



Ecole Nationale Polytechnique d'Alger  
Département d'Automatique  
Laboratoire de Commande des Processus



THESE DE DOCTORAT  
en  
Génie Electrique

**Option : Automatique**

Présentée par

**BOUBAKIR AHSENE**

Magistère en Contrôle et Commande de l'EMP d'Alger

**Intitulée**

**Contribution à la Commande Sans Modèle  
des Systèmes Non Linéaires avec Applications**

Soutenue publiquement le 16 Octobre 2014 devant le jury composé de :

<b>Président</b>	M. Boukhetala Djamel	Professeur à l'ENP
<b>Directeur</b>	M. Labiod Salim	Professeur à l'université de Jijel
<b>Co-directeur</b>	M. Boudjema Fares	Professeur à l'ENP
<b>Examineurs</b>	M. Attari Mokhtar	Professeur à l'USTHB
	M. Hamerlain Mustapha	Directeur de Recherche au CDTA
	M. Chettibi Taha	Professeur à l'EMP

**ENP 2014**

## ملخص :

إن تصميم إستراتيجيات التحكم الجديدة التي لا تتطلب نموذج معرفة للنظام لا تزال تجذب إهتمام الباحثين في مجال التحكم الآلي. و هذه المذكرة تدرج في هذا التوجه الجديد حيث نقدم أنظمة تحكم دون نموذج، مستقرة وبسيطة للتطبيق. أولاً، نقترح قانوناً للتحكم PID تلاؤمي و مستقر لأنظمة غير خطية متعددة المداخل والمخارج. ثم نقترح طريقة للتحكم القوي دون نموذج تعتمد على مراقب وهذا من أجل فئة أخرى من الأنظمة غير الخطية متعددة المداخل والمخارج. فيما يخص طريقة التحكم الثالثة المقترحة هي عبارة عن قانون خطي تلاؤمي مستقر لفئة من الأنظمة غير الخطية وحيدة المدخل والمخرج. كذلك قمنا بتطوير قانون للتحكم الغامض التلاؤمي وطريقة للتحكم PI قوية لفئة من الأنظمة غير الخطية لها ديناميكية الأصفار. كما استعملنا طريقة ليايانونوف لدراسة استقرار طرق التحكم و قوتها. بالإضافة إلي هذا، قمنا بإبراز كفاءة النتائج التجريبية التي حصلنا عليها من تطبيق أنظمة التحكم المقترحة على طائرة هليكوبتر ومحرك بالهواء المضغوط.

**كلمات مفتاحية:** تحكم دون نموذج ، أنظمة غير خطية ، نمذجة ديناميكية ، تحكم تلاؤمي ، تحكم قوي، استقرار ليايانونوف.

## Résumé :

La conception de nouvelles stratégies de commande qui ne nécessitent pas un modèle de connaissance du système à commander ne cesse d'attirer l'attention des chercheurs en automatique. Ce travail de thèse s'inscrit aussi dans cette nouvelle tendance de recherche. Nous présentons des schémas de commande sans modèle, stables et simples à implémenter. Premièrement, une commande PID adaptative stable est proposée pour une classe des systèmes MIMO non linéaires. Ensuite, une commande robuste sans modèle à base d'un observateur est suggérée pour une autre classe des systèmes MIMO non linéaires. Quant au troisième schéma, c'est une loi de commande linéaire adaptative stable pour une classe des systèmes non linéaires SISO. Une commande floue adaptative et une commande PI robuste sont développées pour une classe des systèmes non linéaires avec une dynamique des zéros. L'analyse de la stabilité et de la robustesse des structures de commande proposées est effectuée par l'approche de Lyapunov. En plus, pour montrer leurs performances, des résultats expérimentaux issus de l'application en temps réel de ces schémas de commande sur un simulateur d'hélicoptère à 3DOF et sur un actionneur pneumatique sont présentés.

**Mots clés:** Commande sans modèle, Systèmes non linéaires, Modélisation dynamique, Commande adaptative, Commande robuste, Stabilité de Lyapunov.

## Abstract:

The design of new control strategies that do not require the knowledge of the controlled system dynamic model continues to attract the attention of researchers in automatic control. This thesis is also part of this new trend of research. We present here some model free control schemes, stable and simple to implement. Firstly, a stable adaptive PID control is proposed for a class of nonlinear MIMO systems. Then, a robust model free control with an observer is suggested for another class of nonlinear MIMO systems. The third scheme is a stable linear adaptive control developed for a class of nonlinear SISO systems. An adaptive fuzzy control and a robust PI control are developed also for a class of nonlinear systems with zero dynamics. Stability and robustness analysis of the proposed control schemes are performed by using the Lyapunov synthesis method. In order to show the performances of the proposed control schemes, we give experimental results obtained from the application of these methods in real time to a 3DOF helicopter and to a pneumatic actuator system.

**Key words:** Model free control, Nonlinear systems, Dynamic modeling, Adaptive control, Robust control, Lyapunov stability.

---

# Dedicaces

*À la mémoire de ma chère mère **Ikhlef Oum Essad**... ton absence est de plus en plus insupportable.  
... on dit qu'avec le temps la douleur s'atténue mais pas pour moi...*

---

# Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé conjointement au Laboratoire de Commande des Processus de l'Ecole Nationale Polytechnique (ENP) d'Alger, au Laboratoire d'Automatique de Jijel et à l'Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes (IRCCyN) en France. C'est une expérience qui n'aurait pas pu aboutir sans la contribution, le soutien et les encouragements de nombreuses personnes.

Ce sujet de recherche a été proposé et dirigé par Monsieur **Labiod Salim**, en tant que directeur de thèse, professeur à l'université de Jijel et Monsieur **Boudjema fares**, le co-directeur, professeur à l'ENP. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude pour la confiance qu'ils m'ont accordée en me proposant ce sujet. Un témoignage particulier s'impose envers ces deux personnes qui m'ont tant apporté par leurs rigueurs, leurs orientations, leurs engagements, et leurs disponibilités dans l'encadrement de cette thèse.

Je suis très reconnaissant à Monsieur **Franck Plestan**, professeur à l'Ecole Centrale de Nantes (France), pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire IRCCyN pendant un séjour de 18 mois. Ses conseils judicieux et bienveillants ainsi que les nombreuses discussions scientifiques fructueuses que nous avons pu avoir étaient très bénéfiques pour ce travail. Je tiens à lui exprimer toute mon amitié et ma profonde gratitude.

C'est un honneur pour moi d'adresser mes remerciements aux membres du jury pour le temps et l'attention qu'ils ont consacré à la lecture et à la critique de ce travail.

Que Monsieur **Djamel Boukhetala**, professeur à l'ENP, trouve ici mes sincères remerciements pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance.

Je remercie chaleureusement Monsieur **Mokhtar Attari**, professeur à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (USTHB), Monsieur **Mustapha Hamerlain**, directeur de recherche au Centre de Développement des Technologies Avancées (CDTA) et Monsieur **Taha Chettibi** professeur à l'Ecole Militaire Polytechnique (EMP) d'Alger pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de l'examiner.

Ça serait ingrat de ma part de terminer ce témoignage sans me souvenir de ceux qui ont contribué, par leurs encouragements, leur soutien moral, à l'aboutissement de cette thèse. Je veux parler ici de tous les membres de ma famille, de tous mes collègues à l'université de Jijel, et de tous mes amis qui se reconnaîtront dans ces mots.

---

# Table des matières

---

<b>Dedicaces</b>	<b>ii</b>
<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>viii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'art et notions introductives sur la commande sans modèle</b>	<b>5</b>
1.1. Introduction . . . . .	5
1.2. Concept de la commande sans modèle . . . . .	5
1.3. Étude bibliographique sur la commande sans modèle . . . . .	6
1.3.1. Commande sans modèle à base de la logique floue . . . . .	6
1.3.2. Commande sans modèle à base des réseaux de neurones . . . . .	7
1.3.3. Commande sans modèle à base de l'identification instantanée . . . . .	8
1.3.4. Commandes sans modèle robustes . . . . .	10
1.3.5. Autres approches de commande sans modèle . . . . .	10
1.4. Concepts élémentaires sur la stabilité des systèmes physiques . . . . .	11
1.4.1. Équilibre stable . . . . .	12
1.4.2. Équilibre uniformément stable . . . . .	12
1.4.3. Stabilité UUB . . . . .	12
1.4.4. Équilibre attractif . . . . .	12
1.4.5. Équilibre asymptotiquement stable . . . . .	13
1.4.6. Équilibre exponentiellement stable . . . . .	13
1.5. Méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes . . . . .	13
1.5.1. Méthode indirecte de Lyapunov . . . . .	14
1.5.2. Méthode directe de Lyapunov . . . . .	14
1.5.3. Stabilité Entrée-Etat . . . . .	16
1.6. Quelques notions et outils mathématiques utilisés . . . . .	17
1.6.1. Lemme de Barbalat . . . . .	17
1.6.2. Théorème des fonctions implicites . . . . .	17
1.6.3. Théorème de la valeur moyenne . . . . .	18
1.7. Conclusion . . . . .	18

<b>2</b>	<b>Commande PID adaptative d'une classe des systèmes non linéaires MIMO</b>	<b>20</b>
2.1.	Introduction . . . . .	20
2.2.	Commande PID et les systèmes multivariables : analyse bibliographique . . . . .	21
2.3.	Formulation du problème . . . . .	23
2.4.	Conception de la commande PID adaptative proposée . . . . .	25
2.4.1.	Structure de la loi de commande . . . . .	25
2.4.2.	Conception de la loi d'adaptation . . . . .	26
2.4.3.	Analyse de la stabilité en boucle fermée . . . . .	28
2.5.	Description et modélisation du simulateur d'hélicoptère à 3DOF . . . . .	32
2.5.1.	Présentation générale . . . . .	32
2.5.2.	Équipement et instrumentation . . . . .	33
2.5.3.	Modèle dynamique de l'hélicoptère . . . . .	33
2.5.4.	Analyse bibliographique . . . . .	35
2.6.	Application de la commande PID adaptative à l'hélicoptère à 3DOF . . . . .	35
2.6.1.	Conception d'une commande PID adaptative pour l'hélicoptère à 3DOF . . . . .	36
2.6.2.	Résultats expérimentaux . . . . .	37
2.7.	Conclusion . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Commande sans modèle avec observateur d'une classe des systèmes non linéaires MIMO</b>	<b>42</b>
3.1.	Introduction . . . . .	42
3.2.	Formulation du problème . . . . .	43
3.3.	Conception de la loi de commande sans modèle robuste . . . . .	45
3.4.	Commande sans modèle robuste avec observateur . . . . .	48
3.5.	Commande sans modèle avec observateur appliquée à l'hélicoptère à 3DOF . . . . .	52
3.5.1.	Conception de la loi de commande pour l'hélicoptère à 3DOF . . . . .	52
3.5.2.	Résultats expérimentaux . . . . .	54
3.6.	Conclusion . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Commande linéaire adaptative d'une classe des systèmes SISO non affines</b>	<b>58</b>
4.1.	Introduction . . . . .	58
4.2.	Formulation du problème . . . . .	59
4.3.	Conception de la commande linéaire adaptative . . . . .	61
4.3.1.	Structure de la loi de commande . . . . .	61
4.3.2.	Conception de la loi d'adaptation . . . . .	62
4.3.3.	Analyse de la stabilité en boucle fermée . . . . .	64
4.4.	Description du système électropneumatique . . . . .	67
4.4.1.	Présentation générale . . . . .	68
4.4.2.	Équipement et instrumentation . . . . .	68
4.4.3.	Modélisation du système électropneumatique . . . . .	68
4.4.4.	Analyse bibliographique . . . . .	70
4.5.	Commande linéaire adaptative appliquée au système électropneumatique . . . . .	71
4.5.1.	Conception d'une commande linéaire adaptative pour l'actionneur . . . . .	71

---

4.5.2. Résultats expérimentaux . . . . .	72
4.6. Conclusion . . . . .	75
<b>5 Commandes sans modèle d'une classe des systèmes non linéaires avec une dynamique des zéros</b>	<b>77</b>
5.1. Introduction . . . . .	77
5.2. Formulation du problème . . . . .	78
5.3. Loi de commande PI robuste . . . . .	79
5.3.1. Rappel sur la théorie de perturbation singulière . . . . .	79
5.3.2. Conception d'un contrôleur PI robuste . . . . .	82
5.3.3. Stabilité de la boucle fermée . . . . .	83
5.3.4. Structure équivalente de la loi de commande . . . . .	87
5.4. Commande PI robuste appliquée au système électropneumatique . . . . .	87
5.4.1. Conception d'une commande PI robuste pour le système pneumatique . . . . .	87
5.4.2. Résultats expérimentaux . . . . .	88
5.5. Loi de commande floue adaptative . . . . .	90
5.5.1. Brève description de l'approximateur flou utilisé . . . . .	90
5.5.2. Loi de commande . . . . .	91
5.5.3. Conception de la loi d'adaptation . . . . .	92
5.5.4. Analyse de la stabilité en boucle fermée . . . . .	93
5.6. Commande adaptative floue appliquée au système électropneumatique . . . . .	95
5.6.1. Conception d'une commande adaptative floue pour le système pneumatique . . . . .	95
5.6.2. Résultats expérimentaux . . . . .	96
5.7. Conclusion . . . . .	98
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>99</b>
<b>A Implémentation de la commande linéaire adaptative</b>	<b>102</b>
A.1. Description de l'interface réalisée sous ControlDesk . . . . .	102
<b>B Implémentation de la commande PI robuste</b>	<b>103</b>
B.1. Description de l'interface réalisée sous ControlDesk . . . . .	103
<b>C Implémentation de la commande adaptative floue</b>	<b>104</b>
C.1. Description de l'interface réalisée sous ControlDesk . . . . .	104
<b>Bibliographie</b>	<b>105</b>

---

## Table des figures

---

1.1	Stabilité d'un point d'équilibre. . . . .	12
1.2	Attractivité pour un point d'équilibre. . . . .	12
1.3	Stabilité asymptotique. . . . .	13
1.4	Stabilité exponentielle. . . . .	13
2.1	Vue générale du simulateur d'hélicoptère à 3DOF Quanser. . . . .	32
2.2	Composition et description de l'hélicoptère à 3DOF. . . . .	32
2.3	Schéma de principe de l'installation - Aspects matériels. . . . .	33
2.4	Principales forces agissant sur la dynamique de l'hélicoptère à 3DOF. . . . .	33
2.5	La commande PID adaptative appliquée à l'hélicoptère à 3DOF. . . . .	38
2.6	Trajectoires $\psi(t)$ et $\psi_d(t)$ . . . . .	38
2.7	Trajectoires $\phi(t)$ et $\phi_d(t)$ . . . . .	38
2.8	Trajectoires $\theta(t)$ et $\theta_d(t)$ . . . . .	39
2.9	Tension du moteur avant $V_f$ . . . . .	39
2.10	Tension du moteur arrière $V_b$ . . . . .	39
2.11	Les gains $K_{p_\psi}$ , $K_{I_\psi}$ et $K_{d_\psi}$ . . . . .	39
2.12	Les gains $K_{p_\phi}$ , $K_{I_\phi}$ et $K_{d_\phi}$ . . . . .	39
2.13	Les gains $K_{p_\theta}$ , $K_{I_\theta}$ et $K_{d_\theta}$ . . . . .	39
3.1	Commande sans modèle avec observateur appliquée à l'hélicoptère à 3DOF. . . . .	54
3.2	Trajectoires $\psi(t)$ et $\psi_d(t)$ . . . . .	54
3.3	Trajectoires $\phi(t)$ et $\phi_d(t)$ . . . . .	54
3.4	Trajectoires $\theta(t)$ et $\theta_d(t)$ . . . . .	54
3.5	Tensions de commande $V_f$ et $V_b$ . . . . .	54
3.6	Erreurs d'observation $\hat{e}_\psi$ et $\dot{\hat{e}}_\psi$ . . . . .	55
3.7	Erreurs d'observation $\hat{e}_\phi$ et $\dot{\hat{e}}_\phi$ . . . . .	55
3.8	Erreurs d'observation $\hat{e}_\theta$ et $\dot{\hat{e}}_\theta$ . . . . .	55
3.9	Signal de commande $u_1$ . . . . .	55
3.10	Signal de commande $u_2$ . . . . .	55
3.11	Signal de commande $u_3$ . . . . .	55
4.1	Vue générale du banc d'essais électropneumatique de l'IRCCyN. . . . .	67
4.2	Schéma du banc d'essais. . . . .	67
4.3	Modélisation du banc d'essais électropneumatique. . . . .	69
4.4	La commande linéaire adaptative appliquée au système hydraulique . . . . .	73

4.5	Évolution temporelle de la position du piston $y$ .	73
4.6	Signal de commande $u$ .	73
4.7	Erreur de poursuite résultante.	74
4.8	Force perturbatrice appliquée.	74
4.9	Évolution des gains $K_{e-1}$ , $K_{e-2}$ et $K_{e-3}$ .	74
4.10	Évolution des gains $K_i$ et $K_0$ .	74
4.11	Pression dans la chambre $P$ .	74
4.12	Pression dans la chambre $N$ .	74
5.1	La commande PI robuste appliquée à l'actionneur électropneumatique.	88
5.2	Évolution temporelle de la position du piston $y$ .	89
5.3	Signal de commande $u$ .	89
5.4	Erreur de poursuite résultante.	89
5.5	Force perturbatrice appliquée.	89
5.6	Pression dans la chambre $P$ .	90
5.7	Pression dans la chambre $N$ .	90
5.8	La commande adaptative floue appliquée à l'actionneur électropneumatique.	96
5.9	La position du piston $y$ .	97
5.10	Signal de commande $u$ .	97
5.11	Erreur de poursuite résultante.	97
5.12	La norme du vecteur $\Theta(t)$ .	97
5.13	Pressions dans les chambres $P$ et $N$ .	97
5.14	Force perturbatrice appliquée.	97
A.1	Fenêtre conçue pour l'implémentation de la commande linéaire adaptative.	102
B.1	Fenêtre conçue pour l'implémentation de la commande PI robuste.	103
C.1	Fenêtre conçue pour l'implémentation de la commande adaptative floue.	104

---

## Liste des tableaux

---

2.1	Paramètres du simulateur d'hélicoptère Quanser à 3DOF	34
-----	---	----

---

# Introduction générale

---

↯ Le savant est l'homme par lequel s'opère facilement la distinction entre la franchise et le mensonge dans les paroles, entre la vérité et l'erreur dans les convictions entre la beauté et la laideur dans les actes. ↷

↷ Emir Abdel Kader<sup>1</sup>

---

De la commande linéaire classique à la commande non linéaire moderne, l'automatique a connu un progrès considérable ces 50 dernières années. De ce fait, la théorie de la commande est devenue l'un des domaines de recherche les plus riches en termes d'algorithmes. Les stratégies de commande existantes peuvent être classées en deux catégories dites *linéaires* ou *non linéaires*. L'automatique linéaire repose sur une approximation du modèle du système autour d'un point de fonctionnement donné de telle sorte que les outils d'analyse et de synthèse des systèmes linéaires puissent être exploités ([1][2]). Néanmoins, cette approche ne garantit pas la stabilité du système bouclé sur toute la plage de fonctionnement et souffre, en général, d'un manque de robustesse. Quant à elle, l'automatique non linéaire s'intéresse à assurer une stabilité sur une plus large plage de fonctionnement et peut avoir de bonnes propriétés de robustesse. ([3][4]). Malheureusement, pour l'automatique non linéaire, il n'existe pas des méthodes d'analyse et de synthèse universelles, comme pour le cas linéaire, mais plutôt des approches destinées pour des classes des systèmes non linéaires particulières sous certaines hypothèses. En outre, les solutions et les performances apportées sont, souvent, au prix de la complexité de la loi de commande résultante et de sa synthèse, comme pour le cas de la commande récursive par backstepping ([5]).

