

M0016/02A



Ecole Nationale Polytechnique
Département de Génie Civil

THESE DE MAGISTER

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Présentée par :

M. Djamalddine BOUMEZERANE

*Ingénieur d'Etat en Génie Civil
Diplômé de l'Ecole Nationale Polytechnique*

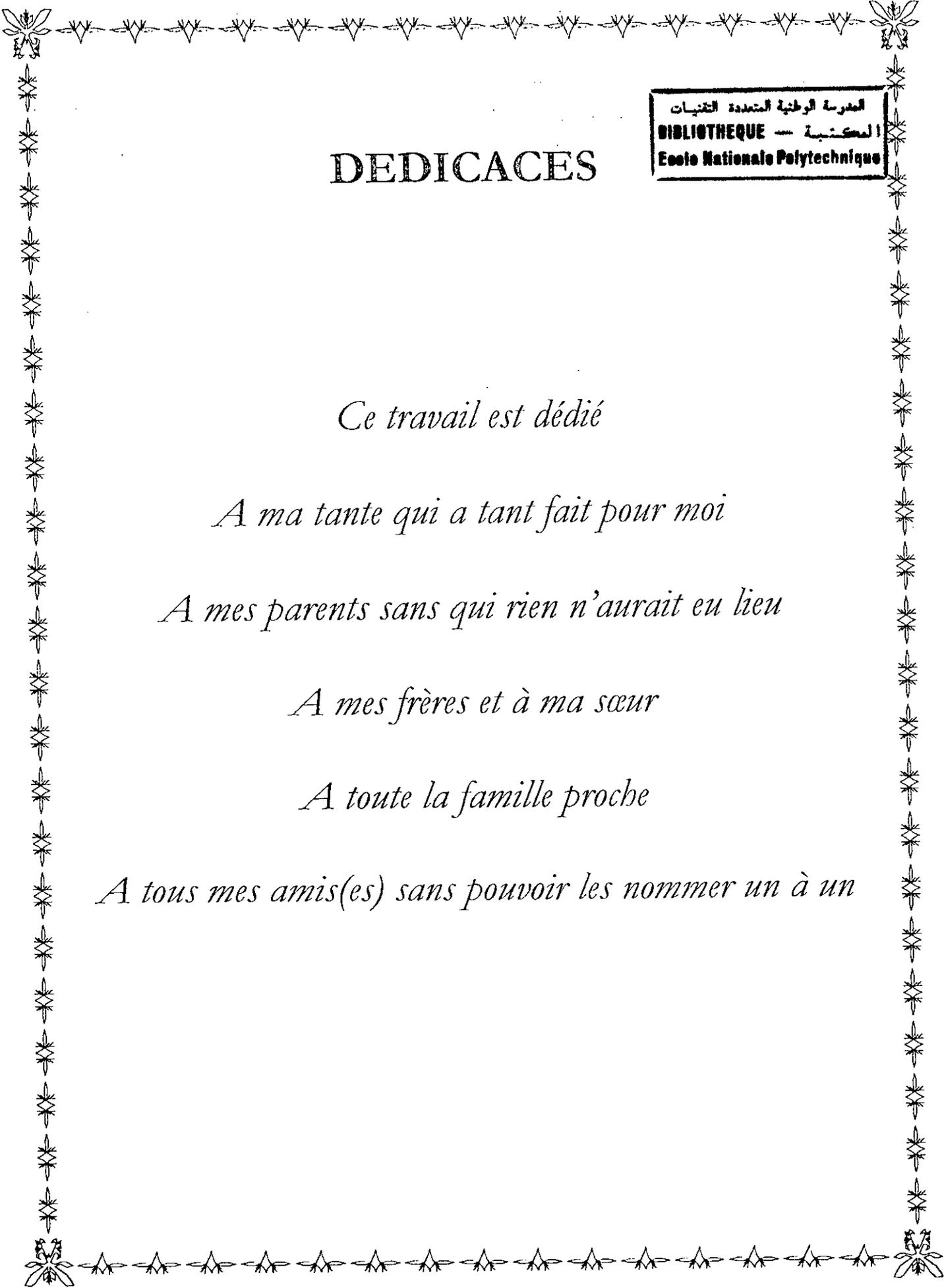
En Vue de l'Obtention du Titre de MAGISTER en Génie Civil

THEME

INFLUENCE DU COEFFICIENT DE POUSSEE LATÉRALE
SUR LA DIFFUSION DES CONTRAINTES DANS UN MILIEU
GRANULAIRE SELON UNE APPROCHE PROBABILISTE

Soutenue devant le jury composé de : 24 juin 2002

<i>M. A. BALI</i>	<i>Professeur, ENP</i>	<i>Président</i>
<i>M. S. BELKACEMI</i>	<i>Maître de Conférences, ENP</i>	<i>Directeur de Thèse</i>
<i>M. M. HAMMOUTENE</i>	<i>Maître de Conférences, ENP</i>	<i>Examineur</i>
<i>M. K. SILHADI</i>	<i>Maître de Conférences, ENP</i>	<i>Examineur</i>
<i>M. B. ZEGHLACHE</i>	<i>Chargé de Cours, ENP</i>	<i>Examineur</i>



DEDICACES

المعرفة الوطنية المتعددة الثقافات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Ce travail est dédié

A ma tante qui a tant fait pour moi

A mes parents sans qui rien n'aurait eu lieu

A mes frères et à ma sœur

A toute la famille proche

A tous mes amis(es) sans pouvoir les nommer un à un

REMERCIEMENTS

Je voudrais exprimer mes vifs remerciements pour mon directeur de thèse M^r S.BELKACEMI pour les orientations et les conseils qu'il a su me prodiguer durant toute la période de recherche.

Je ne manquerais pas de remercier vivement Mr le Professeur A. BALI d'avoir accepté de présider le jury. Que tous les membres du jury trouvent ici l'expression de mon profond respect pour avoir pris la peine d'examiner le manuscrit.

Mes remerciements vont également à tous ceux et celles qui de près ou de loin m'ont apporté aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

« C'est toujours une aubaine pour la vérité lorsque des faits bien établis se heurtent à une théorie bien construite »

Jean Rostand

Pensées d'un biologiste.

« tout ce qui existe dans l'univers est le fruit du hasard et de la nécessité »

Démocrite

« Tamusni d aghilif »

Nos aïeux

ملخص

التربة مجموعة من ذرات بتغير معدني مورفولوجي و شكلي. هذا الاختلاف في الترتيب و الشكل يعطي طابعا إحصائيا لمعطيات الوسط. استعملت طريقة مبنية على الاحتمالات لدراسة انتشار الأجهادات في الوسط. هذه الطريقة تأخذ بعين الاعتبار الطابع الذري للوسط. النتائج المحصل عليها قرنت بنتائج تجارب سابقة و كذلك بنتائج النظرية الأليستيقية. لتعريف الوسط تم استعمال معامل الدفع المعروف بمعامل Reimbert.

RESUME

Le sol apparaît comme un ensemble de particules avec une variabilité minérale, morphologique et structurale. Cette multitude de tailles et d'arrangements confère un aspect statistique aux données du milieu.

Une approche probabiliste, qui considère le milieu granulaire comme étant formé de particules, a été utilisée pour étudier la diffusion des contraintes.

Un coefficient de poussée latérale, dit de Reimbert, est utilisé pour caractériser le milieu granulaire.

Les résultats obtenus sont comparés à ceux de la théorie élastique et à des résultats expérimentaux.

ABSTRACT

The soil seems as an assembly of particles with a mineral, morphological and structural variability. The multitude of sizes and arrangements gave a statistical aspect to the media.

A probabilistic approach was used to study the diffusion of stresses in granular media. This approach consider the media as constituted by particles.

A lateral pressure coefficient, know as of Reimbert, was used to characterise the granular media.

The results obtained were compared with those from experimental and from elastic theory.

Mots clés : milieu granulaire, diffusion des contraintes, contrainte intragranulaire, coefficient de poussée de Reimbert, approche probabiliste.

LISTE DES SYMBOLES

x, y, z : directions du repère dans l'espace

ϕ : angle de frottement interne d'un milieu granulaire

β : angle de talus naturel

A_t : Aire totale de la surface interceptée par un plan coupant le milieu granulaire

A_v : surface des vides sur une section

C_z : coefficient de convection dans la direction z

D : coefficient de diffusion

D_r : densité relative d'un milieu granulaire

D_z : coefficient de diffusion dans la direction z

e : indice des vides

F : force enregistrée en un point du milieu

$f(t)$: fonction de concentration de particules dans un milieu sédimentaire

$F_{i\text{sup}}$: force interne supérieure agissant sur un plan coupant le grain i

$F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}$: composantes suivant les axes x, y, z de la force interne F_i agissant au grain i .

K : coefficient de poussée des terres

K_0 : coefficient de poussée des terres au repos

K_a : coefficient de poussée des terres à l'état actif

k_s : variable aléatoire discrète

m_A : porosité surfacique d'un milieu granulaire

n_V : porosité volumique d'un milieu granulaire

p : probabilité de transition d'un pas à un autre ($p=1-q$)

P : charge ponctuelle

P_{ij} : force de contact agissant au $j^{i\text{ème}}$ contact d'un grain i

$P_{ij\text{inf}}$: force de contact inférieure au $j^{i\text{ème}}$ contact d'un grain i

$P_{ij\text{sup}}$: force de contact supérieure au $j^{i\text{ème}}$ contact d'un grain i

q : probabilité de transition d'un pas à un autre ($q=1-p$)

Q : densité de charge

Rz_i : contraintes locales sur la section d'un grain i suivant l'axe z

Rzx_i : contraintes locales sur la section d'un grain i suivant l'axe x

Rzy_i : contraintes locales sur la section d'un grain i suivant l'axe y

Sz : contrainte intragranulaire suivant l'axe z (verticale).

Szx, Szy : contrainte intragranulaire suivant les axes x, y

u_w : pression interstitielle.

$V[\]$: variance d'une variable aléatoire

V_{Sz} : coefficient de variation de contraintes

V_v : volume des vides

α_s : constante d'étalonnage

α_x : facteur variant dans la direction x

α_y : facteur variant dans la direction y

β_v : module de compressibilité volumique

ΔV : volume élémentaire

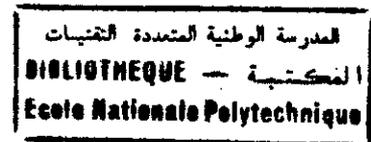
e_v : déformation volumétrique

θ : plan de coupe d'un ensemble de grains

$\lambda(x,y,z)$: fonction prenant les valeurs 1 ou 0

ν : coefficient de pression des terres de Reimbert

σ_z : contrainte verticale appliquée sur un milieu continu



INTRODUCTION	1
I HYPOTHESES RELATIVES AU MILIEU GRANULAIRE	3
I-1 INTRODUCTION	3
I-2 HYPOTHESES RELATIVES AU MILIEU GRANULAIRE	3
I-2-1 HOMOGENEITE DU MILIEU	3
I-2-2 HYPOTHESE SUR L'APPLICATION DES PRESSIONS	4
I-3 CONCLUSION	10
II REPARTITION DES CONTRAINTES DANS UN MILIEU GRANULAIRE ET POROSITE	11
II-1 INTRODUCTION	11
II-2 POROSITE VOLUMIQUE ET POROSITE SURFACIQUE	11
II-3 REPARTITION DES CONTRAINTES EN UN POINT D'UN MILIEU GRANULAIRE	15
II-4 DISTRIBUTION DE PROBABILITE DES CONTRAINTES INTRAGRANULAIRES DANS UN MILIEU GRANULAIRE	18
II-5 CHANGEMENTS DE POROSITES DUS A DES SOLLICITATIONS EXTERNES	25
II-5-1 DEFORMATIONS ET COMPRESSIBILITE D'UN MILIEU GRANULAIRE (SOL)	25
II-5-2 COMPORTEMENT CONTRACTANT ET DILATANT DES SOLS	26
II-5-3 ETAT STATIONNAIRE DE DEFORMATION	26
II-5-4 PROPAGATION DES MICRO-MECANISMES	27
II-5-5 MODELE PROBABILISTE POUR MATERIAU GRANULAIRE	27
II-6 CONCLUSION	29
III EQUATIONS DE DIFFUSIONS EN TERMES DE POROSITE ET DE CONTRAINTES	30
III-1 RAPPEL SUR LE MOUVEMENT BROWNIEN	30
III-2 EQUATION DE DIFFUSION POUR UN MOUVEMENT BROWNIEN	31

III-2-1 INTERPRETATION PROBABILISTE	32
III-3 EQUATION DE DIFFUSION DE POROSITE DANS UN MILIEU GRANULAIRE	33
III-4 DISTRIBUTION DE LA CONTRAINTE NORMALE VERTICALE ESPEREE DANS UN MILIEU GRANULAIRE SOUS CHARGE PONCTUELLE	37
III-5 EQUATION DE DIFFUSION DE LA CHARGE EN DEFORMATIONS PLANES	40
III-5-1 LES CONDITIONS AUX LIMITES	42
III-6 DIFFUSION DES CONTRAINTES EN TROIS DIMENSIONS	43
III-6-1 CHANGEMENT DE COORDONNEES	45
III-7 CONCLUSION	47
IV COEFFICIENT DE POUSSEE ET ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE DANS UN MILIEU GRANULAIRE	48
INTRODUCTION	48
IV-1 COEFFICIENT DE POUSSEE DES TERRES	48
IV-2 DENSITE RELATIVE	50
IV-3 ESSAI DE CISAILLEMENT DIRECT	51
IV-4 ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE ET POROSITE D'UN MILIEU GRANULAIRE	57
IV-5 COEFFICIENT DE POUSSEE DES TERRES ET ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE D'UN MATERIAU GRANULAIRE	64
IV-6 CONCLUSION	67
V COMPARAISON DES RESULTATS ET INTERPRETATIONS	68
V-1 ESSAIS SUR MODELES	68
V-1-1 WATERWAYS EXPERIMENT STATION – SABLE	68
V-1-2 ESSAIS KOEGLER ET SCHEIDIG	69
V-1-3 WATERWAYS EXPERIMENT STATION – LIMON ARGILEUX	71
V-2-1 COURBES ISOVALEURS DES CONTRAINTES VERTICALES DANS UN MILIEU GRANULAIRE	73
V-2-2 PROFIL DES CONTRAINTES VERTICALES	76
V-2-3 CONTRAINTES VERTICALES SOUS L'AXE D'UN CHARGEMENT UNIFORME SUR UNE PLAQUE CIRCULAIRE	77

V-2-4	POROSITE FONCTION DU COEFFICIENT DE POUSSEE	79
V-2-5	ESSAIS DE FREIBURG	82
V-2-6	CONTRAINTES VERTICALES SOUS L'AXE D'UN CHARGEMENT UNIFORME SUR PLAQUE CIRCULAIRE	85
V-2-7	CONTRAINTES VERTICALES POUR DIFFERENTS COEFFICIENTS DE REIMBERT	87
V-2-8	DEFORMATIONS SOUS L'AXE D'UN CHARGEMENT UNIFORME SUR PLAQUE CIRCULAIRE	90
V-2-9	DEFORMATIONS SOUS CHARGEMENT UNIFORME SUR PLAQUE CIRCULAIRE	92
V-2-10	TASSEMENTS SOUS CHARGEMENT UNIFORME SUR PLAQUE CIRCULAIRE	93
V-2-11	TASSEMENTS D'UN SOL SOUS CHARGES UNIFORMES SUR UNE PLAQUE CIRCULAIRE	94
	CONCLUSION	96

INTRODUCTION

Les principes de la Mécanique des Milieux Continus sont souvent utilisés pour résoudre des problèmes relatifs à des milieux poreux ou granulaires tels les sols. Cette approche qui consiste à considérer les milieux granulaires comme étant continus est un moyen de simplifier les contours du problème sans avoir toutefois à s'éloigner de la réalité du milieu en question. C'est en utilisant les hypothèses de la Mécanique des Milieux Continus que Boussinesq(1885) a résolu un problème fondamental et proposé des solutions pour le cas d'un milieu semi-fini sous chargement ponctuel en surface. Flamant(1892) a étudié d'autres cas de figure tels les situations de déformations planes. Mais leurs solutions étaient limitées à des milieux homogènes et isotropes. La variabilité des rigidités dans un milieu continu a fait l'objet de plusieurs études. Pour le cas d'un multicouche, on peut citer les solutions de Burmister(1943) et de Barden(1963). Kondner(1963) a proposé pour les sols un modèle non linéaire dit « parabolique » dans le cadre des milieux continus. Zelasko(1963) a utilisé le modèle élastique non linéaire pour des milieux granulaires.

Les procédures les plus répandues dans l'Engineering pour approcher les comportements des milieux granulaires sont des procédures empiriques. Ces procédures sont basées sur des corrélations expérimentales entre des déformations observées et des paramètres de sol in situ ou de laboratoire. On peut citer l'exemple des essais de déflexion des plaques chargées (Terzaghi et Peck 1967) et les essais au pressiomètre (Menard 1971). Les problèmes dans ces méthodes empiriques sont généralement associés aux différences entre les conditions des essais in situ et celles qui existent sous chargement donné (fondation, essieux), et aux difficultés rencontrées pour l'échantillonnage de matériaux granulaires.

Observé autrement le sol apparaît comme un ensemble de particules avec une variabilité minérale, morphologique et structurale. Cette multitude de tailles et d'arrangements des grains confère un aspect statistique aux données du milieu. La description complète d'un milieu granulaire nécessite la connaissance exhaustive des caractéristiques morphologiques des grains, leurs dimensions et leurs formes. Ces informations ne sont disponibles que sous forme de statistiques, il en est de même des forces qui agissent aux points de contact entre particules. Plusieurs auteurs s'accordent à dire que :

- Les forces de contact entre grains sont extrêmement dispersées et d'une grande variabilité spatiale.
- Les sollicitations internes d'un milieu granulaire sous l'effet de charges extérieures apparaissent à l'échelle locale comme des grandeurs aléatoires.

Il s'agit donc de prendre en considération l'aspect aléatoire du milieu granulaire en prenant en compte l'ensemble des paramètres du milieu pouvant fournir le plus d'informations possibles sur son comportement vis-à-vis d'un chargement extérieur.

Chapitre I

HYPOTHESES RELATIVES AU MILIEU GRANULAIRE

I-1 INTRODUCTION :

La théorie de la mécanique des milieux continus décrit et prévoit le comportement de matériaux en supposant que la matière est distribuée de façon continue et remplit tout l'espace. Les hypothèses de la théorie de Boussinesq(1885) pour le calcul des contraintes dans un milieu solide semi-infini supposent que celui-ci est continu, homogène et isotrope et parfaitement élastique. La contrainte verticale qui en résulte ne dépend pas des paramètres élastiques du milieu, ce qui fait qu'elle est identique pour une argile, un sable sec ou pour un enrochement.

La théorie des milieux granulaires prend en considération le caractère discontinu du milieu, en se basant sur des hypothèses pour modéliser l'homogénéité et l'isotropie (ou l'anisotropie), ainsi que la transmission des pressions à l'intérieur du milieu.

I-2 HYPOTHESES RELATIVES AU MILIEU GRANULAIRE:

I-2-1 HOMOGENEITE DU MILIEU :

L'homogénéité est prise comme étant une régularité dans la distribution d'un ensemble de paramètres du milieu, tels la porosité, la taille des grains et leur arrangement dans l'espace ou éventuellement leur forme; ce sont les paramètres qui peuvent nous renseigner d'une manière suffisante sur le milieu granulaire. Pour mieux illustrer et expliquer le concept d'homogénéité d'un milieu granulaire il est fait appel à une schématisation sous forme d'éprouvette fictive de sol. L'éprouvette de sol est coupée par une succession de plans parallèles à une direction donnée. Au

niveau de la surface de chaque plan sont mesurés des paramètres d'état, comme la porosité surfacique, le nombre de grains coupés ou le nombre de grains appartenant à une fraction granulométrique donnée. Une multitude de mesures sont donc nécessaires pour chaque subdivision, et vu le nombre important de subdivisions, un traitement statistique de l'information en question s'impose. L'éprouvette est dite homogène dans une direction donnée (la direction des x par exemple) si la *moyenne* et *l'écart-type* de toutes ces grandeurs sont *constants* le long de l'axe en question. Et si ces paramètres sont identiques pour les autres directions, l'éprouvette est isotrope. L'anisotropie se manifeste lorsque la moyenne ou l'écart-type sont différents d'une direction à une autre (Fig.1.1), (Bourdeau, 1986).

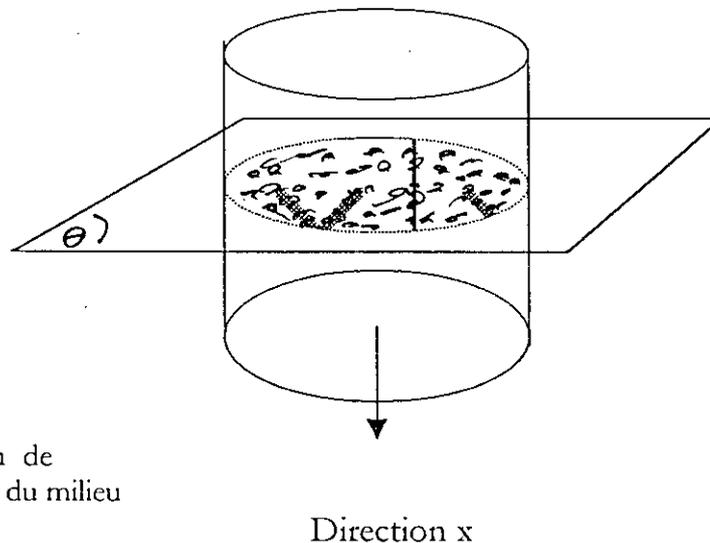


Fig.1.1 Schématisation de l'homogénéité du milieu

I-2-2 HYPOTHESE SUR L'APPLICATION DES PRESSIONS :

Nombre d'auteurs (Marsal, 1973, Oda, 1974.) ont cherché à caractériser l'état de sollicitation des sols non cohérents en reliant les forces de contact entre grains aux contraintes de milieu continu équivalent. Il est admis pour les milieux granulaires, que l'application de pressions uniformément réparties aux frontières de l'éprouvette résulte en une répartition également uniforme des contraintes dans toute section du milieu continu équivalent.

Plusieurs recherches ont été effectuées pour conforter cette hypothèse. Les travaux de recherche de Marsal(1973) sur le comportement des matériaux de remblais rocheux, ont permis d'exprimer la force intergranulaire en examinant les conditions d'équilibre statique d'un grain par rapport à ses voisins. Soit un plan (θ) qui coupe un milieu granulaire donné. Un grain particulier «i» (fig.1.2) est soumis à un ensemble d'efforts résultants des grains voisins, et à la pression interstitielle du milieu :

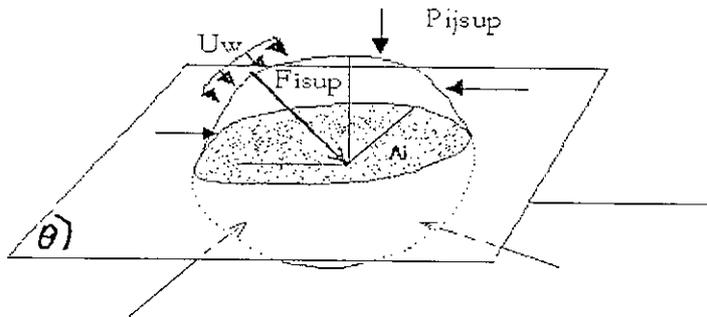


Fig.1.2 Sollicitations sur une section horizontale à travers une éprouvette de matériau granulaire saturé sous pressions uniformes (ici est représenté un grain entrecoupé par un plan θ)

A l'intérieur d'une particule « i », les forces qui agissent de part et d'autre du plan(θ) s'équilibrent. Cette interaction des deux parties du grain se traduit par l'expression des forces F_{inf} et F_{sup} respectivement force inférieure et supérieure par rapport au plan (θ); P_{ij} représente les forces de contact entre grains l'indice « i » étant relatif au grain et « j » pour signifier les divers contacts du grain, l'expression des forces est donc donnée par :

$$\vec{F}_{i\ sup} = \sum_{j\ sup} (\vec{P}_{ij}) + A_i \cdot u_w \vec{n}_\theta^{sup} \tag{1.1}$$

$$\vec{F}_{i\ inf} = \sum_{j\ inf} (\vec{P}_{ij}) + A_i \cdot u_w \vec{n}_\theta^{inf} \tag{1.2}$$

\vec{n}_θ^{sup} et \vec{n}_θ^{inf} Désignent les vecteurs unitaires normaux à chaque face du plan θ .

La condition d'équilibre s'exprime par :

$$\vec{F}_{i\text{sup}} = -\vec{F}_{i\text{inf}} \quad (1.3)$$

et comme

$$\vec{n}_0^{\text{sup}} = -\vec{n}_0^{\text{inf}} \quad (1.4)$$

Ce qui vérifie la relation :

$$\sum_{j\text{sup}} \vec{P}_{ij} = -\sum_{j\text{inf}} \vec{P}_{ij} \quad (1.5)$$

Expression des forces \vec{F}_i intergranulaires de Marsal (1973).

Le point d'application des deux résultantes (inférieure et supérieure), sur la surface du grain « i » coupée par le plan θ , dépend de la valeur des moments résultants. Ces moments dépendent des forces de contact, de la taille et de la forme de la particule, ainsi que de sa position par rapport au plan(θ). Tous ces facteurs sont imprédictibles ou incertains, ce qui leur confère un caractère aléatoire. Les contraintes sur le plan (θ) en tout point de la section A_i du grain « i » sont des quantités aléatoires, fonction des coordonnées x et y . Ces contraintes sont nommées contraintes locales et notées Rz_i , Rzx_i et Rzy_i . Le parcours de la surface A_i , intersection du grain « i » avec le plan(θ), pour mesurer les contraintes locales définit une « expérience » au sens statistique. Un événement est défini par une certaine valeur de Rz_i . L'espace des événements est l'ensemble de toutes les valeurs possibles des contraintes. Dans ces conditions et pour un très grand nombre de mesures, la moyenne observée de chaque composante serait égale à son espérance mathématique, dont l'expression est donnée par :

$$E(Rz) = \frac{1}{A_i} \cdot \int_{A_i} Rz \cdot dx dy \quad (1.6)$$

La moyenne observée = Espérance mathématique

L'espérance des contraintes locales Rz_i , Rzx_i et Rzy_i sera :

$$E(Rz_i) = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} Rz_i \, dx dy \quad (1.7)$$

$$E(Rzx_i) = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} Rzx_i \, dx dy \quad (1.8)$$

$$E(Rzy_i) = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} Rzy_i \, dx dy \quad (1.9)$$

Par analogie avec le travail de Marsal sur le concept de force intergranulaires, on décompose la résultante F_i des forces P_{ij} de contact, sur le plan de coupe (θ) du grain « i ». Les composantes de F_i sur les axes x , y et z sont respectivement notées F_{x_i} , F_{y_i} et F_{z_i} . Elles sont données en termes de moyennes par l'espérance mathématique des contraintes locales Rz :

$$E(Rz_i) = \frac{F_{z_i}}{A_i} \quad (1.10)$$

$$E(Rzx_i) = \frac{F_{x_i}}{A_i} \quad (1.11)$$

$$E(Rzy_i) = \frac{F_{y_i}}{A_i} \quad (1.12)$$

La généralisation du raisonnement sur l'ensemble de la surface A_i -- intersection de l'éprouvette granulaire avec le plan(θ), se fait en définissant les fonctions aléatoires suivantes :

$Rz(x,y) = Rz_i(x,y)$: si le point (x,y) appartient à l'intersection A_i du grain « i » avec le plan(θ).

$Rz(x,y) = u_w$: si le point n'est pas dans un grain.

Et

$Sz(x,y) = E(Rz_i(x,y))$: si le point (x,y) est sur A_i

$Sz(x,y) = E(u_w) = u_w$: si le point (x,y) n'est pas dans un grain.

La moyenne des contraintes locales Rz_i sur la surface A_i d'un grain « i » est exprimée par leur espérance mathématique, prise comme une contrainte Sz dite intragranulaire. Les fonctions Rz et Sz ainsi définies sont, respectivement, la contrainte locale et la contrainte intragranulaire étendues à tout domaine.

$Rz(x,z) = u_w$ et $Sz(x,y) = u_w$ signifie que les pores sont assimilés à des « grains » dans lesquels seule la pression interstitielle est présente et n'est pas considérée comme aléatoire. La pression interstitielle u_w est supposée constante en tout point du milieu (Bourdeau, 1986).

