



THESE

en vue de l'obtention du titre de

Docteur en Sciences

en Automatique
par

Farah BOUAKRIF

Magister en Automatique de l'ENP

Intitulé

Commande par Apprentissage Itératif des Robots Manipulateurs

Soutenue publiquement le 28 juin 2008 devant le jury composé de:

E. M. BERKOUK	Professeur à l'ENP	Président
D. BOUKHETALA	Professeur à l'ENP	Rapporteur
F. BOUDJEMA	Professeur à l'ENP	Rapporteur
R. TOUMI	Professeur à l'USTHB	Examineur
S. LABIOD	Maître de Conférences Univ. Jijel	Examineur
M. SOUILAH	Maître de Conférences à l'USTHB	Examineur
M. LOUDINI	Maître de Conférences à l'INI	Invité

Avant-propos

L'ensemble des travaux présentés dans cette thèse a été effectué au Laboratoire de Commande des Processus (**LCP**) de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger (**ENP**).

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur **D. Boukhetala**, Professeur à l'ENP, pour m'avoir encadré, je le remercie également pour ses conseils et son soutien tout au long de ce travail et d'avoir été patient avec moi particulièrement durant la rédaction de cette thèse. Qu'il soit assuré de ma profonde gratitude pour m'avoir aidé et fait profiter de ses connaissances.

Je tiens à remercier Monsieur **F. Boudjema**, Professeur à l'ENP, pour avoir assuré la responsabilité de mes travaux. Sa disponibilité et ses discussions trouvent ici l'expression de mes vifs remerciements.

J'ai été profondément honoré que Monsieur **E. M. Berkouk**, Professeur à l'ENP, ait accepté d'examiner ce travail et de présider ce jury.

Que Monsieur **R. Toumi**, Professeur à l'USTHB, trouve ici l'expression de mes sincères remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de l'examiner.

Je remercie très profondément Monsieur **S. Labiod**, Maître de Conférence à l'Université de Jijel, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être membre de jury.

Que Monsieur **M. Souilah**, Maître de Conférence à l'USTHB, trouve ici ma respectueuse gratitude pour avoir accepté de prendre part à ce jury.

Je remercie Monsieur **M. Loudini**, Maître de Conférence à l'INI, pour avoir accepté d'être membre de jury en tant qu'invité.

Que tous mes amis et collègues trouvent ici le témoignage de mon amitié et de ma reconnaissance.

Enfin, je ne pourrais terminer sans remercier toute ma famille pour son soutien pendant toutes mes études et particulièrement mes parents.

A mes parents

ملخص :

العمل المقدم في هذه المذكرة يتعلق بتطبيق قوانين التحكم بالتعليم المرحلي على أدرع آلية تعمل بطريقة تكرارية في مجال معين من الزمن. هدف التحكم هو جعل مخارج هذه الأنظمة تتبع مسارات مرجعية محددة مسبقاً. أولاً، اقترحنا قانونين للتحكم بالتعلم المرحلي، القانون الأول يتكون من جزئين، الأول للتحكم بالرجوع والثاني للتحكم التكراري. أما القانون الثاني فهو للتحكم التكراري دون إضافة الجزء المتعلق بالتحكم بالرجوع باستعمال طريقة ليابونوف، قمنا بدراسة استقرار طرق التحكم المقترحة. ثانياً وبهدف تحسين ميزان متابعة المسارات للأذرع الآلية التي تفتقد لجهاز قياس السرعة المفصلية، اقترحنا قانون للتحكم بالتعليم المرحلي مع ملاحظ السرعة لإعطاء السرعة المفصلية المقدره واستعمالها في قانون التحكم المقترح عوض السرعة الحقيقية غير المقاسة، واستنبطنا الشروط الكافية للاستقرار باستعمال طريقة ليابونوف. أخيراً، عالجتنا مشكل الشروط الابتدائية في طريقة التحكم بالتعلم المرحلي على الأذرع الآلية، وذلك باقتراح قانون للتحكم بالتعليم المرحلي من نوع "د" مع خوارزمية لإعطاء الشروط الابتدائية لهذه الأنظمة عند كل مرحلة من مراحل العمل، واستعملنا مقياس λ لدراسة استقرار الطريقة المقترحة، وقدّمنا بعض نتائج المحاكاة العددية لإبراز كفاءة أدائها.

الكلمات المفتاحية: التحكم بالتعليم المرحلي، خوارزمية الشروط الابتدائية، طريقة ليابونوف، مقياس λ ، ملاحظ السرعة، ذراع آلي.

Résumé :

Ce travail porte sur la commande par apprentissage itératif (CAI) pour résoudre le problème de poursuite de trajectoires des robots manipulateurs rigides sous l'effet des perturbations externes, qui exécutent des tâches répétitives. En premier lieu, deux lois de CAI sont proposées, la première est constituée d'une commande à contre réaction plus un terme itératif, la seconde est une commande itérative sans ajouter une contre réaction. La démonstration de la stabilité asymptotique est basée sur l'utilisation d'une séquence de fonctions de Lyapunov, en montrant qu'elle diminue au cours des itérations pour les deux lois de commande. En deuxième lieu, le problème de synthétiser une commande par apprentissage itératif des robots manipulateurs sans utiliser les vitesses articulaires est résolu par la proposition d'un observateur de vitesse qui possède une forme itérative. En supposant que les perturbations sont répétitives et les vitesses sont bornées, la stabilité asymptotique globale du système en boucle fermée est démontrée par l'utilisation de la théorie de Lyapunov. Finalement, une loi de CAI de type D est présentée avec un algorithme de condition initiale, qui fournit automatiquement l'état initial à chaque itération. La norme λ est adoptée comme une méthode topologique pour démontrer la stabilité asymptotique de cette loi de commande, dans un intervalle de temps fini lorsque le nombre d'itération tend vers l'infini. Les résultats de simulation, sur un robot manipulateur à deux degrés de liberté, prouvent clairement l'efficacité et les performances de la loi de commande proposée.

Mots clés: Commande par apprentissage itératif, algorithme d'état initial, théorie de Lyapunov, la norme λ , observateur de vitesse, robot manipulateur.

Abstract:

This work deals with iterative learning control "ILC" design to solve the trajectory tracking problem for rigid robot manipulators subject to external disturbances, and performing repetitive tasks. Firstly, Two ILC schemes are proposed, the first controller contains a feedback action plus an iteratively updated term, and the second is an iterative learning control without adding the feedback controller. The proof of the asymptotic stability is based upon the use of a Lyapunov-like positive definite sequence, which is shown to be monotonically decreasing under the proposed control schemes. Secondly, the problem of designing an iterative learning control for trajectory tracking of rigid robot manipulators, without using the velocity measurement is solved. Hence, a velocity observer, which has an iteratively form, is proposed to reconstruct the velocity signal in the control laws. Under assumptions that the disturbances are repetitive and the velocities are bounded, it has been shown that the whole control system (robot plus controller plus observer) is global asymptotically stable, over the whole finite time-interval, when the iteration number tends to infinity. This proof is based upon the use of the Lyapunov theory. Finally, a D-type ILC is presented, with an initial condition algorithm, which gives the initial state value in each iteration automatically. The λ -norm is adopted as the topological measure in our proof of the asymptotic stability of this control scheme. Simulation results on two-link manipulator are provided to illustrate the effectiveness of the proposed control scheme.

Keywords: Iterative learning control, initial condition algorithm, Lyapunov theory, λ -norm, velocity observer, robot manipulator.

Table des matières

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre 1 Généralités sur la commande par apprentissage itératif

1.1 Introduction.....	5
1.2 Commande par apprentissage itératif et les autres techniques.....	6
1.2.1 Commande classique (à contre réaction).....	6
1.2.2 Commande robuste (CR).....	6
1.2.3 Commande adaptative (CA).....	7
1.3 Principe de la commande par apprentissage itératif.....	7
1.3.1 Objectif.....	7
1.3.2 Forme générale d'un régulateur CAI.....	8
1.3.2.1 Commande par apprentissage itératif en boucle ouverte.....	9
1.3.2.2 Commande par apprentissage itératif en boucle fermée.....	9
1.4 Théorie de la commande par apprentissage itératif.....	9
1.4.1 Rappel sur les normes.....	9
1.4.2 Systèmes linéaires.....	10
1.4.2.1 Conditions de convergence.....	11
1.4.2.2 Influence des perturbations.....	14
1.4.2.3 Commande par apprentissage itératif dans l'espace d'état.....	15
1.4.3 Systèmes non linéaires.....	18
1.4.3.1 Exemple de simulation 1.....	21
1.4.3.2 Exemple de simulation 2.....	24
1.4.4 Systèmes non linéaires perturbés.....	26
1.4.4.1 Exemple de simulation 3.....	30
1.5 Commande par apprentissage itératif et le degré relatif du système.....	32
1.6 Conclusion.....	33

Chapitre 2 Commande par apprentissage itératif des robots manipulateurs

2.1 Introduction.....	34
2.2 Modèle et propriétés structurelles des robots manipulateurs.....	35
2.2.1 Modèle des robots manipulateurs.....	35
2.2.2 Propriétés.....	37
2.3 Synthèse de la loi de commande.....	40
2.4 Résultats de simulation.....	48

2.5 Conclusion.....	56
---------------------	----

Chapitre 3 Commande par apprentissage itératif à base d'observateur de vitesse des robots manipulateurs

3.1 Introduction.....	57
3.2 Commande par apprentissage itératif à base d'observateur de vitesse.....	58
3.2.1 Premier schéma de commande.....	58
3.2.2 Deuxième schéma de commande.....	65
3.3 Conclusion.....	67

Chapitre 4 Commande par apprentissage itératif des robots manipulateurs avec un algorithme d'état initial

4.1 Introduction.....	68
4.2 Loi de commande itérative avec un algorithme d'état initial.....	69
4.3 Résultats de Simulation.....	73
4.4 Conclusion.....	80

Conclusion générale.....	82
--------------------------	----

Annexe A	84
-----------------------	----

Annexe B	86
-----------------------	----

Annexe C	88
-----------------------	----

Bibliographie.....	91
--------------------	----

Principales notations

CAI	Commande par apprentissage itératif.
y_d	Sortie désirée du système.
x_d	Etat désiré du système.
u_d	Commande désirée du système.
k	Nombre d'itérations.
y_k	Sortie réelle du système.
x_k	Etat du système à la $k^{\text{ième}}$ itération.
u_k	Commande itérative à la $k^{\text{ième}}$ itération.
\tilde{u}	Erreur de commande.
U	Domaine de commande admissible.
EC	Energie cinétique des robots manipulateurs.
EP	Energie potentielle des robots manipulateurs.
ET	Energie totale des robots manipulateurs.
q_k	Vecteur de position à la $k^{\text{ième}}$ itération des robots manipulateurs.
\dot{q}_k	Vecteur de vitesse à la $k^{\text{ième}}$ itération des robots manipulateurs.
q_d	Vecteur de position désirée des robots manipulateurs.
\dot{q}_d	Vecteur de vitesse désirée des robots manipulateurs.
e_k	Erreur de poursuite à la $k^{\text{ième}}$ itération.
z_k	Erreur de poursuite filtrée à la $k^{\text{ième}}$ itération.
$L(q, \dot{q})$	Lagrangien des robots manipulateurs.
τ	Vecteur de couples générés par les actionneurs des robots manipulateurs.
$M(q)$	Matrice d'inertie des robots manipulateurs.
$C(q, \dot{q})$	Matrice de forces centrifuges et de Coriolis des robots manipulateurs.
$G(q)$	Vecteur de forces de gravitation des robots manipulateurs.
$Sat(W)$	Saturation du vecteur W .
$V_k(t)$	Fonction de Lyapunov à la $k^{\text{ième}}$ itération.
$d(t)$	Perturbations externes.
$L_f v(x)$	Dérivée de Lie de $v(x)$ suivant le champ de vecteur f .
$h_x(x)$	Jacobien de $h(x)$.
λ	Scalaire positif (largement grand).
σ	Constante positive.
$\ (\ast)\ $	Norme Euclidienne de (\ast) .
$\ (\ast)\ _\lambda$	Norme λ de (\ast) .

Introduction générale

Les systèmes non linéaires possèdent des structures extrêmement variées, des dynamiques complexes peuvent présenter toutes sortes de comportement étrange. En effet, la commande de ce type de systèmes pose beaucoup de problèmes aussi bien en théorie qu'en pratique. Contrairement aux systèmes linéaires pour lesquels la théorie de l'automatique fournit une panoplie de méthodes pour la synthèse des lois de commande, les systèmes non linéaires ne disposent pas d'outils et de techniques généraux permettant de synthétiser des commandes non linéaires. Les robots manipulateurs, caractérisés par un comportement fortement non linéaire, constituent un exemple typique de ce genre de systèmes.

La commande des robots manipulateurs constitue à l'heure actuelle l'une des préoccupations majeures et des axes de recherche privilégiée dans le domaine de l'automatique. En effet, la majorité des tâches confiées aux robots sont délicates et exigent une très grande précision sous des trajectoires rapides. Durant ces trois dernières décennies et afin d'améliorer les performances des manipulateurs, des recherches avancées ont permis de faire émerger de nouvelles techniques de commande appliquées aux robots manipulateurs. Comme résultat de ces activités de recherche, une variété de méthodes de commande des robots manipulateurs ont été proposées (SPO89, ASA86, BOU07c), telles que, commande proportionnelle intégrale dérivative (PID) (ARI84b), commande à couple calculé (LUH80) dans laquelle l'objectif de poursuite de trajectoires est accompli par linéarisation par bouclage de la dynamique non linéaire du robot, commande adaptative (ORT89), commande à structure variable (SLO83), et commande floue (CHA00).

Beaucoup de robots fonctionnant actuellement sont programmés pour exécuter la même tâche à plusieurs reprises (itération), en observant l'erreur de poursuite à chaque itération de la même tâche, il devient clair que c'est réellement répétitif. D'où la nécessité de trouver une commande capable d'utiliser les informations obtenues de l'exécution précédente pour améliorer les performances à la prochaine exécution. Après un certain nombre d'itérations (répétition de tâche), le système de commande se corrige. Ceci caractérise la commande par apprentissage itératif « CAI ».

L'idée de base de la commande par apprentissage itératif a été publiée en 1978 au Japon par Uchiyama [UCH78], sachant que cet article a été publié en Japonais, le travail n'a pas connu de continuité. Par ailleurs, avant les travaux de Uchiyama, Garden a breveté en 1971 son résultat déjà réalisé en 1967 aux Etats-Unis, intitulé « Learning control of actuators in control systems ». L'approche consiste à stocker un signal de commande dans la mémoire de l'ordinateur et actualiser itérativement le signal de commande en utilisant l'erreur entre la réponse réelle et la réponse désirée. Et ce n'est qu'à partir de 1984 et après les travaux de [ARI84a, CAS84, CRA84] que la commande par apprentissage itératif avait été donnée d'une manière explicite.

Il est à noter que la CAI peut être classée en deux catégories : CAI autonome (off-line) et CAI connectée (on-line). En effet, la commande dans l'itération courante utilise les informations provenant de l'itération antérieure pour la CAI autonome, et de l'itération courante et antérieure en même temps pour la CAI connectée [YAN01, BOU07a, XU03]. D'autre part, un autre type d'algorithme de CAI a été développé en utilisant la séquence de Lyapunov définie positive qui diminue en fonction des itérations par un choix convenable de la commande [BOU08b, BOU07d]. En fait, [XU98] a utilisé une approche basée sur la théorie de Lyapunov pour illustrer comment combiner la CAI avec un régulateur à structure variable afin de généraliser le résultat à une large classe de systèmes non linéaires. Utilisant la théorie de Lyapunov, Ham *et al.* ont développé dans [HAM00] une loi de CAI combinée avec une commande robuste pour résoudre le problème de poursuite de trajectoires des robots manipulateurs, l'application de cette approche a été étendue à une classe générale des systèmes non linéaires dans [HAM01], et dans [TAY04], Tayebi a présenté des lois de CAI adaptatives pour résoudre le problème de poursuite de trajectoires des robots manipulateurs. Dans cette thèse, nous proposons deux lois de commande par apprentissage itératif. La

première commande est une combinaison entre une commande à contre réaction et une commande itérative par contre la seconde est une commande purement itérative. Il est à noter que les approches proposées nécessitent la mesure de la position et de la vitesse articulaires du robot.

Habituellement, les robots manipulateurs sont équipés d'encodeurs pour mesurer les positions et de tachymètres pour mesurer les vitesses. Contrairement aux encodeurs, qui donnent des mesures exactes des positions, les mesures fournies par les tachymètres sont souvent contaminés par des bruits, ce qui peut réduire les performances dynamiques du manipulateur. En fait, beaucoup de robots manipulateurs disponibles au marché ne sont pas équipés par ces tachymètres, d'où la nécessité d'utiliser un observateur de vitesse qui estime les vitesses à partir de ses positions mesurées. Le problème de synthétiser un observateur pour les robots est très compliqué, à cause de la dynamique hautement non linéaire et de la structure couplée du modèle. Récemment, quelques travaux ont été présentés pour la commande de robots équipés uniquement par des encodeurs, par exemple [BER93b, BER93c, ABD06, YU06, BOU06, BOU08a, BOU08c]. A travers notre étude, nous avons constaté que le nombre de résultats disponibles sur la CAI avec observateur de vitesse est limité. Ceci nous a motivé pour orienter notre investigation dans ce sens.

En plus, parmi les problèmes posés par la CAI, celui des conditions initiales. Récemment, quelques algorithmes ont été proposés donnant l'état initial à chaque itération avec l'algorithme de la CAI [XU05], [SUN06]. Dans ce contexte, nous proposons une loi de CAI avec un algorithme estimant l'état initial du robot à chaque itération pour résoudre le problème de poursuite de trajectoire des robots manipulateurs.

La thèse est organisée en quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré aux notions préliminaires de la commande par apprentissage itératif, en donnant une présentation générale et claire sur cette technique de commande, ainsi, nous formulons le problème de cette commande dans sa généralité, en présentant les conditions suffisantes de convergences des algorithmes proposés pour les systèmes linéaires et non linéaires, puis procédons à une étude en simulation pour les systèmes non linéaires.

Le deuxième chapitre présente la synthèse de deux lois de commande par apprentissage itératif pour résoudre le problème de poursuite de trajectoires des robots manipulateurs. La

première est constituée de deux termes, terme classique et terme CAI. La seconde est une commande itérative sans l'ajout d'une contre réaction. La stabilité asymptotique du système en boucle fermée est démontrée en utilisant la théorie de Lyapunov pour les deux lois de commande.

Le troisième chapitre est réservé à l'application des lois de commande présentées dans le chapitre deux, mais en supposant que les vitesses ne sont pas disponibles, d'où un observateur de vitesse est proposé pour les estimer. La théorie de Lyapunov est utilisée pour prouver la stabilité asymptotique du système en boucle fermée.

Le quatrième chapitre aborde le problème de l'état initial pour la commande par apprentissage itératif. D'où un algorithme de l'état initial est présenté avec l'algorithme de CAI pour la commande en poursuite de trajectoires des robots manipulateurs. La norme- λ est adoptée comme une méthode topologique pour démontrer la stabilité asymptotique de cette loi de commande.

Enfin, nous terminerons par une conclusion générale englobant les perspectives et les investigations futures à poursuivre.

Chapitre 1

Généralités sur la commande par apprentissage itératif

1.1 Introduction

Dans le domaine de l'automatique on appelle système répétitif un système qui exécute une tâche donnée d'une manière répétitive (cyclique, itérative) sur un intervalle de temps fixe. Les robots et les machines industrielles (les véhicules convoyeurs, presses automatiques...) programmés pour fonctionner de manière répétitive, constituent ainsi des exemples typiques de ce genre de systèmes. La commande de tels systèmes a suscité énormément d'intérêt, et beaucoup de travaux ont été publiés dans les grands journaux et les congrès importants de la discipline Automatique.

En effet, l'idée d'utiliser une méthode itérative pour compenser une erreur répétitive n'est pas nouvelle. Lorsqu'une machine exécute la même tâche à plusieurs reprises (cycles), il devient intéressant d'utiliser les informations des cycles précédents en vue de réduire l'erreur à la prochaine exécution de cette tâche. Ceci caractérise l'approche de commande par apprentissage itératif CAI. Cette commande consiste à trouver un mécanisme itératif adéquat permettant d'apprendre les erreurs des cycles antérieurs et

exécuter progressivement mieux le nouveau cycle, et par la suite améliorer la poursuite à travers les itérations.

Durant cette dernière décennie, beaucoup de résultats ont été obtenus sur la CAI, nous citons entre autres [BIE98, CHE99a, XU03, BOU07a], parmi lesquelles on trouve celles qui sont synthétisées en faisant appel seulement aux informations (erreur et commande) obtenues à l'itération précédente, ces lois de commande sont appelées lois de CAI du premier ordre, et d'autres lois qui utilisent les informations de plusieurs itérations passées, dans ce cas nous parlons des lois de CAI d'ordre élevé. Il a été montré que la CAI d'ordre élevé est supérieure en termes de performances de convergence par rapport à la CAI du premier ordre [CHE99a].

Dans ce chapitre, nous donnons la philosophie sur laquelle s'appuie la commande par apprentissage itératif, en mettant en évidence le principe de base de cette dernière, l'influence des perturbations sur le système, ainsi que l'application de cette technique de commande aux systèmes linéaires et non linéaires.

1.2 Commande par apprentissage itératif et les autres techniques

Afin de situer la commande par apprentissage itératif par rapport aux autres approches, on donne quelques comparaisons.

1.2.1 Commande classique (à contre réaction)

Un régulateur CAI peut être vu comme un régulateur supplémentaire aux régulateurs classiques, en fait, la contre réaction est conçue pour garantir la stabilité du système avec un minimum de performances, qui vont être améliorées en ajoutant l'effet d'un régulateur CAI.

1.2.2 Commande robuste (CR)

Dans la commande robuste, un régulateur robuste est synthétisé pour la commande d'un système. La robustesse d'un système peut être définie comme étant la capacité de garder les performances vis à vis des variations paramétriques ou incertitudes de modélisation. Certains travaux [CHE99a] ont montré l'application de la CAI en présence des perturbations et des erreurs de modélisation sur le système à commander. En vérifiant certaines conditions, la CAI peut être vue comme une technique de commande robuste.

1.2.3 Commande adaptative (CA)

Dans les schémas de commande adaptative, l'ajustement des paramètres des régulateurs se fait jusqu'à atteindre un état d'équilibre stable. Dans les schémas de CAI, nous exploitons les informations (entrée et erreur) des cycles passés pour la réactualisation du signal de commande plutôt que les paramètres du régulateur. Certains auteurs [TAY04, TAY06, SUN06] ont proposé des schémas de commande par apprentissage itératif adaptatif.

1.3 Principe de la commande par apprentissage itératif

On considère un système dynamique non linéaire fonctionnant d'une manière répétitive, sur un intervalle de temps fixe $t \in [0, T]$, avec la connaissance a priori de la sortie désirée $y_d(t)$.

L'équation d'état décrivant le système à la $k^{\text{ième}}$ itération est donnée par

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = f(x_k(t), u_k(t)) \\ y_k(t) = g(x_k(t), u_k(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $x_k(t)$, $y_k(t)$ et $u_k(t)$ sont l'état, la sortie et la commande du système, respectivement.

L'erreur de poursuite à la $k^{\text{ième}}$ itération est définie par $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$.

1.3.1 Objectif

L'objectif principal de la CAI est d'atteindre certaines performances (stabilité et convergence) et de les maintenir (robustesse) malgré les incertitudes. En d'autres termes, étant donné le modèle dynamique (1.1), la sortie désirée $y_d(t)$, on cherche une séquence de commande $u_k(t)$, telle que la sortie réelle $y_k(t)$ converge vers la sortie désirée $y_d(t)$.

Il est à noter que les conditions de stabilité d'un système non linéaire en utilisant la CAI sont établies en terme de certaines normes du système. Ainsi, la stabilité du système est vérifiée si :

$$\|e_{k+1}(t)\| \leq \rho \|e_k(t)\| \quad (1.2)$$

avec $\rho \in]0, 1[$.

Avant d'aborder le problème de la CAI, les hypothèses suivantes sont données [CHE99a] :

Hypothèse 1.1: Le temps que dure chaque itération (cycle, répétition,...) est fixé. Il est noté T , tel que $T > 0$.

Hypothèse 1.2: La même trajectoire est parcourue à chaque cycle, et cette trajectoire est connue à priori sur l'intervalle de temps $t \in [0, T]$.

Hypothèse 1.3: Les conditions initiales sont les mêmes pour chaque cycle : $x_k(0) = x^0$, pour $k = 1, 2, 3, \dots$

1.3.2 Forme générale d'un régulateur CAI

En général, une loi de commande CAI se présente sous la forme suivante

$$u_{k+1}(t) = f(u_k(t), e_{k+1}(t), e_k(t), \dots, e_{k-m}(t)), \quad m \geq 1. \quad (1.3)$$

On note que f peut dépendre à la fois des erreurs, et/ou de ses dérivées, et/ou de ses intégrales obtenues durant les différents cycles. Le problème fondamental réside dans la détermination d'une forme récursive f simple assurant la convergence de l'erreur avec une vitesse de convergence satisfaisante.

Le schéma bloc de la figure 1.1 traduit la CAI suivante :

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \phi_{k+1}e_{k+1}(t) + \phi_k e_k(t) + \dots + \phi_{k-m}e_{k-m}(t) \quad m \geq 1. \quad (1.4)$$

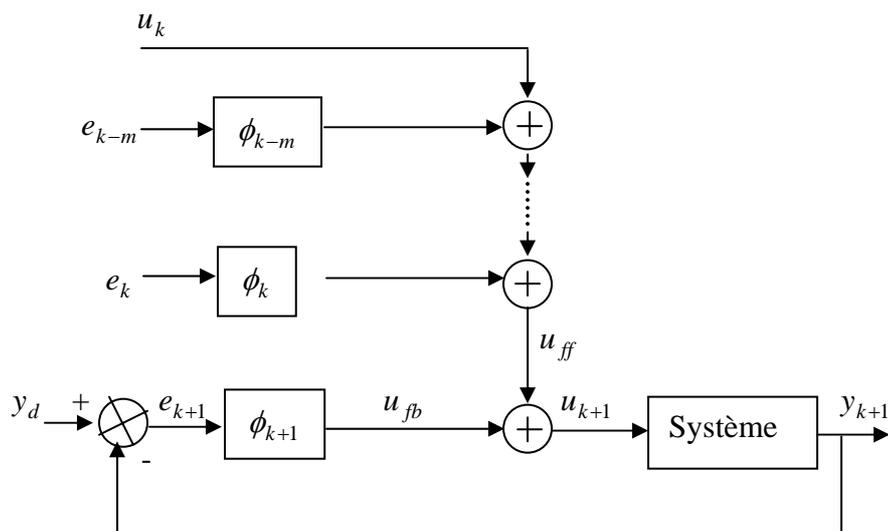


Fig.1.1. Schéma bloc de la CAI.

D'après le schéma, on a

$$u_{k+1}(t) = u_{ff}(t) + u_{fb}(t). \quad (1.5)$$

$u_{ff}(t)$ est la partie du régulateur due à la réaction en amont par cycles passés (feedforward).

$u_{fb}(t)$ est la partie du régulateur due au retour par cycle courant (current cycle feedback).

1.3.2.1 Commande par apprentissage itératif en boucle ouverte

Un schéma souvent utilisé en commande par apprentissage itératif est le schéma dit en boucle ouverte, il est obtenu en posant le gain ϕ_{k+1} égal à zéro. Il est important de noter que ce schéma est en boucle ouverte vis-à-vis du domaine des itérations. Une telle loi de commande est donnée par :

$$u_{k+1}(t) = u_{ff}(t) = u_k(t) + \phi_k e_k(t) + \dots + \phi_{k-m} e_{k-m}(t). \quad (1.6)$$

1.3.2.2 Commande par apprentissage itératif en boucle fermée

Un autre schéma de la CAI dit en boucle fermée a été proposé, il est obtenu en ajoutant au schéma en boucle ouverte une contre réaction par le cycle courant, d'où la forme de la loi de commande est donnée par :

$$u_{k+1}(t) = u_{ff}(t) + u_{fb}(t) = u_k(t) + \phi_{k+1} e_{k+1}(t) + \phi_k e_k(t) + \dots + \phi_{k-m} e_{k-m}(t). \quad (1.7)$$

1.4 Théorie de la commande par apprentissage itératif

Dans cette section, nous nous attacherons à traiter le problème de la CAI dans sa généralité, ceci à travers l'application de cette approche sur les deux classes des systèmes, linéaires et non linéaires. Les conditions de stabilité sont établies par l'utilisation des normes.

1.4.1 Rappel sur les normes

Espace L_2

L_2 est l'espace des fonctions $x : R \rightarrow R$ telle que

$$\int_0^{+\infty} \|x\|^2 dt < \infty. \quad (1.8)$$

Cette définition peut évidemment s'étendre au cas de fonctions vectorielles et de fonctions complexes, en remplaçant la valeur absolue de x par sa norme euclidienne pour le premier cas, et par le module, pour le second.

Seuls les signaux à énergie finie appartiennent à L_2 . Autrement dit, l'espace L_2 convient bien dès qu'il s'agit de décrire des signaux engendrés par des systèmes stables. La norme de x dans L_2 est notée $\|x\|_2$.

On donne maintenant les définitions de certaines normes qui seront utilisées dans la suite.

La norme d'un vecteur X est définie par

$$\|X\| = \sqrt{X^T X} \quad (1.9)$$

et celle d'une matrice A par

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \quad (1.10)$$

avec $\lambda_{\max}(\ast)$ est la plus grande valeur propre de (\ast) .

