

وزارة التعليم و البحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : **GENIE MECANIQUE**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

**Diagnostic d'une Machine
Tournante par la Méthode de
Mesure du Spectre de Vibration**

Proposé par :
W. KUROWSKI

Etudié par :
BOUBNIDER ZAHIR

Dirigé par :
W. KUROWSKI

PROMOTION : **JUIN 1986**

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : **GENIE MECANIQUE**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

**Diagnostic d'une Machine
Tournante par la Méthode de
Mesure du Spectre de Vibration**

Proposé par :
UROWSKI

Etudié par :
BOUBNIDER ZAHIR

Dirigé par :
W. KUROWSKI

PROMOTION : **JUIN 1986**

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

وزارة التعليم العالي

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

DEPARTEMENT : MECANIQUE
PROMOTEUR : WALDEMAR KUROWSKI
ELEVE INGENIEUR : BOUBNIDER ZAHIR

مرف : الهندسة الميكانيكية
الموجه : والد مار كوروسكي
الطالب المهندس : زهير بونيدر

الموضوع : تشخيص لآلة دوارة بطريقة قياس طيف الاهتزازات .
الملخص : يهدف هذا المشروع في الاساس لتوضيح مختلف المراحل الضرورية من اجل اعداد تشخيص
لالآلة دوارة بماستعمال طريقة قياس طيف الاهتزازات . بالاضافة الى برنامج مبسط
وفعال بالنسبة للوقت الذي يستغرق التنفيذ ، ويكون من شأنه ان يسمح بالتمثيل البياني
لهذا الطيف .

SUJET : DIAGNOSTIC D'UNE MACHINE TOURNANTE PAR LA METHODE DE MESURE DU
SPECTRE DE VIBRATION.

RESUME : CE PROJET A POUR BUT ESSENTIEL DE METTRE EN EVIDENCE LES DIFFE-
RENTS OUTILS MATHEMATiques NECESSAIRES POUR ETABLIR UN DIAGNOS-
TIC D'UNE MACHINE TOURNANTE PAR LA METHODE DE MESURE DU SPECTRE
DE VIBRATION, METTRE AU POINT UN PROGRAMME SIMPLE ET EFFICACE
PERMETTANT LA REPRESENTATION GRAPHIQUE DE CE SPECTRE.

SUBJECT : DIAGNOSIS OF A ROTATING MACHINE VIA THE MEASURE OF THE POWER
SPECTRA VIBRATION METHOD.

ABSTRACT: IN THIS PROJECT THE APPLICATION OF POWER SPECTRA FOR MACHINE
DIAGNOSTICS WAS STUDIED. A VIBRATION SIGNAL ANALOG RECORDING HAS
BEEN PRESENTED IN SAMPLED FORM. USING THIS DIGITAL DATA OBTAIN
THE POWER SPECTRUM. THE COMPUTATION PROCEDURE HAS BEEN DEVELOPPED
AND APPLIED TO DIAGNOSIS OF AN ELECTRICAL MOTOR.

— DEDICACES —

Je dédie ce modeste mémoire à mes parents,
à mes frères et à tous mes amis

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur WALDEMAR KUROWSKI pour son aide précieuse, ainsi que tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce projet, trouvent ici ma sincère gratitude.

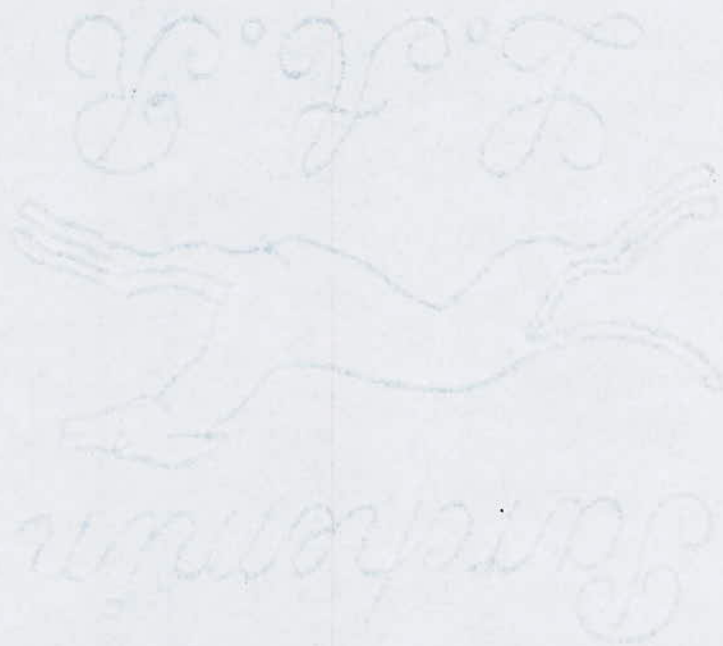


TABLE DES MATIERES

Ch I: Introduction	1
I1 Phénomènes vibroacoustiques	1
I2 Caractéristiques statiques des signaux dans les diagnostics	4
I3 Les systèmes de mesures, analogique, analogique - numériques des signaux	5
I4 vibrations mécaniques	6
Ch II: But de l'étude	7
Ch III: Notions mathématiques fondamentales	8
III1 Séries de FOURIER	8
III1.1 Conditions de DIRICHLET	8
III2 Intégrale de FOURIER	10
III3 Transformée de FOURIER	11
III4 Caractéristiques des signaux, en temps et en fréquence	12
Ch IV: Informations portées par les spectres	14
Ch V: Théorie de l'échantillonnage	16
V1 Impulsion de DIRAC	17

V2 Peigne de DIRAC	18
V3 Echantillonnage	18
V3.1 Discrétisation de $f(t)$	19
V3.11 Conclusion	20
V3.2 Fenêtre de truncature	24
V3.21 Discrétisation des spectres	26
V4 Etendu des fréquences	28
Ch VII: La transformée de Fourier discrète	30
VI1 Etablissement de la relation fondamentale de la DFT	31
VI2 Etablissement de la relation fondamentale de la DFT inverse	32
VI3 Relation entre la transformée de FOURIER discrète et continue	33
VI3.1 Application de la DFT pour une forme ondulatoire	33
VI4 Estimateur de la densité spectrale de puissance	36
Ch VIII: Les algorithmes de la transformée de Fourier rapide	37
VIII1 Algorithmes de COOLEY-TUKEY et SANDER-TUKEY pour $N=4$	38
VIII1.1 Notations	39
VIII1.2 Expression équivalente de la DFT à quelques points	39
VIII1.3 Les algorithmes fondamentaux	40
VIII1.3.1 Algorithme de COOLEY-TUKEY	40
VIII1.3.1.1 Interprétation	41

VII.1.3.2	Algorithme de SANDÉ-TUKEY	42
VII.2	Généralisation des deux algorithmes pour $N=2^r$	43
VII.2.1	Les notations	43
VII.2.2	Expression de la DFT à N points	44
VII.2.3	Généralisation de l'algorithme de COOLEY-TUKEY	44
VII.2.4	Généralisation de l'algorithme de SANDÉ-TUKEY	46
VII.3	Représentation graphique de l'algorithme de COOLEY-TUKEY	47
VII.3.1	Passage du signal initial au premier état intermédiaire	48
VII.3.2	Passage du premier état intermédiaire au second état	49
VII.3.3	Passage du deuxième état intermédiaire au troisième état	50
VII.3.4	Passage du troisième état intermédiaire à la DFT.	51
VII.4	Etude des propriétés des graphes de l'algorithme de COOLEY-TUKEY.	51
VII.4.1	Treillis	53
VII.4.2	Nombre de colonnes de Treillis	54
VII.4.3	Nombre et multiplicité de Treillis par colonne.	54
VII.4.4	Gain des branches des Treillis	55
VII.5	Transformée de FOURIER inverse par la méthode FFT.	57

Ch VIII: Programmation	59
VIII.1. Programmation FFT	59
VIII.2. Programmation IDFT par la méthode FFT	60
VIII.3 Remarque	61
Ch IX: Essai du Programme	74
Ch X: Expérience	77
X.1 Choix de mesure	77
X1.1 Système	78
X1.2 Capteur	78
X1.3 Préamplificateur	79
X1.4 Convertisseur	79
X1.5 Calculateur	80
X.2 Condition de la mesure	80
X.3 Analyse des mesures	81

CONCLUSION

CHAPITRE I

I INTRODUCTION

Si nous fournissons de manière grossière décrite le fonctionnement d'une machine, ce serait de la faire fonctionner jusqu'à rupture de celle-ci et d'essayer de la réparer pour la faire fonctionner de nouveau; cette méthode peut être très coûteuse en termes de pertes d'exploitation, de rendements et de détérioration. Pour cela il est recherché des méthodes qui permettent d'observer et de déterminer l'état de la machine au cours de son fonctionnement.

Une machine est construite parcequ'il existe une nécessité de réaliser une production; ce procédé utile (la fabrication) fait la partie principale du fonctionnement que l'on peut admettre comme étant déterminé [5].

Outre cela la machine exécute des procédés qui ne participent pas directement à la production utile mais qui l'accompagnent tels que: vibrations, bruits, frottements, etc... Ils sont inutiles et nous les appelons procédés accompagnants; ces procédés sont traités comme indéterminés [5].

II Phénomènes vibroacoustiques:

Les vibrations et les bruits émis par les machines et les mécanismes peuvent être de provenance interne ou externe.

Dans la machine en marche agit un ensemble d'excitations dynamiques et cinétiques qui sont causées par des joints avec jeu entre les éléments, une rotation des éléments déséquilibrés, un fonctionnement des paliers à roulements et des engrenages, écoulement d'un fluide etc... Les sources intérieures de bruit sont sous forme de phénomènes oscillatoires et entraînent par conséquent des vibrations mécaniques et acoustiques.

La machine est actée par l'environnement et fonctionne comme un conduit qui transforme ces excitations en vibrations.

Les excitations extérieures perturbent le fonctionnement, en tenant compte de ces excitations on est intéressé à minimiser son action par isolation soit la vibration soit le bruit.

La provenance des vibrations dépend de l'état technique de la machine, elles peuvent être utilisées comme des signaux qui indiquent de l'état de celle-ci. La pratique confirme que les phénomènes vibroacoustiques sont une bonne représentation des procédés qui interviennent dans la machine ou le mécanisme [2] et qui dépendent de son fonctionnement normal; bien que l'énergie de ces procédés ait une valeur faible par rapport à l'énergie de production elle est suffisante pour transporter les informations. Le signal vibroacoustique se distingue par une grande capacité d'informations et d'une grande vitesse de trans-

mission de ces informations [5].

On peut effectuer ces examens en observant les vibrations mécaniques ou acoustiques de la machine utilisée grâce à leurs propriétés, il peut aussi être effectué des examens de contrôle de la précision du fonctionnement sur une nouvelle machine ou bien de la perte de sa précision durant son exploitation sans y intervenir de façon importante. Les signaux vibroacoustiques nous informent sur la précision de la production faite par des systèmes de machines et de mécanismes.

La procédure diagnostique de la réception et du traitement des signaux pour déterminer l'état de la machine doit être simple, vite, fiable et applicable avec la moindre perturbation possible du processus de fonctionnement; dans ce domaine les signaux vibroacoustiques sont très utiles, ils permettent de satisfaire d'une façon meilleure que possible cette dernière condition.

En conclusion, l'élaboration de la diagnose d'une machine en prenant en considération un signal vibroacoustique peut éclairer au chemin d'avancement des études dans les autres domaines à savoir [5]:

- une vérification de l'hypothèse établie avant la réalisation de la recherche.
- un ramassement de données permettant de construire des machines améliorées (genèse).

- une prévision des changements des propriétés de la machine ou des mécanismes au cours de l'exploitation de ceux-ci.

Il Caractéristiques statiques des signaux dans les diagnostics: les signaux vibroacoustiques portent des informations sur l'état de la machine, cela ne signifie pas que ces informations sont aisément décodables pour les présenter sous forme lisible plus facile à interpréter. Pour ce faire, il est nécessaire d'effectuer une certaine élaboration (traitement) de ces signaux et les présenter sous forme de caractéristique.

Les signaux vibroacoustiques sont traités dans les diagnostics des machines et des mécanismes comme des fonctions stochastiques et en général ils sont supposés stationnaires et ergodiques [2].

Les caractéristiques d'un signal stochastique sont les grandeurs déterministiques relativement facile à lire et à interpréter, ils sont nécessaires pour élaborer une diagnose sur cet état. Les signaux vibroacoustiques peuvent être décrits et analysés dans un des domaines: temps, fréquence et événements.

Dans l'analyse du domaine du temps les valeurs sont appliqués aux instants correspondants, l'analyse dans le domaine des événements étudie l'application de certains événements à la probabilité de leur apparition, enfin l'analyse dans le domaine des fréquences, les amplitudes

et des phases du signal sont appliqués aux fréquences correspondantes, c'est l'analyse spectrale qui sera étudiée dans ce projet.

I3 Les systèmes de mesures, analogique, analogique-numériques des signaux ;

dans les diagnostics vibroacoustiques, on utilise généralement des signaux de vibrations mécaniques et de bruit ; dans ce but on applique des transducteurs de vibrations qui donnent à leur sortie des signaux électriques justement représentant les processus observés [5].

Dans la pratique le spectre de ce signal est obtenu soit d'une manière analogique ou d'une manière numérique.

La méthode analogique utilise des appareils de mesure spéciaux qui font un traitement automatique de cette forme électrique et les présentent sous forme de caractéristiques. La méthode numérique profite aussi de la même forme électrique de la fonction représentant le signal, le premier pas du traitement sera un remplacement du signal électrique continu par une suite de données, cette conversion analogique-numérique peut être manuelle ou automatique à l'aide de convertisseurs, les données sont données à un calculateur qui détermine une caractéristique en conformité avec le programme.

Vu le développement des miniordinateurs et plus tôt des

Micro-ordinateurs (simples, portables) - cette technique devient très importante du point de vue utilisation car elle permet d'établir un diagnostic de la machine sur place à partir des caractéristiques de celle-ci et en déduire les conclusions nécessaires

I 4 Vibrations Mécaniques :

dans cette étude, nous nous intéresserons seulement aux vibrations mécaniques ; sachant que toute les machines vibrent, la détérioration de leur état produit généralement un accroissement du niveau de vibration soit général soit uniquement dans une bande de fréquences, ainsi en surveillant le niveau de ces vibrations il est possible d'avoir des informations sur l'état de fonctionnement des machines et de la tendance de son changement. D'autres paramètres tels que la température ou la pression d'huile changent également quand l'état de la machine se détériore mais d'une part ceci se produit généralement quand le défaut est avancé et d'autre part ces signaux sont faibles en informations. La mesure du bruit peut elle aussi révéler une anomalie dans l'état de celle-ci mais il est souvent difficile à localiser car dans les usines et les ateliers les machines sont nombreuses, proches et travaillent simultanément. Les vibrations mécaniques sont donc les plus représentatives et les plus faciles relativement faciles à mesurer et à traiter. L'analyse spectrale qui applique les vibrations mécaniques à certaines fréquences permet donc de tirer un maximum de renseignements [5]

Bartholomaeus

CHAPITRE II

L. F. F.



II BUT DE L'ETUDE

Cette étude a pour but, en premier lieu d'établir une procédure permettant d'obtenir un spectre de FOURIER résultant de phénomènes vibratoires soit étudiés, éliminés et mettre à l'application la détermination d'un spectre du signal de vibrations d'une machine par la méthode FFT (FAST FOURIER TRANSFORM), à partir de la représentation numérique, en vertu de la conversion analogique-numérique; la méthode sera adoptée à des micros-ordinateurs et appliquée en pratique pour les machines tournantes.

CHAPITRE III

III NOTIONS MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

Dans ce chapitre, nous discuterons des différents outils mathématiques nécessaires pour établir l'analyse spectrale ainsi de leurs conditions d'existence et leur vaste champ d'utilisation

III.1 Séries de FOURIER :

JOSEPH FOURIER (1768 - 1830) ingénieur et mathématicien français découvre ce théorème de l'analyse en résolvant le problème de propagation de la chaleur; il présente sa théorie à l'académie française des sciences en décembre 1807 [2].

Le théorème de FOURIER permet à n'importe quel fonction satisfaisant certaines restrictions d'être développée en une infinité de fonctions harmoniques, c'est qu'en 1829 que DIRICHLET formula les différentes restrictions qui assurent la validité de ce théorème [2].

III.1.1 Conditions de DIRICHLET :

Soit un signal représenté par une fonction $f(t)$ définie dans le domaine temporel, $f(t)$ admet un spectre de FOURIER si et seulement si les conditions de DIRICHLET sont vérifiées. C'est à dire:

- $f(t)$ doit être une fonction périodique de période T

- $f(t)$ doit être continue par tranches possédant un nombre fini de discontinuité
- $f(t)$ possède un nombre fini de maximum et minimum.

en vertu des expériences précédentes, on peut dire que toute les fonctions décrivant les processus réels et mesurées sur les machines, en marche, donc les processus vibroacoustiques aussi répondent aux conditions de DIRICHLET, par suite nous discutons uniquement des fonctions qui répondent aux conditions de DIRICHLET, alors la fonction $f(t)$ de période T peut être développée en séries de FOURIER

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right] \quad (1)$$

de plus la série converge vers $f(t)$ si t est un point de continuité; vers $\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$ si t est un point de discontinuité. a_0, a_n, b_n indiquent les coefficients de FOURIER, le calcul des coefficients s'appelle analyse de FOURIER ou analyse harmonique, on peut calculer ces coefficients en multipliant l'expression (1) successivement par $\cos(0 \cdot t), \cos(n \cdot t), \sin(n \cdot t)$ ou $n=1, 2, 3, \dots$ et en intégrant dans l'intervalle T tout en utilisant les propriétés d'orthogonalité, on aura:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad (3) \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad (4)$$

après quelques transformations, la série (1) peut être mise sous forme simple qu'on utilisera par la suite [1]

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(j 2\pi n \tau t) \quad (5)$$

$$\text{ou } \tau = \frac{1}{T} \text{ et } C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-j 2\pi n \tau t) dt \quad (6) \quad n=0, \pm 1, \dots$$

III.2 Intégrale de FOURIER :

L'analyse de FOURIER peut être utilisée, aussi pour le traitement des fonctions qui ne sont pas périodiques de façon évidente, dans ce cas là on admet que la période T existe mais qu'elle est infiniment grande ($T \rightarrow \infty$); cette hypothèse est très intéressante surtout pour les diagnostics des machines ou le processus est stochastique et on ne peut définir l'évolution du signal ultérieurement, ainsi l'intégrale de FOURIER est une autre forme d'écriture de la fonction $f(t)$ soit une intégrale de fonctions trigonométriques.

La méthode consiste à substituer les expressions de a_n , b_n et a_0 dans l'expression (1), on aura [2] :

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\lambda) d\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\lambda) \cos\left[\frac{2\pi n}{T}(t-\lambda)\right] d\lambda \quad (7)$$

Le membre $\frac{2\pi n}{T}(t-\lambda)$ s'appelle le noyau de DIRICHLET

en posant $\omega_n = 2\pi n/T$; $\omega_{n-1} = 2\pi(n-1)/T$

d'où $\omega_n - \omega_{n-1} = \Delta\omega = 2\pi/T$

en faisant tendre $T \rightarrow \infty$, l'incrément $\Delta\omega$ devient très petit à la limite peut être représenté par $d\omega$; ω_n devient une variable continue par suite le signe "somme" devient intégrale, d'où (7) se met sous la forme suivante:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cos[\omega(t-\lambda)] d\lambda \quad (8)$$

L'écriture de $f(t)$ sous cette forme s'appelle intégrale de FOURIER

III 3 Transformée de FOURIER:

Sachant le fait que $\int_{-\infty}^{\infty} \sin[\omega(t-\lambda)] d\omega = 0$ et en faisant insérer cette intégrale dans la relation (8), après quelques factorisations, $f(t)$ peut se mettre sous la forme:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi\tau t) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j2\pi\tau t) dt \quad (9)$$

par définition la transformée de FOURIER de $f(t)$ est:

$$\tilde{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j2\pi\tau t) dt \quad (10)$$

ou le symbole $\tilde{F}\{f(t)\}$ désigne la transformée de FOURIER de la fonction $f(t)$.

Par suite, on définit la transformée de FOURIER inverse comme :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F\{f(t)\} \exp(j 2\pi \nu t) d\nu \quad (11)$$

L'intégrale (10) représente l'analyse de FOURIER d'une fonction $f(t)$ et l'intégrale (11) représente la synthèse de FOURIER de la fonction $f(t)$ en composante spectrale $F(\nu)$ ou $F(\nu) = F\{f(t)\}$. Les fonctions $f(t)$ et $F(\omega)$ ($\omega = 2\pi\nu$) représentent le même signal dans les domaines du temps ou de la fréquence, c'est à dire elles sont équivalentes, elles sont appelées couple de FOURIER.

La fonction $F(\omega)$ a la même dimension que la fonction $f(t)$; si $f(t)$ représente une accélération, la fonction $F(\omega)$ aura la dimension d'une accélération.

$F(\omega)$ ramenée à un intervalle de ω s'appelle densité spectrale, la fonction $|F(\omega)|$ ramenée à un intervalle de ω s'appelle densité d'amplitude [2].

III 4 Caractéristiques des signaux en temps et en fréquence :

Pour un processus mécanique décrit par une fonction $f(t)$, on peut dire que l'expression : $E(t) = |f(t)|^2$ (12)

représente une énergie instantanée [2].

L'expression $\overline{E(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ (13)

représente l'énergie totale du processus, cette énergie ramenée à un intervalle de temps T_0 représente la puissance

Moyenne dans le temps: $\overline{P(t)} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ (14)

L'expression $P(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |f(t)|^2 dt$ (15)

s'appelle densité de la

puissance.

Le même processus décrit par la fonction $F(\omega)$ transformée de FOURIER de la fonction $f(t)$ dans le domaine fréquentiel, ou définit l'énergie spectrale sous la forme: $E(\omega) = |F(\omega)|^2$ (16)

L'énergie spectrale totale est définie par:

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 d\omega \quad (17)$$

Le théorème de PARSEVAL montre que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (18)$$

théoriquement la relation (18) montre qu'il y a conservation d'énergie soit dans l'analyse temporelle soit dans l'analyse spectrale donc cette relation montre qu'il y a équivalence entre une analyse spectrale et le signal original.

La puissance spectrale moyenne est donnée par:

$$\overline{P(\omega)} = \frac{1}{2\pi T_0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (19)$$

La densité spectrale de puissance est définie comme:

$$P(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T_0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (20)$$

Handwritten text, possibly a signature or name, in cursive script.

CHAPITRE IV

Handwritten text, possibly a signature or name, in cursive script.

IV INFORMATIONS PORTEES PAR LES SPECTRES

On distingue trois paramètres principaux pour décrire un mouvement; le déplacement, la vitesse et l'accélération. Le déplacement est proportionnel à la contrainte dans le matériau et l'accélération à la force appliquée sur l'objet; pour les vibrations à basse fréquence, on utilise la mesure du déplacement, pour les vibrations de hautes fréquences la mesure de l'accélération est préférable.

L'accélération est la plus souvent utilisée car elle couvre une large gamme de fréquences.

Les sources des phénomènes vibroacoustiques représentent les propriétés techniques de la machine, leur fonctionnement caractérise l'état de celle-ci, pour cette raison, elles sont utilisées comme signaux informant sur ces propriétés.

