الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

«*»

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

«*»

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

(En vue de l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat)

SUJET

Application de la fonction d'Autocorrélation Pour les diagnostics de machines

Proposé par : W. KUROWSKI

Etudié par : R. BOULAHIA

Dirigé par : W. KUROWSKI

PROMOTION : JUIN 1986

E.N.P. 10 , Avenue Hacen Badi — EL-HARRACH - ALGER

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

«*»

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

«*»

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

(En vue de l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat)

SUJET

Application de la fonction d'Autocorrélation Pour les diagnostics de machines

Proposé par :

W. KUROWSKI

Etudié par :

R. BOULAHIA

Dirigé par :

W. KUROWSKI

PROMOTION : JUIN 1986

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département: GENIE-MECANIQUE

Promoteur: WALDEMAR KUROWSKI
Elève Ingenieur: BOULAHIA RAMDANE

وزارة التعليم العالي
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
فرع : الميكانيكا

الموجه : ويلد مار كيروسكي
الطالب المهندس: بولحية رمضان

الموضوع:
تطبيق داله التشابه الذاتي في تشخيص الالات .

الملخص: الهدف من هذه الدراسة هو تطبيق دالة التشابه الذاتي في تشخيص الالات ابتداء من قياس الاهتزازات بالاضافة الى اعداد برامج حسابية تسمح لنا باعداد دالة التشابه الذاتي .

Sujet:
Application de la fonction d'Autocorrèlation pour les diagnostics de machines

Résumé:
le but de cette étude est l'application de la fonction d'Autocorrélation pour le diagnostic de machine à partir de la mésure des vibrations ; et aussi mettre au point des programmes qui permettent la détermination de la fonction d'Autocorrélation.

Subjet:
Application of Autocorrelation function for machine diagnostics

Abstract:
In this project the application of Autocorrelation function for machine diagnostic was studied using the digital form of vibration signal analog recording the compitation method of Autocorrelation function has been given.

Dédicace

A ma chère mère qui a tant souhaitée me voir arriver à cette étape .

A mon père

A mes freres et soeurs

A tous mes amis

Remerciements.

Je tiens à remercier monsieur WALDEMAR KUROWSKI,maitre de conférence à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger,pur l'aide précieuse et les conseils qu'il m'a prodigués tout au long de mon travail.

Je remercier également tous les enseignants qui ont contribué à ma formatoin

Que toutes les personnes qui ont contribué à l'élaboration de ce modeste travail, trouvent ici, l'éxpression de mes remerciements les plus sinceres.

Je n'aublierai pas mon ami Boubnider Zahir pour les services préciaux qui m'a rendu

TABLE DE MATIERES

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Avec les machine modernes,si elles sont bien entretenues et soumises à des vérifications périodiques sérieuses, les pannes entrainant l'arrét absolu de la machine sont trés rares.
Elles sont d'ailleurs généralement précedées par des signes avant-coureurs aussi,dés que l'on s'apperçoit d'une anomalie quelconque généralement traduites par un bruit et des vibrations excessives,des à coups,faut-t-il rapidement en chercher la cause et y remedier;de cette façon on évitera toujours les frais qui peuvent ètre extremement éleves, et parfois même des accidents graves qui peuvent toucher les systemes de production.

I.1. Maintenance Pèriodique:

La maintenance pèriodique est basée sur des révisions régulières éspacées,suivant l'éspérence de la durée de vie des pièces sujettes à l'usure cela éxige l'arrét et mise hors du fonctionnement de la machine pendant un certain temps.
Mais quant il s'agit des installation trés couteuses les intérruption pèriodiques peuvent elles mèmes s'averer couteuses et on note par ailleurs les inconvenients suivants

1/ Le personnel qualifié et les pièces de rechanges doivent ètre prévues pour des inteventions qui ne sont peut ètre pas nécessaire dans l'immediat;

2/ les arréts prévus (démontages) peuvent être injustifiés;l'éxperience montre que l'intervention sur des machines fonctionnant bien provoque souvent des perturbations qui n'éxistaient pas duparavant,ce qui nécesite des réparations ulterieures.

I.2. Maintenance Préventive:

"C'est la surveillance de l'état de fonctionnement".La question de choix se pose toujours entre la maintenance prévisionnelle et la maitenance périodique quand il s'agit de réduire les frais(4).
La maintenance prévisionnelle,permet d'éliminer toutes les défaillances inattendues et améliore la disponibilité et le rendement de l'installation,car on n'intevient que quand c'est nécessaire.C'est une maintenance selective qui considère chaque machine individuellement,ce qui permet à la machine en question de tourner pendant de nombreuses années sans interruption(1).
Cette méthode est basée sur la surveillance et la mesure des signaux vibroacoustiques de la machine qui résultent dans la plupart des cas des processus accompagnants pour estimer l'état de la machine en question(1).

I.2.1. Phénomène vibroacoustique:
C'est à dire les vibrations mécaniques et les bruits qui se produisent généralement au cours du fonctionnement des machines on sait en outre que les élements de la machine et les couples

cinématiques des élement sont chargés d'érreurs par rapport aux compositions,dimensions,formes idéales,ainsi que les excitations cinematiques qui provienent de la régidité et de l'impact.

Pendant le temps de fonctionnement ces érreurs s'accroissent en raison de l'usure,de la fitigue ,du fluage,etc...,tous ces phénomènes constituent un enssemble de sources qui activent la production des perturbations des états d'équilibre.

Les perturbations s'étendent dans les milieux élastiques des élements et dans l'aire ,ces perturbations ont un caractère dynamique,elles se propagent sous forme d'ondes.Cette propagation dépend des proropriétés physiques, formes, dimensions, et du milieu(1).

L'action des sources et la propagation des pertubations se manifestent par des vibrations des éléments de la machine et de l'air qui l'entoure.

En pratique nous avons des vibrations mécaniques et acoustiques.

La déterioration de l'état qualitatif de la machine produit généralement un accroissement du niveau de vibrations.Cela nous permet d'utiliser ces vibrations comme des signaux portant des informations sur l'état de la machine .

Ainsi ,en relevant l'accélération,vitesse,ou amplitude de ces vibrations,il est possible d'éffectuer un diagnostic qui nous permet de localiser les sources d'excitations éxistantes.

En tenant compte que ces sourses font une partie vitales de la machine durant son fonctionnement,ce diagnostic peut nous permettre d'établir une diagnose sur l'état technique de la machine .La mésure du bruit peut elle aussi receler une anomalie dans l'état de la machine,mais il est souvent difficile à localiser,car dans les usines et les ateliers,les machines sont nombreuses proches et travaillent simultanément.

I.2.2.Conclusion:

les phénomànes vibroacoustiques représentent induscutablement les proprietés techniques de la machine.Pour cette raison ils sont utilisés comme signaix inforant sur ces proprietés.

En prtique,les phénomànes dont-on parle ont un caractère stochastique,et les informations contenues dans les signaux sur l'état de la machine sont trés difficiles à déceler et à utiliser pour l'établissement de la diagnose .Celui-ci détermine la nécessité d'application des méthodes speciales pour l'observation et l'interprétation de ces signaux.

Les démarches entreprises pour faire déceler ces informations consistent à présenter ces signaux sous forme de ces caractéristiques ,tels que la fonction d'Autocorrélaton,densité spectrale;etc....

I.3.But du sujet:

Dans ce présent projet,on va présenter une étude sur l'établissement d'une procédure de calcul et l'application de la fonction d'Autocorrélation dans le domaine de traitement de signal .

On va proposer une procédure numérique de la détermination de l'éstimateur de la fonction d'Autocorrélation à partir d'un signal de vibration présenté sous forme d'une suite aléatoire.

Ceci dans le but de l'appliquer dans le domaine de diagnostic,pour établir une diagnose sur l'état technique d'une machine .

CHAPITRE II.

RAPPELS MATHEMATIQUE

II.1. Procéssus stochastique et Fonctions aléatoires:

Dans la littérature technique(3),(5),(6),on emploie souvent indifférement les termes de processus stochastique (ou aléatoire) et de fonction aléatoire. On peut cependant faire une distinction entre ces deux termes.

Un processus aléatoire caractérise l'évolution,en fonction d'un paramètre t ,d'un système ou le hasart intervient. Pour chaque valeur du paramètre t,le système est dans un certain état.

Un grand nombre de variation peuvent étre nécessaires pour définir cet état mais on se limite généralement au cas ou une seule x suffit;l'évolution du système est alors représentée par une fonction aléatoire x(t),(3).

Trés souvent,le paramètre considéré sera le temps,il n'ya là rien de limitatif. Pour faciliter la compréhension,la terminologie employée ici laissera cependant sous-entendre que le paramètre en question est le temps.

Dans certains cas ,les instants auxquels le hasart intervient sont dénombrables et bien connus à l'avance ;on dit alors que le processus est discret. Entre deux instants consécutifs l'évolution du systàme est déterministe.Si on ne s'intéresse à l'état du systàme qu'aux instants ou le hasart intevient ,on dit qu'on étudié une suite aléatoire associée à un procéssus discret(3).

Mais on peut s'intéresser à l'état du systàme à tous les instants,bien que le hasard n'inteviennent que de temps en temps ;on étudié alors une fonction aléatoire associée à un procéssus discret.

Si le hasard peut intervenir en tout instant arbitrairement choisi,on dit que le processus est permanent;l'évolution du systàme ne peut donc étre représentée dans ce cas là que par une fonction aléatoire. Il se peut,cependant qu'on ne puisse,par éxemple,observer le système qu'à un nombre dénombrable d'instants bien connus à l'avance(échantionnage dans le temps);du point de vue observation,il faut donc étudier une suite aléatoire obtenue par échantionnage d'une fonction aléatoire continue.

II.2. Notion de fonction aléatire:

Le calcul de probabilités est relatif à l'étude des variables aléatoires et les grandeurs qui s'y rattachent,fonction de répartition,densité de probabilité;etc...

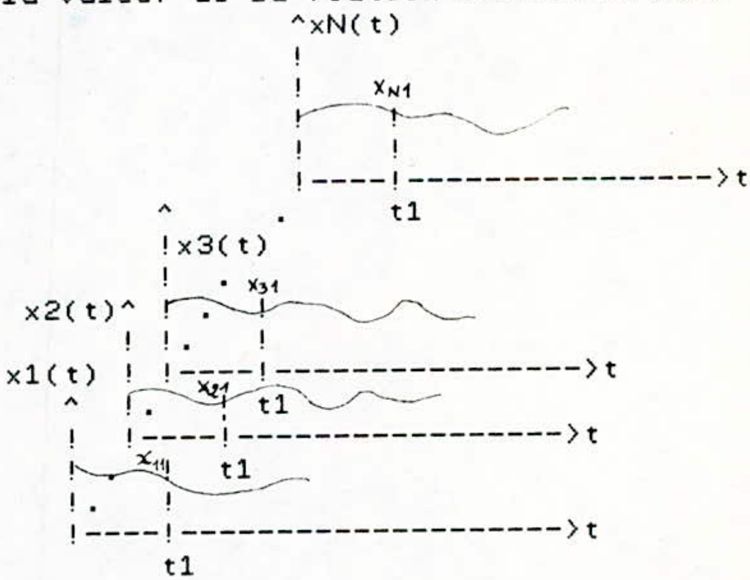
Ces fonctions peuvent dépendre du temps ou d'un autre paramètre mais toujours sous forme implicite seulement.

Il éxiste cependant des cas ou la façon dont les lois des probabilités dépendent d'un paramètre est essentielle à la déscription d'un phénomène . lorsque ce paramètre ne peut prendre que des valeurs discrètes bien connues à l'avance ,on dit que l'on étudie une suite aléatoire (3).Si le paramètre peut prendre une infinité de valeurs ,on dit que l'on étudie une fonction aléatoire.Ce paramètre est souvent le temps t,mais il peut correspendre à une grandeur physique quelconque,par exemple une position (3).

II.2.1. Notion de déscription statistique d'une fonction aléatoire:

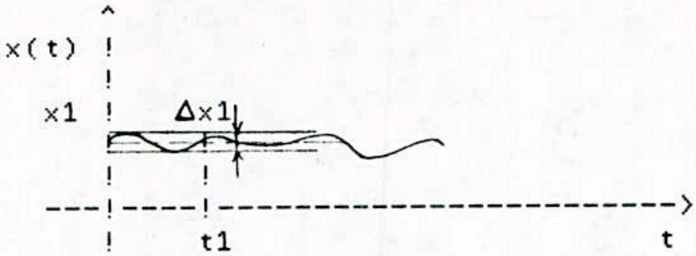
Le comportement en probabilité d'une variable aléatoire est comlètement défini par la connaissance de sa fonction de répartition (2),(3).

Peut-on-trouver une propriété analogue,pour une fonction aléatoire x(t) par exemple prenons l'ensemble de tous les échantions possibles d'une fonction aléatoire x(t) possible,à chaque instant t1 , t1 la valeur de la foction aléatoire x(t) est



une variable aléatoire x1,on peut donc définir la densité de probabilité de la fonction aléatoire x(t) à l'instant t1 c'est une fonction de t1,(3).

$$p1(x1,t1) = \lim_{\Delta x1 \to 0} \frac{prob(\, x1 \leqslant x(t) < x1+\Delta x1 \;;\; t=t1 \,)}{\Delta x1}$$



on la calculera pratiquement par la formule :

$$p1(x1,t1) = \lim_{\substack{\Delta x1 \to 0 \\ N \to \infty}} \frac{\Delta N1/N}{\Delta x1}$$

ou N est le nombre total de mombres de l'ensemble et $\Delta N1$ est le nombre de membre de l'ensemble considéré tel que pour $t=t1$ on dit;

$$x1 \leqslant x(t) < x1+\Delta x1$$

On peut également définir une fonction de répartiton $F(x1,t1)$,qui n'est autre que:

$$prob(x(t1) < x1) = \int_{-\infty}^{x1} p1(x,t1)dx$$

On peut rechercher la foction $F(x;t)$ valable quelque soit t sur un intevalle Δ .mais cette connaissance est insuffisante pour étudier le comportement de $x(t)$ est préciser son évolution dans le temps.

la connaissance de $F(x,t)$ est insuffisante pour décrire l'enchainement des valeurs prise par $x(t)$ au cours du temps

Considérant maitenant deux instant t1,t2 et posons:

$$x1=x(t1) \quad : \; x2=x(t2)$$

en général ces deux variables sont liées à cause de la continuité de x(t) et la laison entre elles traduira au moins partiellement la façon avec laquelle x(t) évolue entre les instants t1 et t2 on peut rechercher , la densité de probabilté du couple (x1,x2) ;

$$p2(x1,x2;t1,t2) = \lim_{\substack{\Delta x1 \to o \\ \Delta x2 \to o}} \frac{prob(x1 \leqslant x(t) < x1+\Delta x1 ; x2 \leqslant x(t2) < x2+\Delta x2)}{\hat{}x1\ \hat{}x2}$$

Pratiquement , on le calculera par la formule :

$$p2(x1,x2;t1,t2) = \lim_{\substack{\Delta x1 \to 0 \\ \Delta x2 \to 0 \\ N \to \infty}} \frac{\Delta N2/N}{\Delta x1\ \Delta x2}$$

N : Le nombre total de membres de l'ensemble que l'on considère.

ΔN2: Est le nombre de membres de l'ensemble tel que l'on dit simultanimen t :

$$x1 \leqslant x(t1) < x1+\Delta x1$$
$$x2 \leqslant x(t2) < x2+\Delta x2$$

p2(x1,x2;t1,t2) est une fonction de t1 et t2.

La fonction de répartition se définit de même :

$$F(x1,x2;t1,t2) = prob(x(t1) < x1;x(t2) \quad x2)$$

$$= \int_{-\infty}^{x1} \int_{-\infty}^{x2} p2(x,y;t1,t2)dxdy$$

On peut vérifier que les fonctions de répartitions associées à la fonction aléatoire x(t) ne sont pas identiques.

II.2.2. Mo yenne statistique ou d'ensemble d'une fonction aleatoire:

on peut définir sur l'ensemble des échantillons (x1(t),...,xN(t),...) la moyenne statistique de la fonction aléatoire x(t) à un instant t1 comme pour une variable aléatoire par:

$$\overline{x(t1)} = \lim_{N \to \infty} \frac{x1(t1)+x2(t1)+\ldots\ldots\ldots\ldots+xN(t1)}{N}$$

Cette définition est équivalente à celle du moment du 1er ordre :

$$\overline{x(t1)} = E(x(t1)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t1)p1(x(t1))dx(t1)$$

la quantité $\overline{x(t1)}$ est une fonction de t1 appelée mo yenne statistique de la fonction aléatoire x(t) à l'instant t1 ou encore espérance mathématique de cette fonction,ce qui conduit à la notation E(x(t1)) alors:

$$m1x(t) = \overline{x(t)} = E(x(t))$$

Le moment d'ordre superieur est donné par :

$$\overline{(x(t1))^n} = E(x(t1))^n = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t1)^n p1(x(t1))dx(t1)$$

En particulier: Si n=2, on définit le moment du deuxieme ordre:

$$m2x(t1) = E(x(t1))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t1)^2 p1(x(t1))dx(t1)$$

On peut centrer la variable x autour de sa valeur moyenne,c'est-à-dire considérer la nouvelle variable (x-m1x(t1)). on définit alors les moments centrés Ui est en particulier le moment centré du deuxieme ordre ou variance:

$$U2 = \sigma_x^2 = E((x(t)-m1x(t))^2) = m2x(t) - m1x(t)^2$$

la racine carrée de la variance s'appelle l'écart type.

II.2.3. Fonctions aléatoires stationnaires:

Une fonction aléatoire stationnaire au sens strict, si toutes ses propriétés statistiques sont indépendantes de l'origine des temps. En particulier(3):

1/ La fonction de répartition $F(x(t))$ est indépendante de t;

2/ La moyenne de $x(t)$ est une constante $m1x(t)$ indépendante du temps (que l'on pourra donc toujours supposer nulle en faisant le changement de variable $y(t)=x(t)-m1x(t)$)

3/ La fonction d'Autocorrélation $E(x(t1)\ x(t2))$ ne dépent que que de la différence $\tau = t1-t2$.

Et plus généralement tous les moments sont indépendants de l'origine des temps.

II.2.4. Moyennes temporelle-Ergodicité:

Nous venons de définir des moyennes statistiques il s'agissait en quelque sorte de moyenne ((à travers le processus)) à des instants donnés.Il est intéressant de définir également des moyennes ((le long du processus)).Nous définirons en particulier la valeur moyenne temporelle $\langle x(t)\rangle$ d'un échantillon $x(t)$ du processus par la relation:

$$\langle x(t)\rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\,dt$$

Lorsque cette limite existe .

Cette limite peut trés bien ne pas exister pour certains ou pour tous les échantillons(3),et si elle existe,elle peut dépendre de l'échantillon $x(t)$ choisi,mais elle ne dépent pas du temps.

Si la fonction aléatoire n'est pas stationnaire,on ne peut donc pas espérer avoir $\langle x(t)\rangle = E(x(t))$.

En d'autre termes on sait qu'il doit éxister des cas ou la moyenne temporelle et la moyenne statistique sont égales.

