39/86

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

1 ex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

(En vue de l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat)

SUJET

Elaboration d'un programme pour le calcul des actions mecaniques appliquées par la bielle sur le maneton d'un vilebrequin

Proposé par :
M. BOUKABACHE

Etudié par :
HAMIDI Laid

Dirigé par :
M. BOUKABACHE

PROMOTION : JUIN 1986

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi — EL-HARRACH - ALGER

الجمهورية الجزئرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

(En vue de l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat)

SUJET

Elaboration d'un programme pour le calcul des actions mecaniques appliquées par la bielle sur le maneton d'un vilebrequin

Proposé par :
M. BOUKABACHE

Etudié par :
HAMIDI Laid

Dirigé par :
M. BOUKABACHE

PROMOTION : JUIN 1986

E.N.P. 10 . Avenue Hacen Badi — EL-HARRACH - ALGER

DEDICACES

Je dedie ce modeste travail à :

- mon père
- ma mère
- mes frères
- mes soeurs
- a toutes la famille
- a tous mes amis

REMERCIEMENTS

Je tiens a adresser mes vifs remerciements a mon promoteur Mr MOHAMED BOUKABACHE d'avoir proposé et dirigé ce travail et l'aide qu'il n'a cessé de m'apporter.

Que tous les professeurs qui ont contribué a ma formation trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Que tous ceux qui ont participé du prés ou de loin a la realisation de cette etude, trouvent ici mes sinceres remerciements.

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

وزارة التعليم العالي
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

Département : Mécanique
Promoteur : BOUKABACHE - M.
Elève Ingénieur : HAMIDI Laïd

فرع : الهندسة الميكانيكية
الموجه : محمد . بوكعباش
الطالب المهندس : العيد حميدي

الموضوع :

حساب القوى الميكانيكية ضمن المنظومة ذراع - عمود مرفقي

الملخص :

أعداد برنامج لحساب القوى الميكانيكية ضمن المنظومة ذراع عمود مرفقي لمحرك من جهة وازدواج التحريك من جهة أخرى بالاضافة الى تحليله وفقا لسلسلة فوري مع الآخذ بعين الأعتبار ضغط الغازات وعطالة القطع المتحركة .

SUJET : CALCUL DES ACTIONS MECANIQUES DANS L'EMBIELLAGE D'UN MOTEUR.

RESUME : Elaboration d'un programme permettant d'une part le calcul des actions mécaniques dans l'embeillage d'un moteur et d'autre part le calcul du couple moteur ainsi que sa décomposition en série de Fourier en tenant compte de la pression des gaz au cours du cycle thermodynamique et les inerties des pièces en mouvement.

SUBJECT : CALCULATION OF THE MECHANICAL ACTIONS IN THE CRANK - SYSTEM OF AN ENGINE.

SUBJECT : A computer program permiting to determine the mechanical actions of an engine has been prepared the engine thorque can elso be found and developed into a fourier series.
The gaz pressure function during the termodynamic cycle and the mobile elements inertias must be know as input data for computing.

SOMMAIRE

TABLE DES FIGURES

NOTATIONS UTILISEES

θ	angle de rotation du vilebrequin
φ	angle d'oscillation de La bielle
$\dot{\varphi}$	vitesse angulaire de La bielle
$\ddot{\varphi}$	acceleration angulaire de La bielle
ω	vitesse angulaire du moteur
R	rayon de la manivelle
L	L'entraxe de La bielle
LB	La distance entre le pied de La bielle et le centre de gravité de La bielle
Ω	rotation instantanee
Γ	acceleration Lineaire
$\mathcal{M}$	moment
mb	masse de La bielle
mp	masse du piston et ses accessoires
δ	moment dynamique
IGZ	moment d'inertie de La bielle par rapport a un axe passant par G
G	centre de gravité
S	La section du piston
$P(\theta)$	La pression en fonction de θ
Po	La pression du carter du moteur

PREAMBULE

Cette etude rentre dans le travail globale qui consiste à preparer l'outil necessaire pour analyser, optimiser et controler le comportement vibratoire des moteurs à combustions internes et leurs recepteurs.

1. INTRODUCTION

l'evolution periodique du couple moteur provoque l'apparition des vibrations de torsions considerables lors de l'egalité d'une frequence propre du systeme avec la frequence d'une harmonique du couple moteur.

la connaissance de ces vibrations et les moyens de leur reduction impose une connaissance des parametres dynamiques du moteur.

l'etude dynamique du moteur à combustion interne impose la necessité d'examiner avec soin les aspects exactes des pieces en mouvements et les efforts transmis aux differents elements constitutifs du moteur.
la transmission du mouvement alternatif du piston en mouvement de rotation sur le vilebrequin se fait par le systeme bielle-manivelle.

le vilebrequin est soumis a des efforts mecaniques alternes d'autant plus severes qu'ils varient notablement d'un point a un autre, ces efforts se transmettent aux attaches du moteur et entrainent

par conséquent des vibrations nuisibles au fonctionnement et a la tenue mecanique de celui_ci.
Ces efforts sont transmis du piston au vilbrequin par l'intermedeaire d'une bielle.

le piston est soumis aux efforts engendrés par la pression des gaz au cours de la combustion et les inerties des pieces en mouvements, la bielle reçevant les efforts du piston travaille a la compression pendant les temps de compression, echappement et detente et a la traction au cours de l'admission.

le piston, la bielle et le vilebrequin sont des pieces mecaniquement liées et l'ensemble composé par ces pieces est appellé ambiellage du moteur.

2 ETUDE CINEMATIQUE DU MOTEUR

Qu'il s'agisse de calculer les variations du volume resultant du deplacement des pistons, les accelerations et les efforts dynamiques correspondants ou les organes de distributions en generale ; il importe evidemment de pouvoir determiner tout d'abord les deplacements des principales pieces mobiles du moteur.

2.1 ETUDE CINEMATIQUE DU SYSTEME BIELLE_MANIVELLE

La cinematique du systeme bielle-manivelle est necessaire a l'etude dynamique du moteur. Nous allons determiner le deplacement, la vitesse et l'acceleration du centre de gravité de la bielle et du piston.

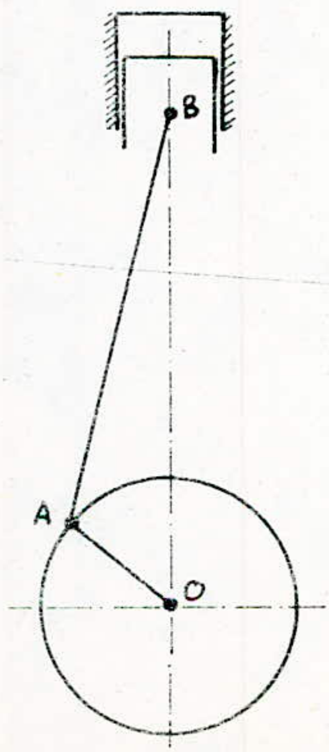


Fig 2.1 . MECANISME BIELLE_MANIVELLE

2.1.1 MISE EN PLACE DES REPERES ET DEFINITIONS DES POINTS D'ARTICULATIONS

L'etude cinematique du systeme bielle - manivelle necessite la mise au point de trois reperes (Fig 2.2).

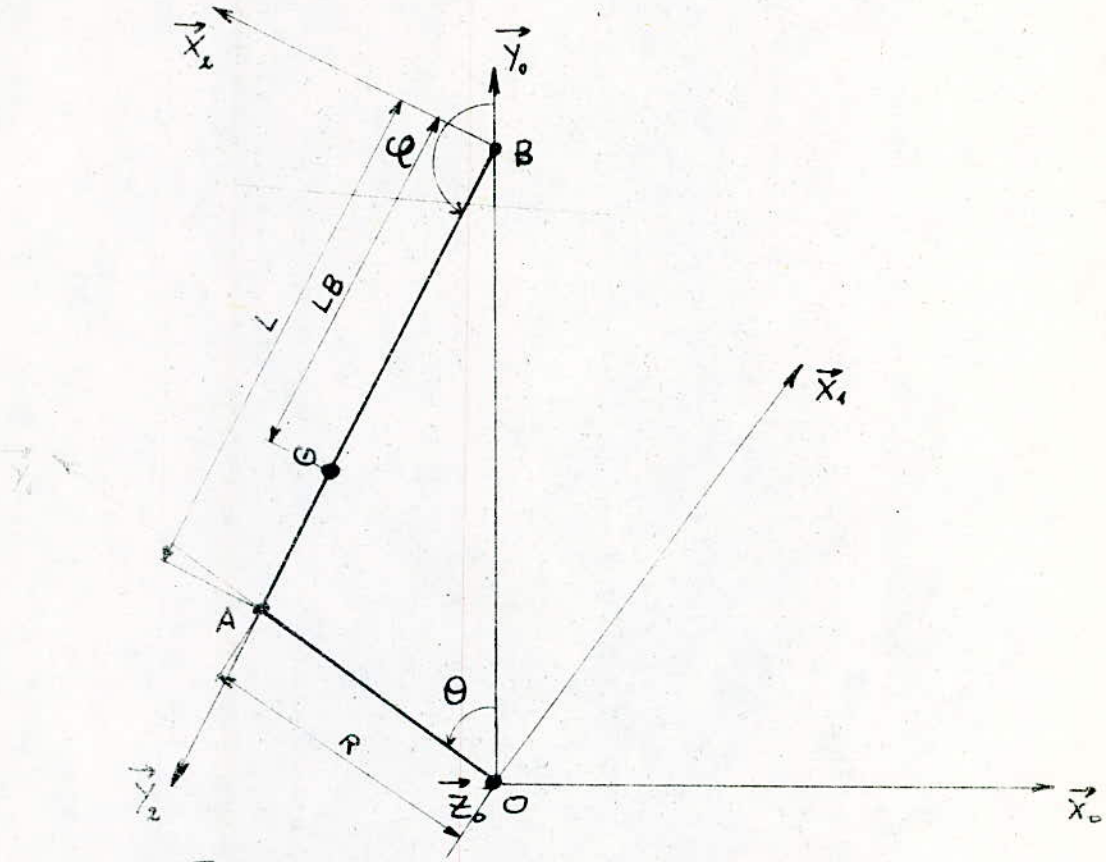


Fig 2.2 . Presentation de L'ensemble bielle - manivelle

Dans cette etude on supposera que la vitesse de rotation du moteur est constante $\omega = \frac{d\theta}{dt} = cte$

$(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ est le repere fixe

O le centre du vilebrequin

$\vec{Y}_0$ l'axe du cylindre

$\vec{Z}_0$ l'axe du vilebrequin, le volant etant placé sur les $\vec{Z}_0$ positifs

$(O, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$: est le repere mobile lie au vilebrequin

$\vec{Y}_1$: porte la manivelle

θ : est l'angle de rotation du vilebrequin $\theta = (\vec{Y}_0, \vec{OA})$ (Fig 2.2)

A : le centre de la tête de la bielle

R : le rayon de la manivelle

On definit le vecteur rotation instantané de la manivelle par rapport au repere fixe par :

$\overrightarrow{\Omega(\text{manivelle}/o)}$ noté simplement $\overrightarrow{\Omega(m/o)} = \dot{\theta} \cdot \vec{Z}_0$ ou

$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$: vitesse angulaire du moteur

$$\overrightarrow{\Omega(m/o)} = \omega . \vec{Z}_0$$

$(B, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$: repere lie a la bielle (Fig 2.2)

$\vec{Y}_2$: porte la bielle

B : le centre du pied de la bielle

G : le centre de gravité de la bielle

L : l'entraxe de la bielle

LB : position du centre de gravité de la bielle par rapport à l'axe du pied de la bielle

φ : l'angle de rotation de la bielle $\varphi = (\vec{Y}_0, \vec{BA})$

de même que pour la manivelle on definit le vecteur rotation instantané de la bielle par rapport au repere fixe par :

$\overrightarrow{\Omega (\text{bielle}/o)}$ noté $\overrightarrow{\Omega (b/o)} = \dot{\varphi}.\vec{z}_o$ où :

$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$: vitesse angulaire de la bielle

$$\overrightarrow{\Omega (b/o)} = \dot{\varphi}.\vec{z}_o \qquad (1)$$

2.1.2 FORMULES DE PASSAGE ENTRE LES DIFFERENTS REPERES

2.1.2.1 PASSAGE DU REPERE $(o, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$ AU REPERE $(o, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

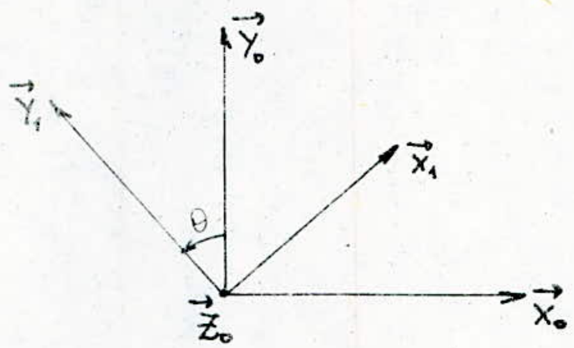


Fig 2.3 . PASSAGE DU REPERE $(o, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$ AU REPERE $(o, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

Exprimons les coordonnées des vecteurs $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$ dans le repere $(o, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$

par projection de $\vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o$ sur $\vec{x}_1, \vec{y}_1$ et $\vec{z}_1$ on obtient les relations suivantes:

$$\begin{cases} \vec{X}_1 = \vec{X}_o . \cos\theta + \vec{Y}_o . \sin\theta \\ \vec{Y}_1 = -\vec{X}_o \sin\theta + \vec{Y}_o \cos\theta \\ \vec{Z}_1 = \vec{Z}_o \end{cases} \qquad (2)$$

2.1.2.2 PASSAGE DU REPERE $(o, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$ AU REPERE $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

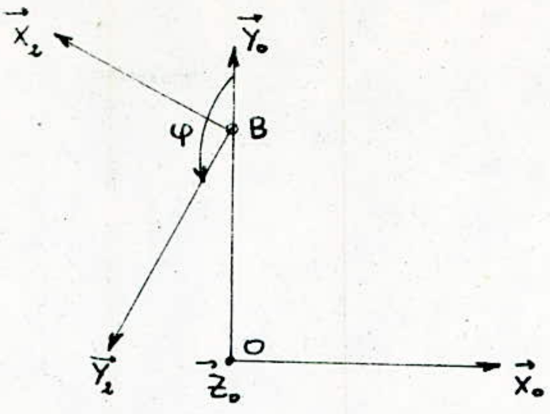


Fig 2.4. PASSAGE DU REPERE O AU REPERE 2

La projection des vecteurs $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ sur les axes $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$ donne (Fig 2.4)

$$\vec{X}_2 = -\vec{X}_0 \cdot \cos(\pi-\varphi) + \vec{Y}_0 \cdot \sin(\pi-\varphi)$$
$$= \vec{X}_0 \cos\varphi + \vec{Y}_0 . \sin\varphi$$
$$\vec{Y}_2 = -\vec{X}_0 \cdot \sin(\pi-\varphi) - \vec{Y}_0 \cdot \cos(\pi-\varphi)$$
$$= -\vec{X}_0 . \sin\varphi + \vec{Y}_0 . \cos\varphi$$
$$\vec{Z}_2 = \vec{Z}_0$$

$$\begin{cases} \vec{X}_2 = \vec{X}_0 . \cos\varphi + \vec{Y}_0 . \sin\varphi \\ \vec{Y}_2 = -\vec{X}_0 . \sin\varphi + \vec{Y}_0 . \cos\varphi \\ Z_2 = \vec{Z}_0 \end{cases} \qquad (3)$$

les relations (2) et (3) nous permettent par la suite de connaitre les efforts dans les differentes reperes connaissant leurs composantes dans le repere fixe.

2.1.3 RELATIONS CINEMATIQUES

2.1.3.1 DEFINITIONS DE L'ANGLE φ

Dans cette definition nous allons tirer une relation entre l'angle φ et l'angle θ

$\vec{OA} = -R.\sin\theta.\vec{X_o} + R.\cos\theta.\vec{Y_o}$ (Fig 2.2)

la projection de $\vec{OA}$ sur $\vec{X_o}$ donne $-R.\sin\theta$

$\vec{BA} = -L.\sin\varphi.\vec{X_o} + L.\cos(\pi-\varphi).\vec{Y_o}$

sa projection sur $\vec{X_o}$ est $-L.\sin\varphi$

or (voir Fig 2.2) les Composantes de $\vec{OA}$ et $\vec{BA}$ sur $\vec{X_o}$ sont egales donc

$$R\sin\theta = -L.\sin\varphi \qquad (4)$$

$$\sin\varphi = \frac{R}{L}\sin\theta \qquad (5)$$

$$\cos\varphi = \pm(1-\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \pm\left(1-\frac{R^2}{L^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

φ etant positif et varie legerement autour de π donc son cosinus est negatif

$$\cos\varphi = -\left(1-\frac{R^2}{L^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

2.1.3.2 DEFINITION DE $\dot{\varphi}$

$\dot{\varphi}$ est la vitesse de rotation de la bielle, elle est egale a la derivé de φ par rapport au temps

$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$

partons de la relation (5)

$$\sin\varphi = \frac{R}{L}\sin\theta$$

par derivation des 2 termes par rapport au temps on obtient

$$\frac{d}{dt}(\sin\varphi) = \frac{d}{dt}\left(\frac{R}{L}\sin\theta\right)$$

$$\cos\varphi.\frac{d\varphi}{dt} = \frac{R}{L}\cos\theta.\frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi = \frac{R}{L}.\omega.\cos\theta \qquad (6)$$

soit

$$\dot{\varphi} = \frac{R}{L}\cdot\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}\cdot\omega \qquad (7)$$

2.1.3.3 DEFINITION DE $\ddot{\varphi}$

On note par $\ddot{\varphi}$ l'acceleration angulaire de la bielle

$$\ddot{\varphi} = \frac{d}{dt}\dot{\varphi}$$

en derivant les deux membres de la relation(6) par rapport au temps on obtient

$$\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi) = \frac{d}{dt}\left(\frac{R}{L}\omega\cos\theta\right)$$

$$\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi = -\frac{R}{L}\omega^2\sin\theta$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2.\sin\varphi - \frac{R}{L}\omega^2\sin\theta}{\cos\varphi}$$

et d'apres (2) on obtient

$$\ddot{\varphi} = (\dot{\varphi}^2 - \omega^2).\operatorname{tg}\varphi \qquad (8)$$

2.1.4 ETUDE CINEMATIQUE DU CENTRE DE GRAVITE DE LA BIELLE

Soit X_G, Y_G, Z_G les composantes du centre de gravité de la bielle dans le repère fixe.

$$\vec{OG} = X_G.\vec{X_0} + Y_G.\vec{Y_0} + Z_G.\vec{Z_0} = \begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{matrix}$$