Parmi les techniques de commande proposées dans la littérature, que ce soient linéaires ou non linéaires, il existe des lois qui nécessitent la connaissance a priori d'un modèle du système à commander et d'autres approches qui n'exigent pas cette connaissance.

## MOTIVATION DE LA RECHERCHE

L'enjeu d'un automaticien est de concevoir un contrôleur assez performant pour commander un système donné. La difficulté de cette tâche change d'un système à l'autre selon sa complexité, sa dynamique et les spécifications du cahier des charges.

De nos jours, pour augmenter et améliorer la production, le monde industriel a toujours besoin de nouvelles installations et de nouveaux équipements avec des structures de plus en plus compliquées et plus d'exigences sur leurs performances et leurs rendements. Ainsi, le développement de nouveaux

---

1. Artiste, Écrivain, Homme politique, Philosophe, Poète, Scientifique, Théologien (1808 - 1883).

systèmes avec plus d'autonomie et d'intelligence est devenu une préoccupation majeure dans le domaine de la recherche, et ceci, pour faciliter la vie humaine. Pour ces systèmes, trouver un modèle mathématique décrivant bien leurs dynamiques, afin de synthétiser un contrôleur en utilisant des techniques de commande basées sur un modèle de connaissance, présente un vrai challenge.

Lors de la phase de modélisation, le principal défi de l'automaticien est de trouver un modèle de connaissance qui représente fidèlement les phénomènes physiques rencontrés. Outre la complexité inhérente à la modélisation, il est difficile de prendre en compte certains phénomènes tels que frottements, effets thermiques, vieillissement, dispersion des caractéristiques due à la fabrication en série, . . .etc ([6][7]). Du coup, il est difficile d'utiliser la majorité des algorithmes de commande développés dans la littérature, jugés modernes et basés sur des modélisations mathématiques aussi précises que possible.

Le point particulier qui motive notre recherche est de trouver de nouvelles stratégies de commande, **stable** et **simple à implémenter** et qui **n'exigent pas la connaissance d'un modèle dynamique**.

## CONTRIBUTIONS ORIGINALES

Cette recherche porte sur la commande sans modèle des systèmes non linéaires avec applications et elle a donné lieu aux contributions suivantes :

- Conception d'une commande PID (Proportional-Integral-Derivative) adaptative stable et simple à implémenter pour une classe des systèmes multivariables (ou MIMO : Multi-Input Multi-Output) non linéaires incertains et affines en l'entrée. Cette approche a été validée en expérimentation sur un simulateur d'hélicoptère à 3 degrés de liberté (ou 3DOF : 3 Degrees of Freedom ).
- Développement d'une commande robuste sans modèle à base d'un observateur pour une classe des systèmes MIMO non linéaires incertains. Celle-ci a été examinée aussi en expérimentation sur le simulateur d'hélicoptère à 3DOF.
- Synthèse d'une loi de commande linéaire adaptative stable pour une classe des systèmes non linéaires mono-entrée mono-sortie (ou SISO : Single Input Single Output) incertains et non affines en l'entrée, avec une validation expérimentale en commande de position d'un actionneur électropneumatique.
- Synthèse d'une commande PI robuste pour une classe des systèmes non linéaires incertains avec une dynamique des zéros, validée expérimentalement en commande de position d'un actionneur.
- Proposition d'une commande adaptative floue pour une classe des systèmes non linéaires incertains avec une dynamique des zéros. Cette technique de commande a été implémentée en temps réel pour commander en position un actionneur électropneumatique.

## ORGANISATION DE LA THÈSE

Ce rapport de thèse est divisé suivant une approche thématique en cinq chapitres :

Nous commençons dans le chapitre 1 par introduire la notion de la commande sans modèle et donner un état de l'art sur les travaux développés sur cet axe de recherche. Ensuite, et pour que tout lecteur puisse avoir les fondements nécessaires à la compréhension des approches de commande proposées, nous rappelons quelques définitions sur la stabilité des systèmes et nous présentons aussi quelques outils mathématiques utilisés dans ce travail de thèse.

Dans le chapitre 2, nous proposons une commande PID adaptative stable pour une classe des systèmes MIMO non linéaires incertains et affines en l'entrée. Nous y discutons l'idée principale de cette approche qui est l'estimation d'une commande idéale inconnue avec un contrôleur PID dont les gains sont mis à jour par un mécanisme d'adaptation stable et simple à implémenter. La description et la modélisation du simulateur d'hélicoptère à 3DOF de type tandem utilisé pour la validation expérimentale dans ce travail de thèse sont aussi présentées dans ce chapitre. Les performances de l'approche de commande PID adaptative sont examinées expérimentalement sur ce simulateur d'hélicoptère.

Le chapitre 3 est consacré au développement d'une commande robuste sans modèle à base d'un observateur pour une classe des systèmes MIMO non linéaires incertains. Il y est présenté deux variantes de cette commande : la première correspond au cas où le vecteur d'état est disponible à la mesure, et quant à la deuxième, elle est développée à base d'un observateur du vecteur d'erreur. Les performances de ce schéma de commande sont illustrées au travers une mise en œuvre expérimentale sur un simulateur d'hélicoptère à 3DOF .

Le chapitre 4 introduit une loi de commande linéaire adaptative stable pour une classe des systèmes non linéaires monovariables incertains et non affines en l'entrée. Il met en évidence la conception de cette technique de commande qui repose sur l'estimation d'une commande idéale implicite inconnue, et ce, par une loi de commande de structure linéaire dont les gains sont mis à jour avec un mécanisme d'adaptation. Ce chapitre contient la description et la modélisation d'un actionneur électropneumatique. Nous y présentons aussi les résultats expérimentaux issus de l'application de l'approche de commande linéaire adaptative en commande en position d'un actionneur électropneumatique.

Dans le chapitre 5, nous proposons deux méthodes de commande sans modèle pour une classe des systèmes non linéaires et non affines avec une dynamique des zéros. Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons une commande PI robuste développée à base de la théorie de perturbation singulière. La deuxième partie est consacrée à la synthèse d'une commande adaptative floue. Les performances des deux schémas de commande proposés dans ce chapitre sont validées expérimentalement en commande en position d'un actionneur électropneumatique.

Cette thèse se termine par une conclusion générale résumant les différentes approches de commande sans modèle développées dans ce travail et nous y mettons l'accent aussi sur les futures recherches s'inscrivant dans le prolongement de ce travail et à mener ultérieurement.

---

**Chapitre 1.**

**État de l'art et notions introductives sur la commande sans modèle**



---

# Chapitre 1.

---

## État de l’art et notions introductives sur la commande sans modèle

---

◀ La théorie, c’est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c’est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. ▶

↪ **Albert Einstein**<sup>1</sup>

---

### 1.1. Introduction

Nous allons présenter dans ce chapitre un aperçu sur les stratégies de commande proposées dans la littérature et qui ne requièrent pas la connaissance du modèle du système à commander. Bien évident, il n’est pas possible d’évoquer et d’étudier toutes ces commandes, pour cela, nous allons exposer quelques travaux pour chaque type de commande. Cette analyse bibliographique nous permettra d’introduire nos contributions et de les situer par rapport à ce qui se fait dans ce domaine de recherche en automatique. Nous allons rappeler aussi quelques définitions sur la stabilité des systèmes physiques et quelques outils mathématiques nécessaires à la bonne compréhension de ce travail de thèse.

Ce chapitre est construit ainsi : tout d’abord nous allons introduire dans la section 1.2 le concept de commande sans modèle suivi d’un aperçu sur les techniques de commande déjà proposées dans la littérature, dénommées commandes sans modèle ou celles qui peuvent être classées comme des commandes sans modèle. Pour mieux comprendre les algorithmes de commande développés dans cette thèse, nous rappelons dans la section 1.3, d’une manière succincte, des notions de base sur la stabilité des systèmes physiques ainsi que des méthodes d’analyse dans la section 1.4. Quelques outils mathématiques utilisés tout au long de cette thèse sont exposés dans la section 1.5.

### 1.2. Concept de la commande sans modèle

Les approches et les techniques de commande peuvent être classées en deux catégories : les lois de commande qui nécessitent la connaissance à priori d’un modèle du système à commander (en anglais Model-based Control) ou celles qui ne requièrent pas la connaissance du modèle (en anglais Model-free Control). Même si théoriquement elles peuvent assurer de bonnes performances, la mise

---

1. Mathématicien, Physicien, Scientifique (1879 - 1955).

en oeuvre des stratégies de commande basées sur la connaissance du modèle est délicate. En effet, le modèle mathématique issu d'une modélisation ne reflète pas bien, généralement, la dynamique du système. De plus, suite aux effets extérieurs, la dynamique du système peut se modifier, ce qui peut dégrader considérablement les performances.

Nous pouvons qualifier de commande sans modèle toute sorte de commande qui n'exige pas la connaissance du modèle du système à commander pour l'implémentation, mais juste des informations générales sur le système sont requises, entre autres la classe et l'ordre de système, ses entrées et ses sorties. Malgré ses limitations et qui fait l'objet de nombreuses critiques dans la communauté des automaticiens, le contrôleur PID comme étant une commande sans modèle simple à implémenter est le contrôleur le plus utilisé dans le monde industriel. Trouver une autre stratégie de commande sans modèle avec plus de performances est devenue l'une des préoccupations des chercheurs en automatique. Dans cette recherche, nous nous fixons comme objectif la conception des approches de commande **sans modèle, stable et simple à implémenter**.

### 1.3. Étude bibliographique sur la commande sans modèle

Vu son importance dans le monde industriel, la commande sans modèle ne cesse d'attirer l'attention des chercheurs en Automatique. De ce fait, un nombre important des stratégies de commande est suggéré dans la littérature. Nous faisons dans cette partie un tour d'horizon sur ces approches. Comme il est difficile de présenter et d'étudier tous les travaux de recherche publiés sur cette thématique, nous allons présenter quelques approches pour les commandes sans modèle développées à base de la logique floue et les réseaux de neurones ; de la commande sans modèle robuste ; de la commande sans modèle basée sur l'identification instantanée et d'autres approches<sup>2</sup> générales.

#### 1.3.1. Commande sans modèle à base de la logique floue

La logique floue permet de concevoir des approximateurs universels pour des fonctions continues et, aussi, d'incorporer dans le contrôleur des informations linguistiques et mathématiques issues d'une expertise ([8][9][10]). Pour cela, plusieurs approches de commande sans modèle sont développées à base de la logique floue. Dans ([11]), trois contrôleurs sans modèle flous de type Mamdani sont conçus et validés expérimentalement en commande en vitesse d'un système d'entraînement électrique. Les entrées de chaque contrôleur sont l'erreur obtenue sur la vitesse commandée et sa variation. Les avantages de ces contrôleurs sont mis en avant au travers d'une étude comparative avec un contrôleur PID classique. Dans ([12]), un contrôleur flou sans modèle stable est proposé pour une classe des systèmes non linéaires et validé en simulation sur un modèle d'un réacteur nucléaire. Dans cette approche, un terme de supervision est ajouté afin de garantir la stabilité de la boucle fermée. Les paramètres de ce contrôleur sont optimisés par un algorithme génétique. La référence ([13]) introduit un contrôleur sans modèle flou développé pour un réacteur continu à cuve agitée exothermique et non linéaire, qui est un système MIMO instable en boucle ouverte et constitué de deux boucles couplées. Ce contrôleur est une commande à séquençement de gain flou. Les auteurs de ce travail tirent leur idée de la similitude existante entre la commande à séquençement de gain et la commande floue. Pour cela, ils ont présenté ce contrôleur comme étant une solution pour le

---

2. En ce qui concerne le contrôleur PID, une analyse bibliographique est présentée dans la section 2.2.

problème de résolution qui soulève dans la commande floue pour des petites valeurs de l'erreur. Leur solution repose sur un choix adéquat de la géométrie des fonctions d'appartenance. Dans ([14]), un contrôleur sans modèle décentralisé développé à base de la logique floue est proposé pour un système MIMO. Ce contrôleur est constitué de deux termes : une commande floue avec une architecture auto organisable et le deuxième terme est un compensateur de couplage existant entre les sous-systèmes. Le compensateur a été élaboré pour évaluer les interactions et déterminer ainsi la compensation appropriée sans avoir besoin d'une mesure exacte de ces interactions et de leurs effets. Les auteurs dans ([15][16]) présentent une stratégie de commande floue sans modèle insensible aux bruits de mesure, et ce, pour ne pas trop solliciter l'organe de commande. Leur idée consiste à faire une défuzzification conditionnelle supplémentaire sur le signal de commande floue afin de réduire sa sensibilité aux bruits de mesure. Il existe aussi, dans la littérature, d'autres travaux<sup>3</sup> de recherche sur la commande sans modèle à base de la logique floue comme, par exemple, les approches proposées dans ([23][24][25]). En effet, pour un schéma de commande sans modèle basé sur la logique floue, généralement le choix de la structure du système flou utilisé est un vrai challenge.

### 1.3.2. Commande sans modèle à base des réseaux de neurones

Les réseaux de neurones sont des systèmes parallèles, adaptatifs et distribués possédant des capacités d'apprentissage remarquables. Cet outil de l'intelligence artificielle est une brique importante dans plusieurs schémas de commande sans modèle. Dans ([26]), deux réseaux de neurones sont utilisés pour concevoir un contrôleur adaptatif à modèle de référence. L'un de ces réseaux est utilisé comme un identificateur de la dynamique du système à commander et l'autre comme un contrôleur. Les deux réseaux de neurones, identificateur et contrôleur, nécessitent un apprentissage hors ligne, ce qui représente, en effet, un inconvénient pour cette approche. Dans ([27]), un réseau de neurones de structure simple, contient une seule couche d'entrée et une seule couche de sortie, avec une loi de mise à jour des poids dans les deux couches choisie de façon appropriée a été suggéré comme un contrôleur sans modèle pour les systèmes non linéaires. Les performances de cette stratégie de commande ont été étudiées dans la régulation du pH. Dans ([28]), une commande sans modèle à base des réseaux de neurones est proposée pour une classe des systèmes monovariabiles discrets. Le réseau de neurones est utilisé pour compenser les non-linéarités afin d'obtenir de meilleures performances malgré la variation du gain du système durant la commande. La structure de ce contrôleur est optimisée par un algorithme à évolution différentielle. Dans ([29]), un réseau de neurones est conçu pour être un contrôleur sans modèle adaptatif pour des processus non linéaires. L'algorithme de mise à jour des poids de ce réseau est développé dans le but de minimiser en ligne l'erreur entre la consigne et la sortie du processus. Ce qui permet à ce contrôleur, en plus de minimiser l'erreur entre la sortie de système et sa référence, de compenser l'effet de changement de la dynamique interne du système à commander et l'effet des perturbations. Une étude comparative avec un régulateur PID ainsi qu'une variante de ce contrôleur neuronal, avec compensation du retard, ont été présentées aussi dans ce même travail de recherche. Dans ([30]), un contrôleur sans modèle est développé à base d'un réseau de neurones, qui n'est autre qu'un régulateur PID neuronal avec un algorithme d'optimisation. Les poids de ce réseau de neurones sont mis à jour par une loi d'adaptation développée par la méthode

---

3. Comme elles sont conçues à base de la logique floue, plusieurs structures de commande adaptative floue, directe ([17][18][19]) ou indirecte ([20][21][22]), peuvent être considérées comme des commandes sans modèle.

de descente du gradient. Un algorithme d'Optimisation par Essaims Particulaires (OEP ou PSO<sup>4</sup> en anglais) est adopté pour mieux sélectionner les poids initiaux et améliorer ainsi la vitesse de convergence et prévenir les poids de se piéger dans des minimums locaux. D'autres approches<sup>5</sup> de commande sans modèle conçues à base des réseaux de neurones peuvent être trouvées dans la littérature, comme celles proposées dans ([36][37][38][39]). Il est important de souligner que pour les approches de commande sans modèle basées sur les réseaux de neurones, le principal inconvénient réside dans le choix de la structure du réseau et le nombre important de paramètres à ajuster.

### 1.3.3. Commande sans modèle à base de l'identification instantanée

Ces dernières années Michel Fliess et ses collaborateurs ont fait émerger une nouvelle approche de commande sans modèle ([7][6][40][41]). L'objectif de cette stratégie de commande est d'introduire un contrôleur PID intelligent ([40]) qui ne nécessite plus de réglage sans pour autant avoir un modèle mathématique précis du système à commander. Cette méthode de commande sans modèle repose sur une identification instantanée, telle que le modèle mathématique décrivant la dynamique du système dans une plage de fonctionnement aussi large que possible est remplacé par un modèle instantané, valide sur un laps de temps très court, et actualisé pas à pas ([7]). Le principe de cette méthode de commande sans modèle peut se résumer comme suit ([6][40][42]) : soit un système physique régi par l'équation différentielle inconnue (1.1), décrivant le comportement entrée-sortie, supposé de dimension finie, linéaire ou non,

$$E\left(y, \dot{y}, \dots, y^{(a)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(b)}\right) = 0 \quad (1.1)$$

avec  $E$  est une fonction suffisamment régulière de ses arguments. Supposons que pour un entier  $\nu$ ,  $0 < \nu \leq a$ , nous avons  $\frac{\partial E}{\partial y^{(\nu)}} \neq 0$ . Le théorème des fonctions implicites ([4][3]) permet de réécrire localement (1.1) sous la forme

$$y^{(\nu)} = \mathbb{Q}\left(y, \dot{y}, \dots, y^{(\nu-1)}, y^{(\nu+1)}, \dots, y^{(a)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(b)}\right) \quad (1.2)$$

L'idée de la commande sans modèle proposée par Fliess et ses collaborateurs consiste à substituer le modèle (1.2) par un modèle phénoménologique<sup>6</sup>, valable sur un laps de temps très court  $\Delta t = [t_1, t_2]$ . Dans cette approche, le terme inconnu  $\mathbb{Q}$  de (1.2) est identifié par  $\mathbb{Q} = F + \alpha u$  et ainsi la dynamique (1.2) devient

$$y^{(\nu)} = F + \alpha u \quad (1.3)$$

avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  est un paramètre constant non physique choisi par le praticien. Notons en plus que dans cette approche  $\nu$  n'est pas nécessairement égal à l'ordre de dérivation  $a$  de  $y$  en (1.1).