On peut définir d'autres moyennes temporelles,par exemple:

$$\langle x(t)\rangle^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)^2\,dt$$

Ou plus généralement une fonction d'Autocorrélation temporelle.

$$\mathcal{R}_{x}(\tau) = \langle x(t)\ x(t+\tau)\rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x(t+\tau)\,dt$$

un procéssus est dit ergodique si toutes les moyennes temporelles existent et ont méme valeur quelque soit l'echantillon.

II.2.5.Résumé:

1/ Si l'on observe un echantillon x(t) d'une fonction aléatoire stationnaire pendant un temps suffisament long,on peut penser intuitivement qu'on aura épuisé toutes les posibilités de variation du processus et que l'on aura en quelque sorte observé les irrégularités de toutes les fonctions echantillons(3).

2/ Pour évaluer les moyennes statistiques expérimentalement,l'on dispose que d'un échantillon sur lequel on éffectue une moyenne temporelle .Ce traitement n'a de valeurs que si le procéssus est èrgodique et stationnaire et ce que l'on suppose toujours(3).

Remarque:

L'ergodicité n'entraine pas la stationnarité et réciproquement,c'est-à-dire que ces deux notions sont indépendantes(3).

CHAPITRE III.

FONCTION D'AUTOCORRELATION

III.1.Fonction d'Autocorrélation à travers le processus: "statistique".

Etant donné un couple de variables aléatoires (x1,x2) les moments de ce couple sont par définition les moyennes des fonctions $x1^{\alpha}\ x2^{\beta}$,ou α et β sont des nombres entiers positifs ou nuls .Un moment est dit d'ordre n si $\alpha+\beta=n$ (2),(3).

considérons,une fonction aléatoire x(t) à deux instants t1,t2 c'est-à-dire considérons le couple de variables aléatoires:

$$x1=x(t1)$$

$$x2=x(t2)$$

les moments de ce couple sont definis par l'équation;

$$\overline{x^{\alpha}(t1)\ x^{\beta}(t2)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x1^{\alpha}\ x2^{\beta}\ p2(x1,x2)dx1dx2$$

ou p2(x1,x2) est la densité de probabilité du couple (x1,x2). C'est en générale une fonction de t1 et t2 et les moments sont donc aussi des fonctions de t1 et t2 en particulier on s'interesse au moment croisé du second ordre de la fonction x(t) qui s'écrit:

$$Rx(t1,t2)= \overline{x(t1)\ x(t2)}= E(x(t1)\ x(t2))$$

et qu'on appèlera fonction d'Autocorrélation de x(t),(3),de même que le moment du second ordre caractérise la corrélation éxistant entre deux variables aléatoires, cette fonction de t1 et t2,caractérise la dépedance stochastique entre les valeurs prises par une même fonction aux instants t1 et t2.

Il est important,à cause des nombreuses applications de la notion de corrélation, et bien saisir le sens physique de la fonction d'autocorrélation qui peut étre considérée comme une mésure de la ressemblance entre les deux grandeurs.

En effet , supposons que nous mésurons la ressemblance entre x(t1) et x(t2) en cosidérons la valeur quadratique moyenne de la différence.

$$\varepsilon = / x(t1) - x(t2) /$$

soit :

$$E(\varepsilon^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} / x1 - x2 /^2 \, p2(x1,x2)dx1dx2$$

$$E(\varepsilon^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x1^2 + x2^2 - 2x1x2)p2(x1,x2)dx1dx2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x1^2 \, p2(x1,x2)dx1dx2 + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x2^2 \, p2(x1,x2)dx1dx2$$

$$- 2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x1x2p2(x1,x2)dx1dx2$$

$$= E(x1^2) + E(x2^2) - 2 E(x1,x2)$$

En supposant: $E(x(t1))=E(x(t2))=0$

tel que:

$$E(x(t1))=m1x(t1) \quad \text{et} \quad E(x(t2))=m1x(t2)$$

$$E(x1x2)=Rx(t1,t2)$$

alors:

$$E(x1^2)=E((x1-m1x(t1))^2) = \sigma^2 x1$$

$$E(x2^2)=E((x1-m1x(t1))^2)= \sigma^2 x2$$

alors on trouve:

$$E(\mathcal{E}^2)= \sigma^2 x1+ \sigma^2 x2-2Rx(t1,t2)$$

les quantités $\sigma^2 x1$, $\sigma^2 x2$ étant positives , on voit que plus Rx(t1,t2) est petit , plus $E(\mathcal{E}^2)$ est grand et moins les variables se "ressemblent". La quatité Rx(t1,t2) mésure donc bien la dépendance stochastique de x(t1) et x(t2).

III.2.Fonction d'Autocorrélation le long du procéssus : "temporelle"

La fonction d'Autocorrélation temporelle est definie comme suit (3),(7):

$$\mathcal{R}x(\tau)= \langle x(t)\ x(t+\tau)\rangle$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\ x(t+\tau)dt$$

c'est la moyenne temporelle du produit $x(t)x(t+\tau)$.

On suppose que le processus x(t) soit èrgodique on aura (3):

$$Rx(\tau)=E(x(t)x(t+\tau))=\mathcal{R}x(\tau)$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\ x(t+\tau)dt$$

c'est-à-dire que la fonction d'Autocorrélation à travers le processus est égale à la fonction d'Autocorrélation le long du processus (3),(7).

III.3. Propriétés de la fonction d'Autocorrélation:

D'aprés les références (3),(7):

1/ Considérons une fonction aléatoire stationnaire x(t) c'est-à-dire que Rx est une fonction de τ seulement.

alors en posant. $t0=t+\tau$,on peut écrire:

$$E(x(t)\ x(t+\tau))= E(x(t0-\tau)\ x(t0))$$

On en déduit :

$$R(\tau)= R(-\tau)$$

en particulier si le processus est réel .

2/ La valeur de Rx(0) est toujours réelle et non négative . En effet ,cette valeur à l'origine de $Rx(\tau)$ est par définition:

$$Rx(0)=E(x(t))^2 >= 0$$

c'est donc la valeur moyenne de la puissance. Dans le cas ou la moyenne m_x est nulle , la valeur à l'origine de $R_x(\tau)$ est la variance σ_x^2

3/ Soient maintenant 2 variables aléatoires réelles x et y on sait que les quatité $E(x^2)$ et $E(y^2)$ sont positives ou nulles .
De mème ,quels que soient a et b , $E((ax+by)^2)$ est une quantité définie non négative , en écrivant cette quantité sous la forme :

$$E((ax+by)^2) = a^2 E(x^2) + 2ab\, E(xy) + b^2 E(y^2)$$

$$= a^2 r + 2ab\, s + b^2 t$$

On sait (Inégalité de schwartz) que la condition pour que cette forme quadratique soit définie non négative est que:

$$s^2 \leqslant rt$$

c'està-dire:

$$/E(xy)/ \leqslant \sqrt{E(x^2)\, E(y^2)}$$

si x et y sont les valeur d'une mème fonction aléatoire (supposée stationnaire) aux instants t et $t+\tau$,cette inégalité provoque que :

$$/R_x(\tau)/ \leqslant R_x(0)$$

La fonction d'Autocorrélation est donc toujours bornée en module, par sa valeur à l'origine .

4/ Dans de nombreux cas pratiques , les variables x(t) et y(t) tendent à se ((décorréler)) lorsque $\tau \longrightarrow \infty$ .Ceci signifie que généralement le présent n'est pas influencé par le passé trés lointain .On peut donc s'attendre à pouvoire écrire :

$$\lim_{\tau \to 0} Rx(\tau) = E(x(t))\, E(x(t+\tau)) = mx^2$$

Si cette limite éxiste . Cependant chaque fois qu'une fonction aléatoire contient une composante périodique cette limite n'éxiste pas car la fonction d'Autocorrélation contient aussi une composante périodique de même période .

III.4.Fonction d'Autocorrélation à travers le processus et Fonction de Densité Spectrale:

III.4.1.Notion de l'analyse spectrale:

L'analyse spectrale c'est l'étude des processus aléatoires dans le domaine des fréquences ;Nous utiliserons ce terme , que nous cherchions la distribution des amplitudes des puissances ou des énergies suivant les fréquences ,(3).

III.4.2.Rappel de notions d'énergie et de puissance d'un signal:

Considérons, qu'un signal x(t) est produit par un système , l'énergie dE de ce signal pendant le temps dt est donnée par(3):

$$dE = x(t)^2 dt$$

la puissance instantanée du signal x(t) , qui peut étre cosidérée comme une densité temporelle d'énergie est définie par:

$$P(t)=\frac{dE}{dt}=x(t)^2$$

l'énergie contenue dans le signal dans l'intervalle de temps (t,t+T)est:

$$E(t,T)=\int_t^{t+T}P(t)dt=\int_t^{t+T}x(t)^2dt$$

En particulier , l'énergie totale , c'est-à-dire l'énergie du signal dans l'intevalle ($-\infty,+\infty$) est égale à:

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)^2dt.$$

Il faut remarquer que la puissance instantanée d'un signal x(t) dépend généralement du temps, sauf si x(t) est indépendant de t, on peut donc définir des moyennes temporelles de cette puissance . Par exemple la puissance moyenne temporelle dans l'intervalle (t,t+T) est donnée par :

$$Pm(t,T)=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}P(t)dt=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}x(t)^2dt=\frac{E(t,T)}{T}$$

on peut dire que c'est la puissance d'un signal continu qui contient la même énergie pendant cet intervalle de temps.

On peut définir la puissance moyenne temporelle totale comme la puissance du signal continu posédant la même énergie totale :

$$Pm=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)^2dt$$

On voit donc que si le signal à une énergie totale finie , la puissance totale est nulle .

Lorsque le signal x(t) est périodique , depériode T, la puissance moyenne totale est égale à la puissance sur une période ,quelle que soit l'origine de l'itervalle de temps .

$$Pm= Pm(t,T) = \frac{1}{T}\int_{(T)} x(t)^2 dt$$

C'est ce que l'on appele souvent ((la puissance moyenne)) du signal.

III.4.3. Serie de Fourier:

Le théorème de fourier dit , que n'importe quelle fonction satisfisant certaines restrictions, peut étre exprimée par la somme d'une infinté de terme sinusoidal(8). Ces restrictions sont formulées par Direchlet. Brievement on dit conditions de Direchlet

La représentation en serie de Fourier peut prendre les formes suivantes (8),(9):

$$1/ \quad x(t)= \frac{ao}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (an \cos 2\pi ft + bn \sin 2\pi ft)$$

Ou $\qquad f= nf_1 = \frac{n}{T}$

T: La période du signal

Avec :

$$an = \frac{2}{T}\int_0^T x(t).\sin 2\pi ft\, dt$$

$$bn = \frac{2}{T}\int_0^T x(t).\cos 2\pi ft\, dt$$

On notant que : $$\frac{ao}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, dt$$

2/ La forme de l'itegrale: (ici présentée comme la somme , d'un signal de période infinie)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} An \exp(j2\pi ft)$$

ou:

$$Ao = \frac{ao}{2}$$

$$An = \frac{1}{2}(an - j\, bn) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\exp(-j2\pi ft)\, dt$$

D'ou :

$$An = |An| \exp(-j\theta n) \qquad n = \ldots,-2,-1\ ,1,2,\ldots$$

ou : $$An = \frac{1}{2}\sqrt{An^2 + bn^2}$$

$$\theta n = \tan^{-1}\left(\frac{bn}{an}\right)$$

III.4.4.Transformée de Fourier:

Nous avons vu qu'une fonction définie sur un intervalle de longueur T et vérifiant les conditions de Direchlet,pouvait étre représentée,sur cet intervalle , par un développement en serie de Fourier nous nous posons maintenant la question de savoir ce que devient cette représentation lorsque l'intervalle T devient infini.

III.4.4.1.Défition :

Soit x(t) un signal quelconque sur un intervalle de longueur T. il est représenté par une serie de Fourier valable dans cet intervalle (3):

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} An \exp(jnwot)$$

Avec : $$An=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-jnwot)\, dt$$

Soit wn=nwo la pulsation du $n^{ième}$ harmonique lorsque T -->∞

$$\Delta wn = nwo - (n-1)wo=\frac{2\pi}{T} \longrightarrow 0$$

En introduisant la grandeur XT(wn):

$$XT(wn)= TAn = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-jwnt)\, dt$$

On peut écrire :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} XT(wn)\exp(jwnt) \cdot \frac{1}{T} \qquad \text{pour } |t| < \frac{T}{2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} XT(wn)\exp(jwnt)\, \Delta wn$$

En supposant que $XT(wn)$ tende , quel que soit wn , vers une limite $X(wn)$, losque $T \to \infty$, $x(t)$ tend vers une intégrale de Riemann (3):

$$\lim_{T \to \infty} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(w)\, \exp(jwt)\, dw$$

La fonction $X(w)$ est donnée , dans ces conditions par:

$$X(w) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\exp(-jwt)\, dt$$

w : La pulsation

$$w = 2\pi f = nwo = n\,\frac{2\pi}{T}$$

Et nous définirons la transformation de Fourier (3),(7), par les formules :

$$X(f) = F(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \exp(-j2\pi ft)dt$$

$$x(t) = F^{-1}(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\ \exp(j2\pi ft)\ df$$

La fonction x(t) est dite transformée de Fourier inverse de X(f).

III.4.4.2.Propriétés

- L'egalité de Perseval,qui s'écrit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} /x(t)/^{2}\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} /X(f)/^{2}\ df$$

III.4.5. Densité spectrale .Fonction d'Autocorrelation:

- Considérons une fonction aléatoire périodique , elle est identifie par :

$$p(x(t1),......,x(tN)) = p(x(t1+T),......,x(tN+t))$$

Tel que T est considéré comme la période , c'est-à-dire que toutes les échantillons xi(t) sont périodiques .

Soit x(t) un tel échantillon , on peut le dévelloper en serie de Fourier :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} An\ \exp(jnwot)$$

D'aprés la référence (3):

La fonction d'Autocorrélation du procéssus est ;

$$Rx(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} bn\ \exp(jnwo\tau)$$

avec : $bn= E(/An/^2)$

Pour chaque échantillon $/An/^2$ est la puissance de l'harmonique de rang n.

La moyenne statistique de cette puissance , $E(/An/^2)= bn$, peut étre considérée comme la puissance moyenne (statistique) du procéssus à la fréquence nf_1 (3),par analogie avec les fonctions périodique déteministes .

On en déduit (3):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Rx(\tau)\ \exp(-jw\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sum_{n=-\infty}^{+\infty} bn\ \exp(jnwo\tau)\exp(-jw\tau)d\tau$$

$$=Sx(f)$$

D'ou(3):

$$Sx(f)= \int_{-\infty}^{+\infty} Rx(\tau)\ \exp(\_j2\pi f\tau)$$

Considérons maintenant un processus aléatoire stationnaire , la densité spectrale de puissance est définie en vertu de la transformée de Fourier de la fonction d'Autocorrélation(3).

$$Sx(f)=F(Rx(\tau))= \int_{-\infty}^{+\infty} Rx(\tau)\exp(-jw\tau)d\tau$$

Et l'on a réciproquement $Rx(\tau)$ d'aprés le théoreme de Bochner-Kincthine (ou Wiener dans la littérature Américaine).

- Théoreme de Wiener-Kintchine:

Si x(t) est une fonction aléatoire stationnaire dont la fonction d'Autocorrélation est continue , on peut toujours mettre cette fonction d'autocorrélation sous la forme :

$$Rx(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} Sx(f)\exp(2\pi jf\tau)d\tau$$

Sx(f) est la densité spectrale de puissance de la fonction aléatoire .

Alors:

$$Sx(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} Rx(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau$$

$$Rx(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} Sx(f)\exp(j2\pi f\tau)df$$

CHAPITRE IV

INFORMATIONS PORTEES PAR LA FOCTION D'AUTOCORRELATION

Trés souvent en norme la fonction d'Autocorrélation en la divisant par R(o):

$$\Gamma(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(o)}$$

$\Gamma(\tau)$ est appelé degré de self-cohérence ou plus simplement cohérence. $\Gamma(\tau)$est maximal à l'origine est vaut +1,$/\Gamma(\tau)/$ est compris entre zéro et un (7).

Comme nous l'avons déja mentioné,la quantité $\Gamma(\tau)$ est en général interprétéecomme une mésure du degré de ressemblance entre les valeurs de la fonction x(t) aux point t et $t+\tau$.

$\Gamma(\tau)$ dépend du décalage τ des points de la fonction x(t) l'un par rapport à l'autre .

Lorsque $\tau=o$, ce degré de ressemblance est maximal,et égal à l'unité .La rapidité avec laquelle ce degré de ressemblance décroit ,lorsque τ augmente ,est une mésure de la rapidité avec laquelle la fonction évolue .Plus $\Gamma(\tau)$ décroit rapidement ,plus la fonction x(t) contient des composantes de fréquences élevées (7) la cohérence $\Gamma(\tau)$ (fonction d'Autocorrélation) pour une fonction x(t) périodique , aléatoire ou déterministe ,est aussi une fonction périodique de même période .

Si la fonction x(t) est composée de plusieurs termes à périodes différentes , ces périodes seront présentées dans la fonction d'Autocorrélation , mais on remarque que si la fonction $x(t)$ contient plus de deux ou trois périodes ,qu'il est difficile de les distinguer.

Si la fonction $x(t)$ est composée d'un terme périodique et d'un autre qui est aléatoire non périodique , La fonction d'Autocorrélation présente une pseudo-période qu'est égale à la période du terme périodique et la manitude diminue au fur et à mésure que τ augmente.

CHAPITRE V

ECHANTILLONNAGE

V.1. Introduction:

Pour l'analyse des signaux déteministes ou aléatoires , on est souvent amené à remplacer une fonction continue du temps x(t) par une autre fonction g(t) dont l'analyse est plus simple et qui ressemble dans un certain sens à la fonction de départ.

Une méthode courante pour obtenir une telle approximation consiste à définir la fonction g(t) à partir des valeurs de x(t) à un certain nombre d'instants , généralement séparés par des intervalles de temps d'habitude égaux.Par exemple si To est l'itervalle de temps séparant deux instants cosécutifs d'échantionnage ; on pourra définir g(t) de la façon suivante (3),(10):

$$g(t)=x(nTo) \qquad \text{pour} \quad nTo \leq t \leq (n+1)To$$

L'échantionnage pèrmet de simplifie l'analyse des signaux en remplaçant une fonction du temps x(t) par une suite discrète de valeurs x(nTo).

L'intéret porté aux problèmes reliés à l'échantillonnage est ainsi une conséquence du dévelloppement des calculateurs digitaux qui , de par leur nature, ne peuvent travailler que sur des suite de nombres.La question de base qui se pose alors est de savoir si le fait d'échantillonner une fonction x(t) ne fait pas perdre une partie de l'information contenue dans ce signal (3).

V.2. Déscription des signaux et des spectres:

De nombreux signaux sont susceptibles de deux méthodes de déscription,selon la nature de la variable indépendante adoptée:

1/ Si cette variable est le temps ,t, la déscription du signal est dite temporelle.

2/ Mais si on utilise comme variable la fréquence ,f,la déscription du signal est dite fréquentielle . Par exemple , l'énergie du signal , son Autocorrélation se définissent dans le domaine temporel , par contre , son spectre de puissance sont décrit dans le domaine fréquentiel (domaine des fréquences).L'intéret de décrire un signal dans deux domaines différents,provient du faite que les deux représentation se complètent (5).