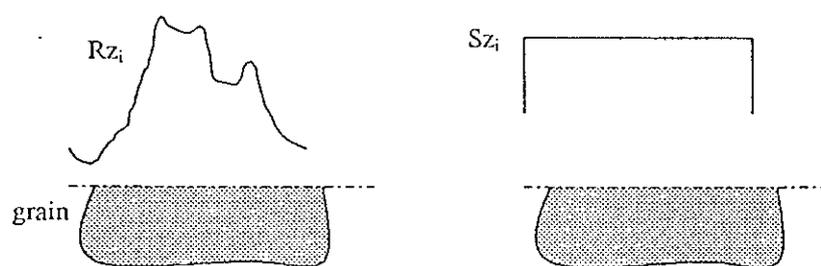


Fig. 1.3 Contraintes locale et intragranulaire dans un grain.

Rz_i et Sz_i sont respectivement, la contrainte intragranulaire et la contrainte locale dans un grain « i ». Tandis que Rz et Sz représentent respectivement, la contrainte locale et la contrainte intragranulaire étendues à toute la section A_t . La moyenne des contraintes locales, en termes d'espérance mathématique de Rz , sur l'ensemble de la section A_t est donnée par :

$$E(Rz) = \frac{1}{A_t} \int_{A_t} Rz \cdot dx dy \quad (1.13)$$

Comme la section totale A_t comprend l'ensemble des grains du plan (θ) et les sections des pores, il est possible d'exprimer la moyenne des contraintes locales Rz en termes d'espérance mathématique sur la surface des grains ($\sum A_g$) et sur l'étendue des pores ($A_t - \sum A_g$). Elle représente les forces appliquées sur la surfaces des grains et sur les pores, rapportées à la surface totale A_t :

$$E(Rz) = \frac{1}{A_t} \left[\sum_i \left(\int_{A_i} Rz_i \cdot dA \right) + u_w \cdot (A_t - \sum_i A_i) \right] \quad (1.14)$$

Et en utilisant la force intergranulaire au niveau des grains $F_i = A_i \cdot E(Rz_i)$ ainsi que la moyenne des contraintes locales $E(Rz_i) = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} Rz_i \cdot dx dy$, l'équation (1.14) s'écrit :

$$\begin{aligned} E(Rz) &= \frac{1}{A_t} \left[\sum_i (F_{z_i}) + u_w \cdot (A_t - \sum_i A_i) \right] \\ &= \frac{1}{A_t} \left[\sum_i (A_i \cdot E(Rz_i)) + u_w \cdot (A_t - \sum_i A_i) \right] \end{aligned} \quad (1.15)$$

L'espérance $E(Rz_i)$ dans chacun des grains de surface A_i est égale à Sz_i , tandis que sur le reste des pores ($A_t - \sum A_i$) la contrainte est égale à la pression interstitielle $Sz = u_w$. Autrement dit la moyenne des contraintes locales étendue à tout le domaine A_t est égale à la moyenne des contraintes intragranulaires.

$$E(R_z) = E(S_z) \quad (1.16)$$

Le même raisonnement peut être utilisé dans les autres directions x et y pour montrer que la moyenne des contraintes locales est égale à la moyenne des contraintes intragranulaires. En terme d'espérance mathématique l'écriture donne :

$$E(R_{z_x}) = E(S_{z_x})$$

$$E(R_{z_y}) = E(S_{z_y})$$

Si une pression verticale σ_z était appliquée sur l'éprouvette, l'équilibre des contraintes verticales à l'intérieur donne :

$$\int_{A_i} Rz \cdot dA = A_i \cdot \sigma_z ; Rz : \text{Contrainte locale étendue à toute la section } A_i$$

Ou bien :

$$\sigma_z = \frac{1}{A_t} \int_{A_t} Rz \cdot dA$$

La pression verticale appliquée est égale à la moyenne des contraintes locales au niveau de toute section horizontale de l'éprouvette. Ce qui revient à écrire que σ_z est égale à l'espérance mathématique de la contrainte locale R_z sur la surface A_1 de l'éprouvette :

$$\sigma_z = E(R_z)$$

Si le milieu était continu et soumis à la même pression σ_z (milieu continu équivalent), la contrainte verticale en tout point d'une section horizontale sera égale à σ_z .

$$\sigma_z = E(R_z(x,y)) = E(S_z(x,y)) \quad (1.17)$$

Les contraintes totales du milieu continu équivalent, dans une éprouvette de matériau granulaire soumise à des sollicitations uniformes, sont égales à l'espérance mathématique des contraintes locales, qui est aussi la moyenne des contraintes intragranulaire $E(S_z)$.

I-3 CONCLUSION :

Les contraintes intragranulaires constituent une approximation moyenne des contraintes locales dans un milieu granulaire. L'homogénéité statistique d'un milieu granulaire permet de faire un certain nombre de simplifications utiles pour l'étude de la répartition des contraintes dans le milieu en question. L'étude de la répartition des contraintes peut être effectuée en se basant sur des arguments probabilistiques.

Chapitre II

REPARTITION DES CONTRAINTES DANS UN MILIEU GRANULAIRE ET POROSITE

II-1 INTRODUCTION :

La porosité d'un sol n'est pas une grandeur mathématique définie en un point d'un milieu granulaire, comme c'est le cas pour les contraintes par exemple. Il s'agit en fait d'une grandeur technique dont la mesure est influencée par les effets d'échelle; la notion de porosité se rapporte à la quantité de matériau en volume (ou en surface).

La répartition, due à un chargement ponctuel, des contraintes dans un milieu granulaire est liée à la porosité par le fait qu'il y a transmission ou non de charge. En présence d'un vide la charge n'est pas transmise, et lorsqu'un grain est rencontré il y a transmission.

II-2 POROSITE VOLUMIQUE ET POROSITE SURFACIQUE :

La porosité volumique n_v et surfacique m_A , dans un milieu granulaire, sont respectivement données par :

$$n_v = \frac{V_{vides}}{V} \quad \text{et} \quad m_A = \frac{A_{vides}}{A}$$

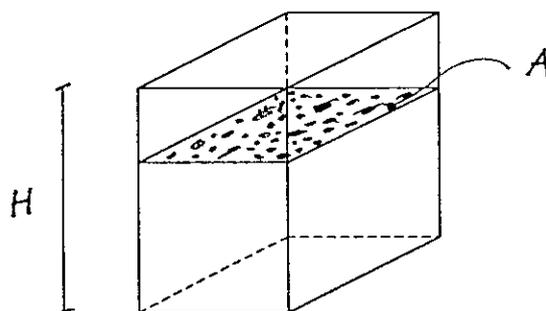
n_v : porosité volumique; V : volume total ; V_v : volume des vides

m_A : porosité surfacique; A : Aire de la section ; A_v : surface des vides sur la section

Harr (1977) a interprété la porosité volumique n_v comme étant la probabilité de trouver un vide en un point donné du volume V . Indépendamment des

coordonnées du point considéré, la probabilité, de trouver un vide, est caractérisée par une seule valeur dans tout le volume, ce qui suppose implicitement un matériau statistiquement homogène. Elle correspond ainsi à un cas particulier. Bourdeau(1986) a donné un développement qui constitue une généralisation, il imagine un cube de volume V dans un milieu granulaire et l'isole comme indiqué sur la figure 2.1.

Fig.2.1 Cube de volume V
dans un massif granulaire
et section horizontale A

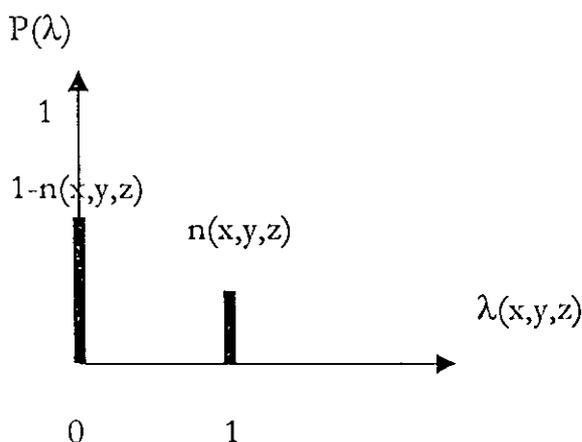


En tout point de l'intérieur du cube est définie une fonction $\lambda(x,y,z)$ telle que :

$\lambda(x,y,z) = 1$ si le point (x,y,z) se trouve dans un pore

$\lambda(x,y,z) = 0$ si le point (x,y,z) se trouve dans un grain

Fig.2.2
Distribution de
probabilité de la fonction λ
en un point (x,y,z) .



Lorsque le milieu n'est pas statistiquement homogène, la probabilité de se trouver dans un pore ($\lambda = 1$) ou sur un grain ($\lambda = 0$) dépend des coordonnées du point. La fonction ($\lambda = 1$, $\lambda = 0$) est définie en tout point du volume V du milieu. A chaque point (x,y,z) correspond une probabilité $n(x,y,z)$ qu'il soit dans un pore.

$$n(x, y, z) = P[\lambda(x, y, z) = 1] \quad (2.1)$$

est la probabilité de se trouver dans un pore pour le point (x, y, z) .

Tandis que :

$$1 - n(x, y, z) = P[\lambda(x, y, z) = 0] \quad (2.2)$$

représente la probabilité de se trouver dans un grain solide pour le point (x, y, z) .

Les deux événements $\lambda=1$ et $\lambda=0$ sont mutuellement exclusifs et exhaustifs ; la distribution de probabilité de λ en un point est schématisée par la figure 2.2.

La moyenne des valeurs de la fonction λ est représentée par l'espérance en un point (x, y, z) et est donnée par :

$$\bar{\lambda}(x, y, z) = E[\lambda(x, y, z)] = n(x, y, z) \quad (2.3)$$

La dispersion des valeurs de λ par rapport à la moyenne au même point est égale à la variance :

$$V[\lambda(x, y, z)] = n(x, y, z) - n^2(x, y, z) \quad (2.4)$$

Soit à observer la valeur de λ en un certain nombre de points pris au hasard dans le volume V . La moyenne des N valeurs observées peut être considérée comme une mesure (d'un point de vue statistique) de la porosité volumique. Le nombre de points observés N est considéré fini, on obtient une mesure différente à chaque fois que l'expérience est répétée. La jème de ces mesures est:

$$\tilde{n}_{vj} = \frac{1}{N} \sum_i \lambda(x_i, y_i, z_i) \quad (2.5)$$

i : indice relatif aux points observés.

L'espérance mathématique de n_v est:

$$E(\tilde{n}_v) = E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda(x_i, y_i, z_i)\right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(\lambda(x_i, y_i, z_i)) \quad (2.6)$$

$$E(\tilde{n}_v) = 1/N \sum_{i=1}^N n(x_i, y_i, z_i)$$

Si pour chaque mesure effectuée le nombre N de points d'observation est grand, l'espérance de la mesure tendra vers la porosité volumique elle-même (n_v)

D'où l'expression générale de n_v :

(Espérance = Moyenne)

$$n_v = 1/V \int_V n(x, y, z) dV \quad (2.7)$$

Si la probabilité de trouver un pore est indépendante des coordonnées, celle-ci se confond avec la porosité du milieu.

$$n_v = n \quad (2.8)$$

Il est possible d'exprimer la porosité surfacique en utilisant le même raisonnement que précédemment sur une surface donnée.

$$m_A = 1/A \int_A n(x, y, z) dA \quad (2.9)$$

m_A : étant la porosité surfacique.

et pour un volume de hauteur H l'expression devient :

$$\int_H m_A dz = 1/A \int_H \left(\int_A n(x, y, z) dA \right) dz \quad (2.10)$$

En intégrant sur la hauteur H du cube nous aurons :

$$1/H \int_H m_A dz = 1/(A.H) \int_V n(x, y, z) dV \quad (2.11)$$

$$1/H \int_H m_A dz = 1/V \int_V n(x, y, z) dV = n_v \quad (2.12)$$

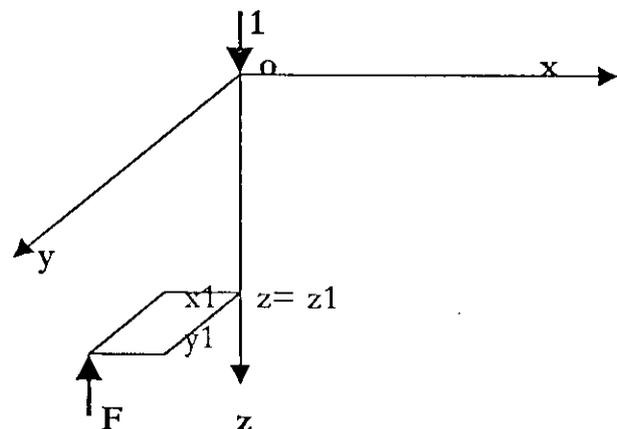
Ces expressions expriment les relations générales entre porosité et probabilité de présence des vides dans un milieu granulaire. La porosité volumique ou surfacique représente la moyenne rapportée, respectivement, au volume ou à la surface totale.

L'expression (2.12) lie la porosité surfacique à la porosité volumique, elle est identique à l'expression obtenue par Hart(1977) pour un milieu homogène. Les trois moyennes de la porosité surfacique sont égales à la porosité volumique. Lorsque le matériau est statistiquement homogène selon une direction la porosité surfacique est constante et si l'homogénéité est également assurée de la même manière (mêmes paramètres) dans les autres directions on aura un milieu isotrope.

II-3 REPARTITION DES CONTRAINTES EN UN POINT D'UN MILIEU GRANULAIRE:

Soit une force verticale (concentrée) unique, normale à la surface à l'origine des coordonnées (Fig.2.3). Et soit, au point de coordonnées (x_1, y_1, z_1) , la force de réaction F . La force unitaire parcourt la surface et est appliquée en un très grands nombre N de points aléatoires en maintenant la force de réaction F dans la même position relative. Il est admis que le système de coordonnées reste lié à la force unitaire et que la force F occupe toujours le même point (x_1, y_1, z_1) . Au cours de son déplacement, la force F sera appliquée soit sur un point solide soit dans un espace vide du milieu. Donc il y aura alternativement transmission ou non de la force unitaire en surface au point (x_1, y_1, z_1) (Harr, 1977).

Fig.2.3 Réaction F en un point du milieu granulaire sous l'effet d'une charge unitaire en surface



En termes de probabilités cet essai est dit de Bernoulli avec p : la probabilité de rencontrer un solide (force enregistrée) et q : rencontrer un vide (aucune force enregistrée). Si le milieu est admis homogène, il en résultera que les probabilités p et

q seront les mêmes pour chaque essai. Il s'ensuit une distribution Binomiale ; la probabilité d'enregistrer une force F non nulle dans le milieu k fois au cours de N essais indépendants est :

$$B(k; N, p) = C_N^k \cdot p^k \cdot q^{N-k} \quad (2.13)$$

C'est le nombre de circonstances possibles pour enregistrer la force (F) k fois (trouver un obstacle) et ne pas l'enregistrer ($N-k$) fois (trouver un vide).

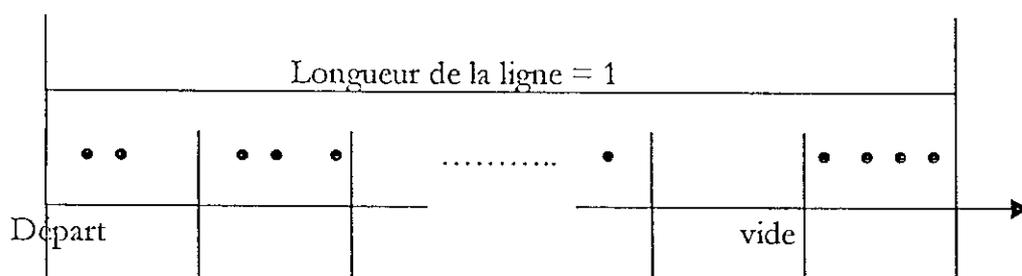


Fig.2.4 : Expression des intensités des forces en termes de points d'une ligne droite de longueur unitaire subdivisée en plusieurs segments (d'après Harr, 1977).

Le cheminement de la force de réaction F sur les N points du milieu est schématisé par un segment de longueur unitaire. Ce segment est divisé en N intervalles, chacun de longueur égale à $1/N$ (Fig.2.4). En parcourant les N points, la force F peut varier en intensité d'un point à un autre, elle peut être nulle s'il s'agit d'un vide. Le nombre de points sur chaque intervalle représente l'intensité de la force F enregistrée en un emplacement donné de la force unitaire en surface. Le vide est représenté par un intervalle vide sans points. La force normale unitaire errant de façon aléatoire à la surface du milieu, son image sur la ligne (nombre de points par intervalle) sera aussi aléatoire. La moyenne de la force (nombre de points par unité de longueur) est désignée par \bar{F}

Un succès est défini par la rencontre au moins d'un point dans un intervalle. Comme la force F varie en intensité en même temps qu'en position dans le milieu, le nombre k de succès ne sera pas nécessairement le même que le nombre de points donnant l'échelle de l'intensité de la force le long de la ligne d'enregistrement. Si les

intervalles deviennent petits, la probabilité de trouver 2 points ou plus sur un intervalle devient négligeable (Feller 1957). Dans ce cas il y aura une correspondance exacte entre les k succès et les points individuels.

La loi binomiale de probabilités $B(k, N, p)$ est caractérisée par le nombre N d'essais dont les résultats sont soit un succès soit un échec et le nombre k d'essais favorables (succès). La probabilité du succès dans un essai est, généralement, notée p et la probabilité de l'échec q . Dans notre cas le nombre k de succès désigne le nombre d'intervalles qui contiennent chacun, au moins, un point. Lorsque N tend vers l'infini (intervalles petits) la moyenne ($N.p$) de la loi binomiale tendra vers la moyenne de F , $N.p \rightarrow \bar{F}$. La probabilité de trouver k succès (intervalle à un point au moins) parmi les N intervalles s'exprime comme suit :

$$b(k; N, p) = C_N^k \cdot p^k (1-p)^{N-k} \quad (2.14)$$

$$= \frac{N(N-1)\dots(N-k+1)}{k!} \cdot p^k (1-p)^N \cdot (1-p)^{-k} \quad (2.15)$$

Comme $\bar{F} = N.p$

$$\begin{aligned} b(k; N, p) &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-k+1)}{N^k} \cdot \bar{F}^k \cdot \left(1 - \frac{\bar{F}}{N}\right)^N \cdot \left(1 - \frac{\bar{F}}{N}\right)^{-k} \\ &= \frac{\bar{F}^k}{k!} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{N}\right) \right] \cdot \left(1 - \frac{\bar{F}}{N}\right)^N \cdot \left(1 - \frac{\bar{F}}{N}\right)^{-k} \end{aligned} \quad (2.16)$$

comme $N \rightarrow \infty$ et $p \rightarrow 0$:

$$b(k; N, p) = \frac{\bar{F}^k}{k!} \cdot e^{-\bar{F}} \quad (2.17)$$

en vertu de

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{N}\right)^N = e^{-x}$$

L'expression (2.17) est une distribution de Poisson qu'on peut écrire symboliquement :

$$f(k) = \frac{\bar{F}^k}{k!} \cdot e^{-\bar{F}} \quad (2.18)$$

Si au lieu d'enregistrer l'intensité de la force F (par des points) le long de la ligne, on utilisait une bande de largeur unitaire, la force moyenne par unité de longueur serait devenue la force moyenne par unité de surface. Pour : $N \rightarrow \infty$; $\bar{F} \rightarrow \bar{S}z$ avec $\bar{S}z$ la valeur espérée de la contrainte verticale en ce point. Comme k est la probabilité d'existence d'un point (qui est une intensité de contrainte à une certaine échelle) il en résulte que k peut être considérée comme le rapport entre la contrainte verticale en ce point et la valeur espérée de celle-ci.

$$k = \frac{S}{\bar{S}} \quad (2.19)$$

Autrement dit :

$$f\left(\frac{S}{\bar{S}}\right) = \frac{(\bar{S})^{\frac{S}{\bar{S}}} \cdot e^{-\bar{S}}}{\left(\frac{S}{\bar{S}}\right)!} \quad (2.20)$$

L'expression (2.20) est la distribution du rapport de contraintes en tout point du milieu. Trouver la fréquence avec laquelle la contrainte verticale enregistrée en un point est nulle, revient à chercher la probabilité de présence des vides dans le volume en question et qui est égale à la porosité n du milieu.

$$f(0) = e^{-\bar{S}} = n \quad (2.21)$$

La contrainte intragranulaire s'écrit en fonction de la porosité :

$$\bar{S} = -\log(n) \quad (2.22)$$

Expression de la porosité (n) du milieu en termes de moyenne espérée des contraintes intragranulaires \bar{S} étendue à la section du milieu.

II-4 DISTRIBUTION DE PROBABILITE DES CONTRAINTES INTRAGRANULAIRES DANS UN MILIEU GRANULAIRE:

Soit un milieu granulaire défini de telle façon qu'autour d'un point (x,y,z) est défini un volume V tel que la probabilité de trouver un pore $n(x,y,z)$ soit assimilable à la porosité volumique n_v . Soit une section horizontale Az à travers ce volume, à la profondeur z , formée par un carré de côtés L (Fig.2.5.a). La section est divisée en

N^2 éléments de dimension L/N , petits par rapport à la plus petite intersection de grain. (Bourdeau, 1986)

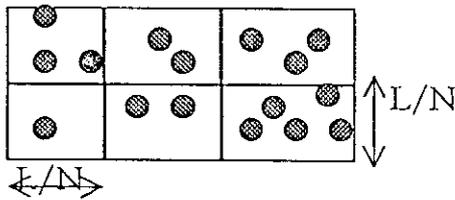


Fig.2.5.b Représentation symbolique de la contrainte dans la section

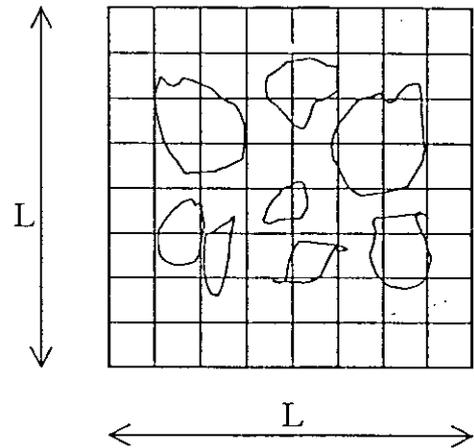


Fig.2.5.a Subdivision d'une section à travers un volume V.
(Aire totale $A=L^2$, $N*N$ éléments)

La distribution de probabilité des contraintes en un point peut se ramener à l'étude de leurs fluctuations sur la section d'une éprouvette soumise à des pressions uniformes. Soit A_z une section qui remplit cette condition, avec en chacun de ses points la moyenne (espérance) des contraintes intragranulaires S_z égale à $\bar{S}_z(x, y, z)$ supposée connue. La variable aléatoire est choisie égale au rapport adimensionnel des contraintes $\frac{S}{\bar{S}_z}$. La distribution aléatoire des points (Fig.2.5.b) est définie de telle manière à avoir une certaine subdivision pour chaque section donnée A_z à travers un volume V . Pour un observateur parcourant la section, l'événement aléatoire est défini comme étant la présence d'un point dans un élément de surface, en sachant que :

- Le nombre de points d'un élément de surface est une **variable aléatoire**. La présence d'un point n'influence pas la probabilité de présence des autres. Les événements aléatoires élémentaires sont donc indépendants.
- Chaque élément de surface n'est observé qu'une fois et tous les éléments sont pris en considération. L'ordre de parcours étant quelconque.

L'occurrence d'événements aléatoires indépendants dans l'espace, lorsque l'on connaît le nombre moyen par intervalle, suit la distribution de Poisson (Feller). Le

rapport $\frac{S_z}{\bar{S}_z}$ est remplacé par une approximation discrète définie par le produit d'un entier k_s et d'une constante d'étalonnage α_s :

$$\frac{S_z}{\bar{S}_z} = k_s \cdot \alpha_s \quad (2.23)$$

α_s : constante d'étalonnage arbitrairement petite

k_s : entier positif le plus proche de la valeur réelle $\frac{S_z}{(\bar{S}_z \cdot \alpha_s)}$

La variable k_s représente ainsi la quantité, $\frac{S_z}{\bar{S}_z}$ par un nombre entier d'unités valant chacune $1/\alpha_s$. Ceci peut être symbolisé en plaçant dans chaque élément de surface un nombre de points égal à k_s (fig.2.5b). Les éléments situés dans les pores restent vides. Dans chaque élément de surface se trouve un nombre de points égal à k_s . L'espérance mathématique de $\frac{S_z}{\bar{S}_z}$, moyenne du rapport de la contrainte verticale S_z à son espérance \bar{S}_z , est égale à 1 ; l'expression de la moyenne de k_s est :

$$\bar{k}_s = E\left[\frac{S_z}{\bar{S}_z} \frac{1}{\alpha_s}\right] = \frac{1}{\alpha_s} \quad (2.24)$$

Ce qui signifie qu'il y a en moyenne $1/\alpha_s$ points par élément de surface.

La fonction de masse de probabilité de k_s s'écrit :

$$P_{k_s}(k_s) = \frac{\lambda_s^{k_s} \cdot e^{-\lambda_s}}{k_s!} \quad (2.25)$$

(Distribution de Poisson)

Avec λ_s paramètre égal à l'espérance et à la variance de k_s :

λ_s est donné par l'expression de la moyenne pour la loi de Poisson ;

$$\lambda_s = \bar{k}_s = V(k_s) = \frac{1}{\alpha_s} \quad (2.26)$$

La probabilité que k_s soit nul est :

$$P_{k_s}(0) = e^{-\lambda_s} = e^{-\frac{V}{\alpha_s}} \quad (2.27)$$

C'est la probabilité qu'il n'y ait pas de point dans l'élément de surface. Cette probabilité est égale à la probabilité de trouver un pore n qui peut être confondue avec la porosité volumique n_v telle que définie précédemment :

$$P_{k_s}(0) = n \approx n_v \quad (2.28)$$

D'où :

$$\lambda_s = \frac{1}{\alpha_s} = -\log(n_v) \quad (2.29)$$

Le paramètre de la distribution de k_s dépend donc uniquement de la porosité n , et en utilisant la fonction de probabilités précédente (équation 3.3) :

$$P\left(\frac{S_z}{\bar{S}_z} = -\frac{k_s}{\log n_v}\right) = \frac{(-\log n_v)^{k_s} n_v}{k_s!} \quad (2.30)$$

$$k_s = 0, 1, 2, 3, \dots$$

La variance de k_s est donnée par :

$$V(k_s) = V\left[-\frac{S_z}{\bar{S}_z} \cdot \log n_v\right] \quad (2.31)$$

En utilisant (2.29) il est possible d'écrire :

$$-\log n_v = (\log n_v)^2 V\left[\frac{S_z}{\bar{S}_z}\right] \quad (2.32)$$

D'où la variance :

$$V\left[\frac{S_z}{\bar{S}_z}\right] = -\frac{1}{\log n_v} \quad (2.33)$$

La dispersion des contraintes verticales par rapport à la moyenne est liée à la porosité volumique par la relation (2.33). En utilisant la propriété que la variance $\text{Var}(a.X) = a^2 \cdot \text{var}(X)$ et comme \bar{S}_z est une constante, nous aurons pour l'expression (2.33),

$$V\left[\frac{1}{\bar{S}_z} \cdot S_z\right] = \frac{1}{\bar{S}_z^2} V(S_z).$$

D'où la variance de la contrainte intragranulaire :

$$V(S_z) = -\frac{\bar{S}_z^2}{\log(n_v)} \quad (2.34)$$

et un coefficient de variation V_{S_z} de cette contrainte :

$$V_{S_z} = (-\log(n_v))^{-1/2} \quad (2.35)$$

La figure 2.6 illustre cette relation entre la dispersion de la contrainte intragranulaire et la porosité du milieu au voisinage du point considéré, Elle montre que le coefficient de variation de la contrainte intragranulaire S_z croit très rapidement avec la porosité volumique n_v et dépasse 100% pour des valeurs usuelles de cette porosité dans les sols granulaires.

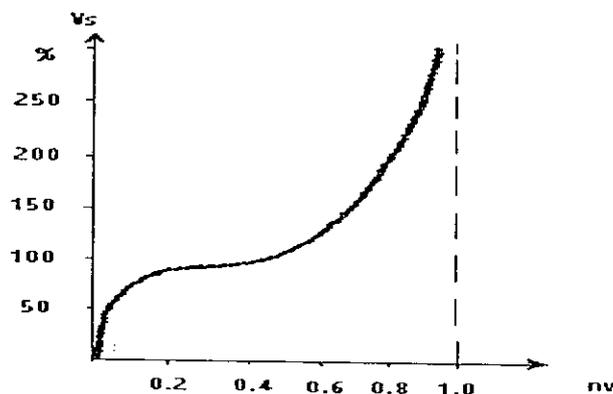


Fig.2.6 Relation entre le coefficient de variation de la contrainte intragranulaire et la porosité (d'après Bourdeau, 1986).