Les expressions de X_G, Y_G, Z_G (voir Fig 2.2) sont :

$$X_G = - L_B \sin(\pi - \varphi) = - L_B \sin\varphi$$

$$Y_G = R.\cos\theta + AG.\cos(\pi-\varphi) = R\cos\theta + (L - L_B)\cos(\pi-\varphi)$$

$$= R\cos\theta - (L - L_B)\cos\varphi$$

le mouvement de la bielle étant plan donc $Z_G = 0$

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} - L_B \sin\varphi \\ R\cos\theta - (L - L_B)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{matrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} L_B \sin\theta \\ R\cos\theta - (L - L_B)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{matrix} \qquad (9)$$

EXPRESSION DE LA VITESSE DU POINT G

par définition $\vec{V_G} = \frac{d}{dt}(\vec{OG})$

$$= \dot{X}_G \cdot \vec{X_0} + \dot{Y}_G \vec{Y_0} + \dot{Z}_G \cdot \vec{Z_0}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{X}_G \\ \dot{Y}_G \\ \dot{Z}_G \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{matrix}$$

avec $\dot{x}_G = \frac{d}{dt} x_G = -\frac{R}{L} L_B.\omega.\cos\theta$

$\dot{y}_G = \frac{d}{dt} y_G = -R.\omega.\sin\theta + (L-L_B).\dot{\varphi}.\sin\varphi$

$\dot{z}_G = \frac{d}{dt} z = 0$

$$\vec{V}_G = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L}.L_B.\omega.\cos\theta \\ -R.\omega.\sin\theta + (L-L_B).\dot{\varphi}.\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{matrix}$$

d'après (5) L'expression de $\vec{V}_G$ devient

$$\vec{V}_G = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L}.L_B.\omega.\cos\theta \\ R.\sin\theta.(\dot{\varphi} - \omega - \frac{L_B}{L}\dot{\varphi}) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{matrix} \qquad (10)$$

EXPRESSION DE L'ACCELERATION DU POINT G

par définition l'accélération du centre de gravité notée Γ_G est donné par

$$\vec{\Gamma}_G = \frac{d}{dt}(\vec{V}_G)$$

$$= \ddot{X}_G.\vec{X}_0 + \ddot{Y}_G.\vec{Y}_0 + \ddot{Z}_G.\vec{Z}_0$$

$$\ddot{X}_G = \frac{d}{dt}\dot{X}_G = \frac{R}{L}.L_B.\omega^2.\sin\theta$$

$$\ddot{Y}_G = \frac{d\dot{Y}_G}{dt} = R.\omega.\cos\theta.(\dot{\varphi} - \omega - \frac{L_B}{L}\dot{\varphi}) + R.\sin\theta.(\ddot{\varphi} - \frac{L_B}{L}\ddot{\varphi})$$

$$= R.\omega.(\dot\varphi-\omega-\frac{L_B}{L}\dot\varphi).\cos\theta + R.\ddot\varphi\left(1-\frac{L_B}{L}\right).\sin\theta$$

$$\ddot Z_G = 0$$

$$\vec\Gamma_G = \begin{pmatrix} \frac{R}{L}.L_B.\omega^2.\sin\theta \\ R.\omega.\left[\dot\varphi\left(1-\frac{L_B}{L}\right)-\omega\right].\cos\theta + R.\ddot\varphi\left(1-\frac{L_B}{L}\right).\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix}\vec X_0 \\ \vec Y_0 \\ \vec Z_0\end{matrix} \qquad (11)$$

2.1.5 CINEMATIQUE DU PISTON

ACCELERATION DU POINT B

l'acceleration du piston (point B) est notée Γ_B

pour calculer les coordonés de $\vec\Gamma_B$ il suffit de mettre $L_B = 0$ dans l'expression de $\vec\Gamma_G$

Les composantes de $\vec\Gamma_B$ dans le repere fixe sont notées $\ddot X_B$, $\ddot Y_B$ et $\ddot Z_B$

remplaçons L_B par 0 dans (11) on obtient

$$\ddot X_B = 0$$

$$\ddot Y_B = R.\omega(\dot\varphi-\omega).\cos\theta + R.\ddot\varphi.\sin\theta$$

$$\ddot Z_B = 0$$

$$\vec\Gamma_B = \begin{pmatrix} 0 \\ R.\omega(\dot\varphi-\omega).\cos\theta + R\ddot\varphi.\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix}\vec X_0 \\ \vec Y_0 \\ \vec Z_0\end{matrix} \qquad (12)$$

3. ETUDE DYNAMIQUE DU SYSTEME BIELLE _ MANIVELLE

Cette etude a pour but de calculer les valeurs des actions mutuelles entre les differents organes du moteur. dans cette etude nous negligerons l'effet du frottement ainsi que le poids des pieces. Nous interessons a : l'action de la chemise sur le piston, l'action du piston sur la bielle et l'action de la bielle sur le maneton, ainsi que le couple moteur.

3.1 ETUDE DYNAMIQUE DE LA BIELLE

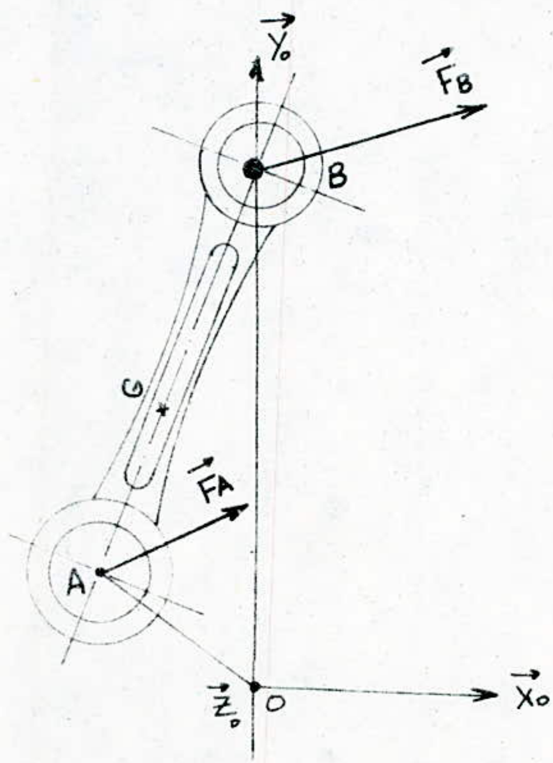


Fig 3.1 . Analyse des actions mecaniques appliquees à La bielle

En isolant la bielle du systeme, 2 actions mecaniques exterieures appliquées à la bielle apparaissent :

l'action du manetou sur la bielle au point A : $\vec{FA}$

l'action du piston sur la bielle au point B : $\vec{FB}$

. le torseur des actions mecaniques au point A se reduit à une force $\vec{FA}$ et un moment $\vec{m}_A$

On note torseur au point A par $\mathcal{T}_A$.

$$\mathcal{T}_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_A \\ \vec{m}_{A} \end{matrix} \right\}$$

$\vec{FA}$ passe par l'axe au point A donc son moment par rapport a A est nul $\vec{m}_{FA/A} = \vec{0}$.

Soit XA, YA et ZA les composantes de la force FA dans le repere fixe

$$\vec{FA} = X_A \cdot \vec{X_o} + Y_A \cdot \vec{Y_o} + Z_A \cdot \vec{Z_o} = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X_o} \\ \vec{Y_o} \\ \vec{Z_o} \end{matrix}$$

* torseur des actions mecaniques au point B

$$\mathcal{T}_B = \left\{ \begin{matrix} \vec{F_B} \\ \vec{m}_{B} \end{matrix} \right\}$$

$\vec{m}_B = \vec{0}$ Car $\vec{F_B}$ passe par le point B

$\vec{F_B} = \vec{X_B} \cdot \vec{X_o} + Y_B \cdot \vec{Y_o} + Z_B \cdot \vec{Z_o}$ ou

XB, YB et ZB sont les composantes de l'effort $\vec{F_B}$ dans le repere fixe

3.1.1 EQUATIONS VECTORIELLES FONDAMENTALES DE LA BIELLE

Les equations fondamentales de la bielle sont :

- La somme vectorielle de toutes les forces exterieurs appliquées a la bielle est egale au produit de la masse de celle-ci par l'acceleration de son centre de gravité.
- La somme des moments des efforts exterieurs appliqués à la bielle est egale au moment dynamique de celle-ci par rapport a son centre de gravité

$$m_b \, \overrightarrow{\Gamma_G} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \qquad (13)$$

$$\overrightarrow{\delta(b/G)} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}ex/G} \qquad (14)$$

m_b : la masse de la bielle

$\overrightarrow{\delta(b/G)}$: le moment dynamique de la bielle par rapport a G

3.1.1.1 CALCUL DU MOMENT DYNAMIQUE

le moment dynamique de la bielle par rapport a son centre de gravité represente la resistance a la rotation de la bielle par rapport a son centre de gravite.

par définition $\overrightarrow{\delta(b/G)} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_{b(b/G)}}\right)$ ou

$\overrightarrow{\sigma(b/G)}$ represente le moment cinitique de la bielle par rapport a son centre de gravité

CALCUL DU MOMENT CINETIQUE

par definition le moment cinetique de la bielle par rapport a son centre de gravité est egale au produit de son vecteur rotation instantané par rapport au centre du vilbrequin O et de son tenseur d'inertie dans le repere lie a la bielle et passant par G $(G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

$$\overrightarrow{\sigma(b/G)} = \underset{(G,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)}{I(b/G)} \cdot \overrightarrow{\Omega(b/G)}$$

$I(b/G)$: le tenseur d'inertie

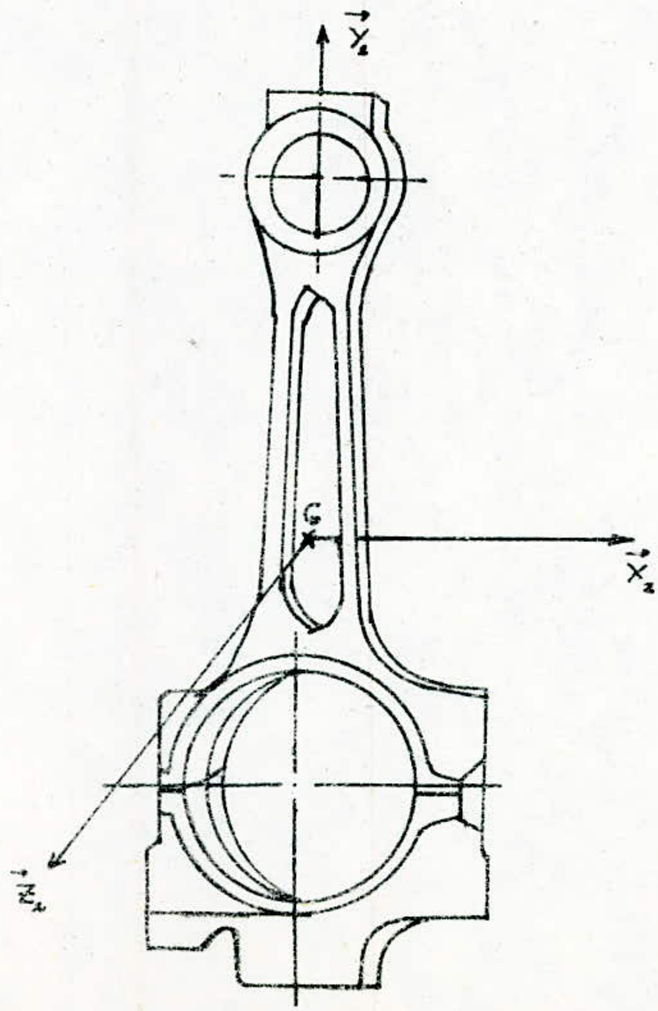


Fig 3.2 bielle du moteur F4L912

$$\overrightarrow{\Omega}(b/G) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{matrix}$$

$$I(b/G) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$ est le tenseur d'inertie

avec

A, B, C, E, F et D respectivement les moments d'inertie de la bielle par rapport aux axes Gx_2, Gy_2, Gz_2 et aux plans zx, xy et yz

On les note par :

$A = I_{Gx}$

$B = I_{Gy}$

$C = I_{Gz}$

$D = I_{Gxy}$

$E = I_{Gzx}$

$F = I_{Gxy}$

Si la bielle possède 2 plans de symétrie le cas de notre étude (voir Fig 3.2) tous les produits d'inerties sont nuls, le tenseur d'inertie se reduit à :

$$I(G/G) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{Gx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Gy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Gz} \end{pmatrix}$$

dans ce cas $I(G/G)$ s'appelle le tenseur d'inertie principal le moment cinetique est donc egale a

$$\overrightarrow{\sigma(b/G)} = \begin{pmatrix} I_{Gx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Gy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Gz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{Gz}.\dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ z_2 \end{array} = I_{Gz}.\dot{\varphi}.\vec{z}_0 \quad (\vec{z}_2 = \vec{z}_0)$$

d'ou le moment dynamique de la bielle par rapport à G est

$$\overrightarrow{\delta(b/G)} = \frac{d}{dt}\left(I_{Gz}.\dot{\varphi}\right)\vec{z}_0 = I_{Gz}.\ddot{\varphi}.\vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{\delta(b/G)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi}.I_{Gz} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{array} \qquad (15)$$

3.1.1.2 CALCUL DES MOMENTS DES FORCES PAR RAPPORT A A

puisque le moment dynamique de la bielle est calculé par rapport au point G, il faut donc ramener tous les moments des forces exterieurs appliquées á la bielle à G

a - CALCUL DU MOMENT DE LA FORCE $\vec{FA}$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{(\vec{FA}/G)}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{(\vec{FA}/A)}} + \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{FA}$$

la force $\vec{FA}$ passe par A donc son moment par rapport a ce point st nul

$$\mathcal{M}_{(\vec{FA}/A)} = \vec{0}$$

Calculons le produit vectorielle de $\vec{FA}$ par $\vec{GA}$

$$\vec{FA} = \begin{pmatrix} XA \\ YA \\ ZA \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{matrix}$$

$$\vec{GA} = \vec{OA} - \vec{OG}$$

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} \cdot LB \cdot \sin\theta \\ R\cos\theta - (L-LB)\cdot\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{matrix} = \qquad (\text{voir } (9))$$

$$\vec{OA} = -R\cdot\sin\theta\cdot\vec{X_0} + R\cdot\cos\theta\cdot\vec{Y_0} \qquad (\text{Fig } 2.2)$$

$$= \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{matrix}$$

$$\vec{GA} = \vec{OA} - \vec{OG} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\cdot\left(1-\frac{LB}{L}\right) \\ (L-LB)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{matrix} = \begin{pmatrix} -(L-LB)\sin\varphi \\ (L-LB)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{matrix}$$

$$\vec{GA} \wedge \vec{FA} = \begin{pmatrix} -(L-LB)\sin\varphi \\ (L-LB)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{matrix} \wedge \begin{pmatrix} XA \\ YA \\ ZA \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L-LB)\sin\varphi\, YA - (L-LB)\cos\varphi\, XA \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{(\vec{FA}/G)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L-LB)(XA\cos\varphi + YA\cdot\sin\varphi) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X_0} \\ \vec{Y_0} \\ \vec{Z_0} \end{matrix} \qquad (16)$$

b- CALCUL DU MOMENT DE LA FORCE $\vec{FB}$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{(\vec{FB}/G)}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{(\vec{FB}/B)}} + \overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{FB}$$

$\overrightarrow{\mathcal{M}_{(\vec{FB}/B)}} = \vec{0}$ car $\vec{FB}$ rentre L'axe au point B

calcul de $\vec{GB} \wedge \vec{FB}$

$$\vec{FB} = \begin{pmatrix} XB \\ YB \\ ZB \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X}_o \\ \vec{Y}_o \\ \vec{Z}_o \end{matrix}$$

$$\vec{GB} = \vec{OB} - \vec{OG}$$

$$\overrightarrow{OB} = (R\cos\theta - L\cos\varphi) \cdot \vec{Y}_o \qquad (\text{Fig } 2.2)$$

$$\vec{OG} = -LB.\sin\varphi \cdot \vec{X}_o + [R\cos\theta - (L - LB)\cos\varphi.]\vec{Y}_o \quad \text{d'apres (9)}$$

$$\vec{GB} = LB.\sin\varphi.\vec{X}_o + (-LB\cos\varphi.\vec{Y}_o)$$

$$= \begin{pmatrix} LB\sin\varphi \\ -LB\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X}_o \\ \vec{Y}_o \\ \vec{Z}_o \end{matrix}$$

$$\vec{GB} \wedge \vec{FB} = \begin{pmatrix} LB\sin\varphi \\ -LB\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X}_o \\ \vec{Y}_o \\ \vec{Z}_o \end{matrix} \wedge \begin{pmatrix} XB \\ YB \\ ZB \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X}_o \\ \vec{Y}_o \\ \vec{Z}_o \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ LB\sin\varphi . YB + LB.\cos\varphi\, XB \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X}_o \\ \vec{Y}_o \\ \vec{Z}_o \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{(\vec{FB}/G)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ LB(XB\cos\varphi + YB\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X}_o \\ \vec{Y}_o \\ \vec{Z}_o \end{matrix} \qquad (17)$$

3.1.2 EQUATIONS SCALAIRES DE LA BIELLE

Les equations scalaires de la bielle sont obtenues en projetant les equations (13) et (14) sur les trois axes du repere $(O, \vec{X}_o, \vec{Y}_o, \vec{Z}_o)$

La projection donne sur :

$\vec{X}_o$: $mb.\ddot{X}_G = XA + XB$

$\vec{Y}_o$: $mb.\ddot{Y}_G = YA + YB$

$\vec{Z}_o$: $I_{GZ}.\ddot{\varphi} = -(L - LB)(XA.\cos\varphi + YA.\sin\varphi) + LB(XB\cos\varphi + YB\sin\varphi)$

Soit en remplaçons les accelerations par leurs valeurs, nous obtenons

sur $\vec{X}_o$: $mb.LB.\omega^2 \sin\varphi = XA + XB$

sur $\vec{Y}_o$: $mb\left[R.\omega\left[\dot{\varphi}\left(1 - \frac{LB}{L}\right) - \omega\right]\cos\varphi + R\ddot{\varphi}\left(1 - \frac{LB}{L}\right)\sin\theta\right] = YA + YB$ (18)

sur $\vec{Z}_o$: $I_{GZ}.\ddot{\varphi} = -(L - LB)(XA\cos\varphi + YA.\sin\varphi) + LB(XB\cos\varphi + YB\sin\varphi)$

3.2 ETUDE DYNAMIQUE DU PISTON

Les equations precedentes ne permettent pas de calculer les quatres inconnues XA, YA, XB et YB, il nous manque donc une autre equation. L'etude dynamique du piston nous permet d'enlever l'indetermination du systeme precedent.

