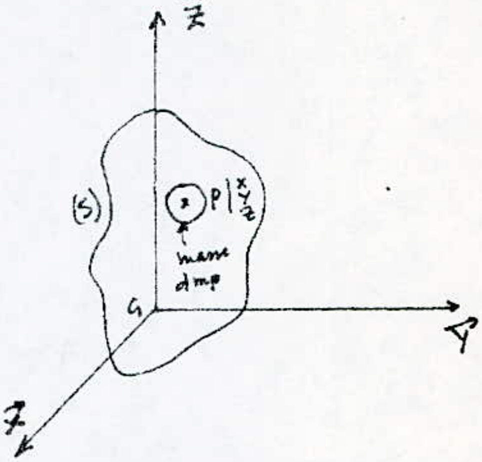


fig 3.2 definition du tenseur d'inertie

Propriété importante

- Si un solide possède un plan de symétrie : deux produits d'inertie sont nuls

exemple : si $(\vec{x},\vec{y})$ est plan de symétrie, $D=E=0$ et $F\neq 0$

- Si un solide possède deux plans de symétrie : les trois produits d'inertie sont nuls $D=E=F=0$ [*]

3.1.2.2 Application :

Dans notre cas, à cause de l'articulation de la biellette sur la bielle cette dernière ne possède qu'un seul plan de symetrie qui est le plan $(\vec{x}_2,\vec{y}_2)$ d'où :

$$D = E = 0 \quad \text{et} \quad F \neq 0$$

Alors il vient
$$\underset{(G_1,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}{\overline{\overline{I}}(\text{bielle}/G_1)} = \begin{Vmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{Vmatrix}$$

où A, B, C, F sont définit ci dessus en lès exprimants dans le repère $(G_1, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$

et comme $\overrightarrow{\Omega}(\text{bielle}/0) = \dot{\varphi}.\vec{Z}_0$ (Voir relation (4))

Alors on a :

$$\overrightarrow{\Gamma^2}(\text{bielle}/G_1) = \underset{(G_1, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)}{\overline{\overline{I}}(\text{bielle}/G_1)} \cdot \overrightarrow{\Omega}(\text{bielle}/0)$$

qui devient

$$\overrightarrow{\sigma^2}(\text{bielle}/G_1) = \begin{Vmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{Vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\sigma^2}_{(\text{bielle}/G_1)} = C.\dot{\varphi}\,\vec{Z}_0$$

où $C = IZ1$: qui est le moment d'inertie de la bielle par rapport à son centre de gravité G_1 par rapport à l'axe $\vec{Z}_2$ qui est égal à l'axe $\vec{Z}$

et il vient :

$$\overrightarrow{\delta^2}(\text{bielle}/G_1) = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma^2}_{(\text{bielle}/G_1)}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(C.\dot{\varphi}\,\vec{Z}_0\right)$$

$$= C.\ddot{\varphi}.\vec{Z}_0$$

et comme $C = IZ1$ Alors :

$$\overrightarrow{\delta^2}(\text{bielle}/G_1) = IZ1.\ddot{\varphi}.\vec{Z}_0$$

3.123 CALCUL DES MOMENTS DES FORCES APPLIQUÉES A LA BIELLE PAR RAPPORT A SON CENTRE DE GRAVITÉ.

Puisque le moment dynamique est calculé par rapport au centre de gravité de la bielle, il faut ramener les moments des forces exterieures appliquées à la bielle au centre de gravité G1

- Moment de la force $\vec{FA}$ /G1

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{FA}/G1} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{FA}/A} + \vec{G_1A} \wedge \vec{FA}$$

et comme $\vec{FA}$ passe par le point A Alors :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{FA}/A} = \vec{0}$$

Et il vient après avoir exprimé $\vec{G_1A}$ et $\vec{FA}$ dans le repère $(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})$

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{FA}/G1} = \vec{0} + \begin{pmatrix} -(L_1-L_{G1})\sin\varphi \\ (L_1-L_{G1})\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} XA \\ YA \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

Et on obtient :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{FA}/G1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L_1-L_{G1})(XA\cos\varphi + YA\sin\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

- Moment de la force $\vec{FB}$ /G1

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{FB}/G1} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{FB}/B} + \vec{G_1B} \wedge \vec{FB}$$

et comme FB passe par B Alors :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{FB}/B} = 0$$

Et il vient après avoir exprimé $\vec{G_1B}$ et $\vec{FB}$ dans le repère $(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F_B}/G_1} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L_{G1}\sin\varphi \\ -L_{G1}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

Et on obtient :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F_B}/G_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{G1}(x_B\cos\varphi + y_B\sin\varphi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

- Moment de la force $\vec{F_C}$ par rapport au point G_1

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F_C}/G_1} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F_C}/C} + \overrightarrow{G_1C} \wedge \vec{F_C}$$

Et comme $\vec{F_C}$ passe par le point C alors il vient :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F_C}/C} = \vec{0}$$

Et comme l'expression de $\overrightarrow{G_1C}$ dans le repère fixe $(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$ est :

$$\overrightarrow{G_1C} = \begin{pmatrix} L_3\sin(\varphi+\beta) - (L_1 - L_{G1})\sin\varphi \\ -L_3\cos(\varphi+\beta) + (L_1 - L_{G1})\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

Ainsi que pour $\vec{F_C}$:

$$\vec{F_C} = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

Il vient alors :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F_C}/G_1} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L_3\sin(\varphi+\beta) - (L_1-L_{G1})\sin\varphi \\ -L_3\cos(\varphi+\beta) + (L_1-L_{G1})\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

On aura :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F_C}/G_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(L_3\sin(\varphi+\beta) - (L_1 - L_{G1})\sin\varphi\right) Y_C + \left(L_3\cos(\varphi+\beta) - (L_1 - L_{G1})\cos\varphi\right) X_C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

3.1.4 EQUATIONS SCALAIRES DE LA BIELLE

Pour obtenir les équations scalaires de la bielle, il suffit de faire la projection de chaque equation vectorielle de la bielle sur les axes du repère $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$.

La projection de l'équation (I) sur le repère $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ donne :

projection sur $\vec{X}_0$: $\quad m b_1 \ddot{X}_{G1} = XA + XB + XC$

" $\quad \vec{Y}_0$: $\quad m b_1 \ddot{Y}_{G1} = YA + YB + YC$

" $\quad \vec{Z}_0$: $\quad 0 = 0$

La projection de l'équation (II) sur le repère $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ donne :

projection sur $\vec{X}_0$: $\quad 0 = 0$

" $\quad \vec{Y}_0$: $\quad 0 = 0$

" $\quad \vec{Z}_0$:

$$I_{Z1} \ddot{\varphi} = (L_{G1} - L_1)(XA \cos\varphi + YA \sin\varphi) + L_{G1}(XB \cos\varphi + YB \sin\varphi) + \left(L_3 \sin(\varphi+\beta) - (L_1 - L_{G1}) \sin\varphi\right) YC + \left(L_3 \cos(\varphi+\beta) - (L_1 - L_{G1}) \cos\varphi\right) XC$$

Conclusion : L'étude dynamique de la bielle aboutit à l'obtention d'un système de trois équations à six inconnues, donc pour pouvoir résoudre le problème, il faut isoler les solides voisins liées directement à la bielle et faire leurs etudes dynamique.

3.2 ETUDE DYNAMIQUE DU PISTON 1

3.2.1 ANALYSE DES ACTIONS MÉCANIQUES APPLIQUÉES AU PISTON 1

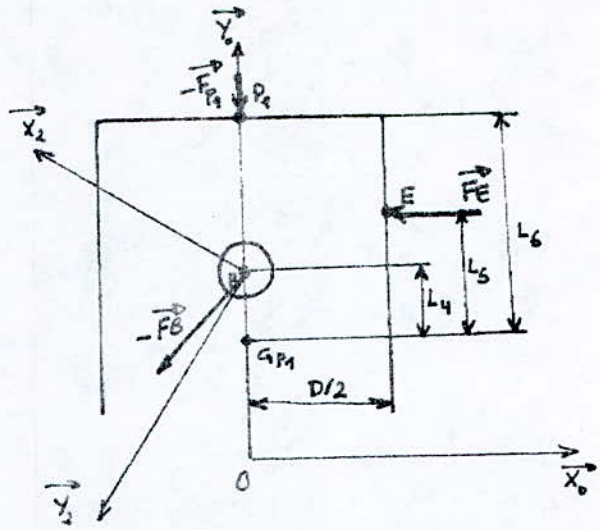


fig 3.3 : Analyse des actions appliquées au piston 1

On isole le piston 1, il y a trois actions mécaniques appliquées à celui ci

- L'action de l'axe du piston 1 sur la bielle en B : $\mathcal{T}_B$
- L'action de la chemise 1 sur piston 1 en E : $\mathcal{T}_E$
- L'action des gaz sur le piston 1 en P : $\mathcal{T}_P$

La liaison du type verrou que nous avons en B, nous permet d'écrire

$$\begin{cases} -\vec{FB} \cdot \vec{Z_0} = \vec{0} \\ -\vec{\mathcal{M}_B} \cdot \vec{Z_0} = \vec{0} \end{cases}$$

Donc le torseur des actions mecaniques au point B se résume à :

$$\mathcal{T}_{B} : \begin{cases} -\vec{F_B} \\ -\vec{\mathcal{M}_B} \end{cases}$$

où $-\vec{FB} = \begin{pmatrix} -XB \\ -YB \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$ et $-\vec{\mathcal{M}_B} = \vec{0}$

Au point E, il vient $\tau_E \begin{cases} \overrightarrow{FE} \\ \overrightarrow{m}_E \end{cases}$

La chemise 1 étant immobile et géométriquement parfaite, elle n'exerce aucun moment sur le piston 1.
Si le piston 1 est géométriquement parfait et que sa tête est plate, les gaz n'exercent aucun effort sur $\vec{Z_0}$. Le point de contact chemise-piston est donc situé sur une génératrice du piston dans le plan $(\vec{X_0}, \vec{Y_0})$. Soit E ce point, on suppose à priori que sa position est quelconque sur cette génératrice, nous verrons par la suite que cette position n'est pas quelconque et que dans l'étude théorique que nous menons le point E a forcément la même ordonnée que le point B.

Alors on posera :

$$FE = \begin{pmatrix} XE \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{m}_E = \vec{0}$$

Torseur au point P_1 : $\begin{cases} \overrightarrow{F_{P_1}} \\ \overrightarrow{m}_{P_1} \end{cases}$

On suppose que la pression des gaz est uniformément répartie sur la tête du piston 1, et que le point d'application de l'effort résultant est centré sur la tête du piston. De ce fait les gaz n'exercent pas de moment sur le piston
si la tête est plate, il n'y a pas d'efforts sur $\vec{X_0}$ et $\vec{Z_0}$; les efforts dus au gaz sont uniquement dirigés sur $-\vec{Y_0}$ et dépendent de θ

Alors on posera,

$$\overrightarrow{-F_{P_1}}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_{P_1}(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{m}_{P_1} = \vec{0}$$

où $Y_{P_1}(\theta) = \dfrac{\pi D^2}{4} \cdot P(\theta)$

3.2.2 EQUATIONS VECTORIELLES FONDAMENTALES DU PISTON 1

Nous appliquons au piston1, les equations fondamentales de la dynamique:

$$\begin{cases} m_{piston1} \cdot \overrightarrow{\Gamma}_{(GP_1/0)} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}_{/piston1} & (I) \\ \overrightarrow{\delta^{o}}_{(piston1/GP_1)} = \sum \overrightarrow{m}_{\overrightarrow{F_{ext}}/GP_1} & (II) \end{cases}$$

où $m_{piston1} = mp_1$

Le piston est un solide indeformable, son mouvement est une translation sur l'axe $\overrightarrow{Y_0}$, donc tous ses points ont même vitesse et même acceleration, En particulier, le point G_{P1} a la même acceleration que le point B :

$$\overrightarrow{\Gamma}_{(GP_1/0)} = \overrightarrow{\Gamma}_{(B/0)} = \overrightarrow{\Gamma}_{(B/(0,X_0,Y_0,Z_0))} \qquad \text{(voir (22))}$$

2.1 Calcul du moment dynamique

$$\overrightarrow{\sigma^{o}}_{(piston1/GP_1)} = \overline{\overline{I}}_{(piston1/GP_1)\,(GP_1,\overrightarrow{X_0},\overrightarrow{Y_0},\overrightarrow{Z_0})} \cdot \overrightarrow{\Omega}_{(piston1/(0,X_0,Y_0,Z_0))}$$

Et comme le piston n'a aucune rotation par rapport au repère $(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})$ il vient :

$$\overrightarrow{\Omega}_{(piston1/(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0}))} = \vec{0}$$

Et $$\overrightarrow{\sigma^{o}}_{(piston1/GP_1)} = \vec{0}$$

Et on a : $$\overrightarrow{\delta^{o}}_{(piston1/GP_1)} = \vec{0}$$

3.2.2 EQUATIONS VECTORIELLES FONDAMENTALES DU PISTON 1

Nous appliquons au piston1, les equations fondamentales de la dynamique:

$$\begin{cases} m_{piston1} \cdot \overrightarrow{\Gamma}_{(GP_1/0)} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}_{/piston1} & (\mathrm{I}) \\ \overrightarrow{\delta^{\circ}}_{(piston1/GP_1)} = \sum \overrightarrow{m}_{\overrightarrow{F_{ext}}/GP_1} & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

où $m_{piston1} = m_{P1}$

Le piston est un solide indeformable, son mouvement est une translation sur l'axe $\overrightarrow{Y_0}$, donc tous ses points ont même vitesse et même acceleration, En particulier, le point G_{P1} a la même acceleration que le point B :

$$\overrightarrow{\Gamma}_{(GP_1/0)} = \overrightarrow{\Gamma}_{(B/0)} = \overrightarrow{\Gamma}_{(B/(0,X_0,Y_0,Z_0))} \qquad (\text{voir } (22))$$

2.1 Calcul du moment dynamique

$$\overrightarrow{\sigma^{\circ}}_{(piston1/GP_1)} = \overline{\overline{I}}_{\substack{(piston1/GP_1) \\ (GP_1,\overrightarrow{X_0},\overrightarrow{Y_0},\overrightarrow{Z_0})}} \cdot \overrightarrow{\Omega}_{(piston1/(0,X_0,Y_0,Z_0))}$$

Et comme le piston n'a aucune rotation par rapport au repère $(0,\overrightarrow{X_0},\overrightarrow{Y_0},\overrightarrow{Z_0})$ il vient :

$$\overrightarrow{\Omega}_{(piston1/(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0}))} = \vec{0}$$

Et $$\overrightarrow{\sigma^{\circ}}_{(piston1/GP_1)} = \vec{0}$$

et on a : $$\overrightarrow{\delta^{\circ}}_{(piston1/GP_1)} = \vec{0}$$

3.2.2.3. Calcul des moments des forces appliquées au piston 1

- Moment de la force $-\vec{FB}/_{GP_1}$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{-\vec{FB}/GP_1} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{-\vec{FB}/B} + \overrightarrow{GP_1B} \wedge -\vec{FB}$$

Et comme $-\vec{FB}$ passe par le point B Alors :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{-\vec{FB}/B} = \vec{0}$$

Et il vient après avoir exprimé $\overrightarrow{G_{P1}B}$ et $-\vec{FB}$ dans le repère $(O,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{-\vec{FB}/GP_1} = \vec{O} + \begin{pmatrix} 0 \\ L_4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -XB \\ -YB \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

Et on obtient :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{-FB/GP_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_4\, XB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

- Moment de la force $\vec{FE}/_{GP_1}$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{FE}/GP_1} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{FE/E} + \overrightarrow{G_{P_1}E} \wedge \vec{FE}$$

et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{FE}/E} = \vec{0}$ car $\vec{FE}$ passe par E

On obtient : $$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{FE}/GP_1} = \vec{O} + \begin{pmatrix} D/2 \\ L_5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} XE \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

Et on aura :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{FE}/GP_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_5\, XE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

– Moment de la force $-\vec{F}_{P_1}(\theta)/G_{P_1}$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{-\vec{F}_{P_1}(\theta)/G_{P_1}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{-\vec{F}_{P_1}(\theta)/P_1} + \overrightarrow{G_{P_1}P_1} \wedge -\vec{F}_{P_1}(\theta)$$

Et $-\vec{F}_{P_1}(\theta)$ passe par le point P_1 donc : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{-\vec{F}_{P_1}(\theta)/P_1} = \vec{0}$

Et on a :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{-\vec{F}_{P_1}(\theta)/G_{P_1}} = \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ L_6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_{P_1}(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix}.$$

Et $$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{-F_{P_1}(\theta)/G_{P_1}} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

3.2.3 EQUATIONS SCALAIRES DU PISTON 1.

Pour cela, il faut faire la projection des equations vectorielles sur les axes du repère $(0, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$.