De l'équation (1.3), nous déduisons que la seule connaissance de  $y^{(\nu)}$ ,  $u$  et  $\alpha$  nous permet de calculer la valeur de  $F$  à chaque instant. Cette propriété sera utilisée dans l'élaboration de la loi de

---

4. Particle Swarm Optimization.

5. Plusieurs structures de commande adaptative neuronale proposées dans la littérature, qui utilisent les réseaux de neurones comme des approximateurs universels, directe ([31][32][33]) ou indirecte ([34][33][35]), peuvent être considérées comme des commandes sans modèle.

6. Nous retenons l'appellation *modèle phénoménologique* de Fliess ([7][6][40]). Mais, ils utilisent parfois l'appellation *modèle ultra-locale*, comme dans [41].

commande ([6]).

La loi de commande sans modèle pour le système (1.1) est définie comme suit ([7][6][40][42])

$$u = u^* + u_{feedback} \quad (1.4)$$

avec  $u_{feedback}$  est un régulateur usuel. Tel que, si  $\nu = 1$  dans (1.3), i.e.  $y^{(1)} = F + \alpha u$ , nous choisissons  $u_{feedback}$  comme un régulateur  $PI$ , si  $\nu = 2$ , i.e.  $y^{(2)} = F + \alpha u$ , nous choisissons  $u_{feedback}$  comme un régulateur  $PID$ , si  $\nu > 2$  nous pouvons utiliser les régulateurs  $GPI$ <sup>7</sup>. La commande  $u^*$  est calculée à partir de (1.3),  $u^* = -\frac{F}{\alpha} + \frac{y^{*(\nu)}}{\alpha}$ , avec  $F = \left[ y^{(\nu)} \right]_e - \alpha u$  et  $y^*$  une trajectoire de référence. Pour le choix de  $\nu$ , selon Fliess, nous pouvons se limiter au cas où  $\nu = (1, 2)$  ([40]). Ainsi, la commande (1.4) peut s'écrire lorsque  $\nu = 2$  comme suit

$$u = -\frac{F}{\alpha} + \frac{\dot{y}^*}{\alpha} + K_p e + K_I \int e + K_d \dot{e} \quad (1.5)$$

et pour  $\nu = 1$

$$u = -\frac{F}{\alpha} + \frac{\dot{y}^*}{\alpha} + K_p e + K_I \int e$$

où  $K_p$ ,  $K_I$  et  $K_d$  sont les gains de réglage. Dans cette approche, les auteurs proposent d'utiliser un différentiateur algébrique de structure intégrale<sup>8</sup> afin d'estimer la dérivée de la sortie qui sert à calculer le terme  $F$  dans la loi de commande ([7][43][44]). Dans ces différentiateurs algébriques, les itérations des intégrales produisent une moyennisation, donc un filtrage passe-bas, qui permet d'atténuer les bruits ([7]).

Cette commande sans modèle proposée par Fliess et ses collaborateurs garde la simplicité d'un régulateur classique. Elle réduit aussi la commande d'un système inconnue à celle d'un intégrateur, simple ou double ([6]). De plus, le fait d'identifier et d'estimer la dynamique incertaine du système à commander dote le contrôleur d'une sorte d'auto-adaptation et de robustesse, ce qui améliore les performances de la commande. Pour ces raisons, Fliess et ses collaborateurs, présente cette stratégie de commande comme un PID intelligent a les mêmes avantages qu'un PID classique, en termes de simplicité de conception, avec des performances très supérieures dans un champ d'applications industrielles encore bien plus vaste ([6]). Néanmoins, l'idée principale de cette approche qui consiste à approximer, instantanément, la dynamique d'un système inconnue par celle d'un système de type intégrateur, simple ou double, ne semble pas être toujours réaliste surtout pour les systèmes d'ordre élevé, couplés avec une forte non-linéaire. En plus, comme il n'y a pas une méthode systématique pour le faire, le choix du paramètre non physique  $\alpha$  peut poser des problèmes. Par exemple, un mauvais choix de ce paramètre de conception peut dégrader les performances de la commande, voire déstabiliser toute la boucle. Pour le différentiateur aussi, le choix de la taille de la fenêtre temporelle d'estimation est un vrai challenge : une fenêtre large donne une bonne estimation, mais avec un retard, et complique aussi l'implémentation en temps réel. Par contre, une petite fenêtre facilite l'implémentation mais l'estimation est moins performante. Il est mentionné aussi dans la remarque 4 de ([7]) que pour des systèmes à déphasage non minimal, cette approche peut conduire à des valeurs divergentes de  $u$  pour  $t$  grand, et, donc, à des valeurs numériquement inadmissibles de  $F$ .

7. Régulateur Proportionnel-intégral Généralisé

8. La dérivée de sortie estimée s'exprime à l'aide d'intégrales itérées (filtres passe-bas).

### 1.3.4. Commandes sans modèle robustes

Dans ([15]), une commande sans modèle  $H_\infty$  est proposée pour une classe des systèmes linéaires discrets. Cette approche est développée à base d'un algorithme d'apprentissage par renforcement, de type  $Q$ -learning, et elle nécessite seulement la connaissance des variables d'entrée et de sortie. La fonction  $Q$  est obtenue par la résolution d'un LMI<sup>9</sup> exprimé en fonction des données entrées-sorties. La commande est calculée ensuite par la minimisation de la fonction  $Q$  résultante. La référence ([45]) introduit une commande sans modèle de type  $H_\infty$  prédictive appliquée en simulation à un système de production d'énergie solaire. Dans cet algorithme de commande, la sensibilité prédictive et la sensibilité complémentaire prédictive sont définies à partir d'un modèle prédictif. La commande est calculée à base des mesures entrées-sorties, et ce, pour optimiser la sensibilité mixte prédictive par la méthode d'optimisation maximin. Les performances de cet algorithme ont été mises en avant par une étude comparative avec un contrôleur PI et avec un contrôleur sans modèle LQG. Dans ([46][47]), les auteurs proposent une commande sans modèle robuste développée à base de la technique  $H_\infty$  et la prédiction par la méthode des sous-espaces. L'idée de cette approche est de synthétiser un nouveau contrôleur  $\gamma$ -*optimal*  $H_\infty$  à partir des données expérimentales. Pour ce faire, ils ont utilisé un prédicteur par la méthode des sous-espaces afin d'extrapoler les futures sorties du système à partir des données expérimentales passées et des futures entrées du système. La faisabilité de cette stratégie de commande a été démontrée expérimentalement sur un système mécanique flexible. Dans ([48]), un contrôleur robuste non linéaire sans modèle est développé et appliqué à un véhicule sous-marin. L'idée principale de cette approche est d'ajouter à un régulateur PID linéaire existant une boucle de rétroaction non linéaire, afin d'améliorer la stabilité et les performances de la boucle fermée résultante. La référence ([49]) présente une comparaison expérimentale entre les performances de deux stratégies de commande sans modèle et celles d'un contrôleur PID, et ce, en commande d'un système électromécanique. L'une de ces stratégies est une commande avec rejet de perturbation à base d'un observateur, et l'autre est un algorithme de commande de type suivi robuste avec contraintes sur l'entrée de commande. D'autres stratégies de commande sans modèle robustes sont proposées dans la littérature, comme dans ([50][51][52][53]).

### 1.3.5. Autres approches de commande sans modèle

Dans ([54]), un algorithme de commande sans modèle développé à base de l'apprentissage par renforcement est proposé pour la régulation du pH. Dans ([55]), un système de commande à distance sans modèle avec une compensation du retard est proposé et validé expérimentalement. Cette approche a été introduite comme étant une solution pour le problème de retard imprévisible qui se pose souvent dans la commande via le réseau internet. Dans ([56]), une commande sans modèle non linéaire avec la dérivée d'ordre élevée dans la rétroaction est développée pour des systèmes non linéaires. La méthode de perturbation singulière est utilisée pour analyser les propriétés du système en boucle fermée avec cette commande. Dans ([57]), un contrôleur sans modèle est développé pour la synchronisation de la position des mouvements multi-axes avec une validation expérimentale. Ce contrôleur est constitué d'une commande PD avec un terme d'anticipation et une fonction de saturation, et il est capable d'assurer la stabilité asymptotique de l'erreur de position et de l'erreur de synchronisation. Dans ([58]), une commande sans modèle à base de linéarisation dynamique est

---

9. de l'anglais Linear Matrix Inequality.

proposée pour une classe des systèmes SISO discrets ; cette approche a été introduite premièrement dans ([59]) pour une classe des systèmes MIMO. Elle requiert uniquement des données entrées-sorties sur le système à commander, sa stabilité est prouvée et ses performances sont validées en simulation et en expérimentation sur un système hydraulique à trois réservoirs. La référence ([60]) présente une commande sans modèle prédictive développée pour un moteur synchrone à aimant permanent. Cette technique repose sur le principe de la détection des différences de courant et ses performances ont été validées expérimentalement. Dans ([61]), une commande sans modèle est développée pour un robot sous-marin. Cette approche consiste, afin de surmonter les difficultés intrinsèques de ce système, à faire une hybridation de la commande régressive backstepping et la commande par mode de glissement d'ordre supérieur type intégral. La référence ([62]) propose une commande sans modèle pour un robot volant. Cette stratégie de commande est un contrôleur linéaire quadratique discret à base de l'apprentissage par renforcement et la méthode des moindres carrés. Dans ([63]), une commande sans modèle à base d'un différentiateur d'ordre supérieur est développée pour une classe des systèmes chaotiques. Une autre approche est développée dans ([64]) pour un système chaotique basée sur le concept de la commande optimale. Dans ([65]), les auteurs discutent les propriétés et les performances d'un type de commande sans modèle dans 20 applications industrielles en Chine et ils montrent ses avantages par rapport aux autres techniques.

#### 1.4. Concepts élémentaires sur la stabilité des systèmes physiques

La **stabilité** est un concept primordial dans l'étude des systèmes physiques, elle caractérise le comportement du système au voisinage de ses points d'équilibre. D'une manière intuitive, la stabilité est la propriété d'un système de revenir à sa position d'équilibre lorsqu'il en est écarté dans un certain voisinage, appelé le domaine de stabilité. L'**attractivité**, quant à elle, revient à traduire que, s'écartant légèrement de cette position d'équilibre, le système reviendra dessus, au bout d'un certain temps ([66]). La **stabilité asymptotique** combine les deux notions : stabilité et attractivité. Nous parlons de la stabilité asymptotique lorsque le système reviendra au bout d'un temps qui peut être infini, au point d'équilibre, tout en restant proche de celui-ci au cours du temps. En effet, la notion de stabilité asymptotique est la plus exigée en pratique ([66]). Ceci s'explique certainement parce qu'elle constitue une première approche pouvant s'adapter à plusieurs situations (précision en régulation, poursuite d'une trajectoire de référence, . . . , etc.). Outre la notion de stabilité asymptotique, une propriété de stabilité souvent évoquée dans le domaine de l'automatique en occurrence la **stabilité exponentielle**, elle vient ajouter au caractère asymptotique un critère de rapidité de convergence ([66]).

Nous allons présenter ici quelques définitions et outils de base sur la stabilité ([3][67][66][68][69]). Considérons un système physique décrit par l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.6)$$

avec  $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction localement lipschitzienne<sup>10</sup> par rapport à  $x$  et continu par morceau par rapport au temps  $t$ , et  $D$  est un ensemble ouvert qui contient l'origine  $x = 0$ . Partant

10. Soit  $f(t, x) : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue avec  $D \subset \mathbb{R}^n$ , si  $[\partial f / \partial x](t, x)$  est continue dans  $[a, b] \times D$ , donc  $f(t, x)$  est localement lipschitzienne par rapport à  $x$  ([3]).

d'un état initial quelconque  $x_0 \in D$ , l'état du système (1.6) va évoluer au fil du temps. Cette évolution, qui dépend conjointement de  $t$  et  $x_0$ , dénommée trajectoire et noté  $x(t, t_0, x_0)$ .

**Définition 1.1.** ([3]) L'état  $x_e \in D$  est un point d'équilibre pour le système (1.6), si  $f(t, x_e) = 0, \forall t \geq t_0$ .  $\square$

Par la suite, nous exposons les définitions de stabilité, et ceci sans perte de généralité, pour le cas où le point d'équilibre est l'origine, *i.e.*  $x_e = 0$ . Notons que si le point d'équilibre est non nul, un simple changement de variable peut le ramener à l'origine ([3]).

#### 1.4.1. Équilibre stable

**Définition 1.2.** ([3][68]) L'origine est un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov pour le système (1.6) si  $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \geq 0$ , il existe un scalaire positif  $\delta(\varepsilon, t_0)$  tel que  $\|x_0\| \leq \delta(\varepsilon, t_0) \implies \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon, \forall t \geq t_0$ .  $\square$

Cette définition est illustrée par la figure 1.1.

#### 1.4.2. Équilibre uniformément stable

**Définition 1.3.** ([67]) L'origine est un point d'équilibre uniformément stable pour le système (1.6) si  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe un scalaire positif  $\delta(\varepsilon)$  tel que  $\|x_0\| \leq \delta(\varepsilon) \implies \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon, \forall t \geq t_0$ .  $\square$

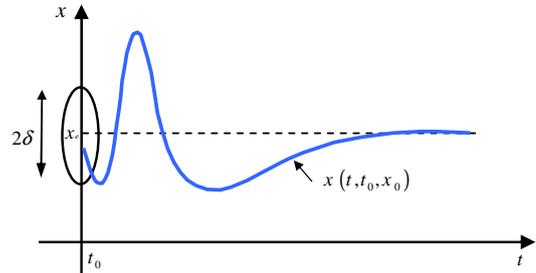
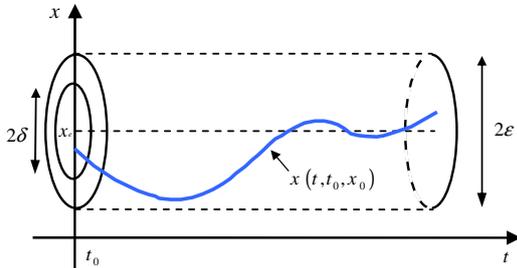


Figure 1.1: Stabilité d'un point d'équilibre. Figure 1.2: Attractivité pour un point d'équilibre.

#### 1.4.3. Stabilité UUB

**Définition 1.4.** ([68][3]) Les solutions de  $\dot{x} = f(t, x)$  sont dites *uniformément ultiment bornées* (Uniformly Ultimately Bounded : **UUB**) s'il existe des constantes  $b$  et  $c$  telles que, pour tout  $\alpha \in [0, c]$ , il existe un temps positif  $T = T(\alpha)$  (indépendant de  $t_0$ ) tel que, pour tout  $x_0 \in D_\alpha$  et  $\forall t_0 \geq 0$ , on a  $\|x_0\| \leq \alpha \implies \|x(t, t_0, x_0)\| \leq b, \forall t \geq t_0 + T$ . Lorsque ceci est vrai pour toute constante positive  $\alpha$ , les solutions sont dites *globalement uniformément ultiment bornées*.  $\square$

#### 1.4.4. Équilibre attractif

Comme la stabilité d'un système physique n'implique pas la convergence des solutions vers l'origine, c'est pourquoi la notion de stabilité toute seule est insuffisante pour l'étude du comportement des solutions. Ainsi, il est judicieux de faire appel à la notion d'attractivité.

**Définition 1.5.** ([68][3]) L'origine est un point d'équilibre attractif pour le système (1.6) si  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe un scalaire positif  $\delta(t_0)$  tel que  $\|x_0\| \leq \delta(t_0) \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0, \forall t \geq t_0$ . Lorsque  $\delta(t_0) = +\infty$ , on dit que l'origine est globalement attractive.  $\square$

Cette définition est illustrée par la figure 1.2.

#### 1.4.5. Équilibre asymptotiquement stable

**Définition 1.6.** ([68][3]) L'origine est un point d'équilibre asymptotiquement (respectivement globalement asymptotiquement) stable pour le système (1.6) s'il est stable et attractif (respectivement globalement attractif).  $\square$

Cette définition est illustrée par la figure 1.3.

#### 1.4.6. Équilibre exponentiellement stable

**Définition 1.7.** ([68][3]) L'origine est un point d'équilibre localement exponentiellement stable pour le système (1.6) s'il existe deux constantes strictement positive  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)}, \forall t \geq t_0, \forall x_0 \in D_r$ . Lorsque  $D_r = \mathbb{R}^n$ , on dit que l'origine est globalement exponentiellement stable.  $\square$

Cette définition est illustrée par la figure 1.4

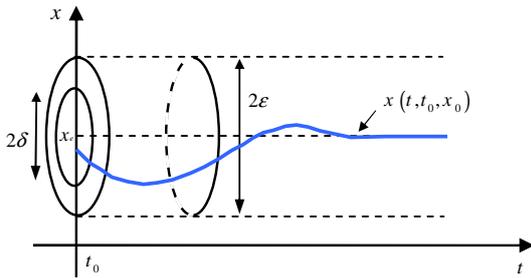


Figure 1.3: Stabilité asymptotique.

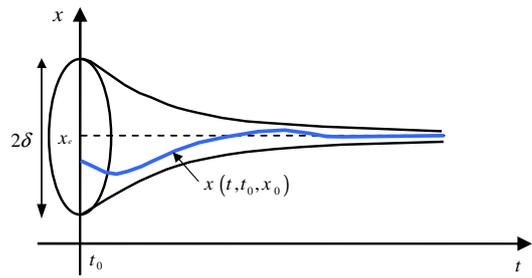


Figure 1.4: Stabilité exponentielle.

### 1.5. Méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes

Les définitions vues précédemment sur la stabilité ne concernent, en effet, que le point d'équilibre. Un système physique peut avoir un ou plusieurs points d'équilibre et sa stabilité est étudiée avec un autre formalisme. Comme la dynamique d'un système physique est souvent gouvernée par des équations différentielles non linéaires complexes et fortement couplées, connaître la solution explicite de ces équations différentielles pour étudier la stabilité est généralement une tâche difficile. Pour contourner ce problème, les deux méthodes du fameux mathématicien russe Alexandre Mikhailovich Lyapunov trouvent le succès dans la communauté des automaticiens ([70][71][3][4]). La méthode indirecte, connue aussi par la méthode de linéarisation, consiste à étudier la stabilité locale autour d'un point d'équilibre. Par contre, la méthode directe, basée sur le concept d'énergie, détermine la stabilité du système en construisant une fonction scalaire des états du système dont on examinera la variation temporelle.