En isolant le piston du systeme, trois action mecaniques exterieures appliqués sur ce dernier apparaissent.

- L'action de la bielle sur le piston au point B $-\vec{F}_B$

- L'action de la chemise sur sur le piston au point C $\vec{F}_C$

- L'action des gaz sur le piston $\vec{F}_P$

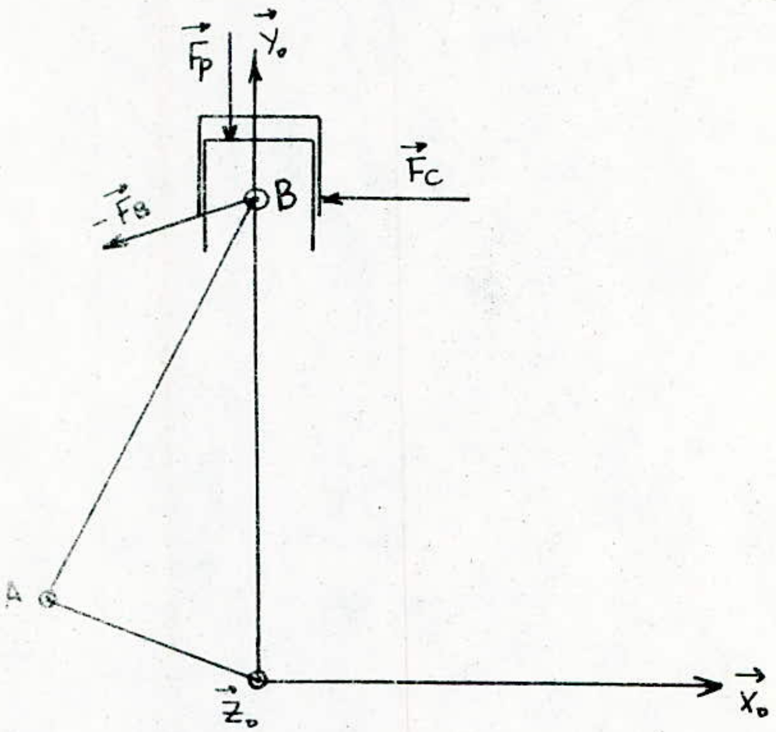


Fig 3.3 . ANALYSE DES ACTIONS MECANIQUES APPLIQUEES AU PISTON

le torseur des actions mecaniques au point B se reduit a $\vec{F}_B$ et $\vec{M}_B$

$$\mathcal{T}_B = \begin{Bmatrix} \vec{F}_B \\ \vec{M}_B \end{Bmatrix}$$

la liaison bielle-piston par l'intermedeaire de l'axe est l'opposée de liaison piston-bielle déja etudiée

le moment $\vec{M}_B = \vec{0}$ car F_B rencontre l'axe au point B

$$-\vec{F}_B = \begin{pmatrix} -X_B \\ -Y_B \\ -Z_B \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

le torseur des actions mecaniques au point C est : $\mathcal{T}_C = \begin{Bmatrix} \vec{F_C} \\ \vec{\mathcal{M}}_c \end{Bmatrix}$

$$\vec{Fc} = X_c . \vec{X_o} = \begin{pmatrix} X_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X_o} \\ \vec{Y_o} \\ \vec{Z_o} \end{matrix}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_c = \vec{\mathcal{M}}_{Fc/c} = \vec{0}$$

3.2.1 ACTION DES GAZ SUR LE PISTON

- On suppose que la pression des gaz est répartie uniformément sur la tête du piston et que le point d'application de l'effort resultant est centré sur la tête du piston. De ce fait le gaz n'exerce pas un moment sur le piston
- Les efforts dus aux gaz sont uniquement dirigés suivant $-\vec{Y_o}$ et dependent de l'angle de rotation du vilebrequin θ.

le torseur des actions mecaniques se reduit a $\vec{F_P}$ et $\vec{\mathcal{M}}_P$

$$\vec{\mathcal{M}_P} = \vec{0}$$

$$\vec{F_P} = -Y_P(\theta) \cdot \vec{Y_o} = - \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_P(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X_o} \\ \vec{Y_o} \\ \vec{Z_o} \end{matrix} \quad \text{ou :} \quad Y_P(\theta) = -S.(P(\theta) - P_o)$$

avec

S : la section du piston

$P(\theta)$: la pression des gaz en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin

P_o : la pression à l'interieur du carter

3.2.2 EQUATIONS VECTORIELLES FONDAMENTALES DU PISTON

Les equations vectorielles fondamentales de la biell sont :

$$m_p \cdot \overrightarrow{\Gamma_B} = \sum \vec{F}_{ext} \text{ appliquées sur le piston}$$
$$\overrightarrow{\delta(P/B)} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{(\vec{F}_{ext}/B)} \tag{20}$$

où :

m_p : la masse du piston et de ces accessoires

$\overrightarrow{\delta(P/B)}$: le moment dynamique du piston par rapport au point B

$\overrightarrow{\Gamma_B}$: l'acceleration du piston

3.2.2.1 CALCUL DU MOMENT DYNAMIQUE

On a deja definie le moment dynamique dans L'etude dynamique de le bielle il est egale a la derivee du moment cinetique du piston par rapport au point B

$$\overrightarrow{\delta(P/B)} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\sigma(P/B)})$$

le moment cinetique $\overrightarrow{\sigma(P/B)} = I_{(P/B)} \cdot \overrightarrow{\Omega(P/o)}$

$I_{(P/B)}$: le tenseur d'inertie du piston dans le repere $(B, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$

$\overrightarrow{\Omega(P/o)}$: le vecteur rotation instantane du piston par rapport au point O

le piston n'a aucune rotation par rapport au point O, donc son vecteur rotation instantané par rapport a ce point est nul

$\overrightarrow{\Omega(P/o)} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{\sigma(P/B)} = \vec{0}$

d'ou $\overrightarrow{\delta(P/B)} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{\delta(P/B)} = \vec{0}$$

3.2.2.2 CALCUL DE MOMENTS DES FORCES PAR RAPPORT AU POINT B

toutes les forces appliquées au piston passent par le point B, donc leurs moments par rapport a ce point sont nuls

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{(\vec{F}_B/B)} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{(\vec{F}_p/B)} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}_c/B} = \vec{0}$$

donc :

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{(\vec{F}_{ext}/B)} = \vec{0}$$

3.2.3 EQUATIONS SCALAIRES DU PISTON

Les equations scalaires du piston s'obtiennent par projection des equations (20) sur les trois axes du repre fixe

En projetant ces equations on obtient sur :

$$\begin{aligned} \vec{X}_o &: m_p . \ddot{X}_B = X_C - X_B \\ \vec{Y}_o &: m_p . \ddot{Y}_B = -Y_p(\theta) - Y_B \end{aligned} \qquad (21)$$

Soit en tenant compte de (12) nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\text{Sur } \vec{X}_o : 0 = X_C - X_B \\ &\text{sur } \vec{Y}_o : m_p . [R.\omega.(\dot{\varphi}-\omega).\cos\theta + R.\ddot{\varphi}.\sin\theta] = -Y_p(\theta) - Y_B \end{aligned} \qquad (22)$$

* RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS

La determination des inconnues X_A, X_B, X_C, Y_A et Y_B necessite la resolution d'un systeme de 5 equations a 5 inconnues, le systeme d'equations a resoudre est le suivant:

$$
\begin{cases}
XA + XB + 0 + 0 + 0 = mb.\,LB.\,\omega^2.\sin\varphi \\
0 + 0 + YA + YB + 0 = mb.\left[R.\omega.\left(\dot{\varphi} - \omega - \frac{LB}{L}\dot{\varphi}\right).\cos\theta + (L - LB).\ddot{\varphi}.\sin\varphi\right. \\
-(L - LB)\,XA.\cos\varphi - (L - LB)\,YA\sin\varphi + LB.\,XB.\cos\varphi + LB.\,YB.\sin\varphi + 0 = I_{Gz}.\,\ddot{\varphi} \\
0 - XB + 0 + 0 + XC = 0 \\
0 + 0 + 0 - YB + 0 = -Y_p(\theta) - m_p.\left[R.\omega(\dot{\varphi} - \omega).\cos\theta + R.\ddot{\varphi}.\sin\theta\right.
\end{cases}
\qquad (23)
$$

La résolution du système d'équation (23) donne :

$$YB = -[illegible] - m_b . \left[R.\omega.(\dot\varphi - \omega).\cos\theta + R\ddot\varphi.\sin\theta \right] \qquad (24)$$

$$YA = m_b \left[R.\omega.(\dot\varphi - \omega - \frac{L_B}{L}\dot\varphi)\cos\theta + (L - L_B).\ddot\varphi.\sin\varphi \right] - YB \qquad (25)$$

$$XA = \frac{1}{L.\cos\varphi} \left(L_B . YB.\sin\varphi - (L - L_B) YA.\cos\varphi + m_b . L_B^2 . \omega^2 . \sin\varphi.\cos\varphi - I_{Gz}\ddot\varphi \right) \qquad (26)$$

$$XB = -XA + m_b . L_B . \omega^2 \sin\varphi \qquad (27)$$

$$XC = XB \qquad (28)$$

$$\vec{FA} = \begin{pmatrix} XA \\ YA \\ ZA \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \qquad \|\vec{FA}\| = \left(XA^2 + YA^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

La direction de $\vec{FA}$ par rapport à l'axe $\vec{x}_0$ est définie par l'angle γ_A

$$\gamma_A = \text{Arctg} \frac{YA}{XA}$$

$$\vec{FB} = \begin{pmatrix} XB \\ YB \\ ZB \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \qquad \|\vec{FB}\| = \left(XB^2 + YB^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

De même que pour $\vec{FA}$ la direction de $\vec{FB}$ par rapport à $\vec{x}_0$ est définie par l'angle γ_B tel que :

$$\gamma_B = \text{Arctg} \frac{YB}{XB}$$

$$\vec{FC} = \begin{pmatrix} XC \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \qquad \|\vec{FC}\| = |XC|$$

$$\gamma_C = 0$$

le calcul des efforts XA, XB, XC, YA et YB s'effectue sur micro-ordinateur dans l'ordre suivant :

on calcule d'abord YB ensuite YA, XA, XB et XC (Voir Organigramme)

3.3 Expression des efforts dans les reperes mobiles

pour l'exploitation des resultats on a besoin de connaitre les efforts dans les deux reperes mobiles, repere lie a la bielle et repere lie au maneton pour ceci il suffit lors du traitement informatique de faire un changement de repère apres résolution du système.

les coordonnées des efforts $\vec{FA}$ et $\vec{FB}$ dans les reperes mobiles $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ sont les suivantes :

$$\vec{FA} = \begin{pmatrix} XA \\ YA \\ ZA \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} XA.\cos\theta + YA.\sin\theta \\ -XA\sin\theta + YA.\cos\theta \\ Z_A \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} \qquad (29)$$

$$= \begin{pmatrix} XA.\cos\varphi + YA.\sin\varphi \\ -XA\sin\varphi + YA.\cos\varphi \\ ZA \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix}$$

$$\vec{FB} = \begin{pmatrix} XB \\ YB \\ ZB \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} XB.\cos\theta + YB.\sin\theta \\ -XB.\sin\theta + YB.\cos\theta \\ ZB \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} \qquad (30)$$

$$= \begin{pmatrix} XB.\cos\varphi + YB.\sin\varphi \\ -XB.\sin\varphi + YB.\cos\varphi \\ ZB \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix}$$

Ces formules nous permettent par la suite de tracer les diagrammes polaires des efforts $\vec{FA}$ et $\vec{FB}$ dans les differentes reperes.

4. CALCUL DU COUPLE MOTEUR

Le couple moteur pendant le temps moteur est continuellement variable. De plus, dans un moteur a quatre temps à un cylindre le temps moteur ne se produit qu'une fois pour deux tours du vilebrequin. Dans un tel moteur, le couple variera donc dans de très grandes propostions au cours d'un cycle et on peut s'attendre que le moteur fonctionnera par a.coup, entrainant des vibrations de regime important et des vibrations prejudiciable a la mecanique

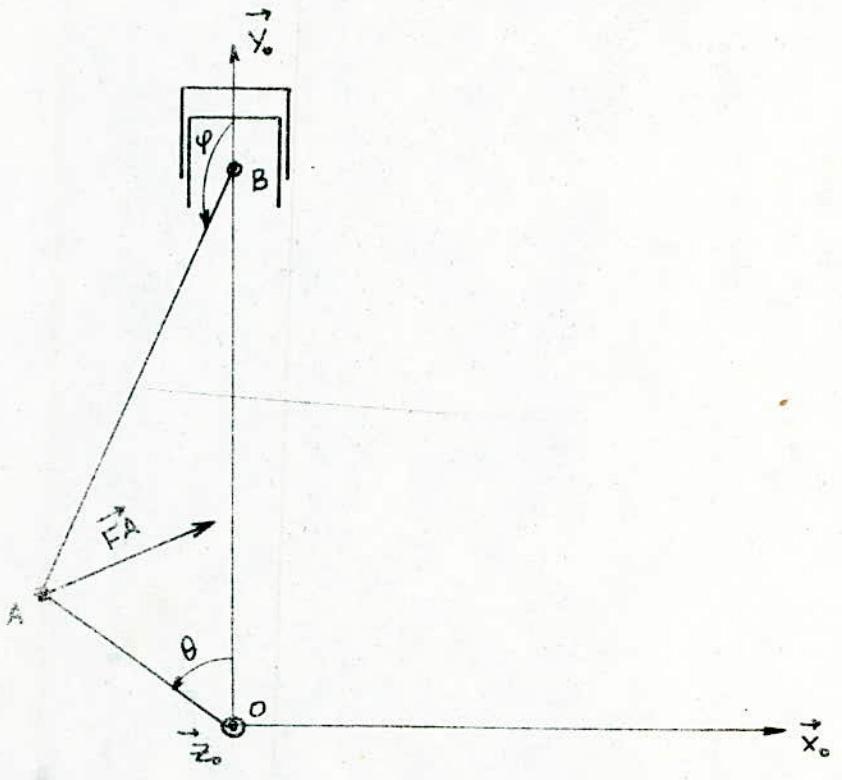


Fig 4.1 . Systeme bielle_manivelle

par definition le couple moteur a pour expression

$$\vec{C} = \vec{FA} \wedge \vec{OA}$$

dans la formule (31) on designe par C : le couple moteur et par $\wedge$: produit vectorielle

$$\vec{FA} = \begin{pmatrix} XA \\ YA \\ ZA \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{C} = \vec{FA} \wedge \vec{OA} = \begin{pmatrix} XA \\ YA \\ ZA \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{matrix} \wedge \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ XA.R.\cos\theta + YA.R.\sin\theta \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{X}_0 \\ \vec{Y}_0 \\ \vec{Z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{C} = R\,(XA.\cos\theta + YA.\sin\theta).\vec{Z}_0$$

le module du couple moteur st:

$$C = R\,(XA.\cos\theta + YA.\sin\theta) \qquad (32)$$

4.1 Couple du aux pressions des gaz

Le couple du aux pressions des gaz est le couple moteur à pleine charge sans tenir compte de l'effet d'inertie des pieces en mouvement.

La pression regnant dans le cylindre à un instant donne exerce des efforts sur la chemise, la culasse et le piston, les efforts ainsi mise en jeu sont des forces purement interieurs au moteur

les pressions radiales agissant sur la chemise s'auto-equilibrent.

Les forces agissant sur le piston ont des directions fixes et d'intensités variables et sont periodiques de periode 4π.

Ces forces ayant agi sur le piston se transmettent integralement (aux frottement près) au maneton du vilebrequin par l'intermedeaire de la bielle pour fournir le couple du aux gaz

Ce couple est obtenu en egalant dans la formule du couple total toutes les masses en mouvements c'est-a-dire la masse de la bielle et la masse du piston

On note par C_g le couple du aux gaz

$$C_g = R\,(XA.\cos\theta + YA.\sin\theta) \quad \text{avec } mb = mp = 0$$

XA et YA sont données par les formules 25 et 26

4.2 Couple aux inerties des pieces en mouvement

le Couple du aux inerties des pieces en mouvement est le couple moteur à charge vide, Ce couple est calculé en faisant tourner le moteur sans alimentation en combustible, son expression se deduit du couple total dans lequel on annule la variation de la pression.

On designe par C_i le couple du aux inertie :

$$C_i = R\,(XA.\cos\theta + YA.\sin\theta) \quad \text{avec } \Delta P = P(\theta) - P_0 = 0$$

le couple C_i peut etre Calculé d'une autre maniere connaissant que le couple total est la somme de deux couples :

- couple du aux gaz
- couple du aux inerties

$$C = C_g + C_i \quad \text{d'ou} \quad C_i = C - C_g$$

4.3 Decomposition du couple en serie de Fourier

Le developpement du couple moteur en serie de Fourrier est necessaire a l'etude des vibrations de torsion du vilebrequin. la connaissance des harmoniques du couple moteur nous permet de connaitre à quelle frequence se produit la resonnance du systeme, cette engendre des consequences dans le moteur.

Avant de proceder au developpement du couple moteur en serie de Fourrier On a besoin du theoreme suivant :

Theoreme :

Si une fonction $f(x)$ est periodique de periode $2T$, monotone par tranche et bornee sur l'intervalle $[0, 2T]$, elle est decomposable en serie de Fourrier et la Somme de sa serie converge en tous points vers sa somme $f(x)$.

dans notre cas le couple verifie les conditions de ce theoreme. Il st periodique de periode 4π.

Sa decomposition en serie de Fourrier est donnée par :

$$C(\theta) = C_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \cos \frac{2\pi}{T} . n\theta + b_n . \sin \frac{2\pi}{T} . n\theta$$

ou :

T : la periode $T = 4\pi$

C_o : le couple moteur moyen

a_n et b_n sont les amplitudes de l'harmonique d'ordre n, elles sont homogenes à un couple et sont appelées coefficients de Fourrier

les Coefficients C_o, a_n et b_n sont donnés par les formules de Fourrier suivantes:

$$C_o = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} C(\theta) . d\theta \qquad (40)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} C(\theta) . \cos \frac{n\theta}{2} \, d\theta \qquad (41)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} C(\theta) . \sin \frac{n\theta}{2} \, d\theta \qquad (42)$$

pour avoir une approximation suffisante du couple moteur, nous prendrons les dix premieres harmoniques du developpement.

$$C(\theta) \approx \sum_{n=1}^{10} a_n . \cos \frac{n\theta}{2} + b_n . \sin \frac{n\theta}{2} + C_o$$

ou : a_n, b_n et C_o sont données par les formules (40, 41, 42)

Le couple dû à la pression des gaz se décompose de la même manière que le couple total

$$C_g(\theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{10} a_{np} \cdot \cos\frac{n\theta}{2} + b_{np} \cdot \sin\frac{n\theta}{2}$$

a_{np} et b_{np} : sont les amplitude de l'harmonique d'ordre n du couple C_g.