La projection de l'équation (I) sur le repère $(0, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ donne :

projection sur $\vec{X}_0$: $\quad 0 = -XB + XE$

" " $\vec{Y}_0$: $\quad m_{P1}\, \ddot{Y}_{B/(0,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)} = -YB - Y_{P_1}(\theta)$

" " $\vec{Z}_0$: $\quad 0 = 0$

La projection de l'equation (II) sur le repère $(0, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ donne:

sur $\vec{X}_0$: $\quad 0 = 0$

sur $\vec{Y}_0$: $\quad 0 = 0$

sur $\vec{Z}_0$: $\quad 0 = L_4\, XB - L_5\, XE$

Conclusion : L'étude dynamique du piston 2 a introduit trois équations supplementaires et une inconnue supplémentaire

Si nous examinons le système d'équations, nous remarquons que les deux équations i et ii ne sont compatible que si $L_4 = L_5$, l'équation (I) est en trop
finalement l'étude dynamique du piston 1 nous donne donc deux équations supplémentaires et une inconnue supplémentaire

En faisant le bilan, on voit qu'on a cinq équations avec sept inconnues, il faut donc, faire l'etude dynamique du solide voisin à la bielle est qui est la biellette.

3.3 ETUDE DYNAMIQUE DE LA BIELLETTE

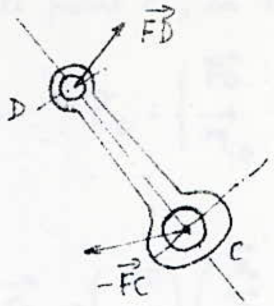


fig 3.4 Representation des actions mecaniques appliquées à la biellettes.

3.3.1 ANALYSE DES ACTIONS MECANIQUES APPLIQUEES A LA BIELLETTE

On isole la biellette, il y a deux actions mécaniques appliquées à celle-ci :

- L'action de la bielle au point C : $\mathcal{T}_C$
- L'action de l'axe du piston 2 en D : $\mathcal{T}_D$

La liaison du type verrou que nous avons en C nous permet d'ecrire :

$$\begin{cases} -\vec{FC} \cdot \vec{Z_0} = \vec{0} \\ -\vec{m_C} \cdot \vec{Z_0} = \vec{0} \end{cases}$$

Donc le torseur des actions mecaniques au point C se résume à :

$$\mathcal{T}_C \begin{cases} -\vec{FC} \\ -\vec{m_C} \end{cases}$$

où $\quad -\vec{FC} = \begin{pmatrix} -XC \\ -YC \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \quad$ et $\quad -\vec{m_C} = \vec{0}$

ou A, B, C sont les moments [illegible]
axes $\vec{X_3}$, $\vec{Y_3}$ et $\vec{Z_3}$.

De même que pour le point C, en D nous avons une liaison verrou :

$$\tau_D = \begin{cases} \overrightarrow{F_D} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_D} \end{cases}$$

où

$$\overrightarrow{F_D} = \begin{pmatrix} XD \\ YD \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathcal{M}_D} = \vec{0}$$

3.3.2 EQUATIONS VECTORIELLES FONDAMENTALES DE LA BIELLETTE

$$\begin{cases} m_{biellette} \cdot \overrightarrow{\Gamma}_{G2/(O,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}/_{biellette} & (I) \\ \overrightarrow{\delta^3}_{(biellette/G_2)} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{\overrightarrow{F_{ext}}}}/_{G_2} & (II) \end{cases}$$

où $m_{biellette} = mb_2$

et $\overrightarrow{\delta^3}_{(biellette/G_2)}$: moment dynamique de la biellette par rapport à son centre de gravité G_2, exprimé dans le repère $(D, \vec{X_3}, \vec{Y_3}, \vec{Z_3})$.

3.3.2.1 CALCUL DU MOMENT DYNAMIQUE DE LA BIELLETTE.

En procédant de la même façon que pour la bielle (3.1.2.1) et sachant que la biellette admet deux plans de symétries qui sont $(\vec{X_3}, \vec{Y_3})$ et $(\vec{X_3}, \vec{Z_3})$
Alors il vient en appliquant [*] : $D = E = F = 0$

Et le tenseur d'inertie de la biellette s'écrit :

$$\overline{\overline{I}}(biellette/G_2)_{(G_2,\vec{X_3},\vec{Y_3},\vec{Z_3})} = \begin{Vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{Vmatrix}$$

où A, B, C sont les moments d'inertie de la biellette /G_2 par rapport aux axes $\vec{X_3}$, $\vec{Y_3}$ et $\vec{Z_3}$.

Et comme $\vec{\Omega}(\text{biellette}/_{(O,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)}) = \dot{\Psi}.\vec{Z}_0$

Alors le moment d'inertie s'écrit :

$$\overrightarrow{\Gamma^3}(\text{biellette}/G_2) = \overline{\overline{I}}_{\substack{(\text{biellette}/G_2)\\(G_2,\vec{X}_3,\vec{Y}_3,\vec{Z}_3)}} . \vec{\Omega}(\text{biellette}/_{(O,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)})$$

$$= \begin{Vmatrix} A & & 0 \\ & B & \\ 0 & & C \end{Vmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix} .$$

Alors $\overrightarrow{\sigma^3}(\text{biellette}/_{G_2}) = C.\dot{\Psi}.\vec{Z}_0$

posant $C = IZ2$

Et sachant que $IZ2$: moment d'inertie de la biellette par rapport à l'axe $\overrightarrow{G_2Z_0}$.

donc $\overrightarrow{\sigma^3}_{(\text{biellette}/_{G_2})} = IZ2.\dot{\Psi}.\vec{Z}_0$

et il vient :

$$\overrightarrow{\delta^3}(\text{biellette}/G_2) = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma^3}(\text{biellette}/G_2)\right)$$

$$= I\,Z_2 .\ddot{\Psi}.\vec{Z}_0 \qquad (25)$$

3.3.2.2 CALCUL DES MOMENTS DES FORCES APPLIQUEES A LA BIELLETTE/G_2

Puisque le moment dynamique est calculé par rapport au centre de gravité de la biellette, il faut ramener, les moments des forces extérieures appliquées à la biellette au centre de gravité G_2.

- Moment de la force $-\vec{FC}/G_2$

$$\vec{\mathcal{M}}_{-\vec{FC}/G2} = \vec{\mathcal{M}}_{-\vec{FC}/C} + \vec{G_2C} \wedge (-\vec{FC})$$

Et comme $-\vec{FC}$ passe par C alors :

$$\vec{\mathcal{M}}_{-\vec{FC}/C} = \vec{0}$$

Et il vient après avoir exprimé $\vec{G_2C}$ et $-\vec{FC}$ dans le repère $(O,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})$

$$\vec{\mathcal{M}}_{-\vec{FC}/G_2} = \vec{0} + \begin{pmatrix} -(L_2-L_{G2})\sin(\Psi+\alpha) \\ (L_2-L_{G2})\cos(\Psi+\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -XC \\ -YC \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

et
$$\vec{\mathcal{M}}_{-\vec{FC}/G2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (L_2-L_{G2})\sin(\Psi+\alpha)\,YC + (L_2-L_{G2})\cos(\Psi+\alpha)\,XC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \quad (26)$$

- Moment de la force $\vec{FD}/G_2$

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{FD}/G2} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{FD}/D} + \vec{G_2D} \wedge \vec{FD}$$

Comme $\vec{FD}$ passe par le point D on a alors :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{FD}/D} = \vec{0}$$

Et il vient après avoir exprimé $\vec{G_2D}$ et $\vec{FD}$ dans le repère $(O,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})$

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{FD}/G2} = \vec{0} + \begin{pmatrix} -L_{G2}\sin(\Psi+\alpha) \\ -L_{G2}\cos(\Psi+\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} XD \\ YD \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

et
$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{FD}/G_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{G2}\sin(\Psi+\alpha)\,YD + L_{G2}\cos(\Psi+\alpha)\,XD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \quad (27)$$

3.3.3 EQUATIONS SCALAIRES DE LA BIELLETTE

Pour avoir les equations scalaires, il suffit de faire la projection des equations vectorielles (I) et (II) sur les axes du repère $(0, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$

La projection de l'equation (I) sur le repère $(0, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ donne :

projection sur $\vec{X}_0$: $\quad mb_2 \ddot{X}_{G2} = -XC + XD$ (28)

" " $\vec{Y}_0$: $\quad mb_2 \ddot{Y}_{G2} = -YC + YD$ (29)

" " $\vec{Z}_0$: $\quad 0 = 0$ (30)

De même la projection de l'equation (II) sur le repère $(0, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ donne:

projection sur $\vec{X}_0$: $\quad 0 = 0$ (31)

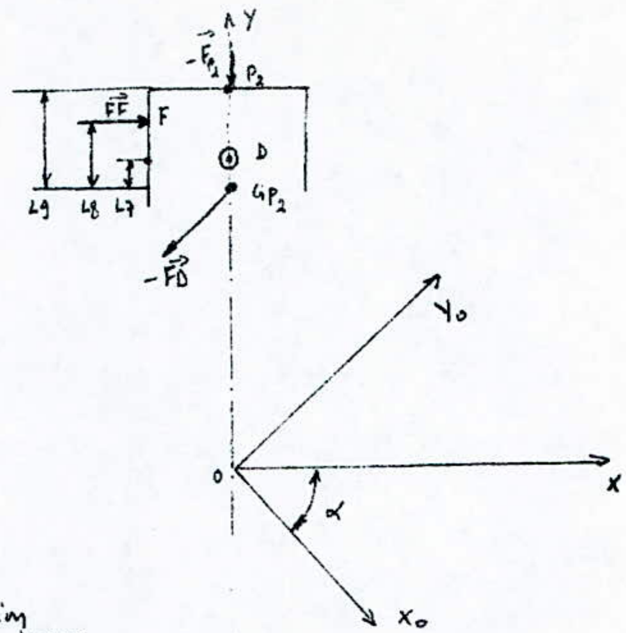
" $\vec{Y}_0$: $\quad 0 = 0$ (32)

" $\vec{Z}_0$: $\quad IZ_2 \cdot \ddot{\psi} = (L_2 - L_{G2}) \sin(\psi+\alpha)\, YC + (L_2 - L_{G2}) \cos(\psi+\alpha)\, XC + L_{G2} \sin(\psi+\alpha)\, YD + L_{G2} \cos(\psi+\alpha)\, XD.$ (33)

Conclusion : L'étude dynamique de la biellette nous ramène le système à huit équations et neuf inconnues.
Il faut donc faire l'étude dynamique du solide voisin pour rendre le nombre d'equations égal au nombre d'inconnues

3.4 ETUDE DYNAMIQUE DU PISTON 2

3.4.1 ANALYSE DES ACTIONS MECANIQUES APPLIQUÉES AU PISTON 2



G_{P_2} : centre de gravité piston 2.

P_2 : point d'application de la résultante des gaz

fig. 3.5 Analyse des actions appliquées au piston 2.

On isole le piston 2, il y a trois actions mécaniques appliquées à celui-ci

- L'action de la biellette au point D : τ_D
- L'action de la chemise 2 au point F : τ_F
- L'action des gaz au point P_2 : τ_{P_2}

La liaison du type verrou que nous avons au point D, nous permet d'écrire

$$\begin{cases} -\vec{F}_D \cdot \vec{Z}_0 = \vec{0} \\ -\mathcal{M}_D \cdot \vec{Z}_0 = \vec{0} \end{cases}$$

Et le torseur des actions mécaniques au point D se résume à :

$$\tau_D : \begin{cases} -\vec{F}_D \\ -\vec{\mathcal{M}}_D \end{cases}$$

où $\quad -\overrightarrow{FD} = \begin{pmatrix} -\overrightarrow{XD} \\ -\overrightarrow{YD} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{X_0} \\ \overrightarrow{Y_0} \\ \overrightarrow{Z_0} \end{pmatrix}$, et $\quad -\overrightarrow{m_D} = \overrightarrow{0}$

Au point F, il vient $\quad \tau_F : \begin{cases} \overrightarrow{FF} \\ \overrightarrow{m_F} \end{cases}$

En resonnant de la même manière que pour le piston 1, on saura que $\overrightarrow{FF}$ a une seule composante portée par l'axe $\overrightarrow{X}$, et comme le repère $(0, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ est une rotation autour de l'axe $\vec{Z}$ d'un angle α du repère $(0, \vec{X_0}, \vec{Y_0}, \vec{Z_0})$. Il vient alors :

$$\overrightarrow{FF} = \begin{pmatrix} XF \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XF \cos\alpha \\ XF \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \text{, et } \quad m_F = \vec{0}$$

Avec les mêmes hypothèses que pour le piston 1 (voir page. 29)
On aura alors :

$$-\overrightarrow{FP_2}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_{P_2}(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{pmatrix} \quad \text{où}$$

$$Y_{P_2} = \left(P(\theta + D) - P_0\right) \times S \quad \text{où}$$

$P(\theta+D)$ pression du au gaz dans le piston 2

D : déphasage d'allumage par rapport au piston 1

S : section du cylindre.

P_0 : pression atmosphérique

Et en appliquant la formule de passage du repère $(0, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ au repère $(0, \vec{X_0}, \vec{Y_0}, \vec{Z_0})$, il vient

$$-\overrightarrow{F_{P_2}}(\theta) = \begin{pmatrix} Y_{P_2}(\theta) \sin\alpha \\ -Y_{P_2}(\theta) \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

3.4.2 EQUATIONS VECTORIELLES FONDAMENTALES DU PISTON 2

Piston supposé solide indéformable, son mouvement est une translation sur l'axe $\vec{Y}$, donc tous ses points ont même vitesse et même accélération. En particulier le point G_{P_2}, qui a la même accélération que le point D.

$$\overrightarrow{\Gamma}_{G_{P_2}/(O,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)} = \overrightarrow{\Gamma}_{G_{P_2}}(D,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0) \qquad (\text{Voir. } (23).) \qquad (34)$$

3.4.2.1 CALCUL DU MOMENT DYNAMIQUE DU PISTON 2.

moment cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma^{\circ}(\text{piston } 2/G_{P_2})} = \overline{\overline{I}}_{(\text{piston } 2/G_{P_2})\,(G_{P_2},\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)} \cdot \overrightarrow{\Omega(\text{piston } 2/(O,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0))}$$

Et comme le piston 2 n'a aucune rotation dans le repère $(O,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)$ il vient alors :

$$\overrightarrow{\Omega(\text{pist } 2/(O,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0))} = \vec{O}$$

et $\overrightarrow{\sigma^{\circ}(\text{pist } 2/G_{P_2})} = \vec{O}$

et finalement : $\overrightarrow{\delta^{\circ}(\text{pist } 2/G_{P_2})} = \vec{O}$

Donc le moment dynamique du piston 2 $/G_{P_2}$ dans le repère $(O,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)$ est nul.