Soit $x(t)$, $t \in [0, T]$ une fonction réelle, les normes λ et *sup* sont définies par [CHE99a] :

$$\|x(t)\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\| \quad (1.11)$$

$$\|x(t)\|_{\lambda} = \sup_{t \in [0, T]} \{e^{-\lambda t} \|x(t)\|\}. \quad (1.12)$$

On note que

$$\|x(t)\|_{\lambda} \leq \|x(t)\|_{\infty} \leq e^{\lambda T} \|x(t)\|_{\lambda} \quad \lambda > 0. \quad (1.13)$$

Cette propriété est appelée propriété d'équivalence des normes.

1.4.2 Systèmes linéaires

Soit le système linéaire suivant (figure 1.2), dont les tâches sont répétées dans un intervalle de temps :

$$Y_k(s) = V_k(s)P(s) \quad (1.14)$$

avec

$$V_k(s) = U_k(s) + W_k(s). \quad (1.15)$$

k est le nombre des itérations, s est la variable de Laplace, et y_d est la trajectoire désirée.

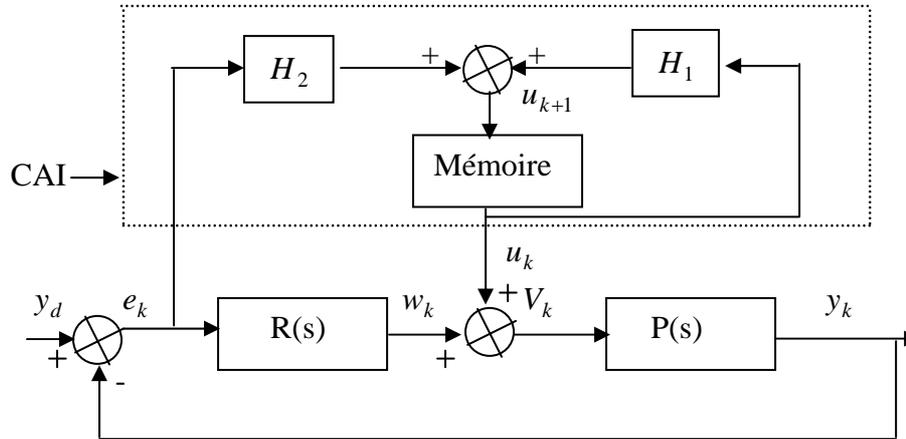


Fig.1.2. Schéma bloc traduisant la forme générale de la CAI.

Objectif

Etant donné une trajectoire désirée y_d , et une commande arbitraire $u_1(t)$, on cherche une commande $u_k(t)$ pour que $y_k(t) \rightarrow y_d(t)$ quand $k \rightarrow \infty$.

Plusieurs algorithmes de la commande par apprentissage itératif existent, et la forme la plus générale de ces algorithmes est la suivante :

$$U_{k+1}(s) = H_1(s)U_k(s) + H_2(s)E_k(s). \quad (1.16)$$

H_1, H_2 seront définis par la suite.

1.4.2.1 Conditions de convergence

En se basant sur les équations (1.14) et (1.16), les conditions de convergence sont évaluées.

Vitesse de convergence

Pour cet aspect de convergence, on considère une trajectoire désirée constante et égale à zéro, $y_d = 0$. L'erreur $e_k = y_d - y_k$ et donc $E_k = Y_d - Y_k$, on trouve

$$E_k = \frac{-P}{1+RP}U_k. \quad (1.17)$$

En utilisant l'équation (1.16) on obtient

$$\begin{aligned}
E_{k+1} &= \frac{-P}{1+RP} U_{k+1} \\
&= \frac{-P}{1+RP} H_1 U_k + \frac{-P}{1+RP} H_2 E_k \\
&= H_1 E_k + \frac{-P}{1+RP} H_2 E_k.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Finalement, on trouve

$$E_{k+1}(s) = \left(H_1(s) - \frac{P(s)}{1+R(s)P(s)} H_2(s) \right) E_k(s). \tag{1.19}$$

En multipliant les deux membres par e^{-2t} , et en appliquant les normes, on obtient

$$\|E_{k+1}(s)\|_2 \leq \left\| H_1(s) - \frac{P(s)}{1+R(s)P(s)} H_2(s) \right\|_\infty \|E_k(s)\|_2. \tag{1.20}$$

D'où

$$\|E_k(s)\|_2 \leq \left\| H_1(s) - \frac{P(s)}{1+R(s)P(s)} H_2(s) \right\|_\infty^k \|E_0(s)\|_2. \tag{1.21}$$

En supposant que $\|E_0(s)\|_2$ est bornée sur une certaine gamme de fréquence. Si

$$\left\| H_1(s) - \frac{P(s)}{1+R(s)P(s)} H_2(s) \right\|_\infty < 1, \tag{1.22}$$

alors $\|E_k(s)\|_2$ sera bornée et converge vers zéro quand $k \rightarrow \infty$.

Eu utilisant le théorème de Parseval ($E_k(s)$ est stable), on obtient

$$\begin{aligned}
\|E_k(s)\|_2 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E_k(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |e_k(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\
&= \|e_k(t)\|_2.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Si (1.22) est réalisée, alors $e_k(t) \rightarrow 0$ dans le sens de la norme L_2 quand $k \rightarrow \infty$.

Erreur asymptotique : Maintenant, on va évaluer l'erreur asymptotique, en exprimant E_{k+1} en fonction de E_k et E_0 , après E_{k+1} et e_k sont substituées par E_∞ qui est exprimé en fonction de E_0 . D'après la figure 1.2, avec $y_d \neq 0$. On peut alors écrire E_k comme suit

$$E_k = \frac{1}{1+RP} Y_d - \frac{P}{1+RP} U_k. \quad (1.24)$$

Après le premier cycle, $u_0 = 0$, donc l'erreur est

$$E_0 = \frac{1}{1+RP} Y_d. \quad (1.25)$$

A partir des équations (1.16), (1.24) et (1.25), l'erreur E_{k+1} peut être exprimée comme suit

$$\begin{aligned} E_{k+1} &= E_0 - \frac{P}{1+RP} U_{k+1} \\ &= E_0 - \frac{P}{1+RP} H_1 U_k - \frac{P}{1+RP} H_2 E_k. \end{aligned} \quad (1.26)$$

En ajoutant et en retranchant $H_1 E_0$, on trouve

$$\begin{aligned} E_{k+1} &= E_0 - H_1 E_0 + (H_1 E_0 - \frac{P}{1+RP} H_1 U_k) - \frac{P}{1+RP} H_2 E_k \\ &= (1 - H_1) E_0 + H_1 E_k - \frac{P}{1+RP} H_2 E_k \\ &= (1 - H_1) E_0 + (H_1 - \frac{P}{1+RP} H_2) E_k. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Pour $k \rightarrow \infty$, substituant $E_{k+1} = E_k = E_\infty$

$$\begin{aligned} E_\infty &= (1 - H_1) E_0 + (H_1 - \frac{P}{1+RP} H_2) E_\infty \\ &= \frac{(1 - H_1)}{(1 - H_1 + \frac{P}{1+RP} H_2)} E_0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Afin d'obtenir une erreur asymptotique nulle, on doit choisir $H_1 = 1$. Et d'après la condition (1.22), H_2 est choisie comme suit

$$H_2 = \left(\frac{P}{1+RP} \right)^{-1}. \quad (1.29)$$

Finalement la loi de commande itérative est donnée par

$$U_{k+1} = U_k + \left(\frac{P}{1+RP} \right)^{-1} E_k. \quad (1.30)$$

1.4.2.2 Influence des perturbations

Jusqu'à maintenant, le système a été considéré sans perturbations. Dans cette section, la synthèse de la CAI est faite en tenant compte de l'influence des perturbations agissantes sur le système.

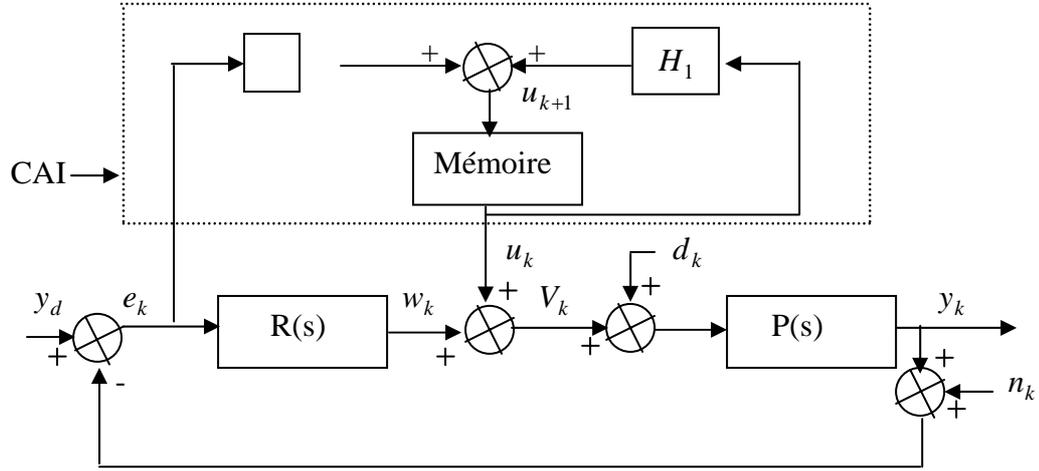


Fig.1.3. Schéma bloc traduisant la forme générale de la CAI incluant l'effet des perturbations.

D'après la figure 1.3, on trouve

$$e_k = \frac{1}{1+RP} y_d - \frac{P}{1+RP} (u_k + d_k) - \frac{1}{1+RP} n_k. \quad (1.31)$$

Soit la loi de commande itérative

$$u_{k+1} = H_1 u_k + H_2 e_k. \quad (1.32)$$

En utilisant (1.25) et (1.32), on obtient

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= e_0 - \frac{P}{1+RP} (u_{k+1} + d_{k+1}) - \frac{1}{1+RP} n_{k+1} \\ &= e_0 - \frac{P}{1+RP} (H_1 u_k + H_2 e_k + d_{k+1}) - \frac{P}{1+RP} n_{k+1}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

En ajoutant et en retranchant $H_1 e_0$, $(P/(1+RP))H_1 d_k$ et $(1/(1+RP))H_1 n_k$, on trouve

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= e_0 - \frac{P}{1+RP} H_1 u_k - \frac{P}{1+RP} H_2 e_k - \frac{P}{1+RP} d_{k+1} \\ &\quad - \frac{1}{1+RP} n_{k+1} + H_1 e_0 - H_1 e_0 + \frac{P}{1+RP} H_1 d_k \\ &\quad - \frac{P}{1+RP} H_1 d_k + \frac{1}{1+RP} H_1 n_k - \frac{1}{1+RP} H_1 n_k. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned}
e_{k+1} = & (1 - H_1)e_0 + H_1 \left(e_0 - \frac{P}{1 + RP} u_k - \frac{P}{1 + RP} d_k - \frac{1}{1 + RP} n_k \right) \\
& + \frac{P}{1 + RP} H_1 d_k + \frac{1}{1 + RP} H_1 n_k \\
& - \frac{P}{1 + RP} H_2 e_k - \frac{P}{1 + RP} d_{k+1} - \frac{1}{1 + RP} n_{k+1}.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Finalement, il vient

$$\begin{aligned}
e_{k+1} = & (1 - H_1)e_0 + \left(H_1 - \frac{P}{1 + RP} H_2 \right) e_k + \frac{P}{1 + RP} (H_1 d_k - d_{k+1}) \\
& - \frac{1}{1 + RP} (H_1 n_k - n_{k+1}).
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Pour l'erreur e_∞ , ($e_{k+1} = e_k = e_\infty$) on trouve

$$\begin{aligned}
e_\infty = & \frac{(1 - H_1)}{(1 - H_1 + \frac{P}{1 + RP} H_2)} e_0 \\
& + \frac{1}{(1 - H_1 + \frac{P}{1 + RP} H_2)} \frac{P}{1 + RP} (H_1 d_k - d_{k+1}) \\
& + \frac{1}{(1 - H_1 + \frac{P}{1 + RP} H_2)} \frac{1}{1 + RP} (H_1 n_k - n_{k+1}).
\end{aligned} \tag{1.37}$$

En réalisant $H_1 = 1$ et $H_2 = (P/(1 + RP))^{-1}$, l'équation (1.37) devient

$$e_\infty = \frac{P}{1 + RP} (d_k - d_{k+1}) + \frac{1}{1 + RP} (n_k - n_{k+1}). \tag{1.38}$$

Si $d_k = d_{k+1}$ et $n_k = n_{k+1}$ (les mêmes perturbations sont répétées pendant tous les cycles), alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0. \tag{1.39}$$

1.4.2.3 Commande par apprentissage itératif dans l'espace d'état

On considère le système linéaire décrit par l'équation d'état suivante

$$\dot{x}_k(t) = ax_k(t) + bu_k(t) \tag{1.40}$$

avec $x_k(t) \in R^n$, $u(t) \in R^n$.

En commençant par une commande arbitraire mais admissible $u_1(t)$, notre objectif est de déterminer une loi de commande $u_k(t)$ tel que $x_k(t)$ converge vers la trajectoire désirée $x_d(t)$, $\forall t \in [0, T]$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

L'hypothèse suivante est nécessaire.

Hypothèse 1.4 : Le système est inversible, c.à.d. $\exists u_d(t)$ unique et bornée, qui peut amener l'état du système vers l'état désiré $x_d(t)$.

1.4.2.3.1 Loi de commande et condition de convergence

Considérons la loi de CAI suivante

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \phi \dot{e}_k(t). \quad (1.41)$$

A l'itération k , l'erreur de commande est définie par

$$\tilde{u}_k(t) = u_d(t) - u_k(t). \quad (1.42)$$

D'où

$$\tilde{u}_{k+1}(t) = u_d(t) - u_{k+1}(t). \quad (1.43)$$

En soustrayant (1.42) de (1.43), on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{k+1}(t) - \tilde{u}_k(t) &= -(u_{k+1}(t) - u_k(t)) \\ &= -\phi \dot{e}_k(t) \\ &= -\phi(\dot{x}_d(t) - \dot{x}_k(t)) \\ &= -\phi(a\tilde{x}_k(t) + b\tilde{u}_k(t)). \end{aligned} \quad (1.44)$$

D'où

$$\tilde{u}_{k+1}(t) = (1 - \phi b)\tilde{u}_k(t) - \phi a \tilde{x}_k(t) \quad (1.45)$$

avec $\tilde{x}_k(t) = x_d(t) - x_k(t)$.

En utilisant les normes, il vient

$$\|\tilde{u}_{k+1}(t)\| \leq \|1 - \phi b\| \|\tilde{u}_k(t)\| + \|\phi a\| \|\tilde{x}_k(t)\|. \quad (1.46)$$

De l'équation (1.40), et en utilisant l'hypothèse 1.3, on trouve

$$\begin{aligned}\tilde{x}_k(t) &= \tilde{x}_k(0) + \int_0^t (a\tilde{x}_k(\tau) + b\tilde{u}_k(\tau)) d\tau \\ &\leq \int_0^t (a\tilde{x}_k(\tau) + b\tilde{u}_k(\tau)) d\tau.\end{aligned}\quad (1.47)$$

En utilisant le lemme de Bellman-Gronwall (lemme 1.2, page 19), on trouve

$$\tilde{x}_k(t) = \int_0^t b\tilde{u}_k(\tau) e^{a(t-\tau)} d\tau. \quad (1.48)$$

D'où

$$\|\tilde{x}_k(t)\| \leq \int_0^t |b| \|\tilde{u}_k(\tau)\| e^{|a|(t-\tau)} d\tau. \quad (1.49)$$

Substituant (1.49) dans (1.46), il vient

$$\|\tilde{u}_{k+1}(t)\| \leq \|1 - \phi b\| \|\tilde{u}_k(t)\| + \|\phi ab\| \int_0^t \|\tilde{u}_k(\tau)\| e^{|a|(t-\tau)} d\tau. \quad (1.50)$$

En utilisant la norme λ , on trouve

$$e^{-\lambda t} \|\tilde{u}_{k+1}(t)\| \leq e^{-\lambda t} \|1 - \phi b\| \|\tilde{u}_k(t)\| + \|\phi ab\| \int_0^t e^{-\lambda t} \|\tilde{u}_k(\tau)\| e^{|a|(t-\tau)} d\tau. \quad (1.51)$$

Alors

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}_{k+1}(t)\|_{\lambda} &\leq \|1 - \phi b\| \|\tilde{u}_k(t)\|_{\lambda} + \|\phi ab\| \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} e^{-\lambda \tau} \|\tilde{u}_k(\tau)\| e^{|a|(t-\tau)} d\tau \\ &\leq \|1 - \phi b\| \|\tilde{u}_k(t)\|_{\lambda} + \|\phi ab\| \|\tilde{u}_k(t)\|_{\lambda} \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t e^{(\lambda - |a|)(\tau - t)} d\tau.\end{aligned}\quad (1.52)$$

D'où

$$\|\tilde{u}_{k+1}(t)\|_{\lambda} \leq \left(\|1 - \phi b\| + \frac{|\phi ab| (1 - e^{-(\lambda - |a|)T})}{\lambda - |a|} \right) \|\tilde{u}_k(t)\|_{\lambda}. \quad (1.53)$$

S'il existe λ suffisamment grand tel que $\lambda \gg |a|$, et $\frac{|\phi ab| (1 - e^{-(\lambda - |a|)T})}{\lambda - |a|} \rightarrow 0$, on peut

alors choisir ϕ tel que $\|1 - \phi b\| < 1$, et par conséquent, il s'ensuit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{u}_k(t) = 0 \quad (1.54)$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_d(t) - x_k(t)\|_{\lambda} = 0. \quad (1.55)$$

Supposons que

$$0 < b < b_{\max} \quad (1.56)$$

d'où le choix de k est comme suit

$$0 < k < \frac{2}{b_{\max}}. \quad (1.57)$$

Ce qui assure

$$\|1 - \phi b\| < 1. \quad (1.58)$$

On conclut qu'avec une connaissance partielle de b , la convergence est assurée, même si a n'est pas disponible. Ce qui montre la robustesse de la CAI vis-à-vis de ce genre d'incertitude.

1.4.3 Systèmes non linéaires

Prenons le système non linéaire à temps variant suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t) + B(t)u(t) \\ y(t) = h(x(t), t). \end{cases} \quad (1.59)$$

$x \in R^n$, $u \in R^r$ et $y \in R^m$ sont le vecteur d'état, de commande et de sortie du système, respectivement. f , B et h sont des fonctions, telles que $f(*) = [f_1(*), \dots, f_n(*)] \in R^n$, $B(*) = [b_1(*), \dots, b_r(*)] \in R^{n \times r}$ et $h(*) = [h_1(*), \dots, h_m(*)]^T \in R^m$.

f est continue et peut être structurellement inconnue, $h(x(t), t)$ et $B(t)$ sont des fonctions continues. L'intervalle du temps associé est $[0, T]$.

Le Jacobien de $h(x(t), t)$ est défini comme suit

$$h_x(x_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (1.60)$$

Les hypothèses suivantes sont nécessaires.

Hypothèse 1.5 : La fonction $f(x(t), t)$ satisfait la condition de continuité de Lipschitz pour $t \in [0, T]$, c'est à dire qu'il existe une constante α pour tout $x_1(t), x_2(t) \in R \times [0, T]$, on a :

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq \alpha \|x_1 - x_2\|. \quad (1.61)$$

Hypothèse 1.6 : La sortie désirée est continue pour $t \in [0, T]$.

Les lemmes suivants sont utilisés.

Lemme 1.1 [YAN01]

Soit une fonction $v(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)]^T \in R^n$ définie pour $t \in [0, T]$. On a :

$$\left(\int_0^t \|v(s)\| ds \right) e^{-\lambda t} \leq \frac{1}{\lambda} \|v(t)\|_\lambda \quad t \in [0, T]. \quad (1.62)$$

Preuve

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t \|v(s)\| ds \right) e^{-\lambda t} &= \int_0^t \|v(s)\| e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)} ds \\ &\leq \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \{ \|v(s)\| e^{-\lambda s} \} \right] \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} ds \\ &\leq \left[\sup \{ \|v(t)\| e^{-\lambda t} \} \right] \frac{(1 - e^{-\lambda t})}{\lambda} \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|v(t)\|_\lambda. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Lemme 1.2 (Gronwall-Bellman) [YAN01]

Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions scalaires réelles et localement intégrables dans $[a, b]$.

Si la fonction $f(t)$ satisfait l'inégalité suivante

$$f(t) \leq L + \int_0^t g(\tau) f(\tau) d\tau \quad t \in [a, b] \quad (1.64)$$

alors

$$f(t) \leq L \exp\left(\int_0^t g(\tau) d\tau\right) \quad (1.65)$$

avec L est une constante.

Lemme 1.3 [YAN01]

Soient $\xi(t)$, $\eta_1(t)$ et $\eta_2(t)$ des fonctions continues dans $[0, T]$. Si

$$\|\xi(t)\| \leq \Gamma \int_0^t \|\xi(s)\| ds + \Gamma_1 \int_0^t \|\eta_1(s)\| ds + \Gamma_2 \|\eta_2(t)\|, \quad t \in [0, T] \quad (1.66)$$

alors

$$\|\xi(t)\|_\lambda \leq \left(\frac{1}{\lambda} \Gamma_1 \|\eta_1(t)\|_\lambda + \Gamma_2 \|\eta_2(t)\|_\lambda \right) \exp\left(\frac{\Gamma}{\lambda}\right) \quad (1.67)$$

avec $\Gamma \geq 0$, $\lambda > 0$, Γ_1 et Γ_2 sont des constantes.

Preuve

De la condition du lemme 1.2, il s'ensuit que pour tout $t \in [0, T]$

$$\|\xi(t)\| e^{-\lambda t} \leq \Gamma \int_0^t \|\xi(s)\| e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)} ds + \left(\Gamma_1 \int_0^t \|\eta_1(s)\| ds \right) e^{-\lambda t} + \Gamma_2 \|\eta_2(t)\| e^{-\lambda t}. \quad (1.68)$$

En appliquant le lemme 1.1, pour $t \in [0, T]$ on trouve

$$\|\xi(t)\| e^{-\lambda t} \leq \left(\frac{1}{\lambda} \Gamma_1 \|\eta_1(t)\|_\lambda + \Gamma_2 \|\eta_2(t)\|_\lambda \right) + \Gamma \int_0^t \|\xi(s)\| e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)} ds. \quad (1.69)$$

En utilisant le lemme 1.2, on obtient pour $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|\xi(t)\| e^{-\lambda t} &\leq \left(\frac{1}{\lambda} \Gamma_1 \|\eta_1(t)\|_\lambda + \Gamma_2 \|\eta_2(t)\|_\lambda \right) \exp\left(\int_0^t \Gamma e^{-\lambda(t-s)} ds\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{\lambda} \Gamma_1 \|\eta_1(t)\|_\lambda + \Gamma_2 \|\eta_2(t)\|_\lambda \right) \exp\left(\frac{\Gamma}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (1.70)$$

Théorème 1.1[YAN01]: Etant donné le système non linéaire (1.59) vérifiant les hypothèses 1.3, 1.5 et 1.6. Pour une commande admissible $u_1(t) \in U$, et en appliquant la loi de CAI suivante

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + K(t)\dot{e}_k(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.71)$$

Si

1. $h_x(x, t)$ est bornée dans $R^n \times [0, T]$,
2. $\sup_{(x,t) \in R^n \times [0,T]} \|I_m - h_x(x, t)B(t)K(t)\| < 1$.

Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.72)$$

Le schéma bloc traduisant cette loi de commande est le suivant.

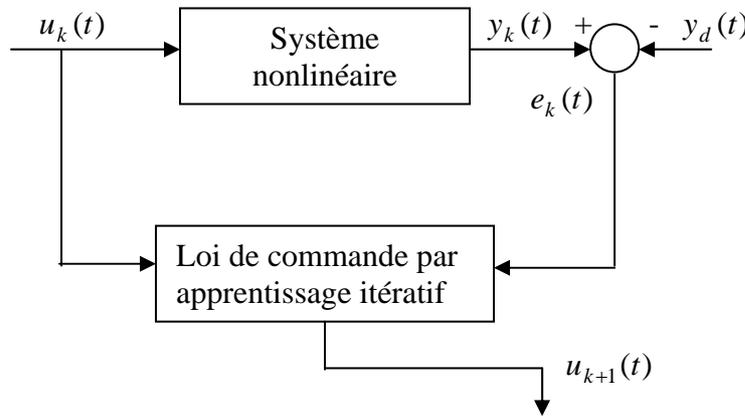


Fig.1.4. Schéma de principe de la CAI autonome off line.

Preuve (Voir Annexe A).

1.4.3.1. Exemple de simulation 1

Considérons le modèle dynamique d'un bras manipulateur donné dans [LEE91] comme suit

$$J_m \ddot{q}(t) + Sg \sin(q(t)) = u(t).$$

Avec g est l'accélération gravitationnelle, $u(t)$ est le couple appliqué, et $q(t)$ est l'angle de rotation du bras en radians. En posant $x_1 = q$ et $x_2 = \dot{q}$, notre système est décrit par

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -J_m^{-1} S g \sin x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ J_m^{-1} \end{bmatrix} u.$$

La sortie choisie est $y = \frac{2}{5}x_2$, avec $J_m = 14kgm^2$, $S = 6kg.m$, $g = 9.8m/s^2$, $K(t) = 14$,

$T=2s$, ce qui nous donne : $h_x = \left[0, \frac{2}{5}\right]$, $\alpha = \frac{6}{7} \times 9.8 = 8.4$.

La sortie désirée est $y_d(t) = t - t^2$, $x_1(0) = [0,1]$, et $u_1(t) = 1$.

Les résultats de simulation sont présentés par les figures suivantes

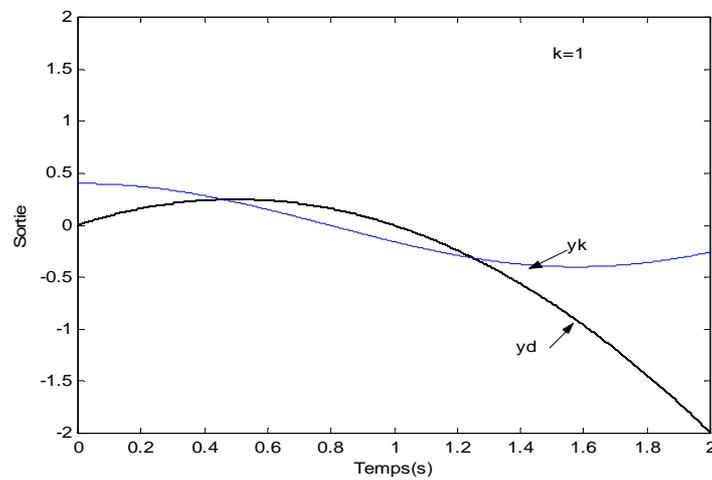


Fig.1.5. Réponse pour k= 1.

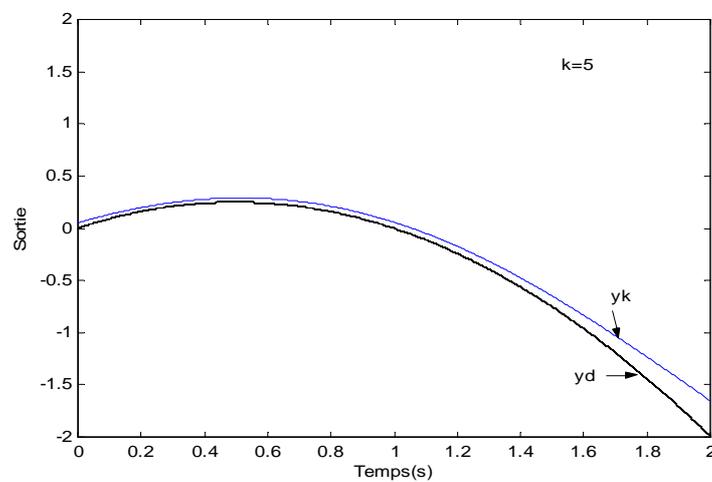


Fig.1.6. Réponse pour k=5.

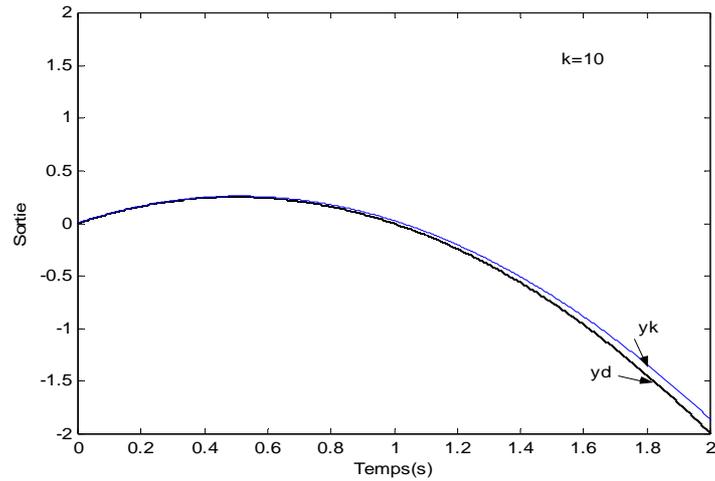


Fig.1.7. Réponse pour $k=10$.

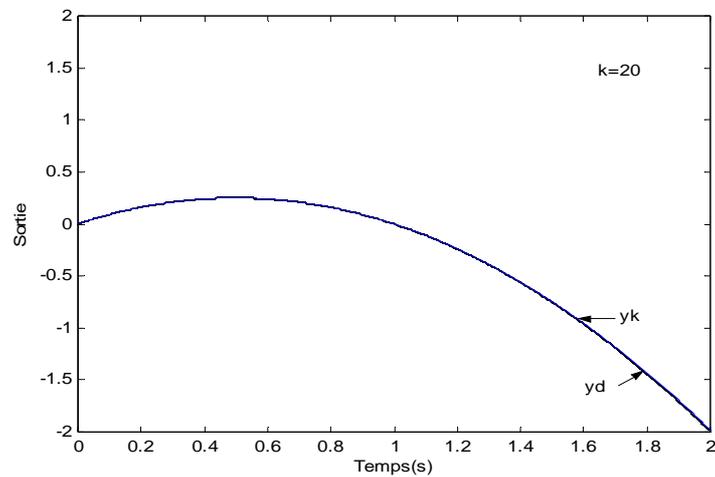


Fig.1.8. Réponse pour $k=20$.