C_0 : le couple moteur moyen

avec

$$a_{np} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} C_g(\theta) \cdot \cos\frac{n\theta}{2}\, d\theta$$

$$b_{np} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} C_g(\theta) \cdot \sin\frac{n\theta}{2} \cdot d\theta$$

Couple dû aux inerties :

Le couple dû aux inerties est périodique de période 4π. Sa décomposition en série de Fourier est donnée par :

$$C_i(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{ni} \cdot \cos n\theta + b_{ni} \cdot \sin n\theta$$

où :

a_{ni} et b_{ni} sont les harmoniques d'ordre n du couple C_i. elles sont données par les formules de Fourrier suivantes :

$$a_{ni} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} C_i(\theta) \cdot \cos n\theta \cdot d\theta$$

$$b_{ni} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} C_i(\theta) \cdot \sin n\theta \cdot d\theta$$

pour garder les 10 premiers harmoniques dans le couple du aux inerties on doit s'arreter a $n=5$ donc :

$$C_i(\theta) = \sum_{n=1}^{5} a_{ni} . \cos n\theta + b_{ni} . \sin n\theta .$$

5 . ETUDE THERMODYNAMIQUE DU MOTEUR

Dans l'étude thermodynamique on se limitera a la détermination de la loi d'evolution de la pression du cycle en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin . pour cela on se base sur le cycle quasi-reel

5.1 Cycles

On appelle cycle l'ensemble des evolutions que subit une masse du melange depuis son entrée dans le cycle jusqu' à sa sortie dans l'atmosphère, avec variation de volume, de pression et de la temperature.

Cycle quasi-reel

Le travail sur le cycle reel du moteur necessite des moyens importants, le cycle quasi-réel est plus proche du cycle réel à partir du cycle [illegible]

pour notre cas la pression en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin est une donnée pour faire l'application sur un moteur (FIG [illegible] voir ANNEX) mais comme la société qui fabrique ces moteurs ne nous a pas donner le cycle thermodynamique de ce moteur on a pris le cycle quasi-reel pour faire notre application

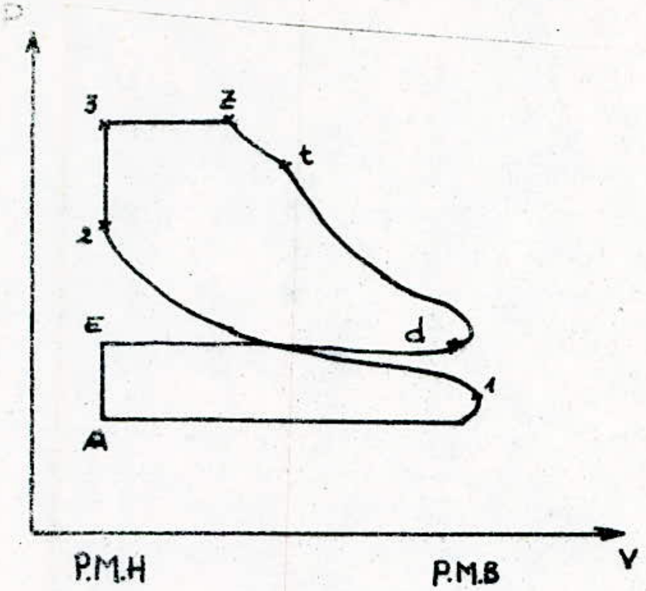


Fig 5.1 Cycle quasi-reel

Le cycle quasi-reel est Compose par :

- 3 evolutions à pression constante (A-1, E-D, 3-Z)
- 1 evolution à volume constant (2-3)
- 1 evolution isothermique (Z-t)
- 2 evolutions polythropiques (1-2, t-d)

5.2 Phases principales du cycle quasi-reel

Les phases principales du cycle quasi-reel sont:

A-1 admission à pression constante

1-2 Compression polythropique

2-3 Combustion à volume constant

3-Z Combustion à pression constante

Z-t detente isothermique

t-d detente polythropique

d-E echappement à pression constante

5.3 Expression de la pression durant les phases du cycle

a- Admission :

Les phenomenes d'admission etant trops compliqués. Nous admettons ces hypotheses simplificatrices en vue de traduire mathematiquement les processus d'admission. les hypotheses sont.

- gaz supposé parfait
- ecoulement isenthropique
- admission isobare
- l'ouverture de la soupape d'admission et la fermeture de la soupape d'echappement se font au point mort haut

moyennant de Ces hypothese, la pression d'admission est donnée par:

$$PA = 1{,}03\,Po.\left[1 - \frac{N^2}{1{,}25.10^8}\left(\frac{\varepsilon - 0{,}5}{\varepsilon - 1}\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

avec

Po : la pression atmospherique en atm

N : la vitesse du rotation du moteur en trs/mn

ε : le taux de compression du moteur

γ : coefficient adiabatique

PA : pression d'admission en atm

b. Compression :

La Compression dure du point mort bas au point mort haut. son evolution est polythropique d'exposant constant. connaissant les paramètres (pression et volume) en fin d'admission. L'equation d'etat de la thermodynamique donne :

$$P_A . V_A^{\gamma c} = P . V^{\gamma c} \quad \text{d'où}$$

$$P = P_A . \left(\frac{V_A}{V}\right)^{\gamma c}$$

γc : Coeffient de la polythropique pendant la compression

PA et VA : Sont la pression et le volume en fin d'admission

P et V : sont la pression et le volume pendant la phase compression

$$V = S . x + V_A$$

S : Section du piston

x : deplacement du piston a partir du P.M.H

$$x = R . \left[(1 - \cos\theta) + \frac{R}{4L}(1 - \cos 2\theta)\right]$$

C. Combustion

la compression est le processus qui se deroule dans le cylindre a partir de l'apparition de l'etincelle jusqu'a l'instant ou toute l'energie de combustion est liberée. dans cette phase la pression atteint sa valeur maximale, elle est constante durant la phase de combustion sa valeur varie entre (1,4 et 2) • P_2, P_2 etant la pression a la fin si on designe par P_z la valeur de la pression maximale (voir Fig 5.1)

$$P_z \in [1.4 - 2] \cdot P_2$$

avec

P_z touche les valeurs inferieures pour les moteurs a essence et les valeurs superieures pour les moteurs diesel.

d _ Detente:

La detente est le seul temps moteur des 4 temps temps du moteur, elle compose par: (voir Fig 5.1)
une evolution isothermique du point z au point t suivie d'une detente polythropique d'exposant constant γd du point t au point d.

* Detente isothermique:

Soit P et V respectivement la pression et le volume dans cette phase
La loi de MARIOTTE donne pour une evolution isothermique

$$P = P_z \frac{V_z}{V}$$

V_z : le volume a la fin de la combustion

* Detente polythropique:

en utilisant la loi d'etat de la thermodynamique pour une evolution polythropique la pression dans cette phase a pour expression

$$P = P_t \left(\frac{V_t}{V}\right)^{\gamma d}$$

ou :

P_t et V_t sont respectivement la pression et le volume a la fin de la detente isothermique.

e . Echappement.

c'est la phase d'evacuation des gaz brulés, produits par la Combustion, elle se fait a pression constante. la valeur de la pression d'echappement noteé P_E est donneé dans des plages

$$P_E \in [1.1 - 1.15] \text{ bars}$$

5.4 Recapitulatif de La pression en fonction de θ

$$x = R\left(1 - \cos\theta + \frac{R}{4L}(1 - \cos 2\theta)\right)$$

$$V = S \cdot x + V_A$$

- Admission $$P_A = 1.03\, P_0 \left(1 - \frac{N^2}{1.25 \cdot 10^8} \cdot \frac{\varepsilon - 0.5}{\varepsilon - 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

- Compression $$P = P_A \cdot \left(\frac{V_A}{V}\right)^{\gamma c}$$

- Combustion $$P_Z = (1.4 \text{ à } 2) \cdot P_2$$

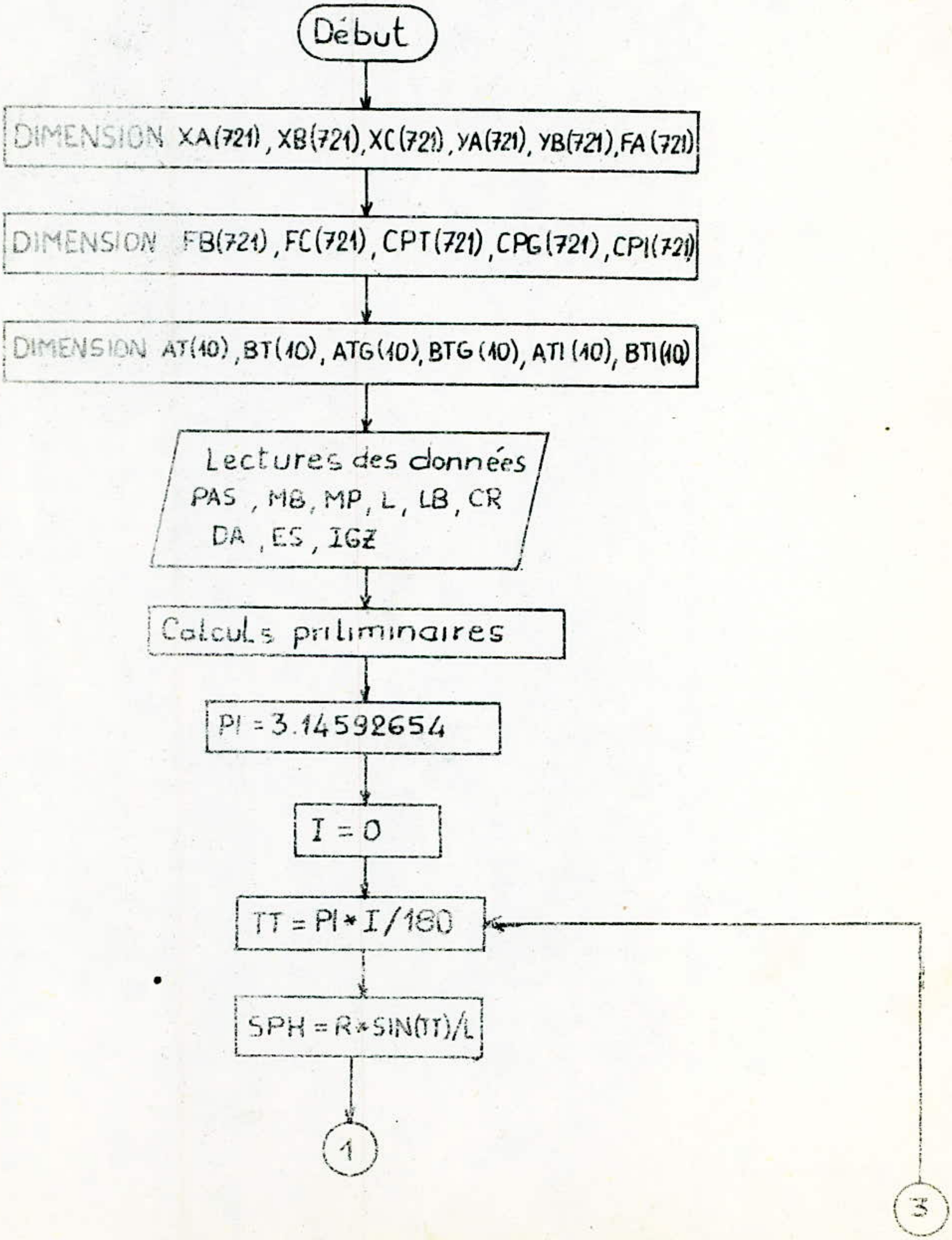
_ detente

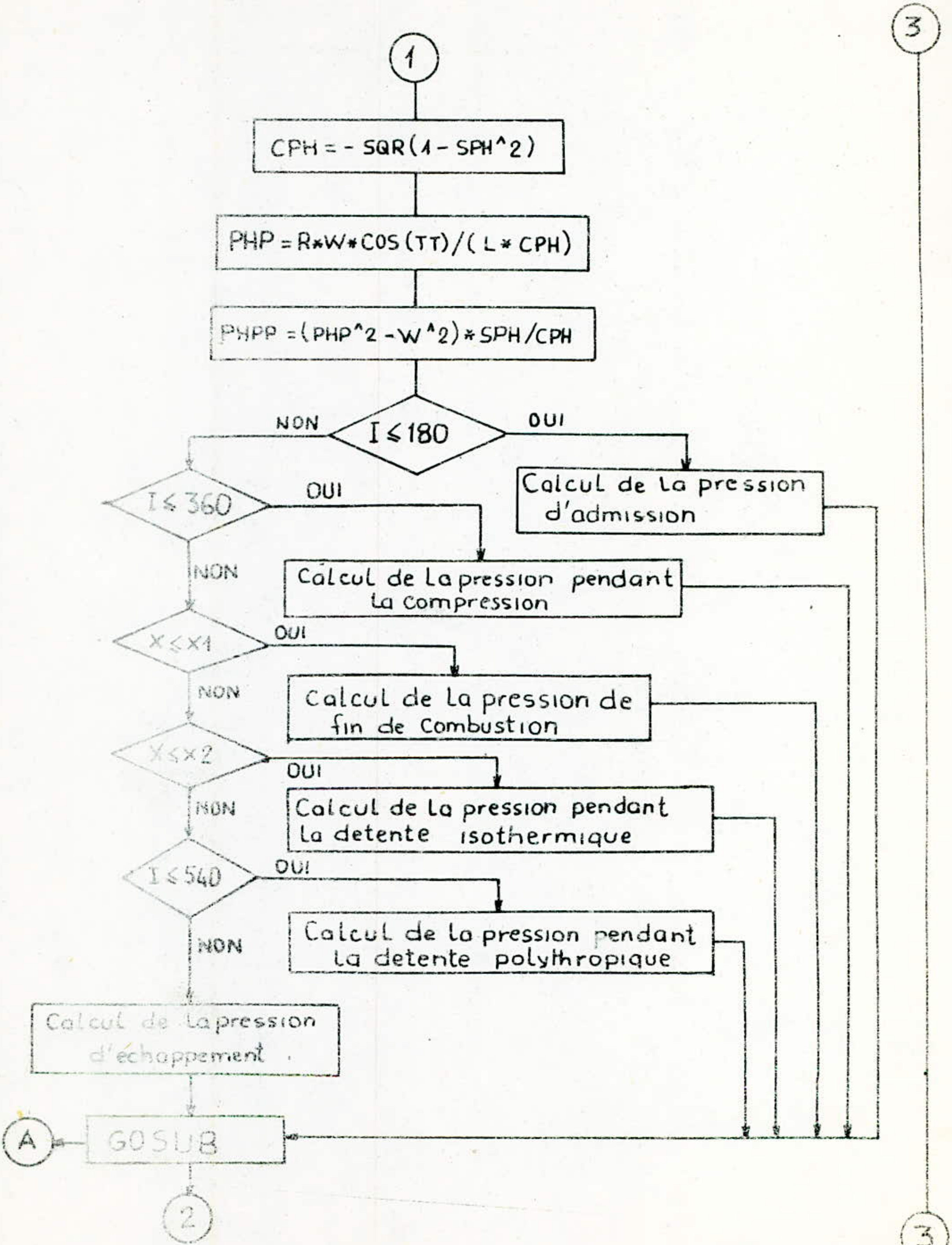
* isothermique $$P = P_z . \frac{V_z}{V}$$

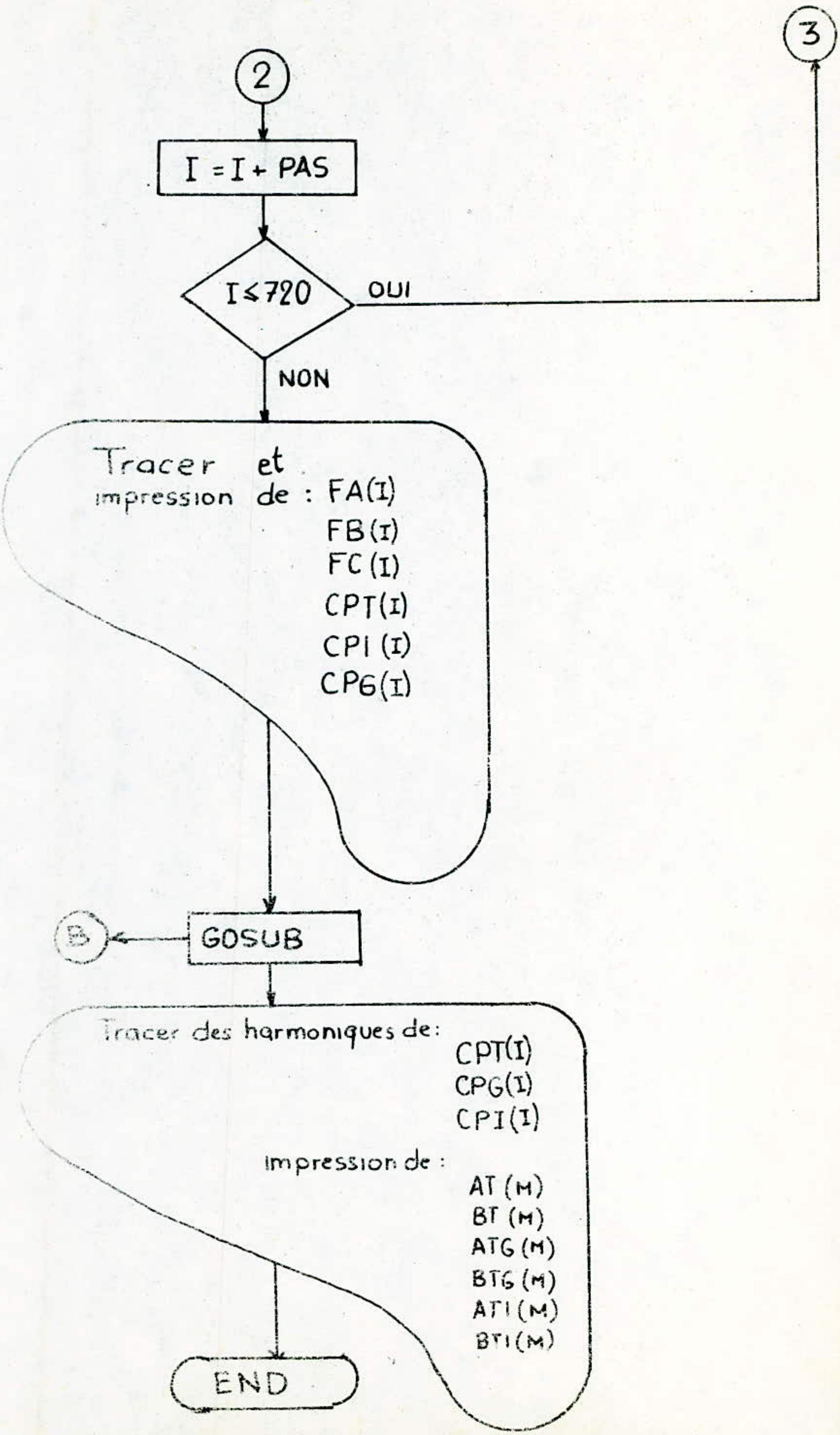
* polythropique $$P = P_t . \left(\frac{V_t}{V}\right)^{\gamma d}$$