3.4.2.2. CALCUL DES MOMENTS DES FORCES APPLIQUÉES AU PISTON 2 / G_{P_2}.

- Moment de la force $-FD/G_{P_2}$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{-\vec{FD}/G_{P_2}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{-\vec{FD}/D} + \overrightarrow{G_{P_2}D} \wedge (-\vec{FD})$$

Et comme $(-\vec{FD})$ passe par le point D, alors :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{-FD/D} = \vec{O}.$$

Et après avoir exprimé $\vec{GP_2}$ et $-\vec{FD}$ dans le repère $(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})$ il vient,

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{-\vec{FD}/GP_2} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L7\cos\alpha \\ -L7\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -XD \\ -YD \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

et $$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{-\vec{FD}/GP_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L7\sin\alpha\ XD + L7\cos\alpha\ YD \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

– Moment de la force $\vec{FF}/G_{P_2}$ dans le repère $(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})$.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{FF}/G_{P_2}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{FF}/F} + \overrightarrow{G_{P_2}F} \wedge \overrightarrow{FF}$$

Comme $\vec{FF}$ passe par le point F alors :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{FF}/F} = 0$$

Et après avoir exprimé $\overrightarrow{G_{P_2}F}$ et $\vec{FF}$ dans le repère $(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})$ il vient :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{FF}/G_{P_2}} = \vec{0} + \begin{pmatrix} D/_2 \sin\alpha + L8\cos\alpha \\ -D/_2\cos\alpha + L8\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} XF\cos\alpha \\ XF\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

Alors il vient :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{FF}/G_{P_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (D/_2\sin\alpha + L8\cos\alpha)\sin\alpha\ XF - (-D/_2\cos\alpha + L8\sin\alpha)\cos\alpha\ XF \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{D}{2}\sin^2\alpha + L8\cos\sin\alpha + D/_2\cos^2\alpha - L8\sin\alpha\cos\alpha\right) XF \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{FF}/G_{P_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D/2 \cdot XF \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix} \qquad (36)$$

- Moment de la force $-F_{P_2}(\theta) / G_{P_2}$.

$$\vec{\mathcal{M}}_{-F_{P_2}(\theta)/G_{P_2}} = \vec{\mathcal{M}}_{-\vec{F}_{P_2}(\theta)/P_2} + \vec{G_{P_2}P_2} \wedge \left(-\vec{F}_{P_2}(\theta)\right)$$

Et comme $\left(-\vec{F}_{P_2}(\theta)\right)$ passe par le point P_2, alors :

$$\vec{\mathcal{M}}_{-\vec{F}_{P_2}(\theta)/P_2} = \vec{0}$$

Et après avoir exprimé les vecteurs $\vec{G_{P_2}P_2}$ et $-\vec{F}_{P_2}(\theta)$ dans le repère $(0,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)$ il vient alors :

$$\vec{\mathcal{M}}_{-F_{P_2}(\theta)/G_{P_2}} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L_g \cos\alpha \\ L_g \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Y_{P_2}(\theta) \sin\alpha \\ -Y_{P_2}(\theta) \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ - L_g\, Y_{P_2}(\theta) \cos^2\alpha - L_g\, Y_{P_2}(\theta) \sin^2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{-\vec{F}_{P_2}(\theta)/G_{P_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ - L_g\, Y_{P_2}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix} \qquad (37)$$

où $\quad Y_{P_2}(\theta) = \frac{\pi D^2}{4} P_0$.

3.4.3 EQUATIONS SCALAIRES DU PISTON 2

Par cela, il faut faire la projection des équations vectorielles sur les axes du repère $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$

La projection de l'équation (I) sur le repère $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ donne :

projection sur $\vec{X}_0$: $\quad m_{p_2}\, \ddot{X}_D = -XD + XF \cos\alpha \qquad$ (i)

" $\vec{Y}_0$: $\quad m_{p_2}\, \ddot{Y}_D = -YD + XF \sin\alpha \qquad$ (ii)

$\vec{Z}_0$: $\quad 0 = 0 \qquad$ (38)

La projection de l'équation (II) sur le repère $(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ donne :

(39)

projection sur $\vec{X}_0$: $\quad 0 = 0$

(40)

" $\vec{Y}_0$: $\quad 0 = 0$

" Z_0 : $\quad 0 = L_7 \sin\alpha\, XD + L_7 \cos\alpha\, YD + \frac{D}{2}\, XF - L_9\, Y_{P_2}(\theta)$

(41)

Conclusion :

De ce système d'équation on va prendre uniquement les deux equations (i) et (ii)

Et elle suffise pour rendre le système globale resolvable puisqu'il devient un système de dix equations à dix inconnues.

Et pour pouvoir determiner l'action sur les paliers il faut faire l'étude dynamique de la manivelle.

3.5 ETUDE DYNAMIQUE DE LA MANIVELLE

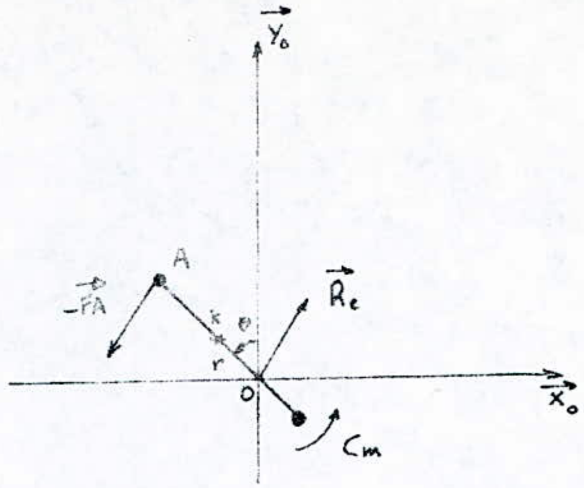


fig : 3.6 Représentation des actions mécaniques appliquées à la manivelle.

où
- r : Rayon donnant position de K à partir de O
- K : Centre de gravité de la manivelle
- A : Articulation bielle - manivelle (maneton)
- O : palier du vilebrequin (tourillon).

3.5.1 ANALYSE DES ACTIONS MECANIQUES APPLIQUEES A LA MANIVELLE.

On isole la manivelle, il ya deux actions mecaniques appliquées ā celle ci

- L'action de la bielle sur le maneton au point A : τ_A
- L'action des paliers sur la manivelle au point O : τ_0

La liaison du type verrou que nous avons en A, permet d'ecrire :

$$\begin{cases} -\vec{FA} \cdot \vec{Z_o} = \vec{0} \\ -\vec{m}_A \cdot \vec{Z_o} = \vec{0} \end{cases}$$

Donc le torseur au point A se résume à :

$$\tau_A : \begin{cases} -\vec{F_A} \\ -\vec{m}_A \end{cases}$$

où $$-\vec{FA} = \begin{pmatrix} -XA \\ -YA \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{m}_A = \vec{0}$$

Demême que pour le point A, en B, nous avons une liaison du type verrou donc :

$$\tau_B = \begin{cases} \vec{R_e} \\ \vec{m}_e \end{cases}$$

où $$\vec{R_e} = \begin{Bmatrix} \vec{X_e} \\ \vec{Y_e} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{m}_e = \vec{0}$$

3.5.2 EQUATIONS VECTORIELLES FONDAMENTALES DE LA MANIVELLE.

Nous appliquons à la manivelle les equations fondamentales de la dynamique :

$$\begin{cases} m_m \cdot \vec{\Gamma}_{K/(0,\vec{X_0},\vec{Y_0},\vec{Z_0})} = \sum \vec{F_{ext}}_{/manivelle} & (I) \\ \overrightarrow{\delta^1 (manivelle/_K)} = \overrightarrow{\sum m}_{F_{ext}/K} & (II) \end{cases}$$

où $m_m = m$

et $\overrightarrow{\delta^1 (manivelle/K)}$: moment dynamique de la manivelle par rapport à son centre de gravité K, exprimé dans le repère $(0, \vec{X_1}, \vec{Y_1}, \vec{Z_1})$.

3.5.2.1 CALCUL DU MOMENT DYNAMIQUE DE LA MANIVELLE

La manivelle que nous avons choisie possède deux plans de symetries donc les produits d'inertie sont nuls, ce qui nous permet d'écrire

$$\underset{(K,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}{I\ (\text{maniv}/K)} = \begin{Vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{Vmatrix}$$

Comme $\vec{\Omega}\ (\text{mani}/0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_1} \\ \vec{Y_1} \\ \vec{Z_1} \end{pmatrix} = \omega . \vec{Z_0}$ avec $\vec{Z_1} = \vec{Z_0}$

Le moment cinétique de la manivelle devient :

$$\vec{\sigma}'(m/K) = \begin{Vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{Vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_1} \\ \vec{Y_1} \\ \vec{Z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C.\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_1} \\ \vec{Y_1} \\ \vec{Z_1} \end{pmatrix}$$

Le moment dynamique est nul car $\frac{d\omega}{dt} = 0$

3.5.2.2 CALCUL DES MOMENTS DES FORCES APPLIQUÉES A LA MANIVELLE.

On ramène les moments des forces exterieures au centre de gravité K de la manivelle

Moment de $-\vec{FA}$

$$\vec{\mathcal{M}}_{(-\vec{FA})/K} = \vec{\mathcal{M}}_{(-\vec{FA})/A} + \vec{KA} \wedge (-\vec{FA})$$

$$= \vec{0} + (R-r)\,\vec{Y_1} \wedge \begin{pmatrix} -XA \\ -YA \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{pmatrix}$$

avec $\vec{Y_1} = -\sin\theta\ \vec{X_0} + \cos\theta\ \vec{Y_0}$

Alors :

$$\vec{\mathcal{M}}_{-\vec{F}A/K} = \begin{pmatrix} -(R-r)\sin\theta \\ (R-r)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -XA \\ -YA \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (R-r)(XA\cos\theta + Y_A\sin\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix}$$

_ Moment de $\vec{R}_e$:

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{R}_e/K} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{R}_e/O} + \vec{KO} \wedge \vec{R}_e$$

$$= \vec{0} - r\vec{Y}_1 \wedge \begin{pmatrix} X_e \\ Y_e \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix}$$

avec $\vec{Y}_1 = -\sin\theta\,\vec{X}_0 + \cos\theta\,\vec{Y}_0$

donc :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{R}_e/K} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ -r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \vec{X}_e \\ \vec{Y}_e \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{R}_e/K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r X_e\cos\theta + rY_e\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{pmatrix}$$

3.5.2.3 EQUATIONS SCALAIRES DE LA MANIVELLE.

On procède de la même façon que pour les autre organes

La projection de l'equation (I) donne :

sur $\vec{X_0}$: $\quad m.\omega^2.r.\sin\theta = -XA + Xe \quad$ (i)

sur $\vec{Y_0}$: $\quad -m.\omega^2.r.\cos\theta = -YA + Ye \quad$ (ii)

" $\vec{Z_0}$: $\quad 0 = 0$

La projection de l'equation (II) donne :

sur $\vec{X_0}$: $\quad 0 = 0$

" $\vec{Y_0}$: $\quad 0 = 0$

" $\vec{Z_0}$: $\quad 0 = (R-r)(XA\cos\theta + YA\sin\theta) + r(X_e\cos\theta + Y_e\sin\theta) + C_m$

Conclusion : pour le calcul de Xe et Ye, il suffit de connaitre XA et YA et injecter dans les equations (i) et (ii)

En fin de compte on obtient un système d'equations (12,12) Qu'on va resoudre par la suite.

4. DETERMINATION DES ACTIONS MECANIQUES APPLIQUEES A L'EMBIELLAGE DU MOTEUR

Qui sont, $\vec{FA}$, $\vec{FB}$, $\vec{FC}$, $\vec{FD}$, $\vec{FE}$, $\vec{FF}$, $\vec{Rc}$, définit par leurs composantes respectives (XA, YA); (XB, YB); (XC, YC); (XD, YD); (Xe, Ye); XE; XF.

Pour cela on rassemblera les équations de chaque organe composant l'embiellage du moteur, en un système de 12 équation à 12 inconnues.

Et on entamera la résolution de ce système, en prenant la précaution de désigner les facteurs par des variables qu'on definira par la suite, dans un but de simplification et de commodité pour le calcul et le traitement informatique.

Le système d'équations obtenu est :

Bielle :
$$\begin{cases} mb_1 \ddot{X}_{G1} = XA + XB + XC \\ mb_1 \ddot{Y}_{G1} = YA + YB + YC \\ IZ_1 \ddot{\varphi} = (L_{G1} - L_1)(XA\cos\varphi + YA\sin\varphi) + L_{G1}(XB\cos\varphi + YB\sin\varphi) + \left(L_3 \sin(\varphi+\beta) - (L_1 - L_{G1})\sin\varphi\right) YC \\ \qquad + \left(L_3\cos(\varphi+\beta) - (L_1 - L_{G1})\cos\varphi\right) XC \end{cases}$$

Piston 1 :
$$\begin{cases} 0 = -XB + XE \\ mp_1 \ddot{Y}_B = -YB - YP_1(\theta) \end{cases}$$

Biellette :
$$\begin{cases} mb_2 \ddot{X}_{G2} = -XC + XD \\ mb_2 \ddot{Y}_{G2} = -YC + YD \\ IZ_2 \ddot{\psi} = (L_2 - L_{G2})\sin(\psi+\alpha) YC + (L_2 - L_{G2})\cos(\psi+\alpha) XC + L_{G2}\sin(\psi+\alpha) YD + L_{G2}\cos(\psi+\alpha) XD \end{cases}$$

Piston 2 :
$$\begin{cases} mP_2 \ddot{X}_D = -XD + XF\cos\alpha + YP_2(\theta)\sin\alpha \\ mP_2 \ddot{Y}_D = -YD + XF\sin\alpha - YP_2(\theta)\cos\alpha \end{cases}$$

Manivelle :
$$\begin{cases} m\omega^2 r\sin\theta = -XA + Xe \\ -m\omega^2 r\cos\theta = -YA + Ye \end{cases}$$

Ainsi on voit qu'on a un système de 12 équations à 12 inconnues qui sont :

$$\underbrace{(XA, YA)}_{FA} \; ; \; \underbrace{(XB, YB)}_{FB} \; ; \; \underbrace{(XC, YC)}_{FC} \; ; \; \underbrace{(XD, YD)}_{FD} \; ; \; \underbrace{(Xe, Ye)}_{Re} \; ; \; \underbrace{XE}_{FE} \; ; \; \underbrace{XF}_{FF}$$

Pour la résolution du système posons :

$N_1 = mb_1 \ddot{x}_{G1}$

$N_2 = mb_1 \ddot{y}_{G1}$

$N_3 = IZ_1 \ddot{\varphi}$

$N_4 = mp_1 \ddot{Y}_B$

$N_5 = -Y_{P_1}(\theta) = -S(P(\theta) - P_0)$

$N_6 = IZ_2 \ddot{\Psi}$

$N_7 = mb_2 \ddot{x}_{G2}$

$N_8 = mb_2 \ddot{y}_{G2}$

$N_9 = mp_2 \ddot{y}_D$

$N_{10} = mp_2 \ddot{x}_D$

$N_{11} = m \cdot \omega^2 \cdot r.\sin\theta$

$N_{12} = Y_{P_2}(\theta) = S.(P(\theta + D) - P_0)$

$N_{13} = -m.\omega^2.r.\cos\theta$

$M_1 = (L_2 - L_{G2}) \sin(\Psi + \alpha)$

$M_2 = (L_2 - L_{G2}) \cos(\Psi + \alpha)$

$M_3 = L_{G2} \sin(\Psi + \alpha)$

$M_4 = L_{G2} \cos(\Psi + \alpha)$

$K_1 = (L_{G1} - L_1) \cos\varphi$

$K_2 = (L_{G1} - L_1) \sin\varphi$

$K_3 = L_{G1} \cos\varphi$

$K_4 = L_{G1} \sin\varphi$

$K_5 = L_3 \cos(\varphi + \beta) - (L_1 - L_{G1}) \cos\varphi$

$K_6 = L_3 \sin(\varphi + \beta) - (L_1 - L_{G1}) \sin\varphi$

Pour l'expression de N_7, N_8, N_9, N_{10}

On pose :

$T_1 = R\omega^2 \sin\theta$

$T_2 = L_3 (\ddot{\varphi} \cos(\varphi + \beta) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \beta))$

$T_3 = \ddot{\Psi} \cos(\Psi + \alpha) - \dot{\Psi}^2 \sin(\Psi + \alpha)$

Et on a :

$N_7 = mb_2 . (T_1 + T_2 + (L_2 - L_{G2}) T_3)$

$N_{10} = mp_2 . (T_1 + T_2 + L_2 T_3)$

On pose aussi :

$S_1 = -R.\omega^2.\cos\theta$

$S_2 = L_3 (\ddot{\varphi} \sin(\varphi + \beta) + \dot{\varphi}^2 (\varphi + \beta))$

$S_3 = \ddot{\Psi} \sin(\Psi + \alpha) + \dot{\Psi}^2 \cos(\Psi + \alpha)$

On aura

$N_8 = mb_2 . (S_1 + S_2 + (L_2 - L_{G2}) S_3)$

$N_9 = mp_2 (S_1 + S_2 + L_2 . S_3)$

Et le système devient :

$$
(\mathrm{I}) \quad \begin{cases}
N_1 = XA + XB + XC & (a) \\
N_2 = YA + YB + YC & (b) \\
N_3 = K_1 XA + K_2 YA + K_3 XB + K_4 YB + K_5 XC + K_6 YC & (c) \\
N_4 = N_5 - YB & (d) \\
N_7 = -XC + XD & (e) \\
N_8 = -YC + YD & (f) \\
N_6 = M_1 YC + M_2 XC + M_3 YD + M_4 XD & (g) \\
N_{10} = -XD + XF\cos\alpha + N_{12}\sin\alpha & (h) \\
N_9 = -YD + XF\sin\alpha - N_{12}\cos\alpha & (i) \\
N_{11} = -XA + XE & (j) \\
N_{13} = -YA + YE & (k) \\
0 = -XB + XE & (l)
\end{cases}
$$

Pour résoudre le système (I) on procède de la manière suivante.