La distribution des contraintes verticales en un point d'un milieu granulaire dépend de la porosité du milieu en question et de la moyenne espérée des contraintes verticales. L'utilisation de la distribution de Poisson du rapport de la contrainte verticale à son espérance ($\frac{S}{\bar{S}}$) a permis de faire sortir un certain nombre de tableaux illustratifs (voir annexe II). La fonction de répartition des probabilités (fonction cumulative) peut être schématisée par une courbe en fonction du rapport de la contrainte verticale et de son espérance.

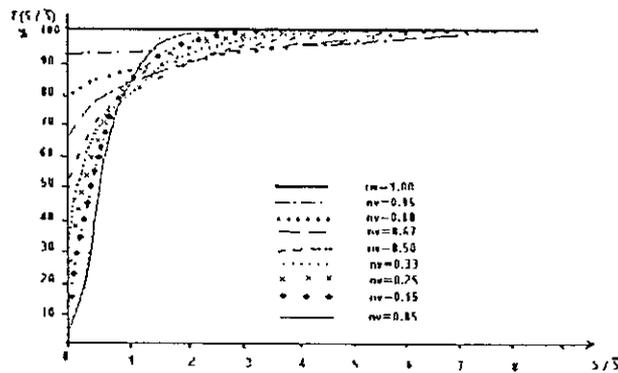


Fig. 2.7 Fonction cumulative des probabilités de $\frac{S}{\bar{S}}$ pour différentes porosités
(d'après Harr, 1977)

La figure 2.7 indique, par exemple pour un milieu de porosité $n=0.25$, que la probabilité pour que la contrainte verticale S soit inférieure ou égale l'espérance ($\frac{S}{\bar{S}} \leq 1$) est approximativement de 59%. Mais pour un milieu plus poreux à $n=0.67$ la probabilité que la contrainte verticale soit inférieure ou égale à son espérance ($\frac{S}{\bar{S}} \leq 1$) augmente pour atteindre 94%. Ceci montre que plus le milieu est poreux plus il est probable que la contrainte soit nulle. Si le milieu ne contient pas de vides, il n'y aura qu'une valeur unique de la contrainte équivalente à celle d'une force concentrée agissant en ce point. Cependant les milieux granulaires ne sont pas continus et présentent toujours un certain degré de porosité.

Exemples :

L'analyse de la distribution des contraintes verticales dans un milieu granulaire, a montré que l'espérance de la contrainte verticale en un point est 10 kN/m^2 . La porosité du milieu est $n=0.50$. la probabilité que la contrainte verticale en ce point soit inférieure à 20 kN/m^2 est égale à la probabilité que le rapport $\frac{S}{\bar{S}} = 2$. La courbe de la fonction F des probabilités cumulatives donne, pour $n=0.50$, une valeur de $P(\frac{S}{\bar{S}} \leq 2) = 97\%$ pour que la contrainte verticale réelle soit le double de la moyenne. Cette même probabilité est inférieure dans le cas d'un milieu plus dense ($n=0.25$) $P(\frac{S}{\bar{S}} \leq 2) \cong 83\%$.

La courbe $P(S \geq r \cdot \bar{S})$ (Fig.2.8) représentant la probabilité de dépassement de la contrainte moyenne (espérée) \bar{S}_z par la contrainte verticale S_z , en fonction de la porosité du milieu n_v , montre que la probabilité pour S_z d'être largement supérieure à la contrainte moyenne est plus grande dans les sols lâches que dans les milieux denses.

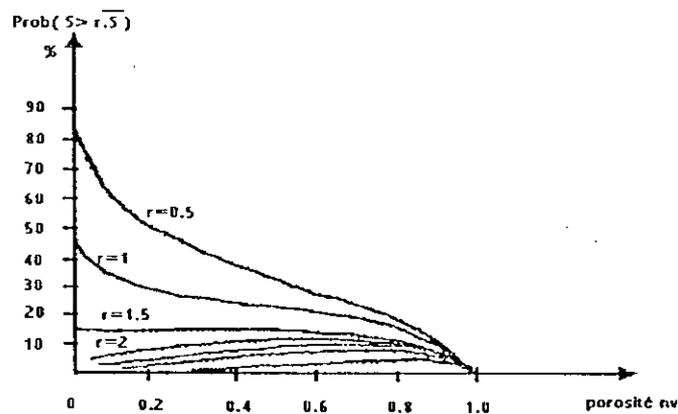


Fig. 2.8 Probabilité de dépassement par la contrainte intragranulaire d'une valeur $r \cdot \bar{S}$, en fonction de la porosité n_v (d'après Bourdeau, 1986)

L'espérance des contraintes en un point du milieu granulaire est donnée par une approximation au premier moment (moyenne) de la sollicitation interne. A défaut de définir l'approximation par la distribution des contraintes locales R , il a été fait appel à la distribution des contraintes intragranulaires S qui est une moyenne de R . Dans un milieu granulaire sec, la distribution de probabilité de la contrainte intragranulaire est entièrement définie par la contrainte moyenne et la porosité volumique -- deux paramètres caractérisant la sollicitation interne ; la résistance des grains à l'écrasement étant indépendante de la porosité du milieu.

II-5 CHANGEMENTS DE POROSITES DUS A DES SOLLICITATIONS EXTERNES :

II-5-1 Déformations et compressibilité d'un milieu granulaire (sol) :

La compressibilité d'un sol est définie comme étant sa faculté à répondre à un accroissement de charge par une augmentation de densité. D'après les essais de Vesic(1963) de chargement de sable lâche, moyennement dense et dense, il a été relevé que lorsque la compressibilité est insuffisante le système évolue très rapidement vers la rupture. Si une diminution de la porosité est possible, des charges de plus en plus grandes peuvent être équilibrées. Plus le sol est compressible plus il sera capable d'absorber des chargements importants. A l'échelle granulaire deux mécanismes distincts sont à l'origine des déformations.

- déformation des grains eux même sous l'effet des forces de contact
(tassements réversibles)
- déplacements relatifs des grains consécutifs à des glissements aux points de contact devenus instables en raison de l'accroissement de la charge (réarrangement des grains) conduisant à des tassements irréversibles.

Lorsque le sol est initialement dense, son comportement sous charges ordinaires sera dilatant. Si le sol est initialement lâche son comportement sous charges ordinaires serait contractant. Nombre d'auteurs (Field 1963, Oda 1977, Grivas et Harr 1980) ont rapporté que lorsque la porosité diminue, ceci augmente le contact

entre grains et de ce fait la stabilité du milieu augmente. D'un autre point de vue une dilatance locale d'un assemblage granulaire peut amener à diminuer le nombre de contacts par grains (particules) et delà à réorienter le restant des contacts.

II-5-2 Comportement contractant et dilatant des sols :

Reynolds (1885) a fait une série de constatations remarquables qui lui a permis de conclure qu'un milieu granulaire ne pouvait se déformer notablement qu'en se dilatant préalablement. Il faut que certains grains puissent bouger les uns par rapport aux autres, ce qui nécessite que les pores soient de grande taille c'est à dire que le milieu soit suffisamment dilaté lors de la déformation. Reynolds a appelé ce qu'il a observé dilatance (Evesque, 2000). Un matériau granulaire peut avoir différentes densités selon le tassement qu'il a subi, l'effet de dilatance est d'autant plus fort que la densité initiale du tas est grande. Lorsque le tas est trop lâche la déformation peut engendrer une diminution de volume total -- appelé contractance. Le degré de dilatance ou de contractance d'un spécimen dépend du sol, de sa structure, de son état initial, de la méthode de chargement, et du niveau des contraintes (Poulos, 1971).

II-5-3 Etat stationnaire de déformation :

C'est l'état de déformation dans lequel le milieu particulaire se déforme continuellement sous l'effet d'un état de contraintes constant à vitesse constante et à indice des vides constant. Cet indice des vides constant est dit «indice des vides stationnaire (critique). Casagrande explique qu'un sol tendra vers «l'indice des vides critique» lorsqu'il est suffisamment déformé par les contraintes de cisaillement. Pour des sols composés de «grains» le mécanisme physique de l'état de déformation stationnaire est vu par Casagrande comme un changement (une variation) continuuel de l'arrangement des grains dans la masse qui se déforme, accompagné d'augmentations ou de diminutions locales de l'indice des vides et des contraintes

effectives de telle façon à ce que l'indice des vides global (moyen) après de grandes déformations ne subit pas de variations (Kezdi, 1982 ; Poulos, 1971).

La porosité critique est définie comme étant le critère de *séparation* des sols « lâches » et des sols « denses ». C'est la porosité pour laquelle, un état de contrainte engendre un régime de déformation à volume constant, ceci est rendu possible grâce à l'équilibre entre contractions et dilatances à l'échelle granulaire.

II-5-4 Propagation des micro-mécanismes :

Pour un massif soumis à un chargement extérieur à vitesse faible, chaque fraction de sollicitation est transmise dans le sol par l'intermédiaire des contacts entre grains. Les contraintes intragranulaires dépendent de l'état du matériau en chaque point. La localisation et la nature des modifications de structures sont *aléatoires*. La localisation des instabilités dépend initialement, de la distribution spatiale et de la sollicitation des contacts intergranulaires. Pour un milieu statistiquement homogène, les zones où le champ des contraintes est le plus intense sont le siège des instabilités les plus nombreuses. Les tassements induits en surface sont la conséquence d'un transfert d'énergie de chargement à travers le milieu granulaire. Ces tassements sont le résultat des déplacements accumulés des grains interagissant entre eux. Sous l'action de chargements de surface, des changements locaux de porosités ont lieu et se propagent dans l'espace et le temps. Leur accumulation a pour effet de conduire à des tassements de surface observables. Le mécanisme gouvernant peut être expliqué par des arguments probabilistiques.

II-5-5 Modèle probabiliste pour matériau granulaire :

L'application d'une charge verticale normale sur une surface d'un milieu granulaire aléatoirement arrangé et statistiquement homogène, peut être considérée comme la somme d'un grand nombre de charges élémentaires discrètes. En négligeant la compressibilité des grains et leur déformation, la force intergranulaire résultant d'une charge élémentaire normale à la surface suivra un chemin *erratique* à travers les contacts entre grains du milieu, sans produire de déformation jusqu'à ce qu'elle atteigne un assemblage *instable* de particules. Un changement de vide a lieu au niveau de l'assemblage instable et la conséquence de ce mouvement produira une déflexion élémentaire en surface. Il s'en suit qu'en un point donné de la surface, la déflexion résultante est proportionnelle aux changements cumulatifs de vides provoqués dans le milieu granulaire (Bourdeau & Harr, 1989).

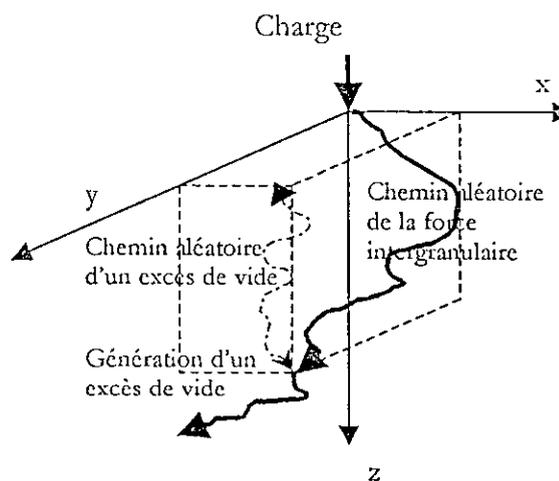


Fig. 2.9

Schéma d'un cheminement aléatoire dans la propagation des effets d'un chargement en surface (d'après Bourdeau & Harr 1989).

Le modèle phénoménologique du chargement en surface, d'un milieu granulaire, est constitué de trois composantes (fig.2.9). La première est la propagation de la force intergranulaire, la seconde est la génération des vides excessifs. La conséquence des composantes précédentes est une troisième composante qui consiste en une migration vers le haut de ces vides. La deuxième composante est le lien entre la première et la troisième (phénomène de propagation).

Soit $\Lambda(P)$ l'événement 'force traversant le point P à la profondeur z_i et $B(P)$ l'événement 'émission d'un vide au même point'. La probabilité de l'occurrence des deux événements A et B est :

$$\text{Prob}(B.A) = \text{Prob}\left(\frac{B}{A}\right) \cdot \text{Prob}(A) \quad (2.36)$$

Avec : B/A «l'événement B sachant que A a eu lieu».

La contrepartie phénoménologique de l'équation (4.1) sera de la forme :

$$\varepsilon_v = \frac{1}{\beta_v} \cdot \bar{S}_a \quad (2.37)$$

ε_v : déformation volumétrique au point P.

β_v : module de compressibilité volumétrique

\bar{S}_a : la moyenne espérée de la contrainte (le premier invariant du tenseur contraintes espérées)

Considérons un volume élémentaire ΔV de dimensions Δx , Δy , Δz , autour de P. Considérons également que les valeurs espérées des composantes des contraintes sont approximées par leurs moyennes spatiales dans le volume ΔV . Une charge Q normale appliquée à la surface provoque une contrainte espérée verticale S_z sur un plan horizontal à travers ΔV :

$$\bar{S}_z = \frac{\text{Prob}(A) \cdot Q}{\Delta x \cdot \Delta y} \quad (2.38)$$

Cette contrainte produit un changement de volume, fonction de la probabilité de l'occurrence simultanée des deux événements A et B, qui peut s'écrire:

$$V = \text{Prob}(A.B) \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.39)$$

Ainsi la probabilité jointe $\text{Prob}(B.A)$ est équivalente à la déformation volumétrique de l'élément de volume ΔV . La probabilité conditionnelle $\text{Prob}(B/A)$ représente le changement de volume par unité de contrainte. L'équation (2.36) peut être interprétée comme étant une loi de compressibilité, tandis que l'équation (2.37) représente la contrepartie phénoménologique (Bourdeau & Harr, 1989).

II-6 CONCLUSION :

L'assimilation de la porosité d'un milieu granulaire à une probabilité de présence de vide dans un milieu granulaire a permis d'utiliser un modèle de distribution des contraintes intragranulaire. Une loi de probabilité (Poisson) a été obtenue pour la distribution des contraintes. Elle donne une relation entre la porosité du milieu et la contrainte intragranulaire. La probabilité de dépassement de la moyenne des contraintes intragranulaires diffère d'un milieu lâche à un milieu dense.

EQUATIONS DE DIFFUSIONS EN TERMES DE POROSITE ET DE CONTRAINTES

III-1 RAPPEL SUR LE MOUVEMENT BROWNIEN :

En 1827, le botaniste écossais, Robert Brown, en observant au microscope le pollen d'une espèce de fleur nouvellement découverte, a constaté que dans l'eau ces petites particules étaient animées d'un «mouvement oscillatoire rapide». L'observation du pollen d'autres espèces lui a donné les mêmes résultats. Einstein avec d'autres découvertes en 1905 a permis d'apporter des explications au mouvement Brownien, dont quelques éléments suivent :

- Le mouvement est très irrégulier quel que soit le mouvement antérieur des particules se déplaçant dans toutes les directions.
- Deux particules voisines semblent se déplacer indépendamment l'une de l'autre, même si elles ne sont distantes que d'un espace inférieur à leur diamètre.
- Plus les particules sont petites, plus le mouvement est actif.
- Plus la température est élevée, plus le mouvement est actif.
- Le mouvement ne cesse jamais.

Il fut établi en outre que le mouvement saccadé était dû aux coups d'une seule molécule. L'observation au microscope a permis de voir que le mouvement résultait d'une collision unique avec une molécule du liquide, (Harr, 1977).

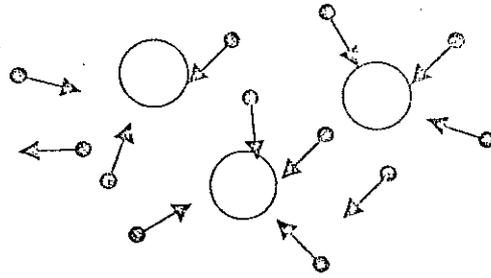


Fig. 3.1. Schéma de particules en mouvement Brownien

C'est donc un mouvement aléatoire qui a lieu. Le cheminement suivi par une force, dans un milieu granulaire sous chargement en surface, est un phénomène aléatoire comme il a été vu précédemment. En utilisant les résultats obtenus pour l'étude du mouvement Brownien, il est possible de faire le parallèle pour comprendre la diffusion aléatoire des forces entre grains d'un milieu particulaire.

III-2 EQUATION DE DIFFUSION POUR UN MOUVEMENT BROWNIEN :

Le mouvement (aléatoire) de particules, comme pour le cas du pollen étudié par Brown, a fait l'objet de plusieurs études. Parmi ces études celles ayant trait à des particules sédimentant dans un milieu donné (fluide visqueux). L'équation de diffusion de ces particules dans le milieu en fonction de leur concentration est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Dz \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - Cz \frac{\partial f}{\partial z} \quad (3.1)$$

Equation de diffusion pour un mouvement Brownien de particules.

$f(t)$: étant la concentration des particules sédimentant dans le milieu en fonction du temps t .

Dz et Cz étant des coefficients qui dépendent du milieu en question.

III-2-1 Interprétation probabiliste :

Pour passer à une interprétation probabiliste du problème le parallèle se fait avec la densité de probabilité, en faisant l'analogie entre la concentration volumique (f) des particules sédimentant à une profondeur z d'un milieu liquide et la densité de probabilité de présence d'une particule isolée dans un intervalle de l'espace. Cette particule supposée fictive aura un comportement représentatif de l'ensemble. Une expérience consiste à observer la position de cette particule après une durée de temps, son point de départ étant à chaque fois le même. Si cette expérience est répétée un nombre de fois très important, alors la probabilité (la fréquence) d'occupation d'un intervalle de l'espace résultant de ces essais successifs est équivalente à la proportion des particules réelles qui se trouvent simultanément dans cet intervalle (Ergodicité).

Les mouvements des particules dans les trois directions sont indépendants, ce qui fait que la probabilité de l'occurrence de l'événement dans les trois directions est égale au produit des probabilités dans chacune des directions.

$$f_{x,y,z}(x,y,z) = f_x(x,t) \cdot f_y(y,t) \cdot f_z(z,t) \quad (3.2)$$

Pour des probabilités f_x et f_y uniformes l'intérêt se porte sur la distribution de f_z et sa variation suivant l'axe z . en prenant comme point de départ un certain état initial de la distribution.

$f_{z_0}(z, t_0)$: distribution initiale

$f_z(z, t)$: distribution à t .

Sous sa forme probabiliste, l'équation de diffusion s'écrit :

$$\frac{\partial f_z(z,t)}{\partial t} = D_z \frac{\partial^2 f_z(z,t)}{\partial z^2} - C_z \frac{\partial f_z(z,t)}{\partial z} \quad (3.3)$$

f_z : densité de probabilité de transition des états z_0 aux états z en une durée $(t-t_0)$

III-3 EQUATION DE DIFFUSION DE POROSITE DANS UN MILIEU GRANULAIRE:

Un modèle de représentation du cheminement aléatoire d'un grain (d'une lacune) dans un milieu granulaire a été proposé par Bourdeau(1986). Il utilise les probabilités de transition entre des états successifs dans l'espace et le temps d'un grain. La figure 3.2 représente ce modèle. C'est une schématisation du changement de position d'un grain (d'une lacune) et son évolution par rapport au temps. Sur l'axe des abscisses est représenté le temps. Dans un sens le temps pour les grains et dans le sens opposé le temps pour les lacunes. Sur les ordonnées (axe z) sont représentées les positions successives du grain (de la lacune).

Soient p et q des probabilités telles que, pour un grain qui se trouve en a_k :

p : Probabilité qu'un grain descende et occupe la position a_{k-1} à l'époque t_{n+1}

q : Probabilité que le grain monte en a_{k+1} à l'époque t_{n+1}

Le cas où le grain stationne en a_k et ne se déplace pas est envisagé comme événement impossible. La somme des probabilités du déplacement d'un grain (d'une lacune) est égale à l'unité dans ce cas, $p + q = 1$.

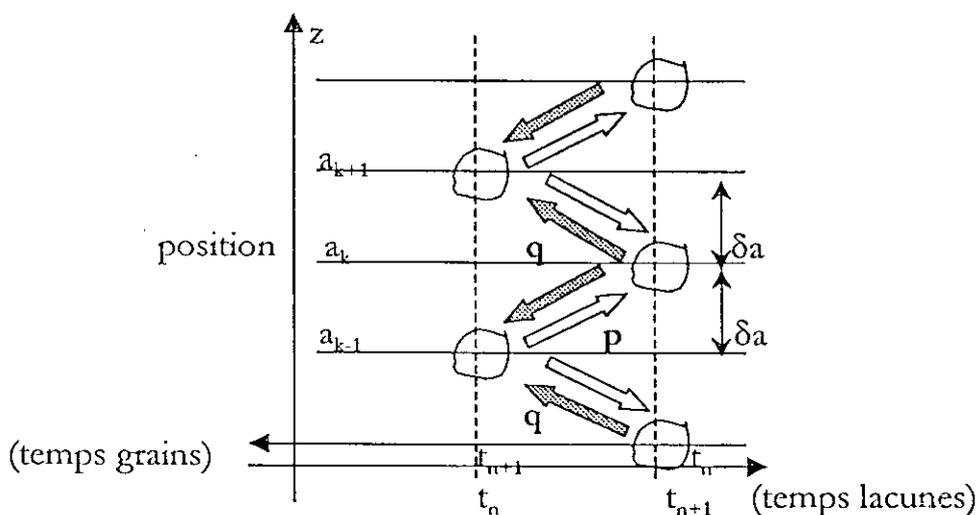


Fig.3.2 Schématisation des déplacements des grains et lacunes.

Le même raisonnement est adopté pour la lacune qui échange sa position avec le grain. Pour la lacune on note :

$$\text{Prob}(a = a_k; t = t_{n+1} \mid a = a_{k-1}; t = t_n) = p$$

Est la probabilité de passage de la lacune de la position a_k vers a_{k-1} .

$$\text{Prob}(a = a_k; t = t_{n+1} \mid a = a_{k+1}; t = t_n) = q$$

Est la probabilité de passage de la lacune de la position a_k vers a_{k+1} .

La somme de ces probabilités est égale à l'unité $p+q=1$.

Les probabilités p et q sont fonction uniquement de la position occupée par la lacune au temps t_n qui peut être considéré comme époque présente. Le futur immédiat t_{n+1} ne dépend que du présent t_n . les probabilités p et q dans ce cas sont des probabilités de transition des états de la lacune en un pas. Ce qui fait que le cheminement de la lacune est une marche aléatoire (processus général de diffusion). Si p et q sont indépendants du temps et de la position, la formule des probabilités de transition de Kolmogorov-Chapman s'écrit :

$$\text{Prob}(a = a_k; t = t_{n+1}) = p \cdot \text{Prob}(a_{k-1}, t_n) + q \cdot \text{Prob}(a_{k+1}, t_n) \quad (3.4)$$

$\text{Prob}(a = a_k; t = t_{n+1})$: exprime la probabilité que la lacune transite en $(n+1)$ pas depuis sa position initiale $a(t_0)$ jusqu'à a_k .

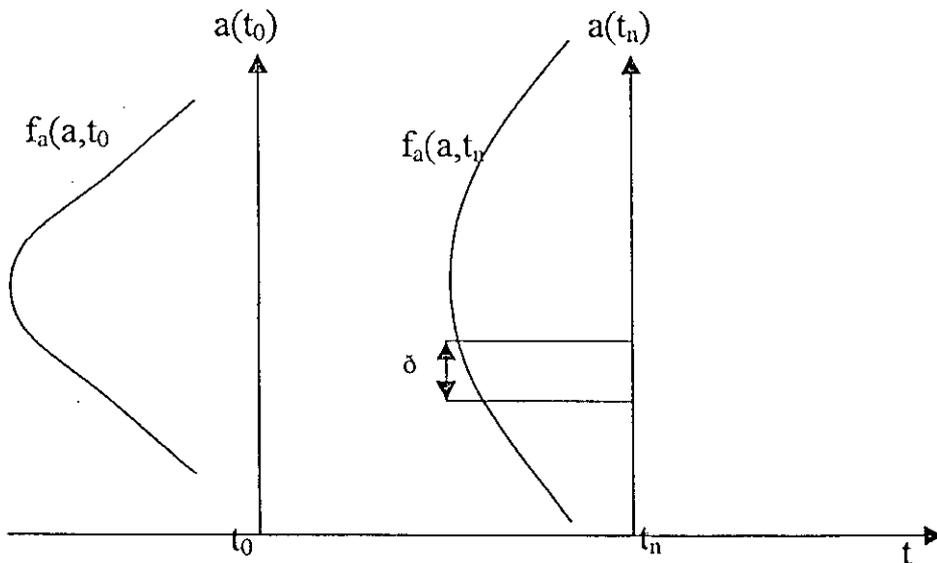


Fig. 3.3 Densité de probabilité de transition de la lacune depuis $a(t_0)$ jusqu'à $a(t_n)$ en une durée $t_n - t_0$

La courbe de la densité de probabilité à t_n montre que

$$\int_{a_k - \frac{\delta a}{2}}^{a_k + \frac{\delta a}{2}} f_a da \approx \text{Prob}(a=a_k; t=t_n) \quad (3.4a)$$

La longueur des intervalles de temps Δt et de distance Δa , séparant deux positions consécutives de la lacune, sont supposées constantes. Les probabilités de position peuvent également être représentées par des fonctions continues et dérivables par rapport à au temps t et à la position a . Il existe alors des fonctions densités de probabilités $f_a(a,t)$. Dans ces conditions la formule précédente (3.4) peut s'écrire en termes de fonction de probabilité continue. Pour un intervalle de temps très petit Δt peut être remplacé par δt . L'expression de la probabilité $\text{Prob}(a_k, t_{n+1})$ devient :

$$f_a(a, t + \delta t) = p \cdot f_a(a - \delta a, t) \delta a + q \cdot f_a(a + \delta a, t) \delta a \quad (3.5)$$

Le développement de chaque terme en série de Taylor autour de (a,t) donnera :

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{1}{2} \delta t \frac{\partial^2 f_a}{\partial t^2} \approx \frac{1(\delta a)^2}{2\delta t^2} \frac{\partial^2 f_a}{\partial a^2} - \frac{\delta a}{\delta t} (p - q) \frac{\partial f_a}{\partial a} \quad (3.6)$$

Pour des intervalles de temps δt très petits, le mouvement aléatoire de la lacune apparaît comme étant *Quasi continu*. Et à la limite on aura :

$$\lim_{\substack{\delta t \rightarrow 0 \\ \delta a \rightarrow 0}} \frac{\delta a}{\delta t} (p - q) \rightarrow \text{limite finie } (C_a) \quad (3.7a)$$

$$\lim_{\substack{\delta t \rightarrow 0 \\ \delta a \rightarrow 0}} \frac{(\delta a)^2}{2\delta t} \rightarrow \text{limite finie } (D_a) \quad (3.7b)$$

L'équation (3.6) peut s'écrire dans ce cas sous la forme :

$$\frac{\partial f_a(a, t)}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 f_a(a; t)}{\partial a^2} - C_a \frac{\partial f_a(a; t)}{\partial a} \quad (3.8)$$

Equation ayant la forme d'une équation de diffusion dite de Fokker-Planck à coefficients constants.

Si Δt est constant, Δa désigne l'amplitude du déplacement vertical que peut effectuer la lacune pendant Δt . Si l'on considère également les incréments Δa successifs comme variables en fonction de la position de la lacune et du temps, l'expression de l'équation sera :

$$\frac{\partial f_a(a,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 [D_a(a,t)f_a(a,t)]}{\partial a^2} - \frac{\partial [C_a(a,t)f_a(a,t)]}{\partial a} \quad (3.9)$$

(forme générale de l'équation)

Equation décrivant le cheminement aléatoire de lacunes mises en mouvement à la suite d'instabilités locales; ces lacunes représentent le volume des vides en excès dans le milieu, elles doivent en être expulsées pour établir un nouvel équilibre. L'hypothèse d'érgodicité met en équivalence la probabilité de présence d'une lacune diffusée à l'altitude a et au temps t , avec une concentration volumique des vides en excès suite à un chargement. L'équation de diffusion est donc applicable au surplus de porosité $\Delta n_v(a,t)$, (Bourdeau, 1993).

$$\Delta n_v(a,t) = n_v(a,t) - n_v(a,t_{\text{équilibre}}) \quad (3.10)$$

Porosité. Porosité
actuelle à l'équilibre

L'équation de diffusion en terme de porosité deviendra alors :

$$\frac{\partial [\Delta n_v(a,t)]}{\partial t} = \frac{\partial^2 [D_a(a,t)\Delta n_v(a,t)]}{\partial a^2} - \frac{\partial [C_a(a,t)\Delta n_v(a,t)]}{\partial a}. \quad (3.11)$$

De cette formulation résultent deux faits essentiels, le premier est que la déformation n'est pas instantanée pour le milieu sec mais se développe au cours du temps pour converger vers un état d'équilibre, et le second est qu'un massif sec statistiquement homogène à l'état initial et à l'état final du processus n'est pas homogène pour les états transitoires (Bourdeau, 1986). Ce qui n'est pas le cas pour la mécanique des milieux continus (porosité volumique fixe à toute époque de la déformation ou bien du processus de diffusion des lacunes).