_ Echappement $P_E = 1.1$ à 1.15 bars

6 ORGANIGRAMME




1
CPH = - SQR(1 - SPH^2)
PHP = R*W*COS(TT)/(L*CPH)
PHPP = (PHP^2 - W^2)*SPH/CPH
I ≤ 180
NON
OUI
Calcul de la pression d'admission
I ≤ 360
OUI
Calcul de la pression pendant la compression
NON
X ≤ X1
OUI
Calcul de la pression de fin de combustion
NON
X ≤ X2
OUI
Calcul de la pression pendant la detente isothermique
NON
I ≤ 540
OUI
Calcul de la pression pendant la detente polythropique
NON
Calcul de la pression d'échappement
GOSUB
A
2
3
3


2
3
I = I + PAS
I≤720
OUI
NON
Tracer et
impression de : FA(I)
FB(I)
FC(I)
CPT(I)
CPI(I)
CPG(I)
B
GOSUB
Tracer des harmoniques de:
CPT(I)
CPG(I)
CPI(I)
impression de :
AT(M)
BT(M)
ATG(M)
BTG(M)
ATI(M)
BTI(M)
END

Sous programme (A) :

le sous programme (A) permet de Calculer :

- les efforts XA, XB, XC, YA, YB, FA, FB et FC
- le couple total CPT
- le couple du a la pression des gaz CPG
- le couple du aux inertie CPI

Sous programme (B) :

dans ce sous programme on calcule les amplitudes (coefficients de Fourier) des harmoniques du :

- Couple total
- Couple du aux gaz
- Couple d'inertie

Notations utilisées dans L'organigramme :

les notations utilisées dans cette organigramme autre que celle qui ont deja été definie sont :

PAS : pas de calcul

CR : la course du piston

DA : l'alesage du piston

ES : ε le taux de compression

TT : l'angle θ exprimé en radian

SPH = $\sin\varphi$

CPH = $\cos\varphi$

PHP = $\dot{\varphi}$

PHPP = $\ddot{\varphi}$

W = ω

X1 = L'abscisse du piston au point de fin combustion compté a partir de P.M.H

X2 = L'abscisse correspondant a la fin de la detente isothermique

CONCLUSION

Ce projet de fin d'etude, à pour thème le calcul des actions mecaniques mecaniques dans l'embiellage d'un moteur à l'aide de methodes elaborées, telque, la methode de la bielle fictive et la methode vectorielle, Cette derniere est plus rigoureuse que la première et s'adapte très bien à une exploitation par ordinateur.

Pour terminer cette etude, il nous a semblé interessant, de verifier le travail effectué par une application sur un moteur bien particulier fabriqué par la C.I.MO.TRA de type F4L912. En fin de compte, les resultats ainsi obtenus sont en accord avec les données theoriques et pratiques et offrent de divers possibilités d'exploitation, entre autre le dimensionnement du systeme bielle-manivelle.

En outre pour ramener a bien cette application, on a jugé bon de presenter les resultats sous forme de courbes et de diagrammes pouvant etre directement utilises pour dimensionner ls differents elements; ainsi, par exemple, les diagrammes polaires, qui comportent sous une forme ramassee les informations concernant l'intensité et la direction des efforts, nous permettent d'une part de dimensionner l'axe du piston, la bielle et le coussinet, à partir des intensités de l'effort maximal et de l'effort moyen, et d'autre part d'envisager les trous d'arrivée d'huile de graissage, ceci est surtout rendu possible grace à la connaissance de la direction des efforts.

L'etude dynamique d'un moteur et un domaine très vaste et à elle seule pourrait constituer l'objet de plusieurs projets de fin d'etudes, notre etude s'est limitée au systeme bielle-manivelle ; toutefois on pourrait concevoir des suites possibles tel que :

- Etude dynamique du systeme bielle-manivelle pour un moteur en etoile.
- Dimensionnement et graissage du piston.

Esperons que ce modeste travail puisse enrichir la comprehension sur l'etude dynamique des systeme-bielle-manivelle et ainsi contribuer à agrondir le domaine sur l'etude dynamique du moteur.

ANNEXE

APPLICATION SUR UN MOTEUR F4L912

Afin de mettre le programme en evidence on a fait une application sur un moteur F4L912. Ce type de moteur est fabriqué par La C.MO.TRA (Complexe moteurs_tracteurs) à CONSTANTINE

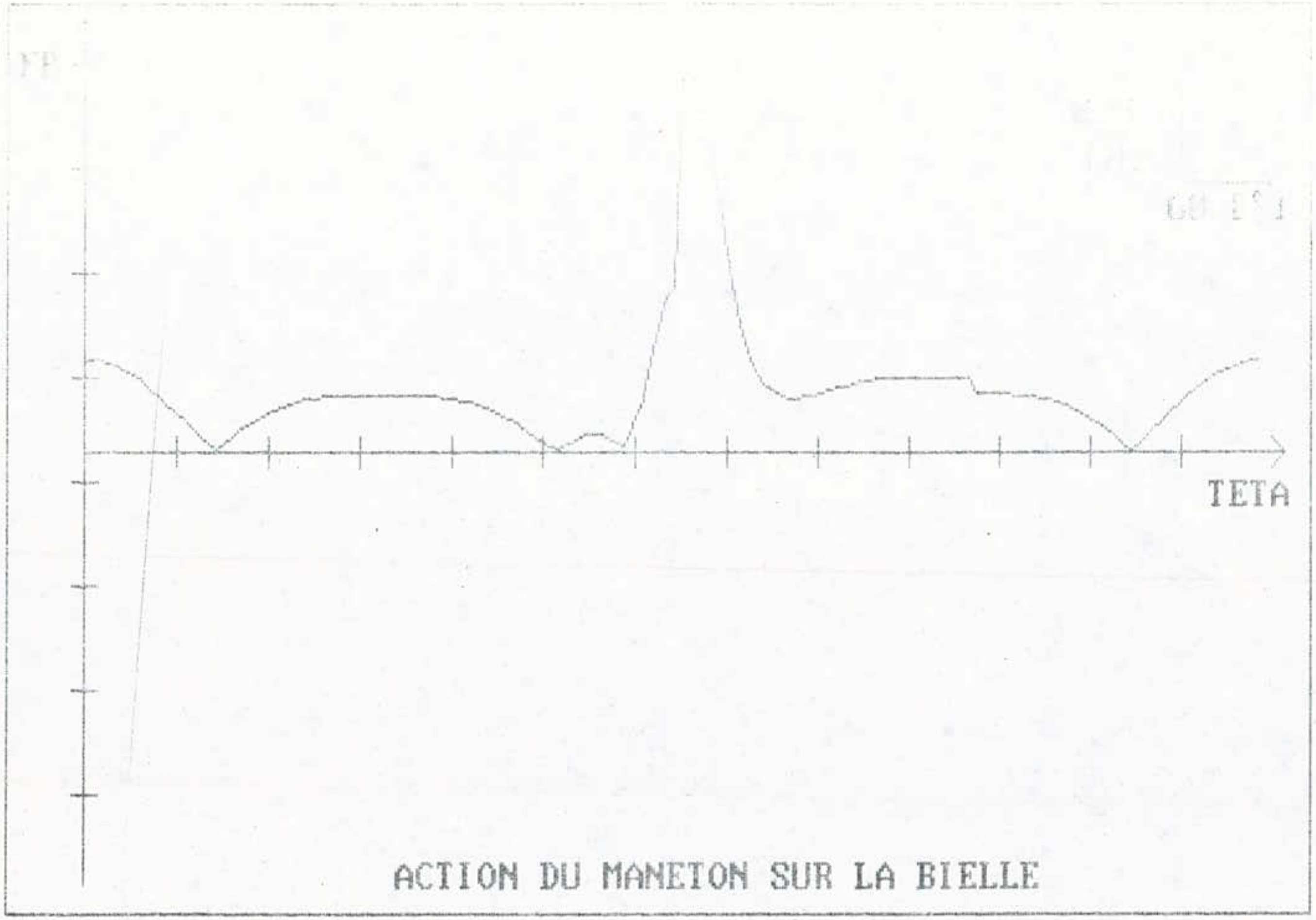
les données qui nous ont été fournis par Cette Societé Sont :

- La masse du piston et ses accessoires $m_p = 1.635$ kg
- La masse de la bielle $m_b = 1.700$ kg
- Le taux de compression $\varepsilon = 17$
- L'alesage du piston $D = 0.1$ m
- La Course du piston $C = 0.12$ m

Resultas : (voir pages suivantes)

Les resultats sont données sous formes de Courbes.

- pour les efforts les courbes sont tracées en coordonnées cartesiennes et en coordonnées polaires.
- pour le couple on a tracé le couple du a la pression des gaz le couple du aux inerties des pieces en mouvement, le couple total et les amplitudes de leurs harmoniques


FP
TETA
ACTION DU MANETON SUR LA BIELLE

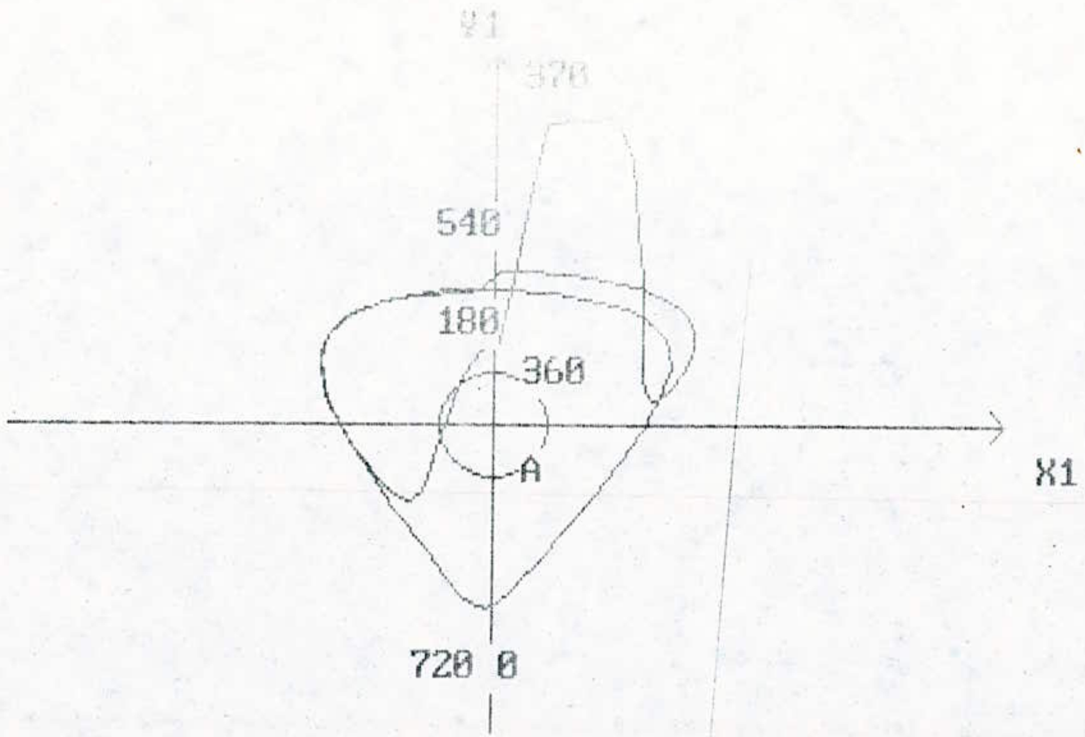
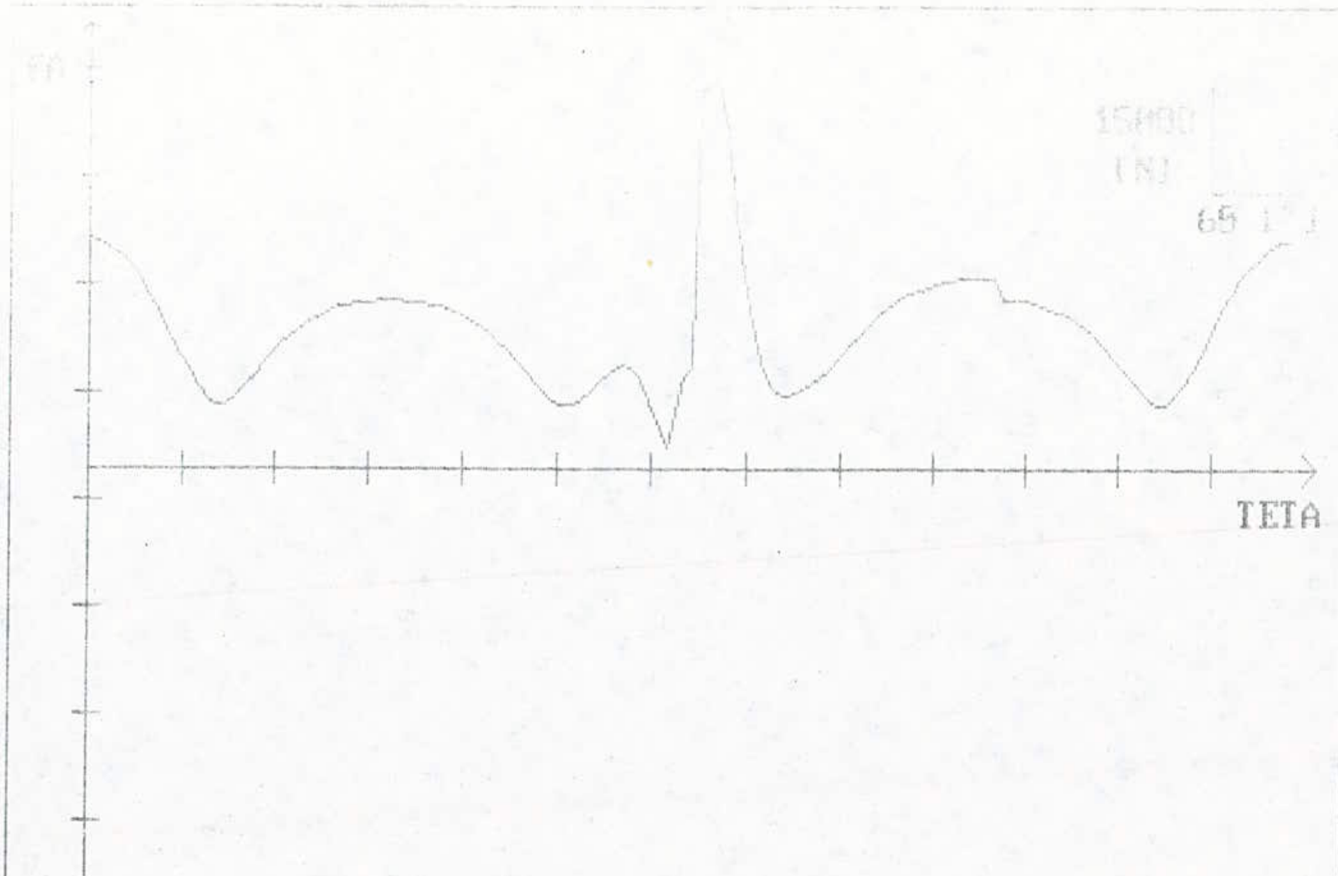
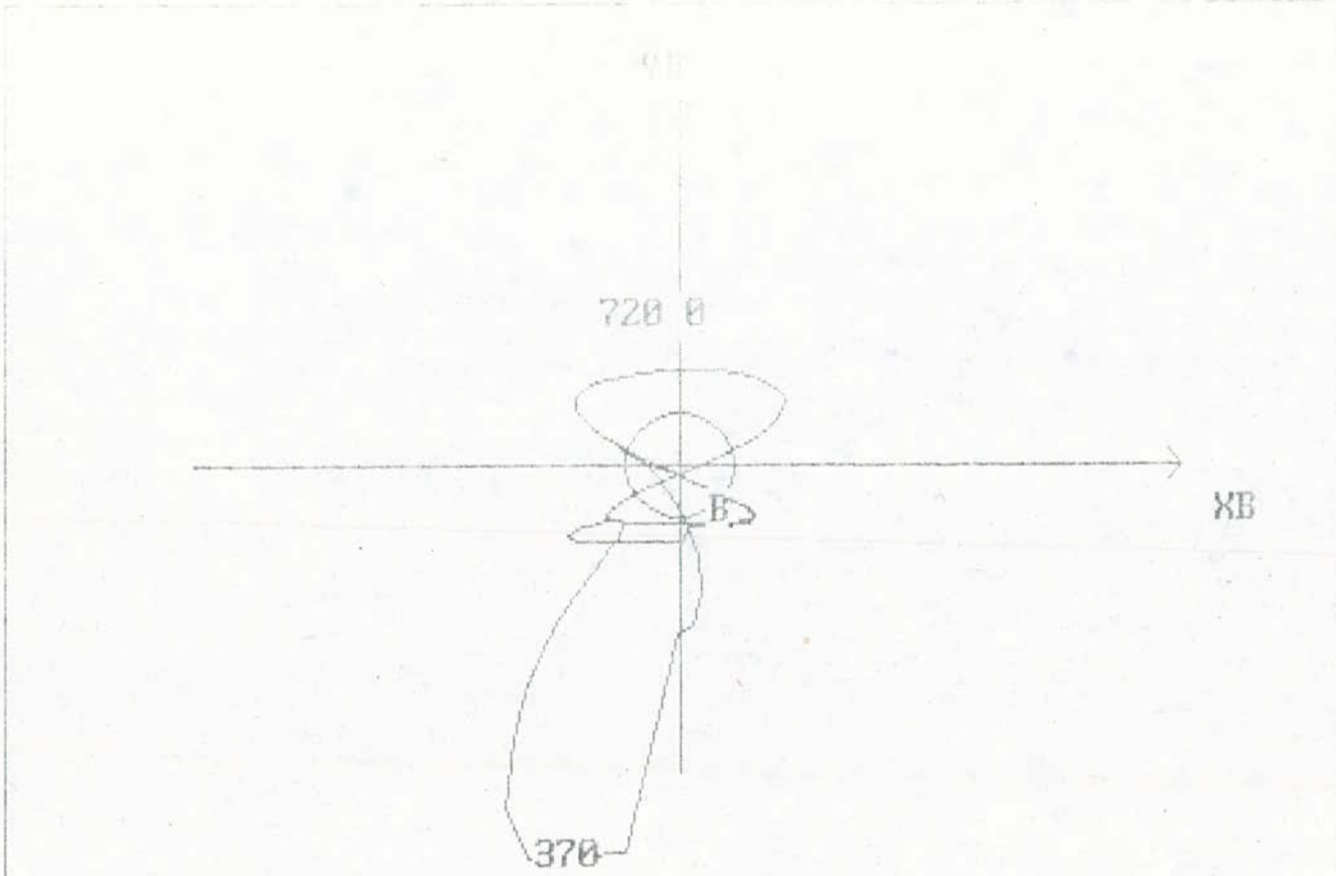