On remarque qu'après 20 itérations, la sortie réelle tend vers la sortie désirée. Ce résultat prouve l'efficacité de la loi de commande par apprentissage itératif autonome "off-line".

Théorème 1.2 [BOU03]

Considérons le système non linéaire (1.59) vérifiant les hypothèses 1.3, 1.5 et 1.6. Pour une commande admissible $u_1(t) \in U$, et en appliquant la loi de CAI suivante

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + L(t)\dot{e}_k(t) + K(t)\dot{e}_{k+1}(t) \quad k = 1,2,\dots \quad (1.73)$$

Si

1. $h_x(x,t)$ est bornée dans $R^n \times [0,T]$,
2. $I_m + h_x(x(t),t)B(t)K(t)$ est non singulière,

$$3. \quad \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]} \left\| (I_m - h_x(x,t)B(t)L(t))(I_m + h_x(x,t)B(t)K(t))^{-1} \right\| < 1.$$

Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t) \quad \forall t \in [0,T] \quad (1.74)$$

avec $K(t) \in C^1$ et $L(t) \in C^1$ des matrices de gains.

Le schéma bloc traduisant cette loi de commande est le suivant.

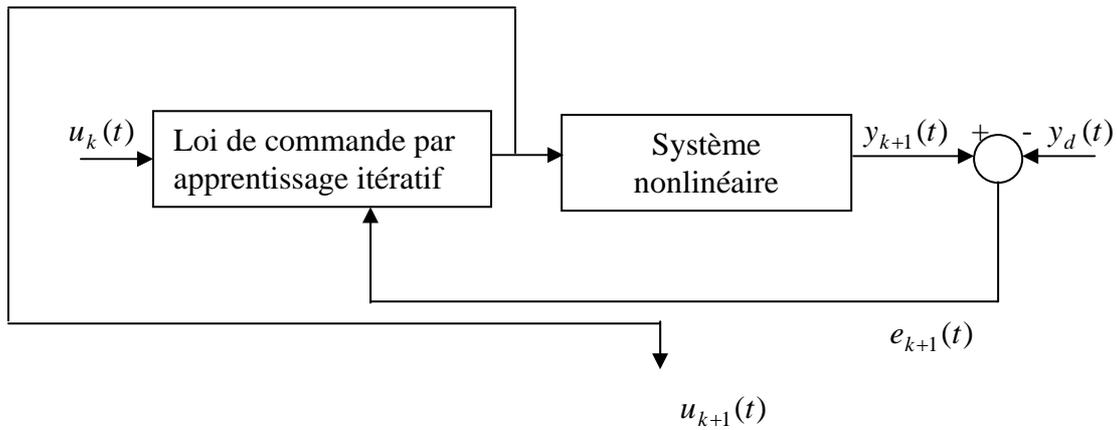


Fig.1.9. Schéma de principe de la CAI connectée (*on-line*).

Preuve : (Voir annexe B).

1.4.3.2. Exemple de simulation 2

On prend le même modèle dynamique d'un bras manipulateur de l'exemple précédent, donc on aura

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -J_m^{-1} Sg \sin x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ J_m^{-1} \end{bmatrix} u.$$

La sortie choisie est $y = \frac{2}{5} x_2$. Les valeurs des paramètres sont définies dans l'exemple 1.

On prend $K(t) = 14$, pour que la condition dans le théorème 2 soit satisfaite. La loi de commande itérative connectée « on-line » type D est donnée par

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + 50\dot{e}_k(t) + 14\dot{e}_{k+1}(t).$$

Avec $L(t) = 10$ et $K(t) = 14$ pour que les conditions dans le théorème 2 soient satisfaites.

Pour une fonction continue $y_d(t)$ dans $[0, T]$, il existe $u(t) \in U$, tel que $y_d(t) = h(x_d(t), t)$, avec $x_d(t)$ est générée par $u_d(t)$ (hypothèse 1.4 est vérifiée), qui est donnée par

$$u_d(t) = 35 - 70t - 58.8 \sin\left(\frac{5t^2(2t-3)}{12}\right)$$

avec $x_1(0) = [0, 1]$, et $u_1(t) = 1$. Les résultats de simulation sont présentés comme suit.

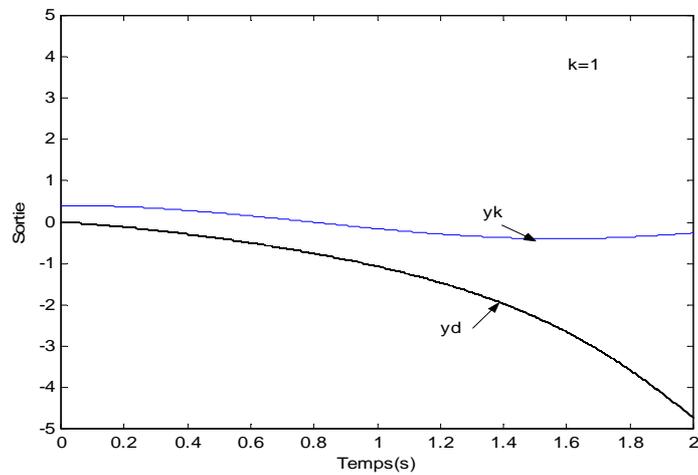


Fig.1.10. Réponse pour $k=1$.

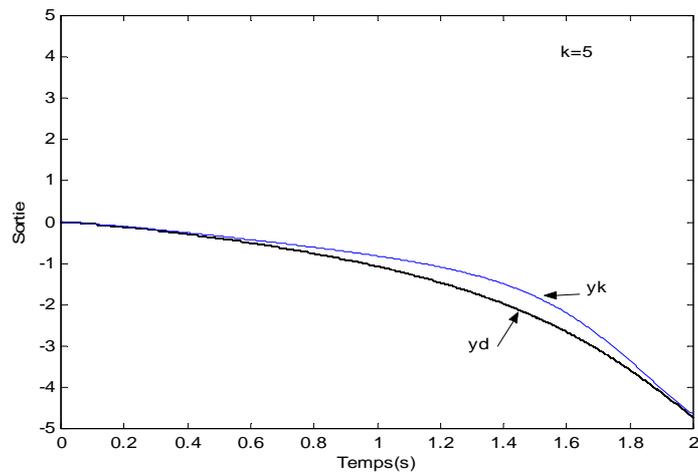


Fig.1.11. Réponse pour $k=5$.

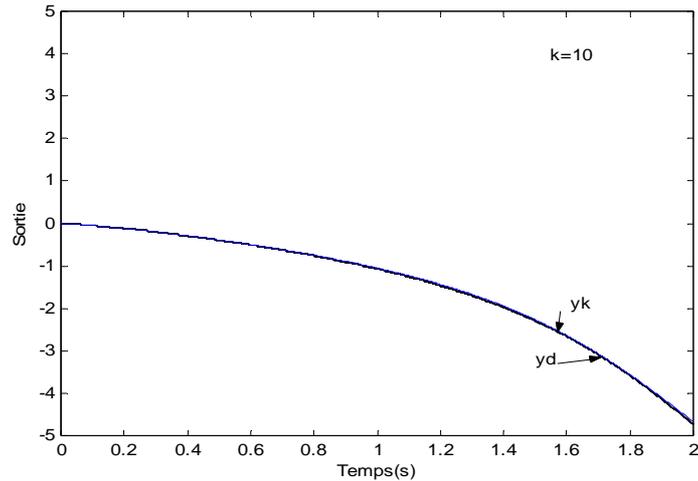


Fig.1.12. Réponse pour $k=10$.

On remarque, qu'après 10 itérations, le système se corrige et la sortie réelle tend vers la sortie désirée. Donc, on peut conclure que la CAI *on-line* est meilleure en terme de rapidité de convergence que la CAI *off-line*.

1.4.4 Systèmes non linéaires perturbés

On considère le système non linéaire variant dans le temps en présence des perturbations

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = f(x_k(t), t) + B(t)u_k(t) + w_k(t) \\ y_k(t) = h(x_k(t), t) + v_k(t) \end{cases} \quad (1.75)$$

avec $x_k \in R^n$, $u_k \in R^r$ et $y_k \in R^m$ représentent respectivement, le vecteur d'état, la commande et la sortie du système, $w_k(t)$ et $v_k(t)$ sont des perturbations. La fonction f est continue et peut être inconnue, $h(x(t), t)$ et $B(t)$ sont des fonctions continues. L'intervalle du temps associé est $[0, T]$.

La commande par apprentissage itératif de type PD, et la loi d'apprentissage de l'état initial sont données par :

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + K(t)\dot{e}_k(t) + L(t)e_k(t) \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.76)$$

$$x_{k+1}(0) = x_k(0) + B(0)K(0)e_k(0) \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.77)$$

Les hypothèses suivantes sont imposées.

Hypothèse 1.7 : Les perturbations $w_k(t)$ et $v_k(t)$ sont bornées comme suit

$$\|w_{k+1}(t) - w_k(t)\|_\lambda \leq b_w, \quad \|v_{k+1}(t) - v_k(t)\|_\lambda \leq b_v \quad \forall t \in [0, T] \text{ et } \forall k.$$

Hypothèse 1.8 : $B(t)$ et $K(t)$ sont différentiables sur $[0, T]$, de plus $K(0) \neq 0$, $B(0) \neq 0$.

Théorème 1.3 [BOU03]

Considérons le système non linéaire (1.75) vérifiant les hypothèses 1.5-1.8. Pour une commande admissible $u_1(t) \in U$, et en appliquant la loi de CAI (1.76) et l'algorithme de l'état initial (1.77). Si

1. $h_x(x, t)$ est bornée dans $R^n \times [0, T]$
2. $\sup_{(x,t) \in R^n \times [0, T]} \|I_m - h_x(x, t)B(t)K(t)\| < 1$
3. Les perturbations pour deux itérations successives sont les même, c.a.d.
 $b_v = 0$ e $b_w = 0$.

Alors la sortie réelle converge vers la sortie désirée dans le sens de:

$$\|e_k(t)\|_\lambda \leq \frac{\delta b_w T \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda} \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right) + b_v}{1 - \left(\|I_m - h_x(x, t)B(t)K(t)\| + \frac{\delta}{\lambda} \left(\mu_2 + \mu_3 + \alpha \left(\mu_1 + \frac{\mu_2 + \mu_3}{\lambda} \right) \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \right) \right)}$$

De plus, si on prend $\lambda \gg \alpha$ largement suffisant, on aura

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) \rightarrow 0, \quad t \in [0, T].$$

$$\text{où } \mu_1 = \sup_{t \in [0, T]} \|B(t)K(t)\|, \quad \mu_2 = \sup_{t \in [0, T]} \|B(t)L(t)\|, \quad \mu_3 = \sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{d[B(t)K(t)]}{dt} \right\|,$$

$$\delta = \sup_{(x,t) \in R^n \times [0, T]} \{ \|h_x(x, t)\| \}.$$

Preuve

De (1.75), (1.76) et (1.77), on aura

$$\begin{aligned}
x_{k+1}(t) &= x_{k+1}(0) + \int_0^t (f(x_{k+1}(s), s) + B(s)u_{k+1}(s) + w_{k+1}(s)) ds \\
&= x_k(0) + B(0)K(0)e_k(0) + \int_0^t f(x_{k+1}(s), s) ds + \int_0^t B(s)(u_k(s) + K(s)\dot{e}_k(s) \\
&\quad + L(s)e_k(s)) ds + \int_0^t w_{k+1}(s) ds \\
&= x_k(0) + B(0)K(0)e_k(0) + \int_0^t f(x_{k+1}(s), s) ds + \int_0^t B(s)u_k(s) ds + B(t)K(t)e_k(t) \\
&\quad - B(0)K(0)e_k(0) - \int_0^t \frac{d(B(s)K(s))}{ds} e_k(s) ds + \int_0^t B(s)L(s)e_k(s) ds + \int_0^t w_{k+1}(s) ds \\
&= x_k(0) + \int_0^t [f(x_k(s), s) + B(s)u_k(s) + w_k(s)] ds + \int_0^t [f(x_{k+1}(s), s) - f(x_k(s), s)] ds \\
&\quad + B(t)K(t)e_k(t) - \int_0^t \frac{d(B(s)K(s))}{ds} e_k(s) ds + \int_0^t B(s)L(s)e_k(s) ds + \int_0^t (w_{k+1}(s) - w_k(s)) ds \\
&= x_k(t) + \int_0^t [f(x_{k+1}(s), s) - f(x_k(s), s)] ds + B(t)K(t)e_k(t) - \int_0^t \frac{d(B(s)K(s))}{ds} e_k(s) ds \\
&\quad + \int_0^t B(s)L(s)e_k(s) ds + \int_0^t (w_{k+1}(s) - w_k(s)) ds.
\end{aligned} \tag{1.78}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
x_{k+1}(t) - x_k(t) &= \int_0^t [f(x_{k+1}(s), s) - f(x_k(s), s)] ds + B(t)K(t)e_k(t) \\
&\quad - \int_0^t \frac{d(B(s)K(s))}{ds} e_k(s) ds + \int_0^t B(s)L(s)e_k(s) ds + \int_0^t (w_{k+1}(s) - w_k(s)) ds
\end{aligned} \tag{1.79}$$

En utilisant l'hypothèse 1.5, on obtient

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq \alpha \int_0^t \|x_{k+1}(s) - x_k(s)\| ds + \mu_1 \|e_k(t)\| + (\mu_2 + \mu_3) \int_0^t \|e_k(s)\| ds + b_w T \tag{1.80}$$

$$\text{où } \mu_1 = \sup_{t \in [0, T]} \|B(t)K(t)\|, \quad \mu_2 = \sup_{t \in [0, T]} \|B(t)L(t)\|, \quad \mu_3 = \sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{d[B(t)K(t)]}{dt} \right\|.$$

En multipliant les deux membres de (1.80) par $e^{-\lambda t}$, et en appliquant le lemme 1.1, on trouve

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\|_\lambda \leq \alpha \int_0^t \|x_{k+1}(s) - x_k(s)\|_\lambda e^{-\lambda(t-s)} ds + \left(\mu_1 + \frac{\mu_2 + \mu_3}{\lambda} \right) \|e_k(t)\|_\lambda + b_w T \quad (1.81)$$

En appliquant le lemme 1.2, il vient

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\|_\lambda \leq \left[b_w T + \left(\mu_1 + \frac{\mu_2 + \mu_3}{\lambda} \right) \|e_k(t)\|_\lambda \right] \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \quad (1.82)$$

D'après le théorème de la valeur moyenne différentielle, il existe $\xi_k(t)$, tel que

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}(t) - e_k(t)\| &\leq \|y_k(t) - y_{k+1}(t)\| \\ &\leq \left(\sup_{\xi_k(t) \in [x_{k+1}(t), x_k(t)]} \|h_x(\xi_k(t), t)\| \right) \|x_k(t) - x_{k+1}(t)\| \end{aligned} \quad (1.83)$$

où $[x_{k+1}(t), x_k(t)]$ est le segment de R^n reliant $x_{k+1}(t)$ à $x_k(t)$.

De (1.79), (1.82) et (1.83), on trouve

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}(t)\|_\lambda &\leq \left\{ \|I_m - h_x(x_k(t), t)B(t)K(t)\| + \frac{\delta}{\lambda} \left[\mu_2 + \mu_3 + \alpha \left(\mu_1 + \frac{\mu_2 + \mu_3}{\lambda} \right) \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \right] \right\} \|e_k(t)\|_\lambda \\ &\quad + \delta b_w T \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda} \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \right) + b_v \end{aligned} \quad (1.84)$$

avec $\delta = \sup_{(x,t) \in R^n \times [0,T]} \{ \|h_x(x,t)\| \}$.

Si $\sup_{(x,t) \in R^n \times [0,T]} \|I_m - h_x(x,t)B(t)K(t)\| < 1$, il existe $\lambda (\lambda > 0)$ assez grand, pour tout $t \in [0, T]$,

on aura

$$\sup_{(x,t) \in R^n \times [0,T]} \|I_m - h_x(x_k(t), t)B(t)K(t)\| + \frac{\delta}{\lambda} \left[\mu_2 + \mu_3 + \alpha \left(\mu_1 + \frac{\mu_2 + \mu_3}{\lambda} \right) \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \right] = \rho < 1 \quad (1.85)$$

et donc

$$\|e_k(t)\|_\lambda \leq \frac{\delta b_w T \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda} \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right) + b_v}{1 - \left(\|I_m - h_x(x_k(t), t) B(t) K(t)\| + \frac{\delta}{\lambda} \left[\mu_2 + \mu_3 + \alpha \left(\mu_1 + \frac{\mu_2 + \mu_3}{\lambda} \right) \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \right] \right)} \quad (1.86)$$

Finalement, si $b_w = 0$ et $b_v = 0$, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(t)\|_\lambda = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (1.87)$$

1.4.4.1. Exemple de simulation 3

Soit le système non linéaire variant dans le temps suivant [CHE99b]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1k} \\ \dot{x}_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \sin(x_{2k}) & 1 + \alpha_1 \sin(x_{1k}) \\ -2 - 5t & -3 - 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1k} \\ 2u_{2k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1k} \\ w_{2k} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_{1k}(t) \\ y_{2k}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1k}(t) \\ v_{2k}(t) \end{bmatrix}$$

Les perturbations sont données par

$$\begin{bmatrix} w_{1k}(t) \\ w_{2k}(t) \end{bmatrix} = \alpha_2 \begin{bmatrix} \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t) \\ 2 \cos(4\pi \cdot f_0 \cdot t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{1k}(t) \\ v_{2k}(t) \end{bmatrix} = \alpha_2 \begin{bmatrix} \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t) \\ 2 \sin(4\pi \cdot f_0 \cdot t) \end{bmatrix}$$

avec $t \in [0, 1]$, $f_0 = 1/(20h) \text{Hz}$, $h = 0.01 \text{s}$, $B(t) = \text{diag}[1, 2]$, $h_x(x, t) = [4, 1]$, $K = \text{diag}[0.125, 0.25]$, $L = \text{diag}[0.4, 0.6]$, $x_{1_1}(0) = \alpha_3$, $x_{2_1}(0) = -\alpha_3$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = -0.5$.

Les sorties désirées sont données par

$$y_{1d}(t) = y_{2d}(t) = 12t^2(1-t).$$

Si $b_v = 0$ et $b_w = 0$, les résultats de simulation sont donnés par les figures suivantes :

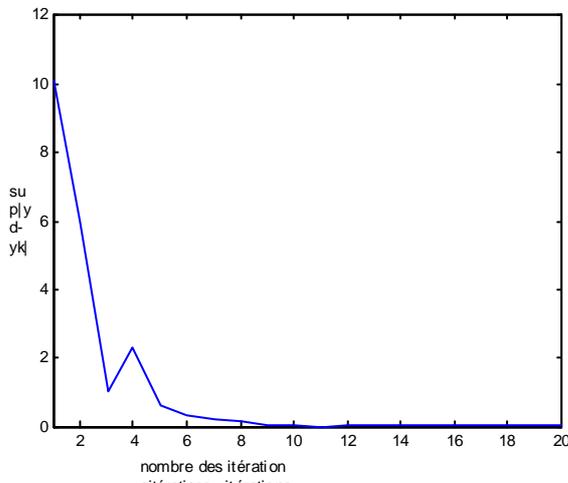


Fig.1.13. Norme Sup. de l'erreur e_1 au cours des itérations.

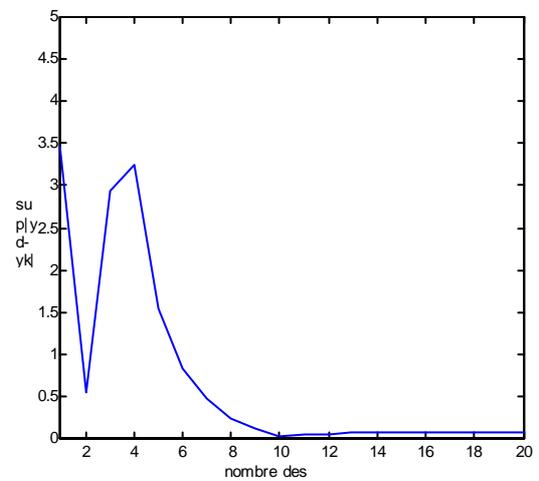


Fig.1.14. Norme Sup. de l'erreur e_2 au cours des itérations.

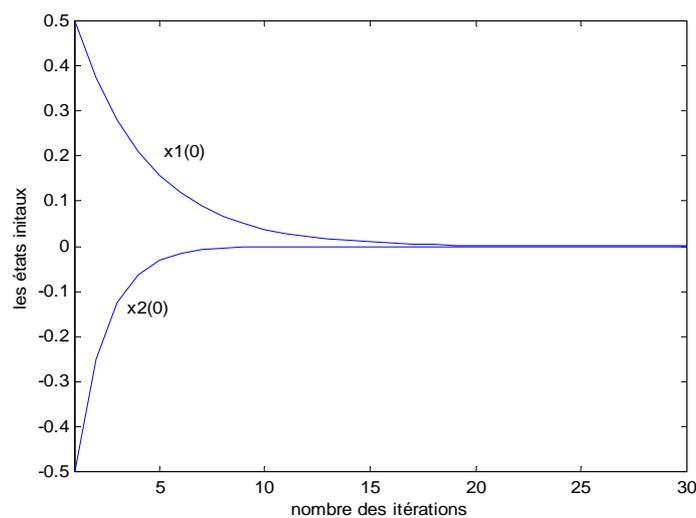


Fig.1.15. Evolution des états initiaux au cours des itérations.

L'évolution de la norme Sup. de l'erreur de poursuite au cours des itérations est présentée par les figures 1.13 et 1.14. On constate, qu'au bout d'un nombre limité d'itérations l'erreur de poursuite est pratiquement nulle. Par conséquent, on peut conclure que la commande présentée améliore les performances du système à travers les itérations, ce qui prouve l'efficacité de cette technique de commande. La figure 1.15 montre l'évolution des états initiaux au cours des itérations.

1.5 Degré relatif et commande par apprentissage itératif

Une caractéristique fondamentale dans les schémas de commande par apprentissage itératif est la relation qui existe entre le degré relatif du système et la condition de convergence. En fait, cette relation n'a pas été clarifiée jusqu'à 1991 par Sugie et Ono [SUG91].

Considérons une classe de systèmes mono-variables, non linéaires décrite par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = f(x_k(t), t) + g(x_k(t), t)u_k(t) \\ y_k(t) = h(x_k(t), t). \end{cases} \quad (1.88)$$

$t \in [0, T]$, $x_k(t) \in R^n$, $u_k(t) \in R$, $y_k(t) \in R$ sont l'état, la commande et la sortie du système, respectivement.

Le degré relatif de ce système est égal au nombre de fois qu'il faut dériver la sortie $y(t)$ par rapport au temps à l'instant t pour faire apparaître explicitement la commande $u(t)$.

Maintenant, on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées.

Hypothèse 1.9 : Les fonctions $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ et $h(\cdot)$ vérifient la condition de Lipschitz par rapport à x sur $t \in [0, T]$, c.à.d. il existe des constantes f_0 , g_0 et h_0 , tels que pour toute $(x_1, t), (x_2, t) \in R \times [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|f(x_1(t), t) - f(x_2(t), t)\| &\leq f_0 \|x_1 - x_2\| \\ \|g(x_1(t), t) - g(x_2(t), t)\| &\leq g_0 \|x_1 - x_2\| \\ \|h(x_1(t), t) - h(x_2(t), t)\| &\leq h_0 \|x_1 - x_2\|. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Hypothèse 1.10 : Le système (1.75) a un degré relatif r pour tout $x_k(t), t \in [0, T]$.

Hypothèse 1.11 : La sortie désirée est supposée r fois continûment différentiable.

Théorème 1.3 [ZEN92]

Etant donné le système non linéaire (1.88) vérifiant les hypothèses 1.3, 1.4 et 1.9-1.11. Pour une commande admissible $u_1(t) \in U$, et en appliquant la loi de CAI suivante :

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \sum_{i=0}^r s_{k,i}(t) e_k^i(t). \quad (1.90)$$

Si

$$\left\| 1 - s_{k,r}(t) L_g L_f^{r-1} h(x_k(t), t) \right\| \leq \rho < 1, \quad t \in [0, T), \quad (1.91)$$

alors, l'erreur converge uniformément vers zéro quand $k \rightarrow \infty$.

Avec $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$, $e_k^m(t)$ est la dérivée de $e_k(t)$ d'ordre m , $s_{k,i}(t)$ est un gain borné, r est le degré relatif du système. $L_f v(x)$ est la dérivée de Lie d'une fonction $v(x)$ suivant le champ de vecteur f , elle est définie par :

$$\begin{aligned} L_f v(x) &= \frac{\partial v}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i \\ L_f^j v(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (L_f^{j-1} v(x))}{\partial x_i} f_i, \quad L_f^0 = v(x). \end{aligned} \quad (1.92)$$

Preuve (Voir Annexe C).

Donc On peut dire que le degré relatif r du système représente l'ordre minimum de la dérivée de l'erreur qu'il faut utiliser dans la loi de commande pour qu'il y ait convergence.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons formulé la commande par apprentissage itératif dans sa généralité, en donnant le principe de base et la forme la plus générale de cette technique de commande qui est applicable à une classe de systèmes dits répétitifs. Ainsi, nous avons montré l'influence des perturbations sur le système de commande, en évaluant les conditions de convergence.

Ensuite, nous avons procédé à l'application de la commande par apprentissage itératif sur les deux classes de systèmes, linéaire et non linéaire, en donnant les conditions suffisantes assurant la convergence des algorithmes présentés. En particulier, les deux types de CAI, à savoir, CAI connectée (boucle fermée, on line) et CAI autonome (boucle ouverte, off line) ont été appliquées aux systèmes non linéaires. Nous avons constaté d'après les résultats de simulation, que la CAI connectée (*on-line*) a donné des résultats meilleurs que ceux de la CAI autonome (*off-line*) en terme de rapidité de convergence.

Commande par apprentissage itératif des robots manipulateurs

2.1 Introduction

Habituellement, les robots manipulateurs sont utilisés pour exécuter des tâches répétitives. Dans ce cas, la trajectoire de référence est répétée sur un intervalle de temps donné. En effet, l'utilisation d'un régulateur conventionnel pour de tels systèmes fournira la même erreur à chaque cycle. Donc, il devient intéressant de concevoir un régulateur capable d'utiliser les informations des cycles précédents en vue d'améliorer les performances du système à la prochaine exécution de la tâche. Ceci est le principe de la commande par apprentissage itératif CAI.

L'intérêt de la commande par apprentissage itératif apparaît dans le problème de poursuite de différents types de consignes. Un exemple d'un tel système est le bras de robot dans une ligne d'assemblage manufacturière. Le bras de robot dans cette situation doit suivre plusieurs fois une trajectoire donnée, mais il doit être configuré pour suivre plusieurs trajectoires différentes suivant les besoins de production.

Dans ce chapitre, nous présentons deux lois de CAI pour la commande en poursuite de trajectoires des robots manipulateurs rigides. La première est constituée d'une commande à contre réaction et d'une commande itérative. La seconde est une commande itérative sans l'ajout d'une contre réaction. Utilisant la théorie de Lyapunov, la stabilité asymptotique du système en boucle fermée est démontrée pour les deux lois de commandes.

2.2 Modèle et propriétés structurales des robots manipulateurs

2.2.1 Modèle des robots manipulateurs

Une des procédures employées pour obtenir les modèles dynamiques des robots manipulateurs est basée sur les équations de mouvement de Lagrange. Cette procédure est décrite ci-après de manière résumée.

L'énergie totale ET d'un robot manipulateur de n degrés de liberté est la somme de ses énergies cinétique EC et potentielle EP

$$ET(q, \dot{q}) = EC(q, \dot{q}) + EP(q). \quad (2.1)$$

Le lagrangien $L(q, \dot{q})$ d'un robot manipulateur de n degrés de liberté est égal à la différence entre son énergie cinétique EC et son énergie potentielle EP

$$L(q, \dot{q}) = EC(q, \dot{q}) - EP(q). \quad (2.2)$$

Les équations de mouvement de Lagrange pour un manipulateur de n degrés de liberté sont données par

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau \quad (2.3)$$

ou de manière équivalente

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

où τ_i sont les forces et les couples exercés extérieurement (par des actionneurs) dans chaque articulation, ainsi que les frottements.

L'énergie cinétique $EC(q, \dot{q})$ associée aux robots manipulateurs peut s'exprimer de la manière suivante

$$EC(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (2.5)$$

où $M(q)$ est une matrice symétrique définie positive de dimension $n \times n$ appelée matrice d'inertie. L'énergie potentielle $EP(q)$ n'a pas de forme spécifique comme dans le cas de l'énergie cinétique, mais on sait qu'elle dépend du vecteur de positions articulaires q .

Le lagrangien $L(q, \dot{q})$, donné par l'équation (2.2), est égal dans ce cas à

$$L(q, \dot{q}) = \dot{q}^T M(q) \dot{q} - EP(q). \quad (2.6)$$

D'où, l'équation de mouvement de Lagrange (2.4) peut être exprimée de la manière suivante

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] + \frac{\partial EP(q)}{\partial q} = \tau. \quad (2.7)$$

D'autre part, on peut vérifier que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] = M(q) \dot{q} \quad (2.8)$$

et

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] \right] = M(q) \ddot{q} + \dot{M}(q) \dot{q}. \quad (2.9)$$

Considérant les expressions précédentes, l'équation de mouvement prend la forme suivante

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau \quad (2.10)$$

où

$$C(q, \dot{q}) \dot{q} = \dot{M}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left[\dot{q}^T M(q) \dot{q} \right] \quad (2.11)$$

$$G(q) = \frac{\partial EP(q)}{\partial q}. \quad (2.12)$$

En ajoutant l'effet des perturbations externes notées d , (2.10) devient

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) + d = \tau. \quad (2.13)$$

L'équation (2.13) est l'équation dynamique pour des robots à n degrés de liberté. Noter que (2.13) est une équation différentielle vectorielle non linéaire, dont l'état est $\begin{bmatrix} q^T & \dot{q}^T \end{bmatrix}^T$, $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ est un vecteur de $n \times 1$ appelé le vecteur de forces centrifuges et de Coriolis, $G(q)$ est un vecteur de $n \times 1$ de forces et couples de gravitation, et τ est un vecteur de $n \times 1$ appelé le vecteur de forces extérieures. Les couples et les forces étant généralement appliqués par les actionneurs.