III-4 DISTRIBUTION DE LA CONTRAINTE NORMALE VERTICALE ESPEREE DANS UN MILIEU GRANULAIRE SOUS CHARGE PONCTUELLE :

La contrainte normale verticale agissant en un point est l'effet total cumulé de nombreuses *variables aléatoires* (forme et distribution des particules, répartition des vides dans l'espace, contacts entre particules). Le nombre de variables aléatoires étant important, il est possible d'appliquer le théorème de la limite centrale. La distribution de la somme de ces variables converge vers une distribution normale (nombre de particules important).

$$\bar{S}_z(x, z) = \frac{1}{\varpi \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\varpi^2}}$$

ϖ : écart type de la distribution

Comme la contrainte intragranulaire \bar{S}_z varie en profondeur, l'écart-type ϖ doit inclure un paramètre de profondeur. La figure 3.4b montre schématiquement la transmission d'une contrainte normale verticale par une particule dans un milieu bidimensionnel. L'effet des forces appliquées en surface s'étend latéralement dans les directions positive et négative (à droite et à gauche de l'axe z). Pour une particule donnée la contrainte de l'input (entrée) peut être choisie comme répartie entre les directions positives et négatives par une expérience de Bernoulli.

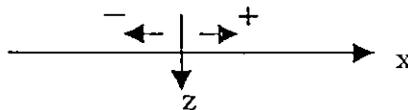
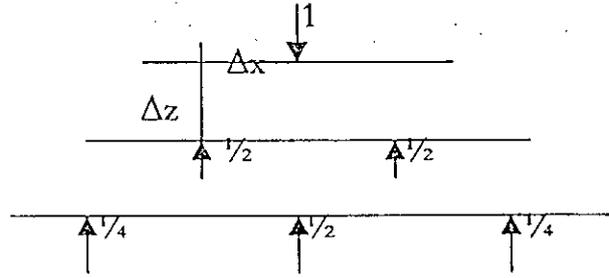


Fig.3.4a Sens positif et négatif sur l'axe des x

Pour des expériences successives, les répartitions des contraintes sont indépendantes. Le résultat de chaque expérience est entièrement dû au hasard. La probabilité liée à un résultat particulier est constante pour toutes les expériences ($p=q=1/2$), p et q étant les probabilités à gauche et à droite. Si l'espace moyen des contraintes de chaque rangée est Δz , la contrainte espérée suivra une loi de distribution *binomiale*.

Fig.3.4b

Répartition des contraintes
(charge unitaire)

L'expression de la contrainte verticale (moyenne) en un point par rapport à un point précédent est donnée par :

$$\bar{S}_z(x, z + \Delta z) = \frac{1}{2} [\bar{S}_z(x - \Delta x, z) + \bar{S}_z(x + \Delta x, z)] \quad (3.12)$$

Δx : déplacement suivant l'horizontale

Δz : déplacement suivant la verticale

La différence des contraintes entre deux paliers au point x est donnée, par rapport à la longueur du palier Δz , par la relation :

$$\frac{\bar{S}_z(x, z + \Delta z) - \bar{S}_z(x, z)}{\Delta z} = \frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta z} \left\{ \frac{\bar{S}_z(x + \Delta x, z) - 2\bar{S}_z(x, z) + \bar{S}_z(x - \Delta x, z)}{(\Delta x)^2} \right\} \quad (3.13)$$

Lorsque Δz et Δx sont très petits, c'est à dire :

Δz tend vers ∂z

Δx tend vers ∂x

$$\frac{\bar{S}_z(x, z + \partial z) - \bar{S}_z(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} \quad (3.14)$$

D'où :

$$\frac{\bar{S}_z(x + \partial x, z) - 2\bar{S}_z(x, z) + \bar{S}_z(x - \partial x, z)}{(\partial x)^2} = \frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial x^2} \quad (3.15)$$

Si le rapport $\frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta z}$ est assimilé à une à une constante D l'équation sera de la forme:

$$\frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} = D \frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial x^2} \quad (3.16)$$

C'est une équation qui a la forme d'une équation de diffusion. La substance de diffusion est la contrainte verticale \bar{S}_z . Le coefficient D représente un coefficient de diffusion qui dépend du milieu en question. La solution de l'équation (solution analytique) est de la forme :

$$\bar{S}_z(x, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D \cdot z}} e^{\left(-\frac{x^2}{4D \cdot z}\right)} \quad (3.17)$$

qui est une fonction de densité d'une variable aléatoire x continue pour tout z. Elle a la forme d'une distribution normale de probabilités. Harr(1977) a indiqué que le coefficient D représente la limite de $(\Delta x^2/\Delta z)$ lorsque Δx^2 et Δz tendent vers 0. Le rapport $\Delta x^2/\Delta z$ traduit une caractéristique du milieu constitué de particules. Il sera remplacé par un facteur $\alpha = \Delta z/\Delta x^2$. Sachant que l'espérance de la contrainte verticale S_z satisfait l'équation de diffusion et après avoir remplacé D par $1/2\alpha$. L'équation de diffusion s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} = \frac{1}{2\alpha} \frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial x^2} \quad (3.18)$$

La mesure réelle d'une propriété d'un matériau doit être faite lors d'une expérience. Harr (1977) a utilisé une correspondance avec des résultats d'un modèle utilisant la théorie de l'élasticité. Il a été montré que le facteur α varie proportionnellement à l'inverse de la profondeur z. Cela conduit à introduire le coefficient ν tel que $\nu \cdot z = 1/\alpha$.

Sous une charge linéaire P agissant normalement à la surface (à l'origine des coordonnées) la contrainte intragranulaire (moyenne) s'exprime par :

$$\bar{S}_z(x, z) = \frac{P}{z\sqrt{2\nu\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\nu z}} \quad (3.19)$$

Par substitution on vérifie que \bar{S}_z satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} = \nu z \frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial x^2} \quad (3.20)$$

ν : étant un coefficient qui dépend du milieu en question.

III-5 EQUATION DE DIFFUSION DE LA CHARGE EN DEFORMATIONS PLANES :

Un milieu granulaire est soumis à un chargement linéaire Q en surface, infiniment long. Le modèle mathématique de diffusion selon x , avec z pour variable d'évolution, est représenté par le schéma de la figure 3.5. La diffusion est admise symétrique par rapport à l'axe z (Harr, 1977). $f_A(x, z)$ représente une fonction de probabilité.

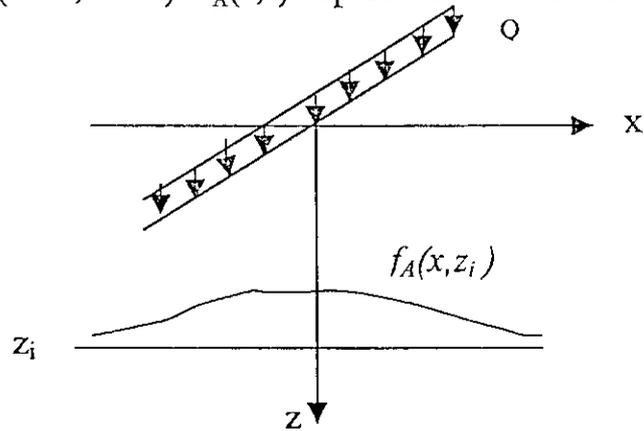


Fig. 3.5
Massif soumis à une charge répartie de longueur infinie.

Le même raisonnement que celui de la section (III-3) peut être utilisé pour aboutir à une équation de diffusion de type :

$$\frac{\partial f_A(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial^2 [D_x^s(x, z) \cdot f_A(x, z)]}{\partial x^2} \quad (3.21)$$

Avec D_x^s coefficient de diffusion de la force dans la direction x .

$f_A(x, z)$ est une fonction de probabilité. Sur un intervalle δx le produit de cette fonction par δx , $f_A(x, z) \cdot \delta x$, représente une approximation de la probabilité que le

cheminement de la force intercepte le plan $z=z_i$ dans un intervalle de largeur δx autour de $x = x_1$. La probabilité autour d'un point x_1 à une profondeur $z=z_i$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Prob}(x_1 / z_i) &= \text{Prob}_A \left[x_1 - \frac{\delta x}{2} < x < x_1 + \frac{\delta x}{2} \middle| z = z_i \right] \\ &= \int_{x_1 - \frac{\delta x}{2}}^{x_1 + \frac{\delta x}{2}} f_A(x, z_i) dx \end{aligned} \quad (3.22)$$

En surface, au point d'application de la force, origine du repère la probabilité est complète, c'est à dire égale à l'unité :

$$\text{Prob}_A(0/0) = 1 \quad (3.23)$$

Sur un intervalle δy de longueur arbitraire, la probabilité Prob_A en termes fréquentiels conduit à :

$$\frac{\text{Prob}_A[x_i / z_i]}{\text{Prob}_A[0/0]} = \frac{F}{Q \delta y} \quad (3.24)$$

Q étant la densité linéaire de la charge appliquée. Tandis que F est la résultante des forces intragranulaires verticales dans l'intervalle $\delta x \cdot \delta y$ centré sur x_1 . La concentration par unité de surface des forces intragranulaires est égale à la moyenne (espérance) de la contrainte intragranulaire qui est donnée par \bar{S} d'où :

$$Q \delta y \cdot \int_{x_1 - \frac{\delta x}{2}}^{x_1 + \frac{\delta x}{2}} f_A(x, z_i) dx = \delta y \cdot \int_{x_1 - \frac{\delta x}{2}}^{x_1 + \frac{\delta x}{2}} \bar{S}_z(x, z_i) dx \quad (3.25)$$

En dérivant l'expression (3.25), le produit de la densité de charge Q par la distribution de probabilités f_A est égal à la moyenne des contraintes intragranulaires

$$Q \cdot f_A(x, z_i) = \bar{S}_z(x, z_i) \quad (3.26)$$

La densité de charge Q étant une constante, l'équation de diffusion s'écrit en termes de contraintes:

$$\frac{\partial \bar{S}_z(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial^2 [D_x^s(x, z) \cdot \bar{S}_z(x, z)]}{\partial x^2} \quad (3.27)$$

Equation de diffusion de la charge, avec \bar{S}_z représentant la concentration par unité de surface de la substance diffusée. L'équation de diffusion est inchangée pour une répartition quelconque des pressions en surface.

III-5-1 LES CONDITIONS AUX LIMITES :

On peut avoir des conditions aux limites telles que le massif soit limité par des parois lisses et rigides (adhérence nulle), ou bien des parois non lisses (adhérence parfaite) :

$$\frac{\partial}{\partial x} [D_x^s(x, z) \cdot f_A(x, z)] = 0$$

Lorsque D_x est indépendant de x il est possible d'écrire :

$$\left[\frac{\partial \bar{S}_z(x, z)}{\partial x} \right]_{x=x_l} = 0 \quad x_l : \text{étant l'abscisse de la paroi.}$$

La variation des contraintes moyennes (espérées) verticales \bar{S}_z par rapport à l'horizontale est nulle au niveau des parois verticales du milieu supposé. Il est possible, également, de vérifier qu'aucune fraction de charge ne peut être dissipée par le frottement sur les parois (Bourdeau, 1986). Une autre condition peut être imposée aussi, c'est la condition de réflexion telle que la totalité des changements de volume qui se produisent se propagent jusqu'à la surface. La présence d'une paroi rigide et d'une adhérence parfaite signifie que tous les déplacements doivent être nuls à la frontière.

La transition d'une couche à une autre n'est pas une discontinuité géométrique (on s'affranchit des conditions aux interfaces de Burmister). La théorie de la diffusion modélise un phénomène de transport d'une substance à travers un milieu et non un

comportement mécanique soumis à des conditions de compatibilité et de continuité.

III-6 DIFFUSION DES CONTRAINTES EN TROIS DIMENSIONS :

La probabilité de l'occurrence simultanée de deux événements A et B est donnée, par définition, par $\text{Prob}(A.B)$. Si les événements sont indépendants l'écriture sera de la forme $\text{Prob}(A.B) = \text{Prob}(A).\text{Prob}(B)$. Il a été déjà vu que la valeur de la contrainte normale verticale dans un milieu granulaire, sous l'effet d'une charge P en surface, est donnée dans le plan (x,z) par :

$$\bar{S}_z(x, z) = P \cdot \sqrt{\frac{\alpha_x}{2\pi \cdot z}} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha_x}{2z} \cdot x^2\right)$$

avec $1/\alpha_x = v \cdot z$; Le facteur α_x traduit la variation de α dans la direction x.

En utilisant le même raisonnement dans le plan (y,z), la répartition des contraintes verticales sous une charge P en surface est donnée par la formule :

$$\bar{S}_z(y, z) = P \cdot \sqrt{\frac{\alpha_y}{2\pi \cdot z}} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha_y}{2z} \cdot y^2\right)$$

avec α_y qui traduit la variation du facteur α dans la direction y.

Dans un cheminement aléatoire tridimensionnel de la contrainte verticale, un pas dans le plan (x,z) est supposé indépendant des pas dans le plan (y,z) (Goldman 1970). En utilisant la probabilité de l'occurrence simultanée de deux événements indépendants [$\text{Prob}(A.B) = \text{Prob}(A).\text{Prob}(B)$], et comme la contrainte a l'expression d'une probabilité, la contrainte normale verticale dans l'espace tridimensionnel, d'un milieu granulaire sous une charge P, est donnée par le produit des contraintes verticales dans les deux plan (x,z) et (y,z).

$$\bar{S}_z = \bar{S}_z(x, z) \cdot \bar{S}_z(y, z)$$

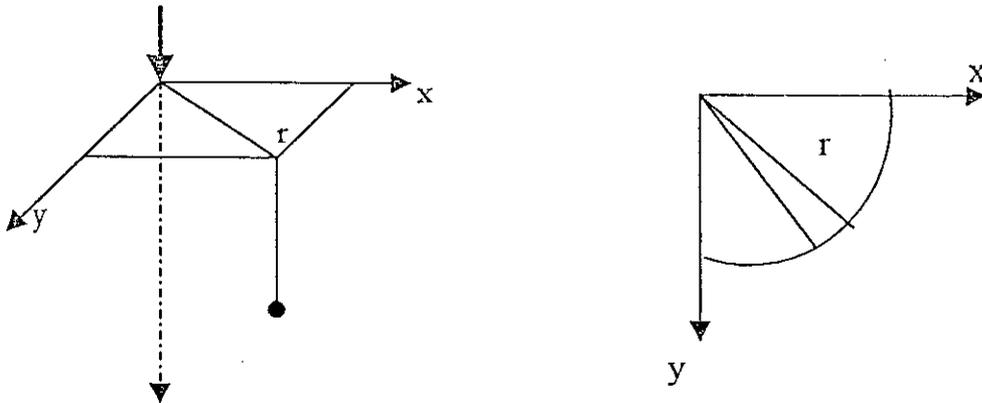
soit :

$$\frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} = \nu z \left(\frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial y^2} \right) \quad (3.29)$$

La contrainte verticale dans un milieu granulaire isotrope \bar{S}_z satisfait l'équation de diffusion pour un chargement en surface qu'il soit ponctuel ou reparté (circulaire, rectangulaire...)

III-6-1 CHANGEMENT DE COORDONNEES :

Le changement de coordonnées se fera de façon à s'adapter à la symétrie circulaire, en prenant comme point de départ l'axe vertical de la charge ponctuelle P. Autrement dit, la somme des carrés des distances en x et y sera égale au carré de la distance entre le point de départ(0,0) et la projection sur le plan xOy du point en question du milieu granulaire (Ryhming, 1985).



L'équation de diffusion des contraintes intragranulaire dans un milieu granulaire est donnée, dans un repère cartésien, par :

$$\nu z \left(\frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z}$$

Et dans un repère cylindrique, l'équation s'exprime de la forme :

$$\nu z \left(\frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial \theta^2} \right) = \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z}$$

En situation d'axisymétrie, la variation de \bar{S}_z suivant l'angle θ est nulle,

$$\frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial \theta^2} = 0$$

L'équation prend la forme :

$$v.z \left(\frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} \quad (3.30)$$

Equation de diffusion des contraintes intragranulaires d'un milieu granulaire, en fonction du rayon r et de la profondeur z .

On peut vérifier que :

$$\bar{S}_z = \frac{p}{2\pi v.z^2} e^{-\frac{r^2}{2v.z^2}} \quad \text{satisfait l'équation de diffusion}$$

$$\frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} = \frac{p}{\pi v.z^3} e^{-\frac{r^2}{2v.z^2}} \left(\frac{r^2}{2v.z^2} - 1 \right)$$

sachant que :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial r} = \frac{-p}{2\pi v^2.z^4} e^{-\frac{r^2}{2v.z^2}}$$

on aura donc :

$$\begin{aligned} v.z \left(\frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial r} \right) &= v.z \left(\frac{p}{\pi v^2.z^4} e^{-\frac{r^2}{2v.z^2}} \left(\frac{r^2}{2v.z^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= v.z \left(\frac{p}{\pi v^2.z^4} e^{-\frac{r^2}{2v.z^2}} \left(\frac{r^2}{2v.z^2} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

Or ce dernier terme n'est que l'expression de la dérivée de \bar{S}_z (contrainte espérée) par rapport à z donc :

$$v.z \left(\frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z}$$

\bar{S}_z satisfait alors l'équation de diffusion en fonction de r (cas *axisymétrique*):

III-7 CONCLUSION :

L'équation de diffusion des contraintes verticales dans un milieu granulaire en deux dimensions est obtenue en se basant sur un raisonnement probabiliste de répartition, dans le milieu, d'une charge appliquée en surface. Les possibilités de passage, à l'un ou l'autre des deux cotés de la charge ponctuelle, sont régies par une expérience de type Bernoulli. La généralisation du raisonnement dans l'espace a trois dimensions conduit à une équation de diffusion en axisymétrie. Le traitement numérique de cette équation permet d'étudier une multitude de situations.

COEFFICIENT DE POUSSEE ET ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE DANS UN MILIEU GRANULAIRE

INTRODUCTION

Il est souvent fait appel, dans les études de sols, à un coefficient de pression des terres qui caractérise l'état du milieu en question. Ce coefficient est le rapport des contraintes horizontales aux contraintes verticales en tout point du milieu.

En théorie probabiliste de diffusion des contraintes dans un milieu granulaire apparaît un rapport entre la moyenne des contraintes horizontales et la moyenne des contraintes verticales en un point. Ce rapport diffère du coefficient de pression des terres classique, il est dit coefficient de poussée. Reimbert a montré que ce coefficient est caractérisé par un état actif et un état passif et qu'il dépend de l'angle de frottement interne du matériau et de sa densité.

IV-1 COEFFICIENT DE POUSSEE DES TERRES :

Harr (1977) a donné la relation fondamentale de base reliant contraintes verticales et contraintes horizontales, dans un milieu formé de particules, par l'expression suivante (voir annexe II):

$$\bar{S}_x = \nu \cdot \bar{S}_z + \nu^2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

\bar{S}_x : contrainte horizontale

\bar{S}_z : contrainte verticale

la même expression est valable également selon la direction y.

Si la valeur de la contrainte verticale $\bar{\sigma}_z$ varie de façon linéaire dans la direction horizontale c'est à dire :

$$\bar{\sigma}_z = C_1.x + C_2.y + C_3 \quad (4.2)$$

C_1, C_2, C_3 : constantes

L'équation (4.1) devient :

$$\bar{\sigma}_x = \nu.\bar{\sigma}_z \quad (4.3)$$

Harr (1977) propose d'assimiler le coefficient ν qui apparaît dans l'équation de diffusion des contraintes à un coefficient de contraintes latérales. Dans ce cas le terme ν apparaît comme le rapport de la contrainte horizontale à la contrainte verticale en un point du milieu granulaire. Dans ce cas particulier il se confond avec le coefficient de pression des terres borné par les valeurs des états actif et passif (Jumikis, 1962).

La relation entre les composantes horizontale et verticale de contraintes en un point dépend fortement de l'histoire des contraintes antérieures (ou des déformations). Dans les dépôts sédimentaires à faibles compressions horizontales, la composante de la contrainte horizontale sera probablement inférieure à la composante verticale. Tandis que si le dépôt a été soumis dans le passé à de grandes charges verticales (celles d'un glacier par exemple) recouvrant des couches qui pourront être éliminées en partie par la suite, la composante horizontale peut dépasser la verticale (Harr, 1977).

L'expression du coefficient ν , revêt un certain intérêt dans le fait qu'elle permet de faire apparaître dans l'expression des contraintes un paramètre géotechnique qui reflète des informations relatives aux propriétés mécaniques du matériau et à son état. Il faut tout de même observer (Fedà, 1978) que le rapport des contraintes en chaque point du massif ne peut être déterminé a priori; ce qui fait que le coefficient ν n'est pas un coefficient caractérisant le sol de manière intrinsèque.

IV-2 DENSITÉ RELATIVE :

Le frottement dans des conditions simples est un phénomène compliqué; il est admis généralement que le paramètre qui contribue le plus à la résistance par frottement est le degré de rugosité de la surface de contact. Dans un milieu granulaire comme le montre la figure 4.1 la résistance se déduit des forces de cisaillement (T dans ce cas), nécessaires pour dépasser le glissement, la rotation et le soulèvement des particules le long de leur déplacement relatifs(AB). Pour une valeur constante de la force normale (N) sur le milieu granulaire; la force de cisaillement nécessaire pour déclencher le glissement le long de AB dépendra du nombre de points de contact. La force de cisaillement nécessaire pour rompre l'équilibre d'un arrangement lâche de particules est beaucoup plus faible que lorsqu'il s'agit d'un arrangement dense -- il existe moins de points de contact entre particules pour un arrangement lâche. La grandeur utilisée pour mettre en valeur cette caractéristique du milieu granulaire est la *densité relative*. Elle caractérise l'état actuel de densité relativement aux états limites de densités (lâche, dense). La densité relative s'exprime en termes d'indice des vides ou de porosité.

$$D_r = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}} \times 100\% ; \text{ avec } e_{\min}, e_{\max} \text{ respectivement indice des vides minimum et maximum.}$$

La densité relative sèche est donnée en fonction de γ la densité sèche du matériau par :

$$D_d = \frac{\gamma - \gamma_{\min}}{\gamma_{\max} - \gamma_{\min}} ;$$

Et en fonction de la densité relative nous aurons :

$$D_d = D_r \cdot \frac{\gamma}{\gamma_{\max}}$$

Chikwendu (1981) a proposé, dans le cas d'un matériau idéal formé de particules sphériques de même diamètre, une expression pour le coefficient ν de pression des

terres en fonction de la densité relative D_r . Pour les valeurs extrêmes de D_r Chikwendu obtient :

$$v=0.50 \text{ pour } D_r = 0\% \quad \text{et} \quad v=0.20 \text{ pour } D_r = 100\%.$$

Notons que lorsque le coefficient de poussée des terres diminue la contrainte verticale augmente dans le cas où la contrainte horizontale reste fixe. Les cas extrêmes $D_r=0\%$ et $D_r=100\%$ correspondent respectivement à l'état le plus poreux et à l'état le moins poreux.

Le tableau qui suit donne les plages de densités relatives d'un sol granulaire et les angles de frottement correspondants, ainsi que les définitions en termes de compacité. (Poulos, 1971)

Tableau 4.1 Propriétés d'un sol granulaire (d'après Teng 1962)

Compacité	Densité relative (pourcentage)	Angle de frottement interne (en degrés)
Très lâche	0 – 15	< 28
Lâche	16- 35	28 – 30
Moyenne	36 – 65	31 – 36
Dense	66 – 85	37 – 41
Très dense	86 – 100	> 41

IV-3 ESSAI DE CISAILLEMENT DIRECT :

La résistance au cisaillement des sables est constituée généralement de deux composantes, la résistance au frottement résultant d'un mouvement relatif entre grains (frottement par glissement) et d'une résistance structurale due à l'enchevêtrement des particules entre elles (Kezdi , 1966).

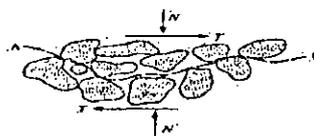


Fig. 4.1 Forces agissant dans le cas du cisaillement(d'après Harr, 1977)

Dans le cas d'un sable lâche il suffit, pour provoquer le cisaillement, que les particules glissent entre elles. Dans le cas d'un sable dense il faut, en plus du glissement, que les particules roulent les unes sur les autres. L'effet « enchevêtrement » (interlocking) des particules est significatif dans le cas de sables denses (Kezdi & Rethati, 1988)

L'essai de cisaillement direct est un essai de laboratoire, généralement, utilisé pour connaître et mesurer les paramètres de résistance des matériaux formés de particules (sables par exemple). C'est un essai à plan de rupture imposé. Il s'effectue sous des conditions de rupture données. Il est exécuté dans une boîte, comme l'indique la figure 4.2, formée de deux parties l'une fixe située à la base et l'autre supérieure se meut horizontalement, tirée par une force T et maintenue par une pression verticale N sur le même plan. Les parois de la boîte, empêchent tout déplacement latéral, on peut considérer que les conditions de l'essai correspondent à un état de déformations planes.

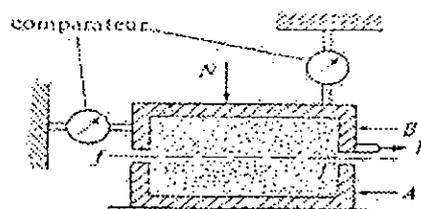


Fig. 4.2 Appareil utilisé pour l'essai de cisaillement direct (d'après Harr, 1977)

L'essai est exécuté pour une valeur donnée de la force normale N , en faisant varier (augmentation) la force T de tirage jusqu'à ce qu'il y ait rupture, le plan de rupture étant imposé à l'avance suivant ff . La figure 4.3 donne les résultats, pour un essai sur sable sec, de contrainte de cisaillement en fonction de la déformation

(déplacement horizontal), $\tau=T/\Lambda$ étant la contrainte de cisaillement et $\sigma=N/\Lambda$ contrainte normale sur le plan de cisaillement.

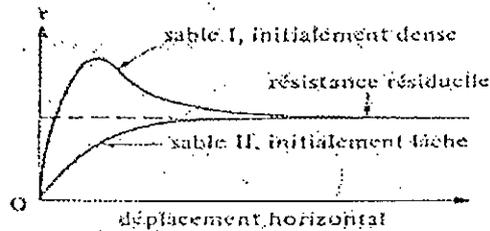


Fig. 4.3 Evolution de la contrainte de cisaillement fonction du déplacement (d'après Harr, 1977)

Lorsqu'il s'agit d'un sable *initialement dense* on remarque l'apparition d'un maximum dans la courbe de τ en fonction des déplacements horizontaux; c'est un maximum caractéristique dit de pic, qui correspond à la résistance maximum de pic; il apparaît à de faibles déplacements horizontaux.

Tandis que pour un sable, *initialement lâche*, on ne remarque pas de pic, la résistance augmente graduellement jusqu'à atteindre une valeur constante même pour de grands déplacements horizontaux.

Pour une contrainte normale donnée, la résistance résiduelle est sensiblement la même pour un matériau sec granuleux quel que soit sa densité relative initiale. Pour un sable dense ça revient à admettre que le degré d'imbrication des particules diminue après que la résistance maximum soit atteinte. En faisant un certain nombre d'essais sur un sable de même indice des vides initial, mais en appliquant des forces normales N différentes à chaque fois, on peut tracer les enveloppes de rupture. L'angle de pente de résistance maximum est dit angle de frottement de pic ϕ_p , tandis que l'angle de frottement résiduel est désigné par ϕ_{cv} (Fig. 4.5).