On sait que la majorité des machines existantes composées d'éléments qui fonctionnent d'une façon cyclique soit plus ou moins fréquentielles donc le signal résulte d'une superposition des différents signaux propres émis par les éléments constituant la machine; en partant de l'hypothèse que le signal est composé d'un nombre de termes sinusoidaux de plus en sachant que les signaux vibroacoustiques répondent

aux conditions de DIRICHLET, en supposant que la période pour les signaux stochastiques est infinie, on peut dire que la synthèse de FOURIER et l'analyse de FOURIER sont équivalentes, elles représentent le même signal dans le domaine du temps et de la fréquence, donc une analyse spectrale est préférable.

En général on mesure le spectre d'énergie qui caractérise l'intensité de fonctionnement des sources, il est proportionnel au carré du module de la transformée de FOURIER, ce spectre est intéressant du point de vue amplitude de la vibration, mais ne s'intéresse nullement au problème de la phase.

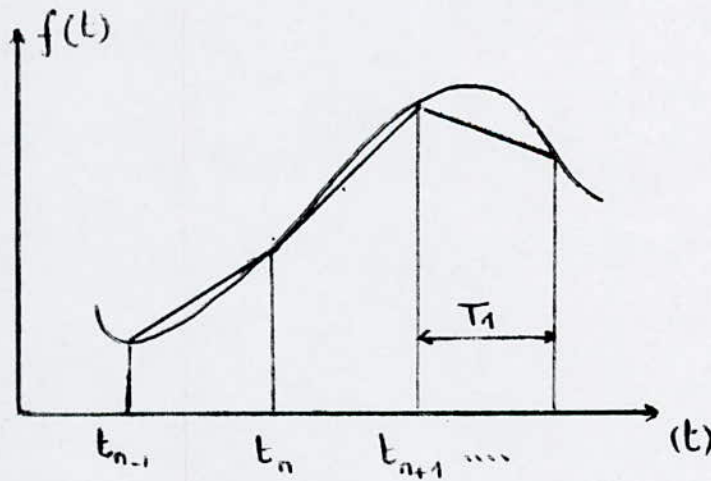
En possédant la répartition de l'énergie en fonction de la fréquence on peut essayer d'identifier les sources correspondantes aux différentes composantes, cela rend possible l'observation et l'évaluation du fonctionnement des éléments tels que les roulements, engrenements ainsi que l'état de précision tels que l'équilibrage, l'état de l'usure ... Cela sert de base pour diagnostiquer une machine.

CHAPITRE V

V THEORIE DE L'ECHANTILLONAGE

Dans le chapitre précédent, nous avons développé la théorie de la transformée de FOURIER des fonctions continues.

Sur la base de ces développements, il nous est nécessaire d'étendre cette théorie pour inclure la théorie d'échantillonnage [1]; vu que dans la pratique, les méthodes numériques sont les plus utilisées, l'échantillonnage repose sur un remplacement de la fonction du temps (représentant le signal vibroacoustique) par une suite de datas distribuées d'habitude uniformément le long de la droite du temps; le plus souvent la courbe est remplacée par une ligne brisée comme sur la figure qui suit:



Cette approximation induit des erreurs qui résultent du remplacement de la courbe par une ligne brisée, de l'inexactitude des longueurs des segments du temps et

de l'inexactitude de la mesure des valeurs $f(t_n)$ [2], d'où l'apparition de l'intérêt de l'automatisation (chaîne de montage permettant de relever la suite des données) qui permet de réduire les erreurs en limitant ainsi l'intervention de l'opérateur.

Outre cela, un mauvais choix de la période d'échantillonnage peut entraîner un chevauchement des spectres (très souvent rencontré dans la pratique) ainsi il devient difficile d'effectuer une analyse spectrale et de déceler les fréquences intéressantes.

V1 Impulsion de DIRAC :

dans le domaine temporel, l'impulsion de DIRAC $\delta(t-t_0)$ est une distribution qui assigne à une fonction $y(t)$ la valeur numérique $y(t_0)$, selon la relation :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot y(t) dt = y(t_0); \forall t_0, \forall y \quad (21)$$

cette relation met en évidence l'échantillonnage de $y(t)$ effectué à l'instant t_0 par l'impulsion de DIRAC $\delta(t-t_0)$.

La convolution d'un signal avec une impulsion de DIRAC fournit une réplique de ce signal muni d'un retard égal à celui de l'impulsion :

$$f(t) * \delta(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} f(t-t_0) \quad (22)$$

où $f(t)$ définit le signal en question.

V2 Peigne de DIRAC :

dans le domaine temporel un peigne de DIRAC est une suite périodique illimitée d'impulsions de DIRAC de même intensité, dans le cas où celle-ci est unitaire le peigne est dit unitaire.

Nous représentons les peignes unitaires, centrés par la relation :

$$\pi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_1) \quad (23)$$

où T_1 est la période de répétition appelé aussi période d'échantillonnage.

V3 Echantillonnage :

Soit un signal vibroacoustique représenté par une fonction $f(t)$ et admettant pour transformée de FOURIER la fonction $F(\nu)$; l'échantillonnage de $f(t)$ s'effectue d'une part par la multiplication de $f(t)$ par un peigne de discrétisation (DIRAC), centré $\pi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$ (fig V1), le résultat obtenu est une séquence d'impulsions de DIRAC dont l'amplitude est donnée par $f(t)$ aux points nT_1 soit $[1]$:

$$f(t) \cdot \pi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_1) \delta(t - nT_1) \quad (24)$$

cette opération porte souvent le nom de discrétisation de $f(t)$.

D'autre part par la multiplication avec une fenêtre rectangulaire de longueur T_0 résultant de la limite d'observation du signal.

Ces deux opérations peuvent engendrées deux sources d'erreurs possibles soient :

- la discrétisation de $f(t)$ peut engendrer la superposition (chevauchement) des spectres.
 - l'intervention d'une fenêtre de troncature peut aussi engendrer le phénomène de distorsion du spectre.
- ainsi ces deux problèmes très importants pour le traitement des signaux vibroacoustiques seront traités séparément.

V3.1 Discrétisation de $f(t)$:

Comme il a été dit auparavant, la discrétisation de $f(t)$ peut engendrer un chevauchement des spectres, ceci est dû principalement à la répétition du spectre original $F(\nu)$; si on examine la figure V1, la transformée de FOURIER d'un peigne de DIRAC $\pi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$ est, aussi un peigne de DIRAC (noté $\Delta(\nu)$) de période, et d'amplitude $1/T_1$, or, la transformée de FOURIER du signal discrétisé est égale à la convolution du spectre original $F(\nu)$ et le peigne de DIRAC $\Delta(\nu)$; cette convolution n'est autre qu'une répétition du spectre original muni d'un retard ou d'une avance égale à n/T_1 ou $n = \dots -1, 0, 1, \dots$

Les signaux vibroacoustiques sont en général réels or d'après les propriétés de la transformée de FOURIER, le spectre de puissance d'un signal réel est pair, supposons que sa fréquence maximale est égale à f_c , ainsi $f_{\min} = -f_c$, la figure V1 montre le cas où il y a chevauchement c'est à dire $\frac{1}{T_1} < 2f_c$; la cadence de discrétisation est assez lente, les spectres s'empiètent

les uns sur les autres ainsi le spectre résultant (pointillé) diffère du spectre original surtout pour les fréquences supérieures, car au général, les spectres convergent vers zéro pour les fréquences maximales, donc ce cas peut se traduire par une lecture du spectre difficilement et on ne peut faire d'analogie avec le spectre original $F(\nu)$.

La figure V2 illustre le même exemple sauf que dans ce cas $\frac{1}{T_1} > 2f_c$, c'est à dire que la cadence du train de DIRAC $\delta(\nu)$ est assez lente, nous remarquerons l'absence de chevauchement même l'existence d'un temps mort égal à $\frac{1}{T_1} - 2f_c$, ce cas favorable difficile à réaliser dans la pratique car il exige la connaissance de la fréquence maxi du spectre original f_c .

De ces deux cas, on définit un cas limite ou $\frac{1}{T_1} = 2f_c$, c'est à dire que le temps mort ou le temps de répétition, est nul, la répétition du spectre (du à la convolution) ait lieu immédiatement après que le spectre précédent pris fin, $\frac{1}{T_1} = 2f_c$ est appelée fréquence de NYQUIST (fig V3).

V 31.1 Conclusion:

de cela, on peut déduire que la fréquence minimale d'échantillonnage $\frac{1}{T_1}$ doit être supérieure ou égale à $2f_c$ et ceci afin d'éviter le chevauchement des spectres [2]; plus connue sous l'expression critère de NYQUIST.

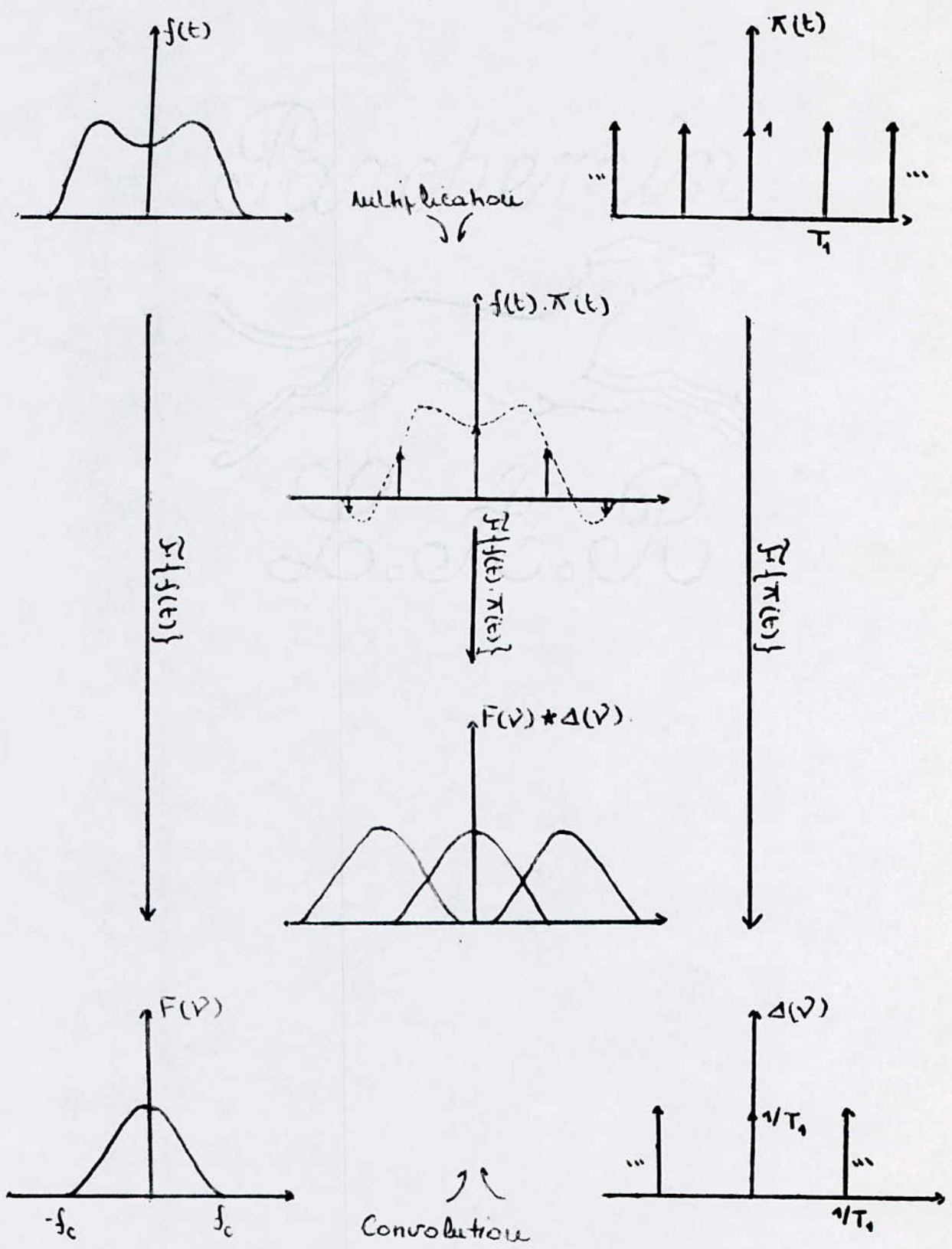


fig V 1

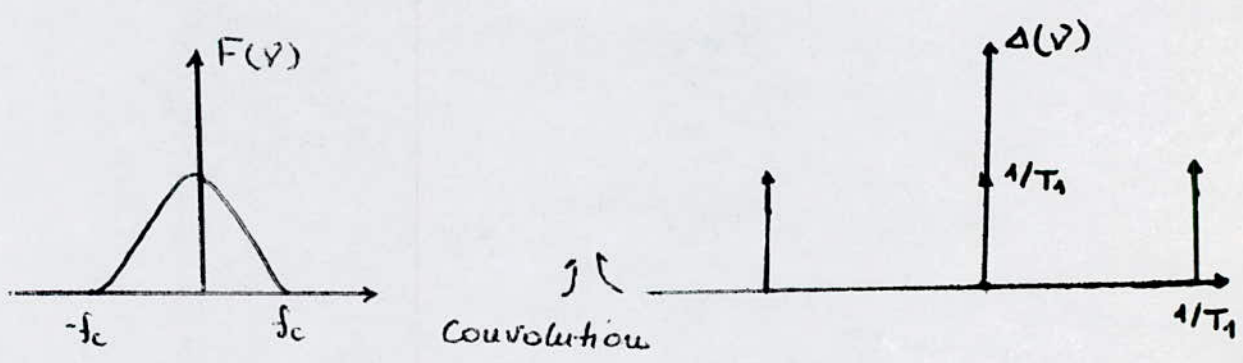
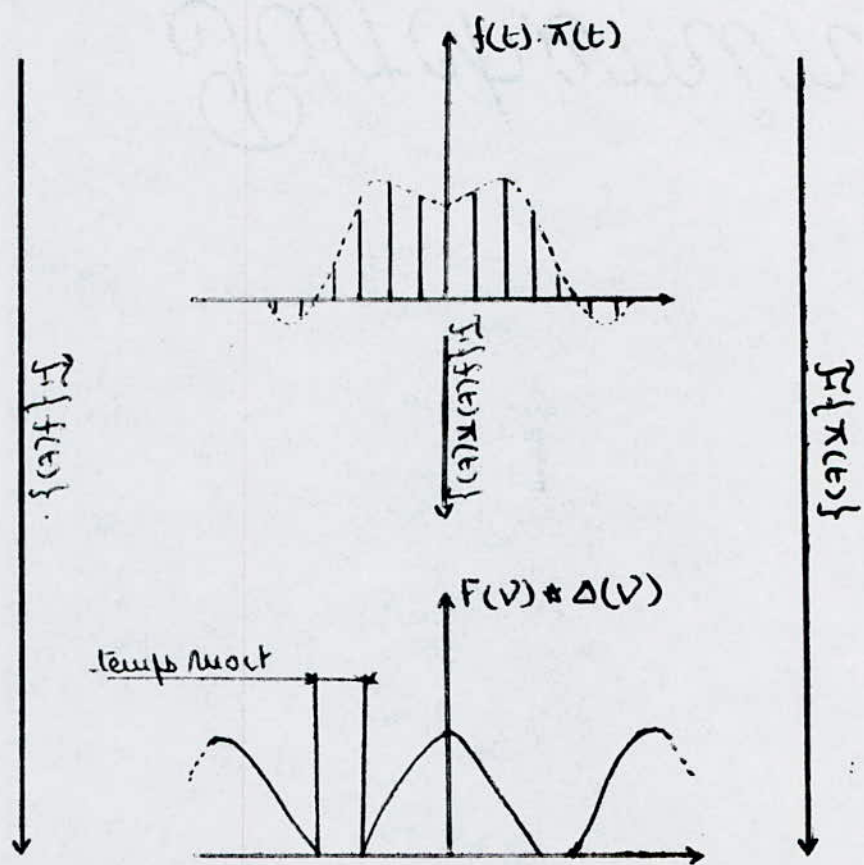
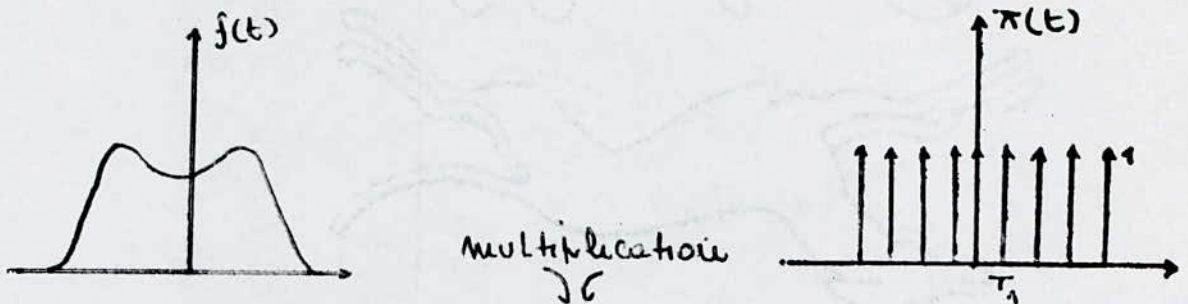


fig V2

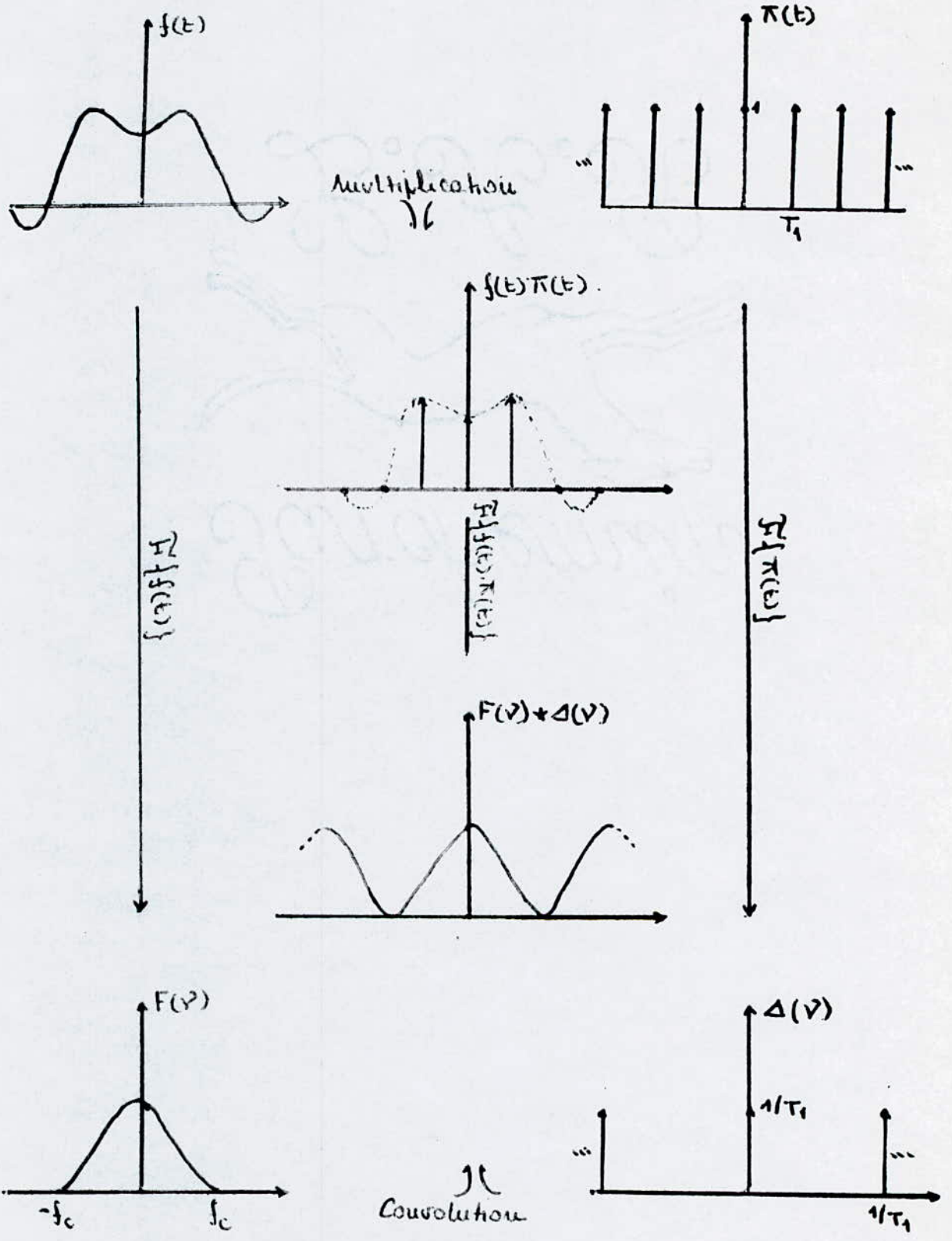


fig V3

V3.2 Fenêtre de troncature :

- Comme il a été dit, que la fonction $f(t)$ peut être la représentation du signal caractérisant des phénomènes qui ont lieu dans un système mécanique fonctionnant. Pour connaître les phénomènes ou doit avoir une réception normale et d'une transformation du signal.

En pratique le temps de l'observation de la fonction $f(t)$ est limité c'est à dire que la fonction sera examinée pendant ce temps, mais au delà de ce temps elle est inconnue; sur la figure V4 la même fonction est représentée quatre fois, pour chaque fois on a marqué des quatre temps différents de l'observation T_0 .

Le moyen d'observation de la fonction peut être représenté par la fonction suivante :

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T_0 \\ 0, & |t| > T_0 \end{cases} \quad (25)$$

- cette fonction est généralement appelée fonction de pondération ou tout simplement fonction de fenêtre.

La partie de la fonction qui ne passe pas à travers la fenêtre ne sera jamais remarquée aussi constater sur la figure V4 que plus T_0 est grand, plus le nombre d'informations contenues dans le spectre est important donc on peut dire que le fait de limiter le signal entraîne une déformation du spectre à analyser.