4.1. Determination de YB :

- de l'équation (d) on tire YB

$$YB = N_5 - N_4$$

4.2. Determination de XD.

- du système d'équation $\begin{cases}(h)\\(i)\end{cases}$, on aura après avoir multiplier par $\sin\alpha$ les deux équation et en faisant la Σ

Il viendra :

$$
\begin{cases}
XD\sin\alpha - YD\cos\alpha = N_9\cos\alpha - N_{10}\sin\alpha + N_{12}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) & \\
XD\sin\alpha - YD\cos\alpha = N_9\cos\alpha - N_{10}\sin\alpha + N_{12} & (a')
\end{cases}
$$

- du système $\begin{cases}(e)\\(f)\end{cases}$ on a : $\begin{cases} XC = XD - N_7 \\ YC = YD - N_8 \end{cases}$

On injecte ces deux valeurs dans l'équation (g), on obtient une nouvelle équation en XD et YD.

$$N_6 = M_1 (YD - N_8) + M_2 (XD - N_7) + M_4 XD + M_3 YD$$
$$= (M_1 + M_3) YD + (M_2 + M_4) XD - M_1 N_8 - M_2 N_7 \qquad (b')$$

Et finalement avec l'équation (a') trouvée au début on aura un système de deux équations à deux inconnues XD et YD

$$\text{II} \begin{cases} \sin\alpha \, XD - \cos\alpha \, YD = N_9 \cos\alpha - N_{10} \sin\alpha + N_2 \\ (M_2 + M_4) XD + (M_1 + M_3) YD = N_6 + M_1 N_8 + M_2 N_7 \end{cases}$$

Le determinant de ce système est :

$$\mathrm{Det}(\text{II}) = \begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ (M_2+M_4) & (M_1+M_3) \end{vmatrix} = (M_1+M_3)\sin\alpha + (M_2+M_4)\cos\alpha$$

En remplaçant M_1, M_2, M_3 et M_4 par leurs valeures on obtient :

$$\mathrm{Det}(\text{II}) = \left[(L_2 - L_{42}) \sin(\Psi+\alpha) + L_{42} \sin(\Psi+\alpha)\right] \sin\alpha + \left[(L_2 - L_{42}) \cos(\Psi+\alpha) + L_{42} \cos(\Psi+\alpha)\right] \cos\alpha$$

$$= L_2 \sin\alpha \sin(\Psi+\alpha) + L_2 \cos\alpha \cos(\Psi+\alpha)$$

finalement :

$$\mathrm{Det}(\text{II}) = L_2 \left[\sin\alpha \sin(\Psi+\alpha) + \cos\alpha \cos(\Psi+\alpha)\right]$$

$$Det(\mathrm{II}) = L_2 \left(\sin\alpha \sin(\Psi+\alpha) + \cos\alpha \cos(\Psi+\alpha) \right)$$

Discutons cette équation et voyons dans quels cas le $Det(\mathrm{II})$ s'annule.
Et quelle sera sa signification physique.

1er cas : $\quad L_2 = 0 \Longrightarrow Det(\mathrm{II}) = 0$

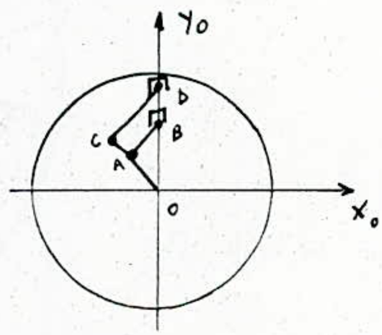
Ce cas n'est pas interessant puisque on pose que la longueur de la bielle comme etant nulle

2^{em} cas : $\quad \sin\alpha \sin(\Psi+\alpha) + \cos\alpha \cos(\Psi+\alpha) = 0$

1er sous cas : $\alpha = 0$ et $\Psi = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad$ où $k = 0, 1, 2, \ldots$

Alors $\sin\alpha = 0$ et $\cos(\Psi+\alpha) = 0 \Rightarrow Det(\mathrm{II}) = 0$

Ce qui nous donnerai une configuration pareille du système bielle-biellette

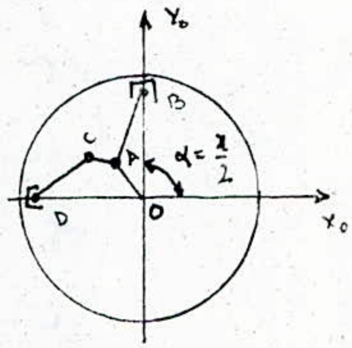


Et ce qui est impossible car si $\alpha = 0$, Ψ ne peut être égale à $\frac{\pi}{2} + k\pi$ lors du fonctionnement du moteur car Ψ est au alentour de π.

2^{em} Sous cas : $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\Psi = \frac{k\pi}{2}$ et $k \in \mathbb{Z}^*$

Alors : $\cos\alpha = 0$ et $\sin(\Psi + \alpha) = 0$

Et $Det(\mathrm{II}) = 0$ ce qui nous donne la configuration suivante



Et on voit que si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, alors Ψ ne peut être égale à $k\pi/2$ car Ψ prend des valeurs proche de π lors du fonctionnement du moteur

- En conclusion, on a demontrer que le determinant du systeme (II) ne peut être nul, et donc le système est resolvable.

Et

$$X_D = \frac{\begin{vmatrix} N_9 \cos\alpha - N_{10} \sin\alpha + N_{12} & -\cos\alpha \\ N_6 + \Pi_1 N_8 + \Pi_2 N_7 & L_2 \sin(\Psi+\alpha) \end{vmatrix}}{L_2 (\sin\alpha \sin(\Psi+\alpha) + \cos\alpha \cos(\Psi+\alpha))}$$

$$X_D = \frac{(N_9 \cos\alpha - N_{10} \sin\alpha + N_{12})(L_2 \sin(\Psi+\alpha)) + \cos\alpha (N_6 + \Pi_1 N_8 + \Pi_2 N_7)}{L_2 (\sin\alpha \sin(\Psi+\alpha) + \cos\alpha \cos(\Psi+\alpha))}$$

Et ainsi on a calculé X_D

Et de l'équation (b') on tire la valeur de YD

$$YD = \frac{N_6 + M_1 N_8 + M_2 N_7 - (L_2 \cos(\psi+\alpha)) \times D}{L_2 \sin(\psi+\alpha)}$$

4.3. Calcul de XC

De l'équation (e) on tire,

$$XC = XD - N_7$$

4.4. Calcul de YC

De l'équation (f) on tire,

$$YC = YD - N_8$$

4.5. Calcul de YA

De l'équation (b) on tire

$$YA = N_2 - YB - YC$$

4.6. Calcul de XF

De l'équation (h) on tire

$$XF = \frac{(N_{10} + XD - N_{12} \sin\alpha)}{\cos\alpha}$$

4.7. Calcul de Ye

De l'équation (k) on tire

$$Ye = N_{13} + YA$$

4.8. Calcul de XB

De l'équation (a) on tire

$$XA = N_1 - XB - XC$$

On remplace dans l'equation (c), on obtient

$$N_3 = K_1(N_1 - XB - XC) + K_2\,YA + K_3\,XB + K_4\,YB + K_5\,XC + K_6\,YC$$

$$N_3 = K_1 N_1 - K_1 XB - K_1 XC + K_2\,YA + K_3\,XB + K_4\,YB + K_5\,XC + K_6\,YC$$

Et on tire la valeur de XB en fonction de XC, YA, YB, YC déjas calculées

$$XB = \frac{(K_1 N_1 + (K_5 - K_1)X_C + K_2\,YA + K_4\,YB + K_6\,YC - N_3)}{K_1 - K_3}$$

4.9. Calcul de XA

De l'équation (a) on a:

$$XA = N_1 - XB - XC$$

4.10. Calcul de X_e

De l'équation (j) on tire

$$X_e = N_{11} + XA$$

4.11. Calcul de XE

De l'équation (l) on tire :

$$XE = XB$$

Et ainsi on a résolu le système, qui aboutit à la determination de XA, YA, XB, YB, XC, YC, XD, YD, XE, XF, X_e, Y_e en fonction de θ et des autres paramètres géométriques fixés du système d'embiellage du moteur bielle-biellette.

Et on obtient les resultats suivants :

$$YB = N_5 - N_4$$

$$XD = \frac{(N_9 \cos\alpha - N_{10} \sin\alpha + N_{12}) \cdot L_2 \cdot \sin(\psi+\alpha) + \cos\alpha \, (N_6 + M_1 N_8 + M_2 N_7)}{L_2 \, (\sin\alpha \sin(\psi+\alpha) + \cos\alpha \cdot \cos(\psi+\alpha))}$$

$$YD = \frac{N_6 + M_1 N_8 + M_2 N_7 - (L_2 \cdot \cos(\psi+\alpha)) \, XD}{L_2 \sin(\psi+\alpha)}$$

$$XC = -N_7 + XD$$

$$YC = -N_8 + YD$$

$$YA = N_2 - YB - YC$$

$$XF = \frac{N_{10} + XD - N_{12} \sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$Ye = N_{13} + YA$$

$$XA = N_1 - XB - XC$$

$$XB = \frac{K_1 N_1 + (K_5 - K_1) XC + K_2 YA + K_4 YB + K_6 YC - N_3}{K_1 - K_3}$$

$$XA = N_1 - XB - XC$$

$$Xe = N_{11} + XA$$

$$XE = XB$$

Cet ordre est l'ordre de résolution lors du déroulement du programme pour le calcul.

Et il vient dans le repère fixe $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\|\vec{FA}\| = (XA^2 + YA^2)^{1/2}$$

$$\|\vec{FB}\| = (XB^2 + YB^2)^{1/2}$$

$$\|\vec{FC}\| = (XC^2 + YC^2)^{1/2}$$

$$\|\vec{FD}\| = (XD^2 + YD^2)^{1/2}$$

$$\|\vec{FE}\| = XE$$

$$\|\vec{FF}\| = \vec{XF}$$

$$\|\vec{Re}\| = (X_e^2 + Y_e^2)^{1/2}$$

Les coordonnées ainsi que les normes des vecteurs forces

FA, FB, FC, FD, FE, FF, Re

peuvent êtres retrouvées dans les repères liés respectifs, en utilisant les formules de passage, établit au début de notre étude, dans le but de dimensionner et de repérer les points de graissage aux niveaux des articulations ...

Dans la nécessité de determiner la masse de la bielle m b1,
et son moment d'inertie / Z_0 : I_{Z1}.
On avait le choix entre les methodes suivantes

- Graphique : dessine la bielle et on fait la calcul de volume par la methode des aires et on determine sa masse ainssi que son moment d'inertie

- pratique : on conçoit la bielle et on fait son pesage ainsi que la determination du moment d'inertie par pendulation

Nous on a opté pour la deuxieme méthode, mais vu la difficulté pour realiser la bielle.
On a réalisé un modèle dans une matière facilement usinable (bois par exemple) et on a determiné sa masse et son moment d'inertie / Z_0 et connaissant sa densité et connaissant la densité de la matière de la bielle réelle on a determiné ainsi sa masse et son moment d'inertie / Z et ceci dans un domaine d'incertitude à discuter.
Toutefois il faut savoir que même si on a réalisé la bielle par moulage ceci n'est toujours pas la bielle réelle car elle son conçue par deformation plastique (forgeage ou matriçage) à chaud.

5. DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES PHYSIQUES DE LA BIELLE

Pour résoudre le système d'equations, il faut connaître

m_{b1} : masse de la bielle

L_1 : longueur de la bielle

I_{Z1} : qui est le moment d'inertie de la bielle par rapport à son centre de gravité G_1 par rapport à l'axe $\vec{Z}_L = \vec{Z}_0$

Si nous n'avons que le plan de la bielle, il faut obligatoirement passer par une décomposition en un nombre finit d'éléments et faire un calcul préalable de volume. Si la bielle existe physiquement, on peut procéder par pesée et pendulage, et c'est le cas considéré.

5.1 Masse de la bielle

La bielle assemblée est composée du corps de bielle avec sa bague de pied de bielle, du chapeau de bielle, des deux demi-coussinets de tête de bielle, des deux vis et des deux écrous

On procède par pesée simple, on aura m_{b1} [kg]

5.2 Position du centre de gravité G_1

On détermine par pesée la masse de la tête de bielle m_1 à l'aide d'une balance (fig. 5.1):

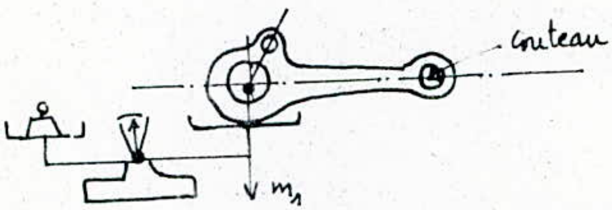


fig. 5.1. Masse de la tête de bielle

De même pour la masse du pied de bielle m_2 (fig. 5.2)

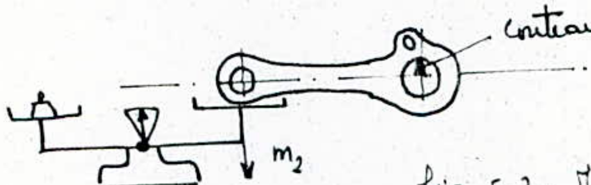


fig. 5.2. Masse du pied de bielle

La position du centre de gravité de la bielle à partir du pied de bielle sera (fig. 5.3) :

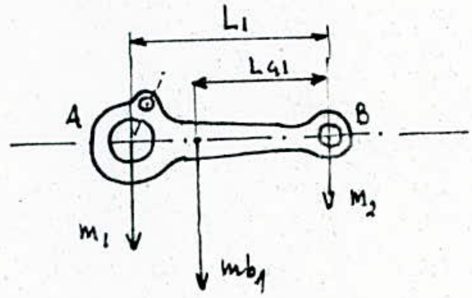


fig. 5.3. Position du centre de gravité de la bielle

Après avoir vérifié que $m_1 + m_2 = mb_1$ on aura après calcul par les moments/B

$$m_1 L_1 = m_{b_1} L_{G1} \implies L_{G1} = L_1 \frac{m_1}{mb_1}$$

5.3 Moment d'inertie I_{Z1} de la bielle

Le moment d'inertie sur l'axe Z_0 de la bielle par rapport à son centre d'inertie est déterminé par pendulage autour du point B' (fig. 5.3).