### 1.5.1. Méthode indirecte de Lyapunov

Cette méthode est basée sur le fait que le comportement d'un système non linéaire est le même que son approximation linéaire pour des petites variations autour du point d'équilibre ([72]). Elle permet l'étude et l'analyse de la stabilité locale des systèmes physiques.

**Définition 1.8.** ([3]) Soit  $x = 0$  un point d'équilibre pour le système non linéaire  $\dot{x} = f(t, x)$ , avec  $f(t, x) : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continûment différentiable,  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < r\}$ , et la matrice jacobéenne  $[\partial f / \partial x]$  est bornée et lipschitzienne dans  $D$ , uniformément en  $t$ . Soit  $A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|_{x=0}$ , donc l'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable pour le système non linéaire  $\dot{x} = f(t, x)$  si l'origine de son approximation linéaire  $\dot{x} = A(t)x$  est un point d'équilibre exponentiellement stable.  $\square$

### 1.5.2. Méthode directe de Lyapunov

La philosophie de cette méthode n'est que l'extension mathématique de phénomène physique observé sur l'évolution temporelle de l'énergie d'un système physique : l'énergie totale (une fonction définie positive) d'un système physique stable se dissipe continuellement (une fonction décroissante) jusqu'à ce qu'il se stabilise au point d'équilibre. Lyapunov généralise ce concept en utilisant une fonction définie positive des états du système appelée fonction candidate de Lyapunov  $V(x)$ , qui représente en quelque sorte une image de son énergie. Ainsi, l'analyse de la stabilité se simplifie à l'étude de  $V(x)$  et de sa dérivée temporelle  $\dot{V}(x)$  ([72][71][3]).

Pour simplifier la compréhension de l'ensemble des définitions sur la stabilité au sens de Lyapunov, que nous allons présenter par la suite, nous commençons par la notion d'une fonction de classe  $\mathcal{K}$  et d'une fonction de classe  $\mathcal{KL}$ .

**Définition 1.9.** ([3][67]) Une fonction continue  $\alpha : [0, a[ \rightarrow [0, +\infty[$  est dite de classe  $\mathcal{K}$ , si elle est strictement croissante et  $\alpha(0) = 0$ . Elle est dite de classe  $\mathcal{K}_\infty$ , si de plus, on a  $a = +\infty$  et  $\alpha(r) \rightarrow +\infty$  quand  $r \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Définition 1.10.** ([3][67]) Une fonction continue  $\beta : [0, a[ \times [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  est dite de classe  $\mathcal{KL}$ , si pour tout  $s$  fixé, l'application  $r \rightarrow \beta(r, s)$  est de classe  $\mathcal{K}$  et pour tout  $r$  fixé, l'application  $s \rightarrow \beta(r, s)$  est décroissante et  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  quand  $s \rightarrow +\infty$ .  $\square$

Les propriétés et les définitions sur la stabilité peuvent être reformulées en utilisant la notion des fonctions de classe  $\mathcal{K}$  et de classe  $\mathcal{KL}$ . Plus de détails sur ces définitions, avec des preuves, sont disponibles dans ([3]).

**Définition 1.11.** ([3][67]) L'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre :

- Uniformément stable si et seulement s'il existe une fonction  $\alpha(\cdot)$  de classe  $\mathcal{K}$  et une constante positive  $c$  indépendante de  $t_0$  telle que  $\|x(t)\| \leq \alpha(\|x_0\|) + c$ ,  $\forall t \geq t_0$ ,  $\forall \|x_0\| \leq c$ ;
- Globalement uniformément stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale  $x_0$ .

$\square$

**Définition 1.12.** ([3][67]) L'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre :

- Uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction  $\beta(\cdot, \cdot)$  de classe  $\mathcal{KL}$  et une constante positive  $c$  indépendante de  $t_0$  telle que  $\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t - t_0)$ ,  $\forall t \geq t_0$ ,  $\forall \|x_0\| \leq c$ ;
- Globalement uniformément asymptotiquement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale  $x_0$ .

□

**Définition 1.13.** ([3][67]) L'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre :

- Exponentiellement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite avec  $\beta(r, s) \leq kre^{-\gamma s}$ ,  $k > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\forall \|x_0\| \leq c$ ;
- Globalement exponentiellement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale  $x_0$ .

□

Le choix de la fonction communément appelée *fonction candidate de Lyapunov*, afin d'établir des conditions suffisantes de stabilité, c'est une étape primordiale dans la synthèse et l'analyse des systèmes de commande. Une telle fonction doit être impérativement définie positive et souvent choisie comme une forme quadratique.

**Définition 1.14.** ([3][67]) Une fonction continue  $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  est dite :

- Définie positive, s'il existe une fonction  $\omega_1$  de classe  $\mathcal{K}$ , telle que  $\forall t \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $V(t, x) \geq \omega_1(\|x\|)$ ;
- Définie positive et radialement non-bornée (ou propre), si l'inégalité précédente est vérifiée pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  avec une fonction  $\omega_1$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$ ;
- Limitée ou décroissante, s'il existe une fonction  $\omega_2$  de classe  $\mathcal{K}$ , telle que  $\forall t \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $V(t, x) \leq \omega_2(\|x\|)$ .

□

**Définition 1.15.** ([3][67]) On considère le système (1.6). Soit  $D$  un voisinage de zéro et  $V : \mathbb{R}_+ \times D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et différentiable sur  $D$ . On dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov au sens large en 0, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- $V$  est définie positive ;
- $\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} f(t, x) \leq 0$  pour tout  $x \in D$ .

On dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov stricte en 0, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- $V$  est définie positive ;
- $\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} f(t, x) < 0$  pour tout  $x \in D - \{0\}$ .

□

Avec la fonction de Lyapunov, il est possible d'étudier la stabilité d'un système physique quelconque sans faire recours à la résolution de l'équation différentielle qui gouverne sa dynamique. La vérification de certains critères sur cette fonction permet de savoir si le système est stable ou non et avec quel type de stabilité.

**Définition 1.16.** ([3][67]) On considère le système (1.6). Si le système admet une fonction de Lyapunov au sens large sur  $D$ , alors l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre stable. Si de plus  $V$  est décroissante, alors  $x = 0$  est un point d'équilibre uniformément stable.

□

**Définition 1.17.** ([3]) Soit  $x = 0$  un point d'équilibre du système (1.6) avec  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$  un domaine contenant l'origine. Soit  $V(t, x) : \mathbb{R}_+ \times D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  telle qu'il existe des fonctions  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  de classe  $\mathcal{K}$  définies sur  $[0, r[$  vérifiant :  $\forall t \geq t_0, \forall x_0 \in D, \omega_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \omega_2(\|x\|)$  et  $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} f(t, x) \leq -\omega_3(\|x\|)$ , alors  $x = 0$  est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable. De plus, si  $D = \mathbb{R}^n$  et  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont de classe  $\mathcal{K}_\infty$ , alors  $x = 0$  est un point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable.  $\square$

**Définition 1.18.** ([3][67]) Considérons le système (1.6). Soit  $V(t, x)$  une fonction de Lyapunov, supposons qu'il existe des constantes positives  $c_1, c_2, c_3$  et  $c_4$ , telles que  $\forall t \geq t_0, \forall x_0 \in D$ , on a :  $c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2$  et  $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} f(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2$ , alors  $x = 0$  est un point d'équilibre exponentiellement stable. De plus, si  $D = \mathbb{R}^n$  alors l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable.  $\square$

### 1.5.3. Stabilité Entrée-Etat

La notion de la stabilité entrée-état <sup>11</sup> (ISS en anglais abrégé) a été introduite en 1989 par Eduardo Sontag. Cet outil mathématique permet d'examiner l'effet d'une entrée bornée sur le comportement d'un système décrit par une représentation d'état. Nous allons présenter, ci-après, la philosophie de ce concept de stabilité à travers une définition et un théorème suivi par un lemme ([3]). D'abord, nous considérons le système non linéaire suivant

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.7)$$

avec  $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à  $x$  et  $u$ .

**Définition 1.19.** ([3][68]) Le système (1.7) est dit stable au sens entrée-état (ISS) par rapport à l'entrée  $u$  s'il existe une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  et une fonction  $\gamma$  de classe  $\mathcal{K}$  telles que, pour tout vecteur initial  $x_0$  et pour toute entrée  $u$  continue et bornée, la solution du système  $x(t)$  existe pour tout  $t \geq t_0$  et vérifie la condition

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right) \quad (1.8)$$

$\square$

Le théorème suivant donne une condition suffisante de la stabilité entrée-état :

**Théorème 1.1.** ([3]) Soit  $V : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable, telle que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} f(t, x, u) \leq -\omega_3(x), \forall \|x\| \geq \rho(\|u\|) > 0 \quad (1.10)$$

11. Pour plus de détails sur ce type de stabilité, nous invitons le lecteur à consulter le chapitre 4 du livre de Khalil, ([3]).

$\forall (t, x, u) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , avec  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{K}_\infty$ ,  $\rho$  est une fonction de classe  $\mathcal{K}$  et  $\omega_3(x)$  est une fonction continue définie positive dans  $\mathbb{R}^n$ . Donc, le système (1.7) est stable au sens entrée-état avec  $\gamma = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \rho$ . ■

**Lemme 1.1.** ([3]) Considérons le système (1.7) avec  $f(t, x, u)$  est continûment différentiable et globalement lipschitzienne par rapport à  $x$  et  $u$ , uniformément en  $t$ . Si l'origine  $x = 0$  du système  $\dot{x} = f(t, x, 0)$  est globalement exponentiellement stable, donc le système (1.7) est stable au sens entrée état. □

## 1.6. Quelques notions et outils mathématiques utilisés

L'automatique comme discipline et plus particulièrement l'analyse et la commande des systèmes non linéaires requièrent des outils mathématiques et des fondements théoriques rigoureux. Nous allons donner un rappel de quelques outils mathématiques utilisés à savoir : le lemme de Barbalat, le théorème de la valeur moyenne et le théorème des fonctions implicites, et ceci, pour formaliser, synthétiser et analyser les algorithmes de commandes sans modèle présentés dans cette thèse.

### 1.6.1. Lemme de Barbalat

En utilisant ce lemme, il est possible de prouver la convergence vers zéro de l'erreur résultante d'une boucle de commande ou même d'une erreur d'estimation comme dans le cas de la commande adaptative directe ou indirecte.

**Lemme 1.2.** ([70][3]) Soit  $f(t) : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable, si  $f(t), \dot{f}(t) \in L_\infty$  et  $f(t) \in L_p$  pour  $p \in [1, +\infty[$ , alors  $f(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . □

En effet, le résultat du lemme 1.2 ce n'est qu'un cas particulier d'un résultat plus général formulé et donné par le lemme de Barbalat indiqué ci-dessous.

**Lemme 1.3.** ([70]) Si  $\text{Lim}_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) dt$  existe et elle est finie, et  $f(t)$  est une fonction uniformément continue<sup>12</sup>, alors  $\text{Lim}_{t \rightarrow \infty} f(t) \rightarrow 0$ . □

### 1.6.2. Théorème des fonctions implicites

Notons que dans le domaine de l'automatique, ce théorème trouve souvent son utilité dans la commande des systèmes non affines, et ceci, pour garantir, d'une manière implicite, l'existence d'une commande pour le système considéré.

**Théorème 1.2.** ([70][3]) Soit  $f(x, y, z)$  une fonction continuellement différentiable, avec des dérivées partielles continues, définie dans un ensemble ouvert  $S$  contenant le point  $p(x_0, y_0, z_0)$ . Si  $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$  dans le point  $p$ , donc il existe un voisinage  $R$  autour de  $(x_0, y_0, z_0)$  tel que pour chaque point  $(x, y, z)$  appartient à  $R$ , il existe une solution  $z = h(x, y)$  pour laquelle  $f(x, y, h(x, y)) = 0$ . ■

12. Une fonction  $f(t)$  est uniformément continue si sa dérivée  $\dot{f}(t)$  existe et bornée.

### 1.6.3. Théorème de la valeur moyenne

Avant de donner l'énoncé de ce théorème, qui est utilisé aussi pour traiter la commande des systèmes non affines, nous présentons la description mathématique d'un segment joignant deux points  $x$  et  $y$  distincts dans  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $L(x, y)$  ce segment ; il est décrit donc par ([70][68]) :  $L(x, y) = \{z \mid z = \theta x + (1 - \theta)y, 0 < \theta < 1\}$ .

**Théorème 1.3.** ([70][3]) *Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continuellement différentiable à chaque point  $x$  de l'ensemble ouvert  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $S$  tels que le segment  $L(x, y) \subset S$ . Alors, il existe un point  $z$  du segment  $L(x, y)$  tel que  $f(y) - f(x) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=z} (y - x)$ . ■*

## 1.7. Conclusion

Dans ce chapitre, notre principal objectif c'était d'introduire la notion de la commande sans modèle qui fait l'objet de cette thèse, de faire une analyse bibliographique et de présenter aussi quelques définitions sur la stabilité des systèmes physiques et quelques outils mathématiques utilisés dans les prochains chapitres. Nous pouvons définir une commande sans modèle comme étant un algorithme de commande qui ne requiert pas la connaissance exacte du modèle dynamique du système à commander, mais juste des connaissances globales sur ce système entre autres la classe du système, les entrées et les sorties du système, le degré relatif de la sortie à commander.

Dans le monde industriel, vu leurs complexités, les approches de commande proposées dans la littérature qui se basent sur la connaissance du modèle trouvent des difficultés de s'y imposer. Obtenir un modèle aussi précis que possible d'un procédé s'annonce souvent comme une tâche difficile, voire impossible pour certains systèmes. Ce qui remet en cause l'utilité d'une grande partie des approches de commande proposées par les chercheurs. Pour remédier à ce problème, la tendance actuelle de recherche est orientée vers des algorithmes de commande sans modèle ou à modèle restreint.

Nous avons fait dans ce chapitre un petit tour d'horizon sur les algorithmes de commande sans modèle proposés dans la littérature. Bien entendu, cet état de l'art n'est pas complet, mais nous avons essayé d'être objectif quant à son contenu et de diversifier les types des algorithmes de commande présentés.

Dans le prochain chapitre, nous allons introduire une commande PID adaptative stable pour une classe des systèmes non linéaires MIMO affines en l'entrée avec un mécanisme d'adaptation simple à implémenter. Les performances de cette approche seront examinées en expérimentation sur un simulateur d'hélicoptère à 3DOF.

---

**Chapitre 2.**

**Commande PID adaptative d'une classe des systèmes non linéaires  
MIMO**



---

## Chapitre 2.

---

# Commande PID adaptative d'une classe des systèmes non linéaires MIMO

---

◁ La science antique portait sur des concepts, tandis que la science moderne cherche des lois. ▷

↪ **Henri Bergson**<sup>1</sup>

---

### 2.1. Introduction

La commande des systèmes non linéaires MIMO affines en entrée devient de plus en plus un sujet de recherche en constante évolution, comme peut l'annoncer la littérature abondante. Cette tendance trouve sa justification dans le nombre important des systèmes industriels qui font partie de cette classe des systèmes, entre autres les bras manipulateurs et les machines électriques. Néanmoins, à cause de leur dépendance aux modèles des systèmes à commander, la plupart des approches proposées dans la littérature pour les systèmes non linéaires MIMO ont du mal à s'imposer dans le monde industriel.

En revanche, le contrôleur PID classique, comme étant une commande sans modèle simple à implémenter, et malgré ses inconvénients, reste le plus utilisé dans la commande des processus ([73][74]). Dans le but d'étendre le contrôleur PID aux systèmes non linéaires MIMO et améliorer ses performances, nous allons introduire dans ce chapitre une commande PID adaptative stable et simple à implémenter pour une classe des systèmes non linéaires MIMO incertains affines en l'entrée composés de  $q$  sous systèmes interconnectés. L'idée de base est d'utiliser un contrôleur PID pour approcher en ligne une loi de commande idéale explicite inconnue. Dans cette approche, les lois d'adaptation des gains  $K_p$ ,  $K_I$  et  $K_d$  du contrôleur PID sont synthétisées, en s'aidant de la méthode de descente du gradient, pour minimiser directement l'erreur entre le contrôleur idéal inconnu et le contrôleur PID utilisé. La stabilité de la boucle globale est étudiée par l'approche de Lyapunov. La stratégie de commande PID adaptative proposée ici garantit la bornitude de tous les signaux de la boucle fermée ainsi que la convergence des erreurs de poursuite vers un petit voisinage de zéro. Les performances de cette commande PID adaptative sont examinées en expérimentation sur un simulateur d'hélicoptère à 3DOF type tandem fabriqué par le constructeur Quanser ([75]).

---

1. Artiste, Écrivain, Philosophe (1859 - 1941).

Ce chapitre est construit ainsi : la section 2.2 présente un état de l'art sur le contrôleur PID et ses méthodes de réglage. Dans la section 2.3, et dans un souci de clarté, nous commençons par la formulation du problème de commande pour la classe des systèmes MIMO non linéaires étudiées. Nous procédons ensuite dans la section 2.4 à la synthèse de la loi de commande PID, la conception de son mécanisme d'adaptation et nous dégagons aussi les conditions nécessaires pour la stabilité de la boucle fermée. La section 2.5 introduit la description et la modélisation du simulateur d'hélicoptère à 3DOF. La section 2.6 est consacrée à la présentation et l'analyse des résultats expérimentaux issus de l'application de la commande PID adaptative proposée dans ce chapitre à un simulateur d'hélicoptère à 3DOF.

## 2.2. Commande PID et les systèmes multivariables : analyse bibliographique

La méthode la plus connue dans le domaine de la commande automatique est l'algorithme de commande PID. Depuis 1940, lorsque la commande des processus a émergé, les contrôleurs PID ont été utilisés dans la plupart des systèmes de commande des installations industrielles, et ce malgré les progrès continus dans la théorie de la commande. Ces contrôleurs sont préférables en raison de leur polyvalence, leur structure simple, leur fiabilité et leur mise en œuvre facile sur des plates-formes analogiques ou numériques. Aujourd'hui, environ 90% des installations industrielles sont pilotés par des contrôleurs PID ([76]). La conception d'un régulateur PID consiste à choisir trois paramètres, *i.e.* le gain du proportionnel  $K_p$ , le gain de l'intégral  $K_I$  et le gain de la dérivée  $K_d$ . Pour avoir des performances de commande satisfaisantes, les gains  $K_p$ ,  $K_I$  et  $K_d$  doivent être réglés.