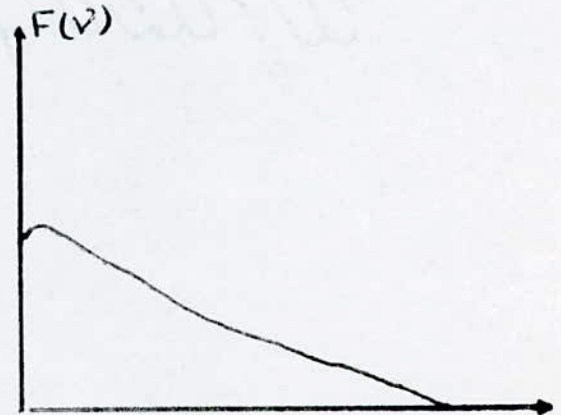
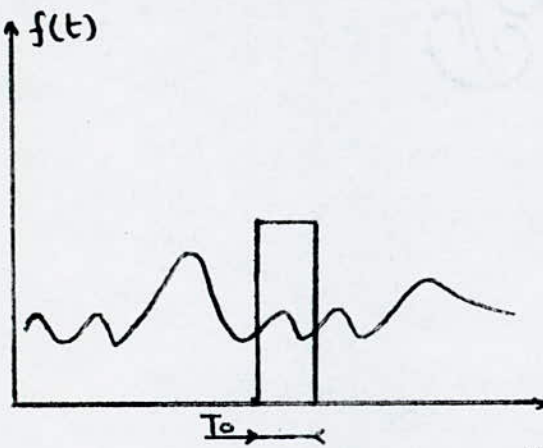
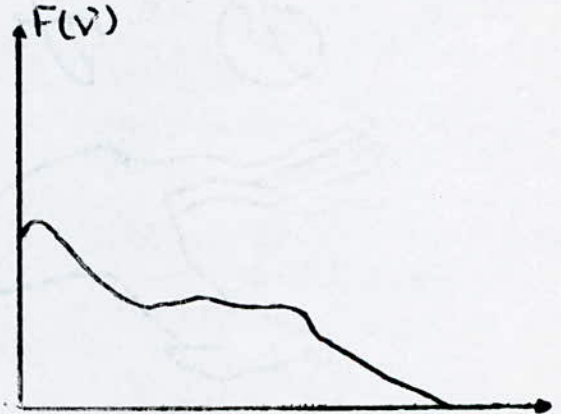
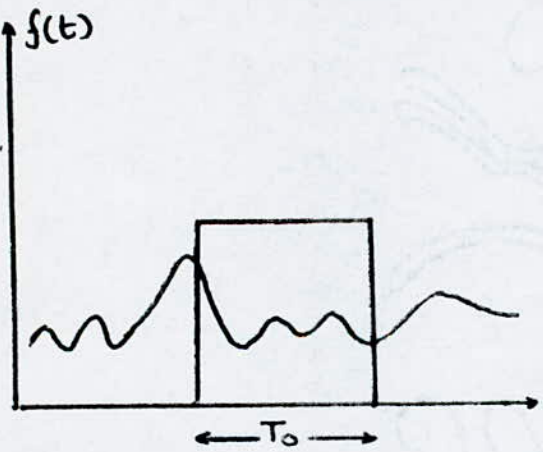
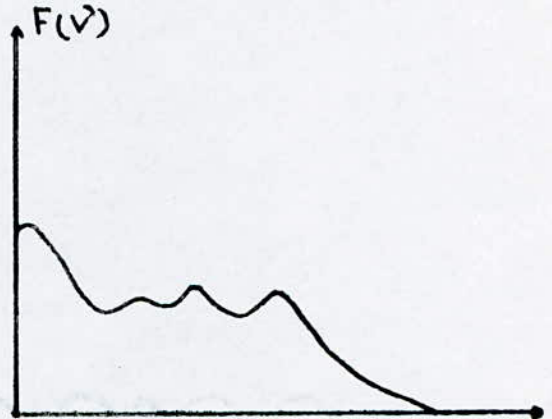
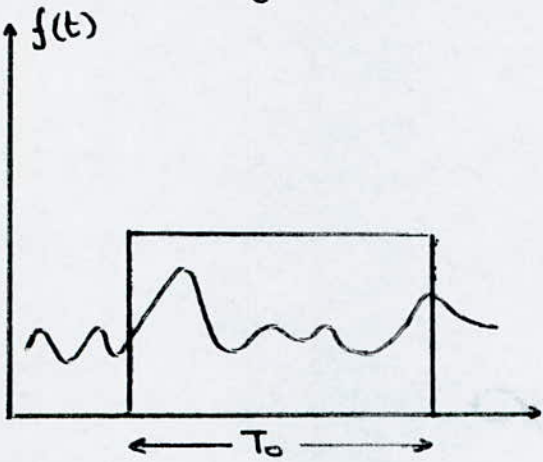
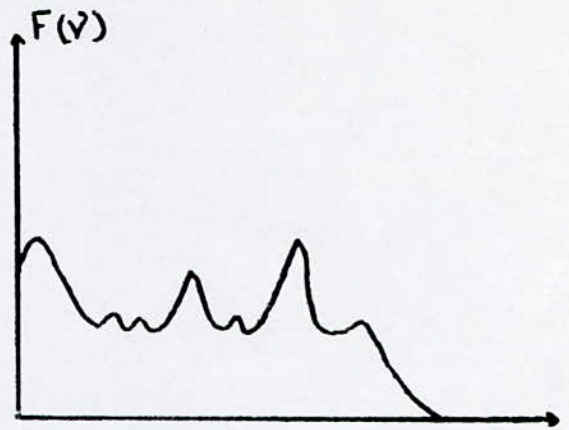
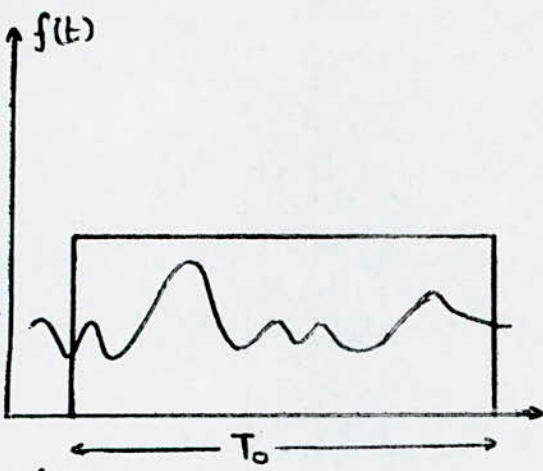


fig V 4

V 32.1 Distorsion des spectres :

La limitation de la durée de la fonction $f(t)$ par une fenêtre peut engendrer une distorsion du spectre, pour mieux visualiser ce phénomène il est intéressant de l'exposer par un exemple simple tel qu'une fonction sinusoïdale $f(t) = A \cos(2\pi \nu_2 t)$, nous savons de plus que sa transformée de FOURIER est composée de deux impulsions de DIRAC d'amplitude $A/2$ situées autour de l'axe des fréquences à $\pm \nu_2$. L'opération de discrétisation nous fournit ainsi le signal discrétisé, et son spectre (fig V 5 a); nous supposons que la longueur de la fenêtre est un multiple de la période $\nu_2 = 1/T_0$. L'échantillonnage de $f(t)$ est achevé par la multiplication du signal discrétisé par la fonction de pondération (fig V 5 b), le spectre correspondant est déterminé par la convolution des deux spectres respectivement du signal discrétisé et celui de la fenêtre; ce spectre est continu, et remarquons que son maximum (fig V 5 c) est situé à une fréquence supérieure à ν_2 or le spectre original admet une impulsion à ν_2 , ce qui traduit la distorsion.

Théoriquement la distorsion est évitée si la fenêtre a une longueur infinie car son spectre est une impulsion de DIRAC $\delta(\nu)$, or dans la pratique la longueur de la fenêtre est limitée d'une part par la capacité du calculateur et d'autre part par la non stationnarité du signal, donc on est intéressé de choisir une fenêtre la plus grande

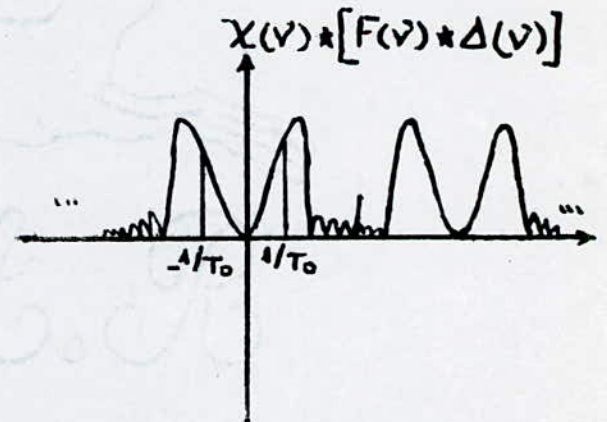
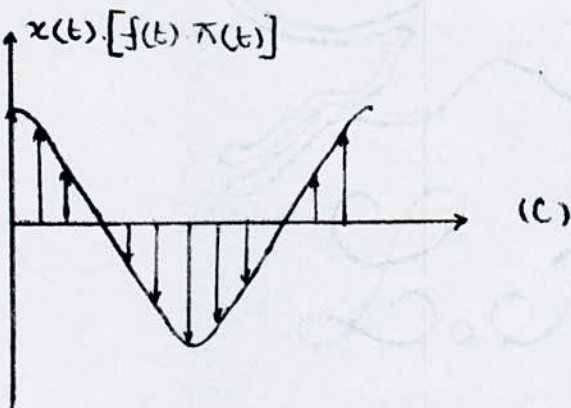
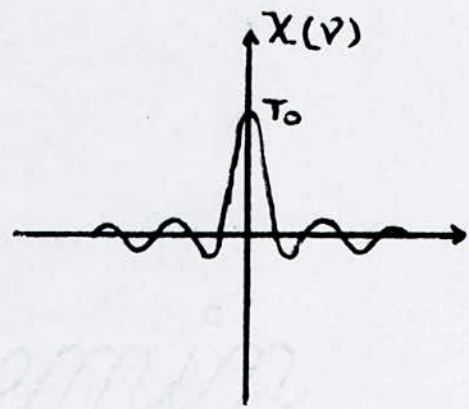
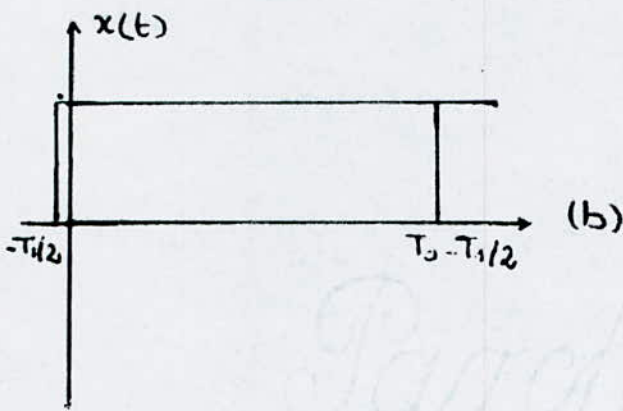
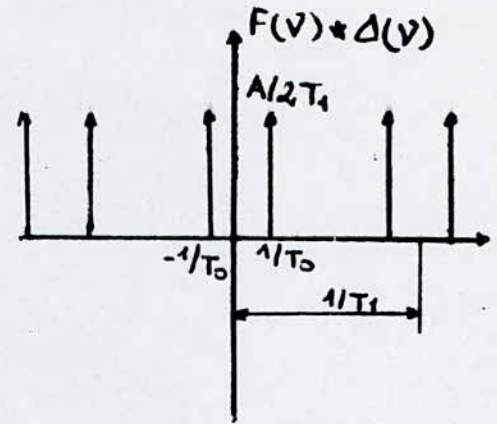
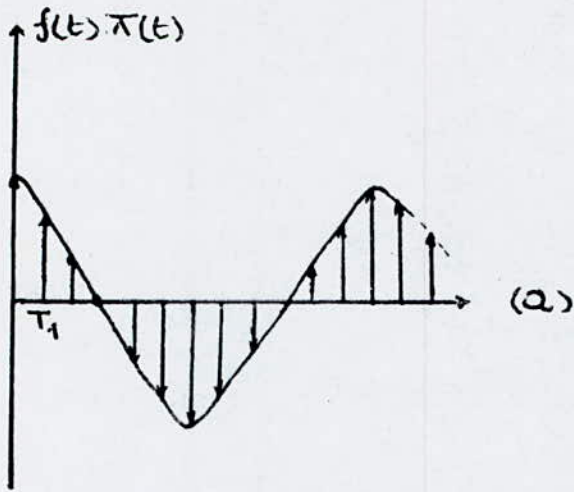


fig V5

possible tel que des lobes latéraux soient les plus étroits et peu amples, on distingue les fenêtres de pondération de HANNING, HAMMING, KAISER ... qui satisfont mieux les conditions.

En conclusion on peut dire que si la fréquence d'échantillonnage $\frac{1}{T_1}$ ne satisfait pas le critère de NYQUIST, les motifs du spectre empêtrent les uns sur les autres, il est alors impossible d'isoler correctement l'un d'eux pour récupérer le spectre recherché. L'emploi du critère de NYQUIST exige la connaissance préalable même approximative du spectre que l'on veut déterminer, pour surmonter cette difficulté on peut soit filtrer le signal avec un passe-bas telle qu'aucune fréquence supérieure à une valeur donnée ν_{max} ne subsiste dans le spectre définitif, soit utiliser une grande cadence d'échantillonnage dans l'espoir qu'elle sera satisfaisante.

V4 Etendue des fréquences:

Théoriquement, la densité spectrale d'un signal vibroacoustique est pair ; or vu la répétition du spectre due à la convolution on peut dire que la fréquence maximale qu'on puisse distinguer dans le spectre est: $\nu_{max} = 1/2T_1$ (26).

La plus basse fréquence est limitée par le temps de mesure qui dépend des conditions de l'exécution de la mesure ou la capacité de stockage, si le nombre d'échantillons qui peuvent être retenus dans la mémoire du calculateur est N, le temps

de mesurage le plus long sera $T_0 = NT_1$; à cause de cela
 la plus basse fréquence qui ou puisse distinguer dans le
 spectre est: $\nu_{\min} = 1/T_0 = 1/NT_1$ (27)

finaliment l'étendu des fréquences du spectre sera:

$$\frac{1}{T_0} \leq \nu \leq \frac{N}{2T_0} \quad (28)$$

autrement dit:

$$\nu_m = \frac{m}{T_0}, m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (29)$$

on peut déduire que l'espace entre deux fréquences serait:

$$\nu_{m+1} - \nu_m = \frac{1}{T_0} \quad (30)$$

CHAPITRE VI

VI LA TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

La transformée de Fourier discrète notée DFT (Discrete Fourier Transform), est la représentation fréquentielle des suites temporelles périodiques.

Elle possède trois caractères fondamentaux [1] :

- le signal est une suite périodique finie
- son spectre est également une suite périodique finie
- les périodes du signal et les périodes du spectre contiennent toutes le même nombre d'échantillons.

En général, les processus de diagnostic des machines sont décrits par une fonction stochastique donc de longue durée; la discrétisation de son spectre nécessite d'une part un échantillonnage ou la genèse de fondation doit être judicieusement choisie, elle doit se situer dans une bande du signal satisfaisant la condition de stationnarité, outre cela ses extrémités seront placées au milieu des intervalles de deux impulsions de DIRAC consécutives, soit l'intervalle $[-T_s/2, (T_0 - T_s/2)]$, d'autre part le signal résultant de l'échantillonnage doit subir une convolution avec une impulsion de DIRAC d'amplitude T_0 et de période T_0 dans le but de discrétiser son spectre, ce fait est décrit par la relation :

$$\pi_1(t) = T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \quad (31)$$

Le graphe VI-1 représente les différentes étapes de transformations pour aboutir à la DFT.

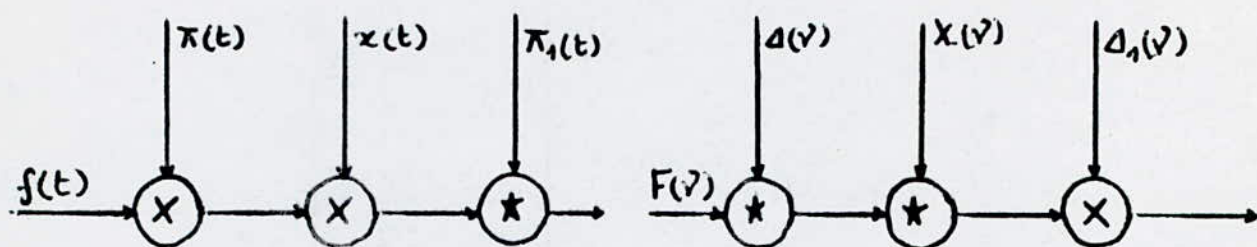


fig VI.1

VI.1 Etablissement de la relation fondamentale de la DFT :
 la transformée de FOURIER d'une fonction continue $f(t)$
 est donnée par la relation (10) que nous récrivons :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \exp(-j2\pi\nu t) dt$$

La discrétisation de $f(t)$ permet d'écrire le signe intégrale
 sous forme de signe "somme" soit :

$$F(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_1) \cdot \exp(-j2\pi\nu kT_1) \quad (32)$$

où k désigne l'incrément du signal défini dans le
 domaine temporel.

L'achèvement de l'échantillonnage par l'intervention
 d'une fenêtre de fonction limite l'étendue de l'incrément
 k ou $k = 0, 1, \dots, N-1$ ou aussi :

$$F(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_1) \cdot \exp(-j2\pi\nu kT_1) \quad (33)$$

Or le spectre obtenu, est discret donc ν n'est plus une variable
 continue, les échantillons, étant séparés par l'intervalle
 $\nu_0 = 1/T_0$, la fréquence ne prend donc que des valeurs
 discrètes $\nu = n\nu_0 = n/T_0$ avec $n = 0, 1, \dots, N-1$ ou n désigne

l'incrément de l'étendue des fréquences, la somme de l'exponentiel se met sous la forme :

$$2\pi j k T_1 = 2\pi j k T_1 n / T_0 = 2\pi j n k / N$$

d'où chacun des échantillons des périodes spéciales est donc défini par la relation suivante :

$$F(n/T_0) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_1) \exp(-j 2\pi n k / N) \quad (34)$$

Cette relation peut se traduire matriciellement [1] par :

$$\overrightarrow{F(n/T_0)} = \overrightarrow{f(kT_1)} \cdot [W] \quad (35)$$

ou $W = \exp(-j 2\pi n k / N)$.

d'autre part elle nous montre que la transformée de FOURIER discrète, est une transformation qui à un vecteur $\overrightarrow{f(kT_1)}$ défini dans le domaine temporel fait correspondre un vecteur $\overrightarrow{F(n/T_0)}$ dans le domaine fréquentiel, l'opérateur de la transformation étant la matrice [W].

VI Etablissement de la relation fondamentale de la DFT inverse :

par analogie avec la transformée de FOURIER Continue [7]

$$\text{posons : } f(kT_1) = C \sum_{n=0}^{N-1} F(n/T_0) \exp(j 2\pi n k / N) \quad (36)$$

il suffit de trouver une méthode pour la détermination de la constante C, pour cela introduisons (36) dans (34)

$$\text{on aura : } F(n/T_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[C \sum_{n'} F(n'/T_0) \exp(j 2\pi n' k / N) \right] \exp(-j 2\pi n k / N)$$

$$F(n/T_0) = C \left[\sum_{n'} F(n'/T_0) \right] \cdot \left[\sum_{k=0}^{N-1} \exp(j 2\pi (n' - n) k / N) \right] \quad (37)$$

pour calculer la somme sur k, on observe qu'elle constitue

une série géométrique ayant pour premier terme 1 ($k=0$),
pour dernier terme $\exp[j 2\pi (n'-n)(N-1)/N]$ et pour raison
 $\exp[j 2\pi (n'-n)/N]$, ainsi :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp[j 2\pi (n'-n)k/N] = \begin{cases} N & \text{si } n'=n \\ 0 & \text{si } n' \neq n \end{cases} \quad (38)$$

par conséquent $F(n/T_0) = C \sum_{n'} F(n'/T_0) \cdot N = C \cdot N \cdot F(n/T_0)$

d'où : $C = 1/N$

$$f(kT_1) = 1/N \cdot \sum_{n=0}^{N-1} F(n/T_0) \exp(j 2\pi n k/N) \quad (39)$$

cette relation définit bien un signal discret et périodique

VI 3 Relation entre la transformée de FOURIER discrète et continue :

La transformée de FOURIER discrète est une version échantillonnée de la transformée de FOURIER continue.

Dans ce sous-chapitre nous utilisons les représentations graphiques pour indiquer, en général, les classes des fonctions du point de vue degré d'équivalence entre la transformée de FOURIER continue, et discrète.

VI 31 Application de la DFT pour une forme ondulatoire :

Le genre de signaux le plus souvent rencontrés dans les diagnostics des machines sont, en général, à caractère stochastiques soit on ne peut affirmer avec exactitude

l'évolution du signal à un instant donné, de plus ce genre de signaux sont en général de durée infinie donc

leur étude nécessite une limitation de durée qui permet de prélever un échantillon subissant les différentes transformations pour aboutir au spectre discret final, ce spectre constitue une estimation du spectre original ; l'estimation est de plus en plus efficace que l'échantillon est grand.

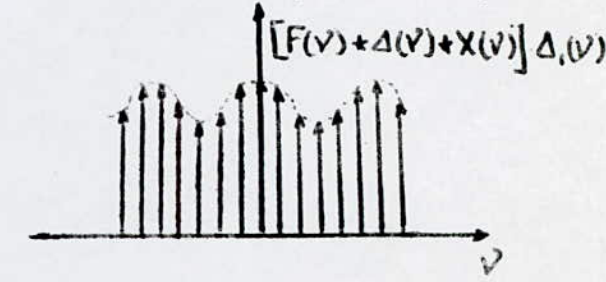
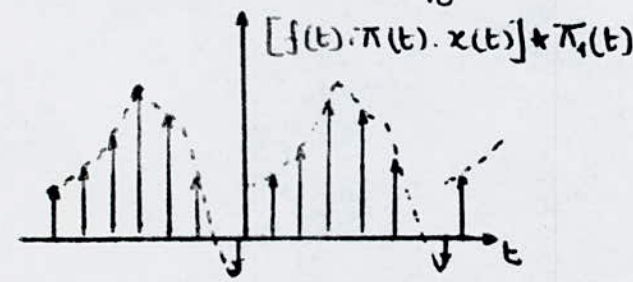
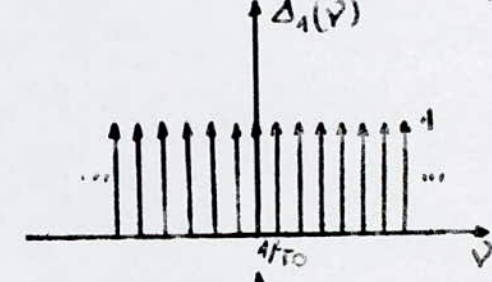
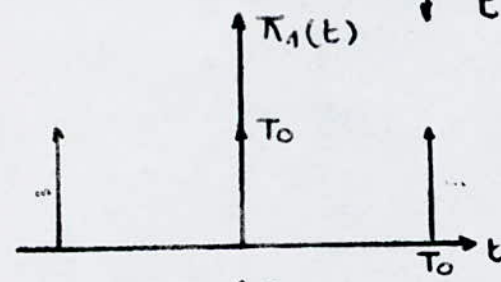
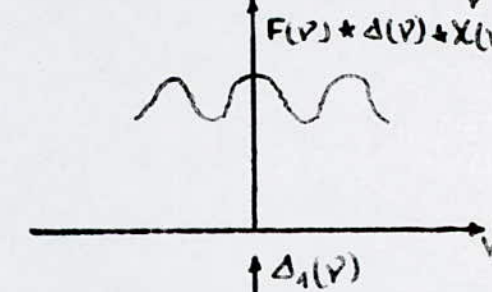
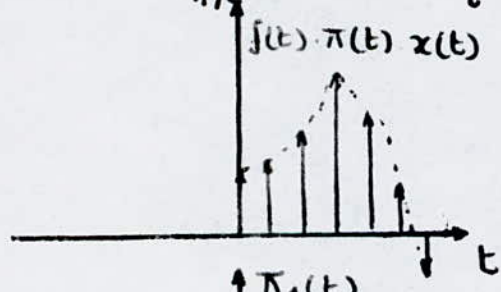
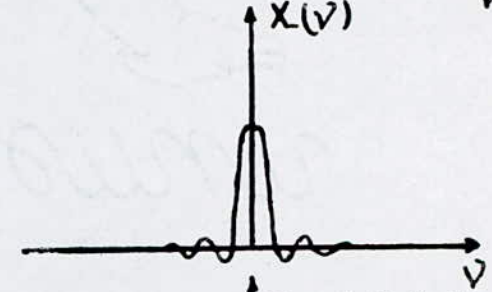
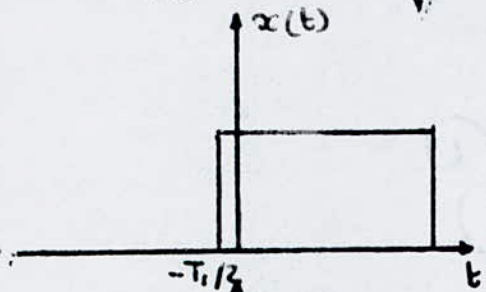
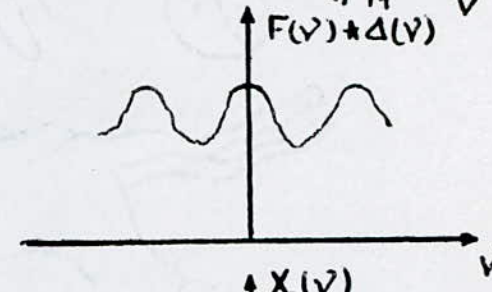
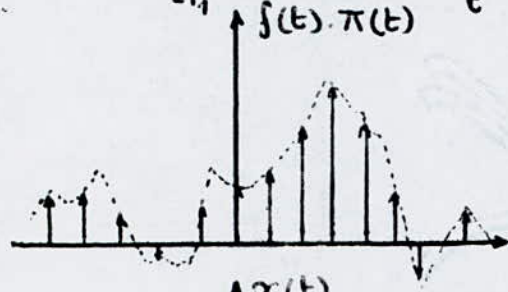
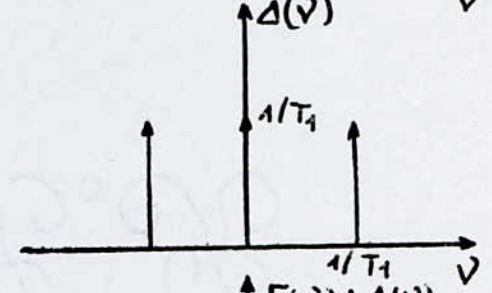
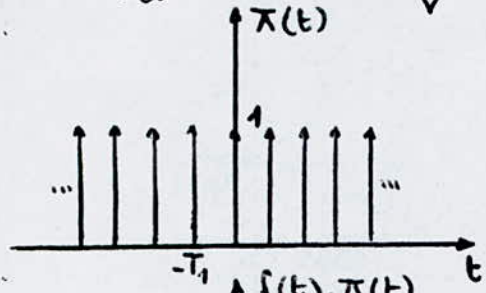
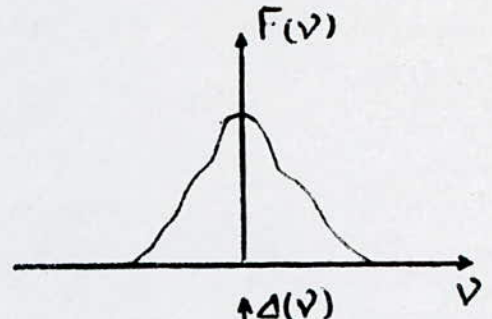
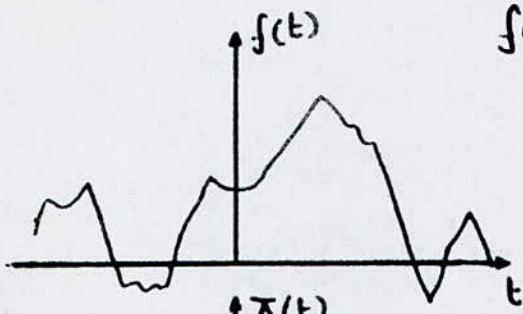
Remarque dans ce genre de signaux la détermination du spectre nécessite des précautions à prendre tels que l'empiètement des spectres et le phénomène de distorsion, de plus pour avoir une équivalence plus proche entre la DFT et le spectre original, il suffit de faire la computation de la relation suivante :

$$F(n/T_0) = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_1) \exp(-j2\pi n k/N) \quad (40)$$