V.3.Impulsion de Dirac:

Dans le domaine temporel , l'impulsion de Dirac $\delta(t-to)$ est une distribution qui assigne à une fonction test x(t) la valeur numérique x(to) ,(5), selon la relation:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-to)x(t)dt = x(to) \qquad , \forall\ (to), \forall\ x$$

Une fonction-test est définie par les prescriptions suivantes:

1/ Elle doit étre continue en t=to.

2/ Elle doit être indéfiniment dérivable.

3/ Elle doit être nulle en dehors d'un domaine fini , ou tout ou moins décroissante vers zéro à l'infini.

IL ya une infinité de fonctions tests(5);la quantité x(to) est l'échantillonnage de x(t) éffectué à l'instant to, par l'impulsion Dirac $\delta(t-to)$

V.3.1. Spectre de l'impulsion de Dirac :

La transformation de fourier directe du signal centré de Dirac est (5):

$$\delta(t) \rightleftharpoons \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\exp(-j2\pi ft)dt$$

$$=\exp(-j2\pi ft)_{t=o} = 1 \qquad \forall f$$

$$= \beta(t)$$

Si le signal de Dirac est éxentré , son spectre est modifié :

$$\delta(t-to) \rightleftharpoons \beta(t)\exp(-j2\pi fto)$$

V.3.2. Conséquence :

Les transformées de fourier continues satisfont une loi de symetrie selon laquelle , si $x(t) \rightleftharpoons X(f)$ inversement $X(f) \rightleftharpoons x(-t)$ en général ; pour les signaux pairs , $X(f) \rightleftharpoons x(t)$.

Or le signal de Dirac est pair ;d'ou le résultat fondamental ilustré dans la figure(V.1),(5):

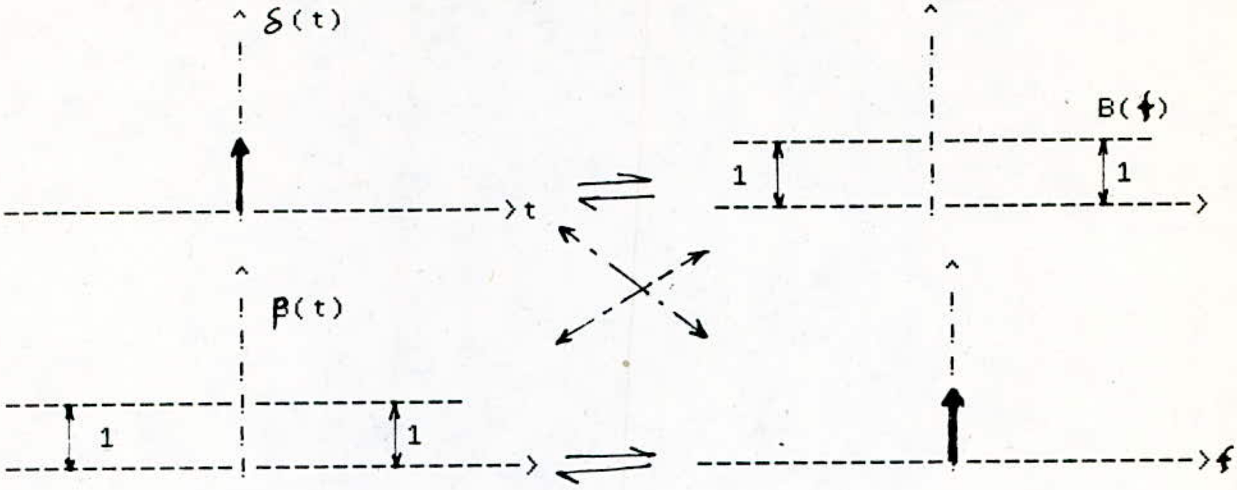
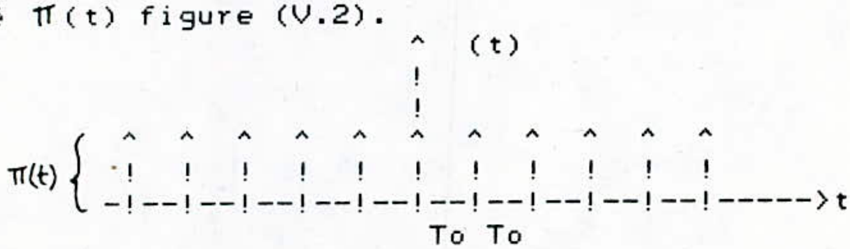


Fig (V,1)

V.4. Les peignes de Dirac:

V.4.1. Définition:

Dans le domaine temporel , un peigne de Dirac est une suite périodique illimitée d'impulsion de Dirac de même intensité , dans le cas ou celui-ci est l'unité , le peigne est dit unitaire est noté $\pi(t)$ figure (V.2).



Fig(V.2)

Désignons par To la période de répétition des impulsions , nous représenterons les peignes unitaires et centrés par la reelation(5).

$$\Pi(t)=\ldots\ldots+\delta(t+2To)+\delta(t+To)+\delta(t)+\delta(t-To)+\ldots\ldots$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kTO) \quad ; \quad k=\ldots\ldots,-2,-1,$$

V.4.2. Forme exponentielle des peignes:

On sait que le spectre d'un signal périodique est un spectre de raies constituées par des impulsions de Dirac d'intensité Cn et de période fo.

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Cn \exp(jnwot)$$

$$Cn = \frac{1}{To}\int_{(To)}\Pi(t)\exp(-jnwot)\,dt = \frac{1}{To}$$

fo: Désigne l'intervalle entre deux impulsions successives par conséquent , le spectre d'un peigne de Dirac unitaire , d'intensité 1/To . voir la fig(V.3)

```
                ^ Π(t)                                       ^ (1/To)Π(f)
                !                                            !
                !                                            !
       ^   ^    ^    ^    ^                        ^    ^    ^    ^    ^
       !   !    !    !    !                        !    !    !    !    !
-----!---!---!---!---!--->              -----!---!---!---!---!---->
          To  To        t                           1/To              f
```

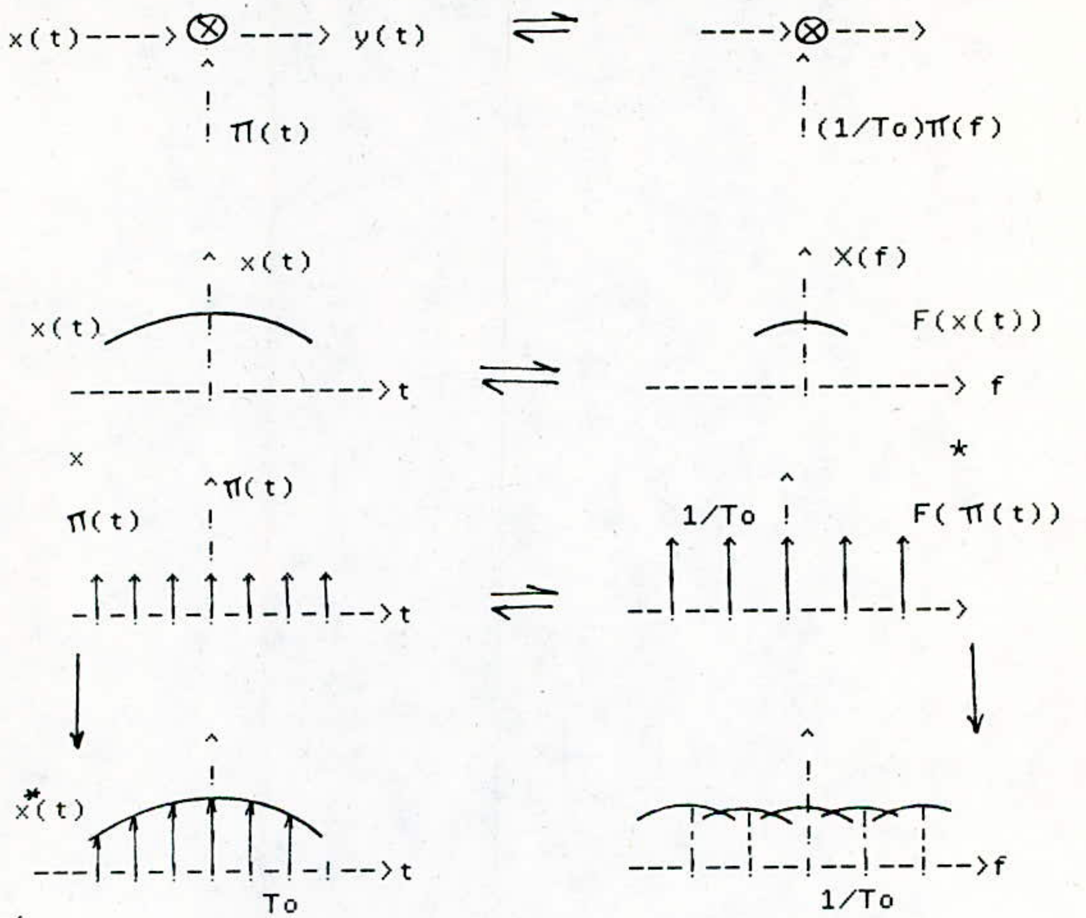
$$\Pi(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kTo) \rightleftharpoons \sum_{n=-oo}^{+oo}\frac{1}{To}\delta(f-nfo)$$

$k=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$ $\qquad$ $n=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$

Fig(V.3)

V.5. Modulation d'un peigne deDirac:

Effectons le produit d'un peigne de dirac unitaire et centré par un signal à temps continu, comme indiqué sur la figure (V.4) nous obtenons (5):



$$\overset{*}{x}(t)=\sum_{k} x(kT_o)\,\delta(t-kT_o)$$

$$F(\overset{*}{x}(t))=\sum_{n} \frac{1}{T_o}\,X(f-nf_o)$$

$f_o=1/T_o$

La période d'échatillonnage du signal est la période du peigne de Dirac

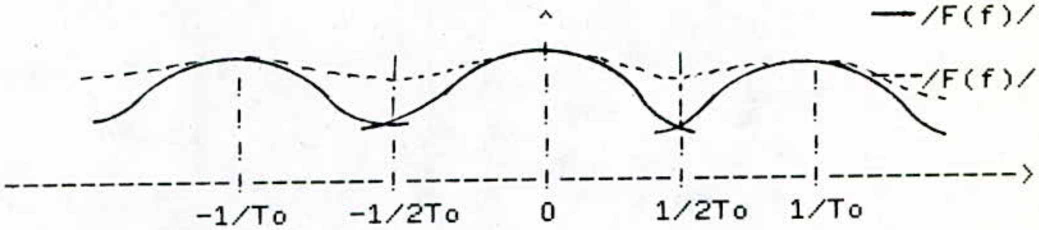
La période de repétition du signal est la fréquence du peigne de Dirac

Fig(V.4)

Si on connait seulement $f^{*}(t)$ ou $F^{*}(t)$?,(3).

Un simple éxamen de ce problème dans le domaine du temps montre qu'il n'est pas en général possible de reconstuire précisément la fonction f(t) à partir de $f^{*}(t)$. Il éxiste une infinité de fonctions du temps qui prennent toutes les mèmes valeurs aux instants t=nTo.

Considérons maintenant le problème dans le domaine des fréquences. On ne peut pas en général retrouver F(f) à partir de $F^{*}(f)$.



Fig(V.5): Effet de l'échantillonnage.

On peut espérer retrouver éxactement f(t) à moins que le spectre de f(t) ne soit zéro au-dela de la fréquence (1/2To).Cette idée est la base du théoreme de l'échantillonnage découvert par Shannon .

Théoreme:

Si un signal a un spectre d'énergie qui est nul au-delà d'une fréquence fm Hz , ce signal est complètement déterminé par ses valeurs à des instants périodiques séparés par au plus 1/2fm secondes

Remarque:

De nombreux auteurs utilisent une définition différente car ils donnent à chaque impulsion de Dirac une intensité $T_0 f(nTo)$ au lieu de f(nTo).Il faut bien remarquer que de toute manière cette fonction echantillonnée n'est qu'une commodité mathématique car en pratique on ne dispose que de la suite de valeurs f(nTo) à un facteur d'échelle prés. Nous préférons introduire le coefficient T_0 pour des questions de dimension . Ainsi avec notre définition (3):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overset{*}{f}(t)\, dt = T_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nTo)$$

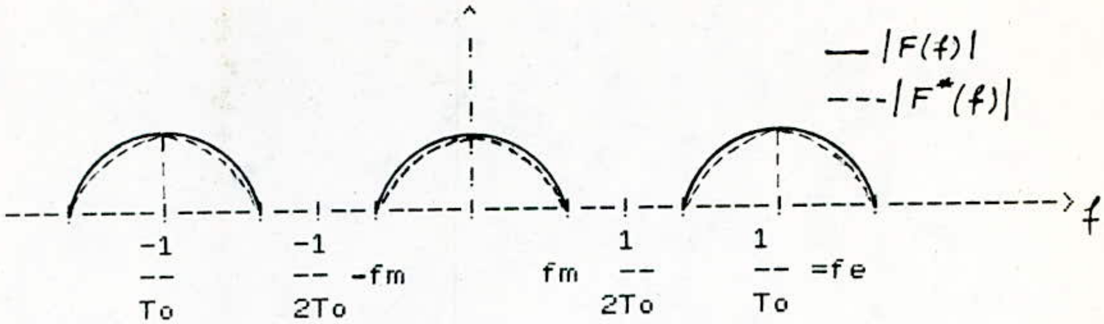
On voit bien que pour To assez petit , on aurra :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overset{*}{f}(t)dt \cong \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$

Théoreme de Shannon :

La question de base qui se pose alors est de savoir si le faite d'échantillonner une fonction f(t) ne fait pas perdre une partie de l'information contenue dans ce signal .Peut-on retrouver toutes les propriétés de f(t) grace à la suele connaissance de $\overset{*}{f}(t)$? . Autrement dit , est-il possible de reconstuire f(t) ou F(f). Autrement dit , il est théoriquement possible de recostuire f(t) à partir de ses échantillons f(nTo) si la fréquence d'échantillonnage fe = 1/To est au moins deux fois plus grande que la fréquence maximale fm présente dans f(t), c'est-à-dire si(3):

$$fe >= 2fm \quad \text{ou encore} \quad 1/2To >= fm$$



Fig(V.6)

V.6. Fonction d'Autocorrélation d'une fonction aléatoire échantillonnée:

La fonction aléatiore x(t) échantillonnée est, par définition(3):

$$\overset{*}{x}(t) = \sum_{n=-oo}^{+oo} To\ x(nTo)\,\delta(t-nTo)$$

On ne s'interesse aux valeurs de la fonction x(t) qu'aux instants d'échantillonnage . Le seul problème intéressant en pratique est l'étude des moyennes temporelles . Par exemple , la moyenne temporelle du premier ordre s'écrit :

$$\langle \overset{*}{x}(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{+T} \overset{*}{x}(t)\,dt = \lim_{N \to oo} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(nTo)$$

Avec 2T= (2N+1)To

Remarquons que , si l'on fait la moyenne statistique des moyennes temporelles , on obtiendra la moyenne de x(t) puisque :

$$E(\langle \overset{*}{x}(t)\rangle) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} E(x(nTo)) = mx$$

Calculons maintenant la fonction d'Autocorrélation temporelle de x(t):

$$\mathcal{R}_x^*(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2N+1} \int_{-T}^{+T} \overset{*}{x}(t)\, \overset{*}{x}(t-\tau)\,dt$$

D'aprés la référence (3):

$$\mathcal{R}x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} To\,\mathcal{R}'x(kTo)\,\delta(\tau - kTo)$$

Avec la relation .

$$\mathcal{R}'x(kTo) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{n=-n}^{N} x(nTo)\ \ x(nTo-kTo)$$

Supposons que le procéssus x(t) soit ergodique , c'est-à-dire ,(3):

$$Rx(\tau) = E(x(t)x(t-\tau)) = \mathcal{R}x(\tau) = \lim_{To \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\ x(t-\tau)\,dt$$

Nous cherchons à savoir quelles relations éxistent entre $\mathcal{R}x(\tau)$et $\mathcal{R}_x^*(\tau)$

Si la période d'échantillonnage était convenablement choisie on pouvait écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ x(t-kT_0)dt = To \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nTo)\ x(nTo-kTo)$$

On peut considerer comme plausible la formule suivante ,(3):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x(t-kTo)dt = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(nTo)x(nTo-kTo)$$

Alors, on pourrait écrire :

$$\mathcal{R}_{x}(kTo)=\mathcal{R}'_{x}(kTo)$$

Ou encore :

$$\mathcal{R}^{*}_{x}(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} To\,\mathcal{R}_{x}(kTo)\,\delta(\tau-kTo)=\left[\mathcal{R}_{x}(\tau)\right]^{*}$$

$$\mathcal{R}^{*}_{x}(\tau)=\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x(nTo)\ x(nTo-kTo)$$

Ceci signifie que la fonction d'Autocorrélation de la fonction x(t) aprés échantillonnage est simplement la fonction obtenue en échantillonnant la fonction d'Autocorrélation de x(t),(3).

CHAPITRE VI

METHODES NUMERIQUE D'ESTIMATION DE LA FONCTION D'AUTOCORRELATION.

VI.1. Introduction:

L'anlyse numérique d'un signal aléatoire est essentiellement un problème d'éstimation . Dans la théorie de l'estimation , on utilise les données disponibles pour estimer la valeur d'un paramètre caractéristique . Par exemple à partir de N échantillons d'un signal aléatoire x(n) , on peut estimer sa valeur moyenne par (10):

$$\hat{m}x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x(n)$$

et indiquer que la vraie valeur moyenne mx se trouve dans l'itevalle (mx-a , mx+a),avec une probabilité b. D'une manière statistique , la précision de l'estimateur est établie à l'aide des valeurs a et b .

VI.2.Biais et variance :

soit x(t) un signal aléatoire stationnaire est ergodique . Pour qu'un traitement quelconque sur ce signal soit réalisable , il faut considérer un ensemble fini de N échantillon . L'estimateur d'un paramètre du processus aléatoire représenté par N échantillon x(nTo) est une fonction de variables aléatoires .

$$\hat{\alpha} = S(x(0),x(1),.....,x(n-1))$$

La fonction S est appelée l'esimateur .

Pour une comparaison objective , on utilise souvent deux grandeurs pour caractériser un estimateur ; le biais et la variance .

Le biais d'un estimateur est,par définition , la différence entre son espérece mathématique et la vraie valeur cherchée c'est-à-dire :

$$\beta\hat{\alpha} = E(\hat{\alpha}) - \alpha$$

Si le biais est nul , la densité de probabilité de l'etimateur est centré sur la valeur cherchée. l'estimateur correspendant est appelé estimateur non biaisé. Un estimateur dont le biais n'est pas nul est appelé estimateur biaisé .

La variance d'un estimateur est une mésure de l'etendue de la densité de probabilité $p(\hat{\alpha})$.Elle est définie par .

$$Var(\hat{\alpha}) = E((\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha}))^2) = \sigma_\alpha^2$$

VI.3.Estimateur non biaisé pour l'Autocorrélation:

la fonction d'Autocorrélation d'un procéssus aléatoire ergodique.

$$\mathcal{R}_x(u) = \langle x(v)x(v+u) \rangle = E(x(v)x(v+u)) = Rx(u)$$

Elle peut étre mise sous la forme suivante . $\mathcal{R}x(u)=E(Uu(v))$.