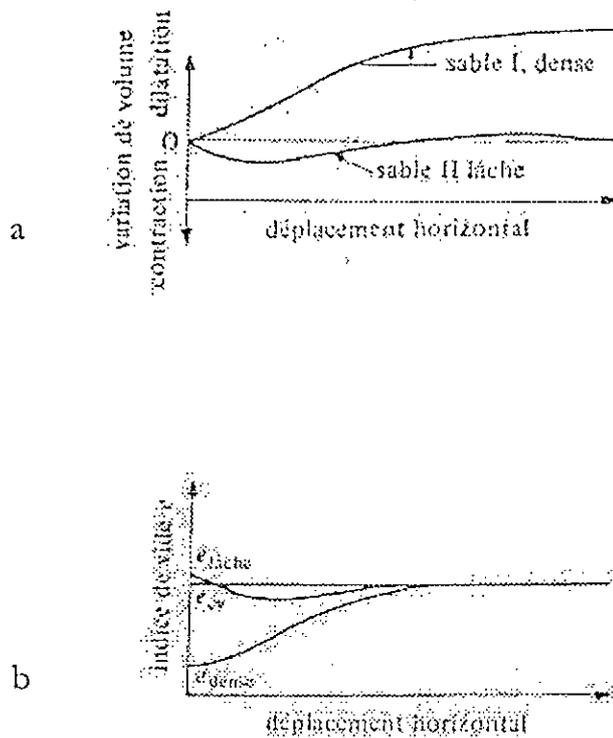


Fig. 4.4 Variation de volume et déplacement horizontal lors du cisaillement (d'après Harr, 1977)

La figure 4.4.a nous montre que le volume varie de manière continue au cours du cisaillement. Le sable lâche, généralement, diminue de volume. Le sable dense, lui, présente une augmentation remarquable et permanente. Cette augmentation de volume est appelée *dilatance*. Lorsque les déformations deviennent importantes, les deux types d'échantillons «dense» et «lâche», sous une même contrainte normale, atteignent le même indice des vides *critique*. Si l'échantillon est, initialement, à son état d'indice des vides critique, son volume ne varie au cours du cisaillement, toutefois à de grandes déformations, le changement net de volume est nul.

La résistance développée à l'état critique est appelée résistance résiduelle. L'enveloppe des cercles de Mohr pour cet état permet de déterminer les caractéristiques de résistance résiduelle. La valeur de l'angle de frottement résiduel

ϕ_{cv} correspondant à cet état (pente de l'enveloppe résiduelle) peut être admise égale à l'angle de talus naturel du matériau (Harr, 1977).

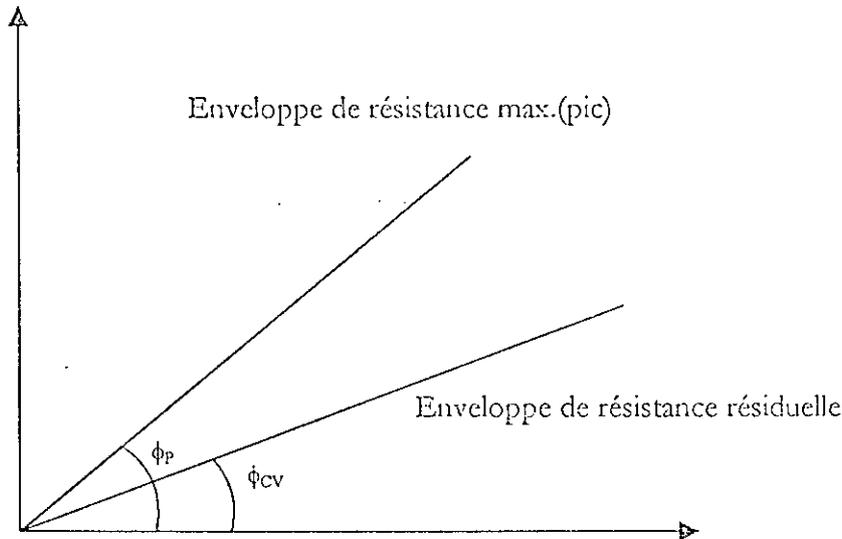


Fig. 4.5 Enveloppes de résistance maximale et résiduelle(d'après Harr, 1977)

Lors des grands déplacements, avec la variation d'imbrications des particules, les sables qui étaient initialement lâches et denses, toutefois soumis à la même contrainte normale, se retrouvent avec la même densité et la même résistance dans des conditions résiduelles.

D'après Comforth, la densité unique d'un matériau formé de particules, pour laquelle les résistances de pic et résiduelle coïncident et pour laquelle il n'y a pas dilatance, est appelée *densité minimum intergranulaire*. Elle est considérée par Bjerrum, Kringstad et Kummeneje (1961) comme une propriété fondamentale du matériau. Comforth lors de ses études sur les sables considère que l'angle de frottement de pic ϕ_p peut être calculé à partir de l'angle de frottement résiduel ϕ_{cv} par une relation de la forme:

$$\phi_p = \phi_D + \phi_{cv} \quad , \text{ avec } \phi_{cv} \text{ admis comme étant égale à l'angle de talus naturel.}$$

La figure 4.6 permet d'avoir l'angle ϕ_D à partir de la densité relative du sable, ϕ_D est la composante de l'angle de frottement de peak qui correspond à la densité du sable. Elle peut être tirée pour un état de déformation plane ainsi qu'un état de déformation triaxial.

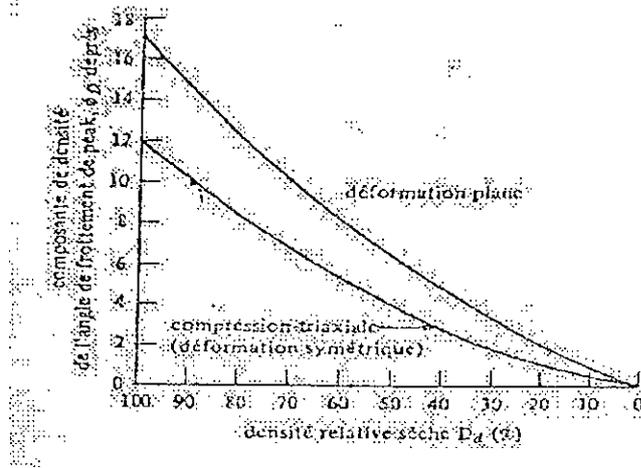


Fig. 4.6 Relation entre l'angle ϕ_D et la densité relative.
(d'après American Society for Testing and Materials, 1973)

D'autres relations approximatives ont été proposées également entre l'angle de frottement de pic et la densité relative du matériau granulaire. La figure 4.7 donne l'allure de la courbe qui lie la densité relative à l'angle de frottement de pic. Ce sont des valeurs qui peuvent être utilisées pour des profondeurs inférieures à 12m (Harr 1977). Meyerhoff (1956) a également donné une expression pour un sable. Il exprime l'angle de frottement de pic en fonction de la densité relative.

$$\phi_p = 25 + 0.15 D_r \quad \text{lorsque le sable contient plus de 5\% d'éléments fins.}$$

$$\text{Et } \phi_p = 30 + 0.15 D_r \quad \text{lorsque le sable contient moins de 5\% d'éléments fins.}$$

Les expressions de Meyerhoff font un lien direct entre la densité relative et angle de frottement de peak d'un sable. Comme la densité relative D_r s'exprime en termes d'indice des vides ou en fonction de la porosité du milieu, on peut, moyennant cette expression ou la courbe de la figure 4.7, avoir l'angle de frottement de pic.

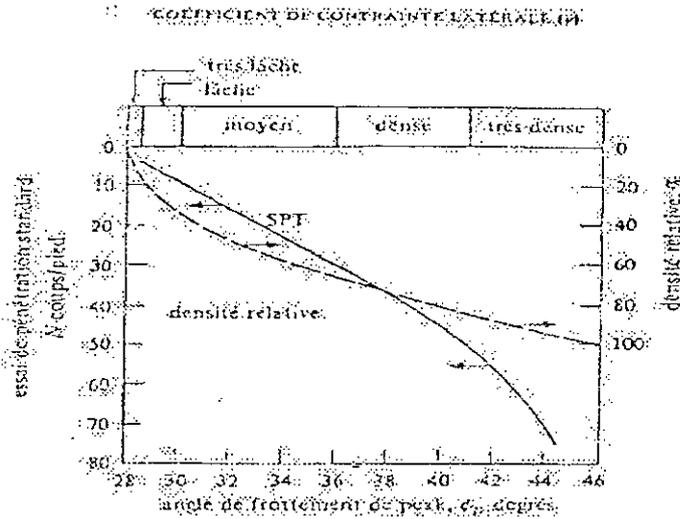


Fig. 4.7 Relations entre la densité relative et l'angle de frottement de peak. (d'après Peck, Hanson et Thornburn, 1953)

IV- 4 ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE ϕ ET POROSITE D'UN MILIEU

GRANULAIRE :

Parmi les paramètres de résistance que fournit l'essai de cisaillement direct il y a l'angle de frottement interne qui dépend essentiellement de la porosité. La figure 4.8 montre une relation empirique, obtenue d'un nombre important d'essais de cisaillement directs sur sables. Elle constitue une relation entre l'angle de frottement interne et la porosité initiale. Elle est tracée pour des sables propres qui ne contiennent pas de particules inférieures à 0.02mm de diamètre. L'angle de frottement diminue rapidement lorsque le pourcentage de silt ou de sable très fin augmente. La figure 4.8a montre les valeurs de l'angle de frottement mesurées pour des sables moyennement denses ($n=30$ à 40%) en fonction du pourcentage de la fraction inférieure à 0.1mm. Pour des fractions de diamètre 0.1mm inférieures à

Les courbes effort - déformation de l'essai de cisaillement direct sur sable sec présentent un pic de résistance au cisaillement puis décroissent légèrement pour conserver ensuite une valeur sensiblement constante. Le maximum est atteint pour une faible valeur de la déformation, et il est suivi d'une forte variation de volume. La valeur qui correspond au maximum de la courbe effort - déformation est utilisée pour déterminer la droite de Coulomb. Pour des niveaux usuels des contraintes la loi de Coulomb $\tau = \sigma \tan \varphi$ est vérifiée avec une assez grande exactitude ; la cohésion est significativement proche de zéro.

Sanglerat (1981) rapporte également que les résultats de l'essai sont identiques que l'essai soit exécuté à sec ou en présence d'eau. L'eau étant un excellent lubrifiant pour le contact entre grains de sable (silice sur silice). Quelques traces d'eau suffisent pour assurer la lubrification. Un sable sec n'est jamais chimiquement sec, c'est pour cette raison que l'angle de frottement est le même que ce soit pour un sable sec ou un sable humide.

L'angle de frottement interne ϕ dépend essentiellement de la compacité du matériau, de la forme des grains ainsi que de leur grosseur et granulométrie. L'ordre de grandeur de ces facteurs nous est donné par le tableau qui suit, présenté lors d'un congrès international en 1948 à Rotterdam.

Tableau 4.2 distribution de l'angle de frottement d'un milieu granulaire

$\phi = 36^\circ + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$			
Compacité	ϕ_1	Lâche	-6°
		Moyenne	0
		Serrée	$+6^\circ$
Forme et rugosité des grains	ϕ_2	Aigu	$+1^\circ$
		Subanguleux	0
		Arrondi	-3°
		Très rond	-5°
Grosueur des grains	ϕ_3	Sable	0
		Gravier fin	$+1^\circ$
		Gros gravier	$+2^\circ$
Granulométrie	ϕ_4	Uniforme	-3°
		Moyenne	0
		Étalée	$+3^\circ$

Landgren (1960) a proposé, pour les sables et graviers, une expression qui est identique celle du tableau 4.2 :

$$\phi = 36^\circ + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$$

La valeur de 36° représente l'angle de frottement interne d'un sable «moyen» et les autres termes représentent une correction en fonction du milieu granulaire en question. On remarque sur le tableau que la compacité influe considérablement, plus que les autres facteurs tels la forme et la grosseur des grains.

Sanglerat (1981) a fait mention du sable de Fontainebleau dont l'angle de frottement interne ϕ varie entre 20° et 45° . Bjerrum a donné des résultats pour un sable fin à granulométrie assez uniforme, il a exprimé l'angle de frottement interne d'un milieu granulaire (sable) ϕ en fonction de la porosité n sous forme d'une courbe, (Costet et Sanglerat, 1981). L'allure de cette courbe est donnée par la figure 4.9 qui montre une diminution non linéaire de l'angle de frottement interne ϕ entre 42° jusqu'à environ 21° , pour des porosités allant de 38% jusqu'à pratiquement 46%

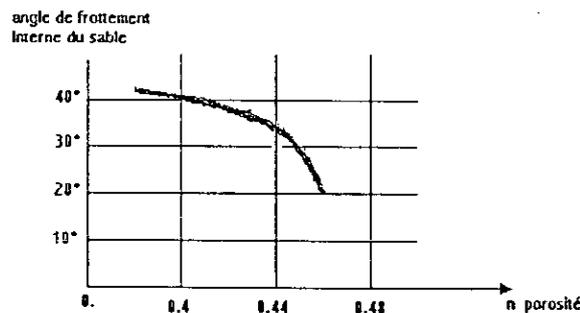


Fig. 4.9 Variation de l'angle de frottement interne d'un sable fin en fonction de la porosité (d'après Bjerrum, 1974)

D'autres formules empiriques ont été proposées également pour représenter la variation de l'angle de frottement interne et la porosité, elles font intervenir généralement l'indice des vides du milieu granulaire. La formule de Chen (1948), par exemple, donne l'angle de frottement interne ϕ en fonction d'autres angles ϕ_1 et ϕ_2 et de $\text{Log}(e)$; $\phi = \phi_1 + \phi_2 \text{Log}(e)$. Avec ϕ_2 de l'ordre de 60° et e l'indice des vides du matériau en question.

Giraudet a lui aussi proposé une formule qui exprime la tangente de l'angle de frottement en fonction de l'indice des vides ; $\text{Tan } \phi = 0.25 + 0.3/e$.

Pour prendre en considération l'effet de la densité, Winter et Korn (1960) ont suggéré la formule $\text{Tan } \phi = C / (e - e_{\min})$; e : indice des vides, C et e_{\min} sont des constantes propres au matériau. Kezdi (1966) a, de son côté, présenté une vérification théorique de l'expression précédente, il a eu comme résultat

$$\text{Tan } \Phi = C \cdot \frac{\sqrt{(e - e_{\min})}}{\exp(e - e_{\min} / k - 1)}$$

Avec k : constante propre au matériau.

Caquot (1939) a proposé une formule plus simple, $\text{Tan } \phi = K/e$, elle donne une bonne approximation de l'angle frottement interne; le coefficient K dépend de la forme des grains, de leur rugosité et de l'uniformité de la granulométrie. Caquot et Kerisel ont indiqué que le coefficient K pouvait varier entre 0.4 et 0.6. Des sables à grains assez rugueux et assez uniformes s'apparentent généralement à un coefficient $K=0.55$. un tableau a été dressé en utilisant la valeur $K=0.55$ pour ce type de sable.

Tableau 4.3 Relation entre porosité et angle de frottement interne d'un sable

e	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
n	0.5	0.47	0.44	0.41	0.38	0.33
ϕ	29°	32°	35°	38°	43°	48°

Il est remarquable que la valeur de ϕ peut varier approximativement entre 29° et 48° et l'on constate également des valeurs fréquemment comprises entre 30° et 40°. Les recommandations du service de Génie américain vont également dans le sens des valeurs déjà citées. Pour le cas des sables, il est recommandé, en général, d'estimer la valeur de l'angle de frottement interne plutôt que d'exécuter un nombre limité d'essais sur un grand nombre d'échantillons. le service de génie américain recommande, donc, d'utiliser la valeur de $\phi=30^\circ$ lorsqu'il s'agit d'un sable à compacité faible, et si le sable était de compacité forte $\phi=35^\circ$. (Costet et Sanglerat, 1981)

IV-5 COEFFICIENT DE POUSSÉE DES TERRES ET ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE D'UN MATÉRIAU GRANULAIRE

Le coefficient de poussée des terres au repos peut être approximé dans le cas des sables, par l'expression de Jaky qui est fonction de l'angle de frottement du matériau ; $K_0 = 1 - \sin \phi$

ϕ : angle de frottement interne du matériau.

Cette approximation est valable lorsque le milieu est au repos. Seulement lorsqu'il est question d'un milieu granulaire sous chargement, il se développe, notamment dans la région du chargement, un état actif des pressions.

Reimbert (1974) a exécuté plusieurs expériences sur des milieux granulaires de propriétés mécaniques différentes qui ont conduit à la mise en évidence des différences entre les états de Rankine (actif et passif) et les phénomènes réels observés. Pour des matériaux granulaires de propriétés mécaniques nettement différentes, il a trouvé des valeurs, pour le coefficient de poussée des terres, qui

étaient comprises dans un intervalle entre :
$$\left(\frac{45 - \beta/2}{45 + \beta/2} \right)^2 \leq K \leq \left(\frac{45 + \beta/2}{45 - \beta/2} \right)^2$$

La valeur inférieure correspond à l'état actif dans le matériau et la valeur supérieure correspond à l'état passif (Harr, 1977).

β : étant l'angle du talus naturel du matériau (angle de frottement au repos).

Il est à remarquer sur la courbe de la figure 4.6, qui donne la relation entre densité relative et l'angle ϕ_D , que lorsque le sable est lâche, c'est à dire pour une densité relative D_r inférieure à 35%, les valeurs de ϕ_D sont relativement petites, de ce fait on peut confondre, d'après la relation de Comforth $\phi_p = \phi_D + \phi_{cv}$, l'angle de frottement résiduel ϕ_{cv} avec l'angle de frottement de pic ϕ_p . Autrement dit pour les sables lâches l'angle de frottement de pic se confond avec l'angle de talus naturel

(puisque l'angle de frottement résiduel est admis égal à l'angle de talus naturel) ; $\phi_p \cong \phi_{cv} = \beta$. En confondant donc l'angle de frottement de pic avec l'angle de talus naturel, pour les sables lâches, il est possible de calculer de manière directe le coefficient de pression des terres ν à l'aide de la formule de Reimbert

$$\nu = \left(\frac{45 - \beta/2}{45 + \beta/2} \right)^2 . \text{ C'est l'état actif qui est pris en considération, puisque c'est celui-ci}$$

qui se développe dans la région du chargement. Mais pour des matériaux moyennement denses à très denses on ne peut pas faire l'approximation de l'angle de frottement de pic par l'angle de talus naturel, car la composante ϕ_D de l'angle de pic correspondant à la densité du sable est, dans ce cas, importante. Il faut alors, pour pouvoir exprimer le coefficient de pression des terres ν , exprimer l'angle de frottement résiduel en utilisant la courbe de la figure 4.6 en déduisant de l'angle de pic ϕ_p sa composante ϕ_D pour la densité du sable en question. Il est permis de dire que le coefficient de poussée des terres contient l'essentiel de l'information sur le milieu granulaire en question, puisqu'en connaissant l'état du milieu en terme de porosité, on peut, en utilisant l'expression de la densité relative D_r , déduire l'angle de frottement de pic ϕ_p ainsi que sa composante ϕ_D et ainsi passer à l'expression de Reimbert.

Pour un sable moyennement dense par exemple, l'angle de frottement de pic est égal à 36° selon la courbe de la figure 4.7 et la densité relative correspondante est de 65%. Pour déduire l'angle de frottement résiduel (admis égal à l'angle de talus naturel), on utilise la courbe de la figure 4.6 ainsi que l'expression de Comforth. On trouve $\phi_D = 9^\circ$ d'où $\phi_{cv} = \phi_p - \phi_D = 27^\circ$. Le coefficient de poussée des terres K_0 pour un matériau granulaire dense est inférieur au coefficient de poussée des terres pour un milieu granulaire lâche. Les figures suivantes montrent, également, la relation entre le coefficient de Reimbert et l'angle de frottement interne du milieu granulaire.

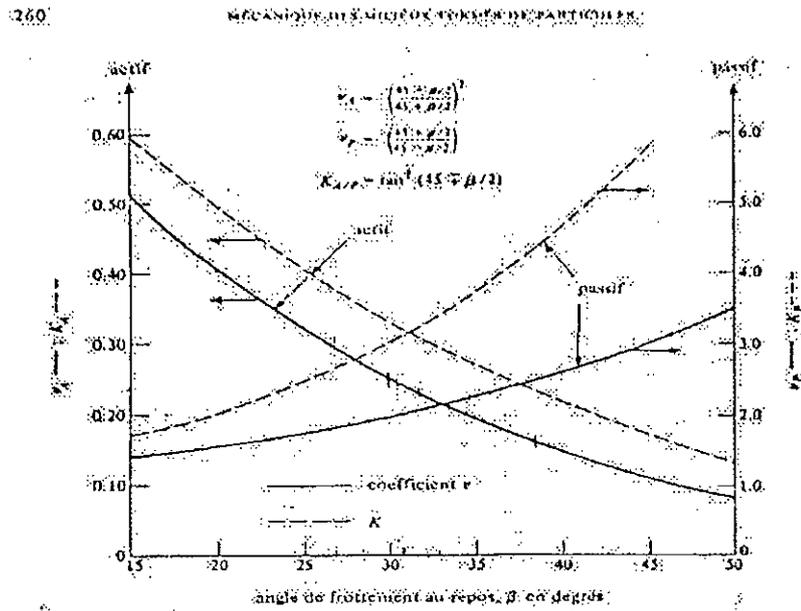


Fig. 8.16.

Fig. 4.10 Coefficient de Reimbert et angle de frottement interne

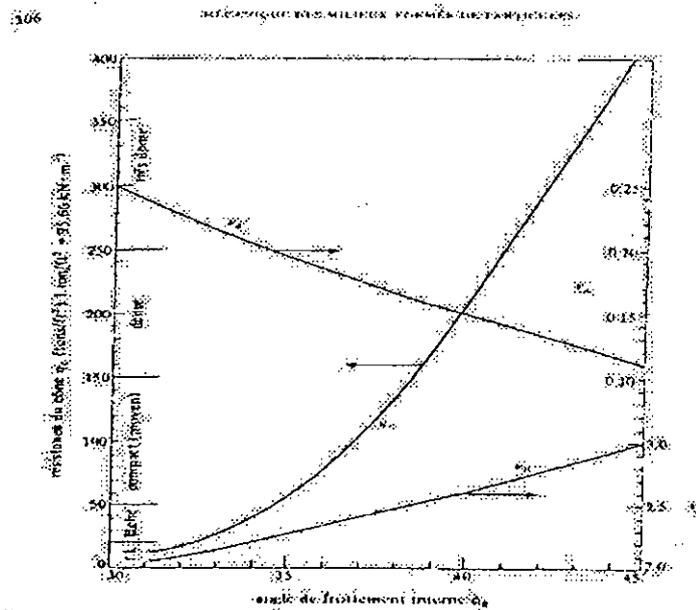


Fig. 9.21. Relations entre la résistance au cisail statique τ_c et l'angle de frottement interne ϕ_0 (modification de Meyerhof, 1974).

Fig. 4.11 Coefficient de Reimbert et angle de frottement interne (d'après Meyerhof, 1974)

IV-6 CONCLUSION :

Des rapports, entre la densité relative d'un milieu granulaire et le coefficient de poussée des terres, ont été mis en exergue. Le coefficient de Reimbert est spécifique puisque il diffère du coefficient classique de poussée des terres. Utilisé dans les milieux granulaire, il rend compte des caractéristiques du milieu en question. C'est un paramètre qui contient l'essentiel de l'information sur le milieu granulaire. Il est fonction de l'angle de frottement interne, lui même lié à la porosité du milieu granulaire.

Chapitre V

COMPARAISON DES RESULTATS ET INTERPRETATIONS

V-1 ESSAIS SUR MODELES :

Avant de passer aux différents résultats obtenus par la théorie probabiliste de diffusion des contraintes dans un milieu granulaire, il est nécessaire de reprendre un certain nombre de résultats expérimentaux obtenus sur différents types de sol et sous différents chargements.

V-1-1 WATERWAYS EXPERIMENT STATION – SABLE :

La répartition des contraintes dans un sable a fait l'objet de plusieurs essais depuis les années 50. Parmi ceux-ci les essais effectués par l'U.S. Corps of Engineers. Les opérations ont porté sur du sable séché à l'air libre de poids spécifique 16.9 KN/m^3 (minimum 14.8 KN/m^3 , maximum 17.6 KN/m^3) et de densité relative 83% avec un indice des vides à 0.53. Des cellules de pression et des capteurs de déflexion ont été placés à plusieurs distances latérales et à une profondeur de 1.5m. Les charges furent appliquées à l'aide de plaque circulaire flexible. La valeur de la pression qui nous intéresse est de 414 KN/m^2 et la plaque circulaire de surface 3226 cm^2 . Les résultats obtenus sont indiqués sur le tableau 5.1.

Tableau 5.1 Résultats des essais sur modèle selon Waterways Experiment Station (1954)

Profondeur(m)	Pression (MPa)
0.3	0.359
	0.354
	0.339
	moy. = 0.351
0.6.	0.216
	0.229
	0.196
	moy. = 0.214
0.9	0.103
	0.101
	0.097
	moy. = 0.100
1.2	0.058
	0.053
	0.046
	moy. = 0.052
1.5	0.034

V-1-2 ESSAIS KOEGLER ET SCHEIDIG :

L'académie des mines de Freiburg (Allemagne) a effectué des essais sur des sables dont l'angle de frottement interne ϕ est égal à 31.5° , le chargement a été assuré par l'intermédiaire de plaques rigides. Les résultats des essais sont donnés aux tableaux 5.2 ; 5.3 ; 5.4. Les contraintes au contact de la plaque rigide et du milieu granulaire dépendent du diamètre de la plaque en question. Pour une plaque de diamètre égal à 33.9 cm la pression de contact mesurée au centre de la plaque était égale à 2,5 fois

la pression appliquée p ($p=P/A$). Cette proportion (2,5) est due au fait que la plaque est rigide. P étant la charge appliquée, A : la surface de la plaque.

Les résultats des expériences de Freiburg sont illustrés sur les tableaux 5.2, 5.3 et 5.4. pour différents rayons de la charge. Un profil parabolique de la pression P/A se développe au niveau du contact charge milieu granulaire.

Tableau 5.2 Contraintes verticales sous l'axe du chargement, $r=0.1695$ m, $Q=2.5.p$

(Koegler et Scheidig, 1938)

Profondeur (m)	σ_z/p
0	2.5
0.2	1.28
0.3	0.76
0.4	0.41
0.5	0.3
0.6	0.21

Tableau 5.3 Contraintes verticales sous l'axe du chargement, $r = 0.225$ m, $Q=2.3.p$

(Koegler et Scheidig, 1938)

Profondeur (m)	σ_z/p
0	2.3
0.1	2.2
0.2	1.
0.3	0.8
0.4	0.64
0.5	0.48
0.6	0.31

Tableau 5.4 Contraintes verticales sous l'axe du chargement, $r = 0.315$ m, $Q=1.9.p$

(Kogler et Scheidig, 1938)

Profondeur (m)	σ_z/p
0	1.9
0.25	1.5
0.34	1.
0.4	0.9
0.44	0.8
0.55	0.6
0.68	0.4
0.80	0.3
0.93	0.2

V-1-3 WATERWAYS EXPERIMENT STATION – LIMON ARGILEUX :

Un programme d'essais semblable à celui sur les sables a été effectué sur du limon argileux ($C=90$ kN/m², $\phi=25^\circ$). Une charge uniforme sur une surface circulaire de section 6452 cm² fut appliquée. Les différentes pressions utilisées sont de 103.5 KN/m²; 207 KN/m²; 276 KN/m² et 414 KN/m². Le tableau 5.5 donne les résultats des essais.

Tableau 5.5 Pourcentage des contraintes verticales mesurées sous l'axe d'une charge circulaire (Waterways Experiment Station, 1947-1948)

Profondeur (m)	Pression de contact appliquée (MPa)	Pourcentage de la contrainte mesurée (%)
0.3	0.1035	79
	0.207	89
	0.310	94
	0.414	95
0.6	0.1035	41
	0.207	46
	0.310	50
	0.414	51
0.9	0.1035	26
	0.207	30
	0.310	32
	0.414	32
1.2	0.1035	14
	0.207	15
	0.310	18
	0.414	19
1.5	0.1035	13
	0.207	11
	0.310	13
	0.414	14

V-2-1 COURBES ISOVALEURS DES CONTRAINTES VERTICALES DANS UN MILIEU GRANULAIRE :

Nous avons utilisé un modèle d'éléments finis en axisymétrie en se basant sur une approche probabiliste de diffusion des contraintes verticales dans un milieu granulaire (voir annexe I). Les conditions aux limites et de chargement sont schématisées sur la figure 5.1. Le chargement est uniforme sur une surface circulaire. La surface libre du milieu qui n'est pas soumise à un chargement suppose une contrainte verticale nulle ($\bar{S} = 0$). La limite inférieure du modèle est prise suffisamment éloignée du chargement pour supposer une atténuation totale des contraintes verticales ($\bar{S} = 0$). Sur les limites latérales, et vue la forme en cloche de la courbe des contraintes verticales, nous avons supposé une pente nulle aux points se trouvant sur l'axe vertical du chargement ($\frac{\partial \bar{S}}{\partial r} = 0$). Le milieu est caractérisé par le coefficient de poussée des terres de Reimbert ν .