Une manière d'obtenir $C(q, \dot{q})$ est d'utiliser des coefficients ou symboles de Christoffel $c_{ijk}(q)$ définis comme suit

$$c_{ijk}(q) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right] \quad (2.14)$$

où $M_{ij}(q)$ révèle le $ij^{\text{ème}}$ élément de la matrice $M(q)$.



Fig. 2.1. Schéma bloc du robot.

Le modèle (2.13) peut être vu comme un système dynamique dont l'entrée est le vecteur de couples et de forces τ générés par les actionneurs, et les sorties, sont les vecteurs de position q et de vitesse \dot{q} . Ceci est schématisé par la figure 2.1.

Dans ce qui suit, $q_d(t)$, $\dot{q}_d(t)$, $\ddot{q}_d(t) \in R^n$ désignent les vecteurs de position, vitesse et accélération désirées, respectivement. En plus, pour une matrice symétrique $H \in R^{n \times n}$, $\lambda_{\max}(H)$ est la plus grande valeur propre de H , et $\lambda_{\min}(H)$ est la plus petite valeur propre de H .

2.2.2 Propriétés [BER93a, CHO01]

Propriété 2.1 : La matrice d'inertie $M(q(t))$ est symétrique, définie positive, et bornée

$$0_n < \beta_1 I_n \leq M(q(t)) \leq \beta_2 I_n \quad (2.15)$$

avec $q \in R^n$, et $\beta_2 > \beta_1 > 0$.

Propriété 2.2 : $M(q(t))$ satisfait la condition de continuité de Lipchitz comme suit

$$\|M(q_1) - M(q_2)\| \leq l_m |q_1 - q_2| \quad (2.16)$$

avec l_m est une constante positive.

Propriété 2.3 : Les matrices d'inertie et celle des forces centrifuges et de Coriolis vérifient la relation d'antisymétrie suivante

$$\xi^T \left(\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right) \xi = 0, \quad \forall \xi \in R^n. \quad (2.17)$$

Cette propriété est vérifiée à condition que $C(q, \dot{q})\dot{q}$ soit définie en utilisant les symboles de Christoffel (2.14).

Propriété 2.4 : Il existe deux constantes positives g_m et l_g telles que

$$\|G(q_2) - G(q_1)\| \leq g_m \|q_2 - q_1\| \quad (2.18)$$

et

$$\|G(q)\| \leq l_g. \quad (2.19)$$

De plus, la constante g_m peut se limiter à

$$g_m \geq n \left(\sup_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right| \right). \quad (2.20)$$

Où $g_i(q)$ est le $i^{\text{ème}}$ élément du vecteur $G(q)$.

Propriété 2.5 : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, le $i^{\text{ème}}$ élément du vecteur $C(q, \dot{q})\dot{q}$ est égal à $\dot{q}^T N_i(q)\dot{q}$, avec $N_i(q)$ est une matrice symétrique, de classe C^∞ . Il existe deux constantes positives k_{c_i} et \bar{N}_i telles que

$$\|N_i(q)\| \leq \bar{N}_i \quad \forall q \in R^n \quad (2.21)$$

et

$$\|C(x, y)z\| \leq C_m \|y\| \|z\| \quad \forall x, y, z \in R^n. \quad (2.22)$$

Une borne inférieure pour la constante C_m est

$$C_m \geq n^2 \left(\sup_{i,j,k,q} |c_{i,j,k}(q)| \right). \quad (2.23)$$

Les lemmes suivants sont utilisés dans le développement qui suit

Lemme 2.1 : La matrice d'inertie $M(q)$ satisfait

$$\|M^{-1}(q_2) - M^{-1}(q_1)\| \leq l_m \beta_1^{-2} \|q_2 - q_1\|. \quad (2.24)$$

Preuve

$$M^{-1}(q_2) - M^{-1}(q_1) = -M^{-1}(q_2)(M(q_1) - M(q_2))M^{-1}(q_1). \quad (2.25)$$

En utilisant les propriétés 2.1 et 2.2, on obtient

$$\|M^{-1}(q_2) - M^{-1}(q_1)\| \leq l_m \beta_1^{-2} \|q_2 - q_1\|. \quad (2.26)$$

Lemme 2.2 : [SHI01] Considérons une fonction de classe C^1 , $f(x, y) : R^p \times R^q \rightarrow R$ continue et définie dans $X \times R^q$, avec $X = \{x \in R^p \mid |x_i| \leq \rho_i, 1 \leq i \leq p\}$ et $\rho_i > 0$. Pour $x \in X$, $f(\sigma(x), y)$ est globalement définie et égale à $f(x, y)$, tel que

$$\|f(\sigma(\bar{x}), y) - f(\sigma(\tilde{x}), y)\| \leq L(y) \|\bar{x} - \tilde{x}\|, \forall \bar{x}, \tilde{x} \in R^p, \forall y \in R^q \quad (2.27)$$

où $\sigma(x)$ est un élément d'une fonction de saturation, $L(y)$ est le maximum de $\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(z, y) \right\|$,

avec $z \in R^p$

Preuve

En utilisant le théorème de la valeur moyenne, il existe $z \in R^p$ tel que

$$f(\sigma(\bar{x}), y) - f(\sigma(\tilde{x}), y) = \frac{\partial f}{\partial x}(z, y)(\sigma(\bar{x}) - \sigma(\tilde{x})). \quad (2.28)$$

Ce qui donne

$$\|f(\sigma(\bar{x}), y) - f(\sigma(\tilde{x}), y)\| \leq L(y) \|\sigma(\bar{x}) - \sigma(\tilde{x})\| \quad (2.29)$$

où $L(y)$ est le maximum de $\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(z, y) \right\|$, et donc (2.27) est vérifiée puisque

$$\|\sigma(\bar{x}) - \sigma(\tilde{x})\| \leq \|\bar{x} - \tilde{x}\|.$$

Les hypothèses suivantes sont nécessaires.

Hypothèse 2.1: La perturbation $d(t)$ est répétitive, et bornée comme suit

$$\|d(t)\| \leq l_d \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.30)$$

Hypothèse 2.2: La vitesse articulaire du robot est bornée par une constante v_m , tel que

$$\|\dot{q}(t)\| \leq V_m \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.31)$$

Hypothèse 2.3: La trajectoire désirée, ses 1^{ère} et 2^{ème} dérivée sont bornées, et

$$\dot{q}_d(0) - \dot{q}_k(0) = q_d(0) - q_k(0) = 0 \quad \forall k \in N. \quad (2.32)$$

Notre objectif est de développer une commande $\tau(t)$ qui assure la convergence de $q_k(t)$ et $\dot{q}_k(t)$ vers les trajectoires désirées $q_d(t)$ et $\dot{q}_d(t)$, respectivement, pour tout $t \in [0, T]$, lorsque $k \rightarrow \infty$.

2.3 Synthèse de la loi de commande

Supposons que le robot manipulateur suive une trajectoire désirée plusieurs fois (cycle, itération), et que les perturbations externes sont répétées durant tous les cycles. Notre première loi de commande est constituée de deux termes, terme classique et terme CAI. Les conditions de stabilité sont données dans le théorème suivant.

Théorème 2.1 [BOU07b]

Etant donnée l'équation dynamique des robots manipulateurs (2.13) vérifiant les hypothèses 2.1-2.3. En appliquant la loi de commande

$$\tau_k(t) = M(q_k)[\ddot{q}_d(t) + K_v \dot{e}_k + K_p e_k] + u_k(t) \quad (2.33)$$

avec

$$u_{k+1} = M(q_{k+1}) \sum_{j=1}^k \Lambda_1 z_j(t). \quad (2.34)$$

Si

1. $\lambda_{\min}(K_v - \sigma I_n) \geq \frac{\alpha^2}{\sigma(\sigma^2 - \alpha)} > 0$,
2. $\lambda_{\min}(K_v - \sigma I_n) \geq \lambda_{\max}(\Lambda_1) + 2\beta_1^{-1}\psi$.

Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}_k(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.35)$$

Avec $z_k(t) = \dot{e}_k(t) + \sigma e_k(t)$, $e(t) = q_d(t) - q(t)$ est le vecteur d'erreur de position, $\dot{e}(t) = \dot{q}_d(t) - \dot{q}(t)$ est le vecteur d'erreur de vitesse, $I_n \in R^{n \times n}$ est la matrice identité, K_v , K_p et Λ_1 sont des matrices symétriques définies positives, avec $K_p = \sigma K_v$, σ est une constante positive, $\alpha = l_m \beta_1^{-2} (C_m V_m^2 + l_g + l_d) + \beta_1^{-1} (g_m + \sigma \psi)$, et ψ est une constante

positive, telle que $\left\| \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (C(q, \dot{q}) \dot{q}) \right\| \leq \psi, \forall (q, \dot{q}) \in R^n \times \bar{V}$, avec $\bar{V} = \{ \dot{q} \in R^n \mid |\dot{q}_i| \leq V_i \quad i = 1, \dots, n \}$.

Le schéma bloc traduisant cette loi de commande est donné par la figure

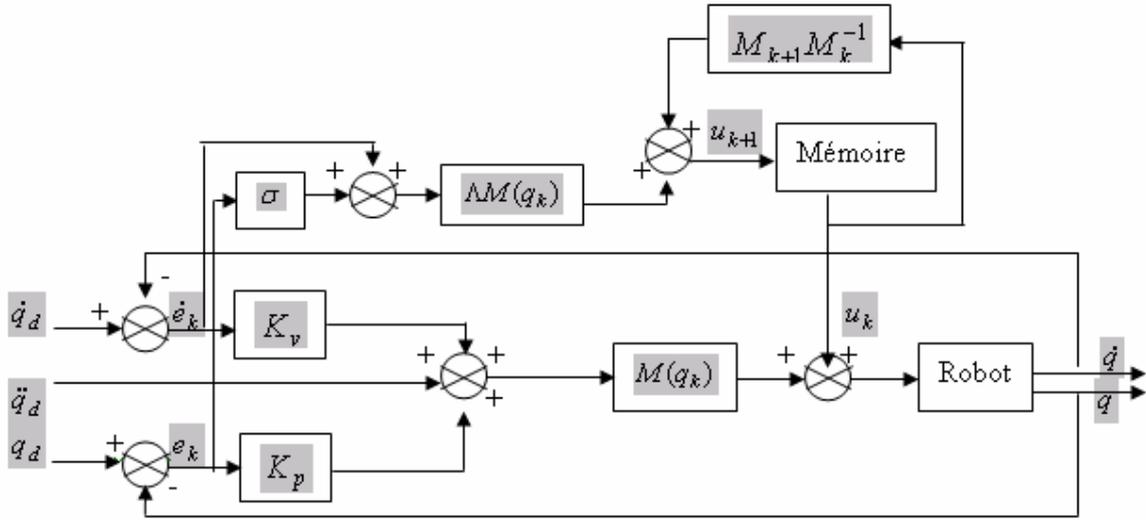


Fig.2.2. Schéma bloc de la 1^{ère} commande

Preuve

Les notations suivantes sont utilisées: $M(q_k) \equiv M_k, G(q_k) = G_k$.

En plus, tant que l’hypothèse 2.2 est vérifiée, on considère

$$\tau_k = M(q_k) \ddot{q}_k + C(q_k, sat(\dot{q}_k)) sat(\dot{q}_k) + G(q_k) + d(t) \tag{2.36}$$

comme équation dynamique du robot au lieu de (2.13).

La saturation d’un vecteur $V = [v_1, \dots, v_n]^T \in R^n$ est définie par

$$Sat(V) = [sat(v_1), \dots, sat(v_n)]^T \tag{2.37}$$

avec

$$sat(v_i) = \begin{cases} v_i & \text{if } |v_i| \leq \bar{v}_i \\ \bar{v}_i & \text{if } v_i > \bar{v}_i \\ -\bar{v}_i & \text{if } v_i < -\bar{v}_i \end{cases} \quad i \in \{1 \dots n\} \tag{2.38}$$

et $V_m = \left\| \left[\text{sat}(v_1), \dots, \text{sat}(v_n) \right]^T \right\|$.

De (2.34), on obtient à la $k^{\text{ième}}$ itération

$$\sum_{j=1}^{k-1} \Lambda_1 z_j(t) = M_k^{-1} u_k. \quad (2.39)$$

Avec M_k est une matrice non singulière.

D'où, on peut écrire à la $(k+1)^{\text{ième}}$ itération

$$u_{k+1} = M_{k+1} M_k^{-1} u_k + M_{k+1} \Lambda_1 z_k. \quad (2.40)$$

Substituant (2.33) dans (2.36), on trouve à la $k^{\text{ième}}$ itération

$$\ddot{e}_k + K_v \dot{e}_k + K_p e_k = M_k^{-1} [C(q_k, \text{sat}(\dot{q}_k)) \text{sat}(\dot{q}_k) + G_k + d(t) - u_k(t)]. \quad (2.41)$$

De (2.40) et (2.41), on obtient à la $(k+1)^{\text{ième}}$ itération

$$\begin{aligned} \ddot{e}_{k+1} + K_v \dot{e}_{k+1} + K_p e_{k+1} &= M_{k+1}^{-1} [C(q, \text{sat}(\dot{q}_{k+1})) \text{sat}(\dot{q}_{k+1}) \\ &+ G_{k+1} + d(t)] - M_k^{-1} u_k(t) - \Lambda_1 z_k. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Pour simplifier les notations, soit

$$D(q, \dot{q}_k) = C(q, \dot{q}_k) \dot{q}_k. \quad (2.43)$$

Soustrayant (2.41) de (2.42), on trouve

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{z}}_k + (K_v - \sigma I) \tilde{z}_k + \sigma^2 \tilde{e}_k &= (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) d + (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) G_k \\ &+ (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) D(q, \text{sat}(\dot{q}_k)) + M_{k+1}^{-1} (G_{k+1} - G_k) \\ &+ M_{k+1}^{-1} (D(q, \text{sat}(\dot{q}_{k+1})) - D(q, \text{sat}(\dot{q}_k))) - \Lambda_1 z_k. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Avec $\tilde{e}_k = e_{k+1} - e_k$, $\tilde{z}_k = z_{k+1} - z_k$ et $K_p = \sigma K_v$.

Pour démontrer la convergence de la commande proposée, la fonction de Lyapunov suivante est utilisée

$$V_k(t) = \int_0^t (z_k(\tau)^T \Lambda_1 z_k(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (2.45)$$

D'où

$$V_{k+1} = V_k + \int_0^t \left[\tilde{z}_k^T \Lambda_1 \tilde{z}_k + 2 \tilde{z}_k^T \Lambda_1 z_k \right] d\tau. \quad (2.46)$$

Soit

$$\Delta V_k = V_{k+1} - V_k. \quad (2.47)$$

De (2.44) à (2.47), on peut écrire

$$\begin{aligned} \Delta V_k = & \int_0^t \left[\tilde{z}_k^T \Lambda_1 \tilde{z}_k - 2\tilde{z}_k^T \dot{\tilde{z}}_k - 2\tilde{z}_k^T (K_v - \sigma I_n) \tilde{z}_k - 2\tilde{z}_k^T \sigma^2 \tilde{e}_k \right. \\ & + 2\tilde{z}_k^T M_{k+1}^{-1} (G_{k+1} - G_k) + 2\tilde{z}_k^T (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) d \\ & + 2\tilde{z}_k^T M_{k+1}^{-1} (D(q, \text{sat}(\dot{q}_{k+1})) - D(q, \text{sat}(\dot{q}_k))) \\ & \left. + 2\tilde{z}_k^T (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) D(q, \text{sat}(\dot{q}_k)) + 2\tilde{z}_k^T (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) G_k \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.48)$$

En utilisant la propriété 2.5, il suit qu'il existe $\psi > 0$ tel que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (D(q, \dot{q})) \right\| \leq \psi, \quad \forall (q, \dot{q}) \in R^n \times \bar{V}. \quad (2.49)$$

Avec

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} (D(q, \dot{q})) = 2 \begin{pmatrix} \dot{q}^T N_1(q) \\ \vdots \\ \dot{q}^T N_n(q) \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

et

$$\bar{V} = \{ \dot{q} \in R^n \mid |\dot{q}_i| \leq V_i, \quad i = 1, \dots, n \}. \quad (2.51)$$

Alors, en utilisant le lemme 2.2, on obtient

$$\left\| D(q, \text{sat}(\dot{q}_k + \tilde{e}_k)) - D(q, \text{sat}(\dot{q}_k)) \right\| \leq \psi \left\| \tilde{e}_k \right\|, \quad \forall (q, \dot{q}, \tilde{e}) \in R^n \times \bar{V} \times R^n. \quad (2.52)$$

Avec $\tilde{e}_k = \dot{e}_{k+1} - \dot{e}_k = \dot{q}_{k+1} - \dot{q}_k$.

Utilisant les propriétés 2.1-2.3, les hypothèses 2.1, 2.2 et le lemme 2.1, on trouve

$$\begin{aligned} \Delta V_k \leq & \int_0^t \left[\tilde{z}_k^T \Lambda_1 \tilde{z}_k - 2\tilde{z}_k^T \dot{\tilde{z}}_k - 2\tilde{z}_k^T (K_v - \sigma I_n) \tilde{z}_k - 2\tilde{z}_k^T \sigma^2 \tilde{e}_k \right. \\ & \left. + 2 \left\| \tilde{z}_k \right\| \beta_1^{-1} \left(g_m \left\| \tilde{e}_k \right\| + \psi \left\| \dot{\tilde{e}}_k \right\| \right) + 2 \left\| \tilde{z}_k \right\| \left(l_m \beta_1^{-2} (C_m V_m^2 + l_g + l_d) \right) \left\| \tilde{e}_k \right\| \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Tant que $\tilde{z}_k(t) = \dot{\tilde{e}}_k(t) + \sigma \tilde{e}_k(t)$, alors

$$\|\dot{\tilde{e}}\| \leq \|\tilde{z}\| + \sigma \|\tilde{e}\|. \quad (2.54)$$

De (2.53) et (2.54), et utilisant (2.3), on obtient

$$\begin{aligned} \Delta V_k &\leq -\lambda_{\min}(\Lambda_1) \|\tilde{z}_k\|^2 - \sigma^2 \|\tilde{e}_k\|^2 + \int_0^t \left[-\lambda_{\min}(K_v - \sigma I_n) \|\dot{\tilde{e}}_k\|^2 \right. \\ &\quad - 2\sigma^3 \|\tilde{e}_k\|^2 - \left(\lambda_{\min}(K_v - \sigma I_n) - \lambda_{\max}(\Lambda_1) - 2\beta_1^{-1}\psi \right) \|\tilde{z}_k\|^2 \\ &\quad + 2\sigma \left(l_m \beta_1^{-2} (C_m V_m^2 + l_g + l_d) + \beta_1^{-1} g_m + \beta_1^{-1} \psi \sigma \right) \|\tilde{e}_k\|^2 \\ &\quad \left. + 2 \left(l_m \beta_1^{-2} (C_m V_m^2 + l_g + l_d) + \beta_1^{-1} g_m + \beta_1^{-1} \psi \sigma \right) \|\tilde{e}_k\| \|\dot{\tilde{e}}_k\| \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.55)$$

D'où

$$\Delta V_k \leq -\lambda_{\min}(\Lambda_1) \|\tilde{z}_k\|^2 - \sigma^2 \|\tilde{e}_k\|^2 + \int_0^t \left[-a_1 \|\dot{\tilde{e}}_k\|^2 - a_2 \|\tilde{e}_k\|^2 - a_3 \|\tilde{z}_k\|^2 + 2\alpha \|\tilde{e}_k\| \|\dot{\tilde{e}}_k\| \right] d\tau. \quad (2.56)$$

Avec $\alpha = l_m \beta_1^{-2} (C_m V_m^2 + l_g + l_d) + \beta_1^{-1} (g_m + \sigma \psi)$, $a_1 = \lambda_{\min}(K_v - \sigma I_n)$, $a_2 = 2\sigma(\sigma^2 - \alpha)$

et $a_3 = \left(\lambda_{\min}(K_v - \sigma I_n) - \lambda_{\max}(\Lambda_1) - 2\beta_1^{-1}\psi \right)$.

On note que

$$\begin{aligned} 2\alpha \|\dot{\tilde{e}}_k\| \|\tilde{e}_k\| &\leq 2 \|\dot{\tilde{e}}_k\| \alpha \left[\frac{2}{a_2} \right]^{1/2} \left[\frac{a_2}{2} \right]^{1/2} \|\tilde{e}_k\| \\ &\leq \|\dot{\tilde{e}}_k\|^2 \alpha^2 \frac{2}{a_2} + \|\tilde{e}_k\|^2 \frac{a_2}{2}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} \Delta V_k &\leq -\lambda_{\min}(\Lambda_1) \|\tilde{z}_k\|^2 - \sigma^2 \|\tilde{e}_k\|^2 + \int_0^t \left[-a_3 \|\tilde{z}_k\|^2 - \frac{a_2}{2} \|\tilde{e}_k\|^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(a_1 - \frac{2}{a_2} \alpha^2 \right) \|\dot{\tilde{e}}_k\|^2 \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.58)$$

En choisissant $a_1 \geq \frac{2}{a_2} \alpha^2$, $a_2 \geq 0$ et $a_3 \geq 0$, d'où

$$\lambda_{\min}(K_v - \sigma I_n) \geq \frac{\alpha^2}{\sigma(\sigma^2 - \alpha)} > 0 \quad (2.59)$$

et

$$\lambda_{\min}(K_v - \sigma I_n) \geq \lambda_{\max}(\Lambda_1) + 2\beta_1^{-1}\psi. \quad (2.60)$$

Alors

$$\Delta V_k \leq 0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.61)$$

Cette équation implique que $V_k(t)$ converge vers une valeur constante, lorsque $k \rightarrow \infty$. Cela implique que \tilde{z}_k , \tilde{e}_k , $\dot{\tilde{e}}_k$ disparaissent lorsque $k \rightarrow \infty$. Puisque \tilde{z}_k disparaît, il suit aussi que $\dot{\tilde{z}}_k = 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Par conséquent, le côté gauche de (2.44) converge vers zéro, d'où $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k(t) = 0$, et donc $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}_k(t) = 0$, pour $t \in [0, T]$.

Il est montré que l'ajout d'une commande itérative à une commande à contre réaction assure la stabilité asymptotique du système en boucle fermée. Maintenant, une question raisonnable se pose, peut-on utiliser la commande par apprentissage itératif seule pour stabiliser le système en boucle fermée ? La réponse est oui, et les conditions de stabilité d'un tel régulateur sont données dans le théorème 2.2.

Théorème 2.2 [BOU07b]

Etant donnée l'équation dynamique des robots manipulateurs (2.13) vérifiant les hypothèses 2.1-2.3. En appliquant la loi commande

$$\tau_k(t) = u_k(t) \quad (2.62)$$

avec

$$u_{k+1} = M(q_{k+1}) \left[\sum_{j=1}^k \Lambda_1 z_j(t) + \sum_{j=1}^k \Lambda_2 \tilde{z}_j(t) \right]. \quad (2.63)$$

Si

1. $\lambda_{\min}(\Lambda_2 - \sigma I_n) \geq \frac{\alpha^2}{\sigma(\sigma^2 - \alpha)} > 0$,
2. $\lambda_{\min}(\Lambda_2 - \sigma I_n) \geq \lambda_{\max}(\Lambda_1) + 2\beta_1^{-1}\psi$.

Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}_k(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.64)$$

$$\text{avec } z_k(t) = \dot{e}_k(t) + \sigma e_k(t), \quad \tilde{z}_k(t) = z_{k+1}(t) - z_k(t), \quad e(t) = q_d(t) - q(t),$$

$\dot{e}_k(t) = \dot{q}_d(t) - \dot{q}_k(t)$, Λ_1 et Λ_2 sont des matrices symétriques et définies positives, σ est une constante positive, et α, ψ sont définies dans le théorème 2.1.

Le schéma bloc traduisant cette loi de commande est donné par la figure

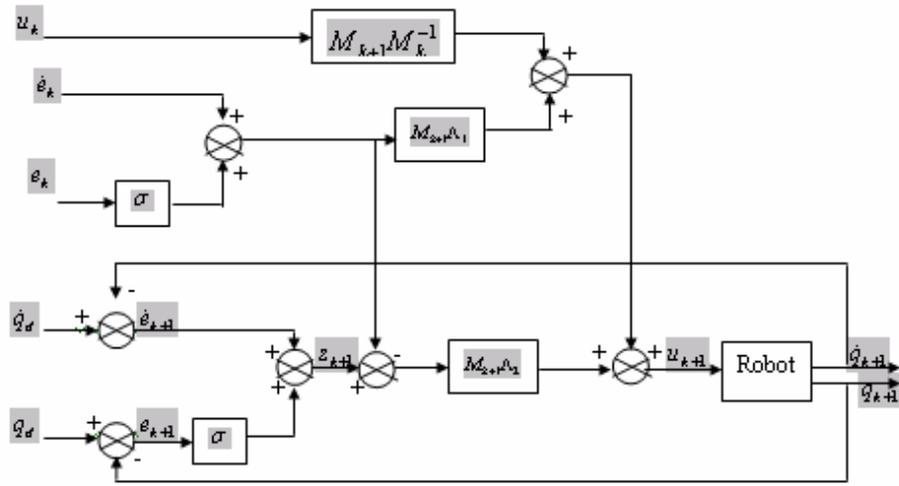


Fig.2.3. Schéma bloc de la 2^{ème} commande

Preuve

De (2.63), on obtient à la $k^{\text{ième}}$ itération

$$u_k = M_k \left[\sum_{j=1}^{k-1} \Lambda_1 z_j(t) + \sum_{j=1}^{k-1} \Lambda_2 \tilde{z}_j(t) \right]. \quad (2.65)$$

D'où

$$\left[\sum_{j=1}^{k-1} \Lambda_1 z_j(t) + \sum_{j=1}^{k-1} \Lambda_2 \tilde{z}_j(t) \right] = M_k^{-1} u_k. \quad (2.66)$$

Avec M_k est une matrice non singulière.

De (2.63) et (2.66), on peut écrire à la $(k+1)^{\text{ième}}$ itération

$$u_{k+1} = M_{k+1} M_k^{-1} u_k + M_{k+1} \Lambda_1 z_k + M_{k+1} \Lambda_2 \tilde{z}_k. \quad (2.67)$$

En ajoutant et soustrayant $M_k \ddot{q}_d$ à (2.62), on obtient

$$\tau_k(t) = M_k \ddot{q}_d + u_k(t) - M_k \ddot{q}_d. \quad (2.68)$$

Substituant (2.68) dans (2.36), on trouve à la $k^{\text{ième}}$ itération

$$\ddot{e}_k = M_k^{-1} \left[C(q_k, \text{sat}(\dot{q}_k)) \text{sat}(\dot{q}_k) + G_k + d(t) - u_k(t) \right] + \ddot{q}_d. \quad (2.69)$$

De (2.67) et (2.69), on obtient à la $(k+1)^{\text{ième}}$ itération

$$\begin{aligned} \ddot{e}_{k+1} = M_{k+1}^{-1} \left[C(q, \text{sat}(\dot{q}_{k+1})) \text{sat}(\dot{q}_{k+1}) + G_{k+1} + d(t) \right] \\ - M_k^{-1} u_k(t) - \Lambda_1 z_k - \Lambda_2 \tilde{z}_k + \ddot{q}_d. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Soustrayant (2.69) de (2.70), on trouve

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}_k + (\Lambda_2 - \sigma I) \tilde{z}_k + \sigma^2 \tilde{e}_k = (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) (d + G_k) \\ + (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) D(q, \text{sat}(\dot{q}_k)) + M_{k+1}^{-1} (G_{k+1} - G_k) \\ + M_{k+1}^{-1} (D(q, \text{sat}(\dot{q}_{k+1})) - D(q, \text{sat}(\dot{q}_k))) - \Lambda_1 z_k \end{aligned} \quad (2.71)$$

avec $\tilde{e}_k = e_{k+1} - e_k$ et $\tilde{z}_k = z_{k+1} - z_k$.

On trouve la même équation (2.44), mais κ_v est remplacée par Λ_2 . Par conséquent, pour démontrer la convergence de la commande proposée, on utilise le même raisonnement utilisé dans la démonstration du théorème 2.1. D'où, si

$$\lambda_{\min}(\Lambda_2 - \sigma I_n) \geq \frac{\alpha^2}{\sigma(\sigma^2 - \alpha)} > 0 \quad (2.72)$$

et

$$\lambda_{\min}(\Lambda_2 - \sigma I_n) \geq \lambda_{\max}(\Lambda_1) + 2\beta_1^{-1}\psi \quad (2.73)$$

il vient $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}_k(t) = 0$, pour $t \in [0, T]$.