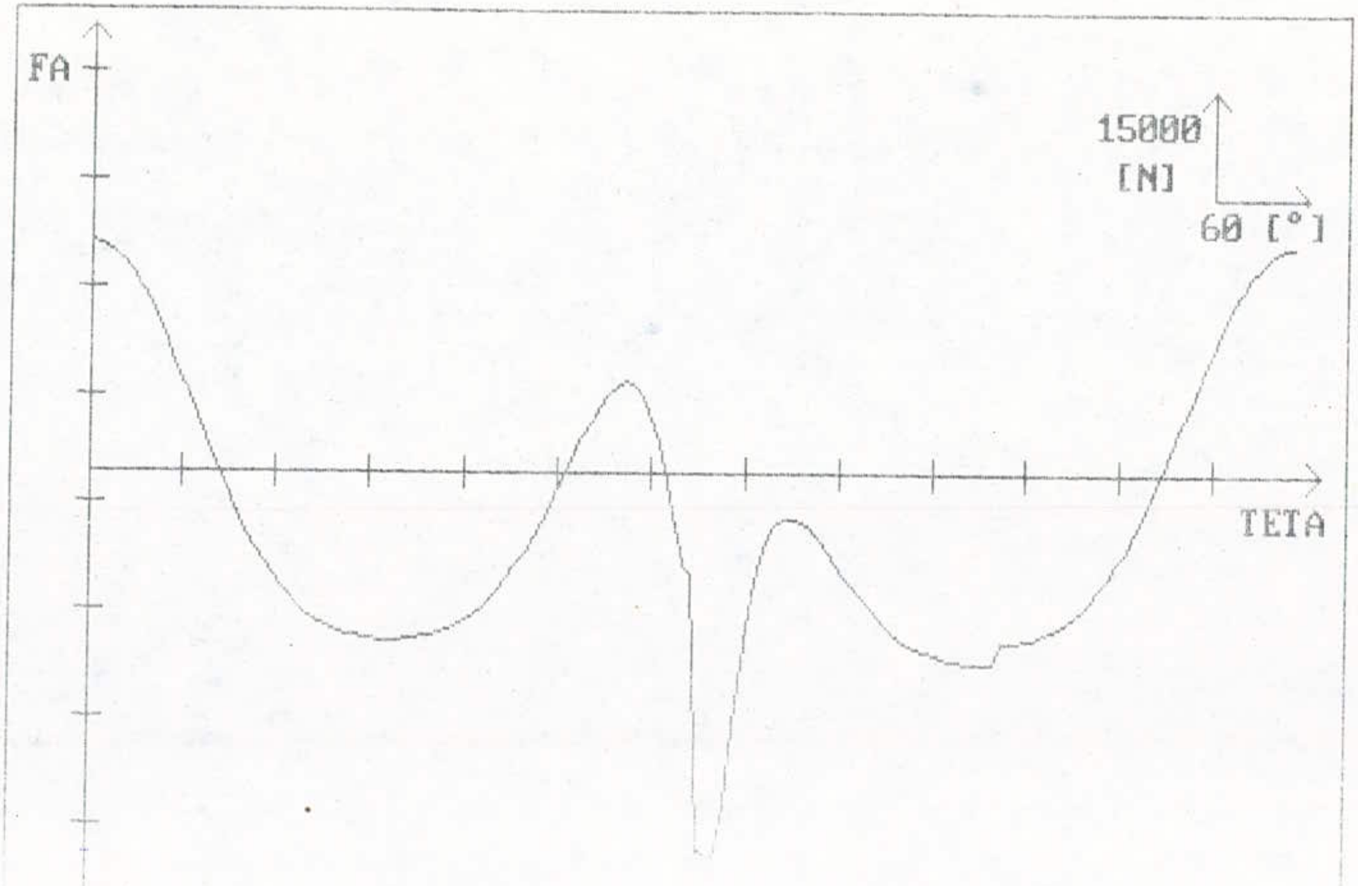
DIAGRAMME POLAIRE DE FA DANS LE REPERE
LIE AU MANETON



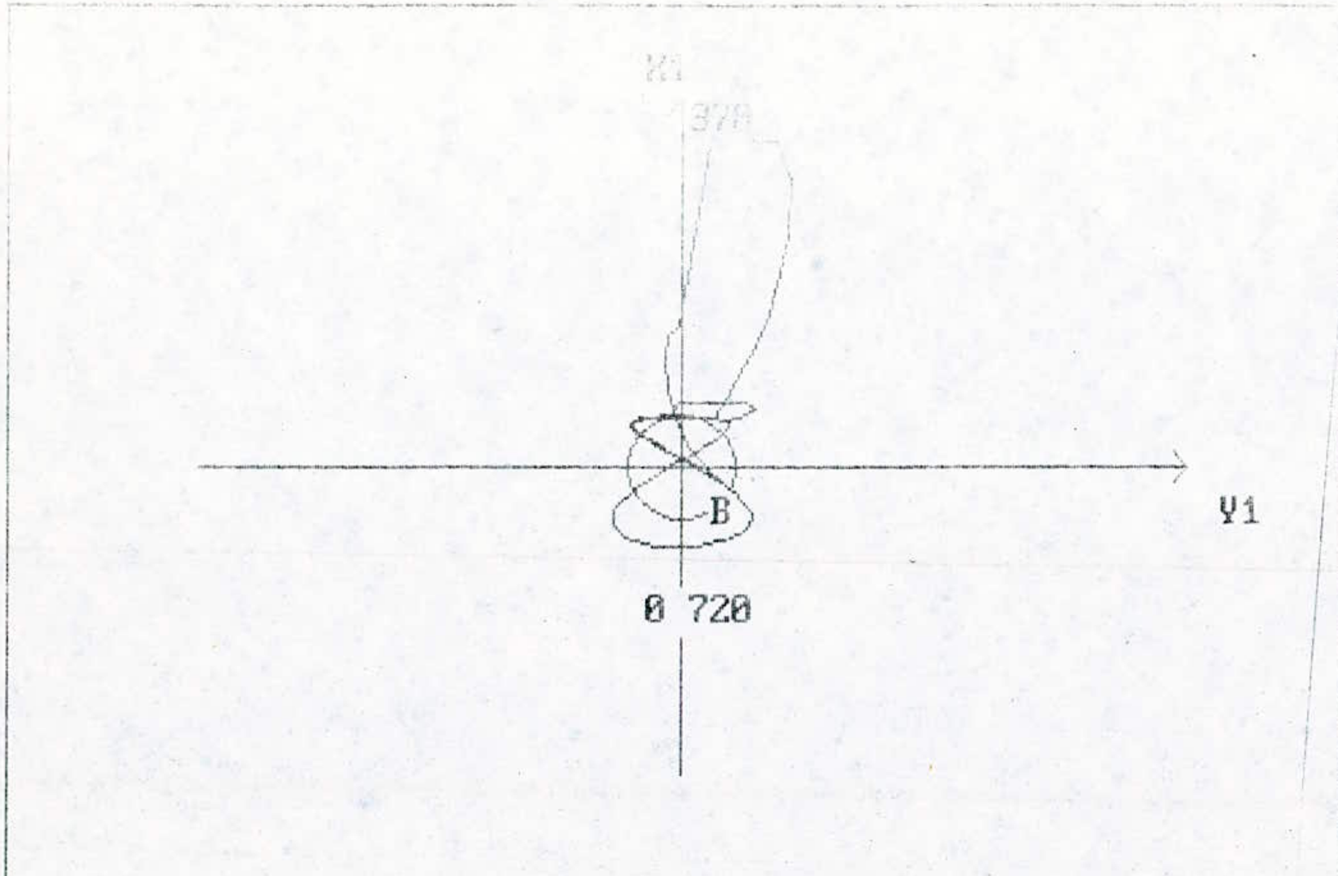
ACTION DE LA BIELLE SUR L'AXE DU PISTON



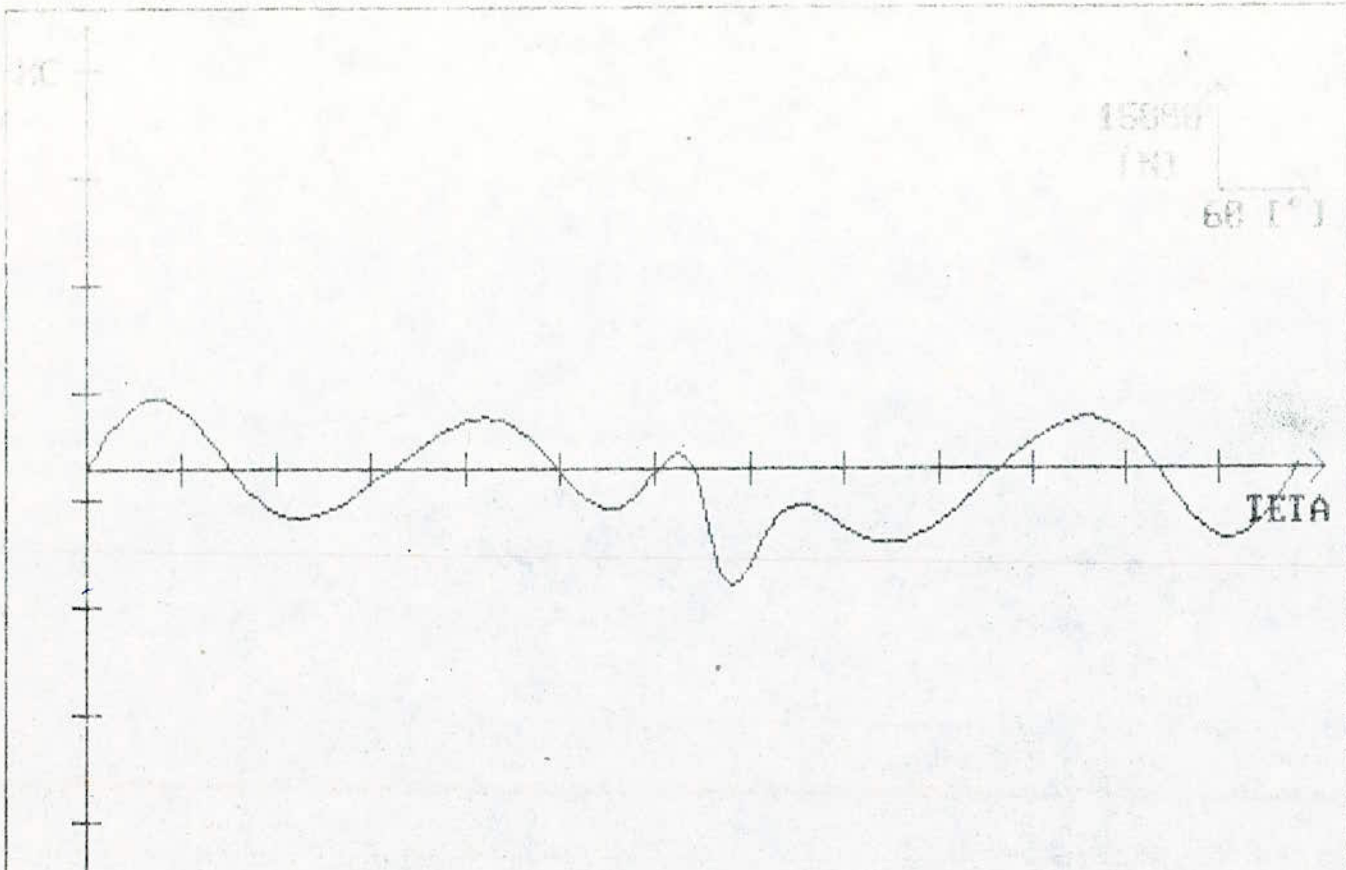
DIAGRAAMME POLAIRE DE L'EFFORT FB SUR L'AXE DU PISTON