Au cours du dernier demi-siècle, les chercheurs se sont intéressés à trouver des techniques pour le réglage des gains du contrôleur PID. Ces méthodes peuvent être classées comme suit : (1) les méthodes empiriques comme la méthode de Ziegler-Nichols ([77]) et la commande par modèle interne ([78]), (2) les méthodes analytiques telles que les techniques basées sur le lieu des racines ([78]), (3) les méthodes basées sur l'optimisation comme le réglage itératif ([79]), le réglage par les algorithmes génétiques ([80]), (4) les méthodes d'auto-ajustage ([81]). Cependant, les techniques empiriques, les méthodes analytiques et les méthodes basées sur l'optimisation exigent quelques conditions particulières concernant le modèle du système, telles que le temps mort ou le retard, les pôles rapides et lents, et sur les pôles instables, ... *etc.* Pour ces conditions, les méthodes précédentes ne sont pas générales et elles sont beaucoup plus convenables pour les systèmes linéaires monovariables continus avec un modèle connu.

En raison de la progression dans les applications industrielles, il y a beaucoup de processus de caractéristiques non linéaires avec des paramètres variables dans le temps. De ce fait, un régulateur PID conçu avec les méthodes de réglage classiques devient inefficace pour ces systèmes. Pour résoudre ce problème, la conception des régulateurs PID adaptatifs a attiré une grande attention. L'idée de base pour la conception d'un contrôleur adaptatif est de faire varier ses gains en fonction de la variation des états du système pour obtenir de meilleures performances de commande. Pour les systèmes SISO, il existe plusieurs méthodes de commande PID adaptative qui ont été proposées. Dans ([81]), les auteurs développent un contrôleur PID auto-adaptatif pour une classe des systèmes non linéaires SISO basée sur l'approche de Lyapunov. La stabilité de la boucle fermée est analysée et garantie par l'introduction d'une commande de supervision et d'une loi d'adaptation par projection modifiée. Dans ([82]), une commande PID adaptative robuste basée sur la théorie de mode de

glissement est proposée pour une classe des systèmes non linéaires SISO chaotiques incertains. Dans ([83]), un contrôleur PID adaptatif est proposé pour une classe des systèmes SISO discrets avec un compensateur *feedforward* robuste.

D'autre part, il est bien connu que de nombreux procédés industriels sont intrinsèquement multivariables et nécessitent, ainsi, la conception des commandes multivariables pour avoir de meilleures performances. Cependant, les systèmes MIMO sont naturellement plus difficiles à commander que les systèmes SISO. En dehors du fait que les contrôleurs PID conçus pour un système MIMO ont beaucoup plus de paramètres à régler qu'un contrôleur PID développé pour un système SISO, l'interaction et le couplage existants entre les différents modules d'un système MIMO sont les vrais challenges pour l'application de la commande PID à cette classe des systèmes. Pour cela, il est souvent difficile de concevoir chaque boucle indépendamment des autres, puisque le réglage des paramètres du contrôleur d'une boucle peut avoir une incidence sur les performances des autres et peut même déstabiliser l'ensemble du système.

Dans la littérature, des méthodes de réglage ont été proposées pour les contrôleurs PID destinés aux systèmes MIMO tels que l'auto-adaptation dans ([84][85][86][87][88]) et l'optimisation dans ([89][90][91]). En effet, par rapport aux systèmes SISO, il existe peu d'études sur le réglage de contrôleur PID pour les systèmes multivariables. À cause de la difficulté des systèmes MIMO et la limitation des techniques d'optimisation en temps réel, telles que le temps de calcul, les méthodes auto-adaptatives sont les plus appropriées pour cette classe des systèmes, puisque elles peuvent assurer des performances robustes dans un large domaine de fonctionnement. Dans ([84]), les auteurs proposent une commande PID auto-adaptative pour une classe des systèmes linéaires MIMO. La limitation principale de cette approche est l'initialisation des matrices polynômes utilisées. Dans ([85]), un schéma de commande PID adaptative est développé pour un système MIMO avec une matrice de précompensation, ajustée par un estimateur en ligne, utilisée pour réduire les termes d'interaction de la matrice de transfert du processus. Une commande PID adaptative floue pour des systèmes MIMO est synthétisée dans ([87]) et une commande PID adaptative neuronale dans ([21]). Dans ([86]), une stratégie de commande tolérante aux défauts composée d'un contrôleur PID auto-adaptatif à base d'un réseau de neurones adaptatif est introduite pour les systèmes MIMO.

Néanmoins, pour les systèmes MIMO fortement couplés, en particulier pour les systèmes de grande dimension, les contrôleurs PID proposés dans ([84]) et ([85]) sont incapables de donner des réponses acceptables. Pour l'approche suggérée dans ([87]), le fait que la conception du contrôleur est basée sur l'expertise humaine, les performances de la boucle de commande dépendent des compétences du concepteur. En ce qui concerne les approches proposées dans ([86]) et ([21]), leur principal inconvénient est l'utilisation d'un mécanisme d'adaptation basé sur les réseaux de neurones ; ce qui peut présenter des difficultés lors de la conception du contrôleur, comme le choix de la structure du réseau, et d'autres problèmes en temps réel.

Dans ce qui suit, nous allons proposer une loi de commande PID adaptative stable<sup>2</sup> pour une classe des systèmes non linéaires MIMO incertains affines en entrée. En plus de ses performances prouvées expérimentalement et de sa simplicité en implémentation, l'approche proposée n'exige pas la connaissance du modèle dynamique du système à commander contrairement à certains contributions ci-dessus.

---

2. Comme nous allons le voir, elle garantit la stabilité de la boucle fermée et la convergence des erreurs de poursuite vers un petit voisinage de l'origine.

### 2.3. Formulation du problème

Nous considérons un système  $\Sigma$  non linéaire multivariables MIMO affine en la commande composé de  $q$  sous systèmes  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , de la forme suivante ([73])

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_{i1} = x_{i2}, \dot{x}_{i2} = x_{i3}, \dots, \dot{x}_{i r_i - 1} = x_{i r_i} \\ \dot{x}_{i r_i} = f_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^q g_{ij}(\mathbf{x}) u_j \\ y_i = x_{i1} \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{x} = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1 r_1}, \dots, x_{q1}, x_{q2}, \dots, x_{q r_q}]^T \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état complet supposé mesurable,  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , est le degré relatif du sous système  $\Sigma_i$  avec  $n = \sum_{i=1}^q r_i$ ,  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_q]^T \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur d'entrée de commande,  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_q]^T \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur de sortie,  $f_i(\mathbf{x})$  et  $g_{ij}(\mathbf{x})$ ,  $i, j = 1, \dots, q$ , sont des fonctions non linéaires continues supposées inconnues. Notons

$$\mathbf{y}^{(r)} = [y_1^{(r_1)}, \dots, y_q^{(r_q)}]^T, \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_{11}(\mathbf{x}) & \cdots & g_{1q}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{q1}(\mathbf{x}) & \cdots & g_{qq}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_q(\mathbf{x})]^T, \text{ la}$$

représentation entrée-sortie du sous système  $\Sigma_i$  est la suivante

$$y_i^{(r_i)} = f_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^q g_{ij}(\mathbf{x}) u_j \quad (2.2)$$

ainsi, le système  $\Sigma$  peut s'écrire

$$\mathbf{y}^{(r)} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (2.3)$$

Par la suite, nous envisageons la synthèse d'une commande  $\mathbf{u}$  pour le système (2.1) afin d'assurer le suivi d'une trajectoire prédéfinie  $\mathbf{y}_d(t) = [y_{d1}(t), \dots, y_{dq}(t)]^T \in \mathbb{R}^q$  tout en garantissant la bornitude de tous les signaux de la boucle fermée. Afin d'atteindre cet objectif, les hypothèses suivantes sont retenues dans le reste de ce chapitre.

**Hypothèse 2.1.** La matrice  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  du système (2.3) est symétrique, définie positive et bornée telle que  $0 < \bar{g}_0 I_q < \mathbf{G}(\mathbf{x}) < \bar{g}_1 I_q$ , avec  $I_q$  est la matrice identité où  $\bar{g}_0$  et  $\bar{g}_1$  sont deux constantes positives. Notons que le résultat de ce chapitre peut être facilement adapté au cas où  $-\bar{g}_1 I_q < \mathbf{G}(\mathbf{x}) < -\bar{g}_0 I_q < 0$   $\square$

**Hypothèse 2.2.** Les trajectoires de référence  $y_{di}(t)$ ,  $i = 1, \dots, q$ , ainsi que leurs dérivées  $y_{di}^{(j)}(t)$ ,  $j = 1, \dots, r_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , sont supposées connues, continues et bornées.  $\square$

Définissons les erreurs de poursuite pour les sorties  $y_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, q$ , comme suit

$$\begin{aligned} e_1(t) &= y_{d1}(t) - y_1(t) \\ &\vdots \\ e_q(t) &= y_{dq}(t) - y_q(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

et des erreurs filtrées de la forme suivante

$$\begin{aligned}
s_1(t) &= \left(\frac{d}{dt} + \lambda_1\right)^{r_1-1} e_1(t), \lambda_1 > 0 \\
&\vdots \\
s_q(t) &= \left(\frac{d}{dt} + \lambda_q\right)^{r_q-1} e_q(t), \lambda_q > 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

À partir de (2.5), il est clair que pour  $s_i(t) = 0$ ,  $i = 1, \dots, q$ , nous avons une équation différentielle linéaire dont la solution implique la convergence vers zéro de  $e_i(t), \dot{e}_i(t), \dots$ , et  $e_i^{(r_i-1)}$  ([71]). Donc, la stabilisation du vecteur  $[e_i, \dots, e_i^{(r_i-1)}]^T$  de dimension  $(r_i)$  se simplifie à la synthèse d'un contrôleur garantissant la convergence vers zéro du signal  $s_i(t)$ . De même, avec la bornitude du signal  $s_i(t)$  par une constante  $\Phi_i$  telle que  $|s_i(t)| \leq \Phi_i$ , nous obtenons ([71])  $|e_i^{(j)}(t)| \leq 2^j \lambda^{(j-r_i+1)} \Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, q, j = 0, \dots, r_i - 1$ . Il est possible donc de diminuer la largeur de ces bandes par l'augmentation des paramètres de conception  $\lambda_i$ .

**Proposition 2.1.** Considérons le système  $\Sigma$  non linéaire MIMO affine en la commande défini dans (2.1) et les erreurs filtrées  $s_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, q$ , données par (2.5). Il existe donc une loi de commande idéale  $\mathbf{u}^* = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x})(-\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Lambda} + \mathbf{K}\mathbf{s} + \mathbf{K}_0 \tanh(\mathbf{s}/\varepsilon_0))$ , avec  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}_0$  et  $\varepsilon_0$  seront définis dans ce qui suit, assurant la convergence vers zéro de  $s_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, q$ , quand  $t \rightarrow \infty$ , et par conséquent la convergence vers zéro de  $e_i(t)$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $r_i - 1$  quand  $t \rightarrow \infty$ . ■

**Preuve.** La dérivée temporelle des erreurs filtrées (2.5) s'écrit

$$\begin{aligned}
\dot{s}_1(t) &= \Lambda_1 - f_1(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^q g_{1j}(\mathbf{x}) u_j, \\
&\vdots \\
\dot{s}_q(t) &= \Lambda_q - f_q(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^q g_{pj}(\mathbf{x}) u_p
\end{aligned} \tag{2.6}$$

avec  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_q$ , sont donnés comme suit

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= y_{d1}^{(r_1)} + \beta_{1,r_1-1} e_1^{(r_1-1)} + \dots + \beta_{1,1} \dot{e}_1 \\
&\vdots \\
\Lambda_q &= y_{dq}^{(r_q)} + \beta_{p,r_q-1} e_q^{(r_q-1)} + \dots + \beta_{q,1} \dot{e}_1
\end{aligned} \tag{2.7}$$

et  $\beta_{i,j} = \frac{(r_i-1)!}{(r_i-j)!(j-1)!} \lambda_i^{r_i-j}$ ,  $i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, r_i - 1$ . En notant  $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_q]^T$  et  $\mathbf{\Lambda} = [\Lambda_1, \dots, \Lambda_q]^T$ , l'équation (2.6) peut être réécrite sous la forme compacte suivante

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{\Lambda} - \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \tag{2.8}$$

Si les fonctions non linéaires  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  sont connues, pour atteindre les objectifs de commande, nous pouvons utiliser la loi de commande idéale  $\mathbf{u}^*$  suivante

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x})(-\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Lambda} + \mathbf{K}\mathbf{s} + \mathbf{K}_0 \tanh(\mathbf{s}/\varepsilon_0)) \tag{2.9}$$

où  $\mathbf{K} = \text{diag}[k_1, \dots, k_q]$ ,  $\mathbf{K}_0 = \text{diag}[k_{01}, \dots, k_{0q}]$  avec  $k_i > 0$  et  $k_{0i} > 0$ , pour  $i = 1, \dots, q$ ,  $\varepsilon_0$  une petite constante positive, et  $\tanh(\cdot)$  est la fonction tangente hyperbolique définie pour le vecteur  $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_q]^T$  comme suit

$$\tanh(\mathbf{s}/\varepsilon_0) = [\tanh(s_1/\varepsilon_0), \dots, \tanh(s_q/\varepsilon_0)]^T \tag{2.10}$$

Lorsque nous substituons (2.9) dans (2.8), nous obtenons la dynamique en boucle fermée résultante suivante

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{K}\mathbf{s} - \mathbf{K}_0 \tanh(\mathbf{s}/\varepsilon_0) \quad (2.11)$$

ou encore

$$\dot{s}_i = -k_i s_i - k_{0i} \tanh(s_i/\varepsilon_0) \quad i = 1, \dots, q \quad (2.12)$$

Ce qui implique que  $s_i(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  et, par conséquent,  $e_i(t)$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $r_i - 1$  convergent aussi vers zéro.  $\blacktriangle$

Bien entendu, la commande (2.9) est idéale au sens où les fonctions non linéaires  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  sont inconnues. Prochainement, le but consiste alors à essayer d'approcher cette loi de commande idéale inconnue  $\mathbf{u}^*$  en utilisant un algorithme de commande PID avec un mécanisme d'adaptation robuste et stable.

**Remarque 2.1.** Nous utilisons le terme  $\mathbf{K}_0 \tanh(\mathbf{s}/\varepsilon_0)$  dans la loi de commande (2.9) afin de doter cette loi d'une certaine robustesse. En effet, le terme  $\mathbf{K}_0 \tanh(\mathbf{s}/\varepsilon_0)$  ce n'est qu'une approximation lisse de la fonction discontinue  $\mathbf{K}_0 \text{sign}(\mathbf{s})$  souvent considérée dans la commande robuste. Le choix du gain  $\mathbf{K}_0$  dépend de la dynamique de convergence souhaitée ainsi que de l'amplitude maximale des perturbations agissant sur le système. En revanche, la valeur de  $\varepsilon_0$  influe principalement sur les performances en régime établi.  $\square$

**Remarque 2.2.** Nous pouvons choisir aussi les erreurs filtrées  $s_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, q$ , comme suit :  $s_i(t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda_i\right)^{r_i} \int_0^t e_i(\tau) d\tau$ ,  $\lambda_i > 0$ . Ainsi, la stabilisation du vecteur  $\left[\int_0^t e_i(\tau) d\tau, e_i, \dots, e_i^{(r_i-1)}\right]^T$  se simplifie à la synthèse d'un contrôleur garantissant la convergence vers zéro du signal  $s_i(t)$ . De même, avec la bornitude du signal  $s_i(t)$  par une constante  $\Phi_i$  telle que  $|s_i(t)| \leq \Phi_i$ , nous obtenons  $\left|z_i^{(j)}(t)\right| \leq 2^j \lambda^{(j-r_i)} \Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ ,  $j = 0, \dots, r_i$  où  $z_i = \int_0^t e_i(\tau) d\tau$ . Pour ce choix, la dérivée temporelle des erreurs filtrées s'écrit  $\dot{s}_i(t) = \Lambda_i - f_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^q g_{ij}(\mathbf{x}) u_j$  avec  $\Lambda_i = y_{di}^{(r_i)} + \beta_{i,r_i} e_i^{(r_i-1)} + \dots + \beta_{i,1} e_i - \beta_{i,1} e_i(0)$  et  $\beta_{i,j} = \frac{(r_i)!}{(r_i-j+1)!(j-1)!} \lambda_i^{r_i-j+1}$ ,  $i = 1, \dots, q$ ,  $j = 1, \dots, r_i$ . Nous pouvons compléter ensuite la synthèse de la loi de commande avec les mêmes étapes.  $\square$

## 2.4. Conception de la commande PID adaptative proposée

Dans la section précédente, nous avons montré l'existence d'une commande idéale décrite par (2.9), celle-ci peut assurer les objectifs de commande. Néanmoins, cette commande ne peut être implémentée du moment qu'elle dépend des fonctions inconnues. Pour surmonter cette limitation, nous envisageons l'estimation de cette commande idéale  $\mathbf{u}^*$  par un contrôleur PID avec un mécanisme de mise à jour stable et robuste. L'erreur entre le contrôleur idéal et le contrôleur PID sera utilisée pour adapter les paramètres réglables du contrôleur PID.

### 2.4.1. Structure de la loi de commande

Pour développer la loi de commande, nous supposons que chaque élément du vecteur de commande  $\mathbf{u}^* = \left[u_1^*, \dots, u_q^*\right]^T$  peut être approximé par un contrôleur PID de la forme suivante

$$u_{pid_i} = K_{p_i} e_i(t) + K_{I_i} \int_0^t e_i(\tau) d\tau + K_{d_i} \frac{de_i(t)}{dt}, \quad i = 1, \dots, q \quad (2.13)$$

avec  $K_{p_i}$  est le gain proportionnel,  $K_{I_i}$  le gain intégral et  $K_{d_i}$  le gain de dérivation. Notons  $\Pi_i(e_i) = \left[ e_i(t), \int_0^t e_i(\tau) d\tau, \frac{de_i(t)}{dt} \right]^T$  et par  $\Theta_i = [K_{p_i}, K_{I_i}, K_{d_i}]^T$  le vecteur des gains du contrôleur PID. Nous soulignons ici que le vecteur  $\Theta_i$  sera ajusté durant la commande afin de bien approcher la commande idéale. Avec cette notation, nous pouvons écrire (2.13) sous la forme suivante

$$u_{pid_i}(e_i, \Theta_i) = \Pi_i^T(e_i) \Theta_i, \quad i = 1, \dots, q \quad (2.14)$$

Nous supposons, en plus, qu'il existe un vecteur des paramètres variables dans le temps  $\Theta_i^*$  avec des dérivées bornées tel que la commande idéale  $u_i^*$  vérifie

$$u_i^* = \Pi_i^T(e_i) \Theta_i^* + \varepsilon_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, q$$

avec  $\varepsilon_i(\mathbf{x})$  est l'erreur d'approximation,  $\Theta_i^*$  est un vecteur des paramètres optimaux qui minimisent la fonction  $|\varepsilon_i(\mathbf{x})|$ .