2.4 Résultats de simulation

Considérons un robot manipulateur à deux degrés de liberté (figure 2.2), ayant les masses m_1 , m_2 , les longueurs l_1 , l_2 et les angles q_1 , q_2 . Le modèle dynamique peut être décrit par (2.13), avec les éléments de $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ et $G(q)$ données dans [LOZ01]

$$m_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2,$$

$$m_{12} = m_{21} = m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2, m_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2.$$

$$C_{11} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2, C_{12} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2), C_{21} = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1, C_{22} = 0$$

$$G_1 = m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2) + (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \sin(q_1), G_2 = m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2).$$

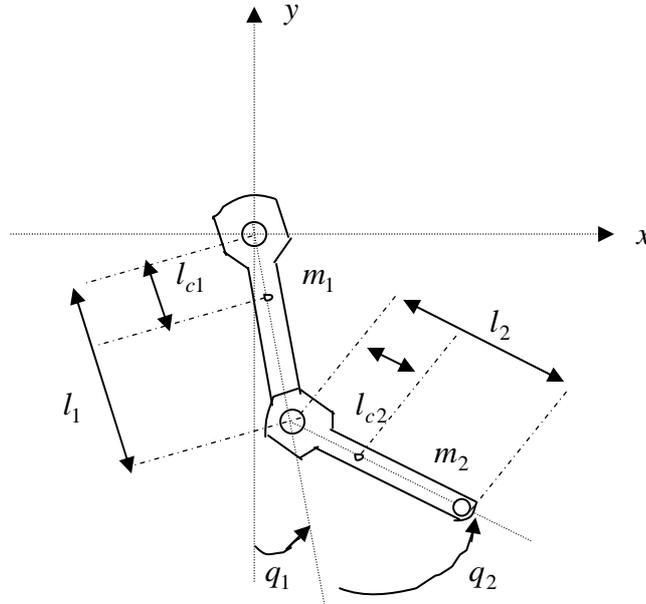


Fig.2.4. Robot à deux degrés de liberté

Les valeurs des paramètres physiques du robot sont données par

$$m_1 = 1[\text{kg}], m_2 = 1[\text{kg}], l_1 = 0.6[\text{m}], l_2 = 0.6[\text{m}], l_{c1} = 0.25[\text{m}],$$

$$l_{c2} = 0.25[\text{m}], I_1 = 0.1[\text{kg.m}^2 / \text{rad}], I_2 = 0.1[\text{kg.m}^2 / \text{rad}].$$

$c_{ijk}(q)$, g_m et c_m sont données par (2.14), (2.20) et (2.23), respectivement. Par conséquent, on trouve $g_m = 27.45[\text{kg.m}^2/\text{sec}^2]$, $C_m = 0.96[\text{kgm}^2]$, $l_g = 13.8[\text{m}/\text{sec}^2]$, $V_m = 1[\text{rad}/\text{s}]$, $\beta_1 = 0.52[\text{kgm}^2]$.

Paramètres de simulation sont :

$$\Lambda_1 = \text{diag}\{30,30\}, \sigma = 30, K_v = \text{diag}\{130,130\}, K_p = \text{diag}\{3900,3900\}.$$

Les perturbations externes sont choisies comme suit :

$$d_1(t) = 2 - (10\pi t), d_2(t) = 50 - \frac{t}{10}.$$

Les trajectoires désirées sont choisies comme suit

$$q_{d1}(t) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\left(2\pi\frac{t}{4} - \sin\left(2\pi\frac{t}{4}\right)\right), q_{d2}(t) = \frac{1}{4}\left(2\pi\frac{t}{4} - \sin\left(2\pi\frac{t}{4}\right)\right) \quad 0 \leq t \leq 4.$$

En appliquant les lois de commande (2.33) et (2.34), les résultats de simulation donnant les trajectoires réelles et désirées de la 1^{ère}, 5^{ème}, 10^{ème} et 22^{ème} itération pour chaque articulation sont montrés dans les figures 2.5 - 2.12. On peut voir que la trajectoire réelle suit la trajectoire désirée à travers les itérations. D'où, le robot exécute 22 itérations pour que la trajectoire réelle suit la trajectoire désirée sans erreur, pour les deux articulations. Les figures 2.13-2.20 montrent l'évolution temporelle de l'erreur de poursuite de la 1^{ère}, 5^{ème}, 10^{ème} et 22^{ème} itération, pour les deux articulations. On constate, qu'au bout d'un nombre limité d'itérations l'erreur de poursuite est pratiquement nulle. De plus, l'évolution de la norme Sup. de l'erreur de poursuite au cours des itérations pour chaque articulation est présentée dans les figures 2.21 et 2.22. Il est montré que la norme Sup. de l'erreur de poursuite pour la 1^{ère} articulation diminue de 0.074 à zéro (rad) en 22 itérations, et pour la 2^{ème} articulation, elle se dégrade de 0.135 à zéro (rad) en 22 itérations. Par conséquent, on peut conclure que la commande proposée améliore les performances du système à travers les itérations, ce qui prouve l'efficacité de cette technique de commande.

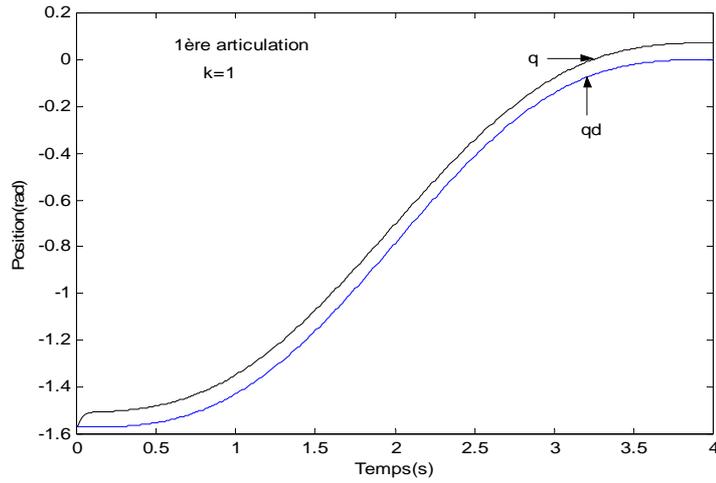


Fig.2.5. Trajectoires désirée et réelle de la 1ère articulation ($k=1$).

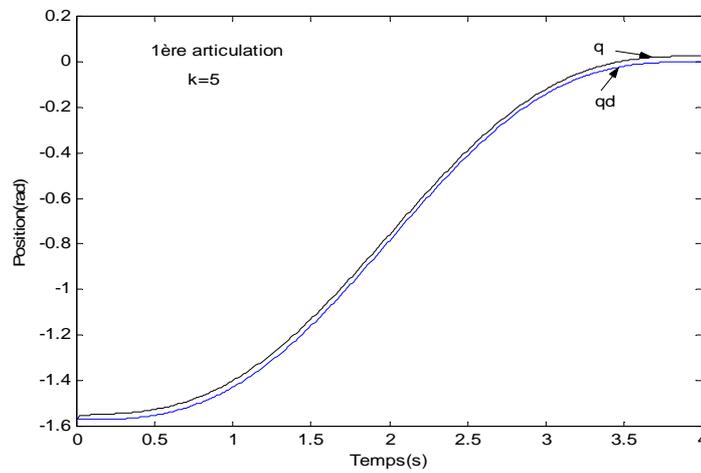


Fig.2.6. Trajectoires désirée et réelle de la 1ère articulation ($k=5$).

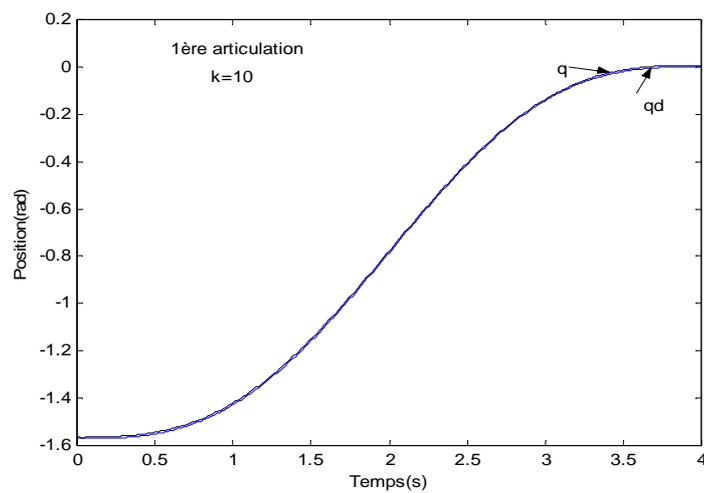


Fig.2.7. Trajectoires désirée et réelle de la 1ère articulation ($k=10$).

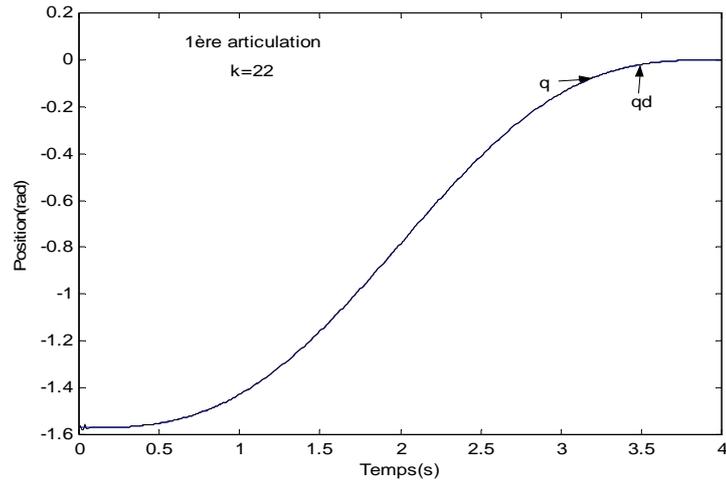


Fig.2.8. Trajectoires désirée et réelle de la 1ère articulation (k=22).

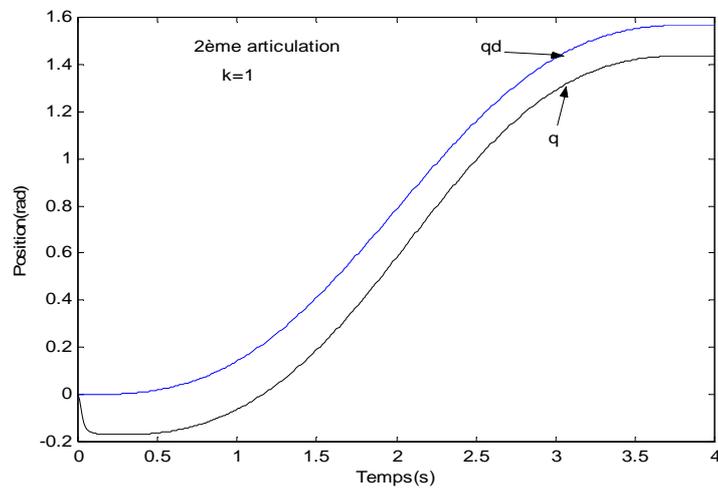


Fig.2.9. Trajectoires désirée et réelle de la 2ème articulation (k=1).

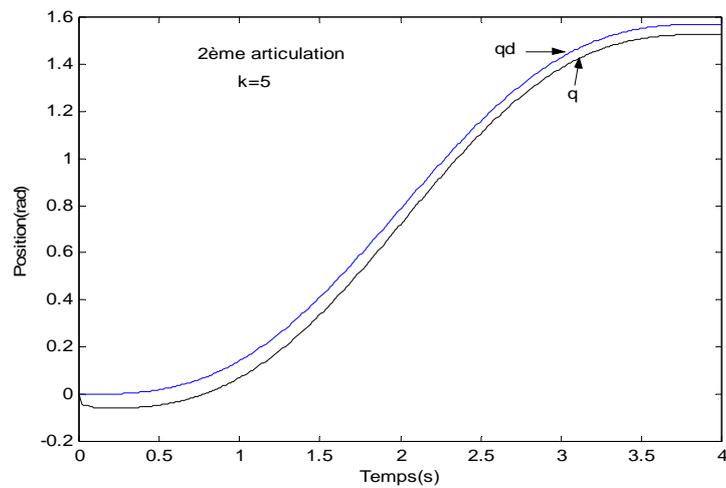


Fig.2.10. Trajectoires désirée et réelle de la 2ème articulation (k=5).

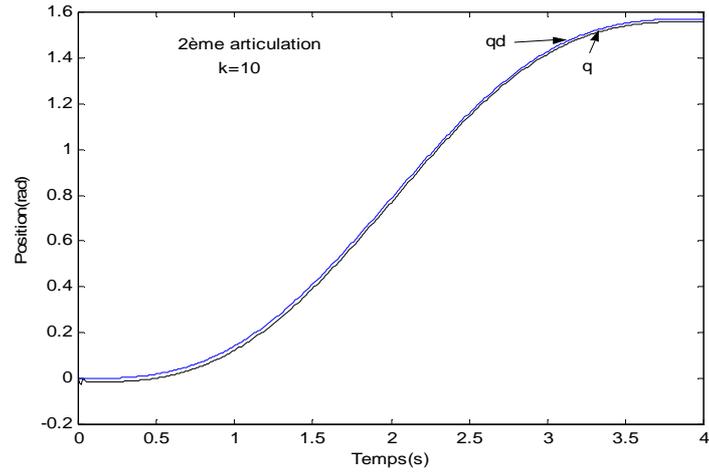


Fig.2.11. Trajectoires désirée et réelle de la 2ème articulation (k=10).

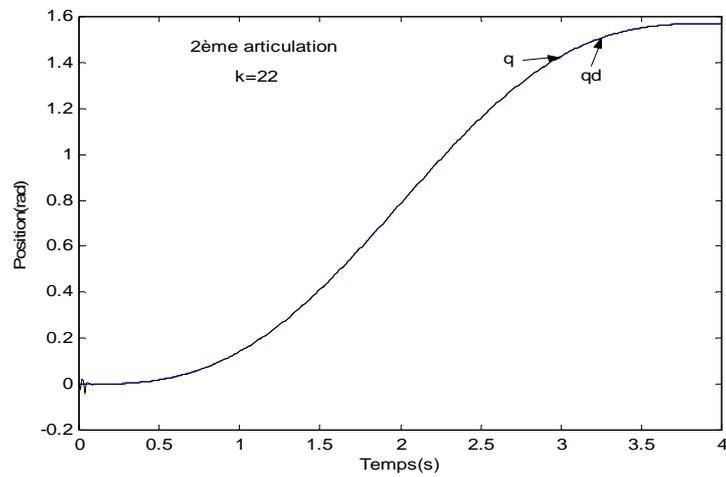


Fig.2.12. Trajectoires désirée et réelle de la 2ème articulation (k=22).

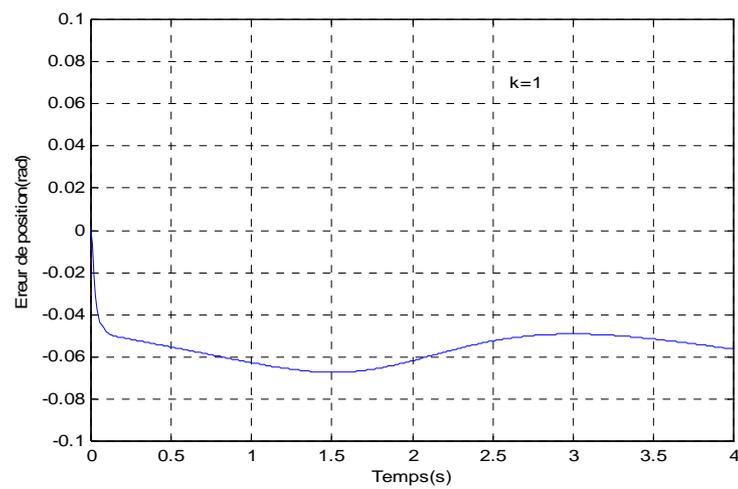


Fig.2.13. Erreur de position de la 1^{ère} articulation (k=1).

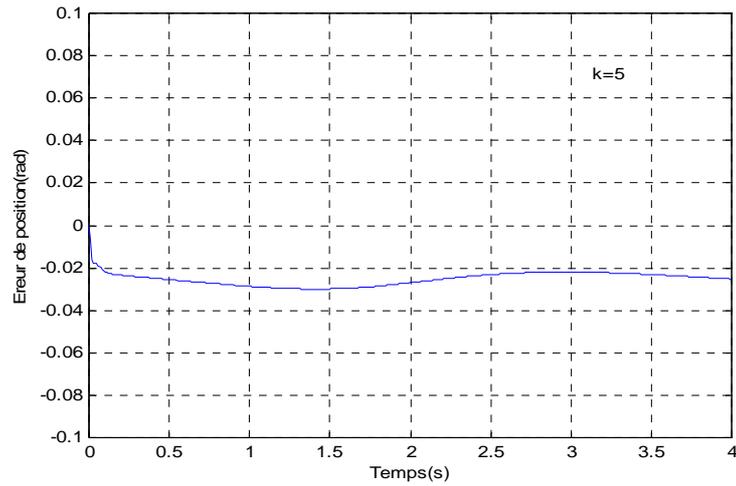


Fig.2.14. Erreur de position de la 1^{ère} articulation (k=5).

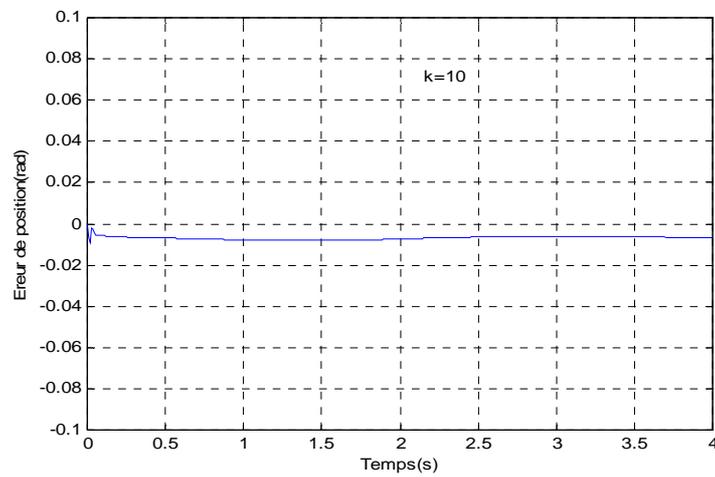


Fig.2.15. Erreur de position de la 1^{ère} articulation (k=10).

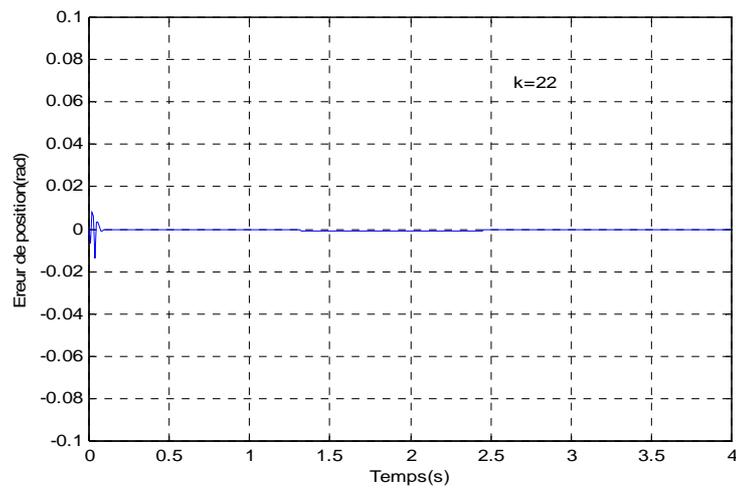


Fig.2.16. Erreur de position de la 1^{ère} articulation (k=22).

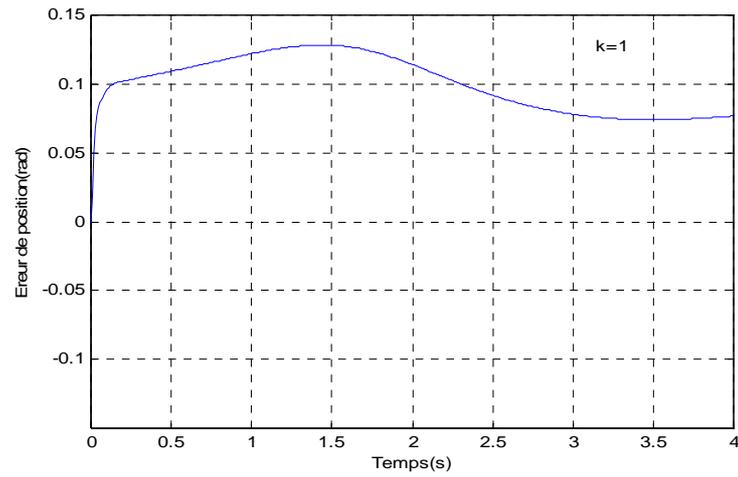


Fig.2.17. Erreur de position de la 2^{ème} articulation ($k=1$).

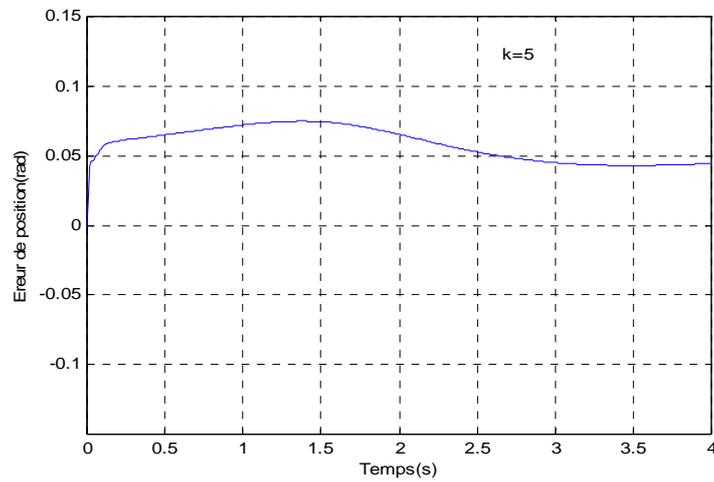


Fig.2.18. Erreur de position de la 2^{ème} articulation ($k=5$).

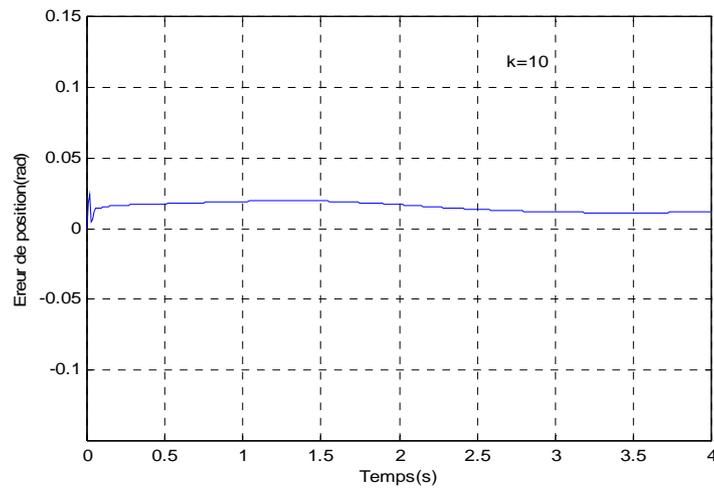


Fig.2.19. Erreur de position de la 2^{ème} articulation ($k=10$).

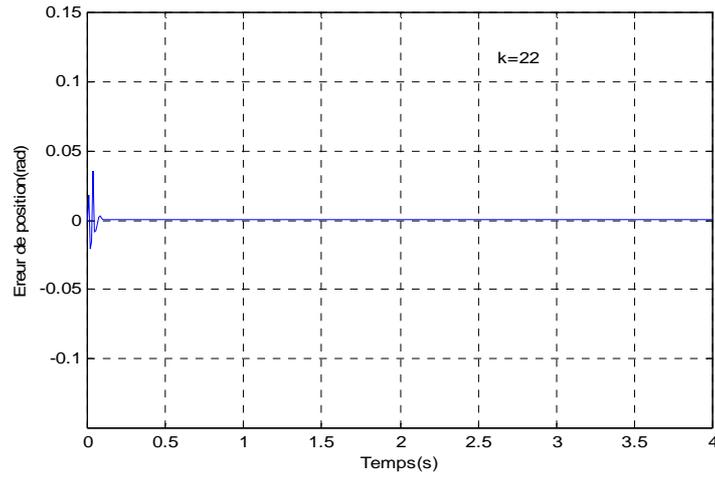


Fig.2.20. Erreur de position de la 2^{ème} articulation (k=22).

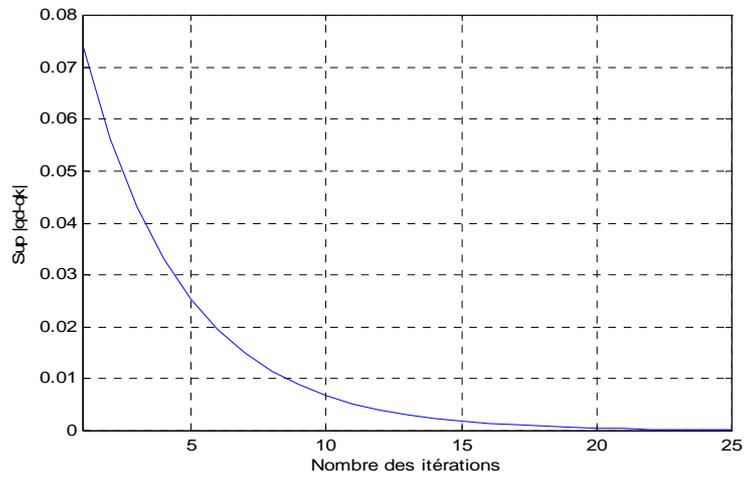


Fig.2.21. Evolution de la Norme Sup de l'erreur au cours des itérations pour la 1^{ère} articulation.

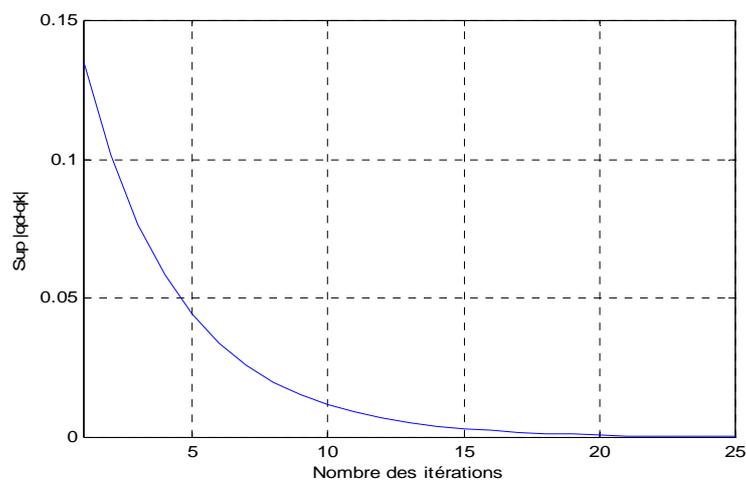


Fig.2.22. Evolution de la Norme Sup de l'erreur au cours des itérations pour la 2^{ème} articulation.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné le modèle dynamique des robots manipulateurs en utilisant le formalisme de Euler-Lagrange, avec les propriétés structurelles de ce modèle. Ensuite, nous avons résolu le problème de poursuite de trajectoires des robots manipulateurs exécutant des tâches répétitives sous l'effet des perturbations externes, en proposant deux schémas de commande par apprentissage itératif. Le premier schéma de commande est constitué de deux composantes, l'une est une commande à contre réaction et l'autre est une commande itérative. Alors que le deuxième schéma de commande est constitué d'une seule composante qui est la commande itérative. Utilisant la théorie de Lyapunov, nous avons donné les conditions suffisantes pour la stabilité asymptotique des deux schémas de commande.

Cependant, l'implémentation de ces lois de commande exige la connaissance des vitesses articulaires des manipulateurs. Malheureusement, beaucoup des robots manipulateurs disponibles sur le marché ne sont pas équipés par les tachymètres, dont le rôle est de mesurer ces vitesses. Ce problème sera traité dans le chapitre suivant.

Commande par apprentissage itératif à base d'observateur de vitesse des robots manipulateurs

3.1 Introduction

Dans plusieurs applications, il est souvent coûteux ou même impossible d'installer un capteur pour la mesure directe de certaines grandeurs nécessaires à la commande. Dans une telle situation, la bonne solution est de fournir une estimation par un observateur d'état. Ce dernier est un algorithme qui reconstruit les états internes non mesurables du système à partir des sorties mesurables. Dans le cas linéaire, le principe connu de séparation permet de décomposer un problème en sous problèmes pouvant être résolus séparément, la conception d'un observateur d'état et d'un régulateur par retour d'état. Cependant, dans le cas non linéaire, le principe de séparation ne s'applique pas, et la conception de l'observateur d'état est généralement liée à la conception du régulateur, ce qui complique la synthèse du système de commande en boucle fermée.

Pour les robots manipulateurs, le problème d'estimer la vitesse est très pertinent pour deux raisons, la première à cause des bruits produits par les tachymètres installées sur les robots pour la mesure de vitesse, et la deuxième à cause de l'encombrement de ces

tachymètres. Pour résoudre ce problème, l'utilisation d'un observateur de vitesse est nécessaire pour la commande lorsque les vitesses ne sont pas disponibles.

Dans ce chapitre, nous présentons les deux lois de commande par apprentissage itératif proposées dans le chapitre précédent, mais cette fois-ci, nous supposons que les vitesses ne sont pas disponibles, d'où un observateur de vitesse est proposé pour les estimer. En utilisant la théorie de Lyapunov, la stabilité asymptotique du système en boucle fermée sera démontrée.

3.2 Commande par apprentissage itératif à base d'observateur de vitesse

3.2.1 Premier schéma de commande

Dans cette section, nous considérons en premier lieu la loi de commande constituée d'une commande à contre réaction et d'une commande itérative, sans la nécessité d'utiliser les vitesses. Les conditions de stabilité du régulateur-observateur sont données par le théorème suivant.