Pour une valeur donnée de u,il s'agit d'estimer la valeur moyenne d'un signal Uu(v), comme on ne dispose que de N valeur de x(u) la valeur $\langle x(v)x(v+u) \rangle$ ne peut estimer qu'à partir de (N-u) valeurs Uu(v). En appliquant l'estimateur de la valeur moyenne on obtient :

$$\mathcal{R}_x(u) = \frac{1}{N-/u/} \sum_{v=1}^{N-/u/} x(v)x(v+u) \qquad (VI.1)$$

VI.4. Estimateur biaisé pour l'autocorrélation :

Un autre estimateur de la fonction d'Autocorrélation est donné par (10):

$$\mathcal{R}'x(u) = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^{N-/u/} x(v)x(v+u) \qquad (VI.2)$$

On remarque qu'il ne diffère de l'estimateur non biaisé que par un facteur multiplicatif . En comparant les relations (VI.1) et (VI.2), on peut écrire :

$$\mathcal{R}'x(u) = \frac{N-/u/}{N}\mathcal{R}x(u)$$

VI.5.Commentaires :

Le choix entre les estimateurs $\mathcal{R}x(u)$ et $\mathcal{R}'x(u)$ se porte normalement sur l'estimateur non biaisé (cosistant) $\mathcal{R}x(u)$.toutefois,pour les valeurs de u proches de N ,la variance de cet estimateur augmente considérablement ceci provient du faite que la valeur moyenne est calculée avec trés peu de termes lorsque u est proche de N (10). En revanche ,la variance de l'estimateur biaisé $\mathcal{R}'x(u)$ ne dépend pas directement du décalage u . Lorsque u est voisin de la durée d'observation N, cette variance n'augmente pas de la mème manière que précedement ,Mais, cette fois , c'est le biais qui croit avec le décalage u . Cet estimateur n'est pas trés utile pour des valeurs de u proches de N à cause de son biais .

VI.6. Programmation de l'estimateur non biaisé : "Méthode directe"

La forme finale adoptée de l'estimateur non biaisé est :

$$R(u) = \frac{1}{N-u} \sum_{v=1}^{N-u} x(v)x(v+u)$$

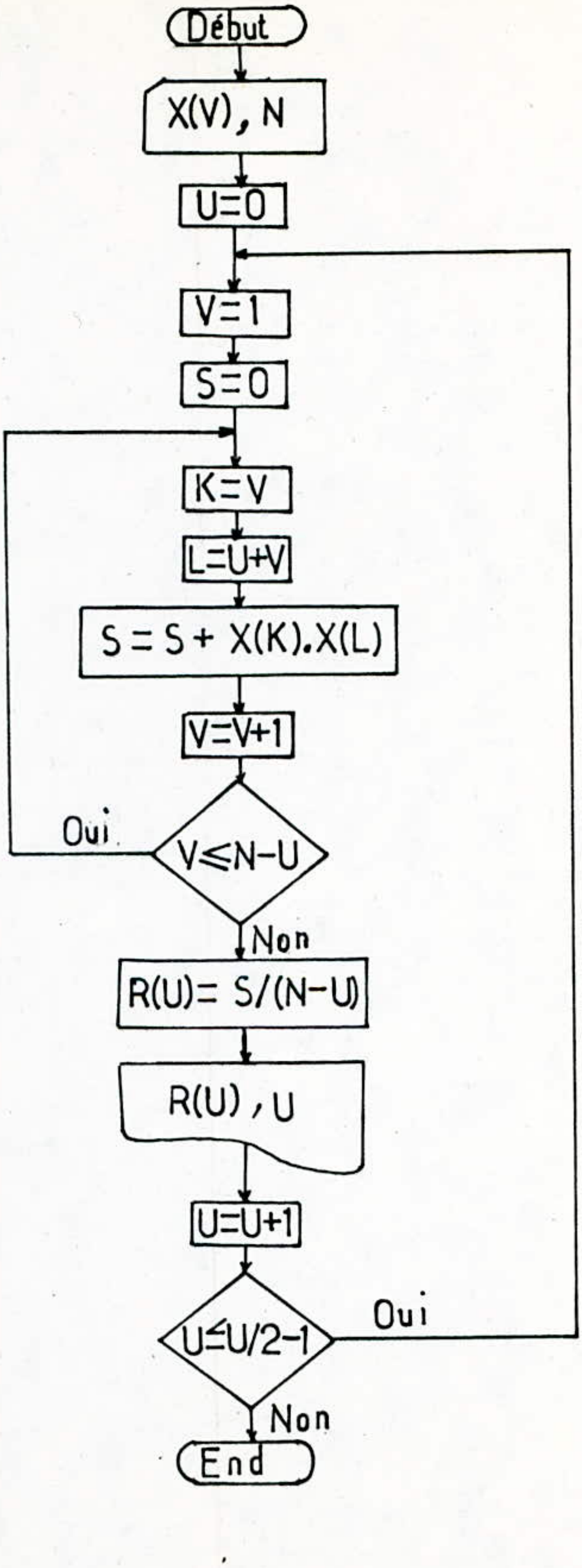
ou $u=0,1,\ldots\ldots,N-1$ $\quad u=\dfrac{\tau}{To}$

$v=1,2,\ldots\ldots,N$ $\quad v=\dfrac{t}{To}$

D'aprés le paragraphe (VI.5) la variance de l'estimateur non biaisé augmente cosédérablement pour les valeurs de u proches de N ; alors on va tenir ,dans notre programmes , que des valeurs de u inferieur à N/2.

Voir l'organigramme à la page suivante .

Pour le programme voir annexe 1.


Début
X(V), N
U=0
V=1
S=0
K=V
L=U+V
S = S + X(K).X(L)
V=V+1
V≤N-U
Oui
Non
R(U)= S/(N-U)
R(U) , U
U=U+1
U≤U/2-1
Oui
Non
End

VI.7.Méthode indirecte de détermination de l'éstimateur de la fonction d'autocorrélation :

VI.7.1.Transformée de fourier limitée :

Supposons qu'on a une fonction aléatoire stationnaire ou l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} /x(t)/^2 \, dt = \infty$$

La transformée de Fourier , pour les fonction qui remplissent les conditions de Direchlet , est donnée par l'équation suivante :

$$X(f) = F(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) \, dt$$

Elle n'éxiste pas en pratique , puisque on ne peut pas mésurer la fonction $x(t)$ entre $-\infty$ et $+\infty$; on peut la mésurer uniquement dans un intervalle de temps T .

Alors X(f) est éstimer par la transformée de fourier limitée(2) :

$$X_T(f) = X(f,T) = \int_{0}^{T} x(t) \exp(-j2\pi ft) \, dt \qquad \text{(VI.3)}$$

Vue le chapitre (III) , on remarque que :

$$X(f,T) = T\, An$$

avec $f = \dfrac{n}{T}$

VI.7.2. Densité spectrale à partir de la transformée de Fourier :

" C'est une deuxieme façons pour déterminer la fonction de densité spectrale ".

On considère une fonction aléatoire stationnaire et ergotique , dont la transformée de Fourier limitée est donnée par l'équation (VI.3).La densité spectrale de puissance d'une telle fonction est donnée par (2):

$$Sx(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} E(/x(f,T)/^2)$$

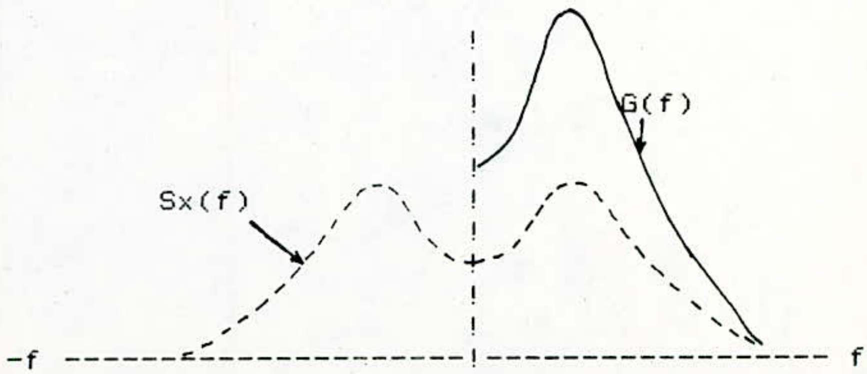
mais la fonction Sx(f) est définie sur toute l'intervalle de fréquence de $-\infty$ à $+\infty$, et doivent étre reférée au spectre à deux phase " two-sided density function" (2).

cette fonction pssède la propriété de symetrie voir la figure (VI.1) .

$$Sx(f) = Sx(-f)$$

cette fonction est utilisée pour l'étude analytique , cependant pour les applications pratiques on utlise la fonction Gx(f) appelée fonction de densité spectrale à une phase , tel que (2):

$$G(f) = 2\ Sx(f) \qquad f >= o$$
$$= o \qquad f < o$$



Fig(VI.1) Fonction spectrale à une phase et à deux phases.

VI.7.3. Fonction d'Autocorrélation :

D'aprés le théoreme de Wiener-Kintchine (voir III.4.5) la fonction d'Autocorrélation est donnée par la transformée inverse de Fourier de la fonction de densité spectrale :

$$Rx(\tau)=\int_{-\infty}^{-+\infty} Sx(f)\ \exp\ (j2\pi f t)\ df \qquad (VI.4)$$

D'apres les références (2),(8),(9):

La fonction d'Autocorrélation $Rx(\tau)$ est donnée par la partie réelle de la transformée de Fourier . Puisque les fonctions $Rx(\tau)$ et $Sx(f)$ sont réelles, alors , la relation (VI.4) peut étre écrite sous la forme suivante:

$$Rx(\tau) = \int_{0}^{+\infty} Gx(f)\ \cos\ 2\pi f \tau\, df$$

VI.7.4. Estimateur non biaisé de la fonction d'Autocorrélation :

Comme nous l'avons vue, dans (VI,1) l'éstimateur non biaisé de la fonction d'Autocorrélation , à partir d'un signal échantillonné $x(v)$, avec N le nombre d'échantillon , est donnée par :

$$\mathcal{R}_x(u)= \frac{1}{N-u} \sum_{u=1}^{N-u} x(v)\ x(u+v)$$

On définit aussi l'éstimateur non biaisé de la fonction d'Autocorrélation donnée par une transformée limitée inverse de Fourier de l'estimateur de la densité spectrale donnée par la trasformée Gx(f) (2).

Alors on a :

$$Rx(u)= \int_{o}^{fc} \hat{G}(f) \cos 2\pi f \tau \, df \qquad (VI.5)$$

tel que :

fc :la fréquence d'échantillonnage qui verifie le critère de Nyquist.

$$fc=\frac{1}{2To}$$

VI.7.4.1. Estimateur de la densité spectrale :

La densité spectrale peut étre éstimer à partir de la transformée finie de Fourier d'un signal stationnaire comme(2):

$$\hat{G}(fn)= \frac{2}{T} /X(fn,T)/^{2}$$

et ceci depuis l'introduction en 1965 vers les algorithmes de compilation rapide de la serie de Fourier "Algorithms for the fast computation of Fourier series" (2) .

VI.2.4.2. Déscription de l'estimateur de la fonction d'Autocorrélation :

L'estimateur de la fonction d'Autocorrélation est donné par l'expression (VI.5) , dont sa forme discrète est donnée par (8):

$$R_x^*(\tau) = \sum_{f=o}^{fc} \hat{G}x(f) \cos 2\pi f \tau . \Delta f \qquad (VI.6)$$

fc : la fréquence de Nyquist (3).

Δf: la largeur de la bande de fréquence minimum disponible pour l'enregestrement.

D'aprés la référence (8):

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{NTo}$$

L'algorithme de la transformée de Fourier utilisée dans notre programme est l'algorithme de Cooly-Tukey , et nous donne comme résultats:

$$An = \frac{X(fn,T)}{T}$$

alors :

$$\hat{G}x = \frac{2}{T} /X(fn,T)/^{2} = \frac{2An^{2} T^{2}}{T} = 2 An^{2} T .$$

Ce qui nous donne :

$$R_x^*(\tau) = \sum_{f=o}^{fc} 2 An^{2} T \cos 2\pi \frac{n}{T} \tau . \frac{1}{T}$$

$$fc = \frac{1}{2To} = \frac{N}{2} \frac{1}{NTo} = \frac{N}{2} \Delta f$$

$$fn = \frac{n}{T} = \frac{n}{NTo} = n \Delta f$$

$$\tau = uTo \qquad , \qquad u = o,1,2,3,.....$$

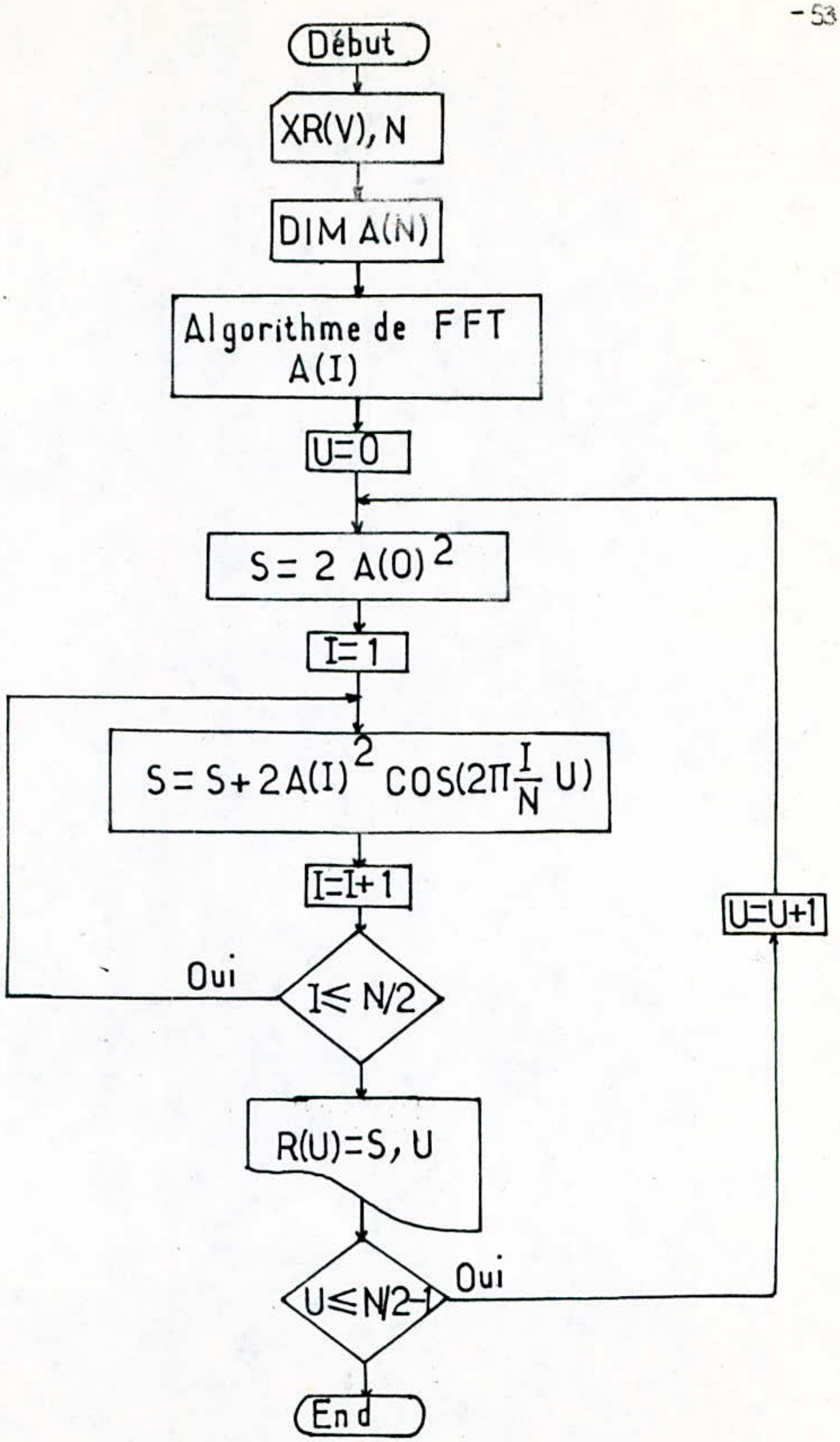
Alors:

$$Rx(u) = \sum_{n=1}^{N/2} 2 An^{2} \cos 2\pi \frac{n}{N} u \qquad (VI.7)$$

VI.7.5. Programmation de l'estimateur non biaisé de la fonction d'autocorrélation:

La forme finale de l'estimateur non biaisé , tirée à partir de la transformée inverse limitée de Fourier , est donnée par l'expression (VI.7) , pour laquelle on a établie l'organigramme donné dans la page suivante .

On notant que An , notés A(I) dans le programme voir (Annexe 2), sont les résultats d'un programme établi par un colègue qui prépare son Projet de fin d'étude sur l'établissement de la fonction de densité spectrale .


Début
XR(V), N
DIM A(N)
Algorithme de FFT
A(I)
U=0
S= 2 A(0) 2
I=1
S=S+2A(I) 2 COS(2π I/N U)
I=I+1
Oui
I≤ N/2
R(U)=S, U
Oui
U≤N/2-1
U=U+1
End

VI.8. Comparaison des résultats donnés par les deux programmes:

La comparaison est éffectuée à l'aide d'un troisième programme , voir (Annexe 3), qui n'est que la fusion des deux programmes , et qui permet de tracer les résultas donnés par les deux méthodes sur le mème graphique . Pour celà on éffectué quelques démonstrations , qu'on va vous les résumer dans les trois points suivants :

1/ Pour une fonction sinusoidale "c'est-à-dire déterministe périodique ", nous avons obtenu le mème résultats par les deux méthodes , mème si on change le nombre de points à corréler ,voir les graphiques pages 55 et 56 .

2/Pour une suite aléatoire de points generés par le micro-ordinateur au moyen de la fonction RND , les résultats donnés par les deux méthodes présentent un certain écart . Cet écart n'est visible que por les grandes valeurs de u (ou τ), voir le graphique page 58 .

3/ Si on augmente le nombre de points à corréler , c'est-à-dire v , l'écart entre les résultats donnés par les deux méthode diminue. Voir le graphique page 59.

Alors nous pouvons dire que cet écart provient peut étre de l'approximation de la transformée de fourier par la transformée de fourier limitée .