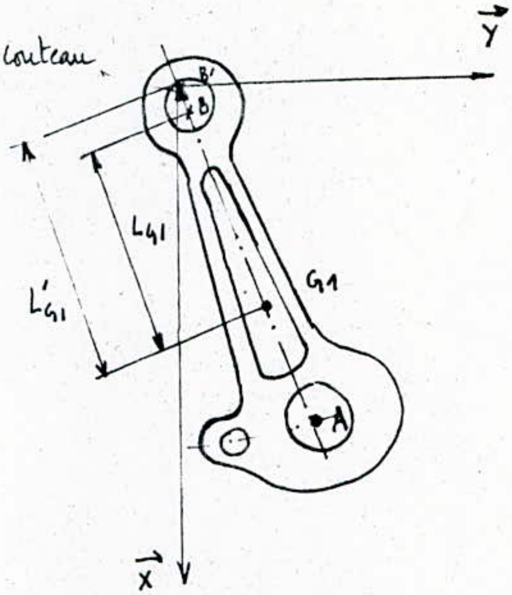


fig. 5.3 Mesure du moment d'inertie par pendulage

Si on prend la précaution de donner à la bielle de petites oscillations, on peut utiliser la formule donnant la période d'un pendule pesant trouvée lors de l'étude des pendules
On mesure le nombre d'oscillation pendant 1 minute et on trouve la période d'une oscillation [s].
La période du pendule pesant est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{B'}}{m_{b1} L'_{G1}\, g}} \Rightarrow I_{B'} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 m_{b1} L'_{G1}\, g \qquad [kg \cdot m^2]$$

Pour ramener le moment d'inertie au centre de gravité on utilise la formule de Hygens:

$$I_{Z1} = I_{B'} - m_{b1} L'^{2}_{G1} \qquad [kg \cdot m^2]$$

On procède de la même pour la biellette.

Avant d'entamer l'étude thermodynamique on a fait les suppositions suivantes :

- Les pistons 1 et 2 ont les mêmes caractéristiques géométriques (diamètres, hauteur, ...)
- Les mêmes quantités de mélanges air - combustible entrent dans les deux chambres de combustion.
- Les deux chambres de combustion travaillent dans les mêmes conditions de pression et de températures.

Il faut savoir que le déplacement des deux pistons n'est pas le meme et ceci à cause de certaines caractéristiques géométriques qui sont differentes.
En effet au P.H.H le piston 1 sera a une distance (L_1+R) du centre du vilebrequin O.
Tandis que dans le même cas le piston 2 sera à une distance de L_2+L_3+R de O.
Et le déplacement des deux pistons s'exprime respectivement en fonction de ces distances.

. Dans la suite on fait l'étude thermodynamique pour le piston i où i est l'indice du piston 1 ou 2.

6 ETUDE THERMODYNAMIQUE DU MOTEUR

Le but de l'étude thermodynamique est de determiner l'évolution de la pression du cycle en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin. Pour cela on se base sur le cycle quasi - réel.

6.1 CYCLE QUASI-REEL

Cycle : C'est l'ensemble des evolution que subit une masse du mélange air - essence depuis son entrée dans le cycle jusqu'à sa sortie dans l'atmosphère avec variation de volume, de pression et de température

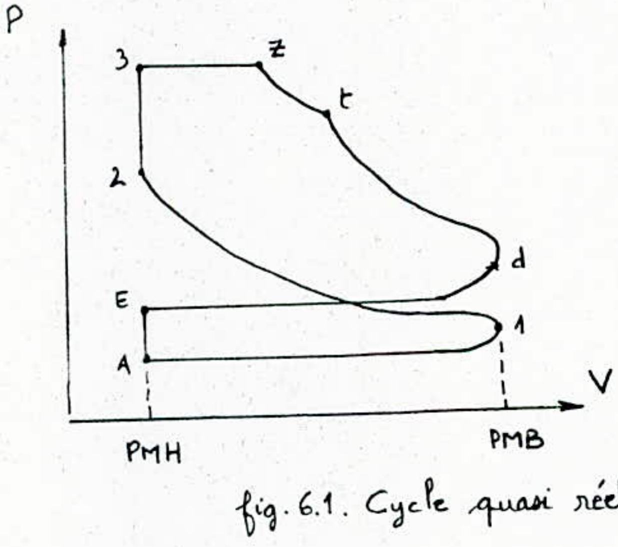


fig. 6.1. Cycle quasi réel.

6.2 DIFFERENTES PHASES DU CYCLE QUASI - REEL

Les phases principales du cycle quasi - réel sont :

A.1 Admission à pression constante

1-2 Compression polytropique

2-3 Combustion à volume constant

3-Z Combustion à pression constante

Z-t détente isothermique

t-d détente polytropique

d-E échappement à pression constante.

6.3 EXPRESSION DE LA PRESSION PENDANT LES PHASES DU CYCLE

a. Admission :

En vu d'établir une relation matématique simple permettant la détermination de la pression pendant la phase d'admission. On doit prendre les suppositions suivantes.

- Gaz parfait
- écoulement isentropique
- admission isobarique
- l'ouverture de la soupape d'admission et la fermeture de la soupape d'échappement se font au point mort haut.

Ce qui donne

$$P_A = 1,03\ P_o \left[1 - \frac{N^2}{1,25 \cdot 10^8} \left(\frac{\varepsilon - 0,5}{\varepsilon - 1} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Avec.

P_o : pression atmosphérique en [atm]

N : Vitesse de rotation du vilebrequin en [tr/mn]

ε : taux de compression du moteur

γ : coefficient adiabatique

P_A : Pression admission en [atm]

b: Compression

La compression a lieu entre le PMB et le PMH du piston considéré son évolution est polytropique d'exposant constant.
Connaissant les paramètres (pression et volume) en fin de l'admission l'equation d'état de la thermodynamique donne :

$$P_A V_A^{\gamma c} = P_{ci} V_i^{\gamma c} \quad \text{d'où}$$

$$P_{ci} = P_A \left(\frac{V_A}{V_i}\right)^{\gamma c}$$

γ_c : coefficient de polytropique pendant la compression
P_A et V_A : sont la pression et le volume en fin d'admission
P_{ci} et V_i sont la pression et le volume pendant la phase de compression du piston i.

$$\text{Et} \qquad V_i = S_i \cdot X_i + V_A$$

S_i Section du piston i ($S_1 = S_2$, voire page -64-)
X_i - Déplacement du piston i à partir du P.M.H

par la suite on calculera le deplacement pour chaque piston

c: Combustion

C'est le processus qui se deroule dans la chambre de combustion entre l'instant du jaillissement de l'étincelle et l'instant de fin de combustion.
c'est pendant cette phase que la pression atteint sa valeure maximale, elle est supposé constante, sa valeure est :

$$P_{Zi} \in [1{,}4 \div 2]\, P_c \quad \text{où } P_c \text{ pression en fin de compression.}$$

d - Détente

La détente et le seul temps moteur pendant le déroulement du cycle moteur.

- Détente isothermique : $z \longrightarrow t$

La loi de Mariotte pour une détente isothermique donne :

$$P_{d_i} = P_z \cdot \frac{V_z}{V_i}$$

où V_z : volume en fin de combustion.

- Détente polytropique : $t \longrightarrow d$

En appliquant la loi d'état de la thermodynamique pour une évolution polytropique, la pression pendant cette phase s'exprime par :

$$P_{d_i} = P_t \left(\frac{V_t}{V_i} \right)^{\gamma_d}$$

où

P_t, V_t pression et volume en fin de détente isothermique

e - Echappement

C'est la phase pendant laquelle se fait l'évacuation des gaz brulés hors de la chambre de combustion.

P_E est donnée dans l'intervale suivant : $[1,1 - 1,15]$ bars

6.4 CALCUL DES DEPLACEMENTS DES PISTONS 1 et 2

6.4.1. DÉPLACEMENT DU PISTON 1

Mouvement du piston et de la bielle, fig 6.2

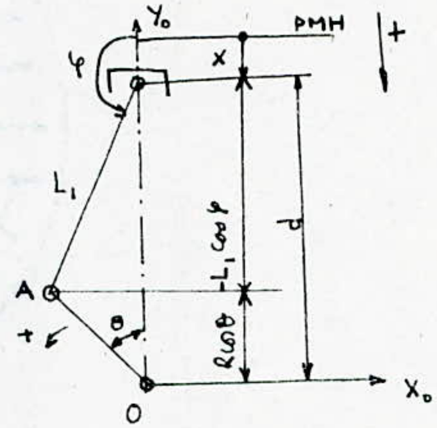


fig 6.2 déplacement piston 1

Nous nous proposons de calculer :

- l'élongation du piston d,
- la position instantanée du piston x,

Soit L_1 l'entraxe de la bielle et R le rayon de la manivelle.
En projetant le contour ABO sur l'axe $\overrightarrow{Y_0}$ nous obtenons :

$$d = R\cos\theta + L_1 \cos(\pi - \varphi)$$
$$= R\cos\theta - L_1 \cos\varphi$$

Or $R \sin\theta = L_1 \sin\varphi$

et la relation (11) donne $+ \cos\varphi = \left(1 - \frac{R^2}{L_1^2} \sin^2\theta\right)^{1/2}$

$\cos\varphi$ est toujours ou positif ou nul

en pratique $\frac{R}{L_1}$ est voisin de 0,3 donc $\left(\frac{R}{L_1}\right)^2 \simeq 0,1$

En faisant le developpement en serie de

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L_1}\right)^2 \sin^2\theta - \frac{1}{8}\left(\frac{R}{L_1}\right)^4 \sin^4\theta - \frac{1}{16}\left(\frac{R}{L_1}\right)^6 \sin^6\theta + \dots$$

Or $\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$

$\sin^4\theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$

$\sin^6\theta = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos\theta + \frac{3}{16}\cos 4\theta - \frac{1}{32}\cos 6\theta$

$\vdots$

d'où $\cos\varphi = a'_0 + a'_2\cos 2\theta + a'_4\cos 4\theta + a'_6\cos 6\theta + \dots$

les coefficients $a'_0, a'_1, a'_2 \dots$, étant respectivement égaux à :

$$a'_0 = 1 - \left[\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L_1}\right)^2 + \frac{3}{64}\left(\frac{R}{L_1}\right)^4 + \frac{5}{256}\left(\frac{R}{L_1}\right)^6 + \dots\right]$$

$$a'_2 = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L_1}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{R}{L_1}\right)^4 + \frac{15}{512}\left(\frac{R}{L_1}\right)^6 + \dots\right]$$

$$a'_4 = -\left[\frac{1}{64}\left(\frac{R}{L_1}\right)^4 + \frac{3}{256}\left(\frac{R}{L_1}\right)^6 + \dots\right]$$

$$a'_6 = \left[\frac{1}{512}\left(\frac{R}{L_1}\right)^6 + \dots\right]$$

Nous en déduisons : $d = R\left[\cos\theta + \frac{L_1}{R_1}\left(a'_0 + a'_2\cos 2\theta + a'_4\cos 4\theta + \dots\right)\right.$

En posant : $a_0 = \frac{L_1}{R}a'_0$; $a_2 = \frac{L_1}{R}a'_2$; $a_4 = \frac{L_1}{R}a'_4$, ...

Nous obtenons :

$$d = R\left(a_0 + \cos\theta + a_2\cos 2\theta + a_4\cos 4\theta + a_6\cos 6\theta + \dots\right)$$

Et

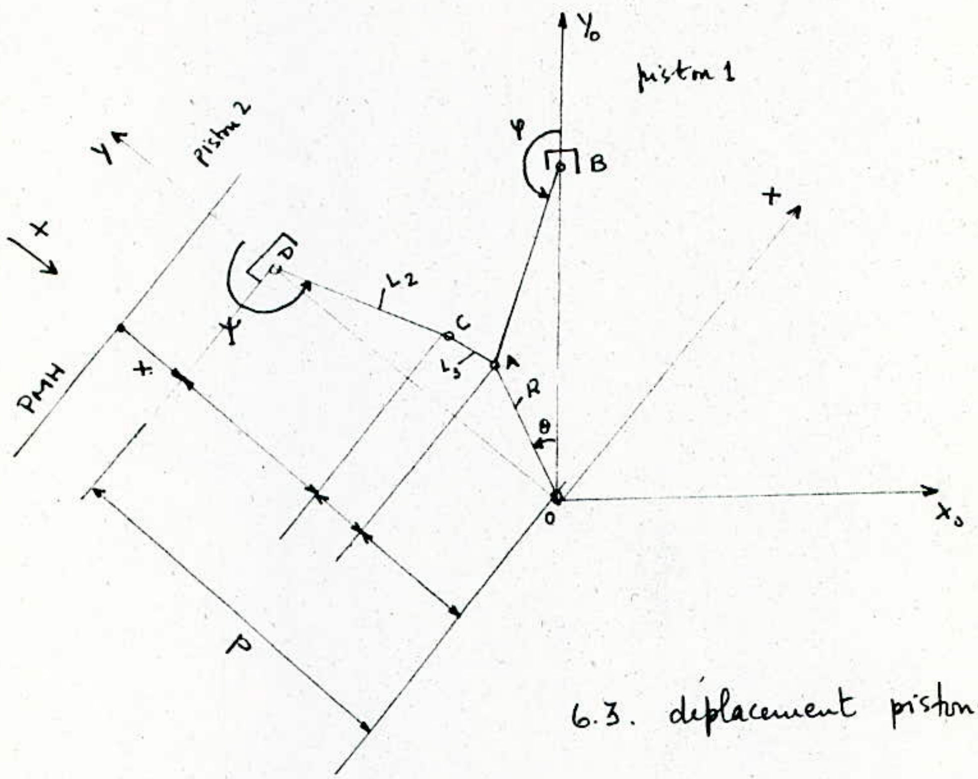
$$x = R\left(\frac{L_1}{R} + 1 - (a_0 + \cos\theta + a_2\cos 2\theta + a_4\cos 4\theta + \dots \dots + a_{2n}\cos 2n\theta + \dots\right)$$

Expression approchée du deplacement du piston 1, on va jusqu'à l'ordre 2.

$$x \simeq R\left[1 - \cos\theta + \frac{1}{4}\frac{R}{L_1}(1 - \cos 2\theta)\right]$$

6.4.2 DÉPLACEMENT DU PISTON 2.

Mouvement du piston 2.



6.3. déplacement piston.2

• Calcul du déplacement du piston (2) à partir du PMH : $\vec{X}$

$$\vec{X} = -\left[(R + L_3 + L_2)\,\vec{Y} - \vec{OD}\right]$$

$$\vec{OD} = \begin{bmatrix} 0 \\ R\cos(\theta-\alpha) - L_3\cos(\varphi+\beta-\alpha) - L_2\cos\psi \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{Y} \\ \vec{Z} \end{pmatrix}$$

d'où ; $\vec{X} = -\left[(R+L_3+L_2)\,\vec{Y} - \left(R\cos(\theta-\alpha) - L_3\cos(\varphi+\beta-\alpha) - L_2\cos\psi\right)\vec{Y}\right]$

$$= -\left[R\left(1-\cos(\theta-\alpha)\right) + L_3\left(1+\cos(\varphi+\beta-\alpha)\right) + L_2\left(1+\cos\psi\right)\right]\vec{Y}$$

Alors ; $\vec{X} = R(1-\cos(\theta+\alpha) + L_3(1+\cos(\varphi+\beta-\alpha) + L_2(1+\cos\psi)$

6.43. RECAPITULATIF DE LA PRESSION EN FONCTION DE θ DANS LES DEUX PISTONS 1 et 2

$$X_1 = \left(R + \frac{R^2}{4L_1}\right) - R\left(\cos\theta + \frac{R}{4L_1}\cos 2\theta\right)$$

$$X_2 = R\left(1 - \cos(\theta+\alpha)\right) + L_3\left(1 + \cos(\varphi+\beta-\alpha)\right) + L_2\left(1 + \cos\varphi\right)$$

$$V_i = S.X_i + V_A$$

Admission :
$$P_A = 1{,}03\, P_0 \left(1 - \frac{N^2}{1{,}25 \cdot 10^8} \cdot \frac{\varepsilon - 0{,}5}{\varepsilon - 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Compression :
$$P_{ci} = P_A \left(\frac{V_A}{V_i}\right)^{\gamma_c}$$

Combustion :
$$P_Z = [1{,}4 \text{ à } 2] \times P_2$$

Détente :

- isothermique $P_{di} = P_Z \cdot \dfrac{V_t}{V_i}$

- polytropique $P_{di} = P_t \left(\dfrac{V_t}{V_i}\right)^{\gamma d}$

Echappement : $P_E = [1{,}1 \text{ à } 1{,}15]$ bars.