Notons  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = [\varepsilon_1(\mathbf{x}), \dots, \varepsilon_q(\mathbf{x})]^T$ ,  $\boldsymbol{\Theta}^* = [\Theta_1^{*T}, \dots, \Theta_q^{*T}]$  et  $\boldsymbol{\Pi}(e) = \text{diag}[\Pi_1(e_1), \dots, \Pi_q(e_q)]$ . Donc, nous pouvons écrire

$$\mathbf{u}^* = \boldsymbol{\Pi}^T(e) \boldsymbol{\Theta}^* + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad (2.15)$$

Tout le long de ce chapitre, l'hypothèse suivante sur l'erreur d'approximation  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  est retenue afin d'établir un résultat de stabilité.

**Hypothèse 2.3.** L'erreur d'approximation dans (2.15) est bornée comme suit

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{x}) \mathbf{G}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \leq \bar{\varepsilon}_0 \mathbf{e}_u^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u + \bar{\varepsilon}_1 \quad (2.16)$$

où  $\bar{\varepsilon}_0$  et  $\bar{\varepsilon}_1$  sont deux constantes positives avec  $\bar{\varepsilon}_0 < 0.5$ , et  $\mathbf{e}_u = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}$  est l'erreur à l'entrée du système définie dans (2.18).  $\square$

Puisque le vecteur des paramètres idéals  $\boldsymbol{\Theta}^*$  est inconnu, son estimation par une loi d'adaptation est notre objectif dans ce qui suit. Soit  $\boldsymbol{\Theta}$  une estimation du vecteur idéal  $\boldsymbol{\Theta}^*$ ; nous définissons la loi de commande comme une approximation PID adaptative du contrôleur idéal (2.15), *i.e.* la loi de commande pour le système (2.1) est choisie telle que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{pid} = \boldsymbol{\Pi}^T(e) \boldsymbol{\Theta} \quad (2.17)$$

Maintenant et après avoir spécifié la structure du contrôleur, l'objectif suivant est de concevoir un mécanisme d'adaptation pour le vecteur des paramètres réglables  $\boldsymbol{\Theta}$  pour assurer que la loi de commande  $\mathbf{u}_{pid}$  peut estimer au mieux la commande idéale inconnue  $\mathbf{u}^*$ .

#### 2.4.2. Conception de la loi d'adaptation

Nous allons concevoir une loi d'adaptation pour le vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\Theta}$ , et ceci, pour estimer la commande idéale (2.15) par le contrôleur PID (2.17). Le mécanisme d'adaptation sera développé

dans le but de minimiser un critère quadratique de l'erreur entre la commande idéale inconnue  $\mathbf{u}^*$  et la commande  $\mathbf{u}$  fournie par le contrôleur PID, tout en garantissant la bornitude des paramètres estimés ainsi que la stabilité de la boucle fermée. Pour cela, nous définissons l'erreur entre  $\mathbf{u}^*$  et  $\mathbf{u}$  par

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{u}^* - \mathbf{u} \quad (2.18)$$

En utilisant (2.15) et (2.17), l'erreur (2.18) entre la commande idéale  $\mathbf{u}^*$  et  $\mathbf{u}_{pid}$  s'écrit

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{u}^* - \mathbf{\Pi}^T(e) \mathbf{\Theta} = \mathbf{\Pi}^T(e) \tilde{\mathbf{\Theta}} + \varepsilon(\mathbf{x}) \quad (2.19)$$

avec  $\tilde{\mathbf{\Theta}} = \mathbf{\Theta}^* - \mathbf{\Theta}$  est le vecteur d'erreur des paramètres estimés.

Avec l'ajout et la soustraction de  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^*$  au membre de droite de l'équation différentielle (2.8), nous obtenons la dynamique d'erreur en boucle fermée suivante

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{\Lambda} - \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^* - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^* \quad (2.20)$$

avec (2.9) et (2.18), (2.20) devient

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{K}\mathbf{s} - \mathbf{K}_0 \tanh(\mathbf{s}/\varepsilon_0) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u \quad (2.21)$$

Considérons maintenant la fonction de coût quadratique  $J(\mathbf{\Theta})$ , qui mesure l'écart entre la commande idéale  $\mathbf{u}^*$  et la commande actuelle  $\mathbf{u}_{pid}$  fournie par le contrôleur PID, choisie comme

$$J(\mathbf{\Theta}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_u^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u = \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}^* - \mathbf{\Pi}^T(e) \mathbf{\Theta} \right)^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \left( \mathbf{u}^* - \mathbf{\Pi}^T(e) \mathbf{\Theta} \right) \quad (2.22)$$

La méthode de descente de gradient a été utilisée pour minimiser le critère (2.22). Avec cette méthode d'optimisation, nous obtenons la loi d'adaptation pour les paramètres  $\mathbf{\Theta}$  comme une équation différentielle de premier ordre de la forme suivante

$$\dot{\mathbf{\Theta}} = -\eta \nabla_{\mathbf{\Theta}} J(\mathbf{\Theta}) \quad (2.23)$$

avec  $\eta$  un paramètre constant positif. À partir de (2.22), le gradient de  $J(\mathbf{\Theta})$  par rapport à  $\mathbf{\Theta}$  est

$$\nabla_{\mathbf{\Theta}} J(\mathbf{\Theta}) = -\mathbf{\Pi}(e) \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u \quad (2.24)$$

Par conséquent, la loi d'adaptation (2.23) s'écrit

$$\dot{\mathbf{\Theta}} = \eta \mathbf{\Pi}(e) \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u \quad (2.25)$$

En effet, la commande idéale  $\mathbf{u}^*$  est inconnue, donc le signal  $\mathbf{e}_u$  défini dans (2.18) n'est pas disponible, et il s'ensuit que la loi d'adaptation ne peut pas être implémentée. Pour surmonter ce problème, nous allons utiliser par la suite l'équation (2.21). D'après (2.21), il vient que malgré le vecteur d'erreur  $\mathbf{e}_u$  n'est pas disponible, le vecteur  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u$  est disponible et il est donné par

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u = \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{K}\mathbf{s} + \mathbf{K}_0 \tanh(\mathbf{s}/\varepsilon_0) \quad (2.26)$$

avec ce choix, (2.25) devient

$$\dot{\Theta} = \eta \Pi(e) \{ \dot{s} + \mathbf{K} s + \mathbf{K}_0 \tanh(s/\varepsilon_0) \} \quad (2.27)$$

Avec la présence des erreurs d'approximation, la loi d'adaptation (2.27) ne peut pas garantir la bornitude des erreurs paramétriques  $\tilde{\Theta}$  ([70][73][74]). Donc, pour améliorer le mécanisme d'adaptation (2.27), nous modifions cette loi par l'ajout d'un terme  $\sigma$ —modification de la manière suivante

$$\dot{\Theta} = \eta \Pi(e) \{ \dot{s} + \mathbf{K} s + \mathbf{K}_0 \tanh(s/\varepsilon_0) \} - \eta \sigma \Theta \quad (2.28)$$

avec  $\sigma$  une petite constante positive. Il est important de signaler que la loi d'adaptation (2.27) est modifiée de telle sorte que la dérivée de la fonction de Lyapunov candidate, utilisée dans la section suivante pour analyser la stabilité en boucle fermée, soit définie négative dans l'espace des paramètres estimés lorsque ces paramètres dépassent certaines bornes ([70]).

### 2.4.3. Analyse de la stabilité en boucle fermée

Nous allons étudier les performances de la boucle fermée. En particulier, la convergence de l'erreur de poursuite ainsi que la stabilité de la boucle fermée et les conditions sur le choix des paramètres de conception. Pour cela, nous choisissons la fonction de Lyapunov suivante

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} + \frac{1}{2\eta} \tilde{\Theta}^T \tilde{\Theta} \quad (2.29)$$

La dérivée temporelle de la fonction (2.29) est donnée par

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} - \frac{1}{\eta} \tilde{\Theta}^T \dot{\Theta} + \frac{1}{\eta} \tilde{\Theta}^T \dot{\Theta}^* \quad (2.30)$$

En utilisant (2.21), (2.26) et (2.28), (2.30) s'écrit

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T (-\mathbf{K} s - \mathbf{K}_0 \tanh(s/\varepsilon_0) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) e_u) - \tilde{\Theta}^T (\Pi(e) \mathbf{G}(\mathbf{x}) e_u - \sigma \Theta) + \frac{1}{\eta} \tilde{\Theta}^T \dot{\Theta}^* \quad (2.31)$$

et à partir de (2.19), il vient

$$\dot{V} = -\mathbf{s}^T \mathbf{K} s - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_0 \tanh(s/\varepsilon_0) + \mathbf{s}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) e_u - \left( e_u^T - \varepsilon^T(\mathbf{x}) \right) \mathbf{G}(\mathbf{x}) e_u + \sigma \tilde{\Theta}^T \Theta + \frac{1}{\eta} \tilde{\Theta}^T \dot{\Theta}^* \quad (2.32)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{s}^T \mathbf{K} s - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_0 \tanh(s/\varepsilon_0) + \mathbf{s}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) e_u - e_u^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) e_u + \varepsilon^T(\mathbf{x}) \mathbf{G}(\mathbf{x}) e_u \\ & + \sigma \tilde{\Theta}^T \Theta + \frac{1}{\eta} \tilde{\Theta}^T \dot{\Theta}^* \end{aligned} \quad (2.33)$$

avec les inégalités suivantes

$$\sigma \tilde{\Theta}^T \Theta \leq -\frac{\sigma}{2} \|\tilde{\Theta}\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\Theta^*\|^2 \quad (2.34)$$

$$\varepsilon^T(\mathbf{x}) \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u \leq \frac{1}{4} \mathbf{e}_u^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u + \varepsilon^T(\mathbf{x}) \mathbf{G}(\mathbf{x}) \varepsilon(\mathbf{x}) \quad (2.35)$$

$$\frac{1}{\eta} \tilde{\Theta}^T \dot{\Theta}^* \leq \frac{\sigma}{4} \|\tilde{\Theta}\|^2 + \frac{1}{\sigma\eta^2} \|\dot{\Theta}^*\|^2 \quad (2.36)$$

$$\mathbf{s}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u \leq \frac{1}{4} \mathbf{e}_u^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u + \mathbf{s}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{s} \quad (2.37)$$

L'équation (2.33) peut être bornée de la manière suivante

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{2} \mathbf{e}_u^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_0 \tanh(s/\varepsilon_0) - \mathbf{s}^T (\mathbf{K} - \mathbf{G}(\mathbf{x})) \mathbf{s} - \frac{\sigma}{4} \|\tilde{\Theta}\|^2 \\ & + \frac{\sigma}{2} \|\Theta^*\|^2 + \frac{1}{\sigma\eta^2} \|\dot{\Theta}^*\|^2 + \varepsilon^T(\mathbf{x}) \mathbf{G}(\mathbf{x}) \varepsilon(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.38)$$

avec (2.16), (2.38) devient

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{2} \mathbf{e}_u^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_0 \tanh(s/\varepsilon_0) - \mathbf{s}^T (\mathbf{K} - \mathbf{G}(\mathbf{x})) \mathbf{s} - \frac{\sigma}{4} \|\tilde{\Theta}\|^2 \\ & + \frac{\sigma}{2} \|\Theta^*\|^2 + \frac{1}{\sigma\eta^2} \|\dot{\Theta}^*\|^2 + \bar{\varepsilon}_0 \mathbf{e}_u^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u + \bar{\varepsilon}_1 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ce qui peut être simplifié encore comme suit

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\left(\frac{1-2\bar{\varepsilon}_0}{2}\right) \mathbf{e}_u^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_0 \tanh(s/\varepsilon_0) - \mathbf{s}^T (\mathbf{K} - \mathbf{G}(\mathbf{x})) \mathbf{s} \\ & - \frac{\sigma}{4} \|\tilde{\Theta}\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\Theta^*\|^2 + \frac{1}{\sigma\eta^2} \|\dot{\Theta}^*\|^2 + \bar{\varepsilon}_1 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Comme le vecteur des paramètres  $\Theta^*$  et sa dérivée  $\dot{\Theta}^*$  sont supposés bornés, nous pouvons donc définir une borne constante et positive  $\Psi$ , telle que

$$\Psi = \sup_t \left( \frac{\sigma}{2} \|\Theta^*\|^2 + \frac{1}{\sigma\eta^2} \|\dot{\Theta}^*\|^2 + \bar{\varepsilon}_1 \right) \quad (2.41)$$

avec ce choix, (2.40) s'écrit

$$\dot{V} \leq -\left(\frac{1-2\bar{\varepsilon}_0}{2}\right) \mathbf{e}_u^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_0 \tanh(s/\varepsilon_0) - \mathbf{s}^T (\mathbf{K} - \mathbf{G}(\mathbf{x})) \mathbf{s} - \frac{\sigma}{4} \|\tilde{\Theta}\|^2 + \Psi \quad (2.42)$$

Supposons que les paramètres de conception  $k_i$  sont choisis tels que  $k_i > \bar{g}_1$ ,  $i = 1, \dots, q$ , et soit  $\gamma = \min(2 \times \min_{1 \leq i \leq q} (k_i - \bar{g}_1), \alpha)$ , l'inégalité (2.42) peut se mettre

$$\dot{V} \leq -\left(\frac{1-2\bar{\varepsilon}_0}{2}\right) \mathbf{e}_u^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_0 \tanh(s/\varepsilon_0) - \frac{\gamma}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} - \frac{\gamma}{2\eta} \|\tilde{\Theta}\|^2 + \Psi \quad (2.43)$$

ou bien

$$\dot{V} \leq -\gamma V + \Psi \quad (2.44)$$

Avec le théorème suivant nous pouvons prouver la bornitude de tous les signaux en boucle fermée ainsi que la convergence de l'erreur de poursuite vers un petit voisinage de zéro.

**Théorème 2.1.** *Considérons le système non linéaire (2.1). Supposons que les hypothèses 2.1, 2.2 et 2.3 sont satisfaites. La loi de commande (2.17) avec la loi d'adaptation (2.28) garantit :*

1. *La stabilité de la boucle fermée et la bornitude de tous les signaux ainsi que la convergence de l'erreur de poursuite vers un petit voisinage autour de zéro ;*
2. *En l'absence de l'erreur d'approximation, i.e.  $\varepsilon_i(\mathbf{x}) = 0$  et  $u_i^* = \Pi_i^T(e_i) \Theta_i^*$  pour  $i = 1, \dots, q$ , avec un vecteur des paramètres optimums  $\Theta_i^*$  constant, i.e.  $\dot{\Theta}_i^* = 0$ , en mettant  $\sigma = 0$  dans (2.40), nous pouvons prouver que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{s}(t)\| = 0$ . Par conséquent, dans ce cas, il est possible de démontrer que l'erreur de poursuite est asymptotiquement stable, i.e.  $e_i(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  pour  $i = 1, \dots, q$ .*

■

**Preuve.** En utilisant (2.44), nous pouvons écrire

$$V(t) \leq V(0) e^{-\gamma t} + \frac{\Psi}{\gamma} \quad (2.45)$$

À partir de (2.45), on conclut que pour  $V \geq \frac{\Psi}{\gamma}$  nous avons  $\dot{V} \leq 0$ . Donc, en se basant sur le théorème de Lyapunov, les signaux en boucle fermée  $\mathbf{s}(t)$ ,  $\tilde{\Theta}(t)$  et  $\mathbf{u}(t)$  sont bornés. En plus, d'après (2.29) et (2.45), nous pouvons écrire  $\|\mathbf{s}(t)\| \leq \sqrt{\|\mathbf{s}(0)\|^2 + \frac{1}{\eta} \|\tilde{\Theta}(0)\|^2} e^{-0.5\gamma t} + \sqrt{\frac{2\Psi}{\gamma}}$ , et afin d'assurer la convergence de l'erreur de poursuite vers un petit voisinage de zéro, il suffit de choisir des valeurs appropriées pour les paramètres  $k_i$ ,  $\sigma$  et  $\eta$ . Par conséquent, il est possible de rendre  $\sqrt{\frac{2\Psi}{\gamma}}$  aussi petit que désiré. Notons  $\Phi = \sqrt{\frac{2\Psi}{\gamma}}$ , comme  $e^{-0.5\gamma t} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , il existe un temps  $T$  tel que  $\|\mathbf{s}(t)\| \leq \Phi$  pour  $t > T$ . Donc, les erreurs de poursuite convergent vers des ensembles résiduels tels que  $|e_i^{(j)}(t)| \leq 2^j \lambda_i^{(j-r_i+1)} \Phi$ ,  $j = 0, \dots, r_i - 1$ ,  $i = 1, \dots, q$ .