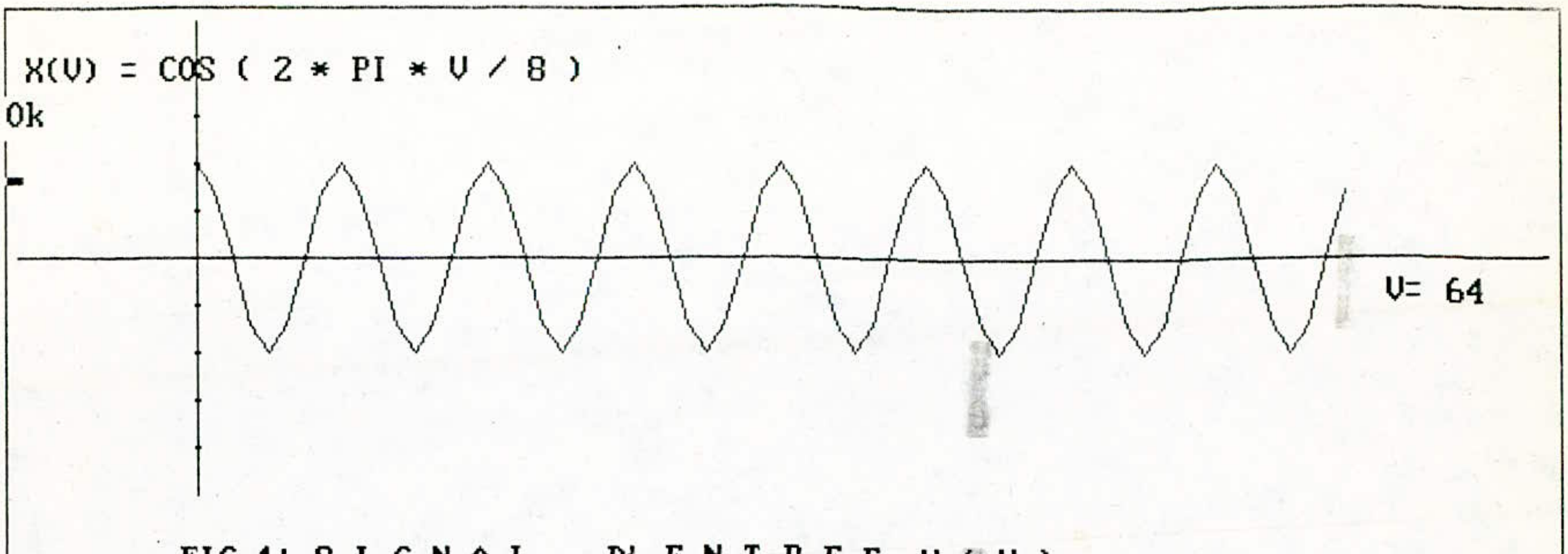


FIG 1: S I G N A L D' E N T R E E X (V)

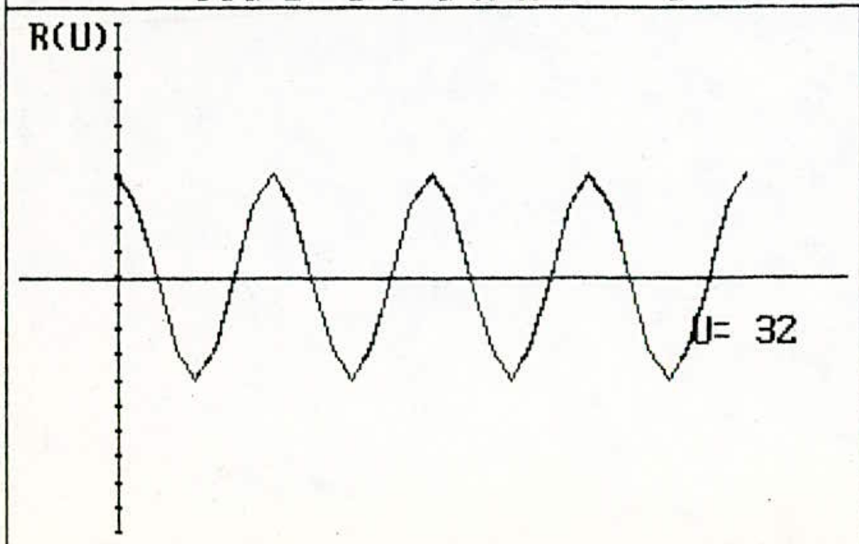


FIG 2: ESTIMATEUR DE L'AUTOCORRELATION

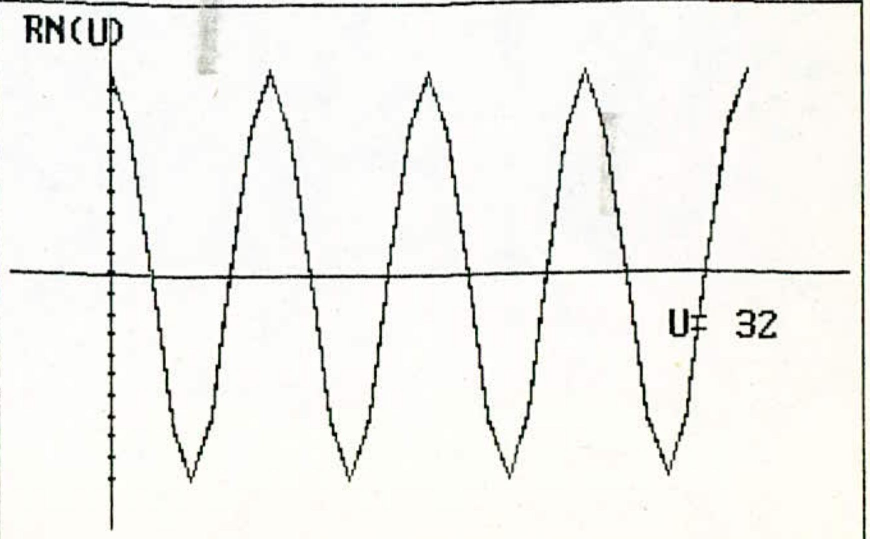


FIG 3: ESTIMATEUR NORME

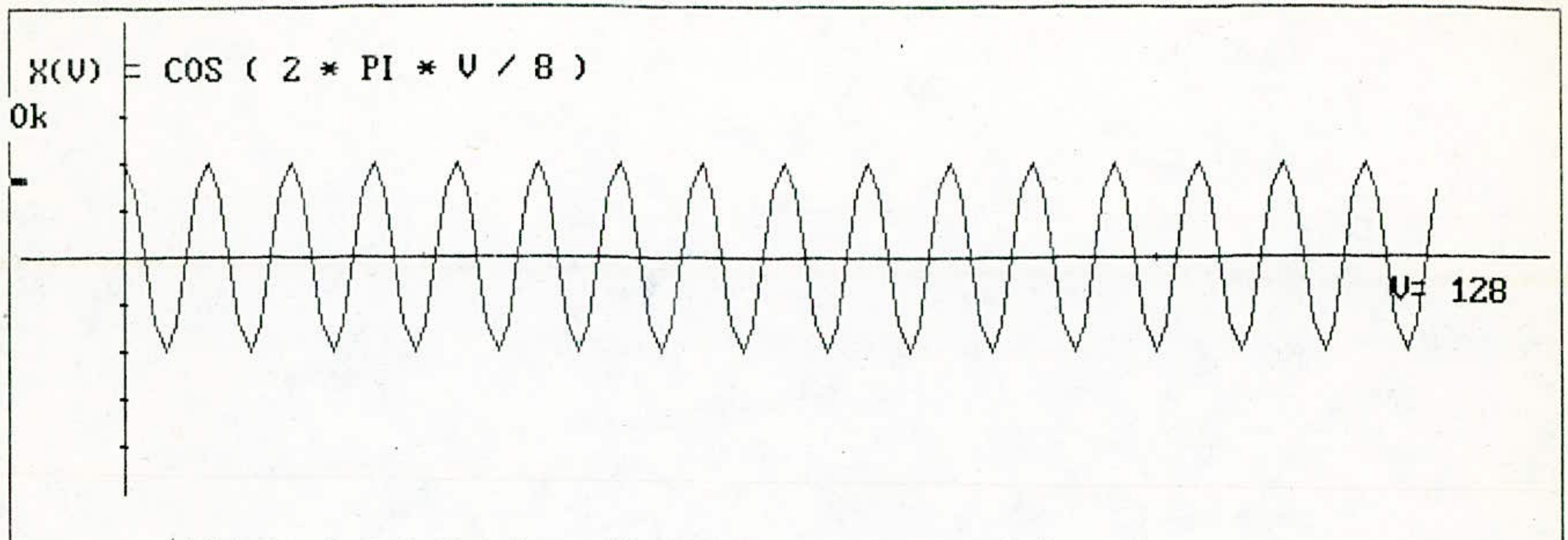


FIG 1: S I G N A L   D' E N T R E E X (V)

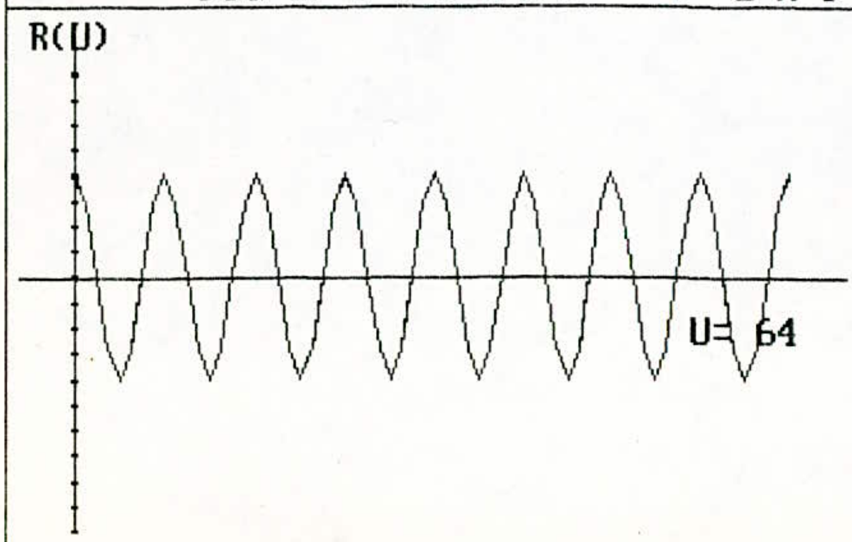


FIG 2: ESTIMATEUR DE L'AUTOCORRELATION

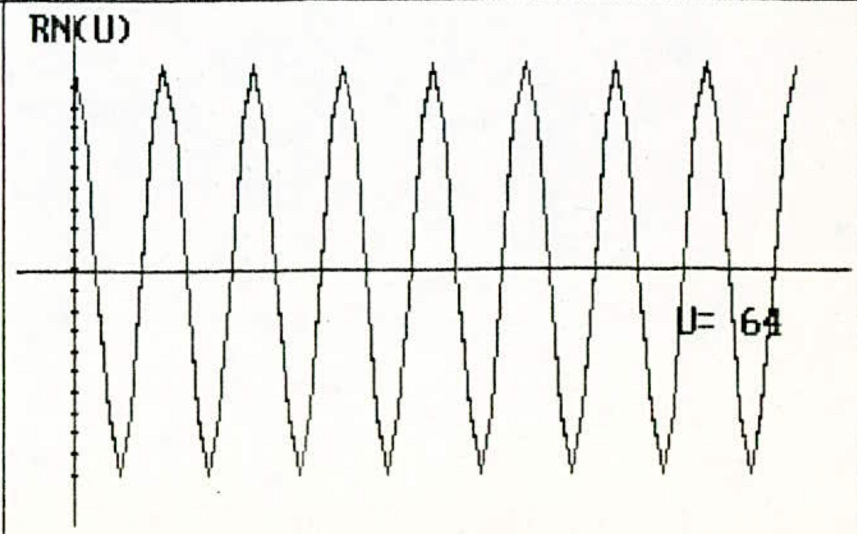


FIG 3: ESTIMATEUR NORME

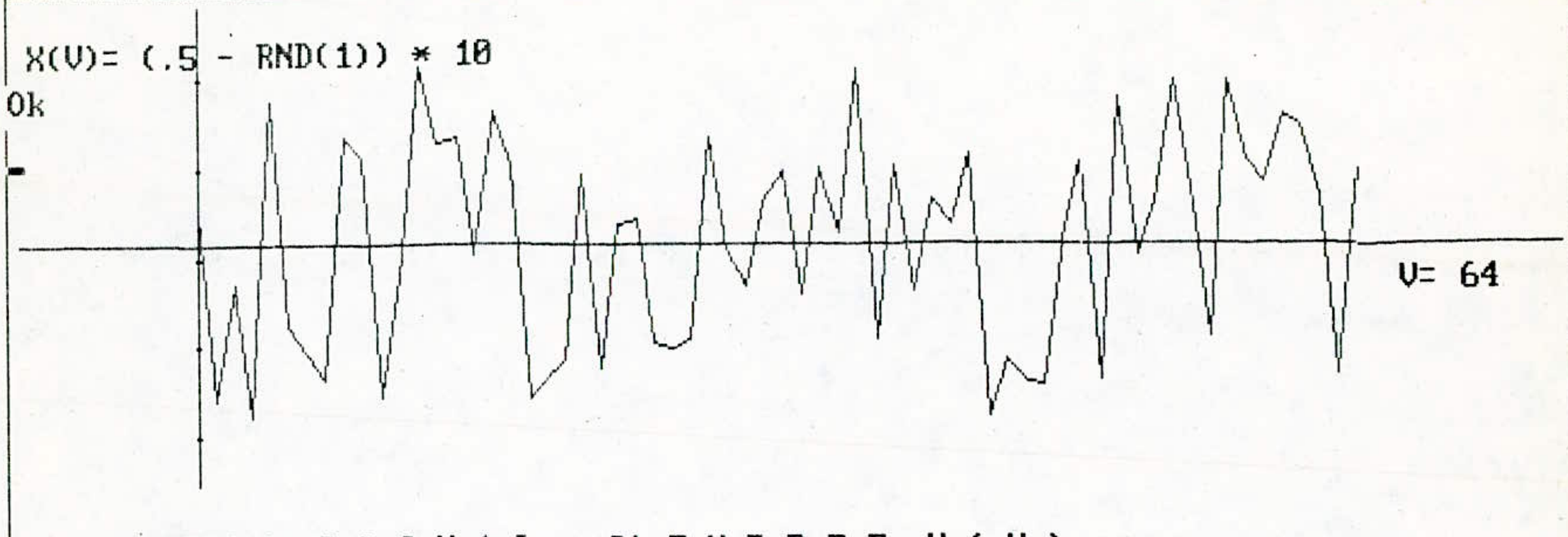


FIG 1: S I G N A L D' E N T R E E X (V)

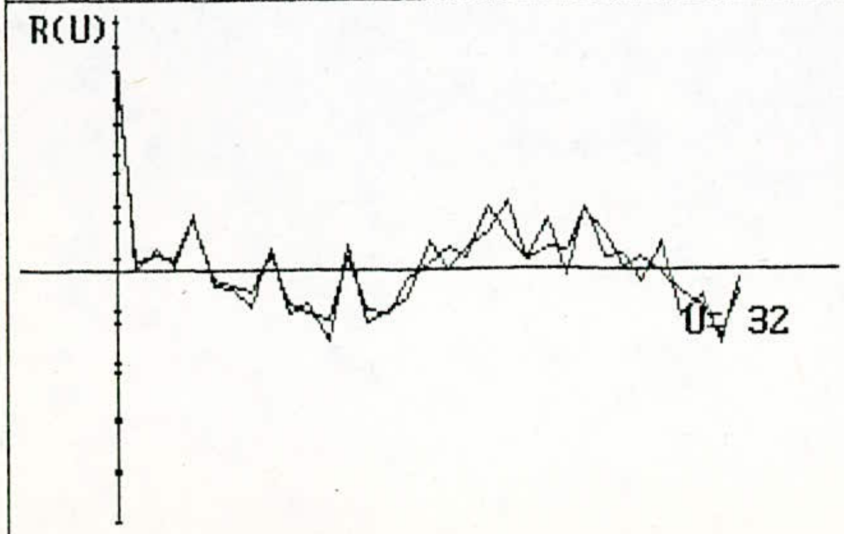


FIG 2: ESTIMATEUR DE L'AUTOCORRELATION

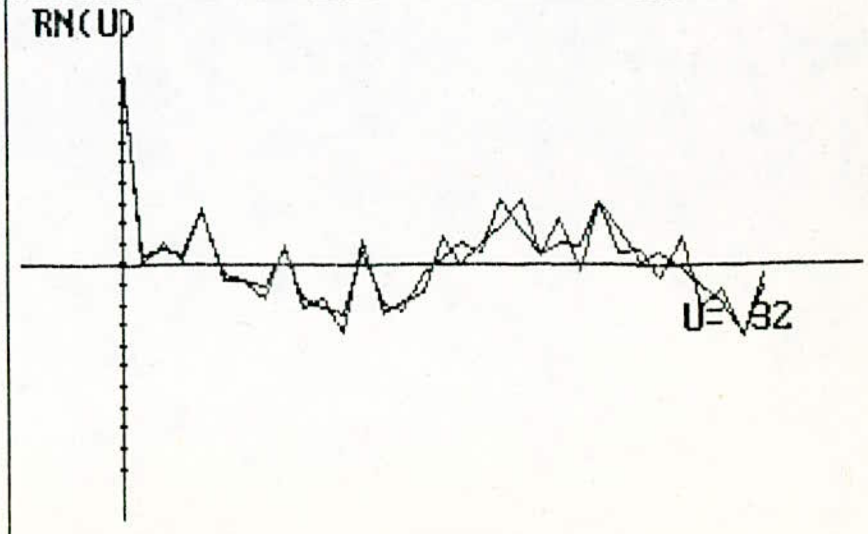


FIG 3: ESTIMATEUR NORME

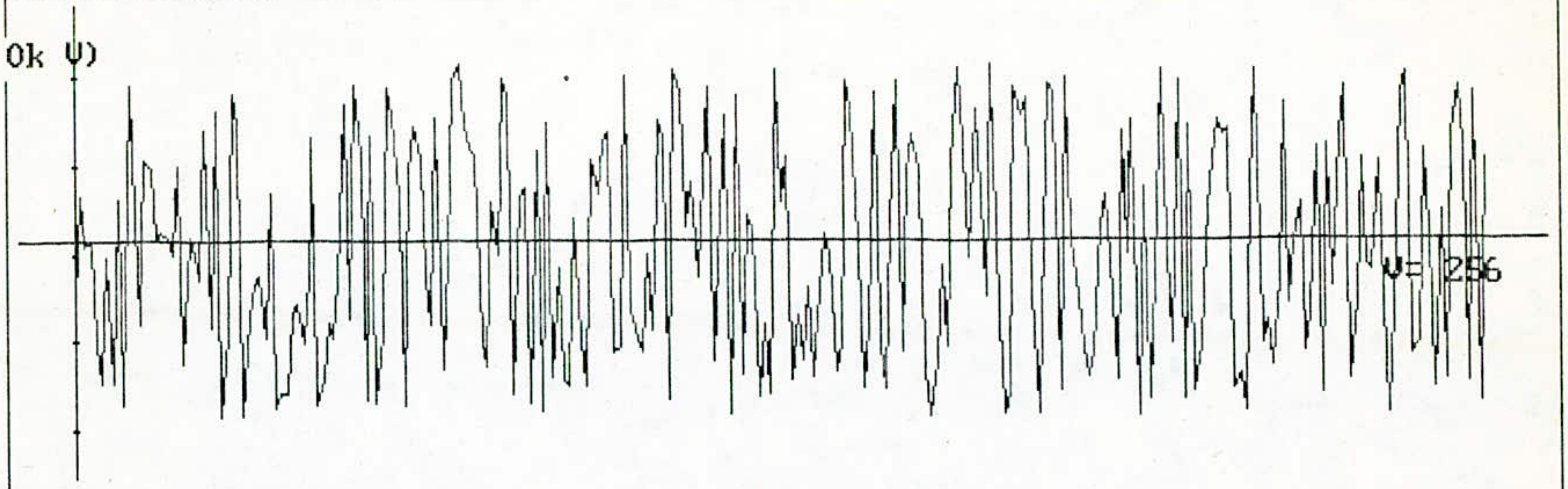


FIG 1: S I G N A L D' E N T R E E X (V)