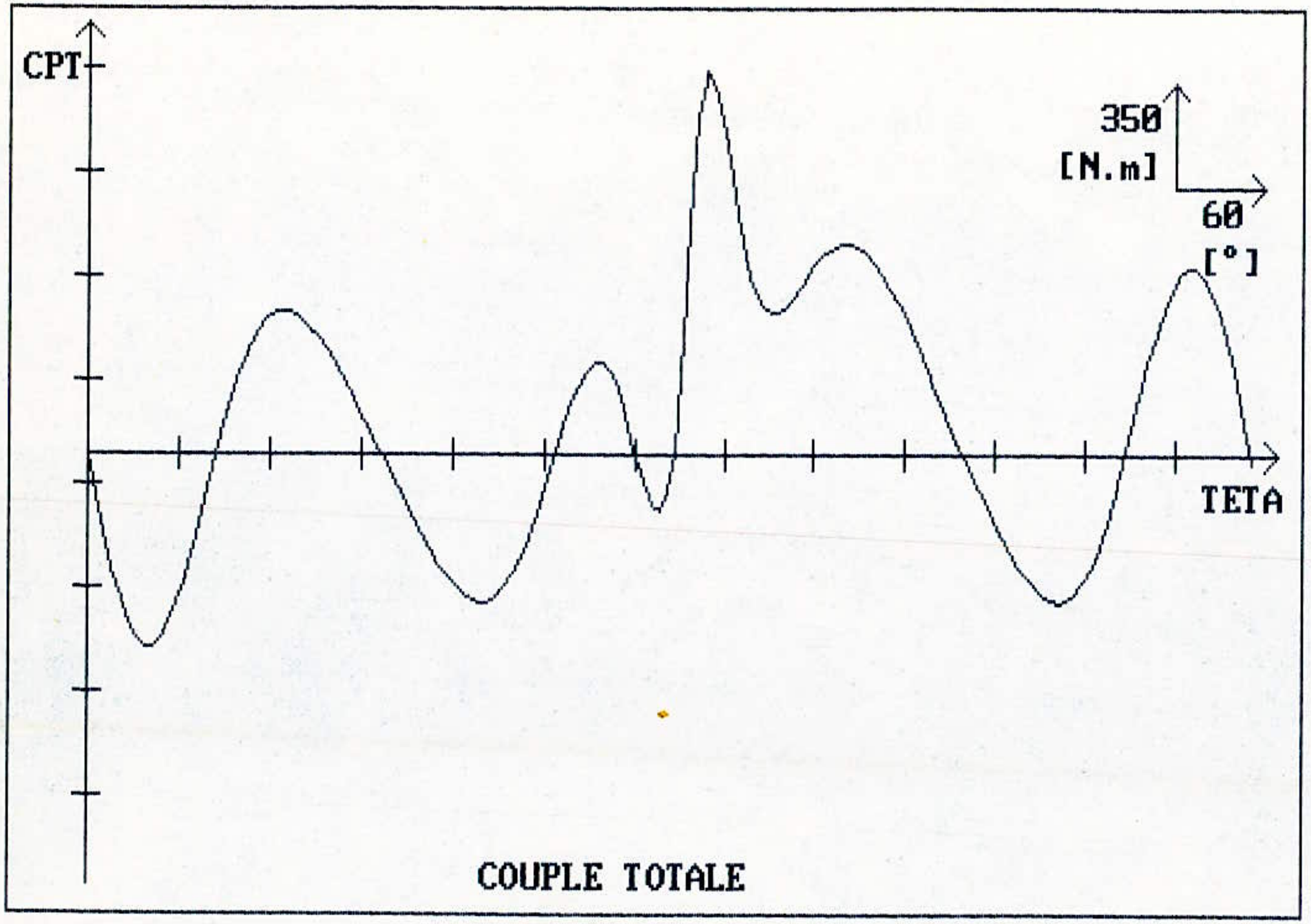
ACTION DE LA BIELLE SUR LE PISTON

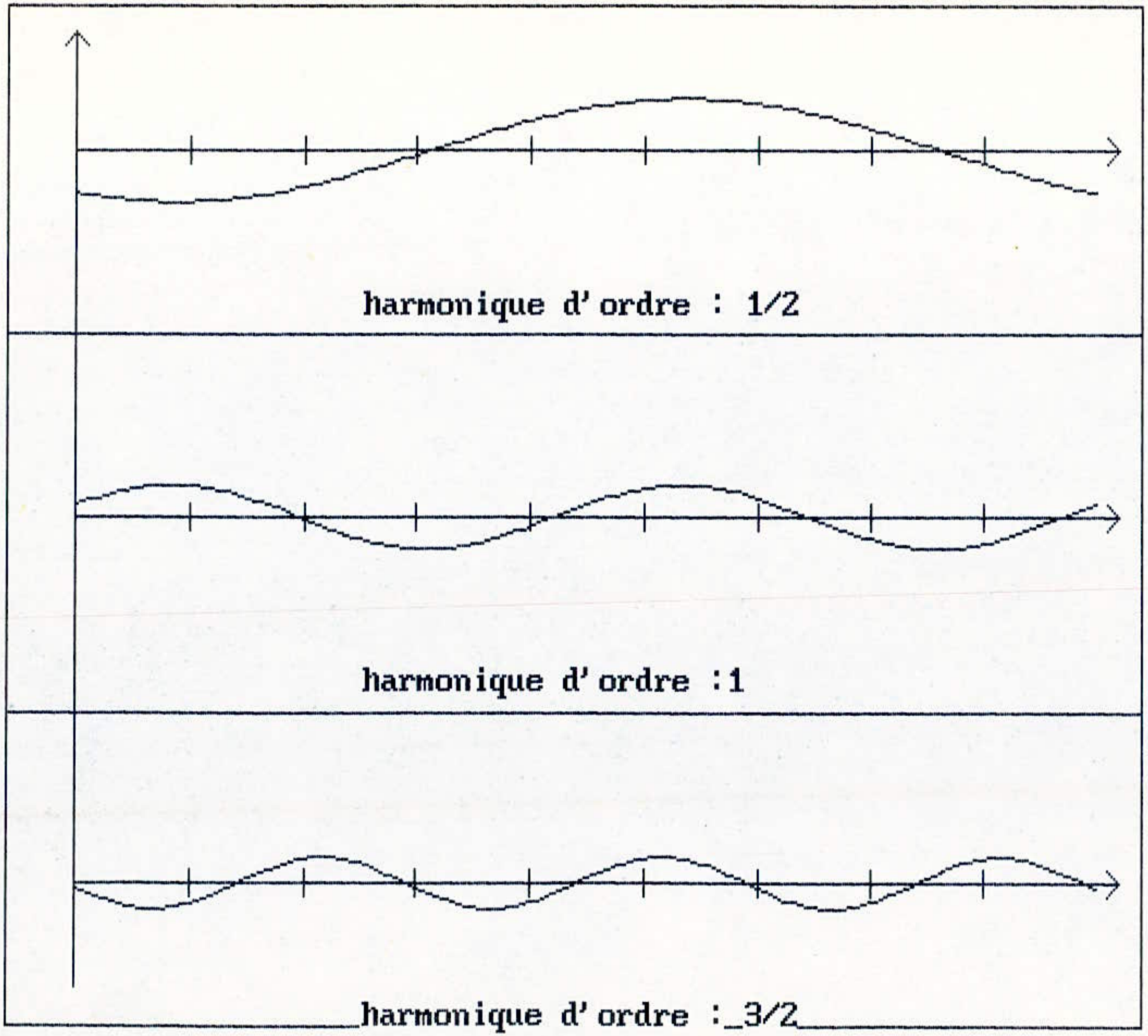


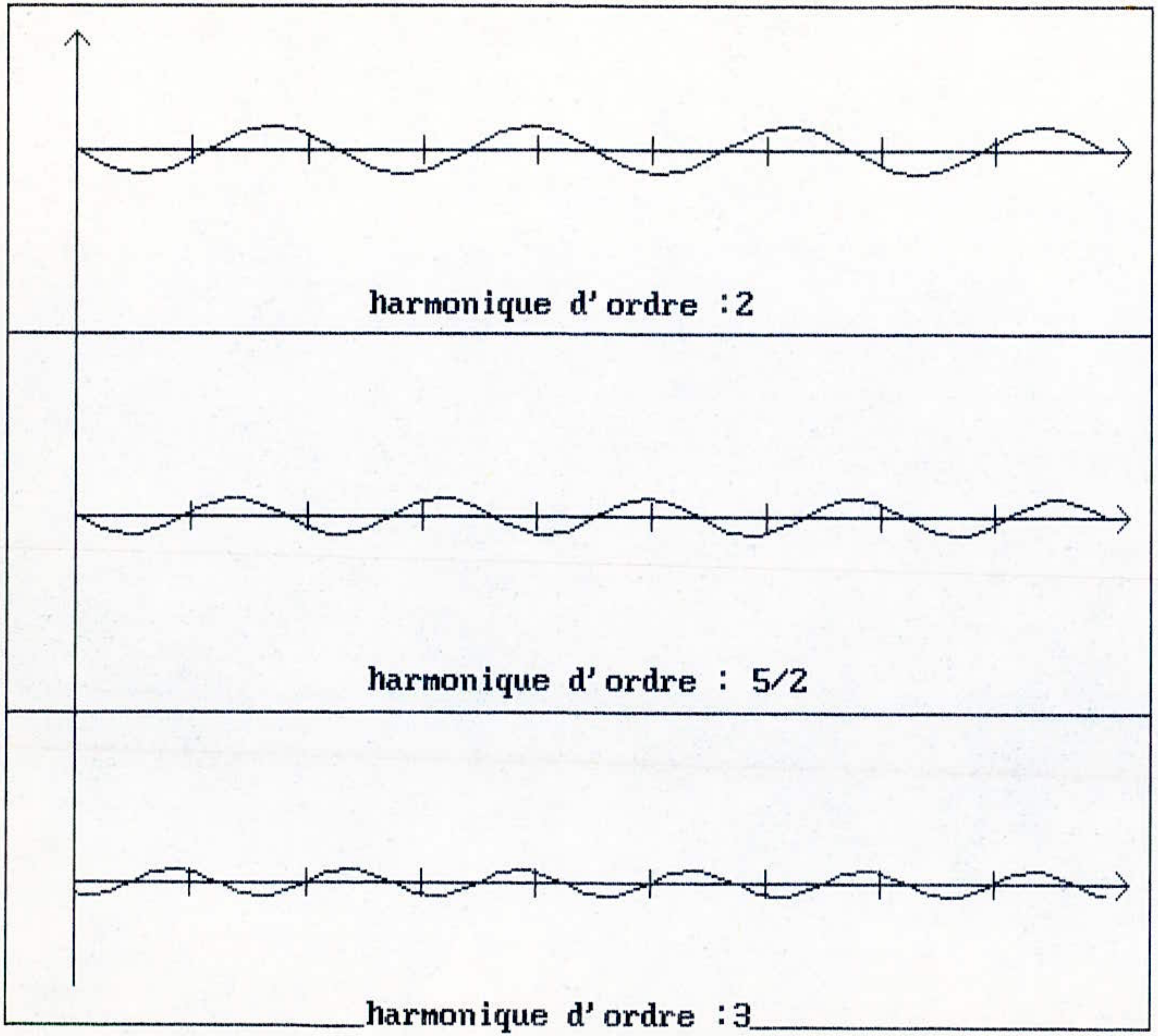
COURBE POLAIRE DE FB DANS LE REPERE LIE A LA BIELLE