Le facteur $1/N$ provient du fait que la discrétisation du signal induit un facteur multiplicatif de $1/T_1$ au spectre, de plus l'intervention d'une fenêtre de pondération fait que le spectre est multiplié par un facteur de T_0 , contrairement à un signal de brève durée, le spectre est multiplié uniquement par le facteur $1/T_1$ (discrétisation) car l'intervention d'une fenêtre n'est pas indispensable à condition que T_1 est bien choisi de manière à couvrir toute la bande du signal.

La figure VI 2 montre les différentes étapes nécessaires pour l'établissement de la transformée de Fourier discrète pour une fonction $f(t)$ quelconque.

fig VI.2



VI 4 Estimateur de la densité spectrale de puissance :

Comme il a été auparavant que les processus stochastiques, en particulier, ceux des signaux vibroacoustiques des machines sont de durée infini et ne peuvent faire l'objet d'une étude exacte, pour cela on définit des estimateurs qui consistent à déterminer à partir de la réalisation, une valeur $\hat{G}(n)$ de $G(n)$ que nous considérons comme une bonne approximation de la vraie valeur de $G(n)$.

$\hat{G}(n)$ désigne l'estimateur de $G(n)$, $G(n)$ étant l'estimé. Nous rappelons que l'analyse spectrale peut être réalisée suivant plusieurs grandeurs tels que l'amp. litide, la phase, l'énergie l'énergie est la plus souvent utilisée car elle nous donne le plus d'informations, et dont la sensibilité de variation est meilleure sauf que l'inconvénient on ne peut retrouver le signal à partir de ce spectre.

Dans le cas de cette étude nous avons utilisé un estimateur dont l'estimé est la densité spectrale de puissance défini comme suit [3]:

$$G(n) = 2 T_1 |F(n)|^2 / N$$

Remarquer qu'il est proportionnel au carré du module de la transformée de Fourier $F(n)$ ce qui définit bien une énergie.

CHAPITRE VII

VII LES ALGORITHMES DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER RAPIDE

L'emploi de la transformée de Fourier discrète comporte une sévère limitation; en effet le calcul de N échantillons d'une période spectrale exige un nombre d'opérations de l'ordre de N^2 , & N est élevé, ce nombre devient prohibitif pour la durée de calcul, et pour la capacité de mémoire de la machine calculatrice [7].

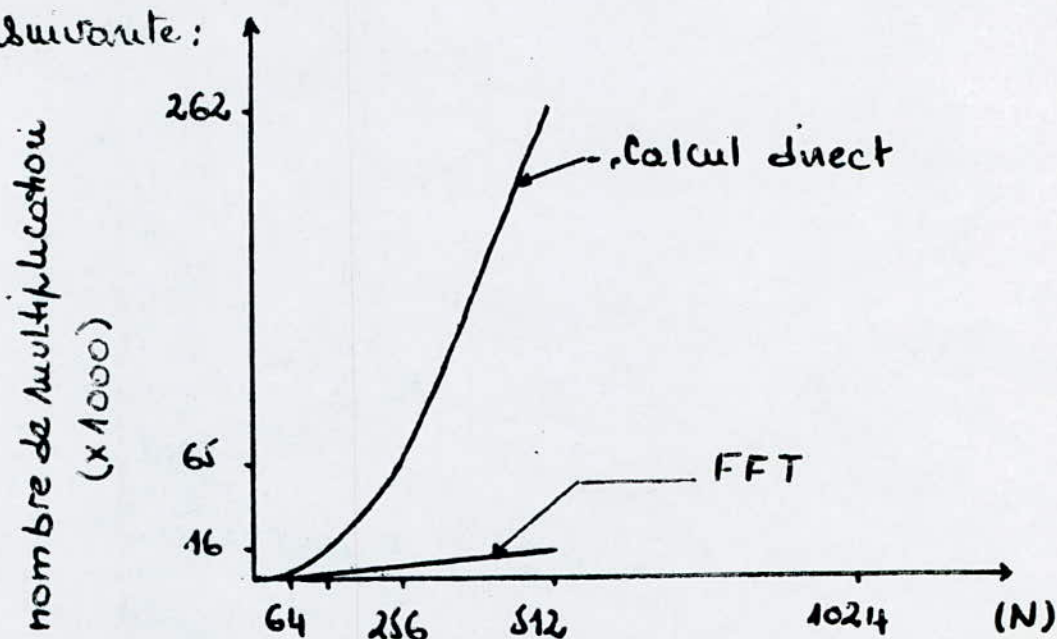
par exemple si $N = 8192 = 2^{13}$, N^2 représente sensiblement 67 millions d'opérations à effectuer.

Or une organisation méthodique du calcul des opérations de la transformée de Fourier discrète est possible, permettant de réduire le nombre d'opérations à effectuer à une valeur de l'ordre de $N \log_2(N)$; & si $N = 8192$, la détermination d'une période spectrale n'exige plus que 32060 opérations.

Cette organisation consiste au principe suivant: la série (42) comprenant N échantillons peut être déterminée par une combinaison conforme de deux séries comprenant chacune $N/2$ échantillons, en considérant que $N = 2^r$ (r est un nombre entier) les deux séries précédentes subissent à leur tour respectivement une combinaison de deux séries de $N/4$ échantillons; on peut étaler cette procédure de division jusqu'au cas où les transformées de séries de deux échantillons seront calculées, ainsi cette procédure devient simple et plus efficace que pour le calcul direct de la DFT.

L'ensemble des méthodes permettant d'accélérer le calcul des transformées de FOURIER discrètes constituent la transformée de FOURIER rapide plus connue sous le nom FFT (Fast Fourier Transform). Un des algorithmes du calcul des coefficients de FOURIER par la méthode FFT fut présenté en 1965 par COOLEY et TUCKER [7], [3].

La supériorité de la FFT augmente avec N comme le montre la figure suivante :



VII 1 Algorithmes de COOLEY-TUCKER et SANDER-TUCKER pour $N=4$:
 ce sous chapitre a pour but de fournir les principes de la FFT, comme le choix de N joue un rôle prépondérant, nous commencerons par des valeurs simples telle que $N=2^2$, ensuite nous le prendrons sous forme plus générale $N=2^r$, r entier qui peut être admis d'autant plus qu'on profite d'échantillons réels, et dans ce cas, le nombre de celui-ci peut être choisi volontairement. Quant aux algorithmes constituant la FFT, ils sont a priori en grand nombre et nous nous limiterons à ceux qui sont

usuels: l'algorithme de COOLEY-TUKEY, et ce lui de SANDERSON-TUKEY.

VII.1.1 Notations:

Dans ce cas où $N=2^2$, chacune des périodes du signal, et de son spectre, est définie sur quatre points.

Cette situation simple va nous permettre de définir les deux algorithmes de la FFT.

La relation fondamentale de la DFT, est donnée par:

$$F(n/T_0) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_1) \exp(-j2\pi nk/N) \quad (41)$$

où f désigne le signal d'entrée, et F la transformée de FOURIER.

En faisant $n/T_0 = n$ et $kT_1 = k$, (41) peut se mettre sous la forme:

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \exp(-j2\pi nk/N) \quad (42)$$

ce mode d'écriture n'est pas un changement de variable mais tout simplement un changement d'échelle pour faciliter la notation.

Comme $N=2^2$, en représentation binaire k peut se mettre sous la forme $k=(k_1, k_0)$ où $(k_1, k_0) = (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$; en écriture décimale k se met sous la forme $k=2k_1+k_0$ où les valeurs de k_1, k_0 sont mentionnées ci-dessus.

De même pour n , en représentation binaire, n peut se mettre sous la forme $n=(n_1, n_0)$ où $(n_1, n_0) = (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$; en écriture décimale $n=2n_1+n_0$ avec n_1, n_0 mentionnées ci-dessus.

VII.1.2 Expression équivalente de la DFT à quatre points:

Dans la relation de définition de $F(n)$, nous remplacerons

et $\exp(-j2\pi nk/N)$ par W_N ($N=4$), ou les propriétés de W_N (N entier quelconque) sont : $W_N^N = 1$; $W_N^{m+N/2} = -W_N^m$, $\forall m \in \mathbb{N}$; $W_N^{mN} = 1$, $\forall m \in \mathbb{N}$ (\mathbb{N} ensemble des entiers naturels).

d'où l'expression de la DFT à quatre points sera :

$$F(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 f(k_1, k_0) W_4^{n_1 k_1} \quad (43)$$

cette relation commence à éclaircir que le calcul de la DFT par la méthode FFT fait intervenir des signaux intermédiaires ; dans le cas de cet exemple, le premier signal intermédiaire apparaît lors du calcul de la somme intérieure correspondant à k_1 , de même le deuxième signal intermédiaire apparaît lors du calcul de la somme correspondant à k_0 .

VII 13 Les algorithmes fondamentaux :

Le produit n_k peut être développé soit aux dépens de k , soit aux dépens de n ; dans le premier cas on effectue la décimation temporelle de n_k ; dans le second on effectue la décimation de la fréquence.

La première méthode constitue l'algorithme de COOLEY-TUKEY, la seconde constitue l'algorithme de SANDER-TUKEY.

VII 13.1 Algorithme de COOLEY-TUKEY [1] :

développons méthodiquement le produit n_k aux dépens de k ,

$n(2k_1 + k_0)$, le produit a pour termes :

$$n \cdot 2k_1 = (2n_1 + n_0) \cdot 2k_1 = 4n_1 k_1 + n_0 \cdot 2k_1$$

donc $W_4^{n \cdot 2k_1} = W_4^{n_0 \cdot 2k_1}$, car $W_4^{4n_1 k_1} = 1$.

$n k_0 = (2n_1 + n_0) k_0$, aussi $W_4^{n k_0} = W_4^{(2n_1 + n_0) k_0}$

en définissant la DFT à quatre points d'échelle.

$$F(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 f(k_1, k_0) W_4^{n_0 2k_1} \cdot W_4^{(2n_1 + n_0) k_0} \quad (44)$$

$$F(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \left[\sum_{k_1=0}^1 f(k_1, k_0) W_4^{n_0 2k_1} \right] W_4^{(2n_1 + n_0) k_0} \quad (45)$$

posons: $F_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 f(k_1, k_0) W_4^{2n_0 k_1} \quad (46)$

$$F_2(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 F_1(n_0, k_0) W_4^{(2n_1 + n_0) k_0} \quad (47)$$

$$F(n_1, n_0) = F_2(n_0, n_1). \quad (48)$$

Les trois relations (46), (47), (48) définissent ainsi l'algorithme de COOLEY-TUKEY dans le cas $N=2^L$ [7].

VII 13.11 Interprétation:

La méthode précédente, consiste en définissant à passer par récurrence du signal initial $f(k)$ à sa transformée de FOURIER $F(n)$ en faisant intervenir deux signaux intermédiaires F_1 et F_2 ; ceux-ci peuvent être considérés comme résultant de substitutions effectuées sur les indices k_1 et k_0 définissant le signal par les indices n_1, n_0 définissant sa DFT.

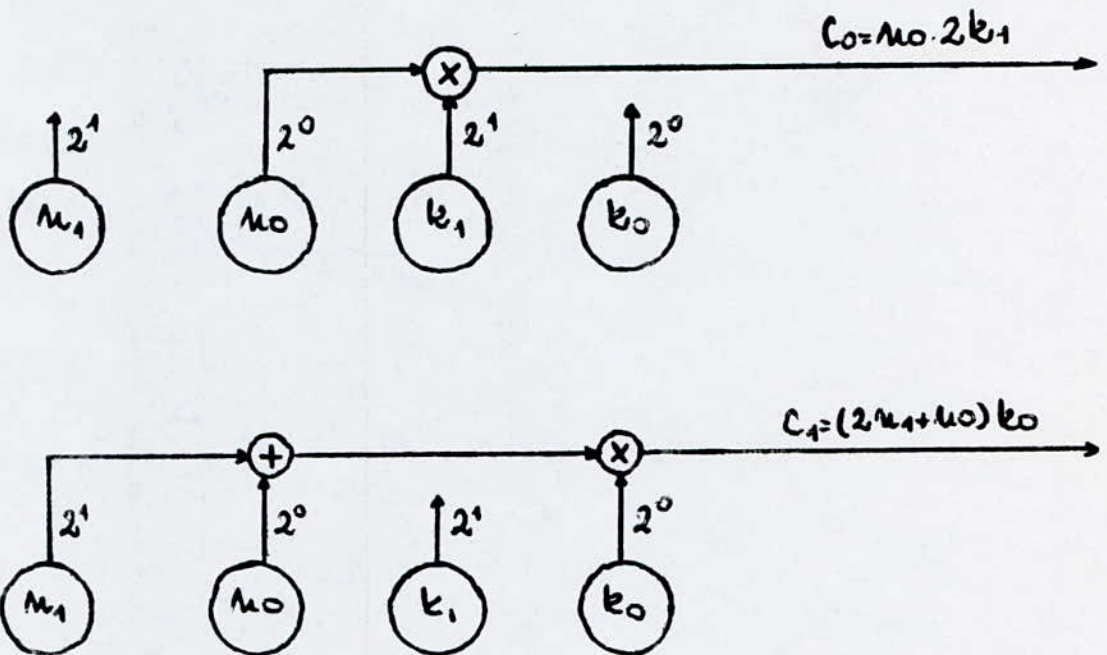
en premier lieu, n_0 remplace k_1 , donc a lieu la transition

$$k_1, k_0 \rightarrow n_0, k_0.$$

en second lieu, n_1 remplace k_0 , donc a lieu la transition

$$n_0, k_0 \longrightarrow n_0, n_1$$

d'autre part la relation (48) nous montre que la DFT de $F(n_1, n_0)$ peut être à son tour considérée, comme résultant du renversement des indices du second signal intermédiaire. Les exposants de W_4 dans les relations (46) et (47) qui définissent les deux signaux intermédiaires peuvent être considérés comme résultant des graphes suivants :



VII 132 Algorithme de SANDER-TURKEY [7] :

développons de nouveau le produit nk mais aux dépens de n_1 , nous obtenons le résultat suivant :

$$F(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 f(k_1, k_0) W_4^{n_0(2k_1 + k_0)} W_4^{2n_1 k_0} \quad (49)$$

$$\text{posons : } \bar{F}_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 f(k_1, k_0) W_4^{n_0(2k_1 + k_0)} \quad (50)$$

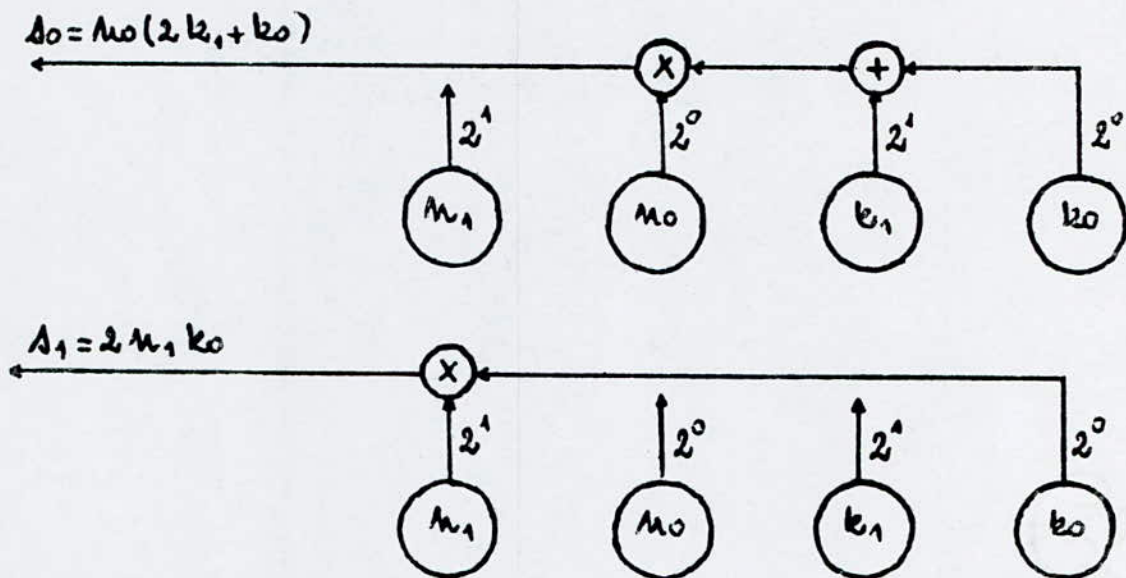
$$\bar{F}_2(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 \bar{F}_1(n_0, k_0) W_4^{2n_1 k_0} \quad (51)$$

$$F(n_1, n_0) = F_2(n_0, n_1) \quad (52)$$

Les trois relations (50), (51) et (52) définissent l'algorithme de SANDER-TUKEY pour $N=2^r$ [7].

VII 13.2.1 Interprétation:

Les jeux d'indices sont les mêmes que dans l'algorithme de COOLEY-TUKEY, par contre les exposants de W_4 diffèrent de C_0 et C_1 :



VII 2 Généralisation des deux algorithmes pour $N=2^r$:

avec $N=2^r$, r entier, nous abordons le cas général, chacune des périodes du signal et de son spectre contient 2^r échantillons.

Comme dans le cas précédent, nous préciserons en premier lieu la notation qui nous permettra d'exposer méthodiquement les algorithmes de COOLEY-TUKEY et SANDER-TUKEY.

VII 2.1 Les notations:

en notation binaire $k = (k_{r-1}, k_{r-2}, \dots, k_1, k_0)$, en notation décimale $k = 2^{r-1} k_{r-1} + 2^{r-2} k_{r-2} + \dots + 2k_1 + k_0$.

de même pour n , binaire $n = (n_{r-1}, n_{r-2}, \dots, n_1, n_0)$, en notation décimale $n = 2^{r-1} n_{r-1} + 2^{r-2} n_{r-2} + \dots + 2n_1 + n_0$.

Le signal peut être noté de la façon suivante: $f(k) = f(k_{r-1}, \dots, k_1, k_0)$;

le spectre $F(n) = F(n_{r-1}, \dots, n_1, n_0)$.

VII 2.2 Expression de la DFT à N points:

$$F(n_{r-1}, n_{r-2}, \dots, n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{r-1}=0}^1 f(k_{r-1}, \dots, k_1, k_0) W_N^{nk} \quad (53)$$

cette relation est équivalente à celle écrite en (42) dans laquelle diffère du point de vue procédural de résolution ce qui montre son efficacité; le nombre de signe "somme" indique le nombre d'états intermédiaires pour aboutir à la DFT qui est égal à r .