7. DETERMINATION DU DEPHASAGE DANS L'ALLUMAGE ENTRE LES PISTON 1 et 2

Prenons l'exemple d'un moteur en V ā 8 cylindres
Et plus precisement le cas du moteur FBL 413

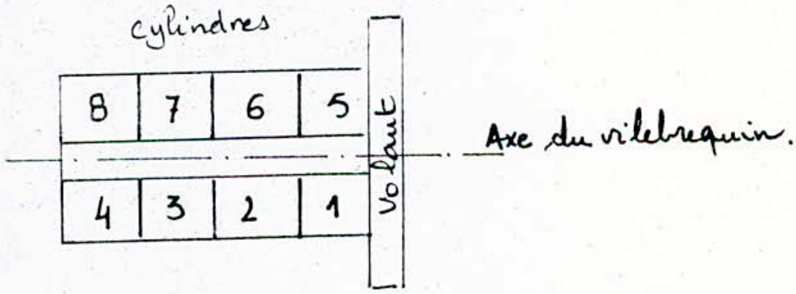
7.1 Ordre d'allumage d'un moteur V8 : FBL 413

L'ordre d'allumage choisit par le constructeur

1 ↗ 8 ↘ 4 ↗ 5 → 7 ↘ 3 ↗ 6 ↘ 2

qui rentre dans la determination du couple moteur.

7.2 Numérotation des cylindres.

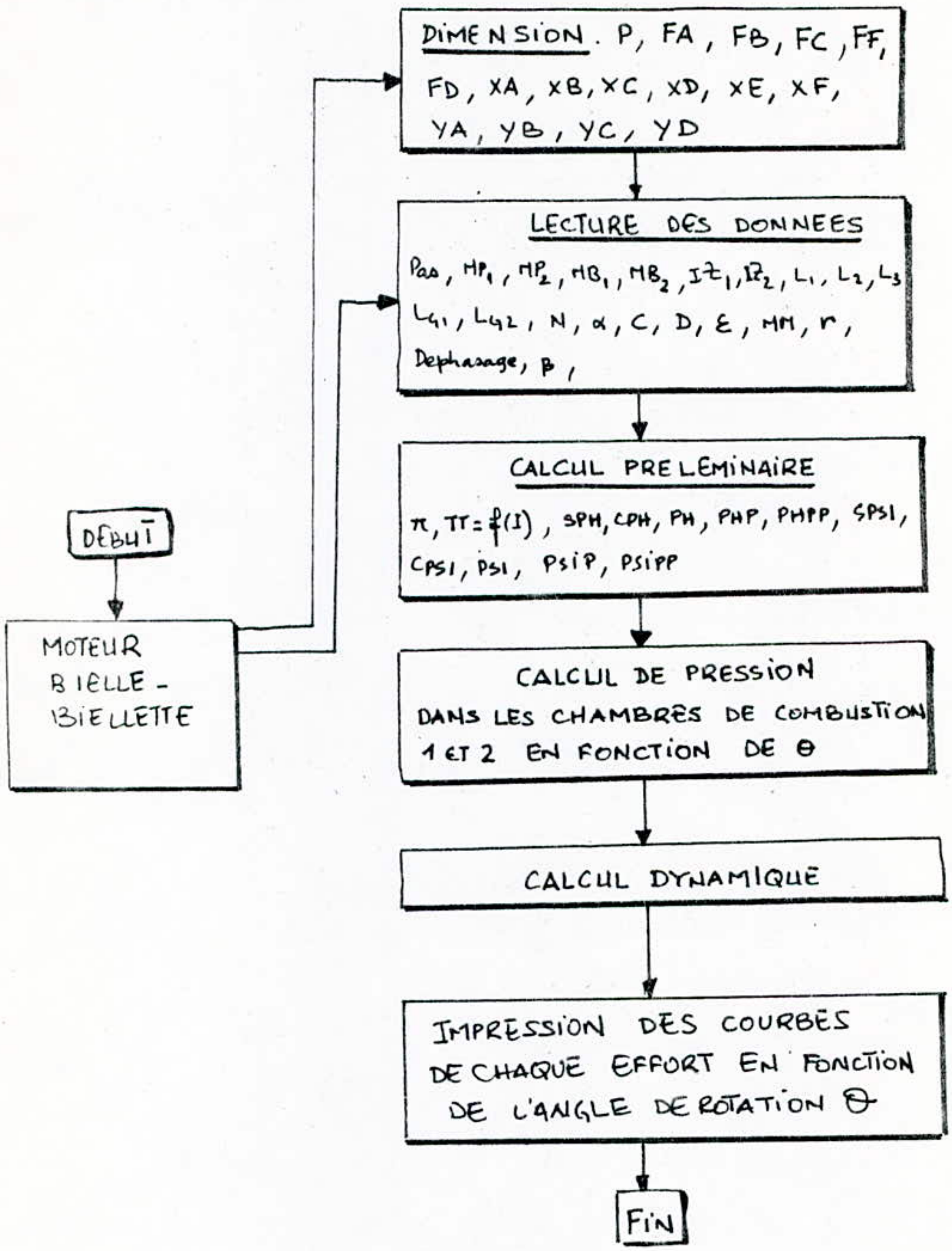


Si on choisit le piston 1 le piston articulé ā la bielle portant le piston 1 sera le piston 5.

7.3 Determination du dephasage . D.

Après avoir choisit l'ordre d'allumage et sachant que deux tours du vilebrequin font 720°, Alors, le dephasage entre le piston 1 et le piston 2 qui dans notre cas le piston 5, sera de 450° D = 450°

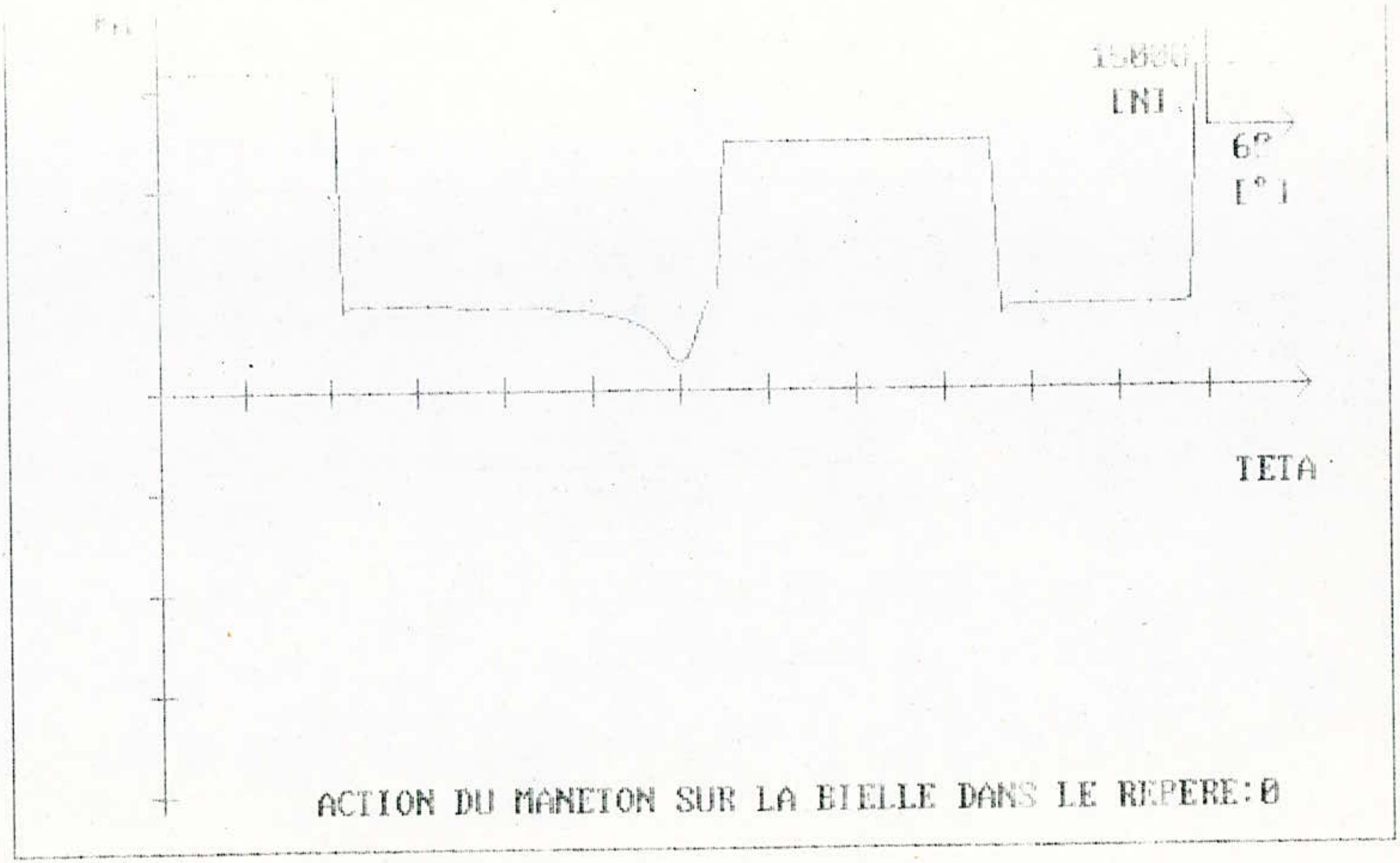
8. ORGANIGRAMME GLOBALE



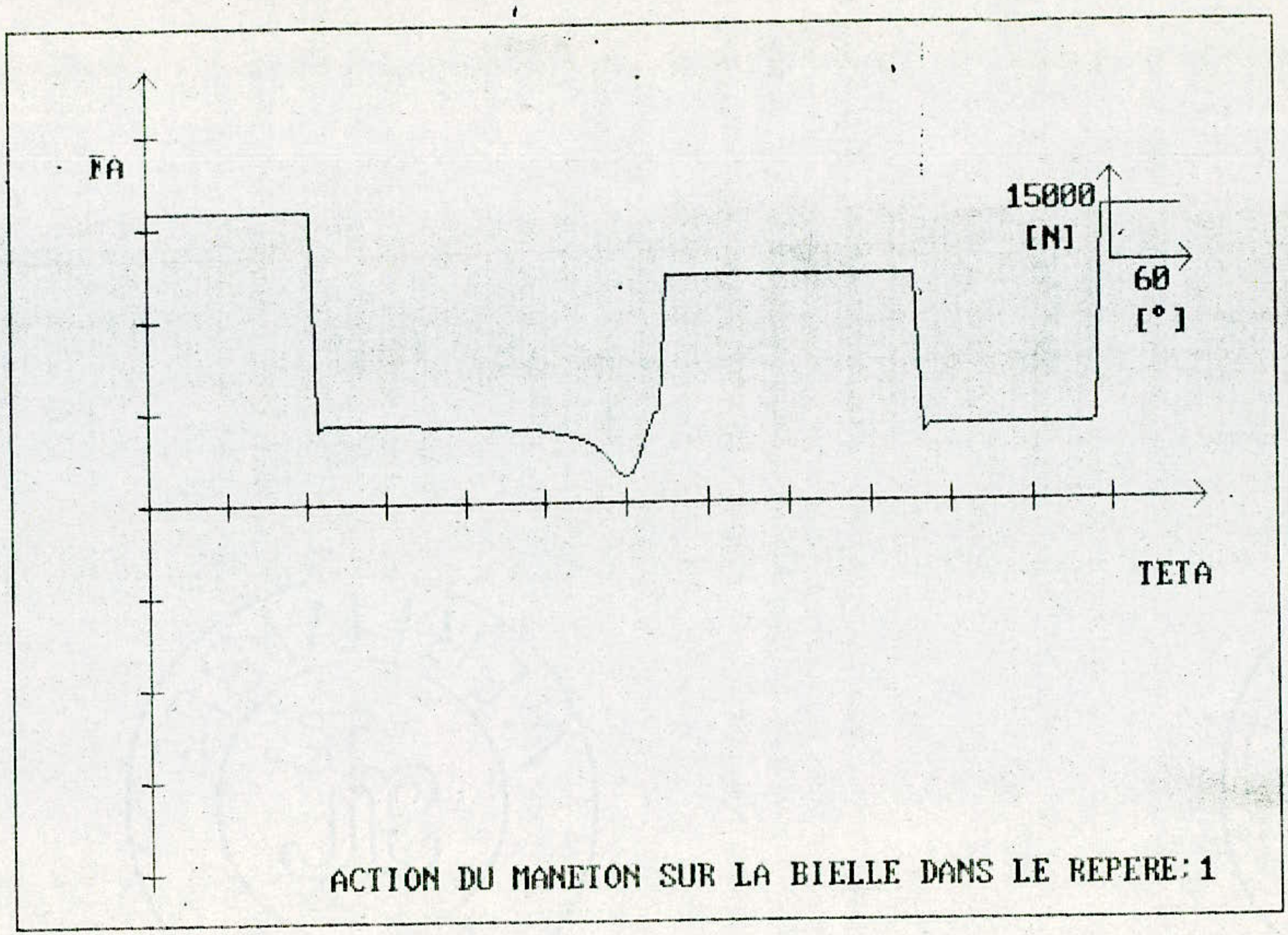
ANNEXE

Cette annexe est application pour notre étude
Moteur choisit est le F8L413.
Données sont :