Considérons le cas où  $\sigma = 0$  et  $\varepsilon_i(\mathbf{x}) = 0$ , pour  $i = 1, \dots, q$ , avec  $\Theta_i^*$  constant, à partir de (2.40), nous obtenons l'inégalité suivante

$$\dot{V} \leq - \left( \frac{1 - 2\bar{\varepsilon}_0}{2} \right) \mathbf{e}_u^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_u - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_0 \tanh(\mathbf{s}/\varepsilon_0) - \mathbf{s}^T (\mathbf{K} - \mathbf{G}(\mathbf{x})) \mathbf{s} \quad (2.46)$$

Choisissons  $\kappa = \min_{1 \leq i \leq q} (k_i - \bar{g}_1)$ , on obtient

$$\dot{V} \leq -\frac{\kappa}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} \quad (2.47)$$

En intégrant (2.47), il vient

$$V(t) - V(0) \leq -\frac{\kappa}{2} \int_0^t \|\mathbf{s}(\tau)\|^2 d\tau \quad (2.48)$$

Comme  $V(t) \geq 0$  et bornée, en utilisant (2.29), l'inégalité (2.48) peut se réécrire comme suit

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\mathbf{s}(\tau)\|^2 d\tau &\leq 2\kappa^{-1} (V(0) - V(t)) \\ &\leq \kappa^{-1} \left( \|\mathbf{s}(0)\|^2 + \frac{1}{\eta} \|\tilde{\Theta}(0)\|^2 + 2 \sup_{t \geq 0} V(t) \right) < \infty \end{aligned} \quad (2.49)$$

À partir de (2.49), on conclut que  $\mathbf{s} \in L_2$ . Puisque toutes les variables dans le membre de droite de l'équation (2.21) sont bornées, on déduit donc que  $\dot{\mathbf{s}} \in L_\infty$ . En utilisant le lemme de Barbalat ([3]), du fait que  $\mathbf{s} \in L_2 \cap L_\infty$  et  $\dot{\mathbf{s}} \in L_\infty$ , par conséquent  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{s}(t)\| = 0$ , ce qui implique que  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) \rightarrow 0$ .  $\blacktriangle$

**Remarque 2.3.** Puisque la loi d'adaptation (2.28) possède une structure intégrale, cette loi de mise à jour peut être implémentée malgré la présence de la dérivée temporelle de  $\mathbf{s}(t)$ . Pour montrer ça, nous réécrivons (2.28) comme suit

$$\dot{\Theta}_i = \eta \Pi_i(e_i) \{ \dot{s}_i + k_i s_i + k_{0i} \tanh(s_i/\varepsilon_0) \} - \eta \sigma \Theta_i, \quad i = 1, \dots, q \quad (2.50)$$

À partir de (2.6) et (2.7), la dérivée temporelle  $\dot{s}_i(t)$  peut être écrite par

$$\dot{s}_i(t) = \varpi_i + e_i^{(r_i)} \quad (2.51)$$

avec  $\varpi_i = \beta_{i,r_i-1} e_i^{(r_i-1)} + \dots + \beta_{i,1} \dot{e}_i$ . Donc, (2.50) peut se mettre

$$\dot{\Theta}_i = \eta \Pi_i(e_i) e_i^{(r_i)} + \varphi_i \quad (2.52)$$

où  $\varphi_i = \eta \Pi_i(e_i) \{ \varpi_i + k_i s_i + k_{0i} \tanh(s_i/\varepsilon_0) \} - \eta \sigma \Theta_i$ . À partir de (2.52), nous obtenons  $\Theta_i(t)$  sous la forme suivante

$$\Theta_i(t) = \Theta_i(0) + \int_0^t \varphi_i d\tau + \eta \int_0^t \left( \Pi_i(e_i) e_i^{(r_i)} \right) d\tau \quad (2.53)$$

Le premier terme  $\int_0^t \varphi_i d\tau$  est simple à calculer puisque  $\varphi_i$  dépend uniquement des signaux mesurables. Cependant, le deuxième terme  $\eta \int_0^t \left( \Pi_i(e_i) e_i^{(r_i)} \right) d\tau$  soulève la question sur la disponibilité du signal  $e_i^{(r_i)}(t)$ . Comme  $\Pi_i(e_i) = [e_i(t), z_i(t), \dot{e}_i(t)]^T$  avec  $z_i(t) = \int_0^t e_i(\tau) d\tau$ , en utilisant l'intégration par parties, les éléments du vecteur  $\int_0^t \left( \Pi_i(e_i) e_i^{(r_i)} \right) d\tau$  peuvent être calculés sans utiliser  $e_i^{(r_i)}(t)$ .

Le premier terme  $\int_0^t \left( e_i e_i^{(r_i)} \right) d\tau$  est calculé par

$$\int_0^t \left( e_i e_i^{(r_i)} \right) d\tau = e_i e_i^{(r_i-1)} \Big|_0^t - \int_0^t \left( \dot{e}_i e_i^{(r_i-1)} \right) d\tau \quad (2.54)$$

et le deuxième terme  $\int_0^t \left( z_i e_i^{(r_i)} \right) d\tau$  par

$$\int_0^t \left( z_i e_i^{(r_i)} \right) d\tau = z_i e_i^{(r_i-1)} \Big|_0^t - \int_0^t \left( e_i e_i^{(r_i-1)} \right) d\tau \quad (2.55)$$

le troisième élément  $\int_0^t \left( \dot{e}_i e_i^{(r_i)} \right) d\tau$  est obtenu comme suit

$$\begin{aligned} \int_0^t \left( \dot{e}_i e_i^{(r_i)} \right) d\tau &= \dot{e}_i e_i^{(r_i-1)} \Big|_0^t - \int_0^t \left( \ddot{e}_i e_i^{(r_i-1)} \right) d\tau && \text{pour } r \geq 3 \\ \int_0^t \left( \dot{e}_i e_i^{(r_i)} \right) d\tau &= \int_0^t \left( \dot{e}_i \ddot{e}_i \right) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \left( \frac{d\dot{e}_i^2}{dt} \right) d\tau = \frac{1}{2} \dot{e}_i^2(t) - \frac{1}{2} \dot{e}_i^2(0) && \text{pour } r = 2 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Donc, la loi d'adaptation peut être implémentée malgré la présence de  $\dot{s}_i(t)$ .  $\square$

## 2.5. Description et modélisation du simulateur d'hélicoptère à 3DOF

Le système considéré dans ce chapitre pour la validation expérimentale de la commande PID adaptative stable proposée précédemment est une maquette d'un hélicoptère à 3DOF type tandem<sup>3</sup> fabriqué par le constructeur Quanser ([75]). Une vue générale de ce simulateur d'hélicoptère est illustrée par la figure 2.1. Ce simulateur est destiné à l'enseignement et à la recherche sur la modélisation et la commande de ce type d'hélicoptères. Vu la complexité de sa structure, la modélisation et la commande de ce système requièrent une attention particulière par l'opérateur aussi bien pour la phase de conception que pour la phase de validation.



FIGURE 2.1: Vue générale du simulateur d'hélicoptère à 3DOF Quanser.

### 2.5.1. Présentation générale

Le simulateur d'hélicoptère est constitué d'une base avec un bras sur lequel le corps de l'hélicoptère est monté sur un côté et un contrepoids de l'autre. Cet hélicoptère possède 3 degrés de liberté dénommés et notés *Elevation* ( $\psi$ ), *Pitch* ( $\theta$ ) et *Travel* ( $\phi$ ). Comme il est montré sur la figure 2.2, le bras peut s'incliner autour d'un axe horizontal (*Elevation*) et il peut pivoter aussi autour d'un axe vertical (*Travel*). Quant au corps de l'hélicoptère composé par les deux hélices, il peut tourner autour de l'axe de tangage (*Pitch*). Le corps du simulateur d'hélicoptère est équipé de deux moteurs à courant continu en parallèle qui entraînent les deux hélices. Ces deux moteurs peuvent produire des forces de poussée proportionnelles à la tension appliquée aux moteurs. Le contrepoids peut réduire l'alimentation électrique sur les moteurs et elle reste ainsi dans un dimensionnement raisonnable. Ce contrepoids est ajusté de sorte que la masse efficace du corps soit appropriée.

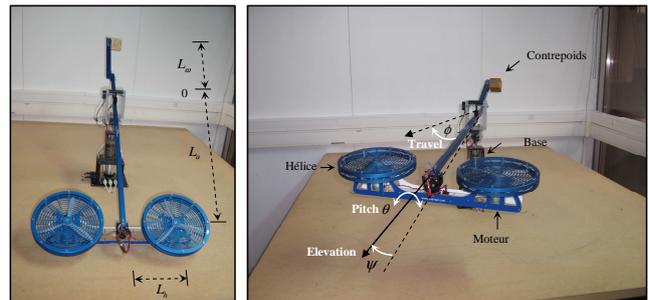


FIGURE 2.2: Composition et description de l'hélicoptère à 3DOF.

3. Dans un hélicoptère tandem, les rotors sont les mêmes mais tournent dans des sens opposés, ce qui annule le couple de renversement (*e.g.* l'hélicoptère militaire **CH-47 Chinook** de transport lourd fabriqué par Boeing).

### 2.5.2. Equipement et instrumentation

La maquette d'hélicoptère à 3DOF est dotée des cartes d'acquisition analogiques/numériques qui reçoivent les signaux en provenance du système et de l'ordinateur, elles les traitent et assurent aussi la conversion de ces signaux dans l'unité de mesure convenable. La figure 2.3 nous donne une idée sur la structure générale du procédé et la communication entre les différents modules.

La position de l'hélicoptère est mesurée par des codeurs placés sur chaque axe. Les mesures fournies par ces codeurs sont récupérées par la carte PCI-QUAD04. De son côté, la carte PCI-DAS1002 reçoit les signaux envoyés par l'ordinateur (les commandes). Le module UPM-2405 a pour rôle l'amplification à un niveau suffisant la puissance des commandes envoyées aux moteurs.

L'implémentation des algorithmes de commande ou d'observation développés est possible soit sous l'environnement Simulink du logiciel MATLAB avec Real Time Windows Target ou bien en langage C ou C++ suivant le compilateur choisi.

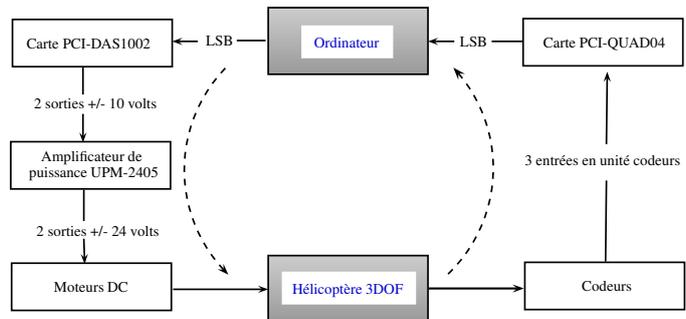


FIGURE 2.3: Schéma de principe de l'installation - Aspects matériels.

### 2.5.3. Modèle dynamique de l'hélicoptère

La modélisation dynamique du simulateur d'hélicoptère consiste en général à établir une représentation mathématique, en fonction du temps, décrivant comment l'hélicoptère se déplace en réponse aux forces et aux couples générés par ses actionneurs. En se basant sur la deuxième loi de Newton ou le formalisme de Lagrange, nous pouvons avoir un modèle mathématique de la dynamique de l'hélicoptère à 3DOF, et ce, afin de simuler le comportement de ce système ou bien pour la synthèse des lois de commande ou d'observation. Dans ce qui vient, nous allons donner le modèle dynamique de Newton de cette maquette. La figure 2.4 met en évidence l'ensemble des forces qui interviennent dans la dynamique de cet hélicoptère.

La conception du modèle dynamique de la maquette d'hélicoptère repose sur l'application de la seconde loi de Newton pour les solides en rotation. Les hypothèses retenues dans le développement du modèle sont les suivantes ([92][74]) :

- La masse du système est répartie sur trois points (les deux moteurs et le contreponds) ;

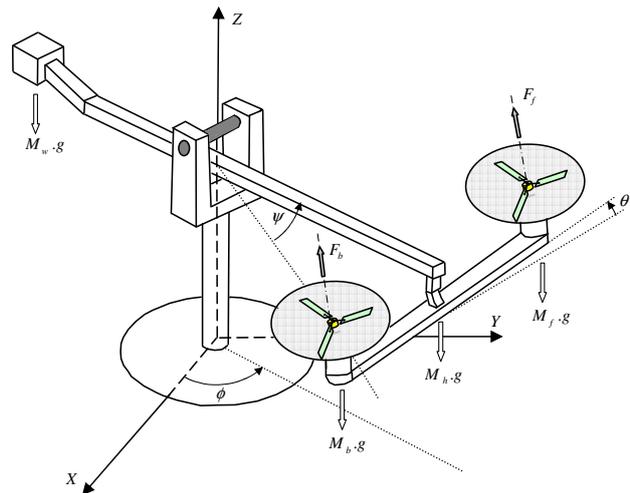


FIGURE 2.4: Principales forces agissant sur la dynamique de l'hélicoptère à 3DOF.

- Les frottements selon les trois axes de rotation ainsi que les produits d'inertie sont négligés ;
- Les solides qui composent le système sont considérés indéformables ;
- La force de portance produite par chaque moteur est proportionnelle à la tension :  $F_f = K_f \cdot V_f$  et  $F_b = K_f \cdot V_b$ .

En se basant sur le principe d'équilibre de l'ensemble mécanique et en tenant compte des hypothèses précédentes, le modèle dynamique résultant est le suivant ([92][74][93])

$$\begin{aligned}
J_\phi \ddot{\psi} &= M_h g \cos(\phi) L_a - M_w g \cos(\phi) L_w - f_\psi(\dot{\psi}) + K_f (V_f + V_b) \cos(\theta) L_a \\
J_\theta \ddot{\theta} &= K_f (V_f - V_b) L_h - f_\theta(\dot{\theta}) \\
J_\psi \ddot{\phi} &= -f_\phi(\dot{\phi}) + K_f (V_f + V_b) (\cos(\psi)) \sin(\theta) L_a
\end{aligned} \tag{2.57}$$

avec  $f_\psi(\dot{\psi})$ ,  $f_\theta(\dot{\theta})$  et  $f_\phi(\dot{\phi})$  sont les frottements aérodynamiques. Les autres grandeurs physiques ainsi que leurs valeurs numériques sont présentées dans le tableau 2.1.

TABLE 2.1: Paramètres du simulateur d'hélicoptère Quanser à 3DOF

Symbole	Description	Valeur	Unité
$V_f$ et $V_b$	Tensions respectives sur le moteur avant et arrière	$[-24; +24]$	$V$
$K_f$	Coefficient qui permet de convertir les tensions en forces	0.1188	$N/V$
$g$	Constante de pesanteur	9.81	$m.s^2$
$M_h$	Masse de l'hélicoptère	1.426	$Kg$
$M_w$	Masse du contrepoids	1.87	$Kg$
$L_a$	Distance Hélicoptère-Point "0"	0.660	$m$
$L_w$	Distance contrepoids-Point "0"	0.470	$m$
$L_h$	Distance Moteur-Axe <i>Pitch</i>	0.178	$m$
$J_\varepsilon$	Inertie principale selon l'axe <i>Elevation</i>	1.0348	$Kg.m^2$
$J_\theta$	Inertie principale selon l'axe <i>Pitch</i>	0.0451	$Kg.m^2$
$J_\psi$	Inertie principale selon l'axe <i>Travel</i>	1.0348	$Kg.m^2$

Notons  $u_1 = V_f + V_b$  et  $u_2 = V_f - V_b$ , le système (2.57) devient

$$\begin{aligned}
\ddot{\psi} &= \frac{1}{J_\psi} \left( M_h g \cos(\psi) L_a - M_w g \cos(\psi) L_w - f_\psi(\dot{\psi}) \right) + \frac{1}{J_\psi} (K_f \cos(\theta) L_a) u_1 \\
\ddot{\theta} &= \frac{1}{J_\theta} \left( -f_\theta(\dot{\theta}) \right) + \frac{1}{J_\theta} K_f L_h u_2 \\
\ddot{\phi} &= \frac{1}{J_\phi} \left( -f_\phi(\dot{\phi}) \right) + \frac{1}{J_\phi} K_f L_a \cos(\psi) \sin(\theta) u_1
\end{aligned} \tag{2.58}$$

D'après le modèle dynamique (2.58), on constate bien que lorsque le *Pitch* est à zéro, il n'est pas possible de générer d'accélération en *Travel*. Ce phénomène typique des engins de vol se traduit par le fait que ces systèmes ne peuvent pas virer à plat. De même, lorsque le *Pitch* est à  $90^\circ$ , le système ne peut pas être commandable en *Elevation*. De ce fait, l'hélicoptère est positionné le long de l'axe vertical : il est donc impossible de générer une force capable de changer l'altitude de l'hélicoptère. De ce qui précède, il vient que le sens physique du procédé se retrouve bien au travers les équations du modèle dynamique.

#### 2.5.4. Analyse bibliographique

La commande du simulateur d'hélicoptère à 3DOF du constructeur Quanser a été l'objet de plusieurs travaux de recherche ces dernières années. Ceci est motivé, d'un côté, par la grande ressemblance existante entre ce simulateur et un hélicoptère réel de type tandem. De l'autre côté, il est plus pratique et moins coûteux de travailler, en premier temps et en phase de validation, sur ce simulateur que sur un hélicoptère réel. Puisque l'hélicoptère à 3DOF est fortement couplé et gouverné par une dynamique non linéaire instable et aussi sujette aux incertitudes paramétriques, la commande de ce système est une tâche délicate.

Plusieurs chercheurs ont étudié la commande de ce système. Dans ([94]), une loi de commande  $H_\infty$  est développée avec l'utilisation de l'approche de contraintes virtuelles pour décrire le comportement désiré. Dans ([95]), les auteurs proposent, avec validation expérimentale, une commande adaptative neuronale par retour de sortie basée sur l'inversion du modèle par une commande linéarisante avec la compensation des erreurs de modélisation par un réseau de neurones. La référence ([96]) expose une commande prédictive non linéaire à base des réseaux de neurones. Dans cette approche, un modèle linéaire extrait du réseau de neurones identifiant la dynamique de l'hélicoptère est utilisé pour prédire la future sortie. Dans ([97]), une approche pour l'estimation d'état et la commande d'un hélicoptère à 3DOF est présentée avec une étude expérimentale. Un algorithme de commande pour la poursuite de trajectoire sous contraintes sur l'entrée et l'état est synthétisé dans ([98]). Le système de commande est constitué d'une commande par action anticipée et d'une commande optimale LQ à temps variable. Dans ([99]), deux stratégies de commande robustes pour ce système sont présentées. La première est une commande quasi-continue à base d'un différentiateur à mode de glissement et la deuxième est une commande PID avec un observateur par mode de glissement d'ordre supérieur. Dans ([100]), une stratégie de commande robuste est proposée, elle est composée d'un terme de commande nominal, conçu pour obtenir une poursuite exacte du modèle nominal, et d'un compensateur robuste des effets des perturbations. Une étude expérimentale comparative a été menée dans ([101]) entre deux approches de commande adaptative, avec retour d'état et avec retour de sortie, développées à l'aide des réseaux de neurones. Dans ([102]), les auteurs présentent un modèle dynamique pour cet hélicoptère développé à base du formalisme de Lagrange et proposent une commande par platitude pour les angles.

D'autres approches de commande pour cet hélicoptère peuvent être trouvées dans la littérature telles que la commande par la logique floue dans ([103]) et dans des références citées là-dedans ainsi que la commande par backstepping dans ([104]).

### 2.6. Application de la commande PID adaptative à l'hélicoptère à 3DOF

Le but de ce paragraphe est de présenter la mise en oeuvre expérimentale de la commande PID adaptative, développée dans ce chapitre, pour le pilotage du simulateur d'hélicoptère à 3DOF. Les performances de cette approche seront illustrées au travers des résultats expérimentaux issus de cette application. Pour ce système, l'objectif de la commande était d'assurer la convergence des deux angles *Elevation* et *Travel* ( $\psi, \phi$ ) vers des trajectoires désirées ( $\psi_d, \phi_d$ ). En outre, comme la commande de l'angle *Travel* requiert le pilotage de l'angle *Pitch*, un autre contrôleur est nécessaire pour assurer aussi la convergence de l'angle  $\theta$  vers sa valeur désirée  $\theta_d$ . Du coup, trois contrôleurs

PID de la forme (2.13) avec un mécanisme d'adaptation de la forme (2.28) ont été utilisés afin d'atteindre les objectifs de commande.