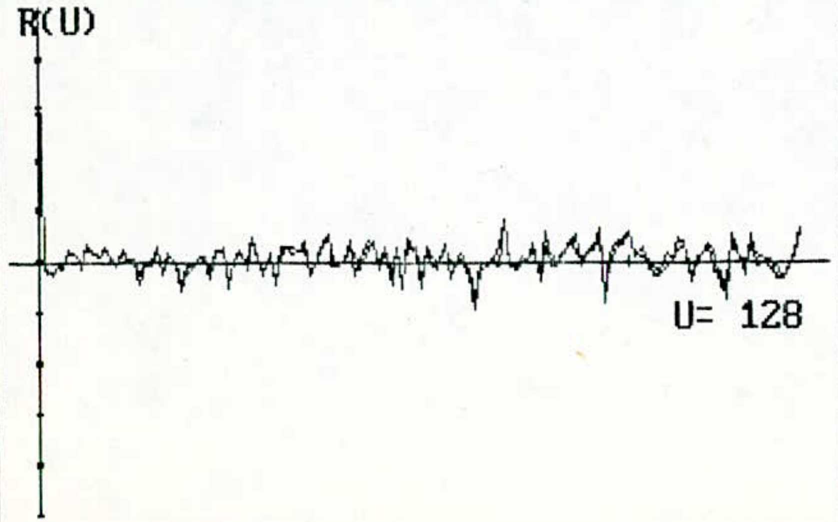


FIG 2: ESTIMATEUR DE L'AUTOCORRELATION

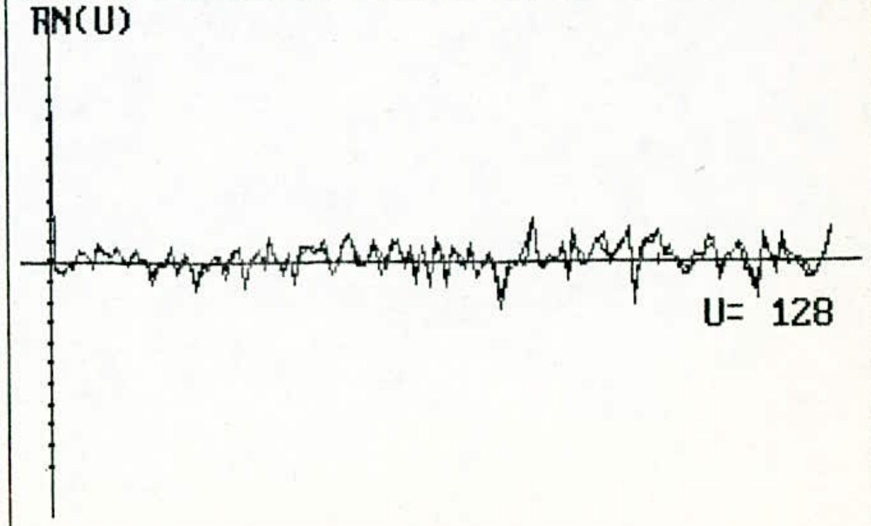


FIG 3: ESTIMATEUR NORME

CHAPITRE VII

DIAGNOSTIC D'UN MOTEUR ELECTRIQUE.

Nous allons maintenant effectuer à l'aide de l'estimateur de la fonction d'autocorrélation , le diagnostic d'un moteur électrique , dont les caractéristiques et les conditions d'installation sont les suivantes :

Puissance 12 Kw.

Vitesse de rotation 750 tr/min.

Le nombre d'ailettes du ventilateur de refroidissement est de 8.

Ce moteur sert à entrainer par courroie un générateur à courant constant , et il est installé et fixé par vis sur un panneau en acier dont il est solidaire à une fondation en béton .

Le signal de vibration du moteur est prélevé à l'aide d'un capteur et un enregistreur voir la fig (VII.1).

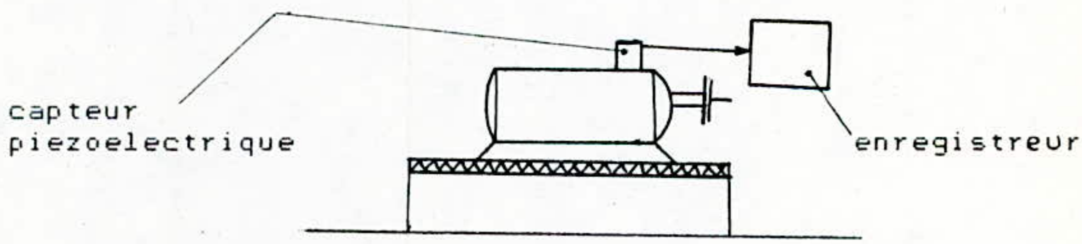


Fig (VII.1)

Ce signal est introduit aux programmes à l'aide de l'instruction "READ DATA", et nous avons obtenue les graphiques suivants:

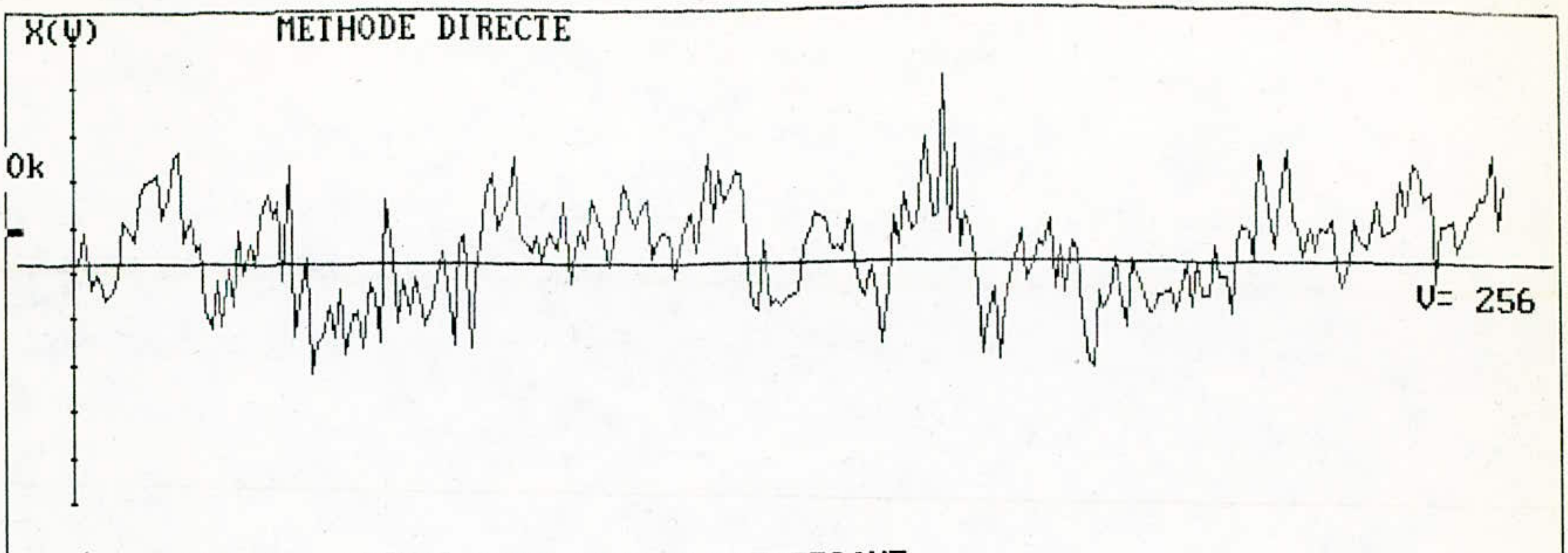


FIG 1 : SIGNAL D'UN MOTEUR ELECTRIQUE

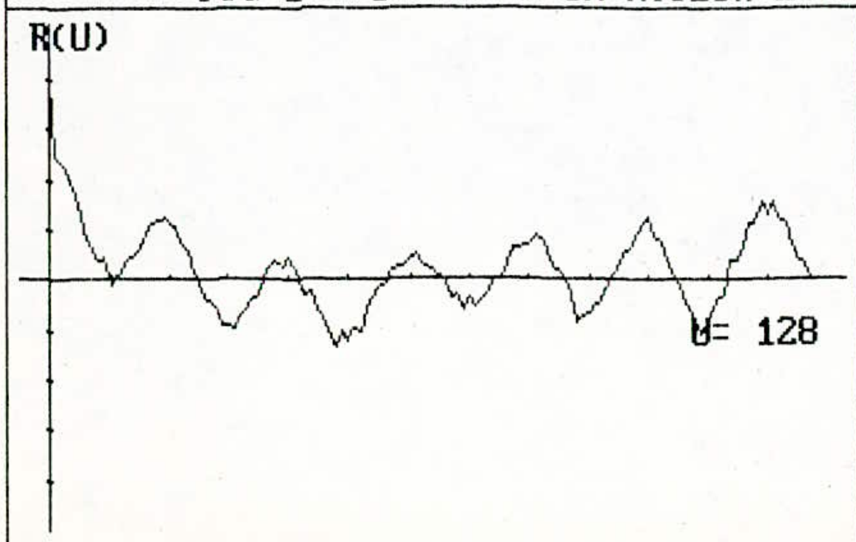


FIG 2: ESTIMATEUR DE L'AUTOCORRELATION

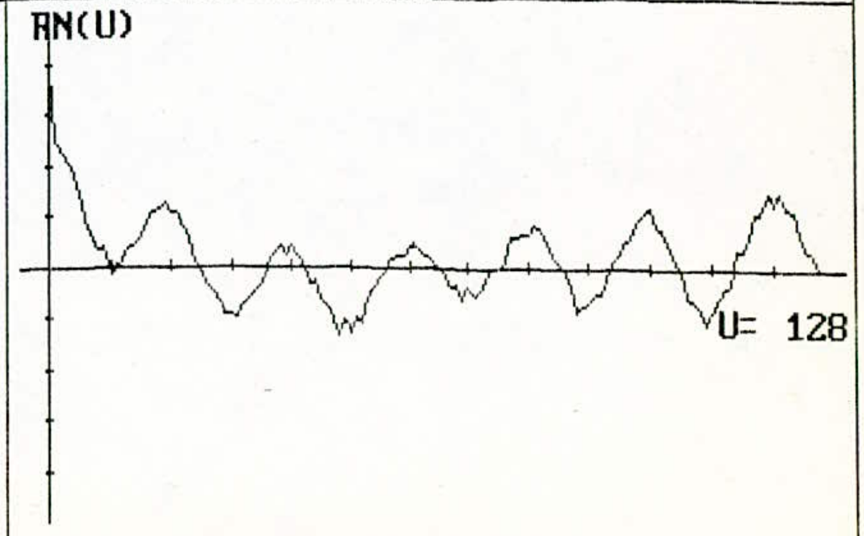


FIG 3: ESTIMATEUR NORME

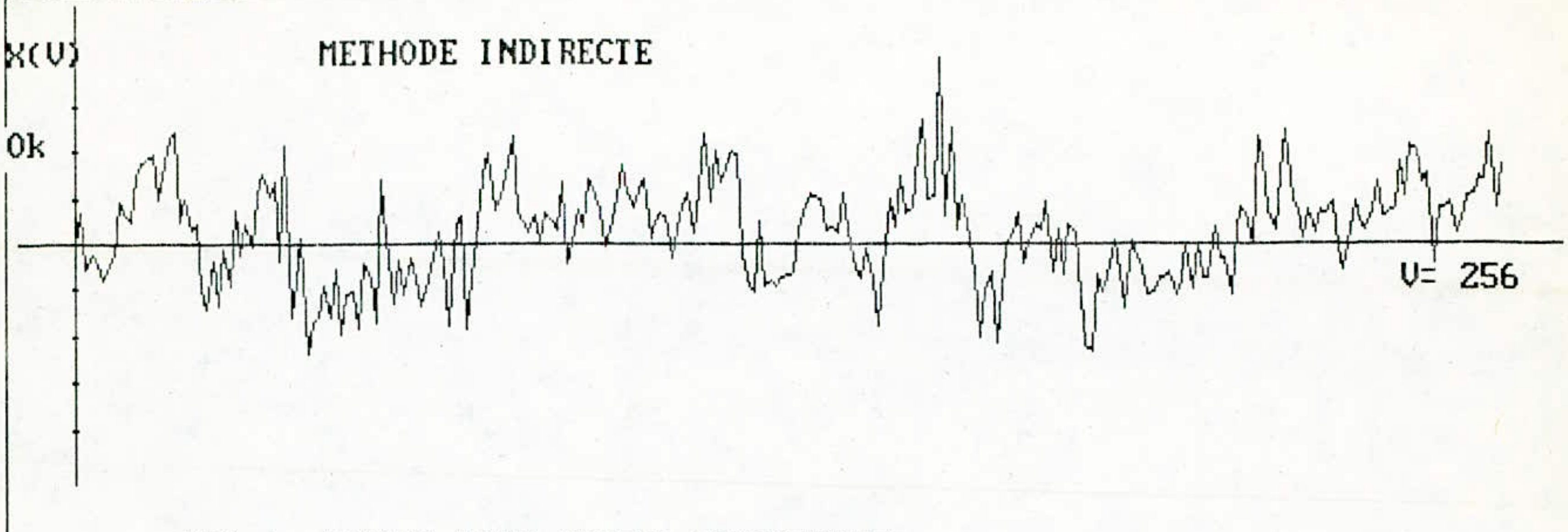


FIG 1: SIGNAL D'UN MOTEUR ELECTRIQUE

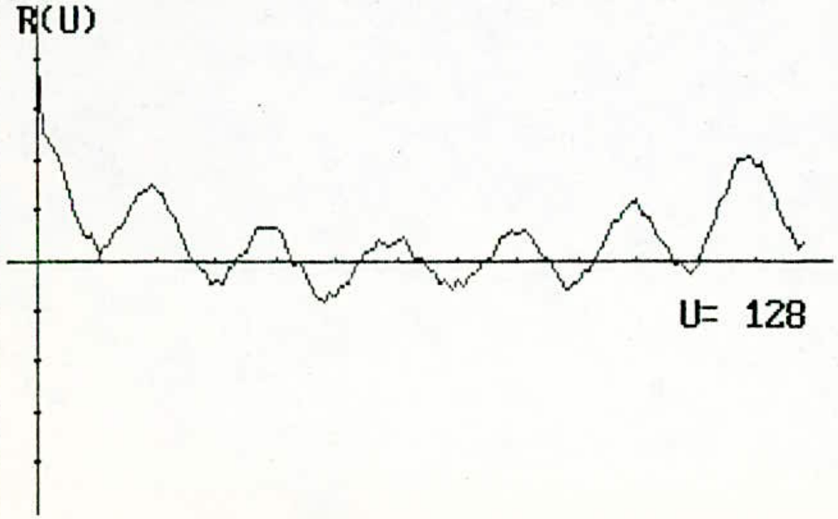


FIG 2: ESTIMATEUR DE L'AUTOCORRELATION

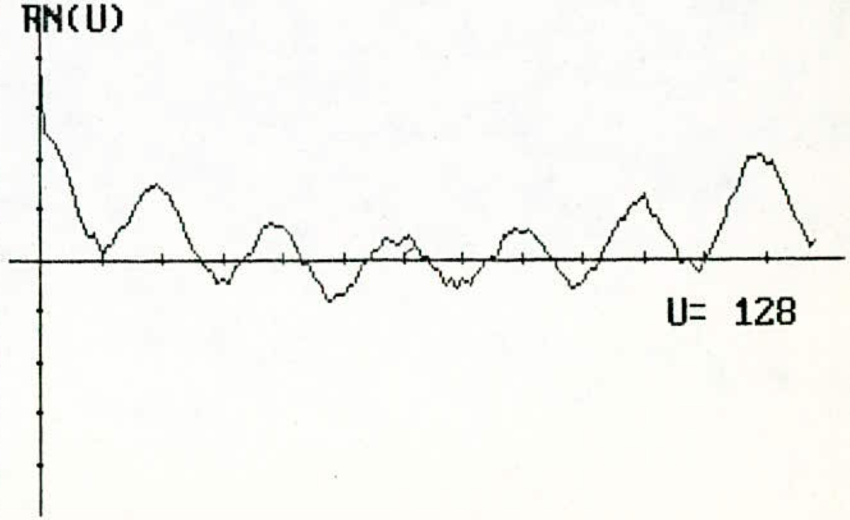


FIG 3: ESTIMATEUR NORME

Ok U) COMPARAISON DES DEUX RESULTAS

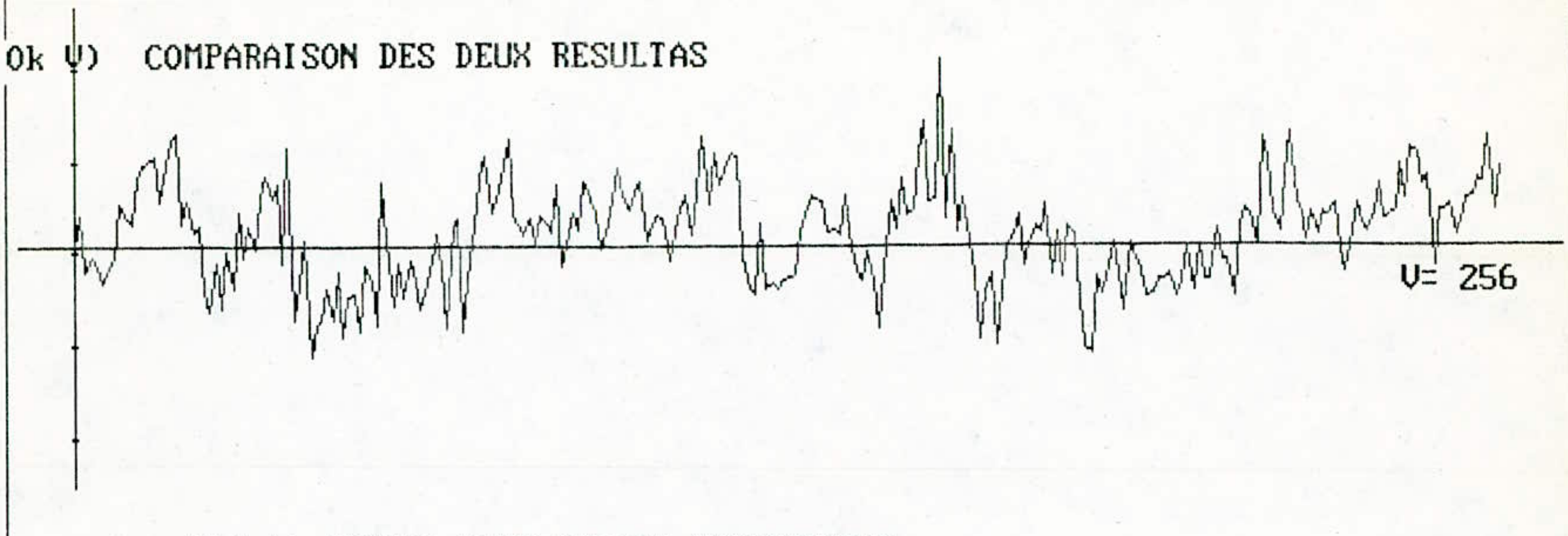


FIG 1: SIGNAL D'UN MOTEUR ELECTRIQUE

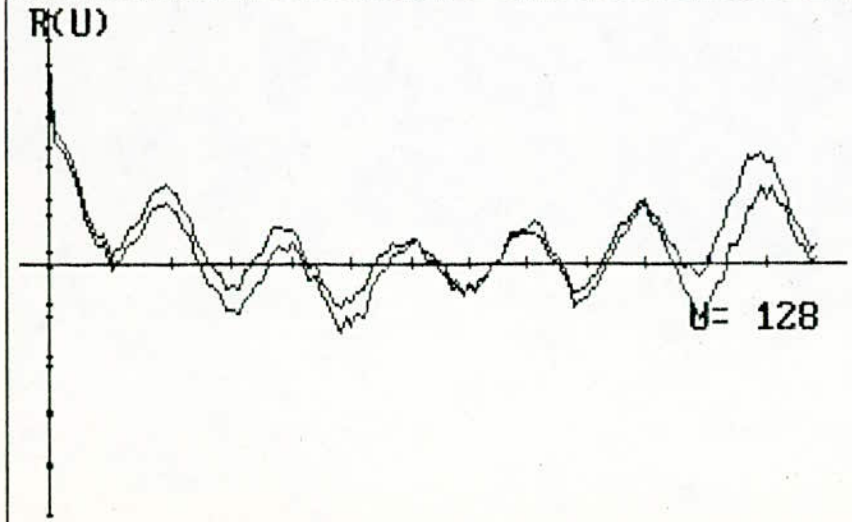


FIG 2: ESTIMATEUR DE L'AUTOCORRELATION

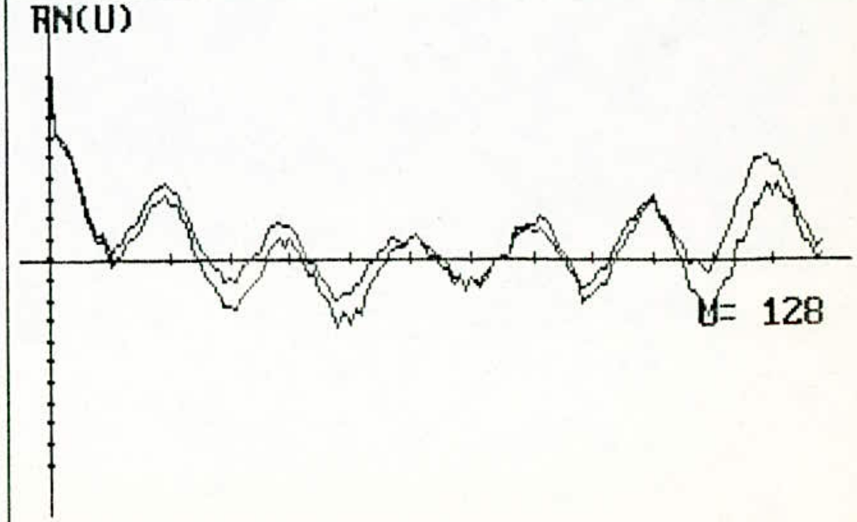


FIG 3: ESTIMATEUR NORME

VII.1.Interprétation de la courbe de l'estimateur de la fonction d'autocorrélation:

On remarque , au voisinage de l'origine (u=o), une chute nette de la valeur maximale R(o) , ce qui signifie que ce signal contient des termes aléatoires qui proviennent peut-être pas du moteur

Puis la fonction prend une forme périodique composée d'un ensemble de plusieurs termes périodiques, qui proviennent certainement des élements du moteur lui mème . Malheureusement nous distiguons que deux termes périodique , mais on sait d'aprés les graphiques qu'il ya d'autres termes periodiques mais de faibles amplitudes et de périodes trés courtes .

VII.2. Détermination approximatve des periodes :

D'aprés le graphique , on remarque qu'il ya un terme périodique de periode :

$$T1 \cong 130\ To \quad s = 130\ 0.004 = 0.52\ s$$

C'est à dire une fréquence : $f1 = \dfrac{1}{130\ To}\ Hz = \dfrac{1}{130\ 0.004} = 1.923\ Hz$

et un autre terme d'amplitude plus grande mais avec une periode plus faible .

$$T2 \cong 20\ To = 20\ 0.004 = 0.080\ s$$

c'est-à dire une fréquence : $f2 = \dfrac{1}{20\ To}\ Hz = \dfrac{1}{20\ 0.080} = 12.5\ Hz$

f2 correspond éxactement à la fréquence de rotation du moteur .

CHAPITRE IIX

Conclusion

Nous avons réussi à établir par deux méthodes différentes l'estimateur de la fonction d'autocorrélation .

L'estimateur de la fonction d'autocorrélation qui nous a permis d'établir un diagnostic de la machine , mais on juge que ce diagnostic n'est pas complet , puisque , il n'est pas possible de déterminer toutes les fréquences du signal .

L'estimateur de la fonction d'autocorrélation permet de déterminer la proportion des termes aléatoires par rapport à ceux qui sont périodiques .

Alors on peut dire que l'estimateur de la fonction d'autocorrélation nous permet uniquement de faire un diagnostic global de la machine .

Annexes

les trois programmes de la partie annexe , ainsi que ces programmes portant le signal échantillonné du moteur sur lequel on a éffectuer le diagnostic,sont enregistrés sur une disquette du micro-ordinateur OLIVETTI M24 du centre de calcul de l'ENPA.

Annexe 1:

Programme de la méthode directe de détermination de l'estimateur de la fonction d'Autocorrélation.

```
10  '------------------ECRITURE DU TITRE-----------------------------------
20  '                   ----------------
30  KEY OFF
40  SCREEN 1
50  SCREEN 0
60  COLOR 16,5
70  LOCATE 13,3:PRINT "* * * * * * * * * * * * * * * * * * "
80  LOCATE 11,3:PRINT "* * * * * * * * * * * * * * * * * * "
90  COLOR 3,0
100  A$="          LOGICIEL CALCULANT L'ESTIMATEUR DE LA FONCTION D'AUTOCORRELAT
ION PAR LA METHODE DIRECTE ***"
110 L=LEN(A$)
120 FOR I=1 TO L
130 B$=LEFT$(A$,32)
140 LOCATE 12,3:PRINT "* ";B$;" *"
150 FOR J=1 TO 300 :NEXT
160 A$=RIGHT$(A$,L-1)+LEFT$(A$,1)
170 NEXT
180 '------------------------------------------------------------------------
190 '
200 '-------INTRODUCTION DU SIGNAL D'ENTREE X(V) ET DU Nbr DE POINTS "N"-------
210 '       -------------------------------------------------
220 CLS
230 FOR I=1 TO 3 :PRINT :NEXT
240 PRINT"Votre fonction est-elle connue?          Repondez par O/N  "
250 A$=INKEY$:IF A$<>"O" AND A$<>"N" THEN 250
260 IF A$="O" THEN 410
270 FOR I=1 TO 3:PRINT :NEXT
280 '
290 '        -------SI X(V) EST SUITE ALEATOIRE--------
300 '              -------------------------
310 PRINT "Donner la valeur de N=";
320 INPUT N
330 FOR I=1 TO 5:PRINT :NEXT
340 DIM X(N)
350 SCREEN 0
360 FOR V=1 TO N
370 PRINT "DONNER LA VALEUR DE X(";V;")=";
380 INPUT X(V)
390 NEXT V
400 GOTO 630
```

```
400  GOTO 630
410  FOR I=1 TO 5:PRINT :NEXT
420  '
430  '          ------------SI X(V) EST CONNUE------------
440  '                       -----------------
450  PRINT "Ecrivez votre nouvelle fonction a la place de l'ancienne dans la lig
ne 560      Puis faites passer le curseur a la ligne juste avant  puis appuyer s
ur return    pour continuer "
460  FOR I=1 TO 3 :PRINT :NEXT
470  PRINT "GOTO 480 " :EDIT 560
480  RANDOMIZE VAL(RIGHT$(TIME$,2))*1000
490  FOR I=1 TO 3:PRINT :NEXT
500  PRINT "Donner la valeur de N=";
510  INPUT N
520  SCREEN 3
530  DIM X(N)
540  PI=3.141592654#
550  FOR V=1 TO N
560  X(V)=(.5-RND(1))*19
570  NEXT V
580  '
590  '-----------------------------------------------------------------------
600  '
610  '-------------------DETERMINATION DU MAXIMUM DE X(V)--------------------
620  '                    ---------------------------
630  XM=X(1)
640  FOR V=1 TO N
650  IF ABS(X(V))>XM THEN XM=ABS(X(V))
660  NEXT V
670  '
680  '--------------------TRACE DU SIGNAL D'ENTREE X(V)----------------------
690  '                     -----------------------
700  GOSUB 1160
710  VI=1 :XI=X(1)
720  FOR V=0 TO N
730  LINE (VI,XI)-(V,X(V))
740  VI=V :XI=X(V)
750  NEXT V
760  '***********************************************************************
     '        * CALCUL DE L'ESTIMATEUR DE LA FONCTION D'AUTOCORRELATION *
770  '        *******************************************************
780  DIM R(N/2)
790  FOR U=0 TO N/2-1
800  S=0
```

```
810  FOR V=1 TO N-U
820  K=V
830  L=V+U
840  S=S+X(K)*X(L)
850  NEXT V
860  RU=S/(N-U)
870  R(U)=RU
880  NEXT U
890  '*************************************************************************
900  '
910  '       ------ TRACE DE L'ESTIMATEUR DE L'AUTOCORRELATION -------
920  '              ---------------------------------------
930  GOSUB 1500
940  UI=0 :RI=R(0)
950  FOR U=0 TO N/2-1
960  LINE (UI,RI)-(U,R(U))
970  UI=U :RI=R(U)
980  NEXT U
990  '
1000 '           -------- TRACE DE L'ESTIMATEUR NORME ----------
1010 '                    -------------------------
1020 GOSUB 1660
1030 DIM RN(N/2)
1040 UI=0 :RNI=1
1050 FOR U=0 TO N/2-1
1060 RN(U)=R(U)/R(0)
1070 LINE (UI,RNI)-(U,RN(U))
1080 UI=U :RNI=RN(U)
1090 NEXT U
1100 '           --------------------------------------------
1110 LOCATE 3,3:  END
1120 '-------------------------------------------------------------------------
1130 '
1140 '      -----------      AFFICHAGE SUR ECRAN      -------------------
1150 '                         --------------
1160 CLS
1170 KEY OFF
1180 SCREEN 3
1190 LOCATE 1,2:PRINT "X(V)"
1200 LOCATE 7,73 : PRINT "V=";N
1210 LOCATE 13,10 :PRINT "FIG 1 : S I G N A L  D'E N T R E E  X ( V )"
1220 LOCATE 14,2:PRINT "R(U)                                      RN(U)"
1230 LOCATE 20,33 :PRINT "U=";N/2;"                                 ";"U=";N/2
1240 LOCATE 25,2:PRINT "FIG 2: ESTIMATEUR DE L'AUTOCORRELATION   FIG 3: ESTIMATE
UR NORME
1250 '           -------------------CADRAGE------------------
1260 '                              -------
1270 SCREEN 3
1280 LINE (0,0)-(639,399),1,B
1290 LINE (1,205)-(638,205)
1300 LINE (319,205)-(319,398)
1310 '
```

```
1320 '----------------SOUS PROGRAMME POUR TRACER LA FONCTION X(V)---------------
1330 '                ----------------------------------------
1340 SCREEN 3
1350 VIEW (5,5)-(634,175)
1360 WINDOW (-10,-1.25*(INT(ABS(XM))+1))-(N+10,1.25*(INT(ABS(XM))+1))
1370 LINE (-10,0)-(N+10,0)
1380 FOR I=0 TO N  STEP 100
1390 LINE (I,-1/50)-(I,1/50)
1400 NEXT I
1410 LINE (0,-1.25*(INT(ABS(XM))+1))-(0,1.25*(INT(ABS(XM))+1))
1420 FOR I= -1.25*(INT(ABS(XM))+1) TO 1.25*(INT(ABS(XM))+1) STEP XM/4
1430 LINE (-N/500,I)-(N/500,I)
1440 NEXT I
1450 RETURN
1460 '-----------------------------------------------------------------------
1470 '
1480 '--------SOUS PROGRAMME POUR TRACER L'ESTIMATEUR DE L'AUTOCORRELATION------
1490 '        ----------------------------------------------------
1500 SCREEN 3
1510 VIEW (5,210)-(314,375)
1520 WINDOW (-5,-1.25*INT(R(0)+1))-(N/2+5,1.25*INT(R(0)+1))
1530 LINE (-5,0)-(N/2+5,0)
1540 FOR I=0 TO N/2  STEP 50
1550 LINE (I,-1/50)-(I,1/50)
1560 NEXT I
1570 LINE (0,-1.25*INT(R(0)+1))-(0,1.25*INT(R(0)+1))
1580 FOR I=-INT(R(0)+1) TO INT(R(0)+1)  STEP R(0)/4
1590 LINE (-N/500,I)-(N/500,I)
1600 NEXT I
1610 RETURN
1620 '-----------------------------------------------------------------------
1630 '
1640 '-------------SOUS PROGRAMME POUR TRACER L'ESTIMATEUR NORME----------------
1650 '             ------------------------------------------
1660 SCREEN 3
1670 VIEW (324,210)-(634,375)
1680 WINDOW (-5,-1.25)-(N/2+5,1.25)
1690 LINE (-5,0)-(N/2+5,0)
1700 FOR I=0 TO N/2 STEP 50
1710 LINE (I,-1/50)-(I,1/50)
1720 NEXT I
1730 LINE (0,-1.25)-(0,1.25)
1740 FOR I=-1 TO 1 STEP .25
1750 LINE (-N/500,I)-(N/500,I)
1760 NEXT I
1770 RETURN
1780 '-----------------------------------------------------------------------
```

Annexe **2:** Programme de détermination de l'estimateur de la fonction d'autocorrélation par la méthode de FFT inverse.

```
10  '==================ECRITURE DU TITRE===================================
20  '                       ------------------
30  KEY OFF
40  SCREEN 1
50  SCREEN 0
60  COLOR 16,5
70  LOCATE 13,3:PRINT "* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * "
80  LOCATE 11,3:PRINT "* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * "
90  COLOR 3,0
100 A$="        LOGICIEL CALCULANT L'ESTIMATEUR DE LA FONCTION D'AUTOCORRELATION
PAR LA METHODE DE FFT INVERSE***"
110 L=LEN(A$)
120 FOR I=1 TO L
130 B$=LEFT$(A$,32)
140 LOCATE 12,3:PRINT "* ";B$;" *"
150 FOR J=1 TO 150:NEXT
160 A$=RIGHT$(A$,L-1)+LEFT$(A$,1)
170 NEXT
180 '=======================================================================
190 '
200 '========INTRODUCTION DU SIGNAL D'ENTREE X(V) ET DU Nbr DE POINT "N"=======
210 '         -------------------------------------------------------
220 CLS
230 FOR I=1 TO 3:PRINT :NEXT
240 PRINT "Votre fonction est-elle connue?          repondez par O/N
250 A$=INKEY$:IF A$<>"O"AND A$<>"N" THEN 250
260 IF A$="O" THEN 490
270 FOR I=1 TO 3 :PRINT :NEXT
280 '
290 '                 =======SI X(V) EST UNE SUITE ALEATOIRE========
300 '                        ------------------------------
310 PRINT "LA VALEUR DE N DOIT ETRE EGALE A 2^n: n ENTIER POSITIF"
320 PRINT "
330 PRINT "Donner la valeur de N";
340 INPUT N
350 FOR I=1 TO 5:PRINT :NEXT
360 DIM XI(N) :DIM XR(N) : DIM A(N)
370 SCREEN 0
380 FOR V=0 TO N-1
390 PRINT "Donnez la valeur de XR(";V;")=";
400 INPUT XR(V) :XI(V)=0
410 NEXT V
420 SCREEN 3
430 G=INT(LOG(N)/LOG(2)) :PI =3.141592654#
440 GOTO 710
450 FOR  I=1 TO 5 :PRINT :NEXT
```

```
460 '
470 '       ===========SI X(V) EST CONNUE==========
480 '                  ------------------
490 FOR I=1 TO 5 :PRINT :NEXT
500 PRINT "Ecrivez votre nouvelle fonction a la place de l'ancienne dans la lig
ne 630 Puis faites passer le curseur a la ligne juste avant puis appuyer sur re
turn pour continuer"
510 FOR  I=1 TO 3 :PRINT :NEXT
520 PRINT "GOTO 530" :EDIT 630
530 RANDOMIZE VAL(RIGHT$(TIME$,2))*1000
540 FOR I=1 TO 3 :PRINT : NEXT
550 PRINT "LA VALEUR DE N DOIT ETRE EGALE A 2^n: n ENTIER POSITIF
560 PRINT "
570 PRINT "Donner la valeur de N";
580 INPUT N
590 SCREEN 3
600 DIM XR(N):DIM XI(N):DIM A(N)
610 G=INT(LOG(N)/LOG(2)) :PI=3.141592654#
620 FOR I=0 TO N-1
630 XR(I)=(.5-RND(1))*10
640 XI(I)=0
650 NEXT I
660 PI=3.141592664#
670 '
680 '=========================================================================
690 '=================DETERMINATION DU MAXIMUM DE X(I)========================
700 '                 -------------------------------
710 XM=X(0)
720 FOR  I=0 TO N-1
730 IF ABS(XR(I)) > XM THEN XM=ABS(XR(I))
740 NEXT I
750 '
760 '================TRACE DU SIGNAL D'ENTREE X(V)============================
770 '                ----------------------------
780 GOSUB 1800
790 II=0 : XRI=XR(0)
800 FOR I=0 TO N-1
810 LINE (II,XRI)-(I,XR(I))
820 II=I :XRI=XR(I)
830 NEXT I
840 '::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
850 '                    :: PROGRAMME DE LA DFT ::
860 '                    :::::::::::::::::::::::::
870 DIM K(20)
880 N2=N/2
890 NU1=G-1
900 FOR L=1 TO G
910 K=0
920 M=INT(K/(2^NU1))
930 GOSUB 1110
940 FOR  I=1 TO N2
950 T=XR(K)
960 A=XI(K)
```

```
970  B=COS(2*PI*P/N)*XR(K+N2)+SIN(2*PI*P/N)*XI(K+N2)
980  C=COS(2*PI*P/N)*XI(K+N2)-SIN(2*PI*P/N)*XR(K+N2)
990  XR(K)=T+B
1000  XI(K)=A+C
1010  XR(K+N2)=T-B
1020  XI(K+N2)=A-C
1030  K=K+1
1040  NEXT I
1050  K=K+N2
1060  IF K<(N-1) THEN 920
1070  N2=N2/2
1080 NU1=NU1-1
1090 NEXT L
1100 GOTO 1210
1110 KJ=N
1120 P=0
1130 FOR IJ=1 TO G
1140 KJ=KJ/2
1150 IF M<KJ THEN M(IJ)=0:GOTO 1180
1160 M(IJ)=1
1170 M=M-KJ
1180 P=P+(2^(IJ-1))*M(IJ)
1190 NEXT IJ
1200 RETURN
1210 FOR K=0 TO N-1
1220 JL=K
1230 I=0
1240 KL=N
1250 FOR IL=1 TO G
1260 KL=KL/2
1270 IF JL<KL THEN K(IL)=0:GOTO 1300
1280 K(IL)=1
1290 JL=JL-KL
1300 I=I+(2^(IL-1))*K(IL)
1310 NEXT IL
1320 IF I<=K THEN 1390
1330 TR=XR(K)
1340 XR(K)=XR(I)
1350 XR(I)=TR
1360 TI=XI(K)
1370 XI(K)=XI(I)
1380 XI(I)=TI
1390 NEXT K
1400 FOR I=0 TO N-1
1410 A(I)=SQR((XR(I)^2)+(XI(I)^2))/N
1420 NEXT I
1430 '::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
1440 '
1450 '############################################################################
1460 '       # CALCUL DE LA L'ESTIMATEUR DE LA FONCTION D'AUTOCORRELATION #
1470 '       ##############################################################
```

```
1480 DIM R(N/2+1)
1490 FOR U=0 TO N/2
1500 S=2*(A(0))^2
1510 FOR I=1 TO N/2
1520 S=S+2*((A(I))^2)*COS (2*PI*I/N*U)
1530 NEXT I
1540 R(U)=S
1550 NEXT U
1560 '##########################################################################
1570 '        ========= TRACE DE L'ESTIMATEUR DE L'AUTOCORRELATION ========
1580 '                  ----------------------------------------
1590 GOSUB 2110
1600 UI=0 :RUI=R(0)
1610 FOR U=0 TO N/2
1620 LINE (UI,RUI)-(U,R(U))
1630 UI=U : RUI=R(U)
1640 NEXT U
1650 '        ================ TRACE DE L'ESTIMATEUR NORME ================
1660 '                         --------------------------
1670 DIM RN(N/2+1)
1680 GOSUB 2270
1690 UI=0 : RNI=1
1700 FOR U=0 TO N/2
1710 RN(U)=R(U)/R(0)
1720 LINE (UI,RNI)-(U,RN(U))
1730 UI=U : RNI=RN(U)
1740 NEXT U
1750 '        ==========================================================
1760 LOCATE 3,3 :END
1770 '=========================================================================
1780 '
1790 '            =========== AFFICHACHE SUR ECRAN ================
1800 CLS
1810 KEY OFF
1820 SCREEN 3
1830 LOCATE 2,1 :PRINT "X(V)"
1840 LOCATE 7,72 :PRINT "V=";N
1850 LOCATE 13,10 :PRINT "FIG 1: S I G N A L  D' E N T R E E  X ( V )"
1860 LOCATE 14,2 :PRINT "R(U)                                              RN(U)"
1870 LOCATE 20,33:PRINT "U=";N/2;"                                  ";"U=";N/2
1880 LOCATE 25,2 :PRINT "FIG 2: ESTIMATEUR DE L'AUTOCORRELATION    FIG 3: ESTIMA
TEUR NORME"
1890 '             ============CADRAGE==========
1900 LINE (0,0)-(639,399),1,B
1910 LINE (1,205)-(638,205)
1920 LINE (319,205)-(319,398)
1930 '
1940 '============SOUS PROGRAMME POUR TRACER LA FONCTION X(V)=================
1950 '
1960  VIEW (5,5)-(634,175)
1970  WINDOW (-10,-1.25*(INT(XM)+1))-(N+10,1.25*(INT(XM)+1))
1980  LINE (-10,0)-(N+10,0)
```

```
1990 FOR I=0 TO N STEP 100
2000 LINE (I,-1/50)-(I,1/50)
2010 NEXT I
2020  LINE (0,-1.25*(INT(XM)+1))-(0,1.25*(INT(XM)+1))
2030 FOR I=-XM TO XM  STEP XM/4
2040 LINE (-N/500,I)-(N/500,I)
2050 NEXT I
2060 RETURN
2070 '=========================================================================
2080 '
2090 '=======SOUS PROGRAMME POUR TRACER L'ESTIMATEUR DE L'AUTOCORRELATION=======
2100 '       -----------------------------------------------------------
2110 SCREEN 3
2120 VIEW (5,210)-(314,375)
2130 WINDOW (-5,-1.25*(INT(R(0)+1)))-(N/2+5,1.25*(INT(R(0)+1)))
2140 LINE (-5,0)-(N/2+5,0)
2150 FOR I=0 TO N/2 STEP 50
2160 LINE (I,-1/50)-(I,1/50)
2170 NEXT I
2180 LINE (0,-1.25*(INT(R(0)+1)))-(0,1.25*(INT(R(0)+1)))
2190 FOR I=-R(0) TO R(0) STEP R(0)/4
2200 LINE (-N/500,I)-(N/500,I)
2210 NEXT I
2220 RETURN
2230 '
2240 '
2250 '============SOUS PROGRAMME POUR TRACER L'ESTIMATEUR NORME=================
2260 '       -----------------------------------------------------------
2270 SCREEN 3
2280 VIEW (324,210)-(634,375)
2290 WINDOW (-5,-1.25)-(N/2+5,1.25)
2300 LINE (-5,0)-(N/2+5,0)
2310 FOR I=0 TO N/2  STEP 50
2320 LINE (I,-1/50)-(I,1/50)
2330 NEXT I
2340 LINE (0,-1.25)-(0,1.25)
2350 FOR I=-1 TO 1  STEP .25
2360 LINE (-N/500,I)-(N/500,I)
2370 NEXT I
2380 RETURN

2390 '=========================================================================
```