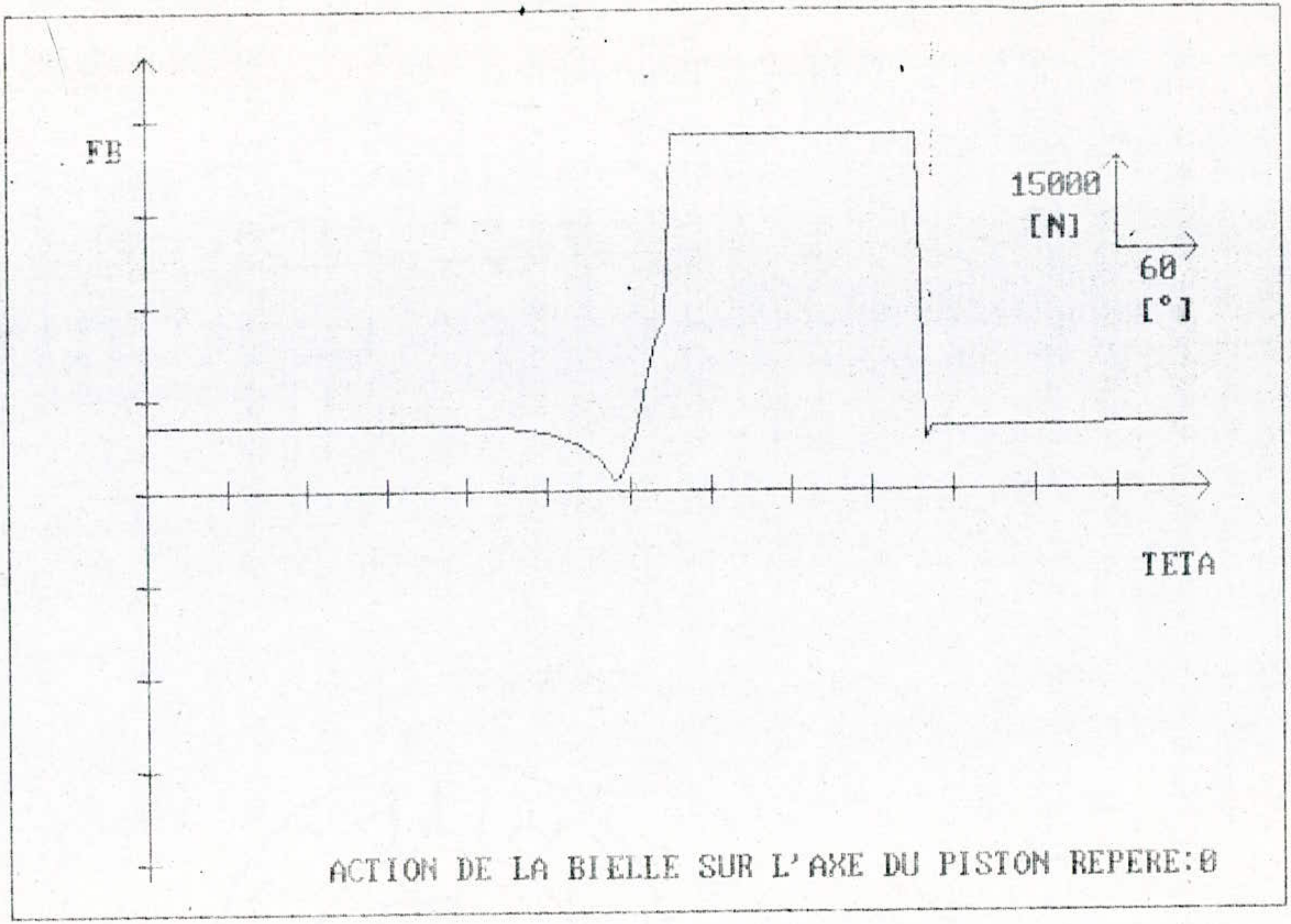
Pas de calcul	$P = 5$
Masse piston 1	$mp1 = 1,4$ kg
Masse piston 2	$mp2 = 1,4$ kg
Masse bielle	$mb_1 = 1,8$ kg
Entraxe bielle	$L_1 = 0,3$ m
Position CG bielle	$LG1 = 0,21$ m
Taux de compression	$\varepsilon = 17$
Alésage piston 1 et 2	$D = 0,1$ m
Course piston 1 et 2	$C = 0,12$ m
Vitesse de rotation moteur	$N = 2800$ tr/mn
Moment d'inertie bielle/z_0	$IZ1 \simeq 300$ kg.m^2
Distance de l'œil/A	$L_3 = 0,07$ m
Entraxe biellette	$L_2 = 0,23$ m
Position C.G biellette	$LG2 = 0,15$ m
Masse biellette	$mb_2 = 1,5$ kg
Angle du V	$\alpha = 72°$
Moment d'inertie biellette/z_0	$IZ_2 = 200$ kg.m^2
Position C.G manivelle/O	$R1 = 0,02$ mm
Masse de la manivelle	$mm = 2$ kg
Angle $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$	$\beta = 80°$
dephasage d'allumage entre deux piston d'une même rangée	dephas $= 420°$



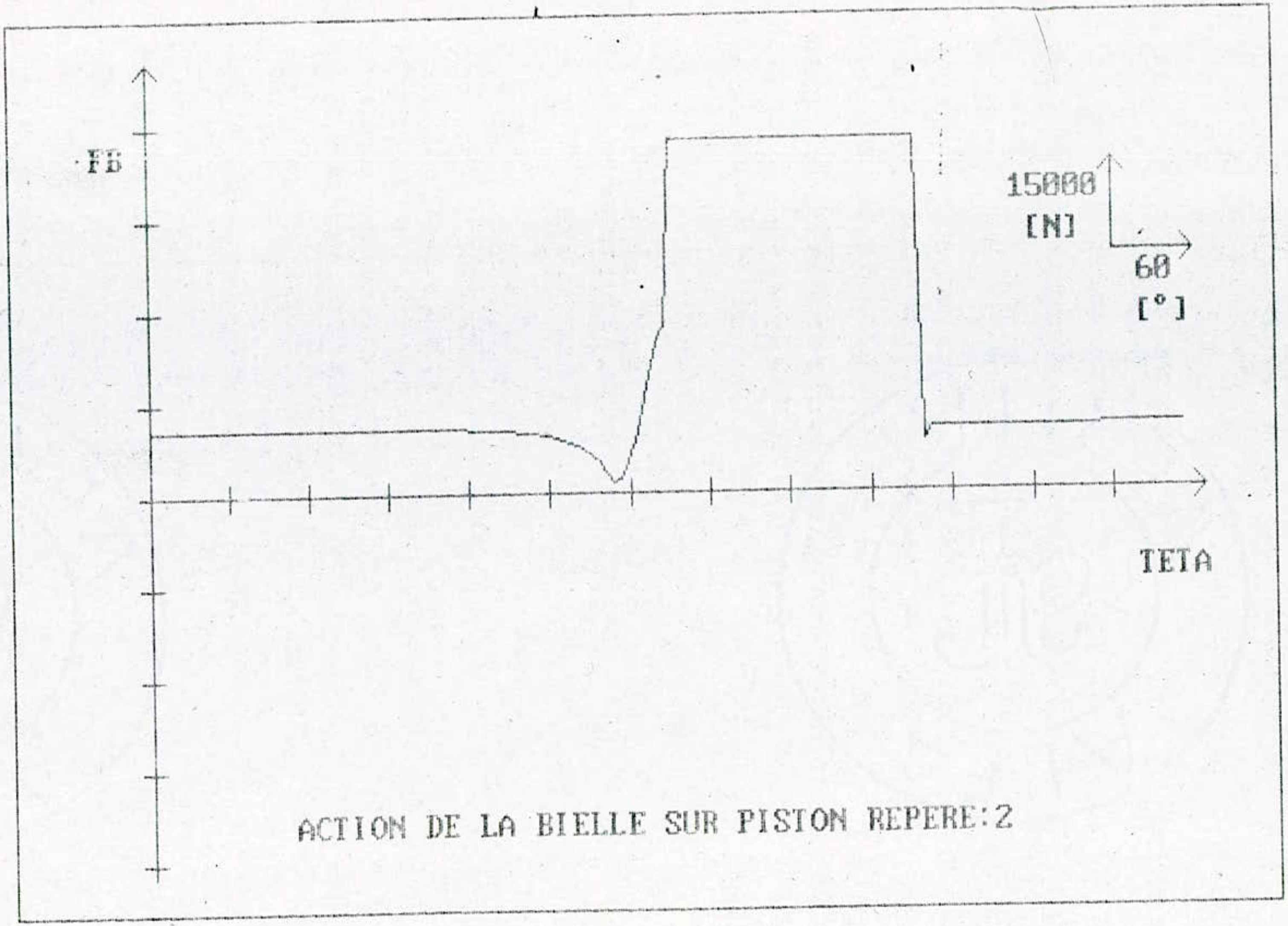
1LIST 2RUN← 3LOAD" 4SAVE" 5CONT← 6,"LPT1" 7TRON← 8TROFF← 9KEY 0SCREEN



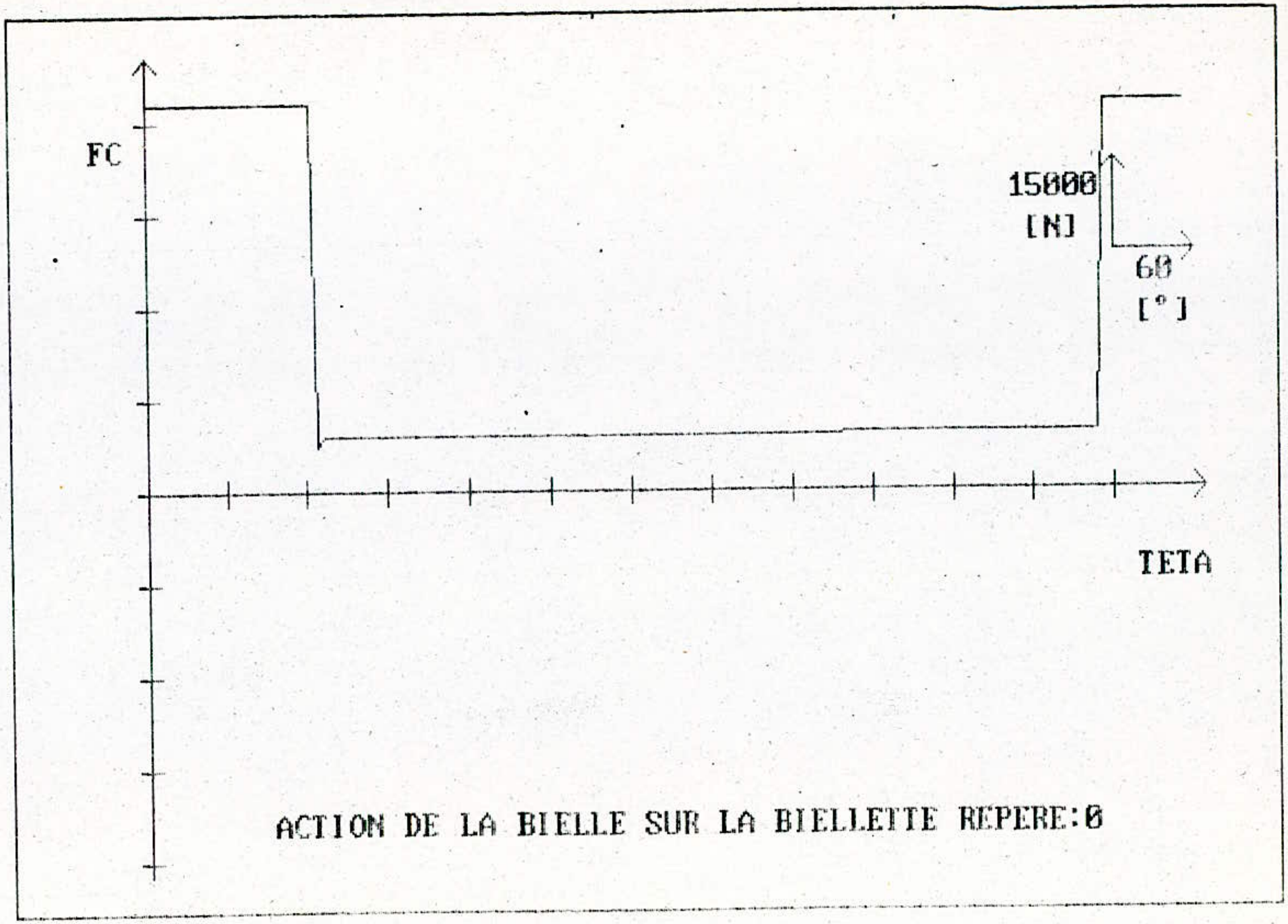
1LIST 2RUN← 3LOAD" 4SAVE" 5CONT← 6,"LPT" 7TRON← 8TROFF← 9KEY 0SCREEN



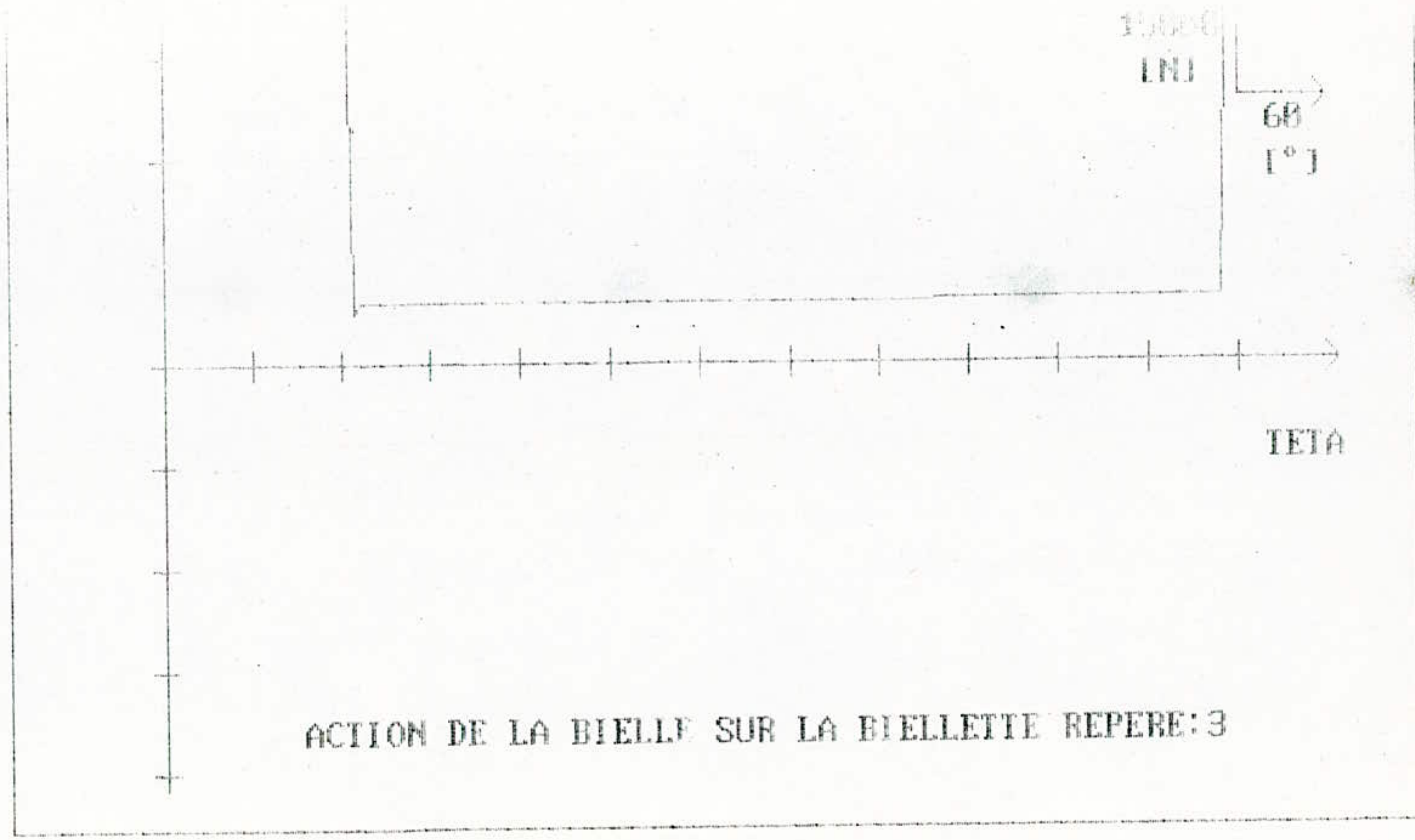
1LIST 2RUN 3LOAD" 4SAVE" 5CONT 6,"LPT1" 7TRON 8TROFF 9KEY 0SCREEN