VII 2.3 Généralisation de l'algorithme de COOLEY-TUKEY [1]:

La méthode de développement du produit nk selon k fournit les résultats suivants:

le premier terme de W_N^{nk} se réduit à $W_N^{c_0}$ où $c_0 = n_0 2^{r-1} k_{r-1}$

le deuxième terme de W_N^{nk} se réduit à $W_N^{c_1}$ où $c_1 = (2n_1 + n_0) 2^{r-2} k_{r-2}$

⋮

le dernier terme de W_N^{nk} se réduit à $W_N^{c_{r-1}}$ où $c_{r-1} = (2^{r-1} n_{r-1} + \dots + 2n_1 + n_0) k_0$

donc nous avons défini r signaux intermédiaires qui nous permettent de faire récurrence du signal à son

spectre

$$\begin{aligned}
 F_1(n_0, k_{r-2}, \dots, k_1, k_0) &= \sum_{k_{r-1}=0}^{N-1} f(k_{r-1}, k_{r-2}, \dots, k_1, k_0) W_N^{C_0} \\
 F_2(n_0, n_1, k_{r-3}, \dots, k_1, k_0) &= \sum_{k_{r-2}=0}^{N-1} F_1(n_0, k_{r-2}, \dots, k_1, k_0) W_N^{C_1} \\
 &\vdots \\
 F_r(n_0, n_1, \dots, n_{r-2}, n_{r-1}) &= \sum_{k_0=0}^{N-1} F_{r-1}(n_0, n_1, \dots, k_0) W_N^{C_{r-1}}
 \end{aligned} \quad (54)$$

La DFT se déduit du dernier signal intermédiaire par le renversement de ces indices soit :

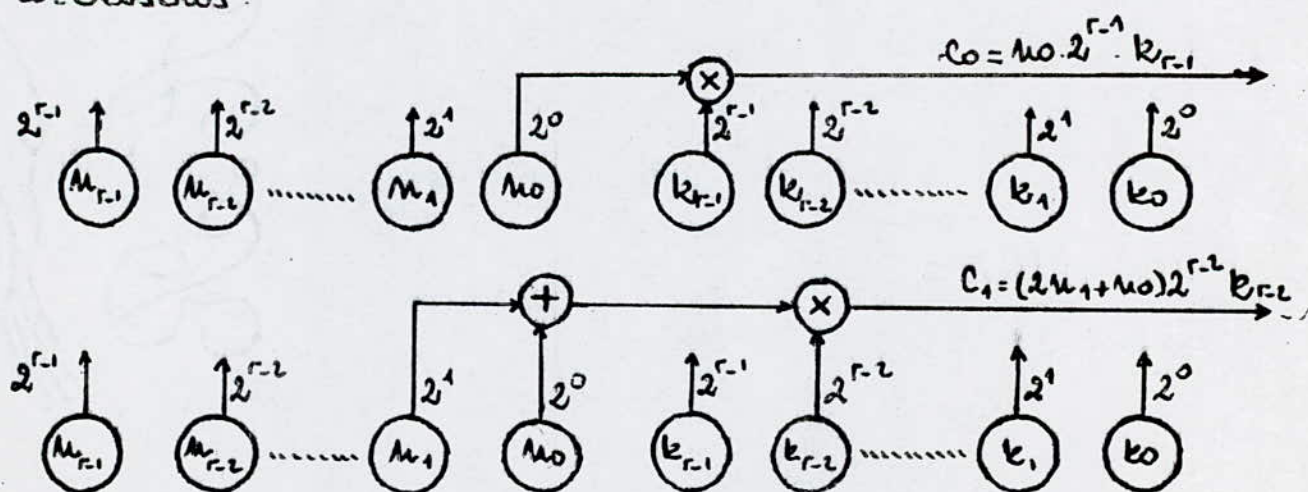
$$F(n_{r-1}, n_{r-2}, \dots, n_1, n_0) = F_r(n_0, n_1, \dots, n_{r-2}, n_{r-1}) \quad (55)$$

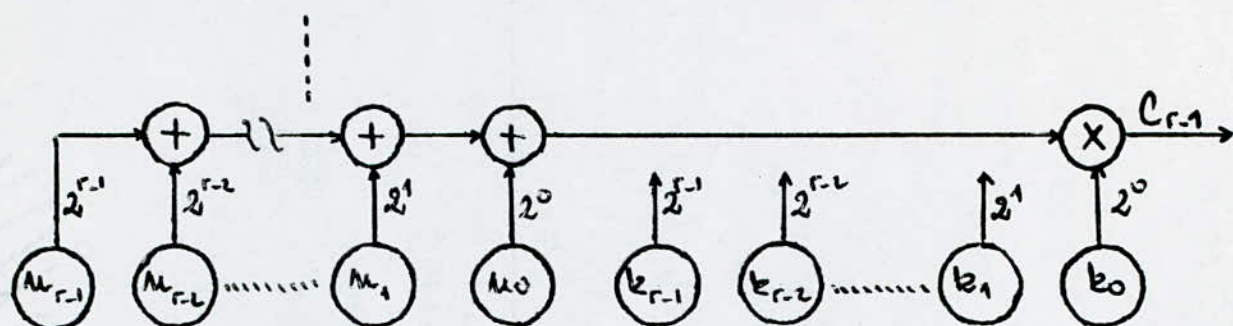
Les $(r+1)$ relations de récurrences définissent l'algorithme de COOLEY-TUKEY avec $N = 2^r$ [7].

Les relations (54) définissent les différentes étapes intermédiaires de la FFT dont le nombre est égal à r .

La relation (55) définit le désenrouillage (qui ouvre par la suite lors de la construction des graphes de fluxes) du dernier signal intermédiaire pour l'obtention du spectre final.

Les exposants $C_0, C_1, \dots, C_{r-2}, C_{r-1}$ se déduisent à vue des graphes ci-dessous.





VII 24 Généralisation de l'algorithme de SANDE-TUKEY [1] :

le même raisonnement que précédent en développant le produit M_k selon n , on obtient la relation de récurrence suivante :

le premier terme de W_N^{nk} se réduit à $W_N^{\Delta_0}$ où $\Delta_0 = n_0(2^{r-1}k_{r-1} + \dots + k_1 + k_0)$

le deuxième terme de W_N^{nk} se réduit à $W_N^{\Delta_1}$ où $\Delta_1 = 2n_1(2^{r-2}k_{r-2} + \dots + k_1 + k_0)$

le r ème terme de W_N^{nk} se réduit à $W_N^{\Delta_{r-1}}$ où $\Delta_{r-1} = 2^{r-1}n_{r-1}k_0$

$$\left. \begin{aligned} \text{en posant : } F_r(n_0, k_{r-2}, \dots, k_1, k_0) &= \sum_{k_{r-1}=0}^1 f(k_{r-1}, \dots, k_1, k_0) W_N^{\Delta_0} \\ &\vdots \\ F_r(n_0, n_1, \dots, n_{r-1}, k_0) &= \sum_{k_0=0}^1 F_{r-1}(n_0, n_1, \dots, n_{r-1}, k_0) W_N^{\Delta_{r-1}} \end{aligned} \right\} (56)$$

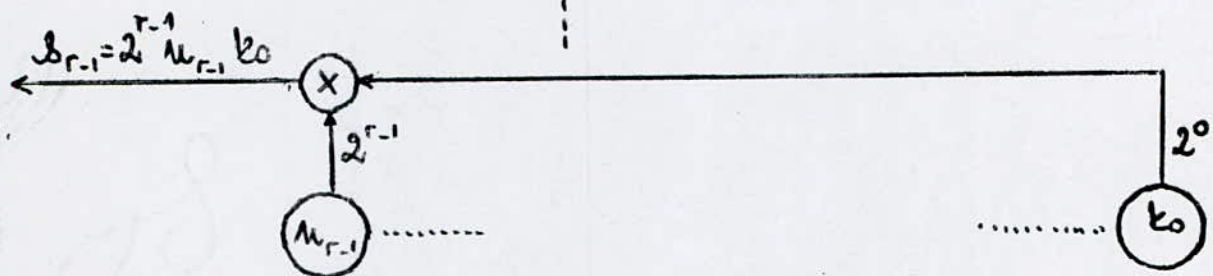
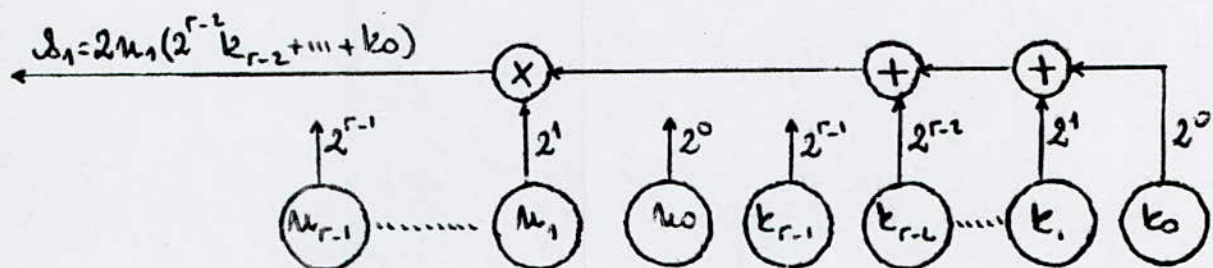
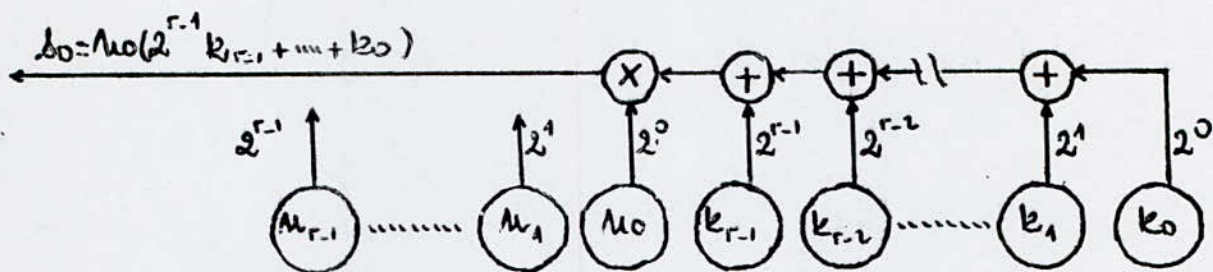
de même que le cas précédent, la DFT à $N=2^r$ se déduit du dernier signal intermédiaire par le renversement de ses indices

$$\text{soit : } \bar{F}(n_{r-1}, \dots, n_1, n_0) = F_r(n_0, n_1, \dots, n_{r-1}) \quad (57)$$

les $(r+1)$ relations de récurrence définissent l'algorithme de SANDE-TUKEY [1].

Les relations (56) définissent les différentes étapes intermédiaires de la FFT, dont le nombre est égal à r , aussi la relation définit le désenrouillage du dernier signal intermédiaire pour l'obtention du spectre final.

les exposants $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{r-2}, \delta_{r-1}$ se déduisent à vue des graphes ci-dessous :



L'algorithme choisi pour établir le programme FFT est celui de COOLEY-TUKEY, donc dans ce qui suit nous discuterons uniquement des problèmes concernant cet algorithme.

VII 3 Représentation graphique de l'algorithme de COOLEY-TUKEY :
 la programmation des machines utilisées pour le calcul des DFT met à profit les propriétés des graphes de flux ;
 l'algorithme de COOLEY-TUKEY peut ainsi être représenté d'une

manière plus exploitable que les expressions mathématiques qui les définissent; pour ne pas s'embrouiller dans les calculs, nous choisissons un exemple simple qui nous permet de tirer les différentes caractéristiques du graphe, soit $N=2^3$.

VII 31 Passage du signal initial au premier état intermédiaire:

L'application de l'algorithme de COOLEY-TUKEY à la DFT dont le nombre d'échantillons $N=2^3$, donne la relation suivante:

$$F(n_2, n_1, n_0) = \sum_{k_2=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_0=0}^1 f(k_2, k_1, k_0) W_8^{nk} \quad (58)$$

La première étape de la transformation du signal est décrite

par la relation: $F_1(n_0, k_1, k_0) = \sum_{k_2=0}^1 f(k_2, k_1, k_0) W_8^{4n_0 k_2}$ (59)

pour faciliter la représentation graphique de cette relation nous établissons au préalable son développement.

$$\left. \begin{aligned} F_1(0,0,0) &= f(0,0,0) W_8^0 + f(1,0,0) W_8^0 \\ F_1(0,0,1) &= f(0,0,1) W_8^0 + f(1,0,1) W_8^0 \\ F_1(0,1,0) &= f(0,1,0) W_8^0 + f(1,1,0) W_8^0 \\ F_1(0,1,1) &= f(0,1,1) W_8^0 + f(1,1,1) W_8^0 \\ F_1(1,0,0) &= f(0,0,0) W_8^0 - f(1,0,0) W_8^0 \\ F_1(1,0,1) &= f(0,0,1) W_8^0 - f(1,0,1) W_8^0 \\ F_1(1,1,0) &= f(0,1,0) W_8^0 - f(1,1,0) W_8^0 \\ F_1(1,1,1) &= f(0,1,1) W_8^0 - f(1,1,1) W_8^0 \end{aligned} \right\} (60)$$

Il est maintenant aisé de tracer le graphe de fluence représentant les huit relations (60) (fig VII.1).

Les noeuds sources représentent les échantillons du signal initial, les noeuds puits représentent les échantillons du premier état intermédiaire.

Remarquons aussi que la relation une et la relation cinq de (60) constituent une combinaison linéaire de $f(0,0,0)$ et $f(1,0,0)$ à un signe près, ce qui constitue un dual.

de même pour les relations 2,6; 3,7; 4,8

Nous dirons que cette étope est constituée par un treillis multiple d'ordre $N/2$ soit 4 (designe le nombre de duals).

VII 32 Passage du premier état intermédiaire au second état;

cette transition est décrite par la relation suivante:

$$F_2(m_0, m_1, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 F_1(m_0, k_1, k_0) W_8^{2(2n_1+n_0)k_1} \quad (61)$$

Nous l'explicitons comme suit:

$$\left. \begin{aligned} F_2(0,0,0) &= F_1(0,0,0) W_8^0 + F_1(0,1,0) W_8^0 \\ F_2(0,0,1) &= F_1(0,0,1) W_8^0 + F_1(0,1,1) W_8^0 \\ F_2(0,1,0) &= F_1(0,0,0) W_8^0 - F_1(0,1,0) W_8^0 \\ F_2(0,1,1) &= F_1(0,0,1) W_8^0 - F_1(0,1,1) W_8^0 \\ F_2(1,0,0) &= F_1(1,0,0) W_8^0 + F_1(1,1,0) W_8^2 \\ F_2(1,0,1) &= F_1(1,0,1) W_8^0 + F_1(1,1,1) W_8^2 \\ F_2(1,1,0) &= F_1(1,0,0) W_8^0 - F_1(1,1,0) W_8^2 \\ F_2(1,1,1) &= F_1(1,0,1) W_8^0 - F_1(1,1,1) W_8^2 \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Le graphe de flux linéaire représentant ces huit relations est représenté

en figure VII 2.

De même que précédent, remarquons la relation une relation de (62) constituent une combinaison linéaire de $F_1(0,0,0)$, et $F_1(0,1,0)$ ce qui constitue un dual, de même pour les relations 2, 4; 5, 7; 6, 8.

Nous disons que cette étape est constituée par deux maillages multiples d'ordre $N/4$ soit 2.

VII 33 Passage du deuxième état intermédiaire au troisième état: cette transition est décrite par la relation suivante:

$$F_3(n_0, n_1, n_2) = \sum_{k_0=0}^1 F_2(n_0, n_1, k_0) W_8^{(4n_2 + 2n_1 + n_0)k_0} \quad (63)$$

Le développement de la relation donne:

$$\left. \begin{aligned} F_3(0,0,0) &= F_2(0,0,0) W_8^0 + F_2(0,0,1) W_8^0 \\ F_3(0,0,1) &= F_2(0,0,0) W_8^0 - F_2(0,0,1) W_8^0 \\ F_3(0,1,0) &= F_2(0,1,0) W_8^0 + F_2(0,1,1) W_8^2 \\ F_3(0,1,1) &= F_2(0,1,0) W_8^0 - F_2(0,1,1) W_8^2 \\ F_3(1,0,0) &= F_2(1,0,0) W_8^0 + F_2(1,0,1) W_8^1 \\ F_3(1,0,1) &= F_2(1,0,0) W_8^0 - F_2(1,0,1) W_8^1 \\ F_3(1,1,0) &= F_2(1,1,0) W_8^0 + F_2(1,1,1) W_8^3 \\ F_3(1,1,1) &= F_2(1,1,0) W_8^0 - F_2(1,1,1) W_8^3 \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Le graphe de fluxes représentant ces huit relations est représenté sur la figure VII 3.

Nous remarquons que dans cette étape les relations 1, 2;

3, 4; 5, 6; 7, 8 de (64) constituent des duos.

Cette étape est constituée par quatre treillis simples d'ordre $N/8$ soit 1.

VII.34 Passage du troisième état intermédiaire à la DFT:

La méthode FFT par l'algorithme de COOLEY-TUKEY permet d'obtenir la série numérique de la transformée de FOURIER discrète mais d'une façon désordonnée, pour remédier à cet inconvénient il suffit de renverser les adresses écrites en binaire des huit échantillons $F_3(n_0, n_1, n_2)$ et revenir à la base décimale, ainsi on obtient les huit échantillons de la DFT cherchée (fig VII.4).

Le regroupement de ces différents états donne le diagramme de flux ou le graphe correspondant à l'algorithme de COOLEY-TUKEY [7] (fig VII.5).

VII.4 Etude des propriétés des graphes de l'algorithme de COOLEY-TUKEY:

Nous avons mis à profit les relations mathématiques définissant les signaux intermédiaires, et la DFT afin d'établir une représentation graphique de l'algorithme de COOLEY-TUKEY, nous allons étudier les propriétés des graphes ainsi obtenus dans l'intention de pouvoir les retrouver ultérieurement sans l'aide des relations de départ.

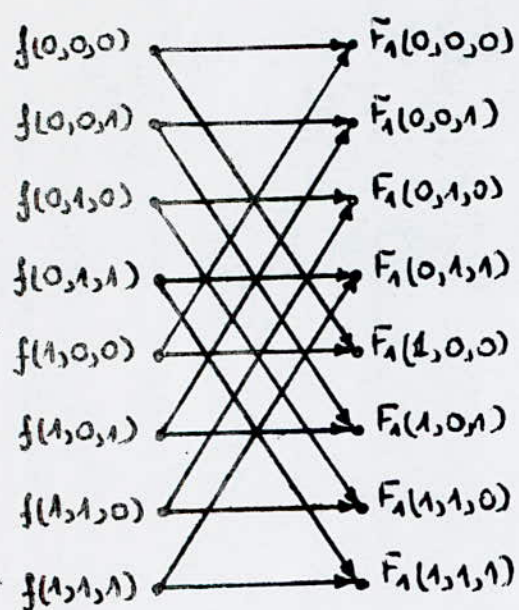


fig VII.1

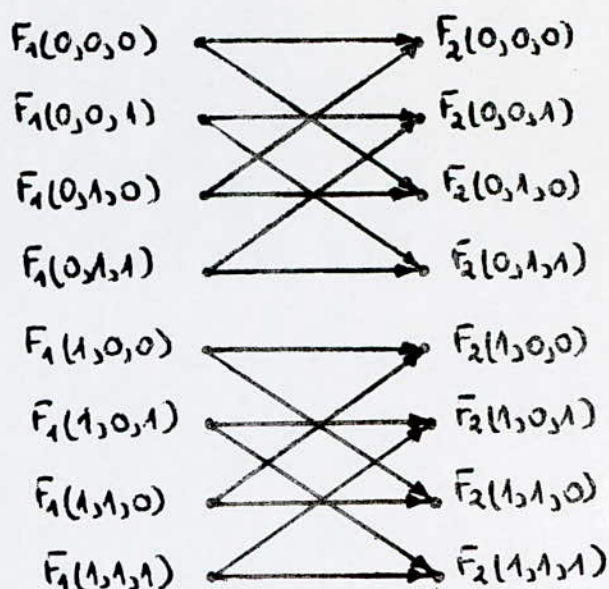


fig VII.2

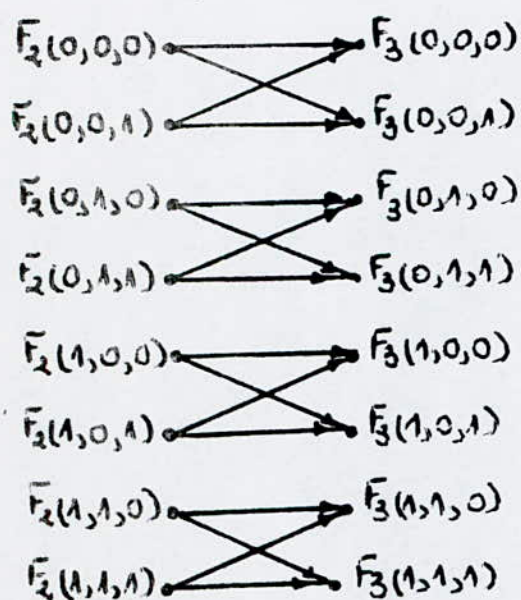


fig VII.3

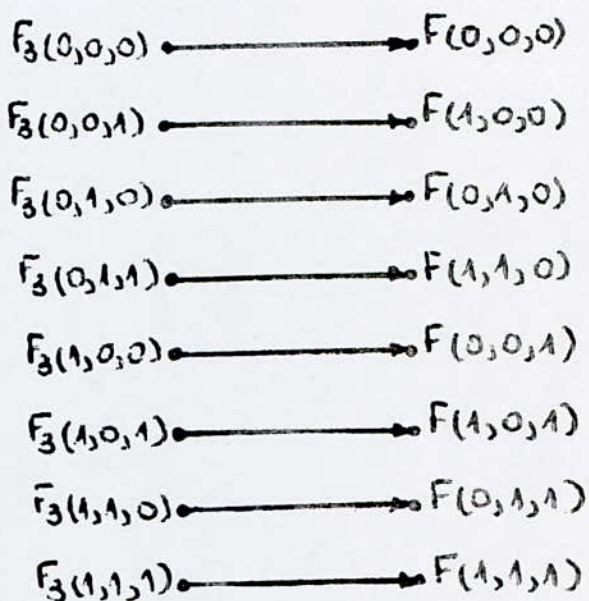


fig VII.4

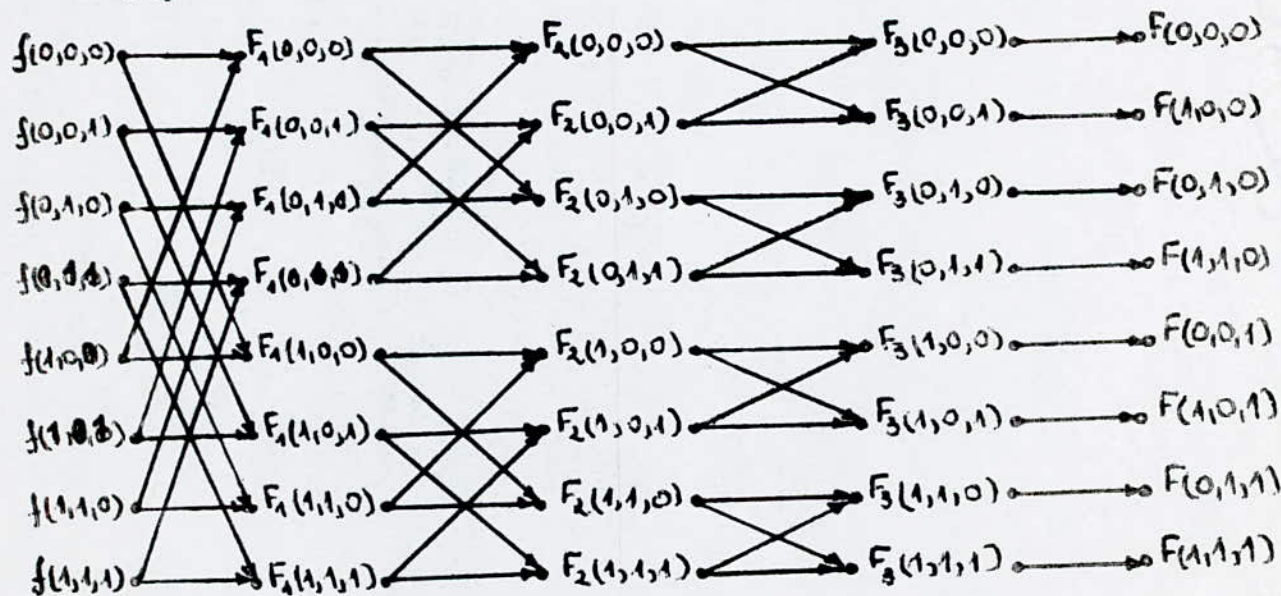


fig VII.5

L'examen des figures VII 1, 2, 3, 4, 5 nous montre que la partie essentielle des graphes de fluence de COOLEY-TUKEY est constituée par les motifs qui relient le signal initial à ses états intermédiaires car le spectre de ce signal se déduit sans difficulté du dernier de ces états.

D'autre part, le nombre de signaux intermédiaires étant égal à r dans tout les cas ou $N=2^r$, les graphes de COOLEY-TUKEY sont tous formés par r colonnes de motifs différentes les unes des autres d'où trois sortes de questions :

- quelle est la structure de ces divers motifs ?
- quelle est leur répartition ?
- quels sont les gains des branches qui les constituent ?