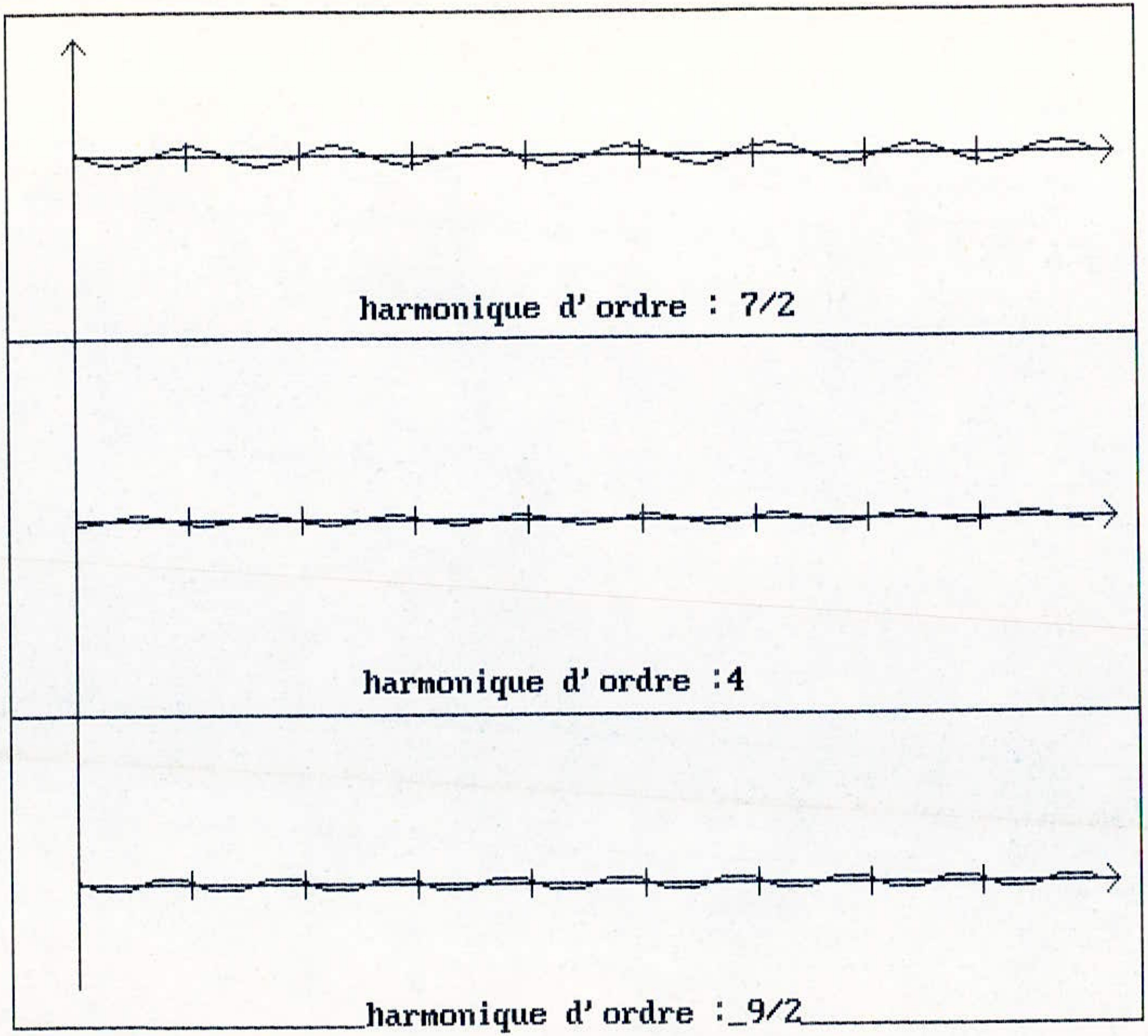


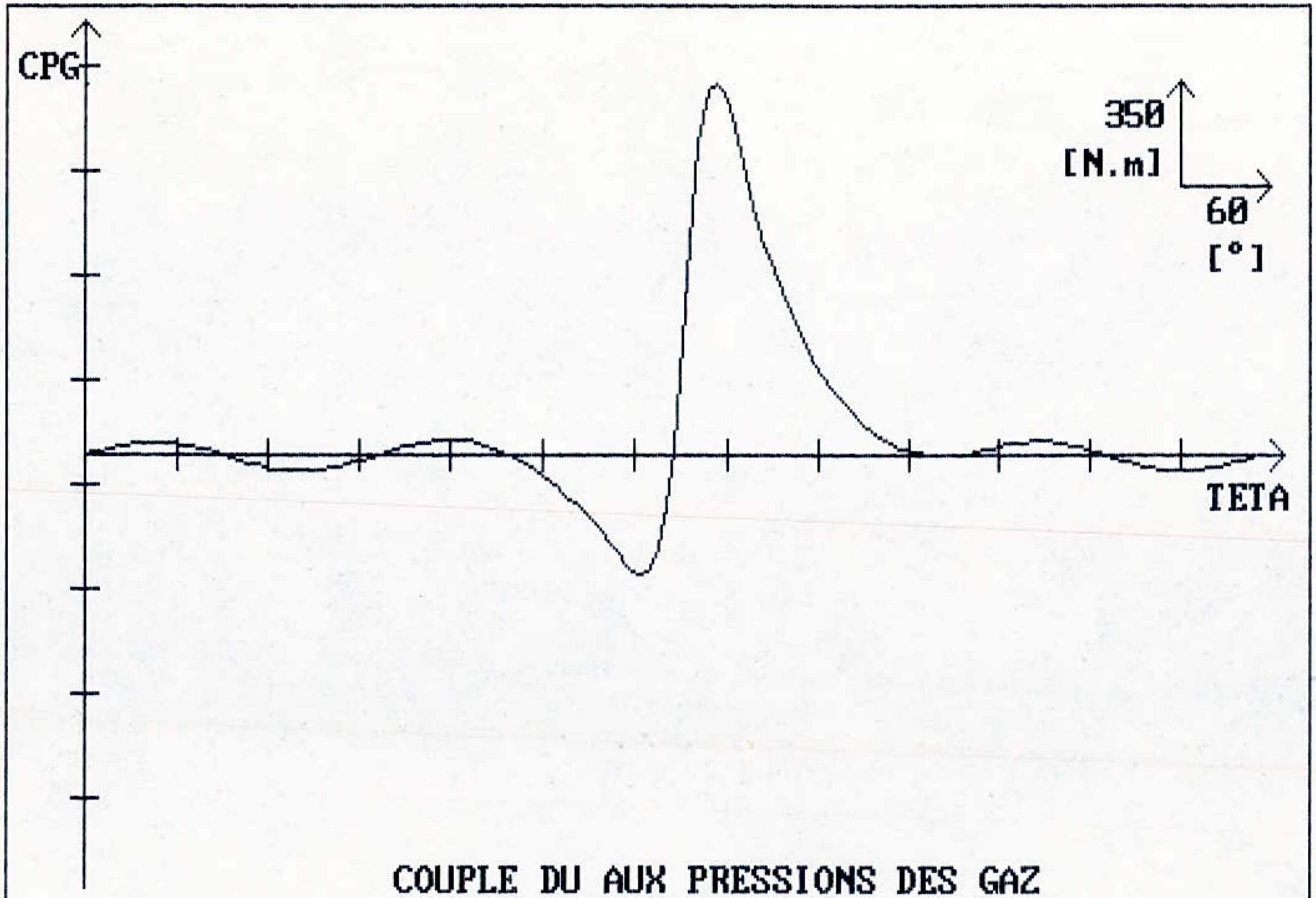
ACTION DE LA CHEMISE SUR LE PISTON


CPT
350
[N.m]
60
[°]
TETA
COUPLE TOTALE

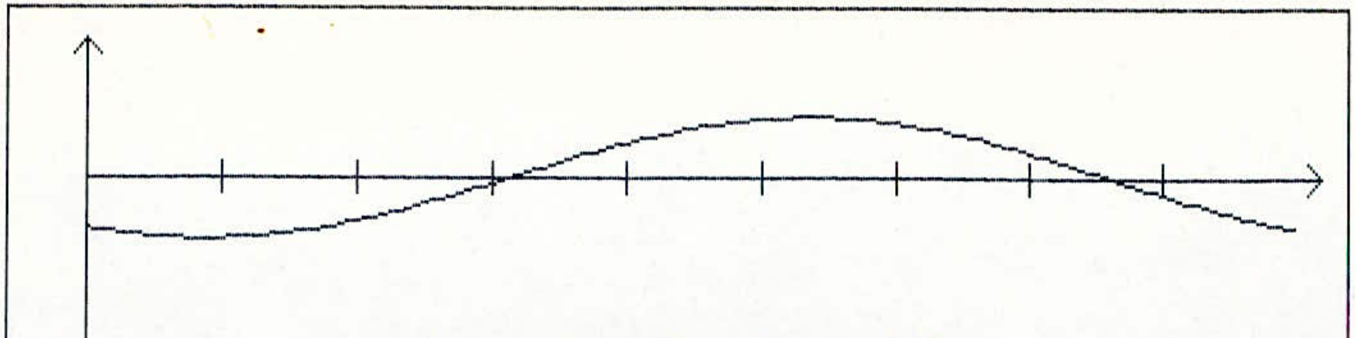

harmonique d' ordre : 1/2
harmonique d' ordre :1
harmonique d' ordre :_3/2


harmonique d'ordre :2
harmonique d'ordre : 5/2
harmonique d'ordre :3

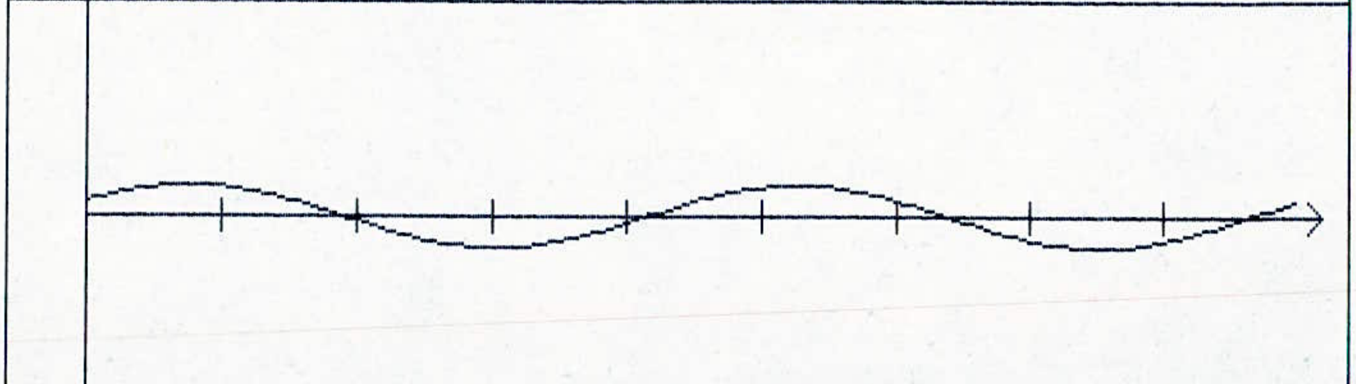

harmonique d' ordre : 7/2
harmonique d' ordre :4
harmonique d' ordre :_9/2



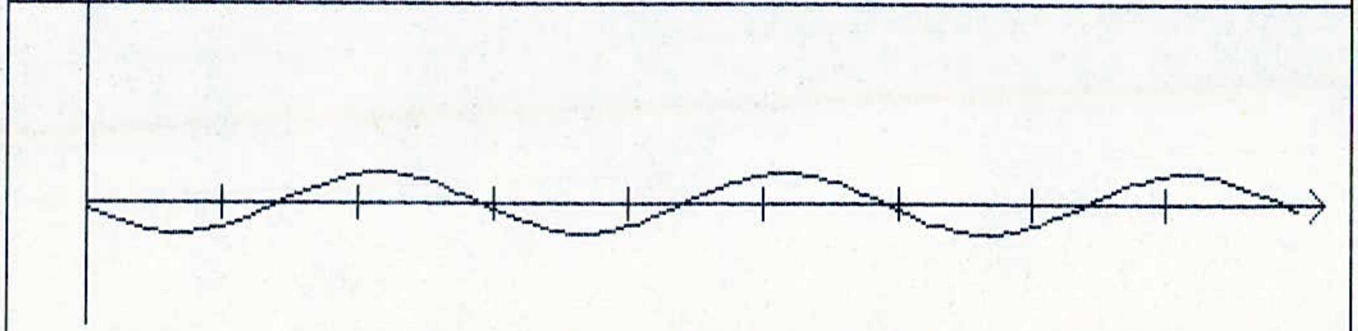
COUPLE DU AUX PRESSIONS DES GAZ



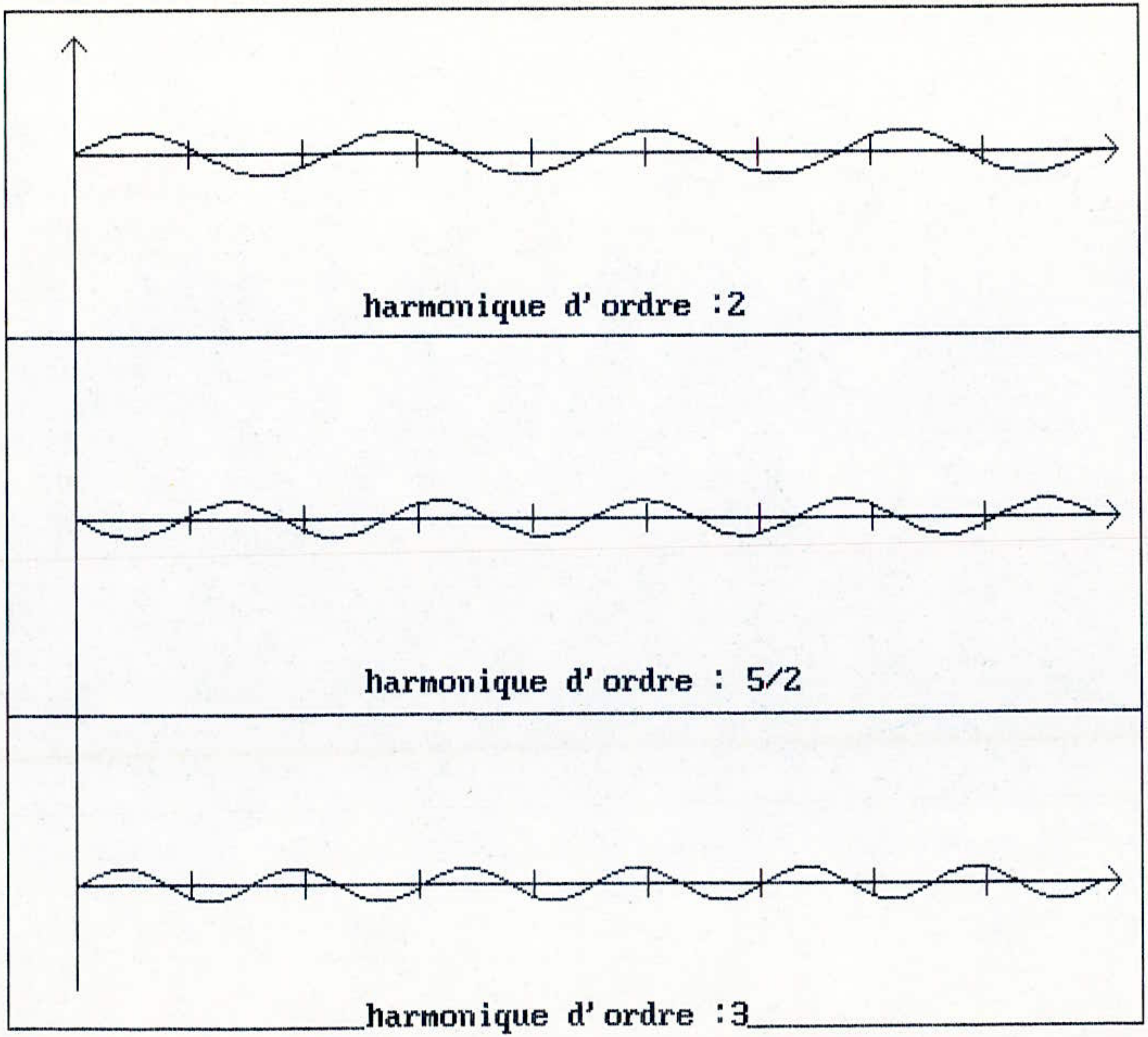
harmonique d'ordre : 1/2



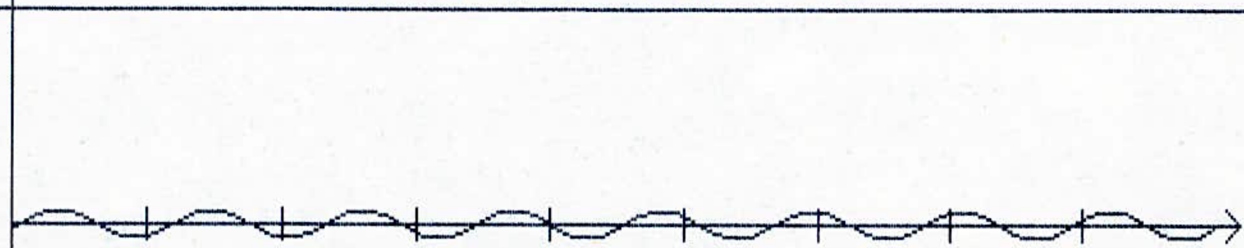
harmonique d'ordre :1



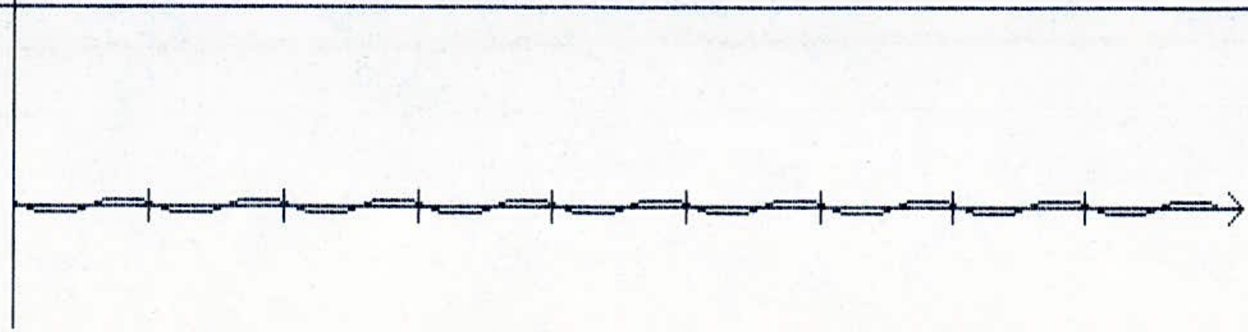
harmonique d'ordre :_3/2


harmonique d'ordre :2
harmonique d'ordre : 5/2
harmonique d'ordre :3

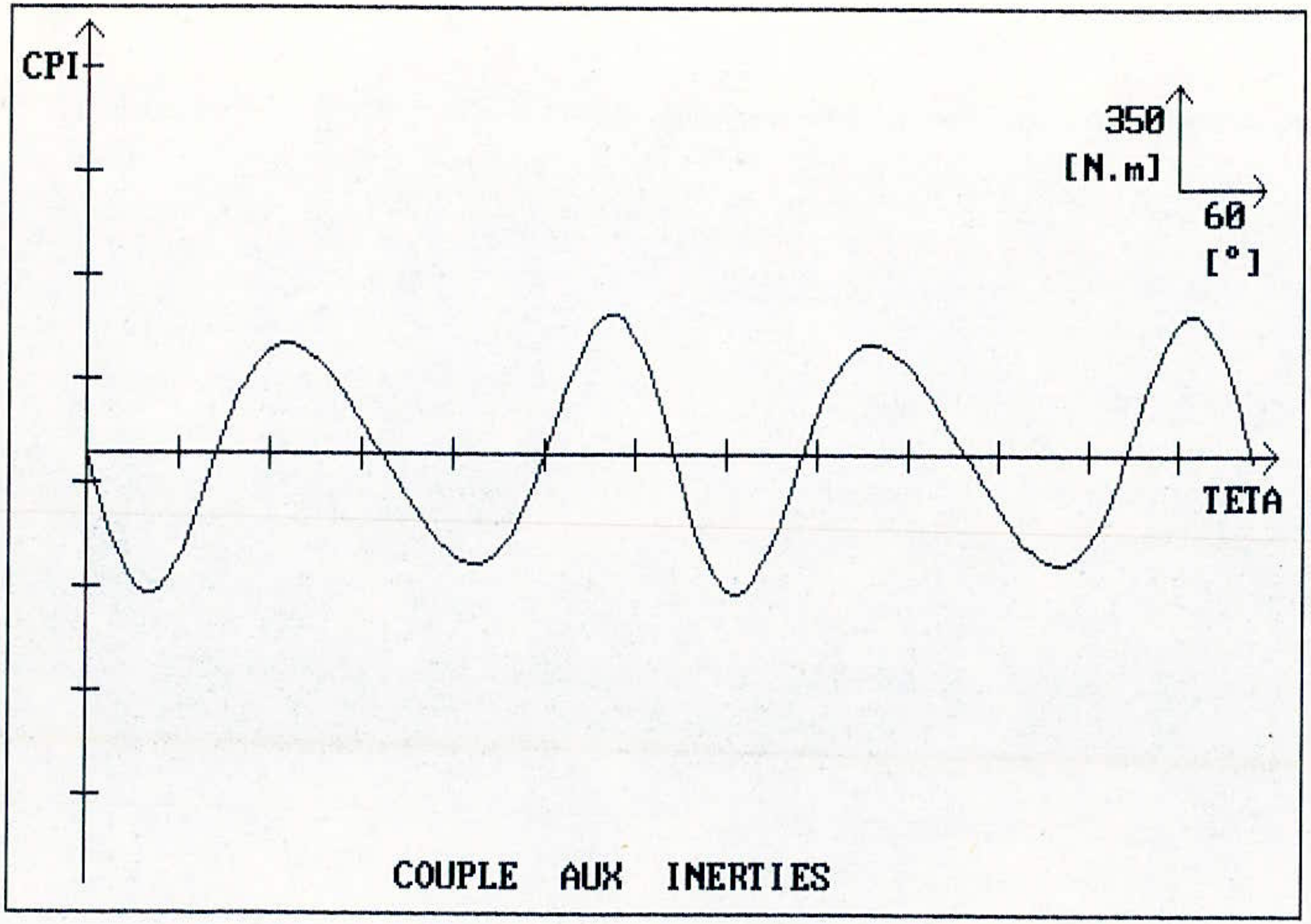
harmonique d'ordre : 7/2



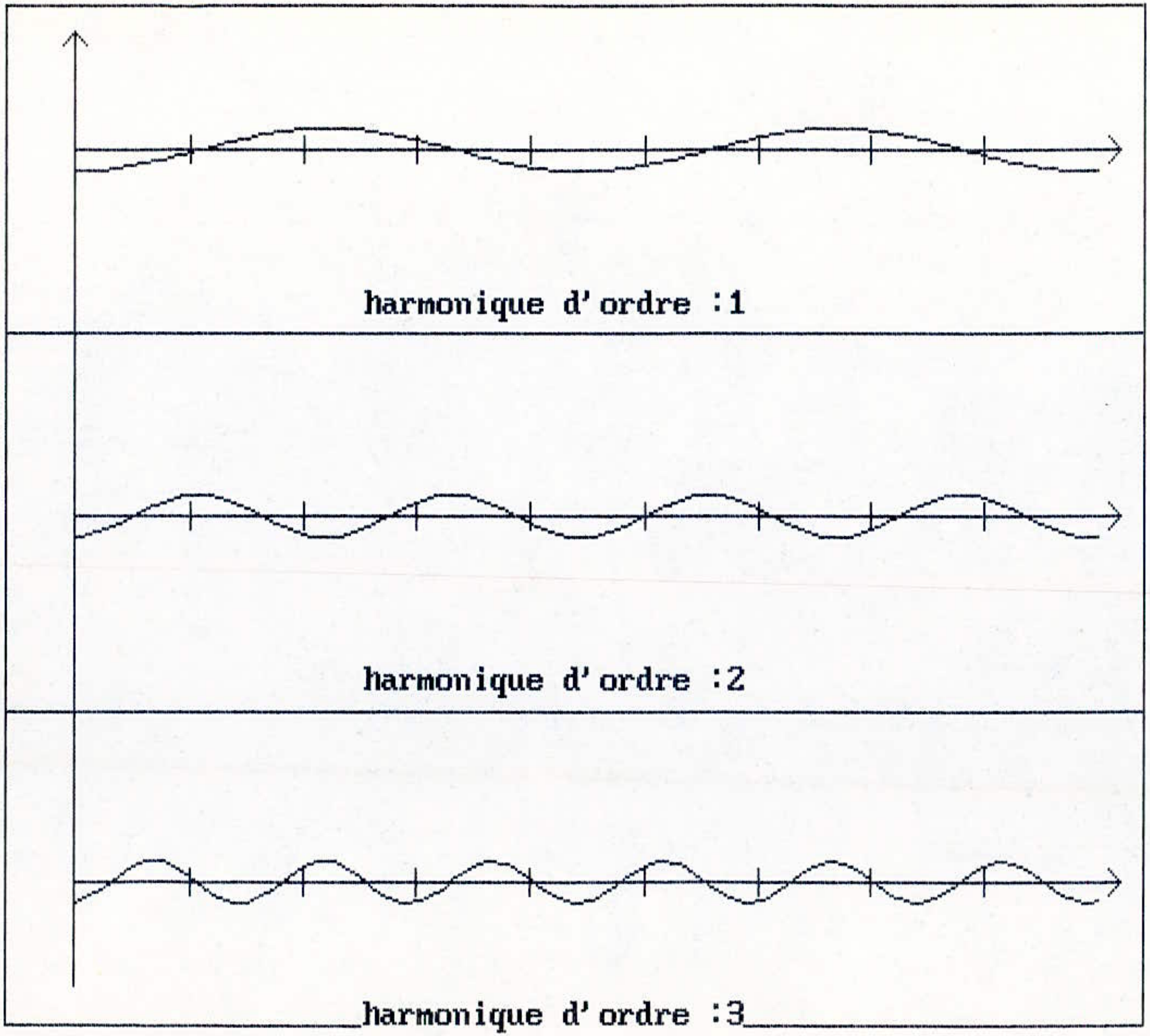
harmonique d'ordre :4

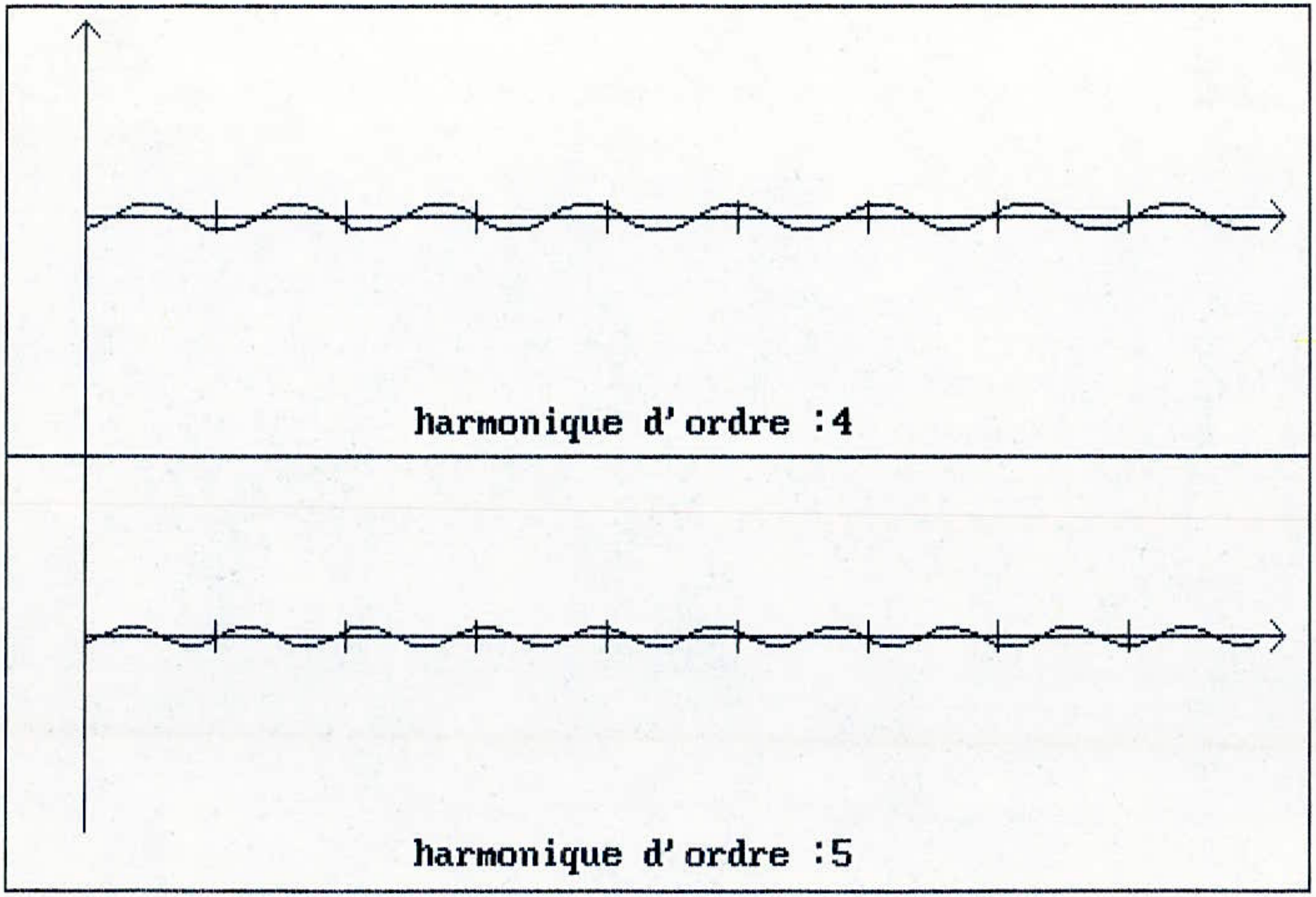


harmonique d'ordre :_9/2



COUPLE AUX INERTIES


harmonique d'ordre :1
harmonique d'ordre :2
harmonique d'ordre :3


harmonique d'ordre :4
harmonique d'ordre :5

Interpretation des resultats:

Coubes des efforts:

Nous voyons sur ces courbes que pour l'angle de rotation du vilebrequin θ compris entre 360 et 400° l'effort est maximal, ceci est en accord avec la realité, car dans cette zone on a la phase combustion : c'est la phase ou la pression est maximale la valeur de cette pression varie entre 40 et 80 bars pour les moteurs diesel.

Courbes du couple :

On note les mêmes observations pour le couple total et le couple du aux gaz que pour les efforts, ces couples atteingnent leurs valeurs maximales dans la phase combustion, ce.ci est aussi normale car ces derniers dependent de la pression.
pour le couple du aux inerties on observe une evolution sinusoidale ce ci est justifie par le fait que ce dernier ne depend pas de la pression et que la force d'inertie presente une allure sinusoïdale en fonction de l'angle θ.

Amplitude des harmoniques du couple

pour les trois couples, couple du aux gaz, couple du aux inerties on observe la decroissance de l'amplitude des harmoniques et se termine par valeur presque nulle pour l'harmonique d'ordre 9/2 ce qui justifie le choix du nombre d'harmoniques.

BIBLIOGRAPHIE

1. M.SERRUYS Moteur a combustion interne
   Etude de la realisation mecanique du moteur
   Edition scientifique RIBER

2. B.SWOBODA Mecanique des moteurs alternatifs
   Societé des editions technip

3. M.BOUKABACHE Etude des vibrations de torsion de groupe
   moto-propulseur des camion S.N.V.I-SONACOME
   Memoire de magistere 1982

4. M. MENARDON Les moteurs
   D.JOLIVET Chotard et associes editeurs

5. H.MEMETAU Technologie fonctionnel de l'automobile
   DUNOD

6. R.ROUDIL Les moteurs diesel
   DUNOD

7. MURAY Analyse de Fourier
   R.SPIEGEL serie schaum

8. J. LAMOITIER Le BASIC par la pratique
   SYBEX

9. QUILLET Encyclopedie des sciences industrielles