Théorème 3.1 [BOU08d]

Etant donnée l'équation dynamique des robots manipulateurs (2.13) vérifiant les hypothèses (2.1-2.3). En appliquant la loi commande

$$\tau_k(t) = M(q_k) \left[\ddot{q}_d(t) + K_v \hat{z}_k \right] + u_k(t) \quad (3.1)$$

et

$$u_{k+1} = M(q_{k+1}) \sum_{j=1}^k \Lambda_1 \hat{z}_j(t) \quad (3.2)$$

avec

$$\begin{cases} \hat{z}_{k+1} = \left(I_n + \phi \varpi^{-1} \Lambda \phi^{-1} \right) \hat{z}_k - \phi \varpi^{-1} \Lambda \phi^{-1} \hat{z}_{k-1} \\ \quad - \phi \varpi^{-1} \zeta (e_{k+1} - e_k) + p \\ \dot{p} = -\phi \varpi^{-1} \zeta \sigma (e_{k+1} - e_k). \end{cases} \quad (3.3)$$

Si

1. $\lambda_{\min}(K_v - \sigma I_n) \geq \frac{\alpha^2}{\sigma(\sigma^2 - \alpha)} > 0$;
2. $\lambda_{\min}(K_v - \sigma I_n) \geq \lambda_{\max}(\Lambda_1) + 2\beta_1^{-1}\psi$.

Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}_k(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.4)$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (z_k - \hat{z}_k) = 0 \quad (3.5)$$

avec $z_k(t) = \dot{e}_k(t) + \sigma e_k(t)$, $\hat{z}_0(t) = \hat{z}_1(t) = 0_n$, $e(t) = q_d(t) - q(t)$ et $\dot{e}(t) = \dot{q}_d(t) - \dot{q}(t)$ sont les vecteurs d'erreur de position et de vitesses, respectivement. $I_n \in R^{n \times n}$ est la matrice identité. K_v , K_p , L et Λ_1 sont des matrices symétriques définies positives, $\varpi = K_v + L$, $\Lambda = K_v - \Lambda_1$, $K_p = \sigma K_v$, σ est une constante positive, ϕ , ζ sont des matrices diagonales définies positives. $\alpha = l_m \beta_1^{-2} (C_m V_m^2 + l_g + l_d) + \beta_1^{-1} (g_m + \sigma \psi)$, ψ est une constante positive, telle que $\left\| \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (C(q, \dot{q}) \dot{q}) \right\| \leq \psi$, $\forall (q, \dot{q}) \in R^n \times \bar{V}$, avec $\bar{V} = \{ \dot{q} \in R^n \mid |\dot{q}_i| \leq V_i, i = 1, \dots, n \}$.

Preuve

De (3.2), on obtient à la $k^{\text{ième}}$ itération

$$\sum_{j=1}^{k-1} \Lambda_1 \hat{z}_j(t) = M_k^{-1} u_k. \quad (3.6)$$

Avec M_k est une matrice non singulière.

D'où, on peut écrire à la $(k+1)^{\text{ième}}$ itération

$$u_{k+1} = M_{k+1} M_k^{-1} u_k + M_{k+1} \Lambda_1 \hat{z}_k. \quad (3.7)$$

Substituant (3.1) dans (2.36), on trouve à la $k^{\text{ième}}$ itération

$$\ddot{e}_k + K_v \hat{z}_k = M_k^{-1} [C(q_k, \text{sat}(\dot{q}_k)) \text{sat}(\dot{q}_k) + G_k + d(t) - u_k(t)]. \quad (3.8)$$

De (3.7) et (3.8), on obtient à la $(k+1)^{\text{ième}}$ itération

$$\ddot{e}_{k+1} + K_v \hat{z}_{k+1} = M_{k+1}^{-1} [C(q_{k+1}, \text{sat}(\dot{q}_{k+1})) \text{sat}(\dot{q}_{k+1}) + G_{k+1} + d(t)] - M_k^{-1} u_k(t) - \Lambda_1 \hat{z}_k. \quad (3.9)$$

Pour simplifier les notations, posons

$$D(q, \dot{q}_k) = C(q, \dot{q}_k) \dot{q}_k. \quad (3.10)$$

Soustrayant (3.8) de (3.9), on trouve

$$\begin{aligned} \delta \dot{z}_k + (K_v - \sigma I) \delta z_k + \sigma^2 \delta e_k &= (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) d \\ &+ (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) G_k + M_{k+1}^{-1} (G_{k+1} - G_k) \\ &+ (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) D(q, \text{sat}(\dot{q}_k)) - \Lambda_1 z_k + \Lambda_1 \tilde{z}_k \\ &+ M_{k+1}^{-1} (D(q, \text{sat}(\dot{q}_{k+1})) - D(q, \text{sat}(\dot{q}_k))) + K_v \delta \tilde{z}_k \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec $\delta e_k = e_{k+1} - e_k$, $\delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $\tilde{z}_k = z_k - \hat{z}_k$, $\delta \tilde{z}_k = \tilde{z}_{k+1} - \tilde{z}_k$ et $K_p = \sigma K_v$.

Pour démontrer la convergence de la loi de commande proposée, la fonction de Lyapunov suivante est utilisée

$$V_k(t) = \int_0^t (z_k(\tau)^T \Lambda_1 z_k(\tau) + \tilde{z}_k(\tau)^T L \tilde{z}_k(\tau)) d\tau \quad \text{pour } t \in [0, T]. \quad (3.12)$$

D'où

$$\begin{aligned} V_{k+1} = V_k + \int_0^t &[\delta z_k^T \Lambda_1 \delta z_k + 2 \delta z_k^T \Lambda_1 z_k + \delta \tilde{z}_k^T L \delta \tilde{z}_k \\ &+ 2 \delta \tilde{z}_k^T L \tilde{z}_k] d\tau. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Soit

$$\Delta V_k = V_{k+1} - V_k. \quad (3.14)$$

Des équations (3.11) à (3.14), on peut écrire

$$\begin{aligned} \Delta V_k = \int_0^t &[\delta z_k^T \Lambda_1 \delta z_k - 2 \delta z_k^T \delta \dot{z}_k - 2 \delta z_k^T (K_v - \sigma I_n) \delta z_k \\ &- 2 \delta z_k^T \sigma^2 \delta e_k^T + 2 \delta z_k^T M_{k+1}^{-1} (G_{k+1} - G_k) \\ &+ 2 \delta z_k^T (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) (d + G_k) \\ &+ 2 \delta z_k^T M_{k+1}^{-1} (D(q, \text{sat}(\dot{q}_{k+1})) - D(q, \text{sat}(\dot{q}_k))) \\ &+ 2 \delta z_k^T (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) D(q, \text{sat}(\dot{q}_k)) + \delta z_k^T K_v \delta \tilde{z}_k \\ &+ \delta z_k^T \Lambda_1 \tilde{z}_k + \delta \tilde{z}_k^T L \delta \tilde{z}_k + 2 \delta \tilde{z}_k^T L \tilde{z}_k] d\tau. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Soit

$$\Delta V_k = \Delta H_k + \Delta W_k \quad (3.16)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta H_k = & \int_0^t \left[\delta z_k^T \Lambda_1 \delta z_k - 2\delta z_k^T \delta \dot{z}_k^T - 2\delta z_k^T (K_v - \sigma I_n) \delta z_k \right. \\ & - 2\delta z_k^T \sigma^2 \delta e_k^T + 2\delta z_k^T M_{k+1}^{-1} (G_{k+1} - G_k) \\ & + 2\delta z_k^T (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) (d + G_k) \\ & + 2\delta z_k^T M_{k+1}^{-1} (D(q, \text{sat}(\dot{q}_{k+1})) - D(q, \text{sat}(\dot{q}_k))) \\ & \left. + 2\delta z_k^T (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) D(q, \text{sat}(\dot{q}_k)) \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.17)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta W_k = & \int_0^t \left[2\delta z_k^T K_v \delta \tilde{z}_k + 2\delta z_k^T \Lambda_1 \tilde{z}_k + \delta \tilde{z}_k^T L \delta \tilde{z}_k \right. \\ & \left. + 2\delta \tilde{z}_k^T L \tilde{z}_k \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Et donc

$$\begin{aligned} \Delta W_k \leq & \int_0^t \left[2\delta z_k^T K_v \delta \tilde{z}_k + 2\delta z_k^T \Lambda_1 \tilde{z}_k + 2\delta \tilde{z}_k^T L \delta \tilde{z}_k \right. \\ & \left. + 2\delta \tilde{z}_k^T L \tilde{z}_k \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.19)$$

Analyse de la stabilité: Cette analyse est constituée de deux parties. Dans la première, nous démontrons que $H_k \leq 0$, et dans la deuxième nous démontrons que $W_k \leq 0$.

Partie 1

De (2.49) et (2.50), et en utilisant le lemme 2.2, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| D(q, \text{sat}(\dot{q}_k + \delta \dot{e}_k)) - D(q, \text{sat}(\dot{q}_k)) \right\| & \leq \psi \left\| \delta \dot{e}_k \right\| \\ \forall (q, \dot{q}, \delta \dot{e}) & \in R^n \times \bar{V} \times R^n \end{aligned} \quad (3.20)$$

avec $\delta \dot{e}_k = \dot{e}_{k+1} - \dot{e}_k = \dot{q}_{k+1} - \dot{q}_k$.

Utilisant les propriétés 1-3, les hypothèses 2.1, 2.2 et le lemme 2.1, on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta H_k \leq & \int_0^t \left[\delta z_k^T \Lambda_1 \delta z_k - 2\delta z_k^T \delta \dot{z}_k - 2\delta z_k^T (K_v - \sigma I_n) \delta z_k \right. \\
& \left. - 2\delta z_k^T \sigma^2 \delta e_k + 2\|\delta z_k\| \beta_1^{-1} (g_m \|\delta e_k\| + \psi \|\delta \dot{e}_k\|) \right. \\
& \left. + 2\|\delta z_k\| (l_m \beta_1^{-2} (C_m V_m^2 + l_g + l_d)) \|\delta e_k\| \right] d\tau.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Tant que $\tilde{z}_k(t) = \tilde{e}_k(t) + \sigma \tilde{e}_k(t)$, alors

$$\|\delta \dot{e}_k\| \leq \|\delta z_k\| + \sigma \|\delta e_k\|. \tag{3.22}$$

De (3.21) et (3.22), et utilisant l'hypothèse 2.3, on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta H_k \leq & -\lambda_{\min}(\Lambda_1) \|\delta z_k\|^2 - \sigma^2 \|\delta e_k\|^2 + \int_0^t \left[-\lambda_{\min}(K_v - \sigma I_n) \|\delta \dot{e}_k\|^2 \right. \\
& \left. - 2\sigma^3 \|\delta e_k\|^2 - (\lambda_{\min}(K_v - \sigma I_n) - \lambda_{\max}(\Lambda_1) - 2\beta_1^{-1}\psi) \|\delta z_k\|^2 \right. \\
& \left. + 2\sigma (l_m \beta_1^{-2} (C_m V_m^2 + l_g + l_d) + \beta_1^{-1} g_m + \beta_1^{-1} \psi \sigma) \|\delta e_k\|^2 \right. \\
& \left. + 2(l_m \beta_1^{-2} (C_m V_m^2 + l_g + l_d) + \beta_1^{-1} g_m + \beta_1^{-1} \psi \sigma) \|\delta e_k\| \|\delta \dot{e}_k\| \right] d\tau.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\Delta H_k \leq & -\lambda_{\min}(\Lambda_1) \|\delta z_k\|^2 - \sigma^2 \|\delta e_k\|^2 + \int_0^t \left[-a_1 \|\delta \dot{e}_k\|^2 - a_2 \|\delta e_k\|^2 \right. \\
& \left. - a_3 \|\delta z_k\|^2 + 2\alpha \|\delta e_k\| \|\delta \dot{e}_k\| \right] d\tau
\end{aligned} \tag{3.24}$$

avec $\alpha = l_m \beta_1^{-2} (C_m V_m^2 + l_g + l_d) + \beta_1^{-1} (g_m + \sigma \psi)$, $a_1 = \lambda_{\min}(K_v - \sigma I_n)$, $a_2 = 2\sigma(\sigma^2 - \alpha)$ et $a_3 = (\lambda_{\min}(K_v - \sigma I_n) - \lambda_{\max}(\Lambda_1) - 2\beta_1^{-1}\psi)$.

On note que

$$\begin{aligned}
2\alpha \|\delta \dot{e}_k\| \|\delta e_k\| & \leq 2\|\delta \dot{e}_k\| \alpha \left[\frac{2}{a_2} \right]^{1/2} \left[\frac{a_2}{2} \right]^{1/2} \|\delta e_k\| \\
& \leq \|\delta \dot{e}_k\|^2 \alpha^2 \frac{2}{a_2} + \|\delta e_k\|^2 \frac{a_2}{2}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} \Delta H_k \leq & -\lambda_{\min}(\Lambda_1) \|\delta e_k\|^2 - \sigma^2 \|\delta e_k\|^2 + \int_0^t \left[-a_3 \|\delta z_k\|^2 \right. \\ & \left. - \frac{a_2}{2} \|\delta e_k\|^2 - \left(a_1 - \frac{2}{a_2} \alpha^2 \right) \|\delta \dot{e}_k\|^2 \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3.26)$$

En choisissant $a_1 \geq \frac{2}{a_2} \alpha^2$, $a_2 \geq 0$ et $a_3 \geq 0$, et donc

$$\lambda_{\min}(K_v - \sigma I_n) \geq \frac{\alpha^2}{\sigma(\sigma^2 - \alpha)} > 0 \quad (3.27)$$

et

$$\lambda_{\min}(K_v - \sigma I_n) \geq \lambda_{\max}(\Lambda_1) + 2\beta_1^{-1}\psi. \quad (3.28)$$

Alors

$$\Delta H_k \leq 0 \quad t \in [0, T]. \quad (3.29)$$

Partie 2

De (3.19), on obtient

$$\Delta W_k \leq \int_0^t \left[2\delta z_k^T K_v \tilde{z}_{k+1} - 2\delta z_k^T (K_v - \Lambda_1) \tilde{z}_k + 2\delta \tilde{z}_k^T L \tilde{z}_{k+1} \right] d\tau. \quad (3.30)$$

D'où

$$\Delta W_k \leq \int_0^t \left[2\delta z_k^T \varpi \tilde{z}_{k+1} - 2\delta z_k^T \Lambda \tilde{z}_k - 2\delta \hat{z}_k^T L \tilde{z}_{k+1} \right] d\tau \quad (3.31)$$

avec $\varpi = K_v + L$, $\Lambda = K_v - \Lambda_1$, et $\delta \tilde{z}_k = \delta z_k - \delta \hat{z}_k$.

Et donc

$$\Delta W_k \leq \int_0^t \left[2\delta z_k^T (\varpi \tilde{z}_{k+1} - \Lambda \tilde{z}_k) - 2\delta \hat{z}_k^T L \tilde{z}_{k+1} \right] d\tau. \quad (3.32)$$

Pour que $\Delta W_k \leq 0$, il est suffisant de vérifier

$$\begin{cases} \tilde{z}_{k+1} = \phi^{-1} \delta \dot{z}_k \\ \delta z_k = -\zeta^{-1} (\varpi \tilde{z}_{k+1} - \Lambda \tilde{z}_k) \end{cases} \quad (3.33)$$

avec ϕ et ζ sont des matrices diagonales définies positives.

Ces conditions sont vérifiées par l'observateur de vitesse, et on peut démontrer ce résultat comme suit.

De (3.33), on peut écrire

$$\tilde{z}_{k+1} = \varpi^{-1} \Lambda \tilde{z}_k - \varpi^{-1} \zeta \delta z_k. \quad (3.34)$$

De (3.33) et (3.34), on trouve

$$\delta \dot{z}_k = \phi \varpi^{-1} \Lambda \tilde{z}_k - \phi \varpi^{-1} \zeta \delta z_k \quad (3.35)$$

$$\delta \dot{z}_k = \phi \tilde{z}_{k+1} \quad (3.36)$$

De (3.36), on obtient à la $k^{\text{ième}}$ itération

$$\tilde{z}_k = \phi^{-1} (\dot{z}_k - \dot{z}_{k-1}) \quad (3.37)$$

Substituant (3.37) dans (3.35), on obtient

$$\dot{z}_{k+1} = [I_n + \phi \varpi^{-1} \Lambda \phi^{-1}] \dot{z}_k - \phi \varpi^{-1} \Lambda \phi^{-1} \dot{z}_{k-1} - \phi \varpi^{-1} \zeta \delta z_k. \quad (3.38)$$

Cette équation est la même que celle de l'observateur de vitesse (3.3). Par conséquent, lorsque l'observateur est donné par (3.3), alors

$$\Delta W_k \leq 0. \quad (3.39)$$

De (3.16), (3.29) et (3.39), on peut conclure que

$$\Delta V_k \leq 0. \quad (3.40)$$

Cette équation implique que $V_k(t)$ converge vers une valeur constante, lorsque $k \rightarrow \infty$. Cela implique que δz_k , $\delta \tilde{z}_k$, δe_k , $\delta \dot{e}_k$ disparaissent lorsque $k \rightarrow \infty$. Puisque δz_k disparaît, il suit aussi que $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta \dot{z}_k = 0$. Par conséquent, le côté gauche de (3.11) converge vers zéro, d'où $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k(t) = 0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} (z_k - \hat{z}_k) = 0$, et donc $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}_k(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

3.2.2 Deuxième schéma de commande

Il est montré que l'ajout d'une commande itérative à une commande à contre réaction pour résoudre le problème de poursuite des robots manipulateurs, lorsque les vitesses sont données par un observateur de vitesse, assure la stabilité asymptotique du système en boucle fermée, en vérifiant certaines conditions. Maintenant, on utilise uniquement une commande par apprentissage itératif sans ajouter la contre réaction, lorsque les vitesses sont données par un observateur de vitesse. Les conditions de stabilité du système global (robot, régulateur et l'observateur) en boucle fermée sont données dans le théorème 3.2.

Théorème 3.2 [BOU08d] : Etant donnée l'équation dynamique de robots manipulateurs (2.13) vérifiant les hypothèses (2.1-2.3). En appliquant la loi commande

$$\tau_k(t) = u_k(t) \quad (3.41)$$

et

$$u_{k+1} = M(q_{k+1}) \left[\sum_{j=1}^k \Lambda_1 \hat{z}_j(t) + \sum_{j=1}^k \Lambda_2 \delta \tilde{z}_j(t) \right]. \quad (3.42)$$

avec

$$\begin{cases} \hat{z}_{k+1} = (I_n + \phi \varpi^{-1} \Lambda \phi^{-1}) \hat{z}_k - \phi \varpi^{-1} \Lambda \phi^{-1} \hat{z}_{k-1} \\ \quad - \phi \varpi^{-1} \zeta (e_{k+1} - e_k) + p \\ \dot{p} = -\phi \varpi^{-1} \zeta \sigma (e_{k+1} - e_k). \end{cases} \quad (3.43)$$

Si

1. $\lambda_{\min}(\Lambda_2 - \sigma I_n) \geq \frac{\alpha^2}{\sigma(\sigma^2 - \alpha)} > 0,$
2. $\lambda_{\min}(\Lambda_2 - \sigma I_n) \geq \lambda_{\max}(\Lambda_1) + 2\beta_1^{-1}\psi.$

Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}_k(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.44)$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (z_k - \hat{z}_k) = 0 \quad (3.45)$$

où $z_k(t) = \dot{e}_k(t) + \sigma e_k(t)$, $\tilde{z}_k(t) = z_{k+1}(t) - z_k(t)$, $\hat{z}_0(t) = \hat{z}_1(t) = 0_n$, $e(t) = q_d(t) - q(t)$ et $\dot{e}(t) = \dot{q}_d(t) - \dot{q}(t)$ sont les vecteurs d'erreur de position et de vitesses, respectivement. Λ_1 et Λ_2 sont des matrices symétriques définies positives, σ est une constante positive, et α, ψ sont définies dans le théorème 1.

Preuve

De (3.42), on obtient à la $k^{\text{ième}}$ itération

$$u_k = M_k \left[\sum_{j=1}^{k-1} \Lambda_1 \hat{z}_j(t) + \sum_{j=1}^{k-1} \Lambda_2 \delta \tilde{z}_j(t) \right]. \quad (3.46)$$

D'où

$$\left[\sum_{j=1}^{k-1} \Lambda_1 \hat{z}_j(t) + \sum_{j=1}^{k-1} \Lambda_2 \delta \tilde{z}_j(t) \right] = M_k^{-1} u_k. \quad (3.47)$$

Avec M_k est une matrice non singulière.

De (3.42) et (3.47), on peut écrire à la $(k+1)^{\text{ième}}$ itération.

$$u_{k+1} = M_{k+1} M_k^{-1} u_k + M_{k+1} \Lambda_1 \hat{z}_k + M_{k+1} \Lambda_2 \delta \tilde{z}_k. \quad (3.48)$$

Ajoutant et soustrayant $M_k \ddot{q}_d$ dans (3.41), on trouve

$$\tau_k(t) = M_k \ddot{q}_d + u_k(t) - M_k \ddot{q}_d \quad (3.49)$$

Substituant (3.49) dans (2.36), on obtient à la $k^{\text{ième}}$ itération

$$\ddot{e}_k = M_k^{-1} \left[C(q_k, \text{sat}(\dot{q}_k)) \text{sat}(\dot{q}_k) + G_k + d(t) - u_k(t) \right] + \ddot{q}_d. \quad (3.50)$$

De (3.48) et (3.50), on trouve à la $(k+1)^{\text{ième}}$ itération

$$\begin{aligned} \ddot{e}_{k+1} = M_{k+1}^{-1} & \left[C(q_k, \text{sat}(\dot{q}_{k+1})) \text{sat}(\dot{q}_{k+1}) + G_{k+1} + d(t) \right] \\ & - M_k^{-1} u_k(t) - \Lambda_1 \hat{z}_k - \Lambda_2 \delta \tilde{z}_k + \ddot{q}_d. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Soustrayant (3.50) de (3.51), on obtient

$$\begin{aligned}
\delta \dot{z}_k + (K_v - \sigma I) \delta z_k + \sigma^2 \delta e_k &= (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) d \\
&+ (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) G_k + M_{k+1}^{-1} (G_{k+1} - G_k) \\
&+ (M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}) D(q, \text{sat}(\dot{q}_k)) - \Lambda_1 z_k + \Lambda_1 \tilde{z}_k \\
&+ M_{k+1}^{-1} (D(q, \text{sat}(\dot{q}_{k+1})) - D(q, \text{sat}(\dot{q}_k))) + K_v \delta \tilde{z}_k.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Avec $\delta e_k = e_{k+1} - e_k$ et $\delta z_k = z_{k+1} - z_k$.

Nous avons trouvé la même équation de (3.11), mais K_v est remplacée par Λ_2 . Par conséquent, pour prouver la convergence de la loi de commande proposée, on peut utiliser le même raisonnement de la preuve du théorème 3.1. Et donc, si

$$\lambda_{\min}(\Lambda_2 - \sigma I_n) \geq \frac{\alpha^2}{\sigma(\sigma^2 - \alpha)} > 0 \tag{3.53}$$

et

$$\lambda_{\min}(\Lambda_2 - \sigma I_n) \geq \lambda_{\max}(\Lambda_1) + 2\beta_1^{-1}\psi. \tag{3.54}$$

Alors $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{e}_k(t) = 0$, et $\lim_{k \rightarrow \infty} (z_k - \hat{z}_k) = 0$ pour $t \in [0, T]$.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons synthétisé les deux lois de CAI du chapitre précédent pour la commande en poursuite de trajectoires des robots manipulateurs qui ne sont pas équipés des tachymètres, et donc, les vitesses ne sont pas disponibles. Pour résoudre ce problème, nous avons proposé un observateur de vitesse, dont le rôle est de donner les vitesses estimées. Tant que notre système à commander est non linéaire, le principe de séparation ne s'applique pas, et la stabilité doit être démontrée pour le système global (robot plus régulateur plus observateur) en boucle fermée, ce qui a été fait, en utilisant la théorie de Lyapunov.

Commande par apprentissage itératif des robots manipulateurs avec un algorithme d'état initial

4.1 Introduction

A travers les diverses applications de la commande par apprentissage itératif, nous remarquons que les conditions suffisantes assurant la convergence des algorithmes proposés ont été établies sous l'hypothèse de l'égalité entre l'état initial désiré et celui du système ce qui souvent n'est pas le cas dans plusieurs applications. Durant cette dernière décennie, beaucoup de résultats ont été obtenus sur la CAI en vue de surmonter ce problème. [HAU87, JAN95, AHN93] ont donné indépendamment, des conditions suffisantes garantissant la convergence de l'algorithme de commande, mais à condition qu'à chaque itération l'état initial de la trajectoire désirée doit être égal à celui du système. Yan et Zhang ont éliminé cette contrainte, en proposant un algorithme itératif [YAN98], dont une partie de l'état initial coïncide avec l'état initial désiré, et le reste peut être choisi arbitrairement, à condition que le degré relatif du système soit supérieur ou égal à un. Néanmoins, ces résultats dépendent encore fortement de l'entrée désirée et de l'état désiré, ce qui peut réduire les performances de la commande. Une méthode proposée par Porter et Mohamed [POR91] a permis de contourner ce problème, mais uniquement pour les

systèmes linéaires invariants dans le temps. Cette technique a été étendue par Ren et Gao [REN92] aux systèmes non linéaires où la sortie est linéaire invariante dans le temps. Dans [YAN01], les auteurs ont analysé une classe de systèmes non linéaires où la sortie peut être complètement non linéaire. En effet des commandes par apprentissage itératif CAI autonome *off line* et CAI connecté *on-line* ont été proposées, dans lesquelles l'information exacte de la partie non linéaire du système dynamique n'est pas nécessaire, seule la condition de Lipchitz est exigée. Récemment, de autres algorithmes [PAR00, SUN02, CHE99b, XU05] ont été proposés pour la commande par apprentissage itératif des systèmes non linéaires sans la nécessité de vérifier la condition initiale identique, c.à.d. l'état initial du système ne coïncide pas avec l'état initial désiré.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la commande par apprentissage itératif pour résoudre le problème de poursuite de trajectoires des robots manipulateurs sous l'effet des perturbations externes, exécutant des tâches répétitives. Une loi de CAI de type D est présentée, avec un algorithme de condition initiale, qui fournit automatiquement l'état initial à chaque itération. La norme λ est adoptée comme une méthode pour démontrer la stabilité asymptotique de cette loi de commande, dans un intervalle de temps fini lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini. Les résultats de simulation sur un robot manipulateur à deux degrés de liberté, prouvent clairement l'efficacité et les performances de la commande proposée.

4.2 Loi de commande itérative avec un algorithme d'état initial

Dans cette section, nous considérons une loi de commande par apprentissage itératif de type D, avec un algorithme d'état initial. Pour les conditions de la stabilité asymptotique de tel régulateur nous énonçons le théorème suivant.

Théorème 4.1 [BOU08e]

Etant donnée l'équation dynamique des robots manipulateurs (2.13) vérifiant les hypothèses (2.1 et 2.2). Choisisant des valeurs pour la position, vitesse et commande initiales $q_1(0)$, $\dot{q}_1(0)$ et $\tau_1(t)$, respectivement, en appliquant la loi de commande

$$\tau_{k+1}(t) = \tau_k(t) + M(q)L_1\dot{e}_{1k}(t) \quad (4.1)$$

avec

$$\begin{cases} e_{1(k+1)}(0) = e_{1k}(0) \\ \dot{e}_{1(k+1)}(0) = \dot{e}_{1k}(0) + L_1 e_{1k}(0). \end{cases} \quad (4.2)$$

Si

$$\|I_n - L_1\| < 1. \quad (4.3)$$

Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (q_d(t) - q_k(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\dot{q}_d(t) - \dot{q}_k(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.4)$$

avec $e_{1k}(t) = q_d(t) - q_k(t)$, L_1 est une matrice symétrique définie positive, et $I_n \in R^{n \times n}$ est la matrice identité.

Preuve

Les notations suivantes sont utilisées : $M(q_k) \equiv M_k$, $G(q_k) = G_k$.

En plus, tant que l'hypothèse (2.2) est vérifiée, on considère

$$\tau_k = M(q_k) \ddot{q}_k + C(q_k, \dot{q}_k) \dot{q}_k + G(q_k) + d(t) \quad (4.5)$$

comme l'équation dynamique donné au lieu de (2.13).

De (2.13), on peut écrire

$$\ddot{q}_k = M_k^{-1} \tau_k - M_k^{-1} [C(q_k, \dot{q}_k) \dot{q}_k + G(q_k) + d]. \quad (4.6)$$

Soit

$$\begin{cases} x_{1k}(t) = q_k(t) \\ x_{2k}(t) = \dot{q}_k(t) \end{cases} \quad (4.7)$$

et $x_k(t) = [x_{1k}^T(t) \quad x_{2k}^T(t)]^T$.

De (4.6) et (4.7), on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}_{1k}(t) = x_{2k}(t) \\ \dot{x}_{2k}(t) = M_k^{-1} \tau_k - M_k^{-1} [C(q_k, \dot{q}_k) \dot{q}_k + G(q_k) + d] \end{cases} \quad (4.8)$$

D'où

$$\dot{x}_k(t) = Ax_k(t) + B\tau_k(t) + \psi_k(t). \quad (4.9)$$

Avec

$$f_k(t) = -M_k^{-1} \left[C(q_k, \dot{q}_k) \dot{q}_k + G(q_k) + d \right] \quad (4.10)$$

$$\text{et } A = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0_n \\ M^{-1} \end{pmatrix}, \psi_k(t) = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ f_k(t) \end{pmatrix}.$$

De (4.9), pour n'importe quelle commande $\tau_k(t)$, $t \in [0, T]$, la solution générale $x_k(t)$ peut être écrite de la forme suivante

$$x_k(t) = e^{At} x_k(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} B \tau_k(s) ds + \int_0^t e^{A(t-s)} \psi_k(s) ds. \quad (4.11)$$

En outre, utilisant (4.11) avec (4.1), (4.2) et (4.7), on peut écrire

$$x_{k+1}(t) - x_k(t) = e^{At} L e_{1k}(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} B M L_1 \dot{e}_{1k}(s) ds + \int_0^t e^{A(t-s)} (\psi_{k+1}(s) - \psi_k(s)) ds. \quad (4.12)$$

Il est clair que $B M L_1 = L$, avec $L = \begin{bmatrix} 0_n & L_1^T \end{bmatrix}^T$.