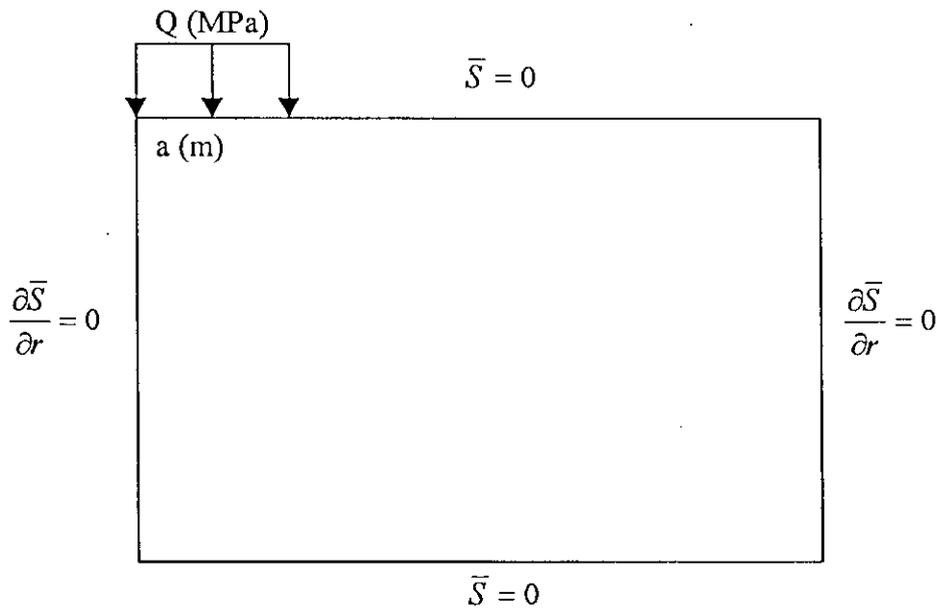


Fig. 5.1 Conditions aux limites et chargement du milieu semi-infini.

La figure 5.2 montre la distribution des contraintes verticales d'égales valeurs, dans un milieu granulaire, sous un chargement d'intensité uniforme sur une surface circulaire. Le milieu granulaire est un sable de coefficient de poussée de Reimbert $\nu=0.198$ déduit en utilisant l'angle de frottement interne du matériau. Les lobes de contraintes apparaissent clairement sous la charge. La diffusion des contraintes est visible par l'étalement des lobes sous la zone du chargement. Le même modèle est utilisé pour un autre milieu granulaire de coefficient de Reimbert $\nu=0.33$. L'étalement des lobes de contrainte est de la même forme que précédemment. Mais les contraintes verticales ne s'étalent pas sur la même zone que pour un sable de coefficient de Reimbert $\nu=0.198$. on remarque que les contraintes à 0.10 MPA dans le cas du sable $\nu =0.33$ sont situées sur un lobe à une distance moins profonde que pour le sable de $\nu=0.198$. Ceci montre que la zone d'influence du chargement est plus étalée dans le sable de coefficient $\nu=0.198$ que dans le sable à coefficient $\nu=0.33$.

Selon Harr(1977) le milieu granulaire de coefficient de Reimbert $\nu=0.33$ est proche d'un milieu élastique linéaire. La figure 5.4 représente les contraintes d'égales valeurs dans un milieu granulaire en comparaison avec des contraintes verticales obtenues par la théorie de l'élasticité. On remarque que pour un coefficient de Reimbert de 0.33 les valeurs des contraintes sont très proches des contraintes élastiques comme l'a confirmé Harr (1977). Les bulbes de contraintes sont réguliers par rapport à la charge circulaire en surface. Les contraintes s'amenuisent pour être négligeables au bout d'une certaine profondeur (2m environ)

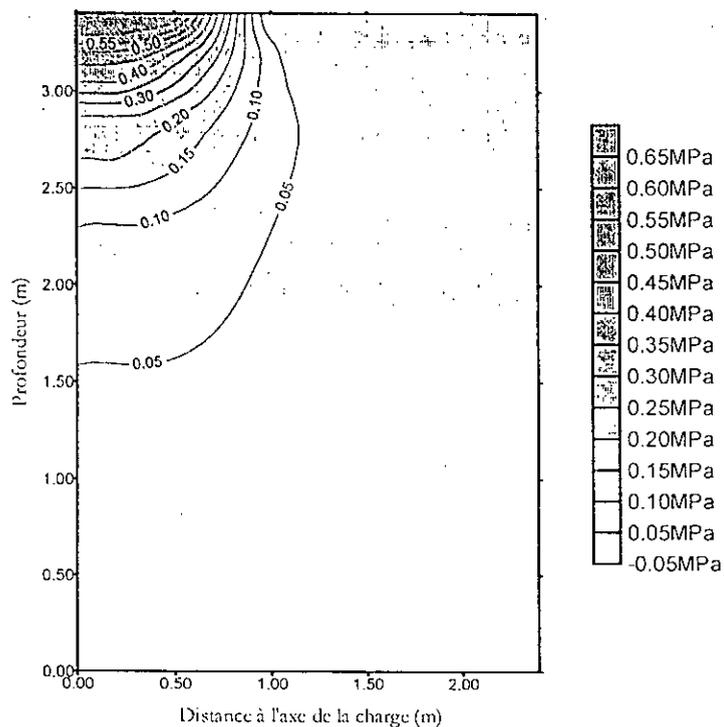


Fig. 5.2 Courbes d'égales valeurs de contraintes verticales dans un milieu granulaire $\nu=0.198$. $Q=0.65\text{MPa}$; $a=0.5\text{m}$

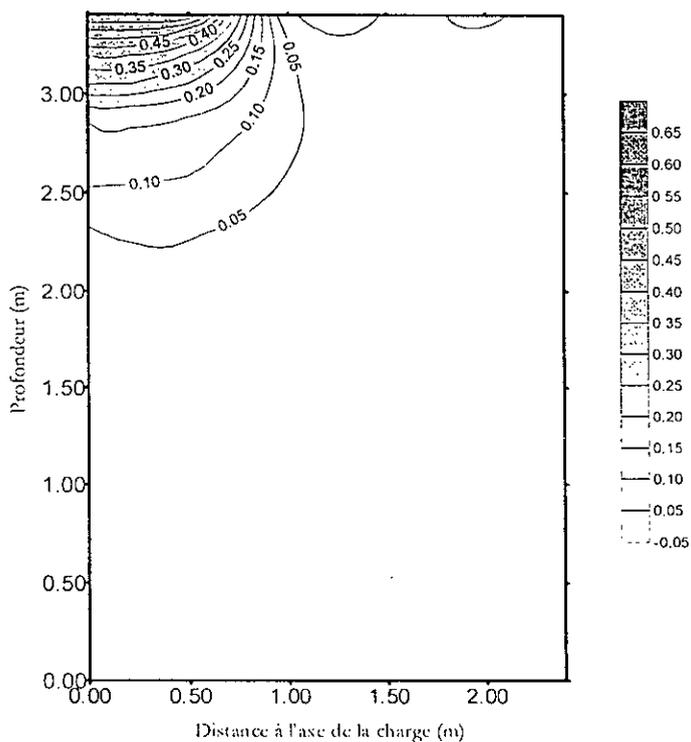


Fig. 5.3 courbes d'égales valeurs de contraintes verticales dans un milieu granulaire $\nu=0.33$. $Q=0.65\text{MPa}$; $a=0.5\text{m}$

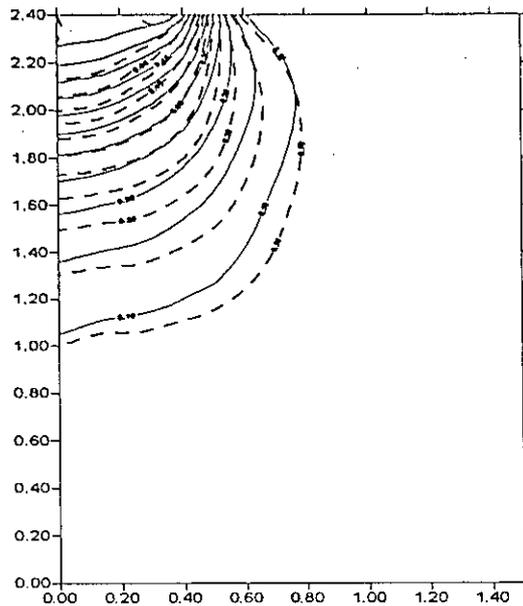


Fig. 5.4 courbes isovaleurs des contraintes verticales
 ———— élasticité linéaire
 - - - - - théorie probabiliste $\nu=0.33$
 $Q=0.65\text{MPa}$, $a=0.5\text{m}$

V-2-2 PROFIL DES CONTRAINTES VERTICALES :

Sous un chargement circulaire en surface de $Q=0.65\text{ MPa}$, sur un milieu granulaire donné (à coefficient de Reimbert $\nu=0.33$), sont représentées les contraintes verticales à diverses profondeurs (Fig. 5.5). Leur profil nous indique que ces contraintes se diffusent latéralement au fur et à mesure que l'on avance en profondeur. Les contraintes verticales sont concentrées dans la région située sous la charge circulaire. En se déplaçant en profondeur il y a un net élargissement de présence des contraintes verticales, elles s'étalent plus avec des valeurs moins importantes en intensité jusqu'à ce qu'elles s'amenuisent complètement au bout d'une certaine profondeur (2,5m). Cet étalement montre le fait de la diffusion en largeur des contraintes, une diffusion dont le schéma final est en forme de cloche (Litviniszyn, 1964, 1984).

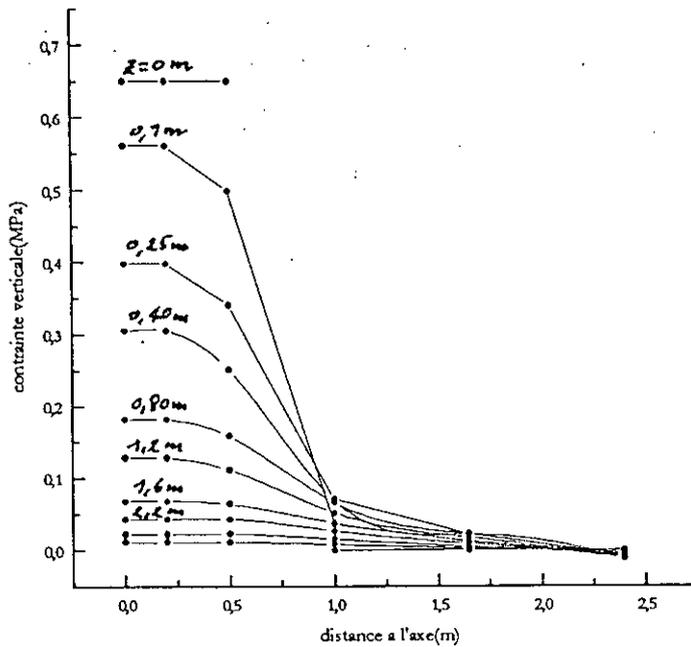


Fig. 5.5 Profil des contraintes verticales à diverses profondeurs du chargement $Q=0.65\text{MPa}$; $a=0.5\text{m}$; $\nu=0.33$

V-2-3 CONTRAINTES VERTICALES SOUS L'AXE D'UN CHARGEMENT UNIFORME SUR UNE PLAQUE CIRCULAIRE :

Une argile d'un angle de frottement ϕ est soumise à un chargement circulaire (voir essais de la Waterways Experiment Station V-1-3). Les résultats expérimentaux sont mentionnés dans la figure 5.6, il s'agit des contraintes verticales sous l'axe du chargement. Ces résultats sont comparés à des résultats obtenus par la théorie de l'élasticité, pour des conditions similaires de chargement. Notons que la distribution des contraintes verticales dans un milieu continu homogène, selon la théorie de l'élasticité, ne dépend pas de la nature du milieu. Nous avons également mentionné sur la figure 5.6 les contraintes verticales obtenues en utilisant la théorie probabiliste des milieux granulaires. Le sol est caractérisé, dans ce cas, par le coefficient de poussée des terres. Deux coefficients relativement différents sont utilisés, le premier est déduit de la formule de Reimbert pour un état actif de poussée, et le second prend en considération l'état au repos du milieu granulaire en utilisant la formule de Jaky $K_0=1-\sin(\phi)$. Le coefficient de Reimbert est différent du coefficient de poussée active classique utilisé en mécanique des sols. On remarque

que les contraintes obtenues par l'élasticité linéaire sont relativement inférieures aux contraintes expérimentales. De même pour les contraintes obtenues en utilisant le coefficient de Jaky (au repos) qui sont, pratiquement, identiques à celles de l'élasticité. Tandis que les contraintes verticales calculées en utilisant le coefficient de Reimbert (actif) sont très proches des valeurs expérimentales si ce n'est identiques dans ce cas de figure. Ceci montre que la théorie probabiliste dans les milieux granulaires donne une bonne indication pour les contraintes verticales. Le coefficient de Reimbert prend en considération l'effet actif de la poussée surtout au voisinage du chargement. Le coefficient de Jaky, utilisé dans le cadre de la théorie probabiliste, est loin d'être une bonne approximation, car il ne prend en considération que l'état au repos du milieu. Sous l'action d'un chargement, l'état des contraintes s'écarte de l'état de repos.

On remarque clairement que la théorie élastique sous-estime les contraintes, ce qui pourrait constituer un problème pour le dimensionnement des ouvrages dans les milieux granulaires. La différence entre les résultats expérimentaux et la théorie élastique est la plus importante à une profondeur de 0.6m, elle se fait moins importante à partir de 1.2m de profondeur. Elle reste tout de même importante à une profondeur de 0.9m, Ce qui nous laisse dire que, la théorie probabiliste rend compte de la nature granulaire du milieu et que, l'assimilation de celui-ci à un milieu continu élastique linéaire constitue une approximation relativement adéquate que pour les milieux de faible porosité. Poulos (1971) l'a souligné lors d'une étude qu'il a effectuée sur le comportement des sols sous chargement triaxial. Il a mentionné les écarts qui existent entre les prévisions de la théorie élastique et les résultats obtenus sur sols réels.

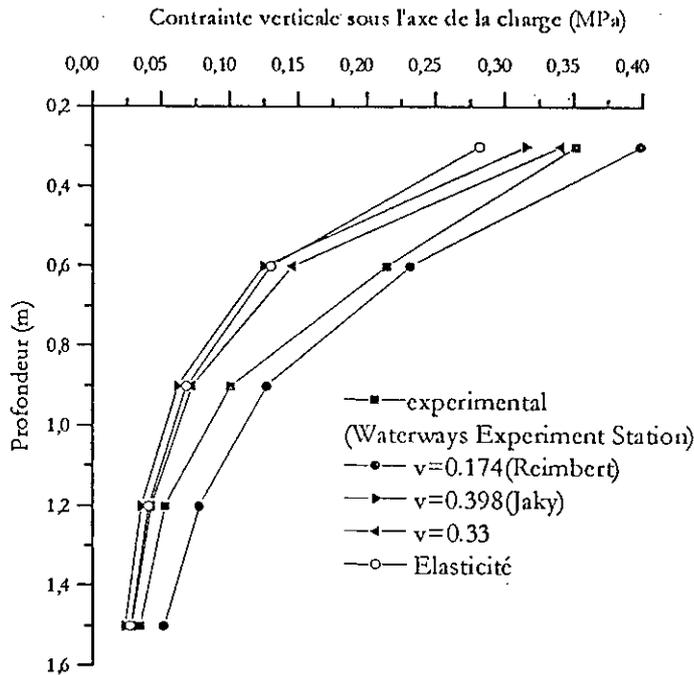


Fig. 5.6 Profil des contraintes verticales sous l'axe d'une charge uniforme sur plaque circulaire. comparaison entre la théorie probabiliste et l'expérimental. $Q=0.414\text{MPa}$; $a=0.32\text{m}$; $\phi=37^\circ$

V-2-4 POROSITE FONCTION DU COEFFICIENT DE POUSSEE :

Sur les figures 5.7, 5.8 et 5.9 sont représentées les contraintes verticales sous l'axe d'une charge circulaire en utilisant la théorie de l'élasticité linéaire ainsi que différents cas de figures de contraintes verticales obtenues par la théorie probabiliste de milieux granulaires et ceci pour différentes valeurs du coefficient de poussée de Reimbert ν . La variation du coefficient de Reimbert est liée à l'angle de frottement interne ϕ , et l'angle de frottement interne est lui-même lié à la porosité selon les résultats obtenus par Kezdi (1966) sur un sable propre. La courbe angle de frottement – porosité est approximativement une droite. D'après cette relation lorsque la porosité augmente l'angle de frottement interne diminue, ce qui amène à un coefficient de Reimbert ν qui augmente avec la porosité n . Et la contrainte verticale, de ce fait, diminue (Kezdi, 1966).

Le fait remarquable sur les figures 5.7, 5.8 et 5.9 est que les contraintes verticales obtenues par la théorie probabiliste sont assez éloignées des contraintes élastiques. La variation du coefficient de Reimbert ν n'affecte pas de manière importante cet éloignement. On remarque que plus le milieu est poreux moindre sont les différences entre les contraintes. Pour des porosités allant de 20 à 35%, les contraintes évoluent en moyenne de 18%. Tandis que pour des porosités allant de 35 à 43% les différences sont moins importantes de l'ordre de 13%. Il reste tout de même que le faisceau de ces contraintes est éloigné des contraintes élastiques. Pour des porosités entre 45 et 55% les différences sont minimales avec un net rapprochement des contraintes élastiques à certaines profondeurs (au-delà de 1.2m). Pour un coefficient de Reimbert ν de 0.33 on retrouve les résultats prédits par Harr(1977) et qui sont très proches de ceux de l'élasticité (Figure 5.10).

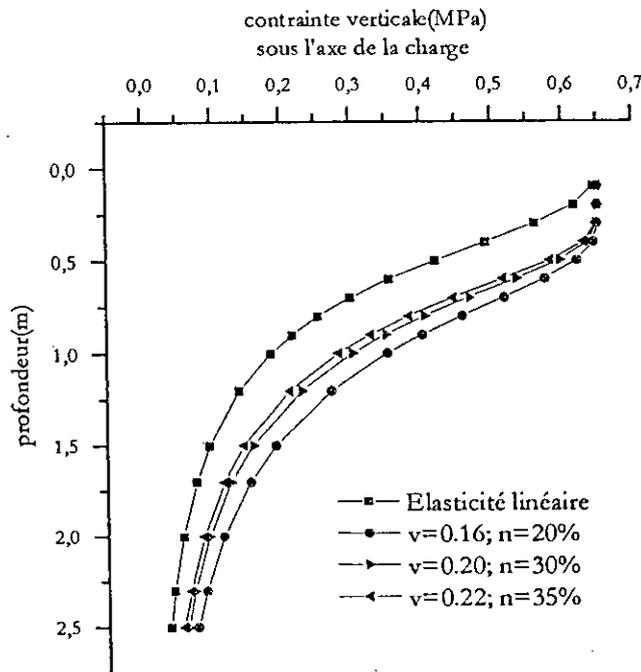


Fig. 5.7 Profil des contraintes verticales sous l'axe d'une charge uniforme sur plaque circulaire pour différents coefficients de poussée ν et différentes porosités. $Q=0.65\text{MPa}$; $a=0.5\text{m}$. Sable Propre.

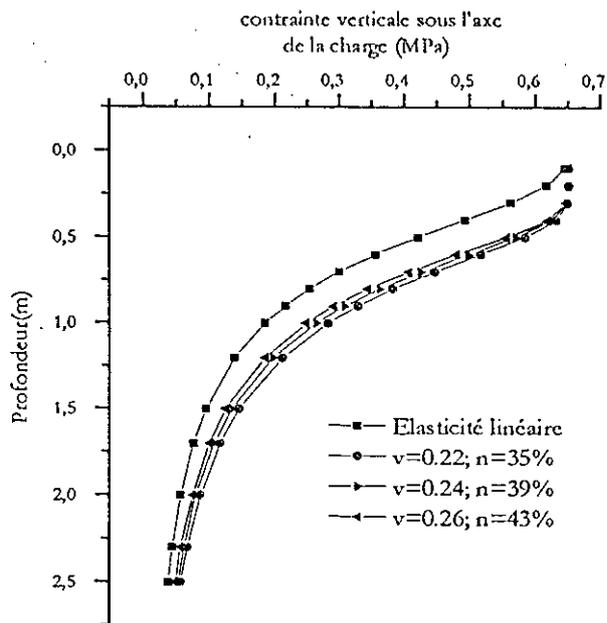


Fig. 5.8 Profil des contraintes verticales sous l'axe d'une charge uniforme sur plaque circulaire pour différents coefficients de poussée ν et différentes porosités. $Q=0.65\text{MPa}$; $a=0.5\text{m}$. Sable Propre.

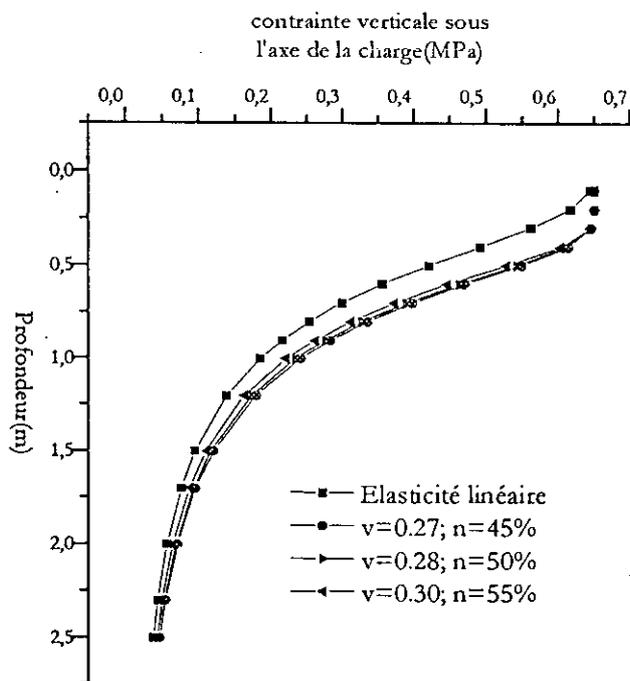


Fig. 5.9 Profil des contraintes verticales sous l'axe d'une charge uniforme sur plaque circulaire pour différents coefficients de poussée ν et différentes porosités. $Q=0.65\text{MPa}$; $a=0.5\text{m}$. Sable Propre.

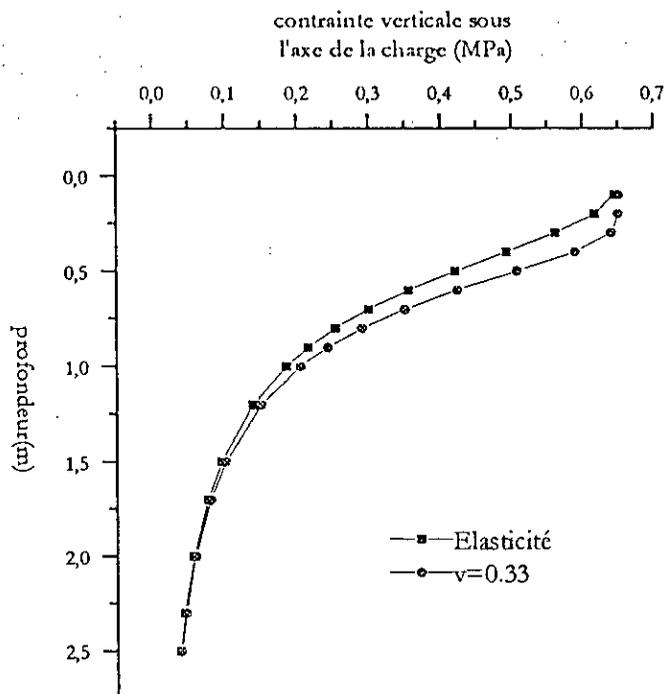


Fig. 5.10 Comparaison des contraintes verticales obtenues par la théorie probabiliste($\nu=0.33$) avec celles obtenues par la théorie élastique $Q=0.65\text{MPa}$; $a=0.5\text{m}$

V-2-5 ESSAIS DE FREIBURG :

Les essais de Freiburg sont exécutés sur du sable et leurs résultats sont indiqués dans les tableaux 5.2, 5.3, 5.4. Les figures 5.11, 5.12 et 5.13 montrent, en plus des contraintes verticales expérimentales, les contraintes verticales que prévoit la théorie élastique ainsi que les contraintes prévues par la théorie probabiliste des milieux granulaires. Trois cas de chargements circulaires sont utilisés, le premier est d'une intensité de $2.5p$ (MPa) avec un rayon $a=0.1695\text{m}$; le second à $1.9p$ (MPa), $a=0.315\text{m}$ et le troisième $Q=2.3p$ MPa, $a = 0.225\text{m}$; $p=P/A$.

Cas 1) figure 5.11 :

La première remarque que l'on puisse faire concerne l'écart important qui existe entre les résultats expérimentaux et les contraintes prévues par la théorie de l'élasticité linéaire. Le maximum de cette différence est atteint à 0.2m de

profondeur, atteignant environ 38%. Tandis que les contraintes prévues par la théorie probabiliste sont nettement proche de l'expérience lorsqu'on utilise le coefficient de Reimbert ν actif. L'utilisation du coefficient de poussée active classique K_a laisse les contraintes assez éloignées de l'expérimental. La plus grande différence est obtenue à une profondeur de 0.2m, elle est de l'ordre de 25%.

Cas 2) figure 5.12 :

Pour un chargement à 1.9p (MPa) de rayon plus grand ($a=0.315m$) le profil des contraintes verticales au-dessous de l'axe du chargement reste pratiquement de la même forme que pour le cas 1. Les différences entre les contraintes expérimentales et les contraintes élastiques sont importantes. Le maximum est atteint à une profondeur de 0.25m, une différence de l'ordre de 50%, ce qui constitue une disparité très importante. Tandis que l'utilisation de la théorie probabiliste présente une concordance avec les résultats expérimentaux. Le coefficient de Reimbert ν actif utilisé donne une très bonne approximation des contraintes dans le milieu granulaire en question. Mais l'utilisation du coefficient de pression des terres classique K_a laisse les contraintes en deçà des valeurs expérimentales comme c'est le cas avec la théorie élastique.

Cas3) figure 5.13 :

Dans la troisième situation du chargement, les résultats expérimentaux des contraintes verticales présentent une certaine dispersion dans leur évolution en profondeur. Ces résultats oscillent entre les contraintes prévues par la théorie élastique et la théorie probabiliste des milieux granulaires. Certains points expérimentaux se confondent avec les contraintes probabilistes tandis que d'autres sont identiques aux contraintes élastiques. La tendance générale reste tout de même du côté de la théorie probabiliste, lorsque le sol est caractérisé par le coefficient de Reimbert ν , qui présente une nette concordance de résultats avec l'expérience.

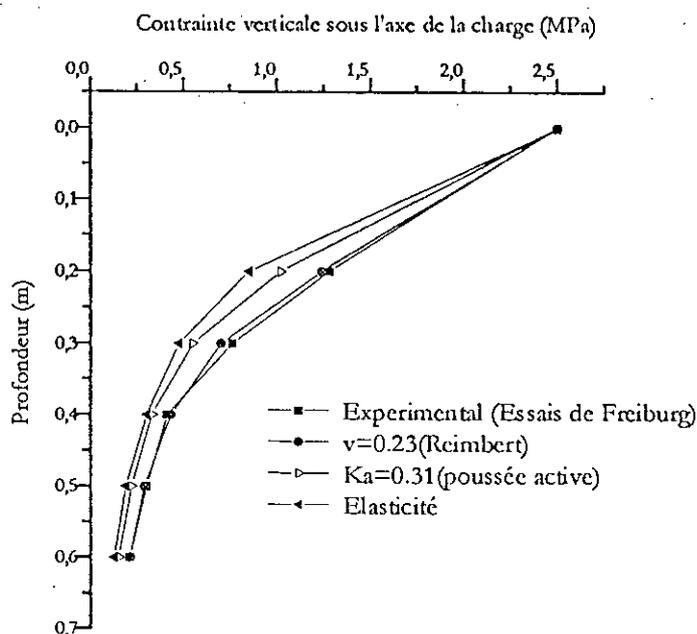


Fig. 5.11 Contraintes verticales sous l'axe d'une charge uniforme sur une plaque circulaire pour différents coefficients de poussée et selon l'élasticité comparés à l'expérimental. $Q=2.5\text{MPa}$; $a=0.1695\text{m}$.