VII 41 Treillis :

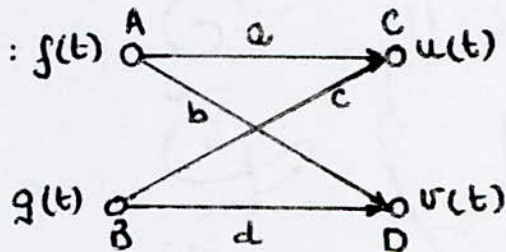
on définit un treillis simple par :

deux nœuds sources A et B

deux nœuds puits C et D

deux branches parallèles AC et BD

deux branches croisées AD et BC



a, b, c, d désignent les gains respectifs des quatre branches.

$f(t)$ et $g(t)$ les signaux fournis respectivement des sources.

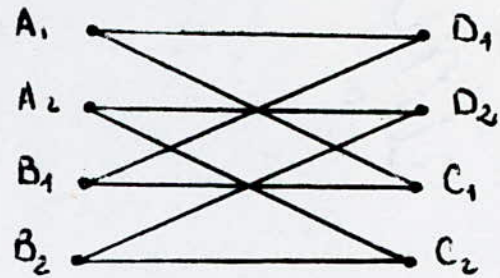
$u(t)$ et $v(t)$ les signaux reçus respectivement par des puits.

chacune des sources alimente les deux puits.

chacun des puits est sollicité par les deux sources.

Un treillis double étant une association de deux treillis

Simple ou parallèle donc un treillis d'ordre m est constitué par une association de m treillis en parallèle.



La structure des graphes de COOLEY-TUKEY est constituée par des treillis de multiplicité variable à condition que $N=2^r$, il nous reste à découvrir leur caractéristiques.

VII 42 Nombre de colonnes de treillis :

d'après le graphe de flux vu auparavant où $N=2^3$, nous constatons que le nombre de colonnes de treillis est égal à trois par conséquent on peut dire que le nombre de colonnes de treillis contenus dans un graphe de flux de COOLEY-TUKEY en $N=2^r$ points est égal à r .

VII 43 Nombre et multiplicité de treillis par colonne :

Si nous nous référons au graphe de flux vu auparavant où $N=2^3$, nous constaterons que la première transition est composée d'un treillis multiple d'ordre quatre, la deuxième transition est composée de deux treillis multiples d'ordre deux, enfin la troisième transition est composée de quatre treillis simple (d'ordre un).

Par conséquent le nombre de treillis contenus dans une colonne de rang L d'un graphe de COOLEY-TUKEY en $N=2^r$

points, est égal à 2^{L-1} ou $L=1, 2, 3, \dots, r$

La multiplicité des treillis, contenus dans une colonne de rang L est égale à 2^{r-L} .

On montre aussi que les treillis constituant la dernière colonne d'un graphe de COOLEY-TUKEY sont toujours simples puisque $r=L$ d'où $2^{r-L} = 1$.

VII 44 Gain des branches des treillis :

Les graphes de fluxence, de COOLEY-TUKEY représentant des programmes à $N=2^r$ points satisfont les prescriptions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = a_2 = \dots = a_m = 1 \\ b_1 = b_2 = \dots = b_m = 1 \\ c_1 = c_2 = \dots = c_m = c \\ d_1 = d_2 = \dots = d_m = d \end{array} \right\} \begin{array}{l} m : \text{l'ordre de multiplicité} \\ \text{des treillis} \end{array}$$

Nous savons aussi que les gains c et d sont de la forme :

$$c = W_N^P, \text{ et } d = W_N^{(P+N/2)} = -W_N^P$$

donc il suffit de trouver une méthode pour le calcul de P .

Soit une colonne de rang L , nous savons qu'elle contient 2^{L-1} treillis soit $P_1, P_2, \dots, P_{2^{L-1}}$ les valeurs correspondent de P , par définition la liste de ces valeurs constitue l'adresse de P pour la colonne considérée.

Une méthode pour la détermination de P , consiste à écrire l'indice d'un nœud du treillis en binaire, inverser $(r-L)$ chiffres à partir de la droite en remplaçant ces chiffres par

des zéros, subir l'opération bits-Reversing, revenir au système décimale, le chiffre correspondant est égal à P .

Une autre méthode pour la détermination de P (adoptée au programme FFT), consiste à déterminer la partie entière :

$M = \text{INT}(k/2^{N_{u1}})$, où k l'indice d'un noeud source du treillis, N_{u1} est déterminé, comme suit :

pour la première étape intermédiaire $(N_{u1})_1 = r-1$, pour la deuxième étape intermédiaire $N_{u1} = (N_{u1})_1 - 1$, pour la $L^{\text{ème}}$ étape intermédiaire $N_{u1} = (N_{u1})_{L-1} - 1$

M subissant l'opération bits-Reversing correspond à la valeur de P .

Nous allons illustrer ces deux méthodes par un exemple simple ou $N = 2^3 \rightarrow r = 3$.

	1 ^{ère} colonne	2 ^{ème} colonne	3 ^{ème} colonne
nb de treillis	1	2	4
Multiplicite des treillis	4	2	1
L	1	2	3
N_{u1}	2	1	0
$r-L$	2	1	0
k	0: (0,0,0)	0: (0,0,0) 2: (0,1,0)	0: (0,0,0); 2: (0,1,0) 4: (1,0,0); 6: (1,1,0)
P	0	0; 2	0; 2; 1; 3
M	0	0; 2	0; 2; 4; 6
M (binaire)	(0,0,0)	(0,0,0); (0,1,0)	(0,0,0); (0,1,0) (1,0,0); (1,1,0)
bits-Reversing	(0,0,0)	(0,0,0); (0,1,0)	(0,0,0); (0,1,0) (0,0,1); (0,1,1)
P	0	0; 2	0; 2; 1; 3

de ces différentes remarques, nous pouvons déduire un algorithme équivalent à celui de COOLEY-TUKEY [1] plus simple du point de vu nombre de variable à introduire.

$$\left. \begin{aligned} F_L(k) &= F_{L-1}(k) + W_N^P F_{L-1}(k+N/2^L) \\ F_L(k+N/2^L) &= F_{L-1}(k) - W_N^P F_{L-1}(k+N/2^L) \end{aligned} \right\} (65)$$

ou $F_L(k)$ et $F_L(k+N/2^L)$ désignent un dual.

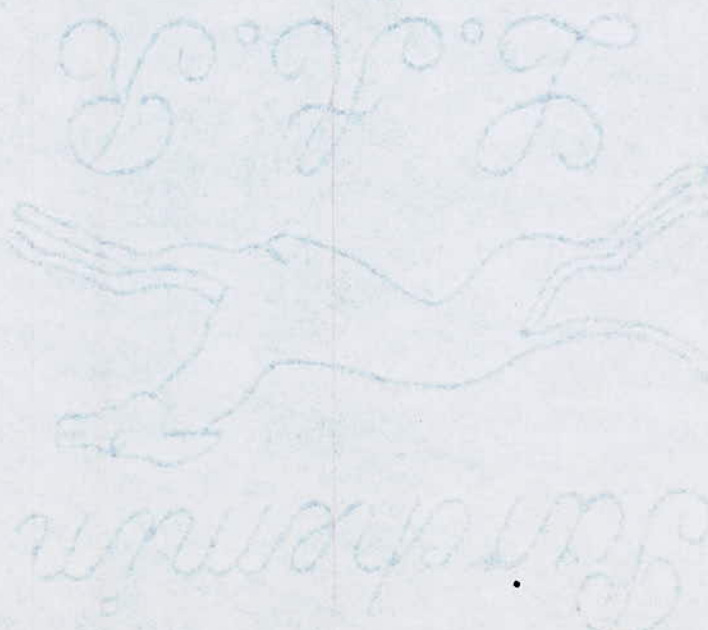
VII 5 Transformée de FOURIER inverse par la méthode FFT:

La transformée inverse de FOURIER d'une fonction $f(t)$ satisfaisant les conditions de DIRICHLET définie dans le domaine fréquentiel appelée aussi synthèse de FOURIER permet de passer du spectre au signal définie dans le domaine temporel; cette transformation peut être résolue à l'aide de la discrétisation du spectre appelée IDFT (Inverse Discrete FOURIER Transform), son calcul direct, est moins performant (du point de vu nombre d'opérations à effectuer) que celui par la méthode FFT, donc une méthode qui permet de déterminer le signal, consiste à suivre le chemin inverse de la FFT pour le calcul du spectre.

L'algorithme de la IDFT par la méthode FFT peut être tiré de celui de COOLEY-TUKEY (), d'où on obtient;

$$\left. \begin{aligned} F_{L-1}(k) &= \frac{F_L(k) + F_L(k+N/2^L)}{2} \\ F_{L-1}(k+N/2^L) &= \frac{F_L(k) - F_L(k+N/2^L)}{2W_N^P} \end{aligned} \right\} (66)$$

Le calcul de L et P ne diffèrent pas de celui de la FFT, nous
tenons à remarquer que la discrétisation du spectre doit
satisfaire aussi certaines conditions afin d'éviter le phénomène
de superposition.





CHAPITRE VIII



VIII PROGRAMMATION

vu le développement des ordinateurs, leur maniabilité et rapidité d'exécution, la programmation commence à prendre une place considérable dans les recherches scientifiques. Il a été établi une méthode général qui permet avec plus de facilité de mettre au point un programme qui consiste à définir un algorithme (relation de récurrence qui compose le calcul central de la programmation), un organigramme représentant les différentes étapes de calculs.

VIII.1 Programmation FFT:

Jusqu'à présent nous avons mis au point un algorithme simple pour le calcul de la DFT par la méthode FFT, bon analyse permet de mettre en évidence un organigramme (fig VIII.1) se composant de quatre parties, essentielle :

- la partie 1 permet l'introduction d'une part de la série de données numériques, d'autre part du nombre d'échantillons N tout en déterminant r ; elle permet aussi l'initialisation des paramètres variants du programme qui sont:

L : désigne un compteur qui détermine la transition d'une étape à l'autre.

N_2 : désigne l'ordre de multiplicité des treillis, nous pouvons écrire que $N_2 = N / 2^L$

k : indice de la série numérique variant de $0 \div (N-1)$.

$NU1$: paramètre intermédiaire pour la détermination de M .

- la partie 2 compose le calcul central du programme, elle permet d'exécuter le passage d'une étape à l'autre.

Cette partie renferme des paramètres suivants :

I : Compteur qui permet de tester le balayage des treillis.

P : adresse du signal défini par la fonction IBR (Bits - Reversing), il est constant pour chaque treillis.

- la partie 3 définit la fin de calcul de la transition pour passer à une nouvelle tout en changeant les valeurs incrémentées des paramètres tels que L , $N2$, $NU1$, k .

- la partie 4 définit la fin des étapes intermédiaires, elle permet d'ordonner ou le disembroillage de la dernière série numérique par la méthode Bits - Reversing pour l'obtention de la série caractéristique de la DFT.

VIII.2 Programmation IDFT par la méthode FFT:

La programmation FFT a une étendue d'utilisation assez vaste qui permet le calcul de la IDFT en utilisant l'algorithme de la relation (66), les mêmes paramètres sont utilisés sauf que leur variation est inversée; pour mieux visualiser

l'organigramme (fig VIII.2) on peut se référer au graphe de flux vu auparavant où $N=2^3$, et établir le chemin inverse, pour cela l'initialisation de $N2=1$, $NU1=0$, $L=N$.

Le passage d'une étape à l'autre se caractérise par une incrémentation de -1 pour L , $+1$ pour $NU1$ et enfin une

Multiplication par un facteur de 2 pour N^2 .

VIII 3 Remarque :

Le nombre d'organigrammes traitant la FFT par l'algorithme de COOLER-TUKER sont importants parmi lesquels on peut citer un organigramme simple et plus efficace que le précédent (fig VIII 3) basé sur le même principe de traitement sauf que la méthode de résolution diffère un peu.

Pour mieux comprendre cet organigramme, il est intéressant de l'exposer par un exemple simple où $N = 2^3$.

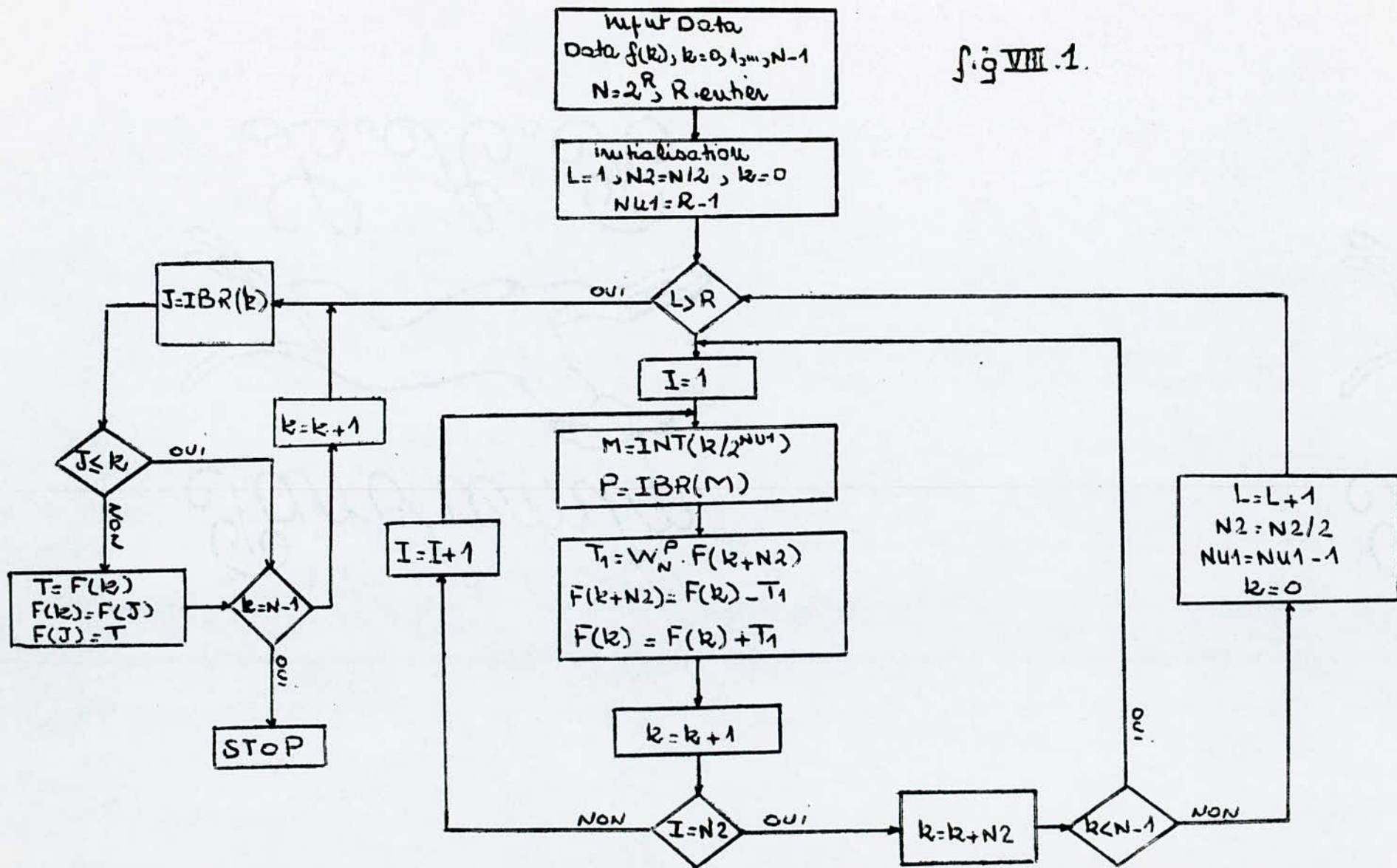
La première étape de résolution est le désembrouillage de la série numérique correspondant au signal et qui nous permet ainsi d'obtenir la série numérique correspondant au spectre dans un ordre parfait.

La deuxième étape serait la détermination de l'indice du signal (P) par une relation de récurrence $P = (J-1)N/2^L$ où L désigne le paramètre décrivant l'étape intermédiaire et J désigne le nombre de groupes de treillis ayant le même indice P , J varie de 1 à 2^{L-1} .

Remarquons que le groupe de flux est inversé par rapport au précédent. (fig VIII 4-2), ainsi la répartition des adresses du signal qui diffère du cas précédent.

La figure VIII 4-1 nous montre que le désembrouillage s'effectue par la méthode Bits-Reversing.

fig VIII.1.



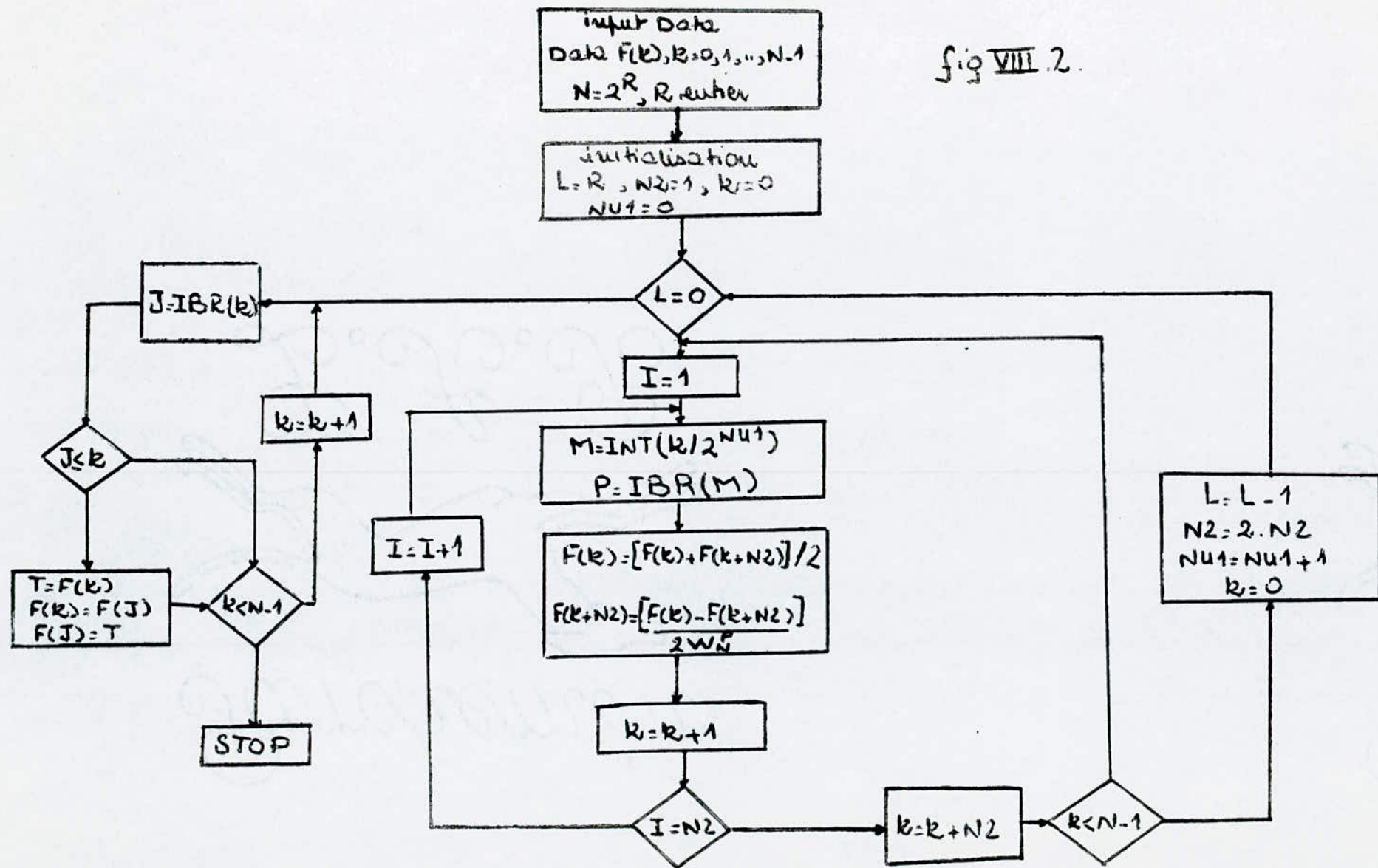
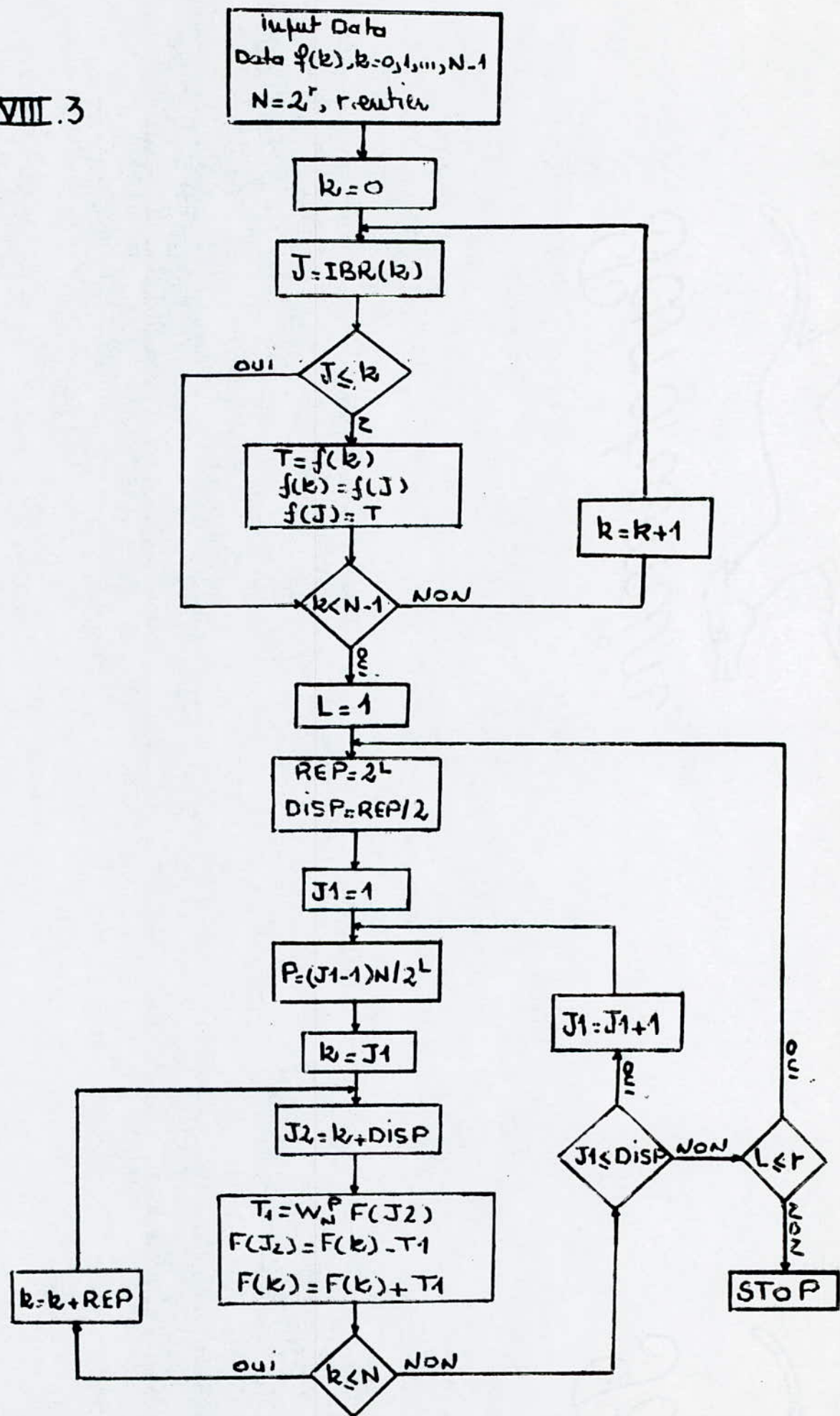
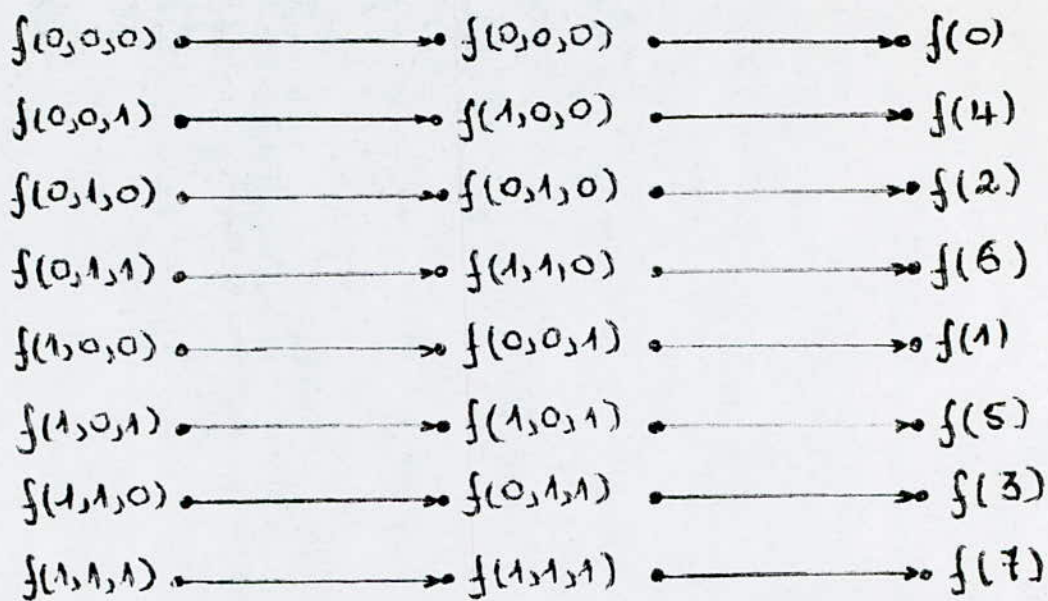