En intégrant le terme $\dot{e}_{1k}(t)$ dans (4.12) par partie, on obtient pour $t \in [0, T]$

$$x_{k+1}(t) - x_k(t) = L e_{1k}(t) + \int_0^t A e^{A(t-s)} L e_{1k}(s) ds + \int_0^t e^{A(t-s)} (\psi_{k+1}(s) - \psi_k(s)) ds. \quad (4.13)$$

Ajoutant et retranchant $x_d(t)$, avec $x_d(t) = \begin{bmatrix} q_d^T(t) & \dot{q}_d^T(t) \end{bmatrix}^T$, on trouve

$$e_{k+1}(t) = e_k(t) - L e_{1k}(t) - \int_0^t A e^{A(t-s)} L e_{1k}(s) ds - \int_0^t e^{A(t-s)} (\psi_{k+1}(s) - \psi_k(s)) ds. \quad (4.14)$$

Avec $e_k(t) = \begin{bmatrix} e_{1k}^T(t) & e_{2k}^T(t) \end{bmatrix}^T$ et $e_{2k}(t) = \dot{e}_{1k}(t) = \dot{q}_d(t) - \dot{q}_k(t)$.

En appliquant les propriétés générales des normes sur les deux membres de (4.14), on obtient

$$\|e_{k+1}(t)\| \leq \|e_k(t) - L e_{1k}(t)\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| \|A L\| \|e_{1k}(s)\| ds + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| \|\psi_{k+1}(s) - \psi_k(s)\| ds. \quad (4.15)$$

Sachant que $e_k(t) = \begin{bmatrix} e_{1k}^T(t) & e_{2k}^T(t) \end{bmatrix}^T$, il est clair que $\|e_{1k}(t)\| \leq \|e_k(t)\|$ et

$$\|e_k(t) - L e_{1k}(t)\| \leq \|I^2 - L\| \|e_k(t)\|, \text{ avec } I^2 = \begin{bmatrix} I_n & \\ & I_n \end{bmatrix}^T.$$

Alors, (4.15) devient

$$\|e_{k+1}(t)\| \leq \|I^2 - L\| \|e_k(t)\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| \|AL\| \|e_k(t)\| ds + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| \|\psi_{k+1}(s) - \psi_k(s)\| ds. \quad (4.16)$$

Pour simplifier les notations, prenons

$$D(q, \dot{q}_k) = C(q, \dot{q}_k) \dot{q}_k. \quad (4.17)$$

De (4.10) et (4.17), on peut écrire

$$\begin{aligned} f_{k+1}(t) - f_k(t) = & -\left(M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}\right) d - \left(M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}\right) G_k \\ & - \left(M_{k+1}^{-1} - M_k^{-1}\right) D(q, \text{sat}(\dot{q}_k)) - M_{k+1}^{-1} (G_{k+1} - G_k) \\ & - M_{k+1}^{-1} \left(D(q, \text{sat}(\dot{q}_{k+1})) - D(q, \text{sat}(\dot{q}_k)) \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Utilisant la propriété P4, il suit qu'il existe $\phi > 0$ tel que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (D(q, \dot{q})) \right\| \leq \phi, \quad \forall (q, \dot{q}) \in R^n \times \bar{V} \quad (4.19)$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} (D(q, \dot{q})) = 2 \begin{pmatrix} \dot{q}^T N_1(q) \\ \vdots \\ \dot{q}^T N_n(q) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

et

$$\bar{V} = \{ \dot{q} \in R^n \mid |\dot{q}_i| \leq V_i, \quad i = 1, \dots, n \}. \quad (4.21)$$

De (4.18), (4.19), et utilisant les propriétés 1-5, les lemmes 2.1 et 2.2, et les hypothèses 2.1 et 2.2, on trouve

$$\begin{aligned} \|f_{k+1}(t) - f_k(t)\| \leq & \left(l_m \beta_1^{-2} (C_m V_m^2 + l_g + l_d) + \beta_1^{-1} g_m \right) \|e_{1k+1}(t) - e_{1k}(t)\| \\ & + \beta_1^{-1} \phi \|e_{2k+1}(t) - e_{2k}(t)\|. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Il est claire que

$$\|f_{k+1}(t) - f_k(t)\| \leq \varpi \|e_{k+1}(t) - e_k(t)\| \quad (4.23)$$

avec $\varpi = \left(l_m \beta_1^{-2} (C_m V_m^2 + l_g + l_d) + \beta_1^{-1} g_m \right) + \beta_1^{-1} \phi$.

De (4.16) et (4.23), on obtient

$$\|e_{k+1}(t)\| \leq \|I^2 - L\| \|e_k(t)\| + \alpha\gamma \int_0^t \|e_k(s)\| ds + \alpha\varpi \int_0^t \|e_{k+1}(s) - e_k(s)\| ds. \quad (4.24)$$

Avec $\alpha := \sup_{t,s \in [0,T]} \|e^{A(t-s)}\|$ et $\gamma = \|AL\|$.

En multipliant les deux côtés de (4.24) par $e^{-\lambda t}$, et d'après le lemme 2.3, on trouve

$$\|e_{k+1}(t)\|_\lambda \leq \left(\frac{\|I^2 - L\| + \frac{\alpha\gamma}{\lambda}}{1 - \frac{\alpha\varpi}{\lambda}} \right) \|e_k(t)\|_\lambda. \quad (4.25)$$

En vérifiant $\|I^2 - L\| < 1$, et donc $\|I_n - L_1\| < 1$, il suit qu'il existe λ , ($\lambda > 0$) assez grand, tel que

$$\frac{\|I^2 - L\| + \frac{\alpha\gamma}{\lambda}}{1 - \frac{\alpha\varpi}{\lambda}} =: \rho < 1, \quad t \in [0, T]. \quad (4.26)$$

Alors, à partir de (4.25) on trouve

$$\|e_{k+1}(t)\|_\lambda \leq \rho \|e_k(t)\|_\lambda. \quad (4.27)$$

De (4.26) et (4.27), on obtient

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(t)\|_\lambda = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (4.28)$$

Et donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (q_d(t) - q_k(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\dot{q}_d(t) - \dot{q}_k(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.29)$$

4.3 Résultats de Simulation

Nous considérons un robot manipulateur à deux degrés de liberté, avec les masses m_1, m_2 , les longueurs l_1, l_2 , et les angles q_1, q_2 . L'équation dynamique de ce robot peut être écrite selon (2.13), avec les éléments de $M(q), C(q, \dot{q}), G(q)$ sont donnés par (LOZ01)

$$m_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2,$$

$$m_{12} = m_{21} = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2, m_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2.$$

$$C_{11} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2, C_{12} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2),$$

$$C_{21} = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1, C_{22} = 0.$$

$$G_1 = m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2) + (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \sin(q_1), G_2 = m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2).$$

Les paramètres de robot sont donnés par

$$m_1 = 1[\text{kg}], m_2 = 1[\text{kg}], l_1 = 0.6[\text{m}], l_2 = 0.6[\text{m}], l_{c1} = 0.4[\text{m}],$$

$$l_{c2} = 0.4[\text{m}], I_1 = 0.1[\text{kg.m}^2 / \text{rad}], I_2 = 0.1[\text{kg.m}^2 / \text{rad}].$$

Les paramètres de simulation

$$L_1 = [0.6 \ 0, \ 0 \ 0.6]^T.$$

La position initiale, la vitesse initiale et la commande à la 1^{ère} itération sont choisies comme suit

$$\tau_1(t) = [1 \ 1]^T, q_1(0) = q_{d1}(0), q_2(0) = q_{d2}(0), \dot{q}_1(0) = \dot{q}_{d1}(0), \dot{q}_2(0) = \dot{q}_{d2}(0).$$

Les perturbations externes considérées sont données par

$$d_1(t) = 13 - \frac{t}{2}, d_2(t) = 5 - \frac{t}{2}.$$

Les trajectoires désirées sont choisies comme suit

$$\begin{cases} q_{d1}(t) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \left(2\pi \frac{t}{4} - \sin\left(2\pi \frac{t}{4}\right) \right) & 0 \leq t \leq 4 \\ q_{d2}(t) = \frac{1}{4} \left(2\pi \frac{t}{4} - \sin\left(2\pi \frac{t}{4}\right) \right) = \frac{1}{4} \left(2\pi \frac{t}{4} - \sin\left(2\pi \frac{t}{4}\right) \right) & 0 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

En appliquant la loi de commande (4.1) avec l'algorithme de l'état initial (4.2), les résultats de simulation donnant les trajectoires réelles et désirées de la 2^{ème}, 4^{ème}, 6^{ème}, 10^{ème}, 14^{ème}, 20^{ème} et 27^{ème} (28^{ème}) itération pour la 1^{ère} (2^{ème}) articulation sont montrés dans les figures 4.1 et 4.2, respectivement. Nous pouvons voir que la trajectoire réelle suit la trajectoire désirée à travers les itérations. D'où le robot exécute 27 et 28 itérations pour que la trajectoire réelle suit la trajectoire désirée sans erreur, pour la 1^{ère} et la 2^{ème} articulation, respectivement. Les figures (4.3–4.10) montrent les erreurs de poursuite des

deux articulations, pour les mêmes itérations citées précédemment. En plus, la norme λ de l'erreur de poursuite au cours des itérations pour chaque articulation est présentée dans les figures 4.11 et 4.12. Il est montré que la norme λ de l'erreur de poursuite pour la 1^{ère} articulation se dégrade de 0.00011 à zéro (rad) dans 27 itérations, et pour la 2^{ème} articulation, elle se dégrade de 0.0005 à zéro (rad) dans 28 itérations. Les signaux de commande pour la 27^{ème} (28^{ème}) itération de la 1^{ère} (2^{ème}) articulation sont montrés dans les figures 4.13 et 4.14, respectivement. Ainsi, les figures 4.15 et 4.16 montrent tous les signaux de commande des deux articulations de $k=1$ jusqu'à $k=400$. Nous constatons que les signaux de commandes sont toujours admissibles $\forall k$. Par conséquent, nous pouvons conclure que la commande proposée a donnée des bons résultats.

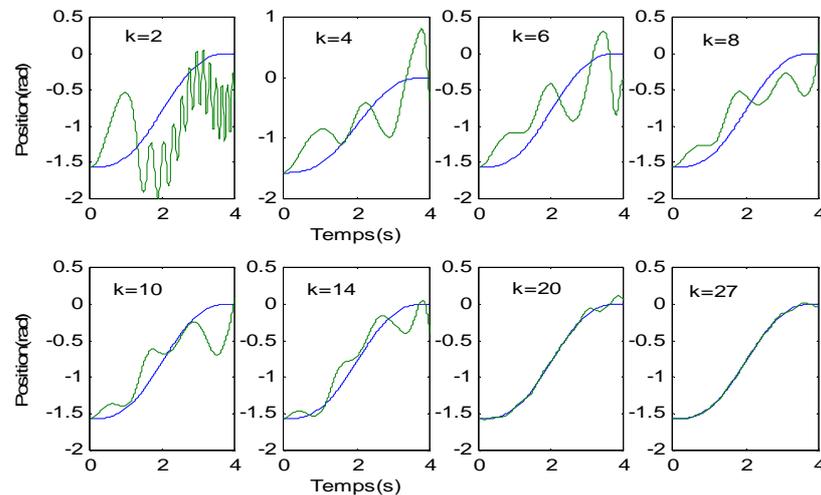


Fig. 4.1. Trajectoires réelles et désirées de la 1^{ère} articulation.

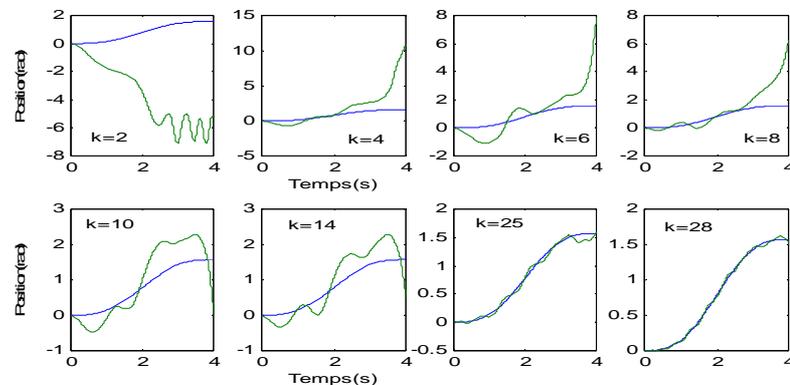


Fig. 4.2. Trajectoires réelles et désirées de la 2^{ème} articulation.

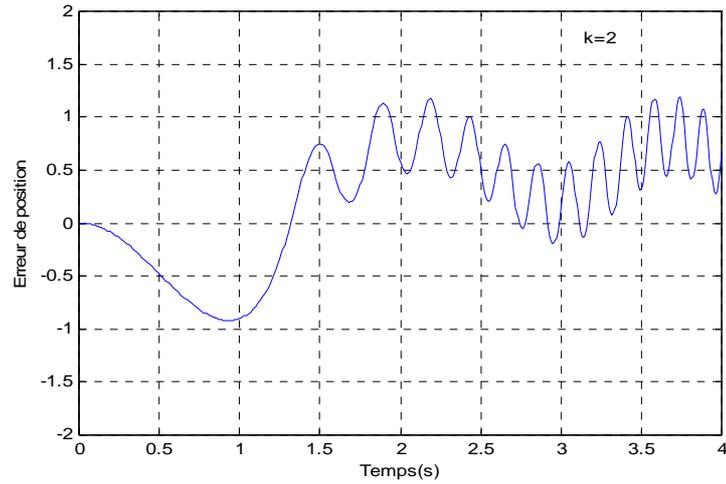


Fig. 4.3. Erreur de Position de la 1ère articulation ($k=2$).

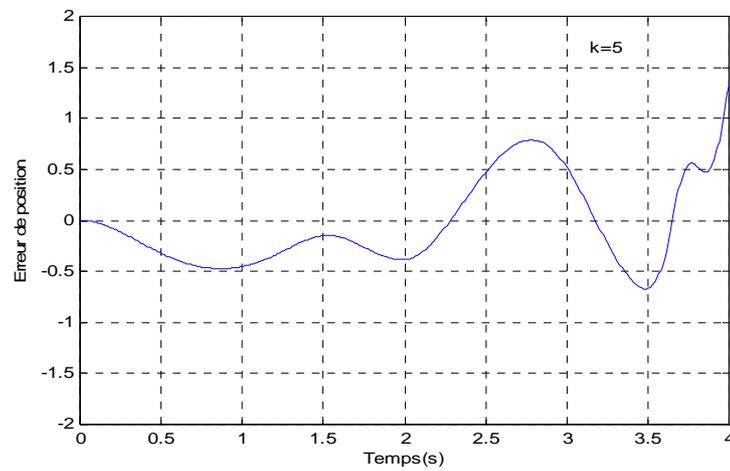


Fig. 4.4. Erreur de Position de la 1ère articulation ($k=5$).

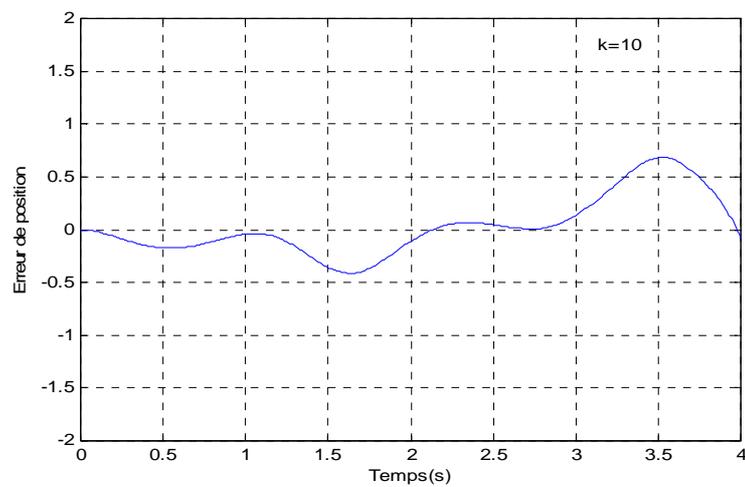


Fig. 4.5. Erreur de Position de la 1^{ère} articulation ($k=10$).

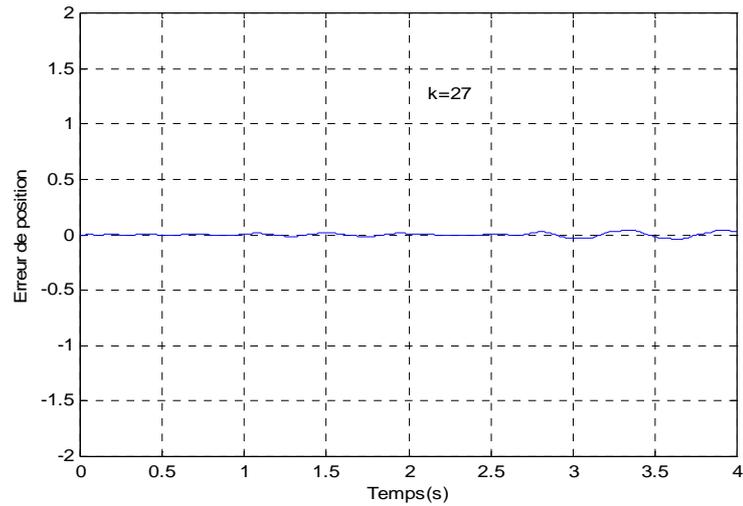


Fig. 4.6. Erreur de Position de la 1^{ère} articulation ($k=27$).

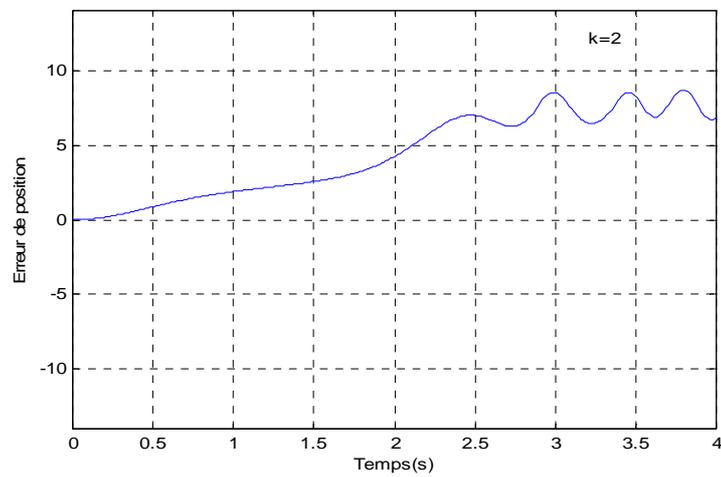


Fig. 4.7. Erreur de position de la 2^{ème} articulation ($k=2$).

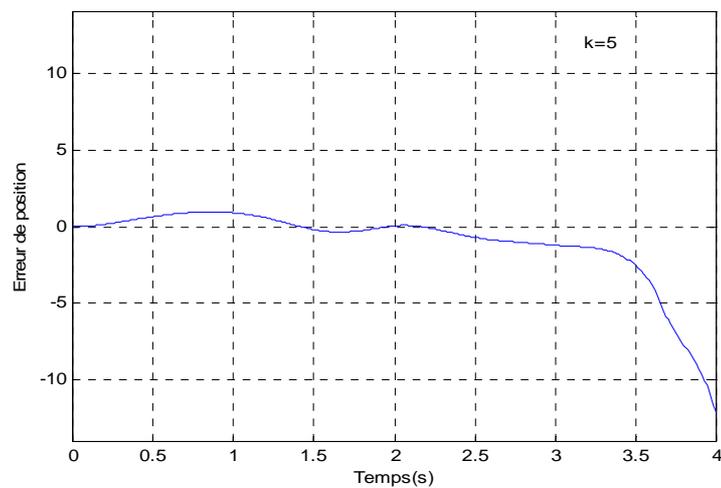


Fig. 4.8. Erreur de position de la 2^{ème} articulation ($k=5$).

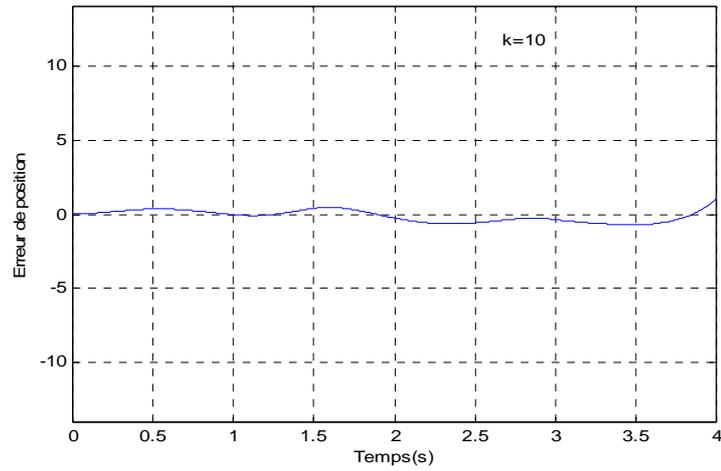


Fig. 4.9. Erreur de position de la 2^{ème} articulation (k=10).

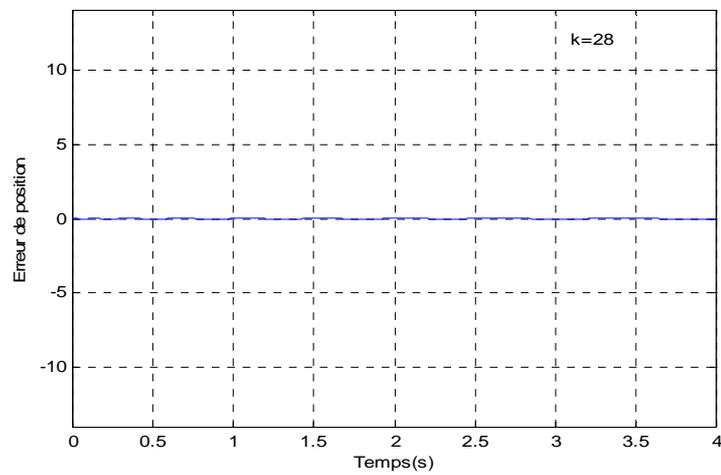


Fig. 4.10. Erreur de position de la 2^{ème} articulation (k=28).

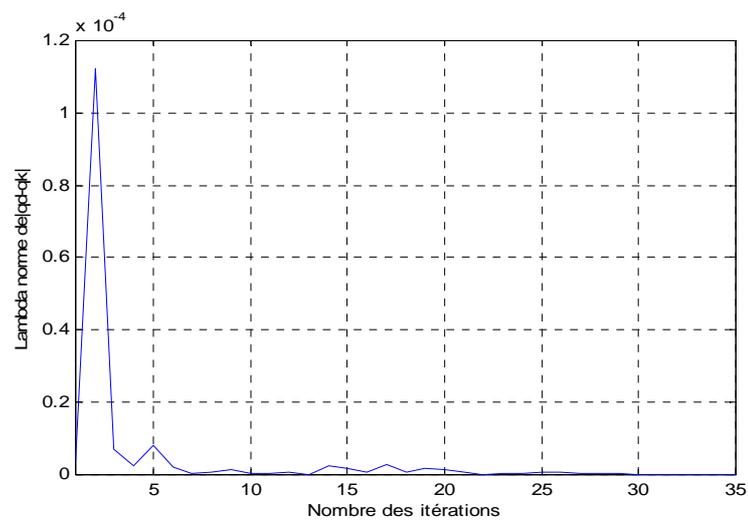


Fig. 4.11. Norme λ de l'erreur de poursuite au cours des itérations de la 1^{ère} articulation.

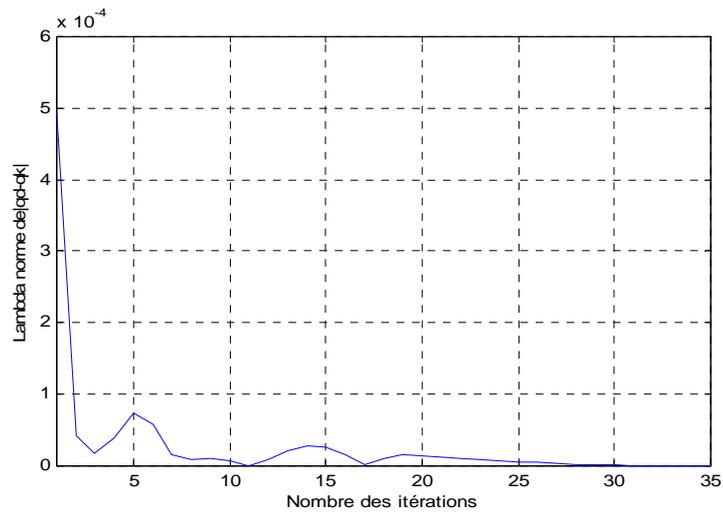


Fig. 4.12. Norme λ de l'erreur de poursuite au cours des itérations de la 2ème articulation.

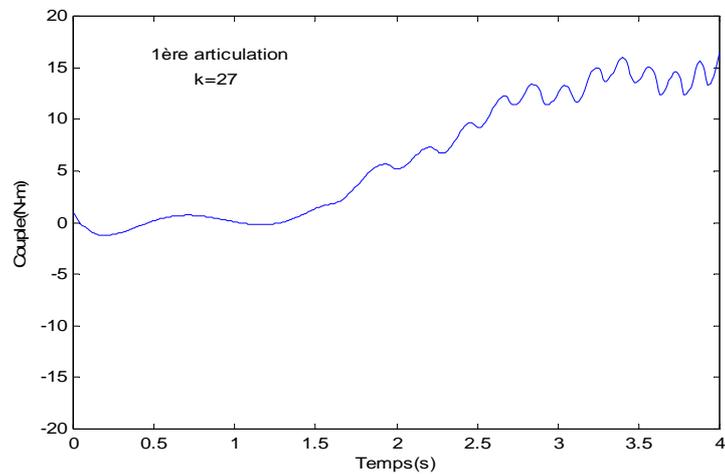


Fig. 4.13. Couple de la 1^{ère} articulation (k=27).

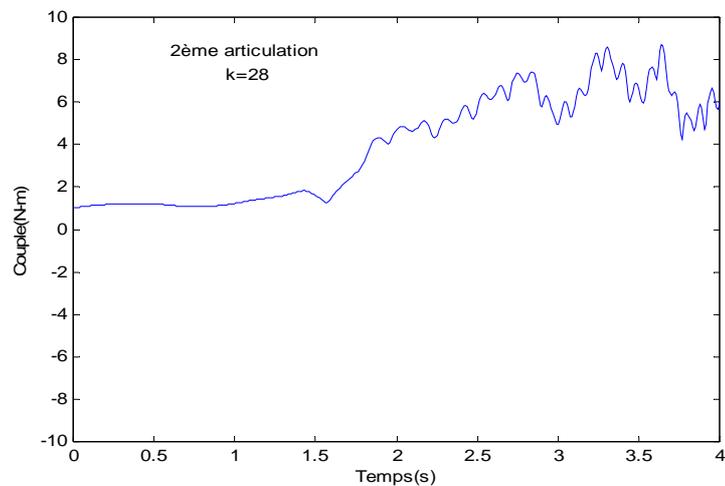


Fig. 4.14. Couple de la 2^{ème} articulation (k=28).

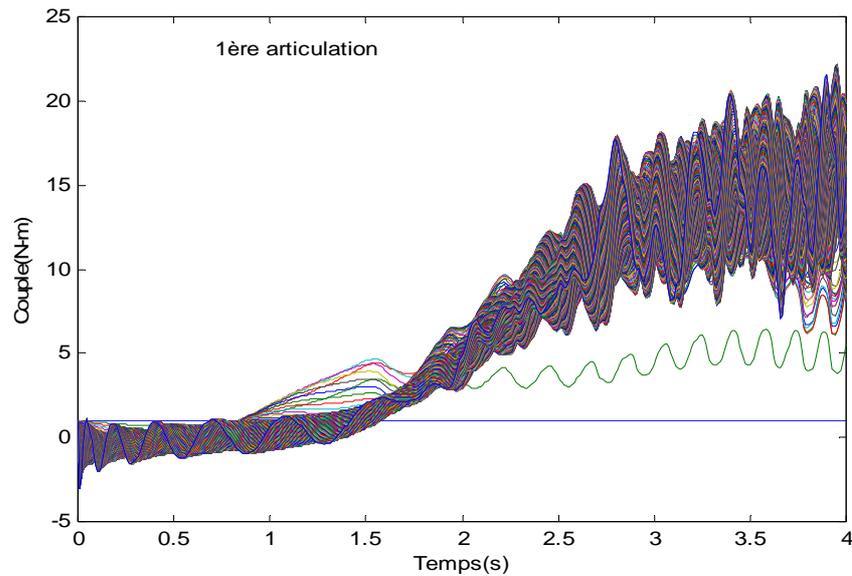


Fig. 4.15. Couples de la 1^{ère} articulation (de $k=1$ jusqu'à $k=400$).

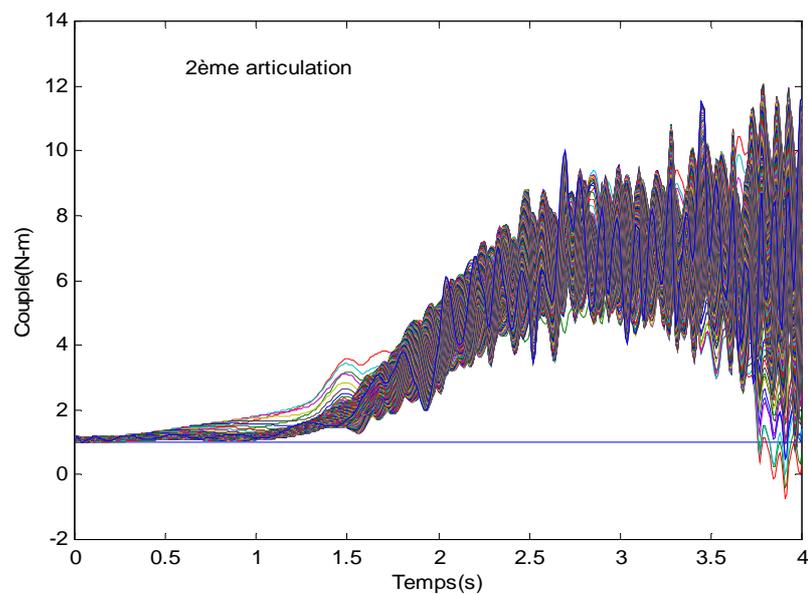


Fig. 4.16. Couples de la 2^{ème} articulation (de $k=1$ jusqu'à $k=400$).