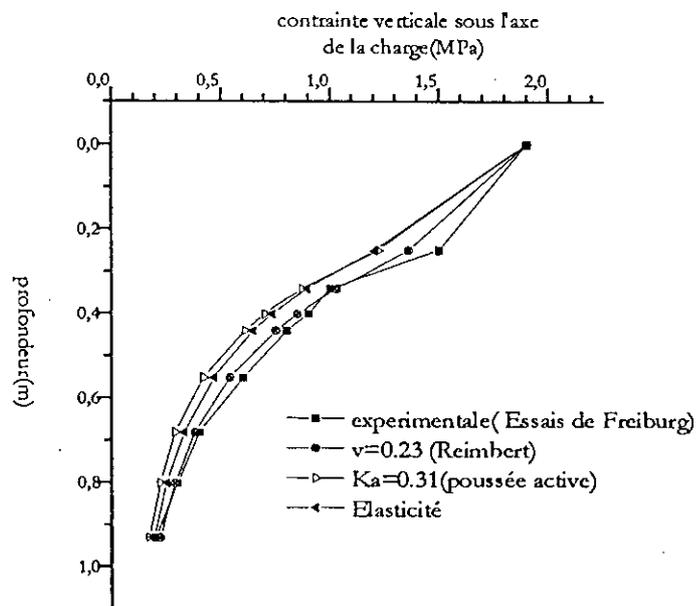


Fig. 5.12 Contraintes Verticales sous l'axe d'une uniforme sur plaque circulaire en élasticité et pour différents coefficients de poussée comparés à l'expérimental. $Q=1.9\text{MPa}$; $a=0.315\text{m}$

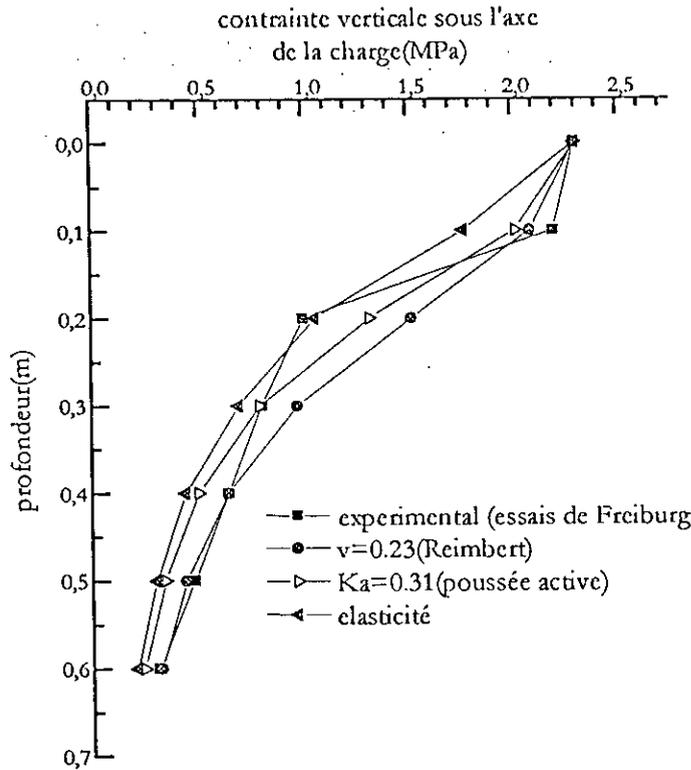


Fig. 5.13 Contraintes verticales sous l'axe d'une charge uniforme sur une plaque circulaire comparaison des résultats pour différents coefficients de poussée avec l'élasticité et l'expérimental. $Q=2.3\text{MPa}$; $a=0.225\text{m}$

V-2-6 CONTRAINTES VERTICALES SOUS L'AXE D'UN CHARGEMENT UNIFORME SUR PLAQUE CIRCULAIRE:

Les résultats d'essais effectués par l'Australian Road Research Center sur du sable sont mentionnés sur la figure 5.14. Ils sont comparés à ceux obtenus par la théorie de Boussinesq et par la théorie probabiliste des milieux granulaires. Le sable est caractérisé par un coefficient de Reimbert ν égal à 0.23 en utilisant une relation proposée par Ullitz (1987). Le chargement d'intensité $Q=0.65\text{MPa}$ est uniforme sur une plaque circulaire de rayon 0.5m. On remarque que l'allure des courbes des contraintes verticales est de la même forme que celle obtenue par la Waterways Experiment Station. (Harr, 1977). Les contraintes maximales sont repérées au voisinage du chargement, elles diminuent au fur et à mesure qu'on se déplace en profondeur. Les contraintes verticales élastiques sont inférieures aux résultats

expérimentaux. Elles ne dépendent pas de la nature du milieu. Tandis que les contraintes verticales obtenues par l'approche probabiliste sont pratiquement confondues avec l'expérience. L'utilisation du coefficient de Reimbert pour caractériser le milieu granulaire donne une approximation suffisante vis-à-vis des résultats expérimentaux. Ceci dénote la différence entre les contraintes verticales élastiques, qui ne dépendent pas de la nature du milieu, et les contraintes réelles qui s'y développent ; ce qui n'est pas sans importance. La remarque de Poulos (1971) sur l'écart observé entre la théorie de Boussinesq et l'expérience est vérifiée une nouvelle fois.

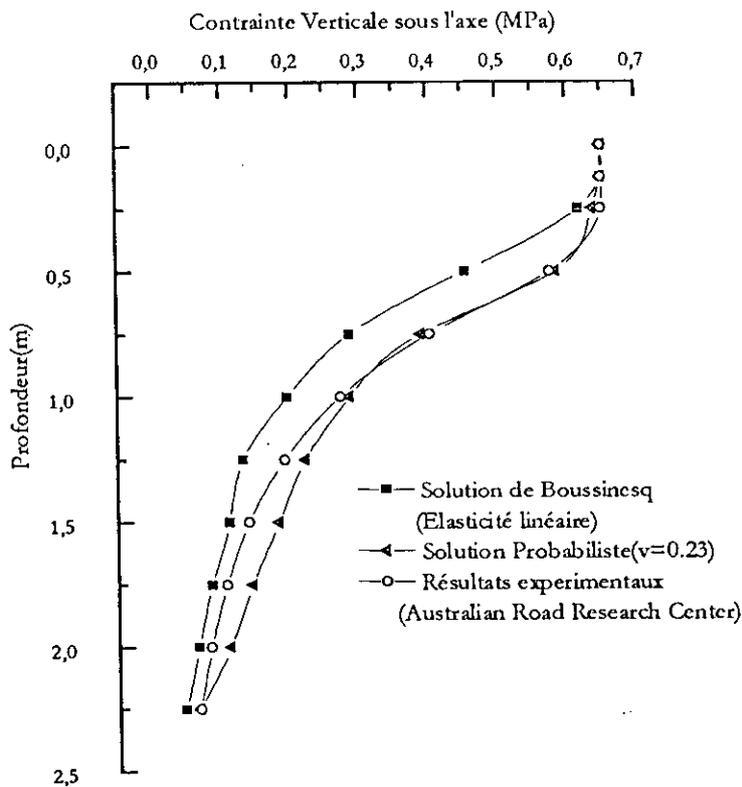


Fig. 5.14 Contraintes verticales sous l'axe du chargement comparaison des solutions élastiques et solutions probabilistes ($\nu=0.23$) avec des résultats expérimentaux sur sable compacté. $Q=0.65\text{MPa}$, $a=0.5\text{m}$.

V-2-7 CONTRAINTES VERTICALES POUR DIFFERENTS COEFFICIENTS DE REIMBERT

Le milieu granulaire est chargé en surface à l'aide d'une charge d'intensité $Q=0.65\text{MPa}$ uniforme sur une plaque circulaire de rayon $a=0.5\text{m}$. La figure 5.15 donne le profil des contraintes verticales dans un milieu granulaire pour différents coefficients de Reimbert ν à une profondeur de 0.75m . Lorsque le coefficient de Reimbert augmente la contrainte verticale calculée se trouve diminuée. La variation de ce coefficient affecte les valeurs des contraintes verticales, essentiellement au voisinage de la charge. Dans les zones situées au delà du rayon du chargement, la différence entre les contraintes verticales calculées n'est pas aussi importante qu'au voisinage du chargement. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'un état actif se développe dans la zone autour de la charge circulaire.

A une profondeur de 1.5m (figure 5.16), lorsque le coefficient ν de Reimbert augmente la contrainte verticale diminue dans la zone chargée et à son voisinage. Elle (la contrainte verticale) varie mais avec des proportions différentes selon qu'on est situé loin ou proche du chargement. La variation est plus importante sous le chargement que dans la zone située plus loin. A partir d'une certaine distance de l'axe du chargement il n'y a pas de différences significatives entre les contraintes verticales obtenues pour différents coefficients de Reimbert ν .

A une profondeur plus grande (3m) il faudra aller, latéralement, au delà des 2m à partir de l'axe du chargement pour voir qu'il n'y a pas de différences significatives entre les contraintes verticales pour différents coefficients ν (Figure 5.17). Lorsqu'on s'éloigne de la zone du chargement il y a un étalement plus important des contraintes verticales. Il y a diffusion jusqu'à amenuisement au bout d'une certaine profondeur relativement importante (plus de 3m).

On remarque que l'influence des coefficients se fait sentir essentiellement au voisinage du chargement. Au-delà du rayon de la charge il n'y a pas de grandes différences entre les contraintes pour différents coefficients. Ce qui confirme le choix de coefficients de poussée active. La zone de poussée active se développe principalement au voisinage de la charge.

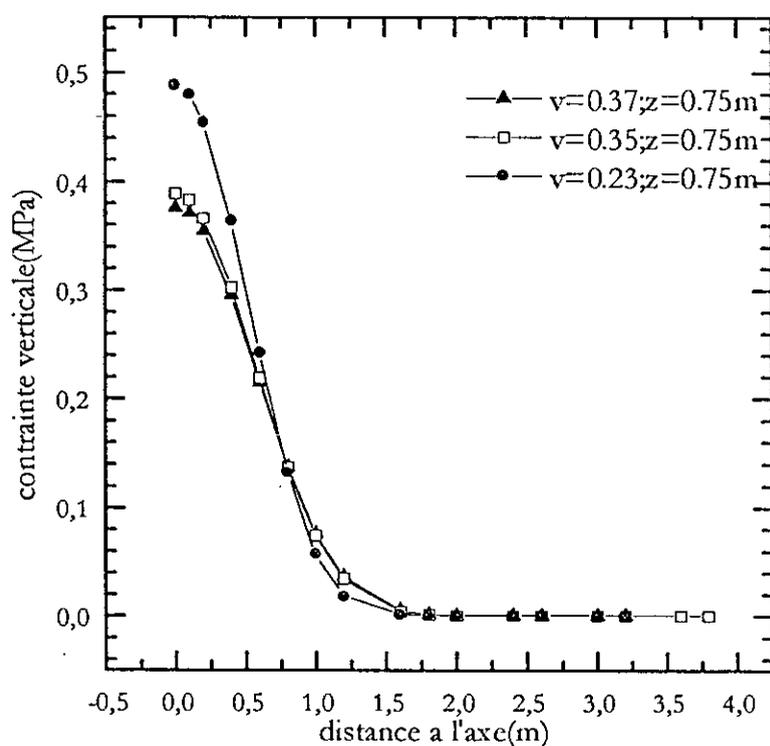


Fig. 5.15 Profil des contraintes verticales pour $v=0.23$; $v=0.35$ et $v=0.37$ à $z=0.75$ m de profondeur. $Q=0.65$ MPa, $a=0.6$ m

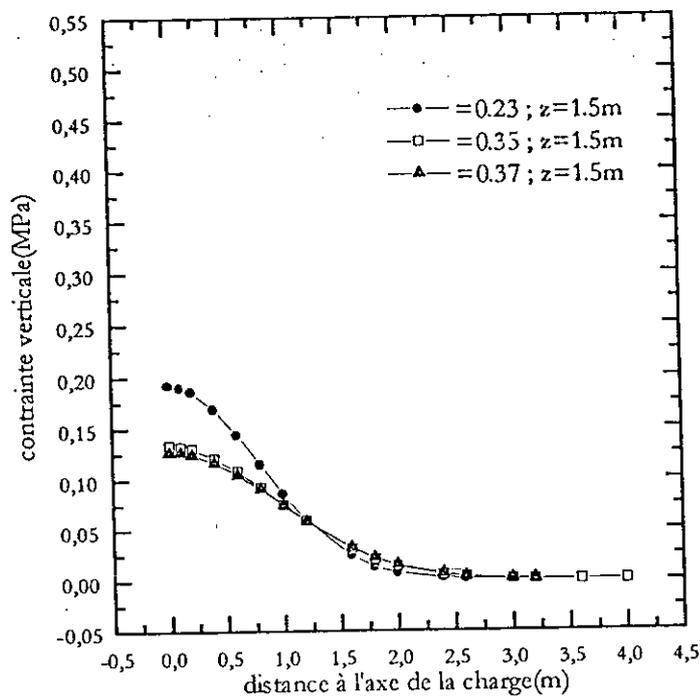


Fig. 5.16 Profil des contraintes verticales pour $\nu=0.23$; $\nu=0.35$ et $\nu=0.37$ à $z=1.5m$ de profondeur. $Q=0.65MPa$; $a=0.6m$

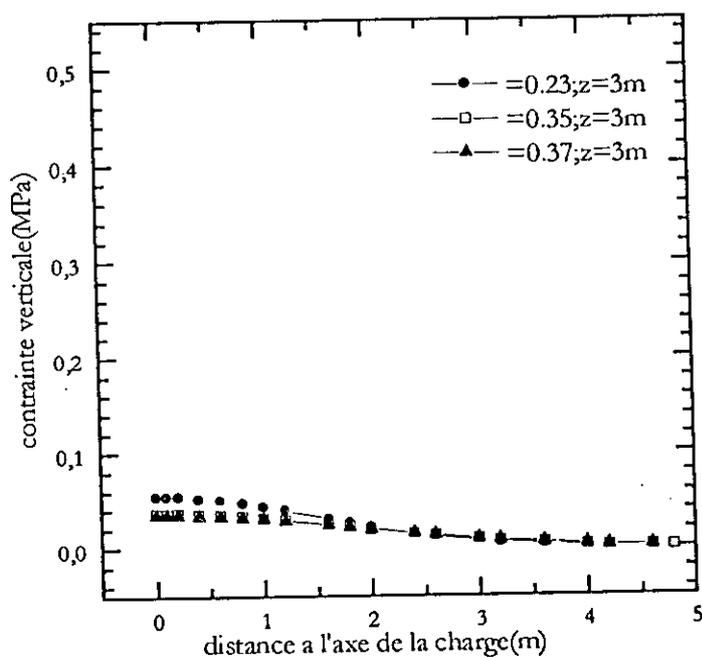


Fig. 5.17 Profil des contraintes verticales pour $\nu=0.23$; $\nu=0.35$ et $\nu=0.37$ à $z=3m$ de profondeur. $Q=0.65MPa$; $a=0.6m$

V-2-8 DEFORMATIONS SOUS L'AXE D'UN CHARGEMENT UNIFORME SUR PLAQUE CIRCULAIRE :

La figure 5.18 représente les déformations verticales sous l'axe d'une charge uniforme $Q=0.65\text{MPa}$ sur une plaque circulaire de rayon $a=0.5\text{m}$ appliquée sur la surface d'un milieu granulaire (sable). Le coefficient élastique du milieu $E=80\text{MPa}$ et son coefficient de Poisson est donné par $\mu =0.35$

Le coefficient de poussée des terres ν est déduit d'après Ullidtz(1987) en fonction du coefficient de Poisson μ du milieu. Le profil des déformations élastiques et des déformations obtenues par l'approche probabiliste est présenté en profondeur suivant l'axe du chargement. On remarque que les déformations selon la théorie probabiliste sont plus importantes que les déformations élastiques. Elles diminuent jusqu'à être négligeables au bout d'une certaine profondeur (1.75m). Le maximum de la différence, entre valeurs des déformations élastiques et déformations selon la théorie probabiliste, atteint environ 36% des déformations élastiques. Une différence assez importante qui peut avoir des incidences majeures sur les dimensionnement en milieux granulaires.

Des déformations sont également représentées sur la figure 5.19, elles concernent un milieu granulaire (sable) de rigidité plus importante ($E=200\text{MPa}$) avec un coefficient de Poisson $\mu=0.35$ soumis à un chargement $Q=0.65\text{MPa}$ uniforme sur une plaque circulaire de rayon $a=0.5\text{m}$. Comme le milieu est plus rigide les déformations sont moins importantes. Il reste tout de même que l'allure est identique, avec une différence moins importante entre déformations élastiques et déformations obtenues par l'approche probabiliste.

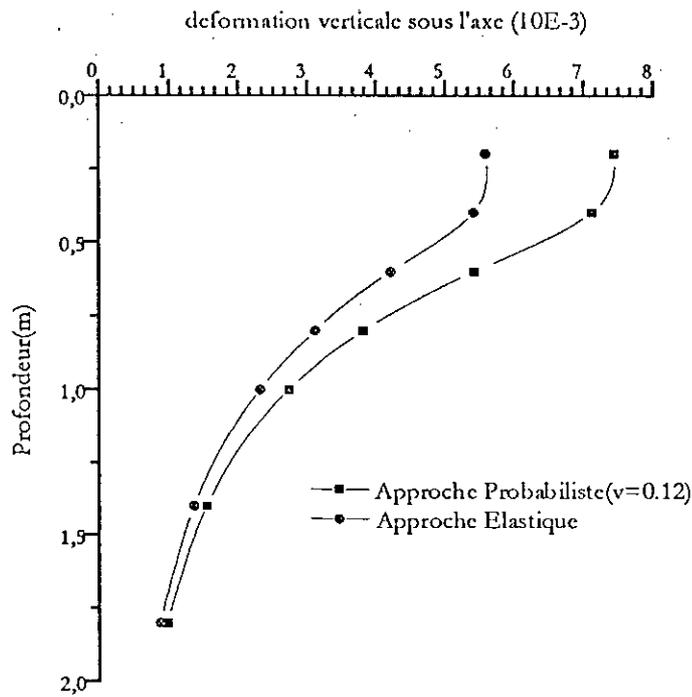


Fig. 5.18 Profil des déformations verticales selon la théorie élastique et selon la théorie probabiliste dans un sable dense.
 $Q=0.65\text{MPa}$; $a=0.5\text{m}$; $E=80\text{MPa}$; $N_u=0.35$; $\nu=0.12$

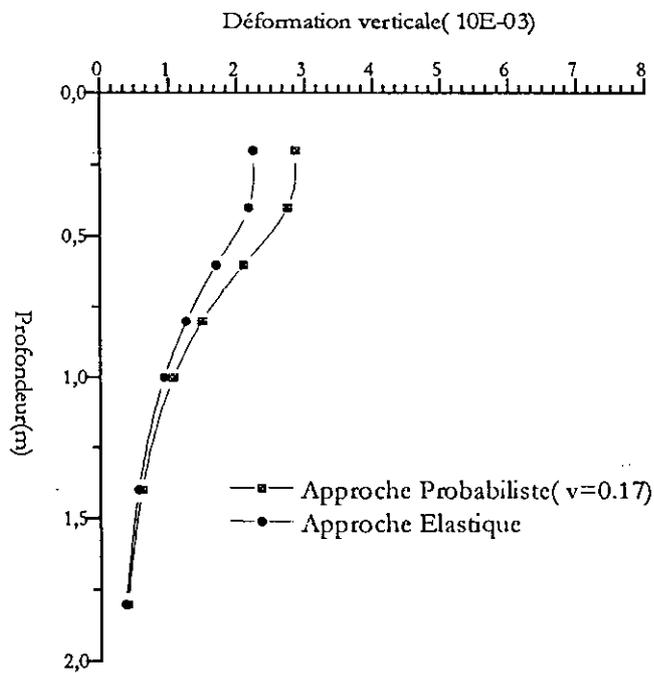


Fig. 5.19 Profil des déformations verticales selon la théorie élastique et selon la théorie probabiliste dans un milieu de sable et gravier.
 $Q=0.65\text{MPa}$; $a=0.5\text{m}$; $E=200\text{MPa}$; $N_u=0.35$; $\nu=0.17$

V-2-9 DEFORMATIONS SOUS CHARGEMENT UNIFORME SUR PLAQUE

CIRCULAIRE:

La figure 5.20 représente les déformations sous l'axe d'une charge circulaire de rayon $a=0.5m$ sur un milieu granulaire (sable) dont le module de rigidité est égal à $E=200MPa$ et le coefficient de Poisson $\mu =0.35$. Le coefficient de poussée des terres utilisé dans ce cas est issu d'un état supposé au repos déduit de la relation de Jaky, $\nu =0.4$. l'utilisation du coefficient de poussée des terres au repos, permet de constater que les déformations selon la théorie probabiliste en milieu granulaire sont identiques aux déformations élastiques. Ceci est dû à l'utilisation du coefficient de poussée au repos. L'utilisation d'un coefficient en état actif induit un certain écart comme c'est le cas avec les contraintes. Le fait est que sous un chargement donné il se développe un état actif dans le milieu en question. L'utilisation d'un coefficient à l'état de repos sous-estime les tassements réels dans le milieu granulaire.

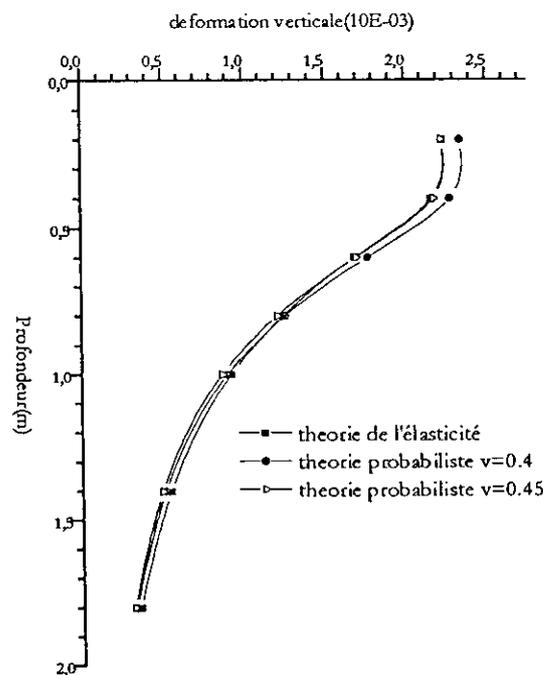


Fig. 5.20 Comparaison des déformations verticales Elastiques avec les déformations probabilistes pour un coefficient de poussée au repos selon Jaky($\nu=0.4$; $\nu=0.45$). Matériau à sable et gravier. $Q=0.65MPa$; $a=0.5m$; $E=200MPa$; $\nu=0.35$

V-2-10 TASSEMENTS SOUS CHARGEMENT UNIFORME SUR PLAQUE CIRCULAIRE :

Des tassements sous l'axe d'une charge uniforme sur une circulaire sont représentés pour différents coefficients de poussée des terres en utilisant la théorie probabiliste des milieux granulaires (Fig.5.21). On remarque que l'accroissement de la valeur du coefficient de poussée de Reimbert ν , rapproche de plus en plus les tassements probabilistes de ceux obtenus par la théorie élastique. Les tassements obtenus pour un coefficient de poussée $\nu = 0.33$ sont pratiquement identiques aux tassements élastiques. Harr (1977) a indiqué que le coefficient $\nu = 0.33$ donne des contraintes verticales voisines des contraintes élastiques. La figure 5.21 montre qu'il en est de même pour les tassements.

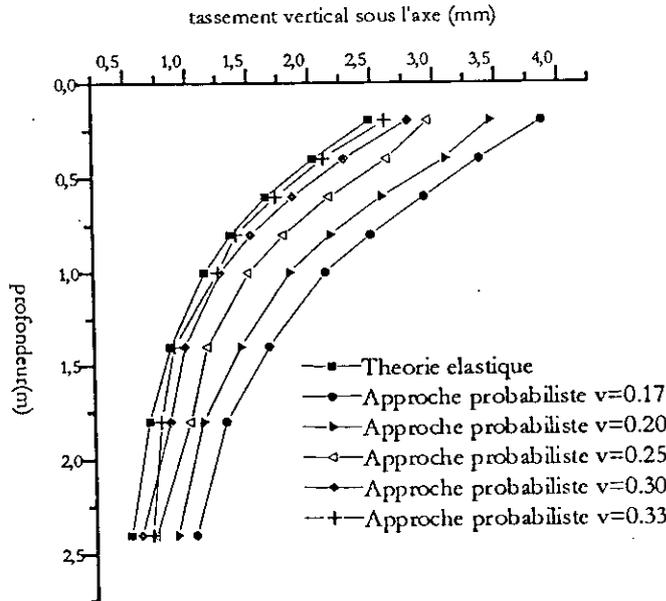


Fig. 5.21 Profil des tassements verticaux selon l'élasticité et selon la théorie probabiliste dans un milieu de sable et gravier dense pour différents coefficients de poussée ν $Q=0.65\text{MPa}$; $a=0.5\text{m}$; $E=200\text{MPa}$; $Nu=0.35$

V-2-11 TASSEMENTS D'UN SOL SOUS CHARGES UNIFORMES SUR UNE PLAQUE CIRCULAIRE :

Une série de charges uniformes sur plaque circulaire de rayon $a = 0.5\text{m}$ et d'intensités différentes sont appliquées sur un sol granulaire dont les caractéristiques de rigidité sont $E=80\text{MPa}$ et un coefficient de Poisson $\mu=0.3$. La figure 5.22 représente les tassements en surface du sol sous la charge. Dans chacun des cas on utilise un coefficient de Reimbert $\nu = 0.23$. le coefficient ν est déduit d'une relation obtenue par Ullidtz(1987). Il a fait le lien entre des valeurs du coefficient de poussée ν d'un milieu granulaire et des valeurs du coefficient de Poisson μ . Pour un milieu avec un coefficient de Poisson $\mu=0.3$ il donne un coefficient de poussée $\nu=0.23$. Les tassements calculés par la théorie probabiliste sont légèrement supérieurs aux résultats expérimentaux. Tandis que les mêmes conditions de chargement en élasticité provoquent des tassements relativement moins importants que l'expérience. Ceci montre que, pour les tassements aussi, il existe une différence entre les résultats obtenus par la théorie élastique et ceux obtenus en utilisant la théorie probabiliste des milieux granulaires. Les tassements élastiques sont plus petits dans ce cas, ils sont sous-estimés par rapport à l'expérimentation. Un certain écart est observé entre les tassements obtenus par l'approche probabiliste et les résultats expérimentaux, notamment pour des charges supérieures à 0.4MPa . Ceci est dû à la caractérisation du milieu granulaire par un coefficient de poussée ν qui ne dépend, dans ce cas, que du coefficient de Poisson. Le choix du coefficient de poussée ν est délicat lorsqu'on ne connaît pas l'angle de frottement interne du matériau granulaire.

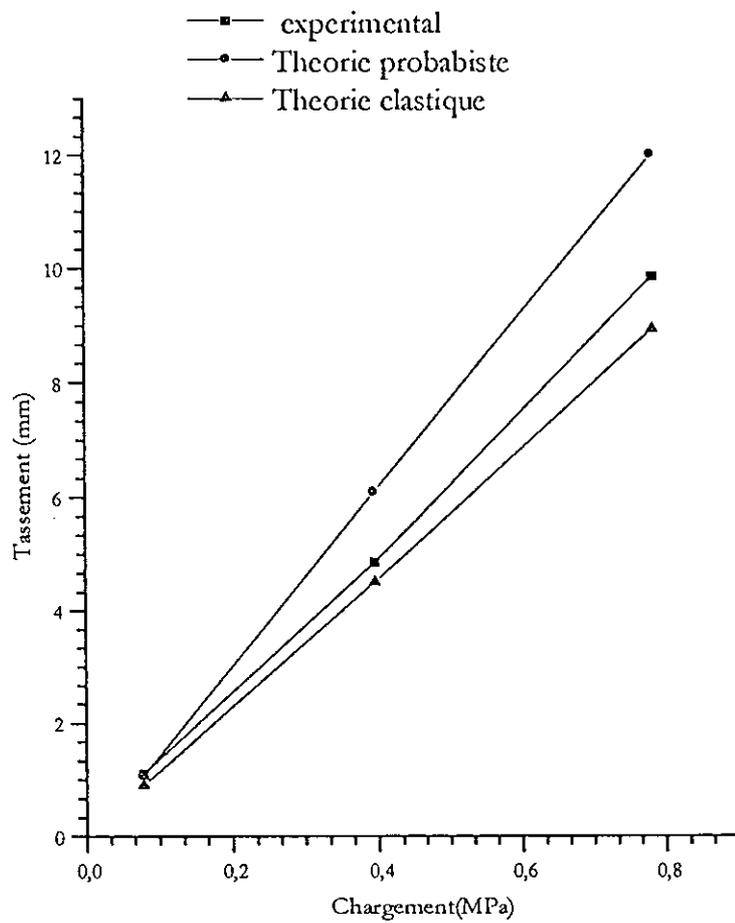


Fig. 5.22 Tassements d'un sable fin sous l'effet d'une charge circulaire de différentes intensités. comparaison avec l'élasticité et avec la théorie probabiliste. $E=80\text{MPa}$; $\text{Nu}=0.3$; $\nu=0.23$. (Résultats expérimentaux d'après Bouafia, 2000)

CONCLUSION

L'utilisation des probabilités dans le traitement de divers problèmes devient fréquente. L'outil informatique aidant, les approches probabilistes trouvent le moyen de se substituer à l'approche déterministe dans beaucoup de domaines. On peut les retrouver autant pour, l'étude des surfaces de glissement des sols, que dans le traitement de la consolidation ou de perméabilité, ainsi que dans des problèmes de dimensionnement de fondations.