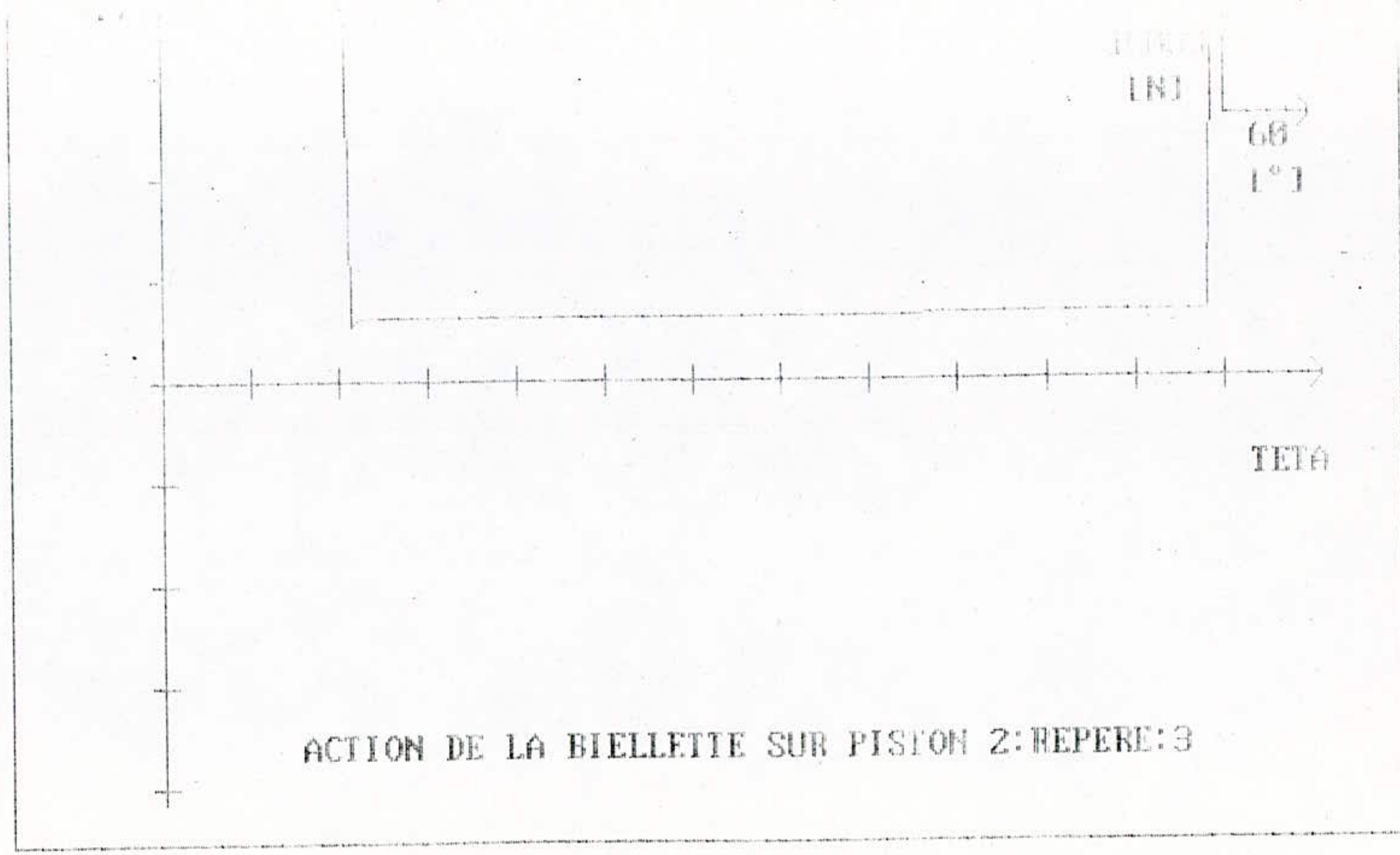
1LIST 2RUN← 3LOAD" 4SAVE" 5CONT← 6,"LPT" 7TRON← 8TROFF← 9KEY 0SCREEN



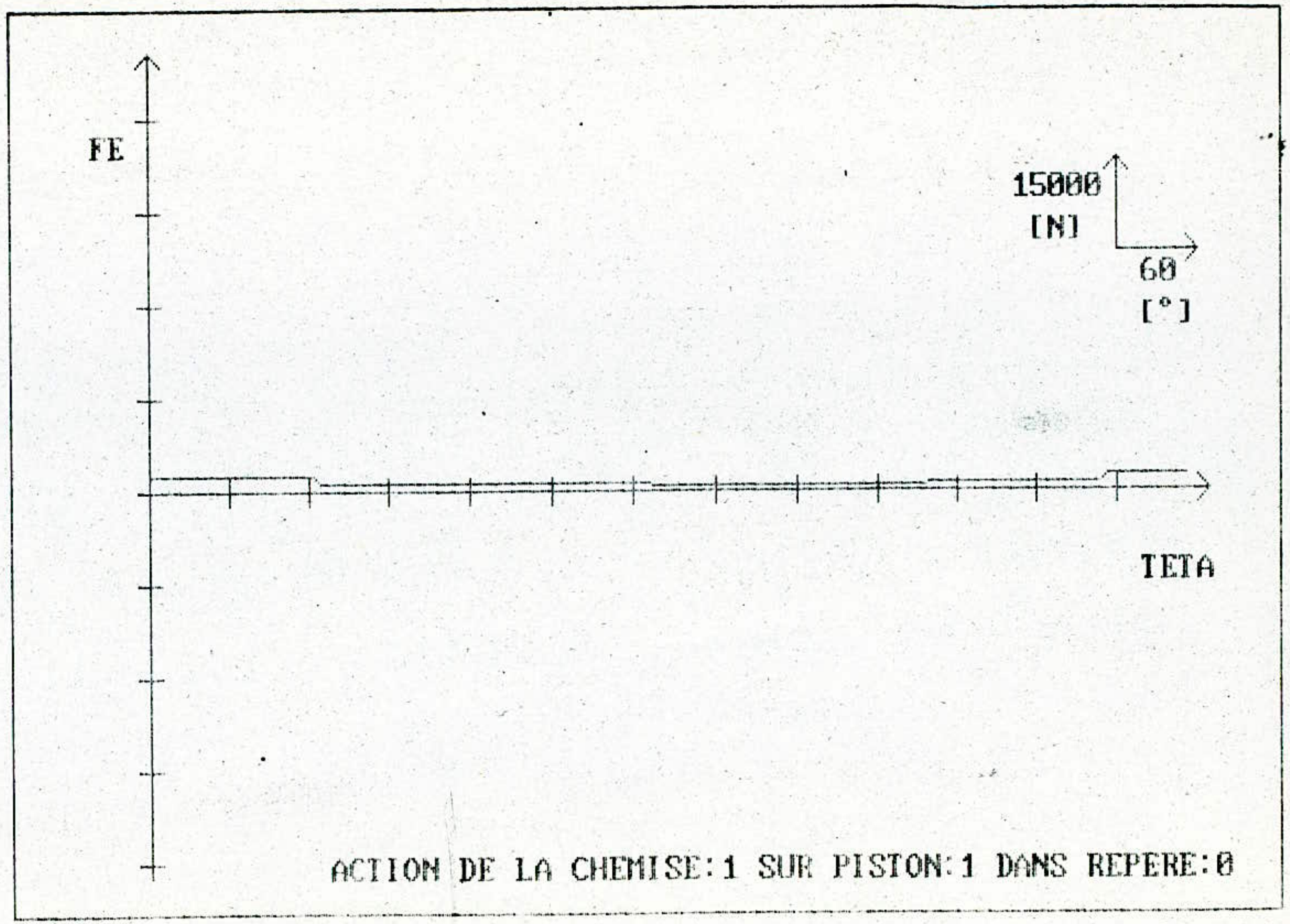
1LIST 2RUN 3LOAD" 4SAVE" 5CONT 6,"LPT1" 7TRON 8TROFF 9KEY 0SCREEN



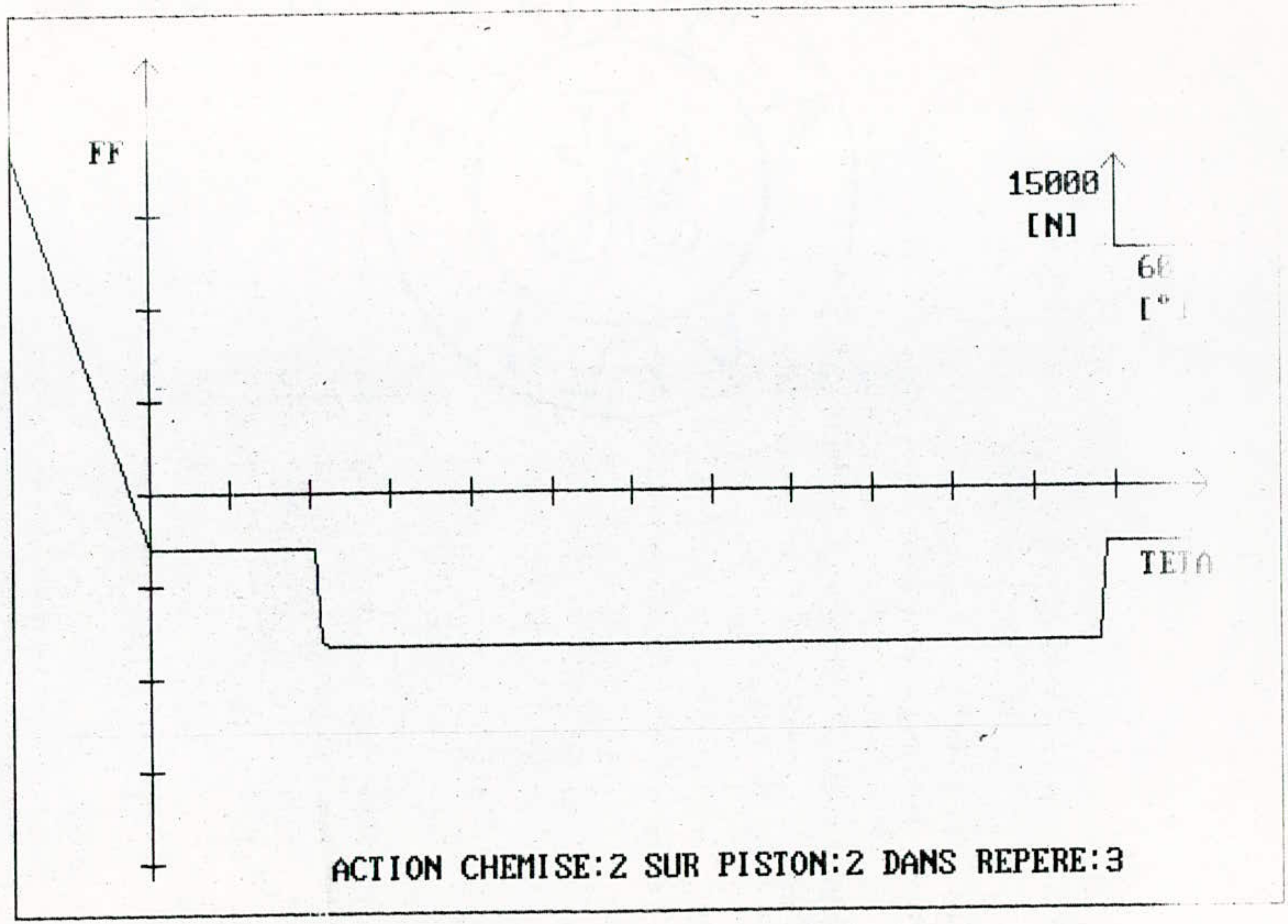
1LIST 2RUN 3LOAD" 4SAVE" 5CONT 6,"LPT1" 7TRON 8TROFF 9KEY 0SCREEN



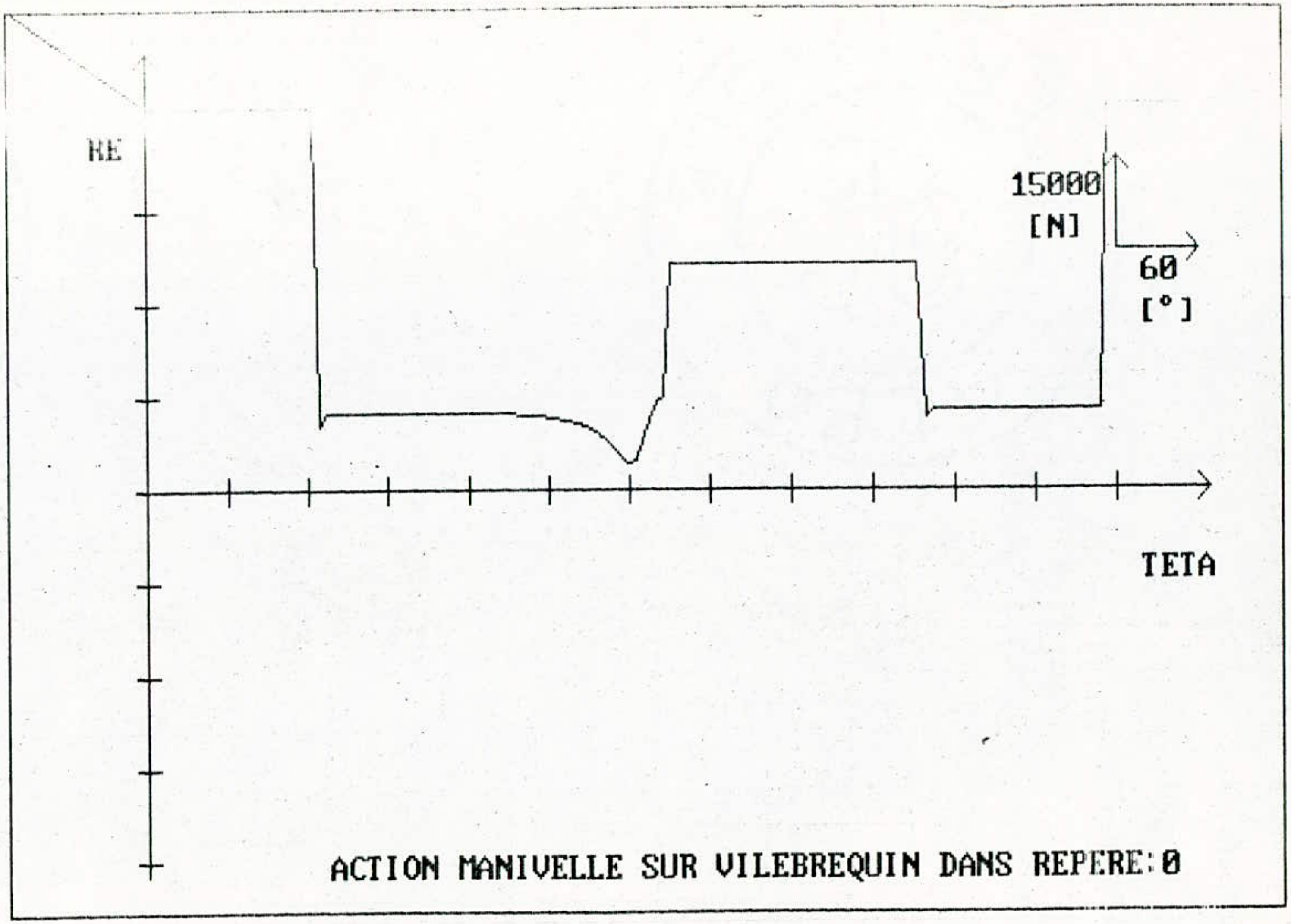
1LIST 2RUN 3LOAD" 4SAVE" 5CONT 6,"LPT1" 7TRON 8TROFF 9KEY 0SCREEN



REEN 1LIST 2RUN 3LOAD" 4SAVE" 5CONT 6 LPT 7TRON 8TROFF 9KEY 0SCREEN



1LIST 2RUN← 3LOAD" 4SAVE" 5CONT← 6,"LPT" 7TRON← 8TROFF← 9KEY



1LIST 2RUN← 3LOAD" 4SAVE" 5CONT← 6,"LPT" 7TRON← 8TROFF← 9KEY 0SCREEN

Conclusion.

Cette étude nous a permis de toucher l'interet de l'application de la relation fondamentale de la dynamique sous sa forme vectorielle.
Et ainsi, pouvoir etudier mecaniquement tout systeme evoluant dans l'espace et le temps
Et de determiner les efforts à chaque instant du cycle
Qui permettrons par la suite le dimensionnement des differents organes constituants ce système.
Ainsi que la determination des points de graissage

BIBLIOGRAPHIE

Mécanique des moteurs alternatifs	B.SWOBODA technip	84
Projet Fin d'étude	Hamidi Laïd Genie mecanique	juin 86
Les machines transformatrices d'energie	Lemasson Delagrave	67
Sciences et technique du moteur diesel industriel et de transport T. II	R. BRUN Technip	84
le Langage basique et la nouvelle norme	Eyrolles	