Programme permettant de comparer les résultats des deux méthodes.

```
10  '+++++++++++++++ECRITURE DU TITRE++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
20  '
30  KEY OFF
40  SCREEN 1
50  SCREEN 0
60  COLOR 16,5
70  LOCATE 13,3:PRINT "* * * * * * * * * * * * * * * * * * * "
80  LOCATE 11,3:PRINT "* * * * * * * * * * * * * * * * * * * "
90  COLOR 3,0
100 A$="            LOGICIEL PERMETTANT DE COMPARER LES RESULTATS DONNES PAR LE
S DEUX PROGRAMMES***"
110 L=LEN(A$)
120 FOR I=1 TO L
130 B$=LEFT$(A$,32)
140 LOCATE 12,3 :PRINT "* ";B$;" *"
150 FOR J=1 TO 300:NEXT
160 A$=RIGHT$(A$,L-1)+LEFT$(A$,1)
170 NEXT
180 '++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
190 '
200 '++++++++INTRODUCTION DU SIGNAL D'ENTREE X(V) ET DU Nbr DE POINT "N"+++++++
210 '        --------------------------------------------------------
220 CLS
230 FOR I=1 TO 3:PRINT :NEXT
240 PRINT"Votre fonction est-elle connue?          Repondez par O/N  "
250 A$=INKEY$:IF A$<>"O" AND A$<>"N" THEN 250
260 IF A$="O" THEN 450
270 FOR I=1 TO 3:PRINT :NEXT
280 '
290 '        +++++++++SI X(V) EST UNE SUITE ALEATOIRE+++++++++
300 '                -------------------------------
310 FOR I=1 TO 3 :PRINT :NEXT
320 PRINT "LE NOMBRE N DOIT ETRE EGAL 2^n :n ENTIER POSITIF"
330 PRINT "
340 PRINT "DONNER LA VALEUR DE N",
350 INPUT N
360 FOR I= 1 TO 5 :PRINT :NEXT
370 DIM X(N)
380 SCREEN 0
390 PI=3.141592654#
400 FOR V=0 TO N-1
```

```
410  PRINT "DONNER LA VALEUR DE X(";V;")=";
420  INPUT X(V)
430  NEXT V
440  GOTO 680
450  FOR I=1 TO 5:PRINT :NEXT
460  '
470  '      +++++++++++SI X(V) EST CONNUE+++++++++
480  '              ------------------
490  PRINT "Ecrivez votre nouvelle fonction a la place de l'ancienne dans la lig
ne 610      Puis faites passer le curseur a la ligne juste avant  puis appuer su
r return    pour continuer "
500  FOR I=1 TO 3:PRINT :NEXT
510  PRINT "GOTO 520 " :EDIT 610
520  RANDOMIZE VAL(RIGHT$(TIME$,2))*1000
530  FOR I=1 TO 3:PRINT :NEXT
540  PRINT "LA VALEUR DE N DOIT ETRE EGALE A 2^n: n ENTIER POSITIF
550  PRINT "DONNER LA VALEUR DE N";
560  INPUT N
570  SCREEN 3
580  DIM X(N)
590  PI=3.141592654#
600  FOR V=0 TO N-1
610  X(V)=(.5-RND(1))*15
620  NEXT V
630  '
640  '++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
650  '
660  '+++++++++++DETERMINATION DU MAXIMUM DE X(V)++++++++++++++++++++++++++++
670  '              -------------------------------
680  XM=X(0)
690  FOR V=0 TO N-1
700  IF ABS(X(V)))XM THEN XM=ABS(X(V))
710  NEXT V
720  '
730  '+++++++++++++++++TRACE DU SIGNAL D'ENTREE X(V)++++++++++++++++++++++++++
740  '                    ----------------------------
750  GOSUB 2360
760  VI=0 :XI=X(0)
770  FOR V=0 TO N-1
780  LINE (VI,XI)-(V,X(V))
790  VI=V :XI=X(V)
800  NEXT V
810  '************************************************************************
           *CALCUL DE L'ESTIMATEUR DE LA FONCTION D'AUTOCORRELATION*
820  '         *              PAR LA METHODE DIRECTE                   *
830  '         *******************************************************
840  '
850  DIM XV(N)
860  FOR V=1 TO N
870  XV(V)=X(V-1)
880  NEXT V
890  DIM R(N)
900  FOR U=0 TO N/2
910  S=0
```

```
920  FOR V=1 TO N-U
930  K=V
940  L=V+U
950  S=S+XV(K)*XV(L)
960  NEXT V
970  RU=S/(N-U)
980  R(U)=RU
990  NEXT U
1000  '*****************************************************************************
*
1010  '
1020  '        +++++++++TRACE DE L'ESTIMATEUR DE L'AUTOCORRELATION+++++++++
 934  '               +            " METTHODE DIRECTE "          +
1030  '               ------------------------------------------
1040  GOSUB 2670
1050  RM=R(0)
1060 FOR U=0 TO N/2
1070 IF R(U)>RM THEN RM=R(U)
1080 NEXT U
1090 GOSUB 2670
1100 UI=0 :RI=R(0)
1110 FOR U=0 TO N/2
1120 LINE(UI,RI)-(U,R(U))
1130 UI=U :RI=R(U)
1140 NEXT U
1150 '
1160 '          +++++++++TRACE DE L'ESTIMATEUR NORME++++++++++
1170 '                   --------------------------
1180 GOSUB 2830
1190 DIM RN(N/2+1)
1200 UI=0 :RNI=1
1210 FOR U=0 TO N/2
1220 RN(U)=R(U)/R(0)
1230 LINE (UI,RNI)-(U,RN(U))
1240 UI=U :RNI=RN(U)
1250 NEXT U
1260 '          -----------------------------------
1270 '++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
1280 '
1290 '++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
1300 '   +CALCUL DE LA L'ESTIMATEUR DE LA FONCTION D'AUTOCORRELATION+
1310 '   +              PAR LA METHODE DE DAF INVERSE                +
1320 '   ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
1330 '
1340 '        ++++PROGRAMME DE DFT "COOLY-TUKEY"++++
1350 '            -----------------------------
1360 DIM M(20)
1370 DIM K(20)
1380 G=INT(LOG(N)/LOG(2))
1390 DIM XR(N)
1400 DIM XI(N)
1410 DIM A(N)
1420 FOR I=0 TO N-1
```

```
1430 XR(I)=X(I)
1440 XI(I)=0
1450 NEXT I
1460 N2=N/2
1470 NU1=G-1
1480 FOR L=1 TO G
1490 K=0
1500 M=INT(K/(2^NU1))
1510 GOSUB 1690
1520 FOR  I=1 TO N2
1530 T=XR(K)
1540 A=XI(K)
1550 B=COS(2*PI*P/N)*XR(K+N2)+SIN(2*PI*P/N)*XI(K+N2)
1560 C=COS(2*PI*P/N)*XI(K+N2)-SIN(2*PI*P/N)*XR(K+N2)
1570 XR(K)=T+B
1580 XI(K)=A+C
1590 XR(K+N2)=T-B
1600 XI(K+N2)=A-C
1610 K=K+1
1620 NEXT I
1630 K=K+N2
1640 IF K<(N-1) THEN 1500
1650 N2=N2/2
1660 NU1=NU1-1
1670 NEXT L
1680 GOTO 1790
1690 KJ=N
1700 P=0
1710 FOR IJ=1 TO G
1720 KJ=KJ/2
1730 IF M<KJ THEN M(IJ)=0:GOTO 1760
1740 M(IJ)=1
1750 M=M-KJ
1760 P=P+(2^(IJ-1))*M(IJ)
1770 NEXT IJ
1780 RETURN
1790 FOR K=0 TO N-1
1800 JL=K
1810 I=0
1820 KL=N
1830 FOR IL=1 TO G
1840 KL=KL/2
1850 IF JL<KL THEN K(IL)=0:GOTO 1880
1860 K(IL)=1
1870 JL=JL-KL
1880 I=I+(2^(IL-1))*K(IL)
1890 NEXT IL
1900 IF I<=K THEN 1970
1910 TR=XR(K)
1920 XR(K)=XR(I)
1930 XR(I)=TR
```

```
1940 TI=XI(K)
1950 XI(K)=XI(I)
1960 XI(I)=TI
1970 NEXT K
1980 FOR I=0 TO N-1
1990 A(I)=SQR((XR(I)^2)+(XI(I)^2))/N
2000 NEXT I
2010 '      ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
2020 '
2030 ' ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
2040 '     + CALCUL DE L'ESTIMATEUR D'AUTOCORRELATION A PARTIR DES +
2050 '     +        RESULTATS DU PROGRAMME PRECEDENT              +
2060 '     ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
2070 '
2080 FOR U=0 TO N/2
2090 S=2*(A(0))^2
2100 FOR I=1 TO N/2
2110 S=S+2*((A(I))^2)*COS (2*PI*I/N*U)
2120 NEXT I
2130 R(U)=S
2140 NEXT U
2150 GOSUB 2670
2160 UI=0 :RUI=R(0)
2170 FOR U=0 TO N/2
2180 LINE (UI,RUI)-(U,R(U))
2190 UI=U : RUI=R(U)
2200 NEXT U
2210 FOR U=0 TO N/2
2220 RN(U)=R(U)/R(0)
2230 NEXT U
2240 GOSUB 2830
2250 UI=0 : RNI=RN(0)
2260 FOR U=0 TO N/2
2270 LINE (UI,RNI)-(U,RN(U))
2280 UI=U : RNI=RN(U)
2290 NEXT U
2300 '          ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
2310 LOCATE 1,2 :END
2320 '+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
2330 '
2340 '     +++++++++   AFFICHAGE SUR ECRAN   ++++++++++
2350 '                 -------------------
2360 CLS
2370 'KEY OFF
2380 SCREEN 3
2390 LOCATE 2,2 :PRINT "X(V)"
2400 LOCATE 7,72 :PRINT "V=";N
2410 LOCATE 13,10 :PRINT "FIG 1: S I G N A L   D' E N T R E E  X ( V )"
2420 LOCATE 14,2 :PRINT "R(U)                                          RN(U)"
2430 LOCATE 20,33:PRINT "U=";N/2;"                                 ";"U=";N/2
2440 LOCATE 25,2 :PRINT "FIG 2: ESTIMATEUR DE L'AUTOCORRELATION  FIG 3: ESTIMATE
UR NORME"
```

```
2450 ' ------------------------------------------------------------------
2460 '
2470 '        ++++++++++++++++++++++++++++++++
2480 SCREEN 3
2490 LINE (0,0)-(639,399),1,B
2500 LINE (1,205)-(638,205)
2510 LINE (319,205)-(319,398)
2520 VIEW (5,5)-(634,175)
2530 '         -------------------------------------------
2540 '+++++++++++SOUS PROGRAMME POUR TRACER LA FONCTION X(V)+++++++++++
2550 WINDOW (-10,-1.25*INT(ABS(XM)+1))-(N+10,1.25*INT(ABS(XM)+1))
2560 LINE (-10,0)-(N+10,0)
2570 FOR I=0 TO N STEP 100
2580 LINE (I,-1/50)-(I,1/50)
2590 NEXT I
2600 LINE (0,-1.25*(INT(ABS(XM))+1))-(0,1.25*(INT(ABS(XM))+1))
2610 FOR I=-INT(ABS(XM)+1) TO INT(ABS(XM)+1) STEP ABS(XM)/2
2620 LINE (-N/500,I)-(N/500,I)
2630 NEXT I
2640 RETURN
2650 '---------------------------------------------------------------
2660 '
2670 '----- SOUS PROGRAMME POUR TRACER L'ESTIMATEUR DE L'AUTOCORRELATION-----
2680 '      ---------------------------------------------------------
2690 SCREEN 3
2700 VIEW (5,210)-(314,375)
2710 WINDOW (-5,-1.25*(INT(ABS(RM))+1))-(N/2+5,1.25*(INT(ABS(RM))+1))
2720 LINE (-5,0)-(N/2+5,0)
2730 FOR I=0 TO N/2 STEP 50
2740 LINE (I,-1/50)-(I,1/50)
2750 NEXT I
2760 LINE (0,-1.25*INT(RM+1))-(0,1.25*INT(RM+1))
2770 FOR I=-1.25*INT(RM+1) TO 1.25*INT(RM+1) STEP R(0)/4
2780 LINE (-N/500,I)-(N/500,I)
2790 NEXT I
2800 RETURN
2810 '----------------------------------------------------------------------
2820 '
2830 '-----SOUS PROGRAMME POUR TRACER L'ESTIMATEUR D'AUTOCORRELATION-------
2840 '     -------------------------------------------------------
2850 SCREEN 3
2860 VIEW (324,210)-(634,375)
2870 WINDOW (-5,-1.25)-(N/2+5,1.25)
2880 LINE (-5,0)-(N/2+5,0)
2890 FOR I=0 TO N/2  STEP 50
2900 LINE (I,-1/50)-(I,1/50)
2910 NEXT I
2920 LINE (0,-1.25)-(0,1.25)
2930 FOR I=-1 TO 1  STEP .1
2940 LINE (-N/500,I)-(N/500,I)
2950 NEXT I
```

BIBlIOGRAPHIE

(1) Cours de diagnostic des machines.
Mr:W KUROWKI

(2) Engineering application of correlation and spectral analysis.
Julius s.Bendat and Allan G.Piersol
Edition 1980

(3) Méthodes pratiques d'étude des fonctions aléatoire.
J.stern J.de Barbeyrac R.Poggi.

(4) L'élasticité plasticité .
Exposé de post-graduation .
Proposé par Mr KUROWSKI
et exposé par Mlle bennamouche.

(5) Les méthodes rapides de transformation du signal
Fourier Walsh . hadammard Haar ; lifermann

(6) MAREK BALAZINSKI et A.SAMET
Analyse mathématique de l'état géométrique de surfaces
Promotion Juin 1982

(7) Distributions et transformation de Fourier.
Francois Roddier
Mc graw-hill 1983

(8) Spectral analysis in geophysics.
M .Bath
Elsevier 1974

(9) Théorie de transmission de l'information
Tome 1
Signaux et Bruits Alexandru spataru

(10)Traitement numérique des signaux .
M.Kunt
Dunod 3ieme édition 1981