fig VIII.3





désembrouillage de la série numérique du signal fig VIII 4.1

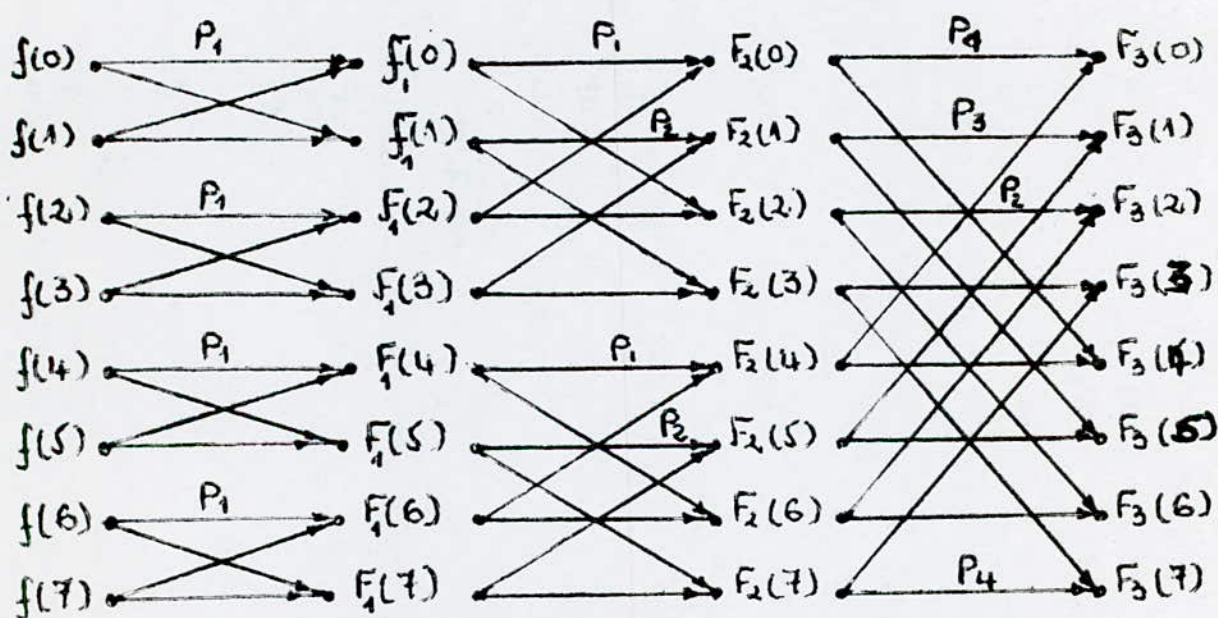


fig VIII 4.2

LIST

```

0 REM ***** PPT 1 *****
5 REM ***** COOLEY & TUKEY *****
10 KEYOFF
20 SCREEN1
30 SCREEN0
40 CLS
50 FOR I = 1 TO 3: PRINT : NEXT
60 PRINT " VOTRE FONCTION EST-ELLE CONNUE"
70 PRINT " ANALYTIQUEMENT ?"
80 FOR I = 1 TO 15: PRINT : NEXT
90 PRINT " REPONDEZ PAR O/N "
100 AS = INKEYS: IF AS < > "O" AND AS < > "N" THEN 100
110 IF AS = "O" THEN 280
120 CLS
130 FOR I = 1 TO 5: PRINT : NEXT
140 INPUT "DONNER LA VALEUR DE N:";N
150 FOR I = 1 TO 3: PRINT : NEXT
160 INPUT "DONNER LA VALRUR DE T1";T1
170 PI = 3.141592654
180 R = INT ( LOG (N) / LOG (2))
190 DIM XR(N),M(R),K(R)
200 DIM XI(N)
210 DIM G(N)
220 FOR I = 0 TO N - 1
230 INPUT XR(I)
240 XI(I) = 0
250 NEXT I
260 GOTO 430
270 FOR I = 1 TO 3: PRINT : NEXT
280 CLS: PRINT "ECRIRE VOTRE NOUVELLE FONCTION A LA LIGNE 400"
290 FOR I = 1 TO 3: PRINT : NEXT
300 PRINT "GOTO 310":EDIT400
310 PI = 3.141592654
320 CLS
330 FOR I = 1 TO 3: PRINT : NEXT
340 INPUT "DONNER LA VALEUR DE N";N
350 FOR I = 1 TO 3: PRINT : NEXT
360 INPUT "DONNER LA VALEUR DE T1";T1
370 R = INT ( LOG (N) / LOG (2))
380 DIM XR(N),XI(N),G(N),M(R),K(R)
390 FOR I = 0 TO N - 1
400 XR(I) = EXP ( - .25 * I)
410 XI(I) = 0
420 NEXT I
430 FM = ABS (XR(0))
440 FOR I = 0 TO N - 1
450 IF FM < ABS (XR(I)) THEN FM = ABS (XR(I))
460 NEXT I
470 GOSUB 1160
480 FOR I = 0 TO N - 2
490 LINE(I,XR(I)) - (I + 1,XR(I + 1))
500 NEXT I
510 N2 = N / 2
520 NU1 = R - 1
530 FOR L = 1 TO R
540 K = 0

```

LIST

```

550 M = INT (K / (2 ^ NU1))
560 GOSUB 740
570 FOR I = 1 TO N2
580 T = XR(K)
590 A = XI(K)
600 B = COS (2 * PI * P / N) * XR(K + N2) + SIN (2 * PI * P / N) * XI(
K + N2)
610 C = COS (2 * PI * P / N) * XI(K + N2) - SIN (2 * PI * P / N) * XR(
K + N2)
620 XR(K) = T + B
630 XI(K) = A + C
640 XR(K + N2) = T - B
650 XI(K + N2) = A - C
660 K = K + 1
670 NEXT I
680 K = K + N2
690 IF K < (N - 1) THEN 550
700 N2 = N2 / 2
710 NU1 = NU1 - 1
720 NEXT L
730 GOTO 840
740 KJ = N
750 P = 0
760 FOR IJ = 1 TO R
770 KJ = KJ / 2
780 IF M < KJ THEN M(IJ) = 0: GOTO 810
790 M(IJ) = 1
800 M = M - KJ
810 P = P + (2 ^ (IJ - 1)) * M(IJ)
820 NEXT IJ
830 RETURN
840 FOR K = 0 TO N - 1
850 JL = K
860 I = 0
870 KL = N
880 FOR IL = 1 TO R
890 KL = KL / 2
900 IF JL < KL THEN K(IL) = 0: GOTO 930
910 K(IL) = 1
920 JL = JL - KL
930 I = I + (2 ^ (IL - 1)) * K(IL)
940 NEXT IL
950 IF I < = K THEN 1020
960 TR = XR(K)
970 XR(K) = XR(I)
980 XR(I) = TR
990 TI = XI(K)
1000 XI(K) = XI(I)
1010 XI(I) = TI
1020 NEXT K
1030 FOR I = 0 TO N - 1
1040 G(I) = ((XR(I) ^ 2) + (XI(I) ^ 2)) * 2 * T1 / N
1050 NEXT I
1060 B = ABS (G(0))
1070 FOR I = 0 TO N - 1
1080 IF B > = ABS > = ABS (G(I)) THEN 1100
1090 B = ABS (G(I))

```


LIST

```
1100 NEXT I
1110 GOSUB 1300
1120 FOR I = 0 TO N / 2 - 1
1130 LINE(I,G(I)) - (I + 1,G(I + 1))
1140 NEXT I
1150 LOCATE 2,2: END
1160 CLS
1170 KEY OFF
1180 SCREEN 3
1190 LINE(0,0) - (639,399),1,B
1200 LOCATE 2,2: PRINT "f(k)"
1205 LOCATE 15,2: PRINT "G(n)"
1210 LOCATE 7,72: PRINT "k"
1215 LOCATE 23,72: PRINT "n"
1220 LOCATE 13,16: PRINT "FIG 1 : SIGNAL D'ENTREE f(k)"
1230 LOCATE 25,15: PRINT "FIG(2) DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE G(n)"
1235 LINE(0,0) - (639,399),1,B
1240 LINE(1,205) - (638,205)
1250 VIEW(15,5) - (634,165)
1260 WINDOW( - 10, - 1.25 * FM) - (N + 10,1.25 * FM)
1270 LINE( - 10,0) - (N + 10,0)
1280 LINE(0, - 1.25 * FM) - (0,1.25 * FM)
1290 RETURN
1300 VIEW(5,210) - (634,375)
1310 WINDOW( - 5, - .25 * B) - (N / 2 + 5,1.25 * B)
1320 LINE( - 5,0) - (N / 2 + 5,0)
1330 LINE(0, - .25 * B) - (0,1.25 * B)
1340 RETURN
```

LIST

```

0  REM ***** FFT 2 *****
5  REM *****COOLEY & TUKEY*****
10 KEY OFF
20 SCREEN 1
30 SCREEN 0
40 CLS
50 FOR I = 1 TO 3: PRINT : NEXT
60 PRINT "      VOTRE FONCTION EST-ELLE CONNUE"
70 PRINT "      ANALYTIQUEMENT ?"
80 FOR I = 1 TO 15: PRINT : NEXT
90 PRINT "      REPONDEZ PAR O/N "
100 AS = INKEY$: IF AS < > "O" AND AS < > "N" THEN 100
110 IF AS = "O" THEN 280
120 CLS
130 FOR I = 1 TO 5: PRINT : NEXT
140 INPUT "DONNER LA VALEUR DE N:";N
150 FOR I = 1 TO 3: PRINT : NEXT
160 INPUT "DONNER LA VALEUR DE T1";T1
170 PI = 3.141592654
180 R = INT ( LOG (N) / LOG (2))
190 DIM XR(N),M(R),K(R)
200 DIM XI(N)
210 DIM G(N)
220 FOR I = 0 TO N - 1
230 INPUT XR(I)
240 XI(I) = 0
250 NEXT I
260 GOTO 430
270 FOR I = 1 TO 3: PRINT : NEXT
280 CLS: PRINT "ECRIRE VOTRE NOUVELLE FONCTION A LA LIGNE 400"
290 FOR I = 1 TO 3: PRINT : NEXT
300 PRINT "GOTO 310":EDIT400
310 PI = 3.141592654
320 CLS
330 FOR I = 1 TO 3: PRINT : NEXT
340 INPUT "DONNEZ LA VALEUR DE N";N
350 FOR I = 1 TO 3: PRINT : NEXT
360 INPUT "DONNEZ LA VALEUR DE T1";T1
370 R = INT ( LOG (N) / LOG (2))
380 DIM XR(N),XI(N),G(N),M(R),K(R)
390 FOR I = 0 TO N - 1
400 XR(I) = COS (2 * PI * I / 8)
410 XI(I) = 0
420 NEXT I
430 FM = ABS (XR(0))
440 FOR I = 0 TO N - 1
450 IF FM < ABS (XR(I)) THEN FM = ABS (XR(I))
460 NEXT I
470 GOSUB 1090
480 FOR I = 0 TO N - 2
490 LINE(I,XR(I)) - (I + 1,XR(I + 1))
500 NEXT I
510 FOR I = N TO 1 STEP - 1
520 XR(I) = XR(I - 1)
530 XI(I) = XI(I - 1)
540 NEXT I

```


LIST

```

550 GOSUB 800
570 FOR L = 1 TO R
580 REP = 2 ^ L
590 ARG = 2 * PI / REP
600 DISP = REP / 2
610 FOR J = 1 TO DISP
620 TWF = (J - 1) * ARG
630 C = COS (TWF)
640 S = SIN (TWF)
650 FOR K = J TO N STEP REP
660 J2 = K + DISP
670 T3 = C * XR(J2) + S * XI(J2)
680 T2 = - S * XR(J2) + C * XI(J2)
690 XR(J2) = XR(K) - T3
700 XI(J2) = XI(K) - T2
710 XR(K) = XR(K) + T3
720 XI(K) = XI(K) + T2
730 NEXT K
740 NEXT J
750 NEXT L
760 FOR I = 1 TO N
770 G(I - 1) = ((XR(I) ^ 2) + (XI(I) ^ 2)) * 2 * T1 / N
780 NEXT I
790 GOTO 990
800 ND2 = N / 2
810 NM1 = N - 1
820 J = 1
830 FOR I = 1 TO NM1
840 IF I > = J THEN 910
850 T4 = XR(J)
860 XR(J) = XR(I)
870 XR(I) = T4
880 T5 = XI(J)
890 XI(J) = XI(I)
900 XI(I) = T5
910 K = ND2
920 IF K > = J THEN 960
930 J = J - K
940 K = K / 2
950 GOTO 920
960 J = J + K
970 NEXT I
980 RETURN
990 B = ABS (G(0))
1000 FOR I = 0 TO N - 1
1010 IF B > = ABS (G(I)) THEN 1030
1020 B = ABS (G(I))
1030 NEXT I
1040 GOSUB 1260
1050 FOR I = 0 TO N / 2 - 1
1060 LINE(I,G(I)) - (I + 1,G(I + 1))
1070 NEXT I
1080 LOCATE 2,2: END
1090 CLS
1100 KEY OFF
1110 SCREEN 3

```

LIST

```
1120 LINE(0,0) - (639,399),1,B
1130 LOCATE 2,2: END
1140 LOCATE 15,2: PRINT "f(k)"
1150 LOCATE 7,72: PRINT "k"
1160 LOCATE 23,72: PRINT "n"
1170 LOCATE 13,16: PRINT "FIG 1 : SIGNAL D'ENTREE f(k)"
1180 LOCATE 25,15: PRINT "FIG(2) DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE G(n)"
1190 LINE(0,0) - (639,399),1,B
1200 LINE(1,205) - (638,205)
1210 VIEW(15,5) - (634,165)
1220 WINDOW( - 10, - 1.25 * PM) - (N + 10,1.25 * PM)
1230 LINE( - 10,0) - (N + 10,0)
1240 LINE(0, - 1.25 * PM) - (0,1.25 * PM)
1250 RETURN
1260 VIEW(5,210) - (634,375)
1270 WINDOW( - 5, - .25 * B) - (N / 2 + 5,1.25 * B)
1280 LINE( - 5,0) - (N / 2 + 5,0)
1290 LINE(0, - .25 * B) - (0,1.25 * B)
1300 RETURN
```


LIST

```

10 REM ***** IDFT PAR LA METHODE FFT *****
20 REM ***** COOLEY & TUKEY *****
30 HOME
40 INPUT "DONNER LA VALEUR DE N:";N
50 R = LOG (N) / LOG (2)
60 DIM XR(N),XI(N),G(N),M(R),K(R)
70 FOR I = 0 TO N - 1
80 INPUT XR(I)
90 XI(I) = 0
100 NEXT I
110 GOSUB 450
120 N2 = 1
130 NU1 = 0
140 FOR L = R TO 1 STEP - 1
150 K = 0
160 M = INT (K / (2 ^ NU1))
170 GOSUB 350
180 FOR I = 1 TO N2
190 T = XR(K) - XR(K + N2)
200 A = XI(K + N2) - XI(K)
210 B = (XR(K) + XR(K + N2)) / 2
220 C = (XI(K) + XI(K + N2)) / 2
230 XR(K) = B
240 XI(K) = C
250 XR(K + N2) = (T * COS (2 * PI * P / N) + A * SIN (2 * PI * P / N))
    / (2 * ((COS (2 * PI * P / N) ^ 2) + (SIN (2 * PI * P / N) ^ 2)))
260 XI(K + N2) = (T * SIN (2 * PI * P / N) - A * COS (2 * PI * P / N))
    / (2 * ((COS (2 * PI * P / N) ^ 2) + (SIN (2 * PI * P / N) ^ 2)))
270 K = K + 1
280 NEXT I
290 K = K + N2
300 IF K < (N - 1) THEN 160
310 N2 = 2 * N2
320 NU1 = NU1 + 1
330 NEXT L
340 GOTO 650
350 KJ = N
360 P = 0
370 FOR IJ = 1 TO R
380 KJ = KJ / 2
390 IF M < = KJ THEN M(IJ) = 0: GOTO 420
400 M(IJ) = 1
410 M = M - KJ
420 P = P + (2 ^ (IJ - 1)) * M(IJ)
430 NEXT IJ
440 RETURN
450 FOR K = 0 TO N - 1
460 JL = K
470 I = 0
480 KL = N
490 FOR IL = 1 TO R
500 KL = KL / 2
510 IF JL < = KL THEN K(IL) = 0: GOTO 540
520 K(IL) = 1
530 JL = JL - KL

```

LIST

```
540 I = I + (2 ^ (IL - 1)) * K(IL)
550 NEXT IL
560 IF I < = K THEN 630
570 TR = XR(K)
580 XR(K) = XR(I)
590 XR(I) = TR
600 TI = XI(K)
610 XI(K) = XI(I)
620 XI(I) = TI
630 NEXT K
640 RETURN
650 FOR I = 0 TO N - 1
660 G(I) = XR(I) * N
670 NEXT I
680 B = ABS (G(0))
690 FOR J = 0 TO N - 1
700 IF B > = ABS (G(J)) THEN 720
710 B = ABS (G(J))
720 NEXT J
730 HOME
740 HGR2
750 HCOLOR= 3
760 EX = 270 / N
770 EY = 90 / B
780 FOR I = 0 TO N - 2
790 HPLOT I * EX,90 - (G(I) * EY) TO (I + 1) * EX,90 - (G(I + 1) * EY)
800 NEXT I
```


CHAPITRE IX

IX ESSAI DU PROGRAMME

Après avoir mis au point les différents programmes pour l'établissement de la FFT, nous pouvons établir deux essais simples appliqués au micro-ordinateur.

Premier essai : $f(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$ ou $\nu_0 = 1/8$.

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j2\pi\nu t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi\nu_0 t) \cdot \exp(-j2\pi\nu t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(j2\pi\nu_0 t) + \exp(-j2\pi\nu_0 t)] \cdot \exp(-j2\pi\nu t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-j2\pi t(\nu - \nu_0)) + \exp(-j2\pi(\nu + \nu_0)t)] dt$$

$$F(\nu) = \frac{1}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$$

théoriquement cette transformée admet deux impulsions de DIRAC, situées à $\pm\nu_0$ mais comme nous sommes intéressés uniquement ^{pour les} aux fréquences positives, nous pouvons dire que la fonction $f(t)$ possède une composante spectrale à $\nu = \nu_0$ ce qui est confirmé par l'essai (fig IX.1).

deuxième essai : $f(t) = \exp(-t)$.

Le même calcul que précédent nous donne :

$$\text{la partie réelle de } F(\nu) : FR(\nu) = \frac{1}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

$$\text{la partie imaginaire de } F(\nu) : FI(\nu) = \frac{-2\pi\nu}{1 + (2\pi\nu)^2}$$

On remarque que mathématiquement $F(\nu)$ est définie sur $\nu \in [0, \infty[$, ce qui est vérifié par l'essai (fig IX.2).