4.4 Conclusion

Une loi de commande par apprentissage itératif de type D a été présentée pour la commande en poursuite de trajectoire des robots manipulateurs rigides sous l'effet des perturbations externes, avec un algorithme de l'état initial qui donne la position et la vitesse initiales à chaque itération. En supposant que les perturbations sont répétitives et uniformément bornées, les vitesses sont aussi bornées, et utilisant la norme λ , la convergence de l'erreur de poursuite vers zéro, dans un intervalle de temps fini, lorsque le

nombre des itérations tend vers l'infini est démontrée. Les résultats de simulation sur un robot manipulateur de deux degré de liberté on montré clairement l'efficacité de la loi de commande proposée.

Conclusion générale

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse concernent le développement de lois de commande par apprentissage itératif des systèmes non linéaires répétitifs. Nous nous sommes intéressés particulièrement à la synthèse de cette technique pour la commande en poursuite de trajectoire des robots manipulateurs exécutant des tâches répétitives sous l'effet des perturbations externes. Cette méthode de commande consiste à trouver un mécanisme itératif adéquat permettant d'apprendre les erreurs des cycles précédents et exécuter progressivement le mieux possible le nouveau cycle, et par la suite améliorer la poursuite à travers les itérations.

Dans le premier chapitre, une recherche bibliographique a été faite dont le but de donner les principaux schémas de la commande par apprentissage itératif. A l'issue de cette recherche, nous avons constaté qu'il existe des schémas faisant appel seulement aux informations (erreur et commande) obtenues à l'itération précédente, ces lois de commande sont appelées lois de CAI du premier ordre, et d'autres lois utilisent les informations de plusieurs itérations passées. Dans ce dernier cas, on parle de lois CAI d'ordre élevé. Cette recherche a permis, également, de distinguer deux autres types de schéma de commande, l'un en boucle ouverte et l'autre en boucle fermée. Il est important de préciser que le schéma de commande est en boucle ouverte (fermée) vis à vis du domaine des itérations.

Dans le second chapitre, nous avons rappelé dans la première partie, l'équation dynamique non linéaire des robots manipulateurs utilisant le formalisme de Lagrange Euler, avec certaines propriétés structurelles de ce système mécanique articulé non linéaire. Dans la deuxième partie de ce chapitre, deux schémas de commande par apprentissage itératif ont été proposés pour résoudre le problème de poursuite de trajectoires des robots manipulateurs rigides. L'un est constitué d'une commande à contre réaction et d'une commande itérative, et l'autre est un schéma de commande itérative sans l'ajout de la

contre réaction. La stabilité du système est démontrée en se basant sur la théorie de Lyapunov.

Le troisième chapitre est consacré à la commande en poursuite de trajectoire des robots manipulateurs en appliquant les deux schémas de commande proposés dans le chapitre précédent, sachant que les vitesses articulaires ne sont pas disponibles. Afin de résoudre ce problème, un observateur de vitesse a été proposé possédant une forme itérative. En utilisant la théorie de Lyapunov, la stabilité asymptotique du système de commande en boucle fermée est démontrée.

Dans le dernier chapitre, nous avons traité le problème de l'état initial posé dans la commande par apprentissage itératif, en proposant un algorithme qui fournit la position et la vitesse initiales du manipulateur à chaque itération, avec un schéma de CAI de type D afin de résoudre le problème de poursuite de trajectoire des manipulateurs. La norme λ est adoptée comme une méthode pour démontrer la convergence de l'algorithme proposé, dans un intervalle de temps fini lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini.

A l'issue de ces travaux, cette thèse ouvre de nouvelles perspectives de recherche, parmi lesquelles nous citons :

- Mise en œuvre expérimentale de ces algorithmes.
- Tant que la CAI est une commande itérative, il serait intéressant de développer ces schémas de commande dans le domaine discret.
- Développement de lois CAI pour d'autres systèmes physiques à tâche répétitive.

Démonstration du théorème 1.1

De (1.59) et (1.71), en utilisant l'hypothèse 1.3, on obtient à la $(k+1)^{\text{ème}}$ itération

$$\begin{aligned}
 x_{k+1}(t) &= x_{k+1}(0) + \int_0^t (f(x_{k+1}(s), s) + B(s)u_{k+1}(s)) ds \\
 &= x_{k+1}(0) + \int_0^t f(x_{k+1}(s), s) ds + \int_0^t B(s)(u_k(s) + K(s)\dot{e}_k(s)) ds \\
 &= x_{k+1}(0) + \int_0^t f(x_{k+1}(s), s) ds + \int_0^t B(s)u_k(s) ds + B(t)K(t)e_k(t) - \int_0^t \frac{d(B(s)K(s))}{ds} e_k(s) ds \\
 &= x_k(0) + \int_0^t [f(x_{k+1}(s), s) + B(s)u_k(s)] ds + \int_0^t [f(x_{k+1}(s), s) - f(x_k(s), s)] ds \\
 &\quad + B(t)K(t)e_k(t) - \int_0^t \frac{d(B(s)K(s))}{ds} e_k(s) ds \\
 &= x_k(t) + \int_0^t [f(x_{k+1}(s), s) - f(x_k(s), s)] ds + B(t)K(t)e_k(t) - \int_0^t \frac{d(B(s)K(s))}{ds} e_k(s) ds.
 \end{aligned} \tag{A1}$$

Par conséquent

$$x_{k+1}(t) - x_k(t) = \int_0^t [f(x_{k+1}(s), s) - f(x_k(s), s)] ds + B(t)K(t)e_k(t) - \int_0^t \frac{d(B(s)K(s))}{ds} e_k(s) ds. \tag{A2}$$

Utilisant l'hypothèse 1.5, on trouve

$$\begin{aligned}
 \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| &\leq \alpha \int_0^t \|x_{k+1}(s) - x_k(s)\| ds + \max_{t \in [0, T]} \{ \|B(t)K(t)\| \} \|e_k(t)\| \\
 &\quad + \max_{t \in [0, T]} \left\{ \left\| \frac{d(B(s)K(s))}{ds} \right\| \right\} \int_0^t \|e_k(s)\| ds.
 \end{aligned} \tag{A3}$$

En appliquant le lemme 1.3, on trouve

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\|_{\lambda} \leq \gamma \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \|e_k(t)\|_{\lambda}. \tag{A4}$$

Avec $a = \max_{t \in [0, T]} \|B(t)K(t)\|$, $b = \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{dB(t)K(t)}{dt} \right\|$, $\gamma = a + \frac{b}{\lambda}$.

D'après le théorème de la valeur moyenne différentielle, il existe $\xi_k(t)$, tel que

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}(t) - e_k(t)\| &\leq \|y_k(t) - y_{k+1}(t)\| \\ &\leq \left(\sup_{\xi_k(t) \in [x_{k+1}(t), x_k(t)]} \|h_x(\xi_k(t), t)\| \right) \|x_k(t) - x_{k+1}(t)\| \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

où $[x_{k+1}(t), x_k(t)]$ est le segment de R^n reliant $x_{k+1}(t)$ à $x_k(t)$.

De (A2) et (A5), il est claire que

$$\begin{aligned} e_{k+1}(t) &= (I_m - h_x(\xi_k(t), t)B(t)K(t))e_k(t) - h_x(\xi_k(t), t) \left[\int_0^t [f(x_{k+1}(s), s) - f(x_k(s), s)] ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \frac{d(B(s)K(s))}{ds} e_k(s) ds \right] \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

En appliquant (A4) et d'après l'hypothèse 1.5, on trouve

$$\|e_{k+1}(t)\|_\lambda \leq \left\{ \|I_m - h_x(\xi_k(t), t)B(t)K(t)\| + \frac{\delta}{\lambda} \left[\alpha \gamma \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) + b \right] \right\} \|e_k(t)\|_\lambda. \quad (\text{A7})$$

Avec $\delta = \sup_{(x,t) \in R \times [0, T]} \{ \|h_x(x, t)\| \}$.

Il existe λ ($\lambda > 0$) assez grand, pour tout $t \in [0, T]$, tel que

$$\sup_{(x,t) \in R \times [0, T]} \|I_m - h_x(x(t), t)B(t)K(t)\| + \frac{\delta}{\lambda} \left[\alpha \gamma \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) + b \right] = \rho < 1. \quad (\text{A8})$$

Et donc

$$\|e_{k+1}(t)\|_\lambda \leq \rho \|e_k(t)\|_\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A9})$$

Finalement

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(t)\|_\lambda = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (\text{A10})$$

Annexe B

Démonstration du théorème 1.2

Considérons le système (1.59), avec la loi (1.73), on obtient

$$\begin{aligned}
 x_{k+1}(t) &= x_{k+1}(0) + \int_0^t (f(x_{k+1}(s), s) + B(s)u_{k+1}(s))ds \\
 &= x_{k+1}(0) + \int_0^t f(x_{k+1}(s), s)ds + \int_0^t B(s)(u_k(s) + L(s)\dot{e}_k(s) + K(s)\dot{e}_{k+1}(s))ds \\
 &= x_k(0) + \int_0^t [f(x_k(s), s) + B(s)u_k(s)]ds + \int_0^t [f(x_{k+1}(s), s) - f(x_k(s), s)]ds \\
 &\quad + B(t)L(t)e_k(t) - \int_0^t \frac{d(B(s)L(s))}{ds} e_k(s)ds + B(t)K(t)e_{k+1}(t) - \int_0^t \frac{d(B(s)K(s))}{ds} e_{k+1}(s)ds.
 \end{aligned} \tag{B1}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 x_{k+1}(t) - x_k(t) &= \int_0^t [f(x_{k+1}(s), s) - f(x_k(s), s)]ds + B(t)L(t)e_k(t) - \int_0^t \frac{d(B(s)L(s))}{ds} e_k(s)ds \\
 &\quad + B(t)K(t)e_{k+1}(t) - \int_0^t \frac{d(B(s)K(s))}{ds} e_{k+1}(s)ds.
 \end{aligned} \tag{B2}$$

En appliquant les lemmes 1.1 et 1.2, et selon les hypothèses 1.3 et 1.5, on trouve

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\|_\lambda \leq \gamma_1 \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \|e_k(t)\|_\lambda + \gamma_2 \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \|e_{k+1}(t)\|_\lambda. \tag{B3}$$

avec $a = \max_{t \in [0, T]} \|B(t)L(t)\|$, $b = \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{dB(t)L(t)}{dt} \right\|$, $\gamma_1 = a + \frac{b}{\lambda}$, $c = \max_{t \in [0, T]} \|B(t)K(t)\|$,

$$d = \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{dB(t)K(t)}{dt} \right\|, \quad \gamma_2 = c + \frac{d}{\lambda}.$$

D'après le théorème de la valeur moyenne différentielle, il existe $\xi_k(t)$, tel que

$$\begin{aligned}
 e_{k+1}(t) - e_k(t) &= y_k(t) - y_{k+1}(t) \\
 &= h_x(\xi_k(t), t)(x_k(t) - x_{k+1}(t))
 \end{aligned} \tag{A4}$$

De (B2) et (B4), on trouve

$$\begin{aligned}
 [I_m + h_x(x_k(t), t)B(t)K(t)]e_{k+1}(t) &= [I_m - h_x(x_k(t), t)B(t)L(t)]e_k(t) - h_x(x_k(t), t) \\
 &\cdot \int_0^t [f(x(s), s) - f(x_k(s), s)]ds - h_x(x_k(t), t) \\
 &\left[\int_0^t \frac{d(B(s)L(s))}{ds} e_k(s) ds + \int_0^t \frac{d(B(s)K(s))}{ds} e_{k+1}(s) ds \right]. \quad (B5)
 \end{aligned}$$

De (B3), (B5) et selon l'hypothèse 1.5, on trouve

$$\|e_{k+1}(t)\|_\lambda \leq \left[\frac{\max_{t \in [0, T]} \|(I_m - h_x(x(t), t)B(t)L(t))\| + \frac{\delta}{\lambda} \left[\alpha \gamma_1 \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) + b \right]}{\max_{t \in [0, T]} \|(I_m + h_x(x(t), t)B(t)K(t))\| - \frac{\delta}{\lambda} \left[\alpha \gamma_2 \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) + d \right]} \right] \|e_k(t)\|_\lambda. \quad (B6)$$

En choisissant λ ($\lambda > 0$) largement grand, on obtient

$$\|e_{k+1}(t)\|_\lambda \leq \max_{t \in [0, T]} \left\{ \|(I_m - h_x(x(t), t)B(t)L(t))(I_m + h_x(x(t), t)B(t)K(t))^{-1}\| \right\} \|e_k(t)\|_\lambda. \quad (B7)$$

Si

$$\max_{t \in [0, T]} \left\{ \|(I_m - h_x(x(t), t)B(t)L(t))(I_m + h_x(x(t), t)B(t)K(t))^{-1}\| \right\} < 1. \quad (B8)$$

Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (B9)$$

Démonstration du théorème 1.3

Considérons le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = f(x_k(t), t) + g(x_k(t), t)u_k(t) \\ y_k(t) = h(x_k(t), t). \end{cases} \quad (\text{C1})$$

Soit r le degré relatif du système (C1). Ce dernier est supposé inversible, c.à.d. il existe une entrée unique $u_d(t)$ bornée qui peut amener le système vers l'état désiré $x_d(t)$ et la sortie désirée $y_d(t)$. Alors, les dérivées de $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ peuvent s'écrire comme suit [AHN93] :

$$e_k^i(t) = L_f^i h(x_d(t)) - L_f^i h(x_k(t)) \quad 0 \leq i \leq r-1. \quad (\text{C2})$$

$$e_k^r(t) = L_f^r h(x_d(t)) + L_g L_f^{r-1} h(x_d(t))u_d(t) - L_f^r h(x_k(t)) - L_g L_f^{r-1} h(x_k(t))u_k(t). \quad (\text{C3})$$

Où $u_d(t)$ et $x_d(t)$ sont l'entrée désirée et l'état désiré, respectivement.

De (1.77), (C2) et (C3), on obtient

$$\begin{aligned} u_d(t) - u_{k+1}(t) &= u_d(t) - u_k(t) - \sum_{i=0}^r s_{k,i}(t) e_k^i(t) \\ &= \left[1 - s_{k,r}(t) L_g L_f^{r-1} h(x_k(t)) \right] \left[u_d(t) - u_k(t) \right] - \sum_{i=0}^r s_{k,i}(t) \left[L_f^i h(x_d(t)) - L_f^i h(x_k(t)) \right] \\ &\quad - s_{k,r}(t) \left[L_g L_f^{r-1} h(x_d(t)) - L_g L_f^{r-1} h(x_k(t)) \right] u_d(t). \end{aligned} \quad (\text{C4})$$

Vu que $L_f^i h(x)$ et $L_g L_f^i h(x)$ sont continus dans x , il existe deux constantes m_1 et m_2 , tels que

$$L_f^i h(x_d) - L_f^i h(x_k) \leq m_1 \|x_d - x_k\|, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (\text{C5})$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x_d) - L_g L_f^{r-1} h(x_k) \leq m_2 \|x_d - x_k\|, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (\text{C6})$$

En appliquant les normes sur (C4), on trouve

$$\begin{aligned}
\|\Delta u_{k+1}(t)\| &\leq \left\| 1 - s_{k,r}(t) L_g L_f^{r-1} h(x_k(t)) \right\| \|\Delta u_k(t)\| + \sup_{t \in [0, T]} |s_{k,i}(t)| m_1 \|x_d(t) - x_k(t)\| \\
&\quad + |s_{k,r}(t)| m_2 \|x_d(t) - x_k(t)\| \|u_d(t)\| \\
&\leq \rho \|\Delta u_k(t)\| + c_1 \|x_d(t) - x_k(t)\|.
\end{aligned} \tag{C7}$$

Où $c_1 = \sup_{t \in [0, T]} |s_{k,i}(t)| m_1 + \sup_{t \in [0, T]} |s_{k,i}(t)| m_2 \|u_d(t)\|$ et $\rho = \left\| 1 - s_{k,r}(t) L_g L_f^{r-1} h(x_k(t)) \right\|$.

Les fonctions f, g et h sont supposées Lipschitziennes par rapport à $x(t), \forall t \in [0, T]$, donc de (C1), on peut écrire

$$\|x_d(t) - x_k(t)\| \leq \int_0^t \left[(f_0 + g_0 \|u_d(\tau)\|) \|x_d(\tau) - x_k(\tau)\| + \|g(x_k(\tau))\| \|\Delta u_k(\tau)\| \right] d\tau. \tag{C8}$$

Avec f_0, g_0 et h_0 sont des constantes de Lipschitz définies dans le premier chapitre.

En appliquant le lemme de Bellman-Gronwall sur (C8), on obtient

$$\|x_d(t) - x_k(t)\| \leq \int_0^t c_3 \|\Delta u_k(\tau)\| e^{c_2(t-\tau)} d\tau. \tag{C9}$$

Avec $c_2 = \sup_{t \in [0, T]} (f_0 + g_0 \|u_d(t)\|)$ et $c_3 = \sup_{t \in [0, T]} \|g(x_k(t))\|$.

Substituant (C9) dans (C7), on trouve

$$\|\Delta u_{k+1}(t)\| \leq \rho \|\Delta u_k(t)\| + c_1 c_3 \int_0^t \|\Delta u_k(\tau)\| e^{c_2(t-\tau)} d\tau. \tag{C10}$$

En multipliant les deux membres de (C10) par $e^{-\lambda t}$, et en utilisant la définition de la norme λ , on obtient

$$\begin{aligned}
\|\Delta u_{k+1}(t)\|_\lambda &\leq \rho \|\Delta u_k(t)\|_\lambda + \sup_{t \in [0, T]} \left[c_1 c_3 \int_0^t e^{(c_2-\lambda)(t-\tau)} d\tau \right] \|\Delta u_k(t)\|_\lambda \\
&\leq \bar{\rho} \|\Delta u_k(t)\|_\lambda.
\end{aligned} \tag{C11}$$

Avec $\bar{\rho} = \rho + \frac{c_1 c_3 (1 - e^{(c_2-\lambda)T})}{\lambda - c_2}$.

Tant que $\rho < 1$, nous pouvons trouver $\lambda \gg c_2$ tel que $\bar{\rho} < 1$, ce qui nous donne

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta u_k(t)\| = 0. \tag{C12}$$

De la définition de la norme λ , on obtient

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|\Delta u_k(t)\| = 0. \quad (\text{C13})$$

Par conséquent, on trouve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|x_d(t) - x_k(t)\| = 0. \quad (\text{C14})$$

D'où $\|e_k(t)\| \leq h_0 \|x_d(t) - x_k(t)\|$ converge uniformément vers zéro pour $t \in [0, T]$, lorsque $k \rightarrow \infty$.

Bibliographie

- [ABD06] Abdessameud A, Khelfi MF., “A variable structure observer for the control of robot manipulators”, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, Vol. 16, No. 2, pp. 189-196, 2006.
- [AHN93] Ahn H., Choi C. et Kim K., "Iterative learning control for a class of nonlinear systems", *Automatica*, Vol. 29, No. 6, pp. 1575-1578, 1993.
- [ARI84a] Arimoto S., Kawamura S. et Miyazaki F., “Bettering operation of robots by learning”, *J. of Robot. Syst.*, Vol. 1, No. 2, pp. 123-140, 1984.
- [ARI84b] Arimoto S. et Miyazaki F., “Stability and robustness of PID feedback control for robots manipulators of sensory capability”, *The 1st Int. Symp. of Robotics Research*, MIT Press, Cambridge, 1984.
- [ASA86] Asada H. et Slotine J.J. E., “*Robot analysis and control*”, Wiley, New York, 1986.
- [BER93a] Berghuis H., “Model based control: from theory to practice”, PhD thesis, University of Twent, the Netherlands, 1993.
- [BER93b] Berghuis H. et Nijmeijer H., “A passivity approach to controller observer design for robots,” *IEEE Trans. Robot. Automat.*, Vol. 9, No. 6, pp. 740–34, 1993.
- [BER93c] Berghuis H. et Nijmeijer H., “Global regulation of robots using only position measurements”, *Syst. & Contr. Lett.*, 21, pp. 289-293, 1993.
- [BIE98] Bien Z. et Xu JX., “Iterative learning control: Analysis, Design, Integration and Applications”, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [BOU03] **Bouakrif F.**, “Commande par apprentissage itératif, application en robotique”, Thèse de Magister, ENP, Oct. 2003.
- [BOU06] **Bouakrif F.**, Boukhetala D. et Boudjema F., “Commande passive à base d’observateur de vitesse des robots manipulateurs”, 7ème Conf. Int. des Sciences et Techniques de l’Automatique, Tunisie, Dec. 2006.
- [BOU07a] **Bouakrif F.**, Boukhetala D. et Boudjema F., “Iterative learning control for robot manipulators”, *Archives of Control Sciences*, Vol. 17, No. 1, 2007.

- [BOU07b] **Bouakrif F.**, Boukhetala D. et Boudjema F., “Iterative learning control schemes for robot manipulators”, *Mediterranean journal of measurement and control*, Vol. 3, No. 3, pp. 104-112, 2007.
- [BOU07c] **Bouakrif F.**, Boukhetala D. et Boudjema F., “Trajectory tracking control for robot manipulators using a simple disturbance observer”, *International Society of Advanced Science and Technology*, Vol. 1, No. 1, 2007.
- [BOU07d] **Bouakrif F.**, Boukhetala D. et Boudjema F., “Trajectory tracking control of robot manipulators using disturbance observer based iterative learning law”, *Int. Conf. on Elect. Eng. Design and Techn., ICEEDT’07*, Tunisie, Nov. 2007.
- [BOU08a] **Bouakrif F.**, Boukhetala D. et Boudjema F., “Passivity-based controller-observer for robot manipulators”, *IEEE-3d International Conference on Information & Communication Technologies: From Theory to Application*, Damas, Avril 2008.
- [BOU08b] **Bouakrif F.**, Boukhetala D. et Boudjema F., “Trajectory tracking control of robot manipulators using disturbance observer based iterative learning law”, *Journal of Automation and Systems Engineering*, 2008, sélectionné de ICEEDT’07.
- [BOU08c] **Bouakrif F.**, Boukhetala D. et Boudjema F., “Global asymptotic stability of controller-observer for robot manipulators using saturation technique”, *The Mediterranean Journal of Measurement and Control*, Vol. 4, No. 1, pp. 15-20, 2008.
- [BOU08d] **Bouakrif F.**, Boukhetala D. et Boudjema F., “Velocity observer based iterative learning control for robot manipulators”, *Soumis à International Journal of Systems Science*, 2008.
- [BOU08e] **Bouakrif F.**, Boukhetala D. et Boudjema F., “A simple iterative learning control with initial state algorithm for robot manipulators”, *Soumis au Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 2008.
- [CAS84] Casalino G. et Bartolini G., “A Learning Procedure for the Control of Movements of Robotic Manipulators”, *IASTED Symposium on Robotics and Automation*, Amsterdam, pp. 108–111, 1984.
- [CHA00] Chang Y. C. et Chen B. S., “Robust tracking designs for both holonomic and nonholonomic constrained mechanical systems: adaptive fuzzy approach,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Vol. 8, pp. 46–66, 2000.
- [CHE99a] Chen Y. et Wen C., “Iterative learning control: Convergence, Robustness and Applications”, *Lecture notes in control and information sciences*, Springer Verlag, 1999.

- [CHE99b] Chen Y., Wen C., Gong Z. et Sun M., “An iterative learning controller with initial state learning,” *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 44, No. 2, pp. 371–376, 1999.
- [CHO01] Choi J.Y., Uh J. et Lee J.S., “Iterative learning control of robot manipulator with I-type parameter estimator”, *Proceedings of the America Control Conference*, pp. 646-651, 2001.
- [CRA84] Craig J. J., “Adaptive Control of Manipulators through Repeated Trials”, *Proceedings of the American Control Conference, San Diego*, pp. 1566-1574, 1984.
- [HAM00] Ham C., Qu Z. et Johnson R., “A nonlinear iterative learning control for robot manipulators in the presence of actuator dynamics”, *International Journal of Robotics and Automation*, Vol. 15 No. 3, pp 119-130, 2000.
- [HAM01] Ham C. Qu Z. et Kaloust J., “Nonlinear learning control for a class of nonlinear systems”, *Automatica*, Vol. 37, No. 3, pp. 419-428, 2001.
- [HAU87] Hauser J.E., “Learning control for a class of nonlinear systems”, In *proceedings of the 26th IEEE Conf. Decision Control, Los Angeles, CA, USA*, pp. 859-860, 1987.
- [HOR93] Horowitz R., “Learning control of robot manipulators”, *ASME J. Dynam. Syst., Meas., Contr.*, Vol. 115, pp. 402-411, 1993.
- [JAN95] Jang T., Choi C. et Ahn H., “Iterative learning control in feedback systems”, *Automatica*, Vol. 31, pp. 243-248, 1995.
- [KHO88] Khosla PK, et Kanade T., “Experimental evaluation of nonlinear feedback and feedforward control schemes for manipulators”, *Int. J. Robot. Res.*, Vol. 7, pp. 18-28, 1988.
- [LEE91] Lee K.H. et Bien Z., “Initial condition problem of learning control,” *Proc. Inst. Elect. Eng. D, Control Theory Appl.*, Vol. 138, No. 6, pp. 525–528, 1991.
- [LOZ01] Lozano R. et Taoutaou D., “Commande adaptative et application”, *Hermes Science Publications*, 2001.
- [LUH80] Luh J. Y. S., Walker M. W. et Paul R. C. P., “Resolved-acceleration control of mechanical manipulators”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-25(3), pp. 468-474, 1980.
- [NIC90] Nicosia S. et Tomei P., “Robot control by using only joint position measurements”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 35, No. 9, pp. 1058– 61, 1990.
- [ORT89] Ortega R. et Spong M. W., “Adaptive motion control of rigid robots: a tutorial”, *Automatica*, Vol. 25(6), pp. 877-888, 1989.

- [PAR00] Park K.H. et Bien Z., "A generalized iterative learning controller against initial state error," *Int. J. Control*, Vol. 73, No. 10, pp. 871–881, 2000.
- [POR91] Porter.B, et Mohamed.S.S, "Iterative learning control of partially irregular multi-variable plants with initial state shifting", *International Journal of Systems Science*, Vol. 22, No.2, pp. 229-235, 1991.
- [REN92] Ren X. et Gao W., "On the initial conditions in learning control", *Proceeding of the IEEE Symposium Industry Electronics*, pp. 182-185, 1992.
- [SAD90] Sadegh N., Horwitz R., Kao W. et Tomizuka M., "A unified approach to the design of adaptive and repetitive controllers for robotic manipulators", *ASME: J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vo. 112, pp. 618-629, 1990.
- [SHI01] Shim H., Son Y. et Seo J., "Semi-global observer for multi-output nonlinear systems," *Systems and Control Letters*, Vol. 42, No. 3, pp. 233–44, 2001.
- [SLO83] Slotine J. J. E. et Sastry S. S., "Tracking control of nonlinear systems using sliding surface with application to robot manipulator," *Int. J. Control*, Vol. 38, pp. 465–492, 1983.
- [SPO89] Spong M. W. et Vidyasagar M., "Robot dynamics and control", Wiley, New York, 1989.
- [SUG91] Sugi T. et Ono T., "An iterative learning control law for dynamical systems", *Automatica*, Vol. 27, pp. 729-732, 1991.
- [SUN06] Sun M., Ge S. S. et Mareels I. M. Y., "Adaptive repetitive learning control of robotic manipulators without the requirement for initial repositioning", *IEEE Trans. on Robotics*, Vol. 22, No. 3, pp. 563-568, 2006.
- [SUN02] Sun M. et Wang D., "Iterative learning control with initial rectifying action," *Automatica*, Vol. 38, No. 7, pp. 1177–1182, 2002.
- [TAY04] Tayebi A., "Adaptive iterative learning control for robot manipulators", *Automatica*, Vol. 40, pp. 1195-1203, 2004.
- [TAY06] Tayebi A., "Model reference adaptive iterative learning control for linear systems", *International journal of adaptive control and signal processing*, Vol. 20, No. 9, pp. 475-489, 2006.
- [UCH78] Uchiyama M., "Formation of high-speed motion pattern of a mechanical arm by trial," *Trans. Soc. Instrum. Control Engineering (Japan)*, Vol. 14, No. 6, pp. 706-712, 1978.
- [VID93] Vidyasagar M., "Nonlinear systems analysis", Prentice-Hall, 1993.
- [XU03] Xu JX. et Tan Y., "Linear and nonlinear iterative learning control", *Lecture notes in control and information sciences*, Springer Verlag, 2003.

- [XU05] Xu J.X. et Yan R., "On initial conditions in iterative learning control", IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 50, No. 9, pp. 1349-1354, 2005.
- [XU98] Xu J. X. et Qu Z., "Robust iterative learning control for a class of nonlinear systems", Automatica, Vol. 34, No. 8, pp. 983-988, 1998.
- [YAN01] Yan X.G, Chen I. M, et Lam J., "D-type learning control for nonlinear time-varying systems with unknown initial states and inputs", Transaction of the institute of Measurement and Control, Vol. 23, No. 2 pp. 69-82, 2001.
- [YAN98] Yan X.G, et Zhang S.Y., "Iterative learning control for a class of nonlinear similar composit systems", Control & Decision, Vol. 14, pp. 361-363, 1998.
- [ZEN92] Zeng N. et Ying X., "Iterative learning control algorithm for nonlinear dynamical systems", Acta Automatica Sinica, Vol. 18, No. 2, pp. 168-176, 1992.