La mécanique des milieux granulaire fait appel, également, au traitement probabiliste pour l'étude des milieux tels les sables ou les sols. La théorie probabiliste des milieux granulaires traite de la diffusion des charges dans ces milieux. C'est une théorie relativement récente, elle a été développée par le Professeur M.E. Harr dans le courant des années 1970. Il a déduit une formulation qui s'applique à plusieurs situations comme le chargement d'un milieu granulaire semi-fini.

Nous avons repris les grandes lignes de cette théorie en l'appliquant à des situations particulières de milieux granulaires. Un traitement numérique a été mis en application. Plusieurs cas de chargement de milieux granulaires ont été traités en caractérisant ces milieux à l'aide d'un coefficient dit de Reimbert. Ce coefficient de poussée est différent du coefficient K de pression des terres classique, utilisé en mécanique des sols, par sa formulation. Il contient l'essentiel de l'information relative au milieu granulaire. Il est fonction de l'angle de frottement interne. Plusieurs facteurs influencent l'angle de frottement interne d'un matériau, entre autres et de manière significative la compacité ; la forme des grains est aussi d'une influence non négligeable. Il n'existe pas de relation formelle entre le coefficient de

Reimbert et la compacité du milieu (ou sa porosité). Mais en utilisant un certain nombre de relations entre l'angle de frottement interne et la porosité, il a été possible de suivre pour du sable, l'évolution du coefficient en fonction de la porosité, et ainsi de voir le rapport aux contraintes dans un milieu sous chargement.

Les exemples traités sont tirés de résultats expérimentaux qui consistent généralement dans des contraintes et déformations sous un chargement donné dans un milieu granulaire (sol, sable...). Des résultats obtenus par la théorie de l'élasticité ont été également traités afin de comparer avec les résultats de la théorie probabiliste des milieux granulaires. Dans bon nombre de cas les résultats de la théorie probabiliste se trouvent plus proches des résultats expérimentaux. Ce qui suggère qu'elle rend compte de la réalité granulaire du milieu. La formulation de la théorie probabiliste des milieux granulaires se distingue aussi par le fait qu'elle ne prend pas les interfaces comme des discontinuités, mais elle s'intéresse à un phénomène de diffusion de la charge entre grains, elle modélise un phénomène de diffusion de charge et non un comportement mécanique du milieu en question. L'utilisation du coefficient de poussée de Reimbert pour caractériser un milieu granulaire a donné des résultats très proches de la réalité expérimentale. Nous nous sommes limités à l'utilisation de ce coefficient dans un état actif de poussée, tandis qu'un coefficient à l'état de repos ne rend pas compte de la réalité du milieu sous chargement. Le choix du coefficient à l'état actif est dicté par le fait que, sous chargement donné, un milieu granulaire développe une poussée active au voisinage de la charge.

Le calcul des déformations dans un milieu granulaire a fait l'objet d'un certain nombre d'exemples. L'expression des déformations dans un milieu granulaire fait apparaître des paramètres élastiques, le coefficient de Poisson et le module de Young. Les résultats expérimentaux disponibles comparés aux déformations probabilistes ont montré une concordance manifeste lorsqu'on utilise un coefficient

de Reimbert à l'état actif. Les déformations élastiques sont toujours situées en dessous des résultats expérimentaux.

L'étude de la diffusion des contraintes dans un milieu granulaire a montré une distribution en cloche (distribution normale) de celles-ci lorsque le milieu est chargé en axisymétrie. La même forme est obtenue par un traitement élastique des contraintes dans un milieu continu. A l'étude de la diffusion des contraintes peut être substituée la diffusion de l'excès de vides dans un milieu granulaire, il s'agit de traiter les changements de porosité qui ont lieu sous chargement. C'est un traitement qui est plus orienté vers la consolidation des sols.

BIBLIOGRAPHIE

- BALAY, J., A.G. CORREIA (1998), "Etude expérimentale et modélisation en mécanique des graves non traitées et des supports de chaussées, dernières avancées", *Bulletin des L.P.C 216*, Juillet-Août, pp3-18.
- BARDEN, L. (1963), "Stresses and displacements in a cross-anisotropic soil", *Géotechnique*, Vol.13, N°3 pp101-114.
- BATHE, K.J., E.L. WILSON (1976), "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall.
- BELKACEMI, S. (1997), "Notes du Cours de Mécaniques des Sols et Techniques Expérimentales", E.N.P Alger.
- BELKACEMI, S. (1995), "Notes du Cours de Mécanique des Sols", E.N.P. Alger.
- BERRAH, M.K. (1997), "Méthodes numériques en mécanique des structures", *Gecotech Groupement, Formation continue*, Décembre, Alger.
- BERRAH, M.K. (1995), "Notes du Cours de Mécanique des Milieux Continus", E.N.P. Alger.
- BERRAH, M.K. (1997), "Notes du Cours de Vibrations Aléatoires, 1ère Partie Probabilités", E.N.P. Alger.
- BOSSCHER, P.J., T.B. EDIL and S. KURAOKA (1997), "Design of Highway Embankments Using Tire Ships", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, April, pp295-304.
- BOUAFIA, A. (2000), "Mécanique des Sols appliquée, Problèmes résolus", Alger OPU.
- BOURDEAU, P.L (1993), "Stochastic Model of Transient Compression in Granular Media ", *Powders & Grains 93*, Thomson Ed., pp 429-434.
- BOURDEAU, P.L et RECORDON, E. (1983) "Dimensionnement des chaussées souples Point de vue probabiliste", *Annales de l'I.T.B.T.P.* n°420.
- BOURDEAU, P.L and M.E. HARR (1989), "Stochastic Theory of Settlement of Loose Cohesionless Soils", *Géotechnique* 39, N°4, pp 641-654.

BOURDEAU, P.L (1986), "Analyse probabiliste des tassements d'un massif de sol granulaire" Thèse N° 628. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

BURMISTER, D.M.(1943), "Theory of stresses and displacements in Layered systems and application to the design of airport runways", Proc. 23rd annual meet. of the Highw. Res. Board.

CHARLES, M., GERRARD and J.R. MORGAN (1969), "Stresses and displacements in non linear soil media", *Australian Road Research*, January, pp398-405.

CHIKWENDU, S.C. (1981), "The dependence of probabilistic stress on relative density in granular media", *Inter. J. Enging-Sciences*. vol.19 n°.11.

COLOMBIER, G., P. PONTEVILLE, J. ALEXANDRE et C. GUIMARHO (1980), "Assises traitées aux liants hydrauliques et pouzzolaniques (Première partie)", *Revue générale des routes et aérodromes*, supplément n°566 Juillet-Août.

CORTE, J.T., Y. BROSSEAUD, J.P. KERZREHO, A.S. PERNOL (1998), "Etude de l'orniérage des couches de roulement au manège d'essais du L.C.P.C", *Bulletin des L.P.C.* 217, Sept.-Oct., pp13-30.

COSTET, J. et G. SANGLERAT (1981), "Cours pratique de mécanique des sols¹", Dunod Edition.

DAS, B.M. 1985, "Advanced Soil Mechanics", Mc-Graw-Hill Book Company.

DEMIDEM, M. (1997), "Notes du Cours de Méthodes numériques" E.N.P.Alger.

DHATT, G. et G. TOUZOT (1984), "Une présentation de la méthode des éléments finis", Paris ed. Maloine.

DOUGLAS, R.A. (1997), "Repeated-load Behavior of Geosynthetic-built Unbound Roads", *Canadian Geotechnical Journal*, Volume 34, , pp197-203.

EVESQUE, P. (2000), "Eléments de mécanique des milieux granulaires secs ou mouillés", *Poudres et Grains NS1*, Décembre, pp15-36.

FANNIN, R.J. and O. SIGURDSSON (1996), "Field Observation of Unpaved Roads with Geosynthetics", *Journal of Geotechnical Engineering*, July, pp544-552.

FEDA, J. (1978), "Stress in subsoil and Methods of final settlement calculations", Elsevier.

- FELLER, W. (1957) " An Introduction to probability theory and its applications",
vol1. John Wiley and Sons.
- FLANNERY, B.P., B. PRESS, S.A. TENKOLSKY, W.T. WETTERLING (1986),
"Numerical Recipes", Cambridge University Press.
- FREMOND, M. (1974), "Mathématiques et problèmes routiers", *Revue générale des routes et aérodromes*.
- GOLDMAN, M. (1970), "Introduction to Probability and Statistics", Harcourt
Brace and World, N.Y.
- GRIVAS, D.A and HARR, M.E. (1980), " Particle Contacts in discrete materials"
ASCE J.Geotechnical Engineering division. Vol.106. n°GT5.
- GUEZOULI, S. (1994), "Comportement des chaussées souples : Modélisation et
simulation numérique", Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes.
- HARR, M.E. (1977), " Mechanics of particulate media", Mc Graw Hill, New York.
- HARR, M.E (1981), "Mécanique des milieux formés de particules", Presses
Polytechniques Romandes.
- JACOB, B., J.P MAGNAN, M. LEMAIRE, P. KREE (1988), "Méthodes
probabilistes et statistiques pour l'étude des matériaux de structures", *Annales de
l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publiques*, n°461, Janvier.
- JEUFFROY, G. (1983), "Conception et construction des chaussées", Editions
Eyrolles.
- JEUFFROY, G. et R. SAUTEREY (1984), "Cours de routes, Dimensionnement
des chaussées", Presses de L'E.N.P.C.
- JUMIKIS, A.R. (1962), "Mechanics of soils", New York, Von Nostrand.
- KEZDI, A. (1982): "Handbook of Soil Mechanics T1 : Soil Physics", Elsevier.
- KEZDI, A. and L. RETHATI, (1988), "Handbook of Soil Mechanics T3 : Soil
Mechanics of Earth Works, Foundation and Highway Engineering", Elsevier.
- KONDNER, R.L. (1963), " Hyperbolic Stress-Strain Response", *Journal of Soil
Mechanics and Foundations division*, ASCE, Vol.89, n°SM1, Proceeding paper n°3429,
February.

- MAGNAN, J.P., A. GUILLOUX, P. MESTAT (1998), "La pratique des calculs tridimensionnels en géotechnique", Journées d'études. Paris 24 et 25 Novembre. Presses de l'ENPC.
- MARSAL, R.J. (1973), " Mechanical Properties of rockfill in Embankment-dam Engineering" , Casagrande volume , Hirschfeld and Poulos editors. J.Wiley and Sons.
- MENARD, L. (1971), " Les tassements des fondations et les méthodes pressiometriques", *Annales de l'I.T.B.T.P N°288*, pp105-121.
- MESTAT, P. (1997), "Maillages d'éléments finis pour les ouvrages de géotechnique, conseils et recommandations", *Bulletin des L.P.C.* 212, Novembre. Décembre, pp39-63.
- MESTAT, P. (1998), "Etat de contraintes initiales dans les sols et calcul par éléments finis", *Bulletin des L.P.C.* 215, Mai-Juin, pp15-32.
- MESTAT, P. (1998), "Modèles d'éléments finis et problèmes de convergence en comportement non linéaire " , *Bulletin des L.P.C.* 214, Mars-Avril, pp45-60.
- MEYERHOFF, G.G. (1965), "Shallow Foundations", *Journal of Soil-Mec. And Found. Eng. div. ASCE* vol.91. n°SM2.
- NAINA, P. K., K.S. BEENA, R. K. KUMAR (1997), "Settlement of Reinforced Sand in Foundations", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, September.
- NASRI, V., J.P. MAGNAN (1997), "Comportement numérique des éléments finis dans l'analyse des problèmes de consolidation des sols", *Bulletin des L.P.C* 210, Juillet-Août, pp41-53.
- ODA, M. (1974), " A mechanical and statistical model of granular material " , *Soils and Foundations* vol.14. n°01.
- PAUTE, J.L., P. HORNYCH, J.P. BENABEN (1994), "Comportement des graves non traitées", *Bulletin de liaison des L.P.C.* 190, Mars-Avril, pp27-38.
- PECK, L. and K. O'NEILL (1997), "Frost Penetration in Soil with an Inclusion of Sand: Dependence on Soil Moisture Content and Winter Severity " , *Canadian Geotechnical Journal*, Volume 34, pp368-383.
- POULOS, S.J (1971), "The Stress-Strain Curves of Soils", *Geotechnical Engineers*, Massachusetts, January.

- PRANDI, E. (1973), "Méthode de dimensionnement des renforcements de chaussées", *Revue générale des routes et aérodromes*.
- RARIN, P. (1979), "Techniques numériques : Méthode des éléments finis", *Techniques de l'Ingénieur C1.C903, A656*.
- REIMBERT, M.L, and A.M. REIMBERT (1974), " Retaining Walls", Transaction Technology Publishing, Bay village, 1974.
- RYHMING, I.L. (1985), "Dynamique des fluides", Presses Polytechniques Romandes.
- SMITH, I.M. and D.V. GRIFFITHS (1992), "Programming the Finite Element Method", Jhon Wiley and Sons.
- TAIBI, N. & B. (1991): "Pratique du Fortran 77, cours et exercices corrigés", Berti Edition. Alger.
- TERZAGHI, K. and PECK, R.B. (1967), "Soil Mechanics in Engineering Practice", J. Wiley and Sons, N.Y. 2nd Ed.
- THOMAS, P.A. and J.D. BRAY (1999), "Capturing Nonspherical Shape of Granular Media with Disk Clusters", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, March, pp169-177.
- THORNTON. E.A. (1997), "The Finite Element Method in Heat Transfer Problems".
- ULLIDTZ, P. (1987), "Developments in Civil Engineering, Pavements Analysis", Elsevier.
- VESIC, A. (1963), " Bearing capacity of deep foundations in sand ", *Highway Research Record* n°39.
- YANDELL, W.O. (1967), "Stress Distribution Associated with Rolling resistance", *Australian Road Research*, Volume 3, N°1, March, pp3-13.
- ZIENKIEWICZ, O.C (1989), "The Finite Element Method, Convection Dominated Problems". Mc Graw Hill Company.

Annexe I

UTILISATION DE LA METHODE DES
RESIDUS PONDERES (MWR) EN
ELEMENTS FINIS

I PRINCIPE D'UTILISATION DE LA METHODE DES RESIDUS PONDERES
(METHOD OF WEIGHTED RESIDUALS)

La méthode des résidus pondérés est une technique globale pour l'obtention de solutions approchées à des équations aux dérivées partielles linéaires ou non-linéaires. L'application de la méthodes de résidus pondérées se fait en deux étapes :

a) La première consiste à assumer le comportement fonctionnel général de la variable de champs pour satisfaire l'équation différentielle et les conditions aux limites. La substitution d'une fonction d'approximation dans l'équation différentielle et aux conditions aux limites résulte en erreurs dites « résidus ». Ces résidus sont appelés à se dissiper sur le long du domaine de solution.

b) La seconde étape consiste à résoudre l'équation(s) de la première étape..

Soit à chercher à une approximation d'un champ de variable Φ gouverné par une équation différentielle de la forme $A(\Phi) - f = 0$ et définie dans un domaine Ω de contours (surface) Γ . f est une fonction connue de variables indépendantes. Les conditions aux limites sont données le long du contour Γ .

La MWR est appliquée dans ce cas en deux étapes :

La fonction exacte inconnue Φ est approximée par $\bar{\Phi}$. La fonction approchée s'exprime en termes de fonctions d'interpolation N_i ($i=1 ; m$) par :

$$\Phi \cong \bar{\Phi} = \sum_i N_i C_i$$

N_i : sont les fonctions d'interpolation.

C_i : sont des paramètres inconnus, fonctions inconnues d'une des variables indépendantes.

Dans les cas de problèmes stationnaires les, C_i sont constants et dans les cas non-stationnaires ils sont fonctions du temps ; la limite supérieure de la sommation « m » est lié au nombre d'inconnues C_i . Les « m » fonctions N_i sont choisies de telle façon à satisfaire les conditions aux limites globales. Une fois qu'on remplace Φ par $\bar{\Phi}$ l'équation différentielle deviendra :

$$A(\bar{\Phi}) - f \approx 0$$

Autrement dit,

$$A(\bar{\Phi}) - f = R$$

R : est le résidu ou l'erreur sur l'approximation de Φ par $\bar{\Phi}$.

La méthode des résidus pondérés consiste à déterminer les « m » inconnues C_i de telle façon à avoir un résidu R le plus petit sur tout le domaine. Ceci est obtenu en formant une moyenne pondérée de l'erreur et que celle-ci se dissipe sur tout le domaine de la solution. On choisit « m » fonctions de pondération W_i linéairement indépendantes.

$$\int_{\Omega} [A(\bar{\Phi}) - f] W_i d\Omega = \int_{\Omega} R W_i d\Omega = 0 \quad ; i=1,2,\dots,m ; R \sim 0.$$

Il est souvent fait appel à la méthode de Galerkin pour résoudre différents types de problèmes. Les fonctions de pondération sont choisies de façon à ce qu'elle soient identiques aux fonctions d'approximation pour représenter Φ .

$$W_i = N_i; \quad i=1,2,\dots,m$$

Remplacées dans l'équation précédente nous aurons :

$$\int_{\Omega} [A(\bar{\Phi}) - f] N_i d\Omega = 0 \quad ; \quad i=1,2,\dots,m$$

et pour un élément du domaine :

$$\int_{\Omega^{(e)}} [A(\Phi^{(e)}) - f^{(e)}] N_i^{(e)} \cdot d\Omega = 0 \quad ; \quad i=1,2,\dots,r$$

$$\Phi^{(e)} = \left[N^{(e)} \right] \cdot \{\Phi\}^{(e)} \quad \text{avec} \quad \left[N^{(e)} \right] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ \dots \ N_r]$$

$f^{(e)}$: fonction définie sur l'élément (e)

r : nombre de paramètres assignés à l'élément (e).

II APPLICATION AU CAS DE LA DIFFUSION DES CONTRAINTES DANS UN MILIEU GRANULAIRE

L'équation de diffusion des contraintes s'écrit sous la forme :

$$v \left(\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} \right) = \frac{1}{z} \frac{\partial S}{\partial z}$$

v étant une constante propre au milieu l'équation peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(v \cdot z \cdot r \cdot \frac{\partial S}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot S) = 0$$

L'application de la Méthode des Résidus Pondérés et en utilisant Galerkin

($W_i = N_i$) nous aurons :

$$\iint_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(v.z.r \frac{\partial S^e}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(r.S^e \right) \right] dr.dz = 0$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\iint_{\Omega} N_i \frac{\partial}{\partial r} \left(v.z.r \frac{\partial S^e}{\partial r} \right) dr.dz - \iint_{\Omega} N_i \frac{\partial}{\partial z} \left(r.S^e \right) dr.dz = 0$$

Nous rappelons le fondement du théorème de Green pour une intégrale sur un domaine qui peut être divisée en intégrale à l'intérieur du domaine et sur la surface.

$$\iint_{\Omega} u(\bar{\nabla} \cdot \bar{v}) d\Omega = \int_{\Gamma} u(\bar{v} \cdot \bar{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} \bar{v} \cdot \bar{\nabla} u d\Omega \dots \dots \dots *$$

Le vecteur opérateur de l'équation de diffusion des contraintes est $\bar{\nabla} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}$

et le vecteur \bar{v} est donné par : $\begin{pmatrix} v.z.r \frac{\partial S}{\partial r} & -rS \end{pmatrix}$

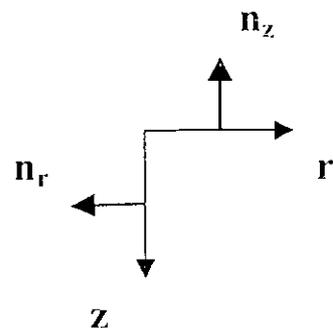
Pour un vecteur unitaire \bar{n} de composantes n_r et n_z respectivement sur les deux faces z et r l'équation (*) s'écrira :

$$\int_{\Gamma} N_i \begin{pmatrix} v.z.r \frac{\partial S^e}{\partial r} \\ -r.S^e \end{pmatrix} \cdot (n_r \quad n_z) d\Gamma - \iint_{\Omega} \begin{pmatrix} v.z.r \frac{\partial S^e}{\partial r} \\ -r.S^e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} d\Omega = 0$$

Ce système d'équation se simplifiera sous une forme algébrique :

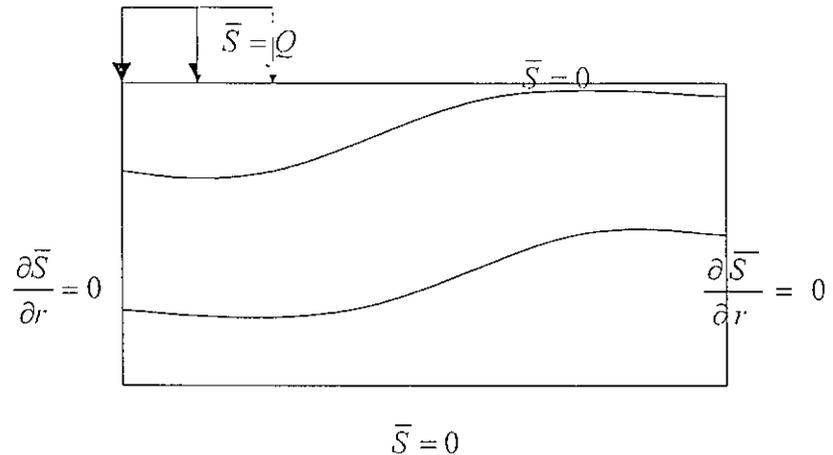
$$[A] \{S^e\} = \{f\}$$

[A] est une matrice spécifique au milieu en question.



$\{f\}$ est le vecteur forces.

La résolution de ce système en utilisant les conditions aux limites appropriées donne la distribution des contraintes verticales dans le milieu. Le milieu est semi fini limité par une surface libre avec un chargement circulaire. Les limites sont suffisamment éloignées pour que les contraintes soient diminuées largement et peuvent être négligables.



L'équation en termes de déplacements est traitée de la même manière en utilisant la méthode des résidus pondérés et Galerkin. Cette équation est donnée en termes de déplacements en axisymétrie par l'expression :

$$D \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} (C \cdot W) = \frac{\partial W}{\partial z}$$

W : est le déplacement vertical

D : est un coefficient de diffusion

C : coefficient de convection dans le milieu.

Annexe II

PROBABILITES ET RAPPORT DES
CONSTRAINTES

L'espérance de la contrainte verticale est liée à la porosité par la relation $\bar{S} = \log \frac{1}{n}$ et la distribution de Poisson du rapport de la contrainte verticale à sa moyenne est donnée par la fonction :

$$f\left(\frac{S}{\bar{S}}\right) = \frac{(\bar{S})^{\frac{S}{\bar{S}}} \cdot e^{-\bar{S}}}{(S/\bar{S})!}$$

Tableau 3.1 : Probabilités pour différents rapports de $\left(\frac{S}{\bar{S}}\right)$.

<i>n</i>	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.67	0.70	0.75	0.80
<i>s/s</i> =0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.67	0.70	0.75	0.80
<i>s/s</i> =1	0.15	0.23	0.285	0.322	0.35	0.36	0.363	0.367	0.364	0.36	0.35	0.33	0.306	0.28	0.268	0.245	0.21	0.176
<i>s/s</i> =2	0.225	0.26	0.27	0.26	0.245	0.216	0.20	0.193	0.165	0.144	0.122	0.10	0.07	0.06	0.05	0.043	0.03	0.02
<i>s/s</i> =3	0.225	0.203	0.171	0.14	0.114	0.086	0.07	0.067	0.05	0.04	0.028	0.02	0.013	0.008	0.007	0.005	0.002	0.001
<i>s/s</i> =4	0.168	0.116	0.081	0.056	0.04	0.02	0.02	0.01	0.01	0.007	0.005	0.003	0.001	9 e-4	7 e-4	4 e-4	2 e-4	1 e-4
<i>s/s</i> =5	0.101	0.054	0.03	0.018	0.01	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	7 e-4	3 e-4	1 e-4	8 e-5	8 e-5	3 e-5	1 e-5	8 e-6
<i>s/s</i> =6	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001	8 e-4	6 e-4	3 e-4	2 e-4	8 e-5	3 e-5	1.5e-5	6 e-6	4 e-6	2 e-6	0.00	0.00

On remarque que lorsque S=0 la probabilité se confond avec la porosité *n* du milieu granulaire Pro(S=0) = *n*.

Le tableau qui suit donne les probabilités des rapports de contraintes pour des plages données de ces rapports.

Tableau 3.2 : Probabilités pour différents intervalles du rapport $(\frac{S}{\bar{S}})$.

n	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.67	0.70	0.75	0.80
$S=0$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.67	0.70	0.75	0.80
$1 \leq s/s \leq 2$	0.375	0.49	0.555	0.582	0.595	0.576	0.563	0.560	0.529	0.504	0.472	0.43	0.384	0.34	0.318	0.288	0.24	0.178
$2 \leq s/s \leq 3$	0.450	0.463	0.441	0.40	0.359	0.302	0.270	0.260	0.215	0.184	0.150	0.120	0.091	0.068	0.057	0.048	0.032	0.021
$3 \leq s/s \leq 2$	0.393	0.319	0.252	0.196	0.118	0.106	0.09	0.077	0.06	0.047	0.028	0.023	0.014	0.009	0.008	0.005	0.002	0.001

Les probabilités cumulatives, du rapport des contraintes verticales à l'espérance, pour différentes porosités sont indiquées dans le tableau suivant :

Tableau 3.3 : Probabilités cumulatives pour différents rapports de $(\frac{S}{\bar{S}})$.

n	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.67	0.70	0.75	0.80
$S=0$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.67	0.70	0.75	0.80
$S/s \leq 1$	0.20	0.33	0.435	0.522	0.60	0.66	0.693	0.717	0.764	0.81	0.85	0.88	0.906	0.93	0.938	0.945	0.96	0.976
$S/s \leq 2$	0.425	0.59	0.705	0.782	0.845	0.876	0.893	0.91	0.929	0.954	0.972	0.98	0.984	0.99	0.988	0.988	0.99	0.996
$S/s \leq 3$	0.65	0.793	0.876	0.922	0.959	0.962	0.963	0.977	0.979	0.994	0.99	0.99	0.997	0.998	0.995	0.993	0.992	0.997
$S/s \leq 4$	0.818	0.909	0.957	0.978	0.98	0.982	0.983	0.987	0.989	0.997	0.99	0.99	0.998	0.999	0.999	0.993	0.993	0.997
$S/s \leq 5$	0.919	0.963	0.987	0.996	0.997	0.988	0.987	0.99	0.991	0.998	0.99	0.99	0.998	0.999	0.999	0.993	0.999	0.998
$S/s \leq 6$	0.969	0.983	0.997	0.999	0.99	0.989	0.988	0.99	0.991	0.999	0.99	0.99	0.999	0.999	0.999	0.99	0.999	0.999

Annexe III

EQUATIONS D'EQUILIBRE ET
COEFFICIENT DE POUSSEE
DES TERRES

Les équations d'équilibre dans un milieu continu, en terme de contraintes, sont données par :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma$$

L'utilisation de ces mêmes équations en fonction des contraintes moyennes intragranulaires (\bar{S}) en situation de déformations planes et en négligeant l'effet de la gravitation donne :

$$\frac{\partial \bar{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{S}_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{S}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} = 0$$

L'équation de diffusion des contraintes intragranulaires verticales dans le plan est donnée par :

$$\frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} = \nu z \frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial x^2}$$

Remplaçons $\frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z}$ dans la première équation d'équilibre :

$$\frac{\partial \bar{S}_{xz}}{\partial x} + \nu z \cdot \frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial x^2} = 0$$

En intégrant par rapport à x :

$$\bar{S}_{xz} = -\nu z \cdot \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial x} + F_1(z)$$

$F_1(z)$ est une fonction de z seulement, Muller (1962) a montré que cette fonction est nulle.

$$\bar{S}_{xz} = -\nu z \cdot \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial x}$$

En différentiant par rapport à z et en remplaçant dans la première équation d'équilibre :

$$\frac{\partial \bar{S}_x}{\partial x} - \nu z \cdot \frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial x \partial z} - \nu \cdot \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial x} = 0$$

Et en intégrant par rapport à x nous aurons :

$$\bar{S}_x = \nu \cdot \bar{S}_z + \nu z \cdot \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} + F_2(z)$$

Muller (1962) a également montré que la fonction $F_2(z)$ est nulle, d'où :

$$\bar{S}_x = \nu \cdot \bar{S}_z + \nu z \cdot \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} = \nu \cdot \bar{S}_z + \nu \cdot z^2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial z^2}$$