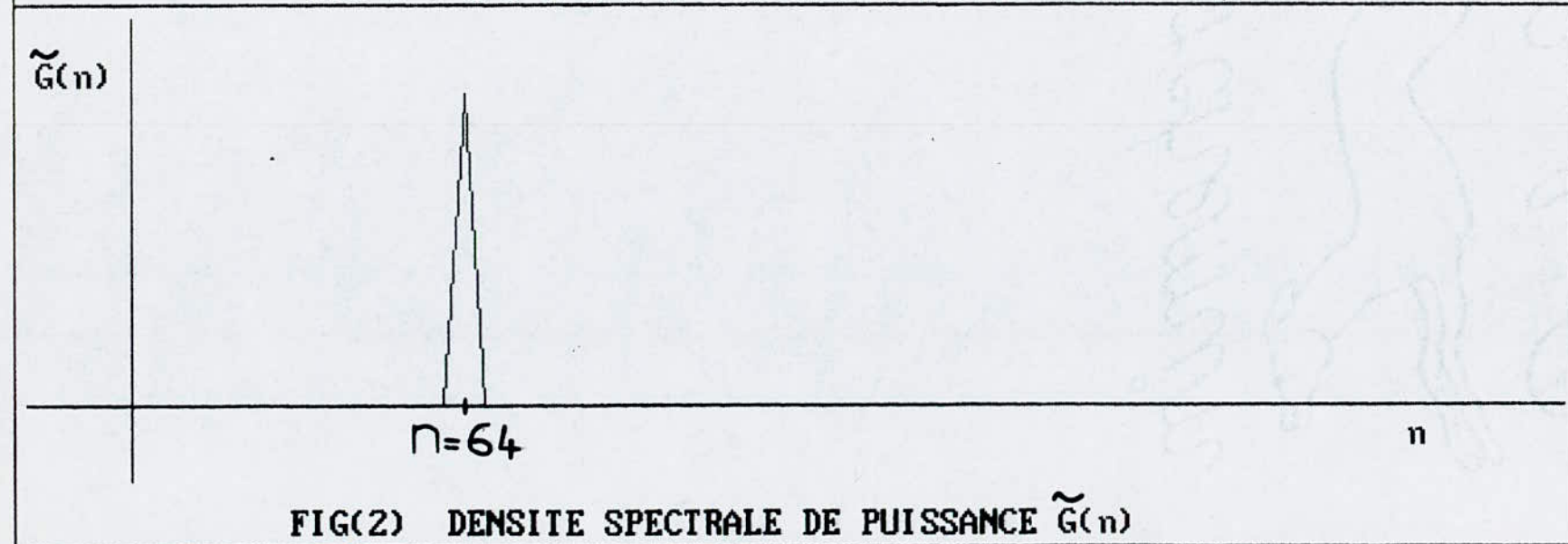
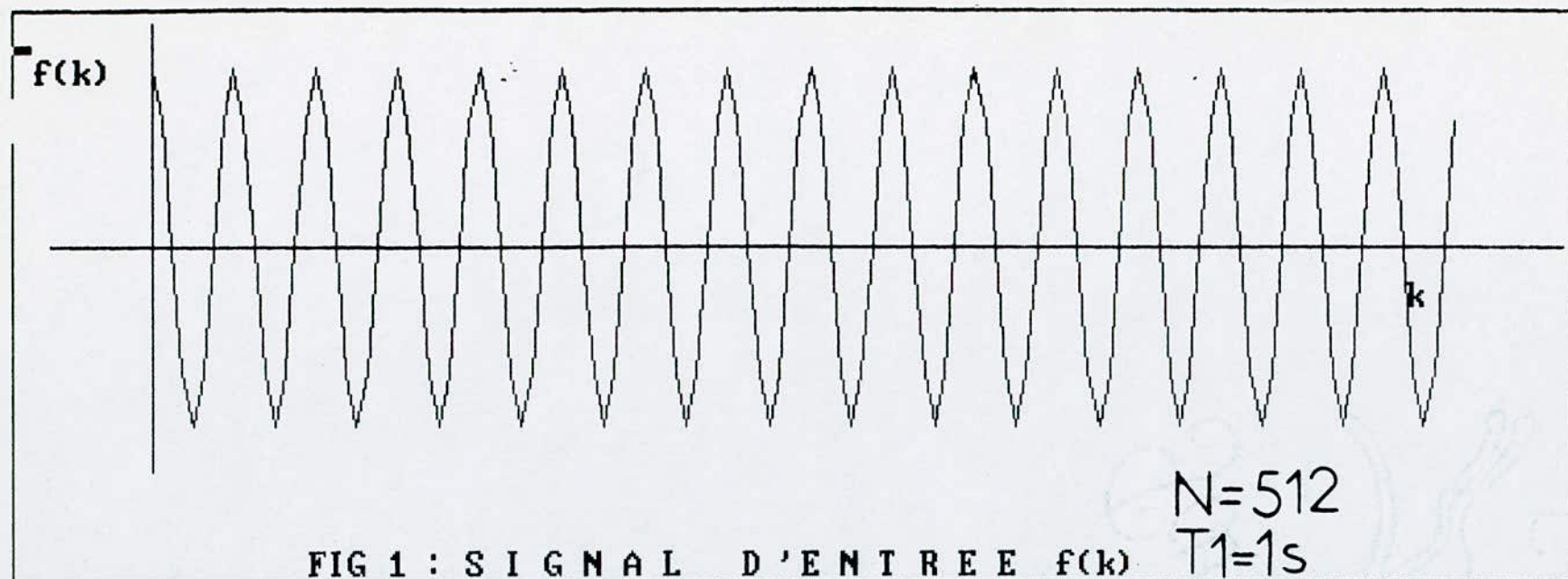


fig IX.1

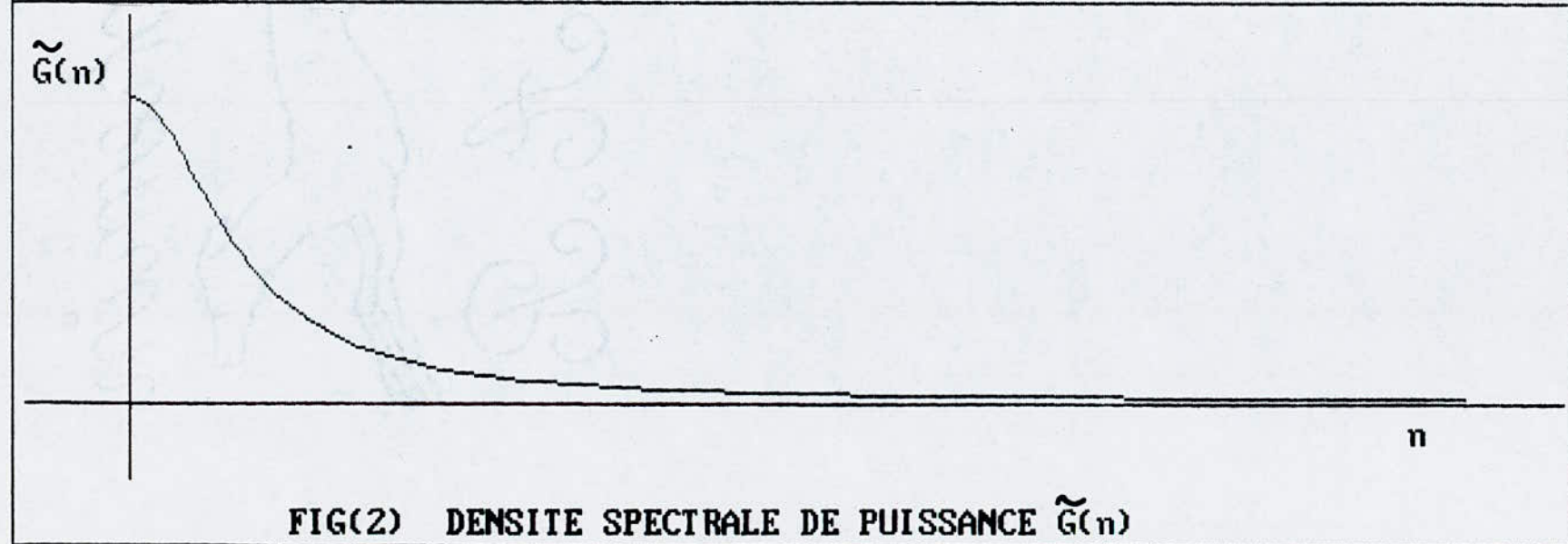
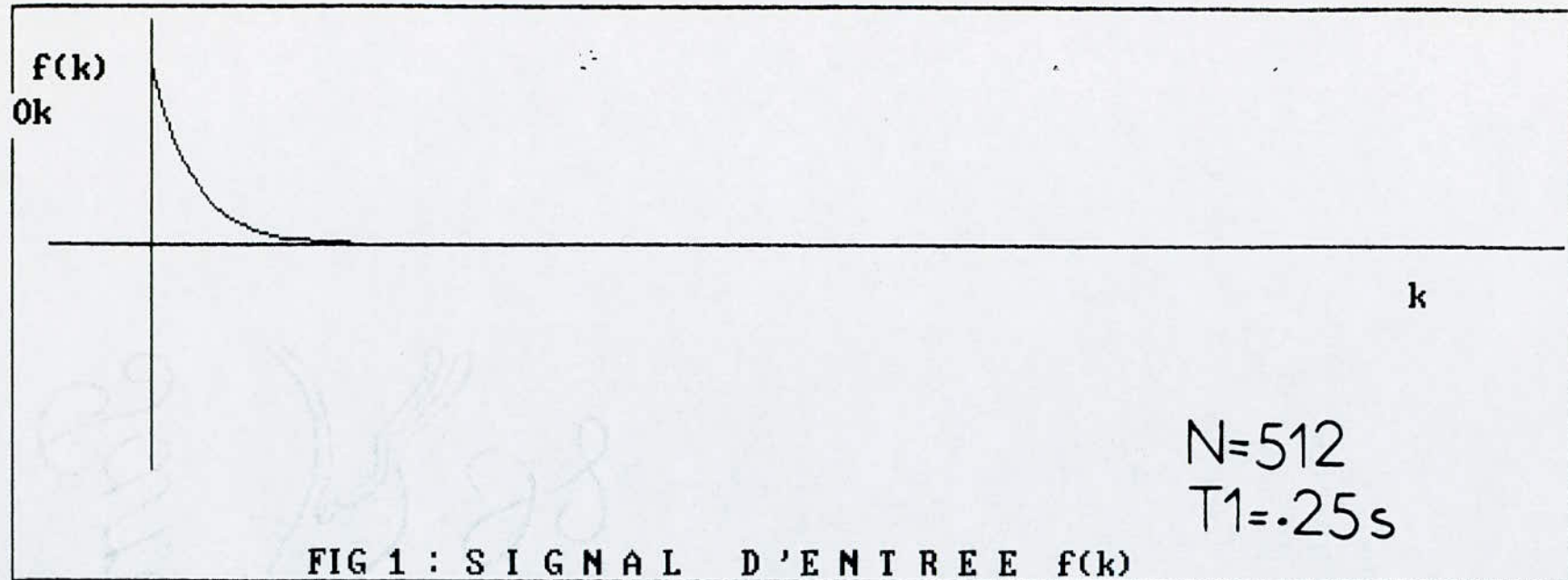


fig IX.2

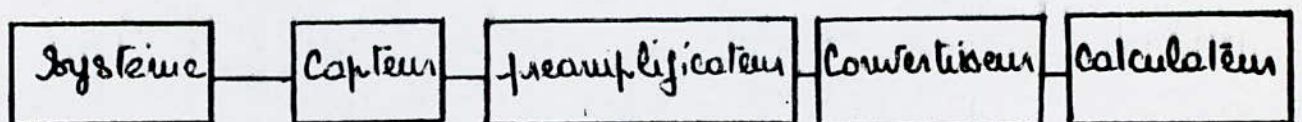
CHAPITRE X

X EXPERIENCE

Après avoir mis au point tout les outils mathématiques nécessaires pour l'établissement du spectre de FOURIER, il est plus intéressant de passer à une application d'un cas réel ou le sujet, est un moteur électrique fonctionnant dans un atelier.

L'expérience a été réalisée, en plein fonctionnement de l'atelier ou l'influence des machines voisines, ont été en jeu par l'intermédiaire du sol (moteur électrique scellé aux fondations); celle-ci permet de recueillir le signal de vibration à l'aide d'un montage simple qui ou sera plus tard, établis, la représentation graphique de la densité spectrale de puissance, déterminer les fréquences intéressantes, et à l'aide de la carte de diagnostic de l'IRD mécanalysis qui produit du matériel de mesure pour l'évaluation des états des machines tournantes par la mesure des vibrations, on peut estimer les différentes sources qui ont générées ces vibrations, et en déduire la conclusion nécessaire.

X.1 Chaîne de mesure:



X.1.1 Système :

dans notre cas le système est un moteur électrique à courant alternatif dont la puissance $P = 12 \text{ kW}$, nombre de tours $n = 750 \text{ t/min}$; le moteur sert à commander le générateur à courant continu, la transmission de puissance est effectuée par courrois.

La mesure a été faite à vide, moteur posé sur un fourneau en acier (assemblage par vis), l'ensemble est scellé solidement à la fondation en ciment.

On a constaté que le nombre d' du ventilateur est égal à 8.

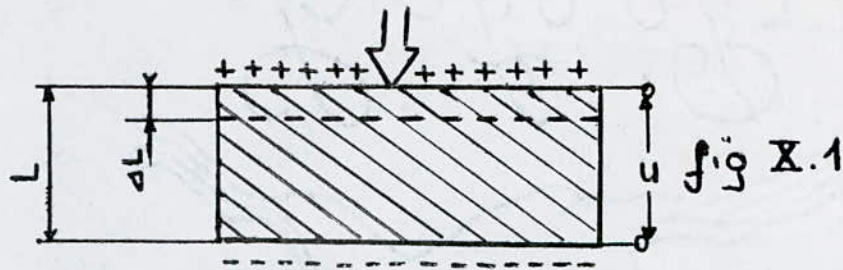
X.1.2 Capteur :

il a pour rôle de transformer le signal de vibration (grandeur mécanique) en signal électrique analogique.

Son fonctionnement repose sur le principe suivant :

Certains matériaux de structure cristalline possèdent des propriétés piézoélectriques, c'est à dire sous l'action de contraintes occasionnent une déformation de leur réseaux cristallins qui donne lieu à une dislocation des charges électriques d'où une polarisation du réseau et l'apparition de charges de signes contraires à la surface. En résumé nous dirons que la force F (fig X.1) agissant sur la matière piézoélectrique par la variation de hauteur cause une différence de potentiel U sur les électrodes, cette tension

disparaît en même temps que l'action mécanique



Ces capteurs présentent l'avantage d'être très légers, résistent aux températures élevées, disposent d'une gamme de fréquence assez large, ils sont aussi auto-générateurs.

Le capteur utilisé dans l'expérience admet une sensibilité de $4,4 \text{ mV/m s}^{-2}$.

X1.3 Préamplificateurs :

dans les diagnostics des machines on a surtout besoin de recueillir les informations et non l'énergie, comme en général les transducteurs admettent une impédance de sortie assez importante, la sensibilité de celui-ci devient faible; pour remédier à cela, on utilise un préamplificateur dont l'impédance d'entrée est beaucoup plus grande et celle de sortie la plus faible possible permettant ainsi de conserver l'information avec une énergie la plus faible possible.

X1.3 Convertisseurs :

il existe plusieurs procédures de traiter un signal, soit par la méthode analogique tel un analyseur de fréquences

qui considère le signal, en entier, soit par la méthode numérique dont le rôle du convertisseur, est de recevoir le signal électrique, le convertir en une suite de data.

X1.4 Calculateur:

Pour achever le traitement du signal, le calculateur reçoit le signal discrétisé et en conformité avec le programme détermine la série numérique correspondant au spectre qui sera représenté sur l'enregistreur (imprimante).

X2 Condition de la mesure:

Pour étudier les propriétés dynamiques des machines afin de déterminer leur impact sur la qualité des produits à réaliser, on est intéressé aux vibrations qui arrivent à l'élément exécutant le produit, pour cette raison le capteur est fixé le plus près possible de ces points, contrairement à notre cas où le sujet est un moteur, le capteur est fixé sur le carter afin de recueillir le maximum de composantes fréquentielles; de plus le moteur vibre suivant les trois directions de l'espace ce qui nous pousse à prendre les mesures simultanément dans les trois directions pour relever les différentes composantes de la vibration.

L'expérience réalisée dans cette étude, est plutôt une application de la théorie de FOURIER, et non un diagnostic approfondi, pour cela la mesure a été faite uniquement

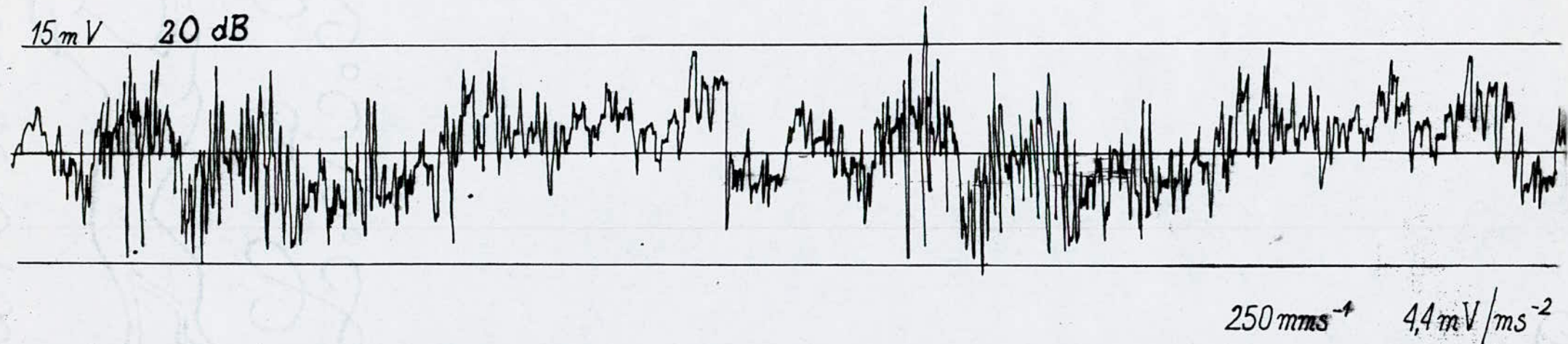
Suivant une direction.

X.3 Analyse des mesures;

Dans cette analyse, le signal recueilli (fig X.2) a subi une discrétisation dont la période $T_1 = 0,0048$ et l'échantillonnage considéré comprend $N = 256$ points, ainsi on peut dire que l'étendue des fréquences faisant l'objet d'une interprétation serait $\frac{1}{256 \cdot 0,004} \leq \nu(\text{Hz}) \leq \frac{1}{2 \cdot 0,004}$ soit $0,98 \leq \nu(\text{Hz}) \leq 125$.

D'autre part on remarque que le spectre (fig X.3) admet un niveau d'énergie faible sauf aux fréquences ν_1 et ν_2 . ν_1 étant une fréquence faible et d'après le tableau de l'IRD on peut dire qu'elle est source probable de vibration de la fondation.

ν_2 étant une fréquence pratiquement égale à la fréquence de rotation de l'arbre, et dont l'énergie est la plus importante, on peut dire que cette importante vibration est une source probable du sous élément comprenant principalement l'arbre de rotation.



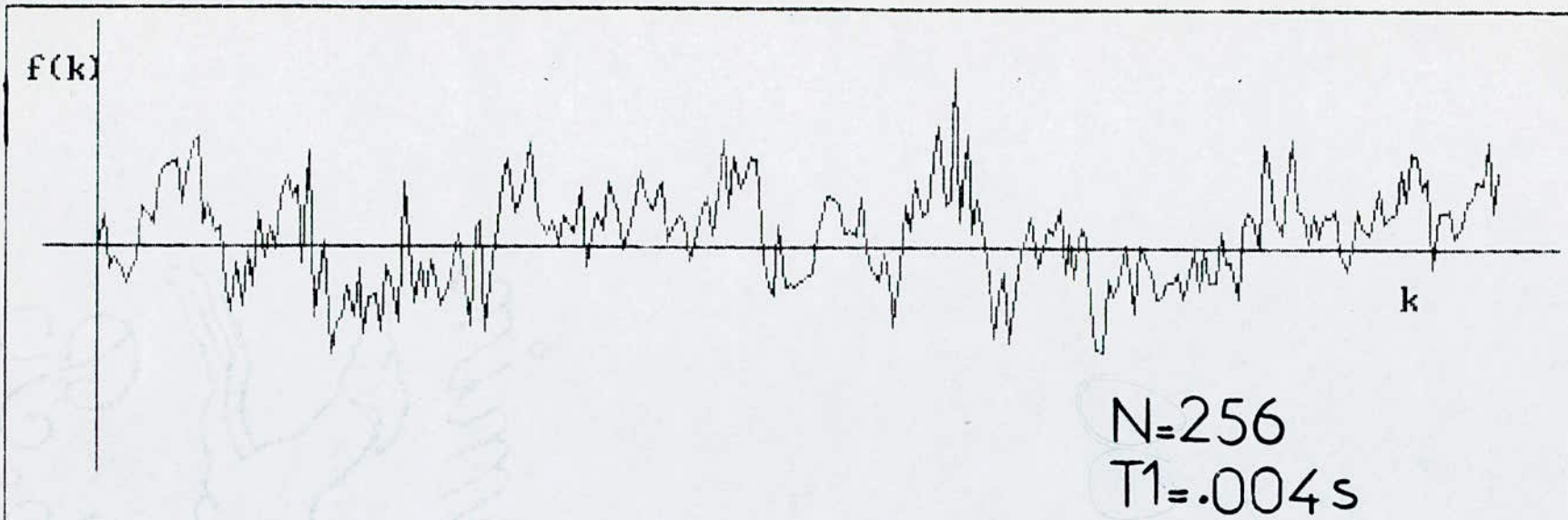
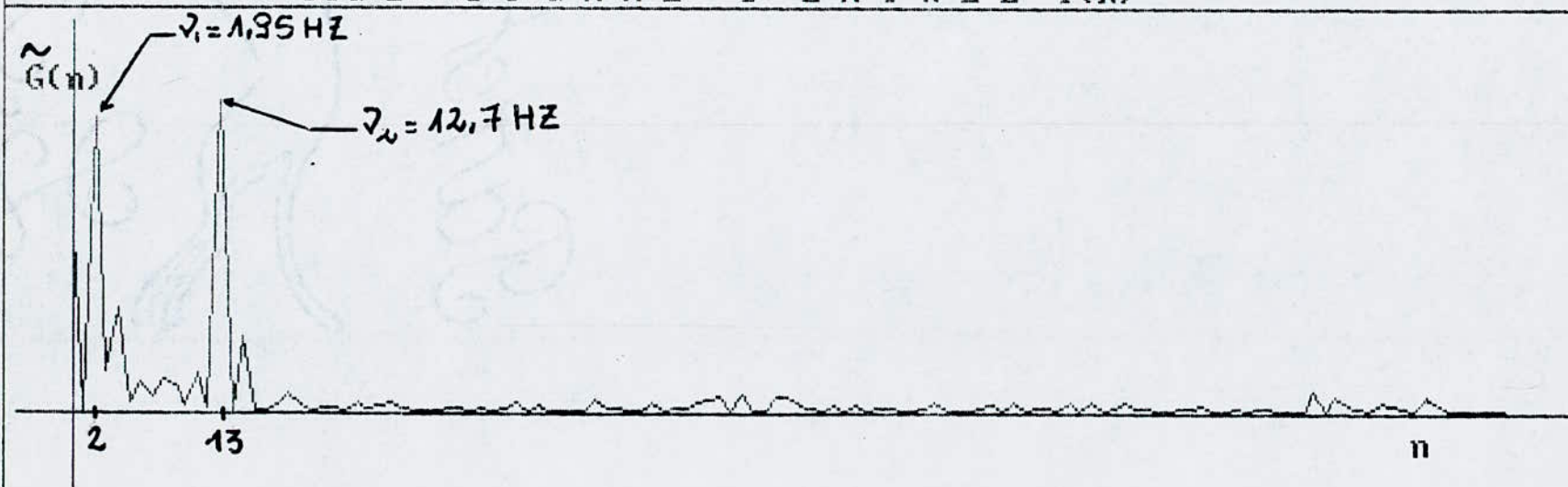


FIG 1 : SIGNAL D'ENTREE $f(k)$



FIG(2) DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE $\tilde{G}(n)$

CONCLUSION

Cette étude nous a permis d'une part de mettre en évidence les outils mathématiques nécessaires pour l'établissement du spectre de Fourier, d'autre part de citer les différentes sources d'erreurs pouvant résulter dans l'analyse spectrale.

L'analyse des procédures de programmation diverses démontre que l'efficacité (temps de calcul) de celle-ci dépend nettement de l'organisation de la FFT, à titre d'exemple pour $N=1024$, le temps d'exécution sur OLIVETTI M24 est de 9 min pour FFT1 et 3 min pour FFT2.

Pour les signaux vibroacoustiques réels résultant de plusieurs sources, la méthode d'analyse spectrale est très efficace et permet de distinguer les différentes composantes fréquentielles du signal.

Pour terminer nous dirons que cette étude peut être plus poussée en déterminant l'estimateur de la densité spectrale de puissance par la méthode de filtrage numérique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - E. ORAN BRIGHAM - The Fast Fourier Transform
→ 1974 Prentice Hall, inc. N.J.
- [2] - M BATH - Spectral Analysis in Geophysics
Elsevier Scientific Publishing Company - N.Y. 1974.
- [3] - SZCZEPANIK A. - SZEREGI CYFROWE I SZYBKA
TRANSFORMACJA FOURIERA, dans: Metody Cyfrowej
Analizy Sygnałów wibroakustycznych.
EDITION OSSOLINEUM PAN, WROCLAW-WARSZAWA 1979
- [4] - Athanasios Papoulis - Probability Random
variables and Stochastic Processes. Mc Graw Hill 1964
- [5] - W. KUROWSKI. Problèmes choisis des Diagnostics
de machines. ALGER 1984.
- [6] - BENDAT-PIERSOL. Spectral Analysis
Edition 1980.
- [7] - Les Méthodes rapides de transformation du signal
FOURIER, WALSH, HAAR ; LIFERMAN.

1870



Wm. H. & Co.