### 2.6.1. Conception d'une commande PID adaptative pour l'hélicoptère à 3DOF

D'après la structure mécanique et le modèle dynamique du simulateur d'hélicoptère décrit par (2.58), il existe un couplage prépondérant entre le *Pitch* et le *Travel*, il y aura un changement de direction (*Travel*) si le *Pitch* est différent de zéro. Nous constatons aussi que la dynamique de l'angle *Travel* ( $\phi$ ) dépend de la commande  $u_1$ . En effet, l'entrée  $u_1$  est la poussée totale produite par les deux moteurs, et, qui est responsable de la dynamique des angles *Travel* et *Elevation* par ses deux composantes, respectivement,  $u_1 \sin(\theta)$  et  $u_1 \cos(\theta)$ . Choisissons le terme  $u_1 \sin(\theta)$ , comme étant l'entrée de manipulation pour la dynamique de l'angle *Travel*  $\phi$  et notons  $u_3 = u_1 \sin(\theta)$ . La commande  $u_3$ , en effet, elle n'est qu'une commande virtuelle utilisée pour générer instantanément l'angle de *Pitch* désiré  $\theta_d(t)$  qui conduira à l'angle de *Travel* désiré  $\phi_d(t)$ . Tel que,

$$\theta_d = \arcsin\left(\frac{u_3}{u_1 + \Delta\varepsilon}\right) \quad (2.59)$$

avec  $\Delta\varepsilon$  une petite constante positive.

Considérons de nouveau le modèle dynamique du simulateur d'hélicoptère à 3DOF, avec le choix de  $u_3$ , le système (2.58) se réécrit par

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= \frac{1}{J_\psi} \left( M_h g \cos(\psi) L_a - M_w g \cos(\psi) L_w - f_\psi(\dot{\psi}) \right) + \frac{1}{J_\psi} (K_f \cos(\theta) L_a) u_1 \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{J_\theta} \left( -f_\theta(\dot{\theta}) \right) + \frac{1}{J_\theta} K_f L_h u_2 \\ \ddot{\phi} &= \frac{1}{J_\phi} \left( -f_\phi(\dot{\phi}) \right) + \frac{1}{J_\phi} K_f L_a \cos(\psi) u_3 \end{aligned} \quad (2.60)$$

Afin de simplifier l'application de la commande PID adaptative développée précédemment à l'hélicoptère à 3DOF, nous définissons  $\mathbf{y} = [\psi, \theta, \phi]$  comme le vecteur de sortie,  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$  comme le vecteur d'entrée de commande et le vecteur d'état par  $\mathbf{x} = [\psi, \dot{\psi}, \theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}]$ . Notons aussi  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x})]^T$  et  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), g_3(\mathbf{x})]^T$  avec les éléments  $f_i(\mathbf{x})$  et  $G_i(\mathbf{x})$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , sont donnés par  $f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{J_\psi} \left( M_h g \cos(\psi) L_a - M_w g \cos(\psi) L_w - f_\psi(\dot{\psi}) \right)$ ,  $f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{J_\theta} \left( -f_\theta(\dot{\theta}) \right)$ ,  $f_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{J_\phi} \left( -f_\phi(\dot{\phi}) \right)$ ,  $g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{J_\psi} (K_f \cos(\theta) L_a)$ ,  $g_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{J_\theta} K_f L_h$  et  $g_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{J_\phi} K_f L_a \cos(\psi)$ .

Au vu de ce qui précède, la dynamique du système (2.60) devient

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (2.61)$$

Par conséquent, cette dernière est dans la forme entrée sortie générale définie dans (2.3) avec  $q = 3$  dans ce cas. De plus, comme  $-1 \text{ [rad]} < \theta < +1 \text{ [rad]}$  et  $-0.25\pi \text{ [rad]} < \psi < +0.25\pi \text{ [rad]}$ , nous avons  $g_1(\mathbf{x}) > 0$  et  $g_3(\mathbf{x}) > 0$ , donc la matrice  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  est définie positive. La convergence des angles ( $\psi, \theta, \phi$ ) vers leurs trajectoires désirées ( $\psi_d(t), \theta_d(t), \phi_d(t)$ ) peut être réalisée par les entrées ( $u_1, u_2, u_3$ ). Afin d'atteindre cet objectif, dans ce qui suit, nous allons détailler la structure du contrôleur de chaque angle.

Premièrement, nous définissons les erreurs de poursuite  $(e_\psi, e_\theta, e_\phi)$  et les erreurs filtrées  $(s_\psi, s_\theta, s_\phi)$  comme suit

$$\begin{aligned} s_\psi(t) &= \left( \frac{d}{dt} + \lambda_\psi \right) e_\psi(t), & e_\psi &= \psi_d - \psi \\ s_\theta(t) &= \left( \frac{d}{dt} + \lambda_\theta \right) e_\theta(t), & e_\theta &= \theta_d - \theta \\ s_\phi(t) &= \left( \frac{d}{dt} + \lambda_\phi \right) e_\phi(t), & e_\phi &= \phi_d - \phi \end{aligned} \quad (2.62)$$

avec  $\lambda_\psi > 0$ ,  $\lambda_\theta > 0$  et  $\lambda_\phi > 0$ . Les entrées  $(u_1, u_2, u_3)$  sont choisies comme étant les sorties des trois contrôleurs PID définis par

$$\begin{aligned} u_1 &= K_{p_\psi} e_\psi(t) + K_{I_\psi} \int_0^t e_\psi(\tau) d\tau + K_{d_\psi} \frac{de_\psi(t)}{dt} \\ u_2 &= K_{p_\theta} e_\theta(t) + K_{I_\theta} \int_0^t e_\theta(\tau) d\tau + K_{d_\theta} \frac{de_\theta(t)}{dt} \\ u_3 &= K_{p_\phi} e_\phi(t) + K_{I_\phi} \int_0^t e_\phi(\tau) d\tau + K_{d_\phi} \frac{de_\phi(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.63)$$

et adaptés en ligne par la loi d'adaptation des gains suivante

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_\psi &= \eta \Pi_\psi(e_\psi) \{ \dot{s}_\psi + k_\psi s_\psi + k_{0\psi} \tanh(s_\psi/\varepsilon_0) \} - \eta \sigma \Theta_\psi, & \Theta_\psi &= [K_{p_\psi}, K_{I_\psi}, K_{d_\psi}] \\ \dot{\Theta}_\theta &= \eta \Pi_\theta(e_\theta) \{ \dot{s}_\theta + k_\theta s_\theta + k_{0\theta} \tanh(s_\theta/\varepsilon_0) \} - \eta \sigma \Theta_\theta, & \Theta_\theta &= [K_{p_\theta}, K_{I_\theta}, K_{d_\theta}] \\ \dot{\Theta}_\phi &= \eta \Pi_\phi(e_\phi) \{ \dot{s}_\phi + k_\phi s_\phi + k_{0\phi} \tanh(s_\phi/\varepsilon_0) \} - \eta \sigma \Theta_\phi, & \Theta_\phi &= [K_{p_\phi}, K_{I_\phi}, K_{d_\phi}] \end{aligned} \quad (2.64)$$

Comme il est déjà démontré précédemment, les contrôleurs PID donnés par (2.63) avec les lois de mise à jour de leurs gains définies par (2.64) assurent la convergence des angles  $(\psi, \theta, \phi)$  vers les angles désirés  $(\psi_d, \theta_d, \phi_d)$ . Les tensions  $V_f$  et  $V_b$  appliquées aux deux moteurs avant et arrière sont calculées à partir de  $u_1$  et  $u_2$  par la relation suivante

$$\begin{cases} V_f = 0.5(u_1 + u_2) \\ V_b = 0.5(u_1 - u_2) \end{cases} \quad (2.65)$$

Après avoir illustré et décortiqué la structure des trois contrôleurs PID et leurs lois de mise à jour, nous allons présenter dans la partie suivante les résultats expérimentaux obtenus.

### 2.6.2. Résultats expérimentaux

La loi de commande PID adaptative appliquée au simulateur d'hélicoptère à 3DOF a été implémentée sous l'environnement SIMULINK de MATLAB et Real Time Workshope avec une période d'échantillonnage  $\Delta t = 0.001 \text{ sec}$ . La structure de commande est illustrée sur la figure 2.5 et les paramètres de l'hélicoptère utilisés sont donnés dans le Tableau 2.1. Pour cette expérimentation, le scénario de la commande que nous avons adopté c'était de déplacer l'hélicoptère de la position initiale  $(\psi = 0^\circ, \phi = 0^\circ)$  vers la position  $(\psi = 20^\circ, \phi = -20^\circ)$ . Pour rendre les trajectoires de référence des courbes lisses, ce qui répond à la supposition 2.2, les angles désirés choisis sont filtrés. Tels que, la trajectoire de  $\psi_d(t)$  est la sortie du filtre de deuxième ordre  $H_\psi = 1/(p+1)^2$  avec  $p$  est l'opérateur de Laplace, la trajectoire calculée pour  $\theta_d(t)$  est la sortie du filtre de premier ordre  $H_\theta = 1/(p+1)$  et la trajectoire de  $\phi_d(t)$  est la sortie du filtre de sixième ordre  $H_\phi = 1/(p+1)^6$ . Les paramètres des trois contrôleurs utilisés en expérimentation sont les suivants :  $\lambda_\psi = \lambda_\phi = 150$  et  $\lambda_\theta = 100$  pour

les erreurs filtrées,  $k_\psi = k_\theta = 3$ ,  $k_\phi = 0.3$ ,  $k_{0\psi} = k_{0\theta} = k_{0\phi} = 0.1$ ,  $\eta = 25$ ,  $\sigma = 0.001$  et  $\varepsilon_0 = 0.01$  pour les lois de mise à jour des gains. Les valeurs initiales des paramètres estimés sont choisies par  $\Theta_\psi(0) = \Theta_\theta(0) = [0, 0, 0]^T$  et  $\Theta_\phi(0) = [0, 0, 50]^T$ .

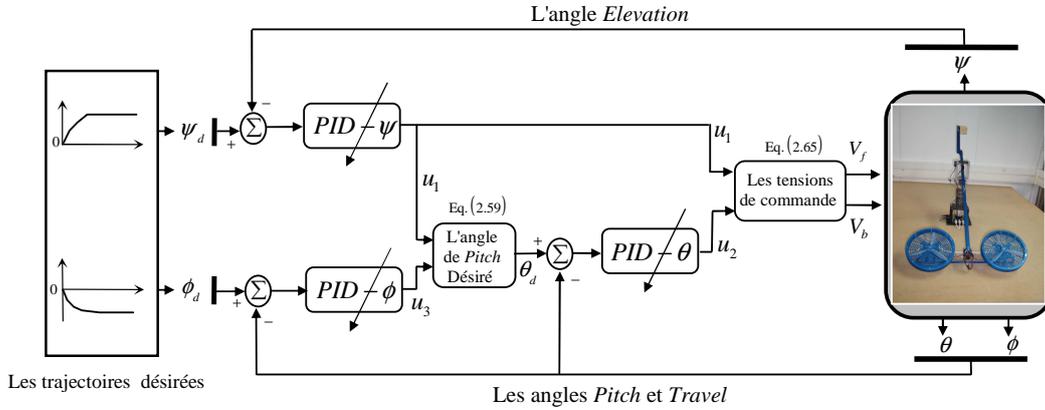


FIGURE 2.5: La commande PID adaptative appliquée à l'hélicoptère à 3DOF.

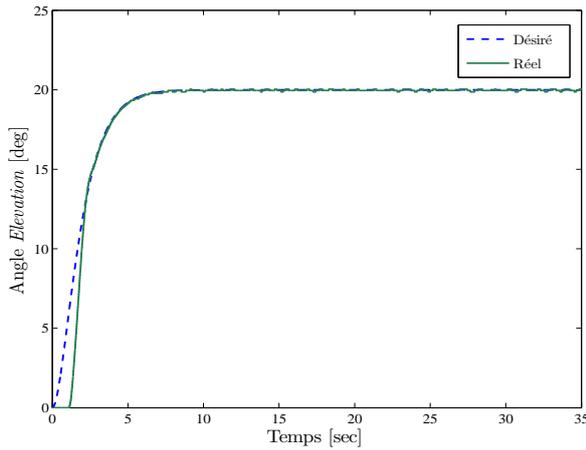


Figure 2.6: Trajectoires  $\psi(t)$  et  $\psi_d(t)$ .

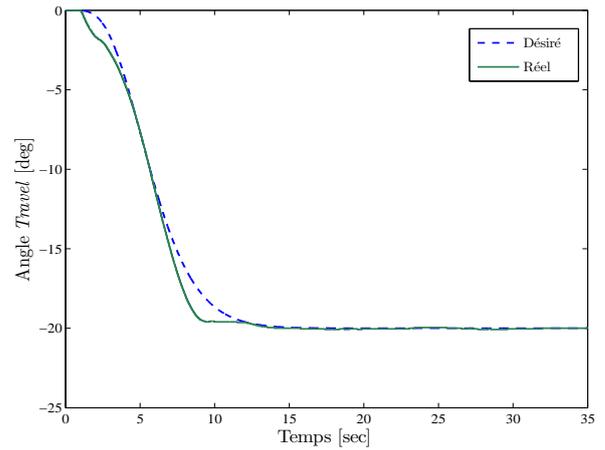


Figure 2.7: Trajectoires  $\phi(t)$  et  $\phi_d(t)$ .

Les figures 2.6 à 2.13 exposent les résultats issus de l'étude expérimentale en utilisant les paramètres des contrôleurs choisis dans le paragraphe précédent. D'après les figures 2.6 et 2.7, il est clair que les deux angles ( $\psi(t)$ ,  $\phi(t)$ ) convergent vers leurs références ( $\psi_d(t)$ ,  $\phi_d(t)$ ). Nous pouvons constater que  $\psi(t)$  rejoint sa trajectoire désirée en environ 2 sec. et  $\phi(t)$  en environ 3 sec. La figure 2.8 révèle bien la convergence de l'angle  $\Theta(t)$  vers sa référence  $\Theta_d(t)$  au bout de 6 sec. Néanmoins, la poursuite dans le cas de l'angle *Pitch* s'est montré moins performante par rapport au cas des deux angles *Travel* et *Elevation*. Les tensions  $V_f$  et  $V_b$  appliquées aux deux moteurs, avant et arrière, sont présentées sur les figures 2.9 et 2.10. Nous remarquons bien que les deux tensions ne saturent pas et restent dans la plage de fonctionnement, *i.e.*  $[-24V; +24V]$ . En ce qui concerne les gains des trois contrôleurs, la figure 2.11 présente l'évolution temporelle des gains  $K_{p_\psi}$ ,  $K_{I_\psi}$  et  $K_{d_\psi}$ , les gains  $K_{p_\phi}$ ,  $K_{I_\phi}$  et  $K_{d_\phi}$  sont donnés dans la figure 2.12 et les gains  $K_{p_\theta}$ ,  $K_{I_\theta}$  et  $K_{d_\theta}$  sont illustrés sur la figure 2.13. Sur ces figures, il apparaît bien que les trois gains estimés de chaque contrôleur sont bornés.

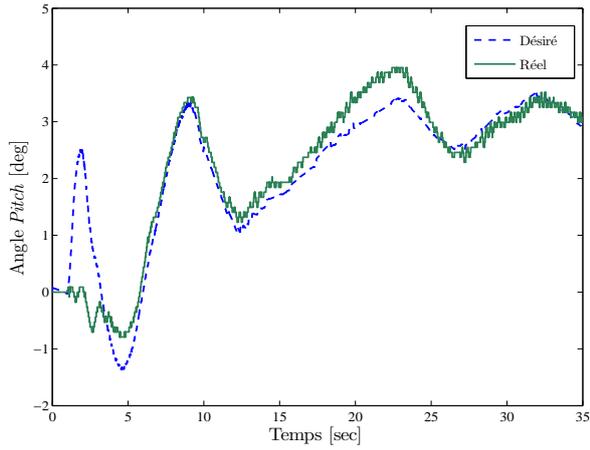


Figure 2.8: Trajectoires  $\theta(t)$  et  $\theta_d(t)$ .

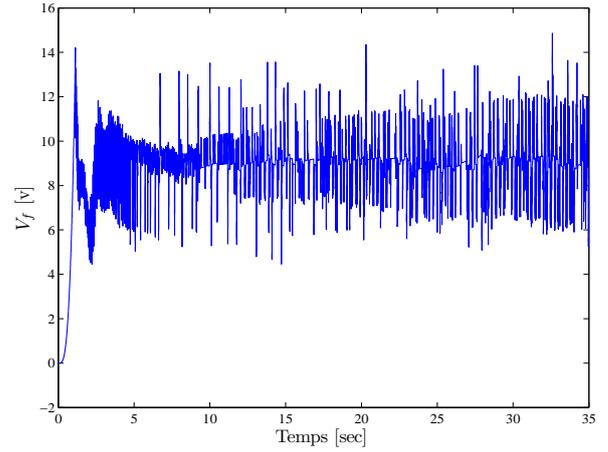


Figure 2.9: Tension du moteur avant  $V_f$ .

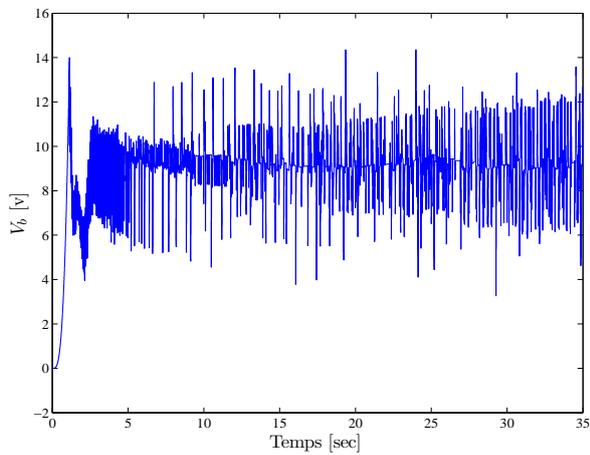


Figure 2.10: Tension du moteur arrière  $V_b$ .

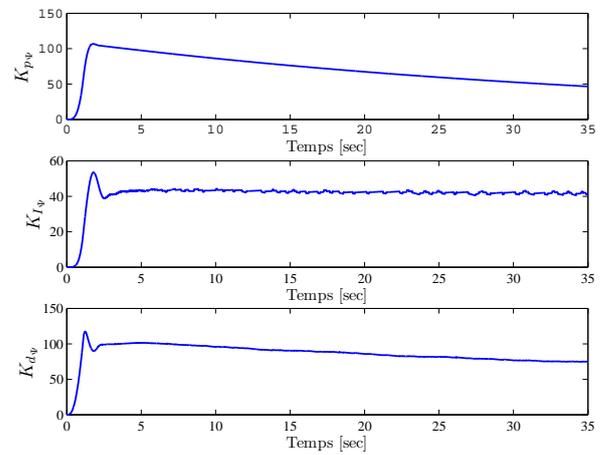


Figure 2.11: Les gains  $K_{p_\psi}$ ,  $K_{I_\psi}$  et  $K_{d_\psi}$ .

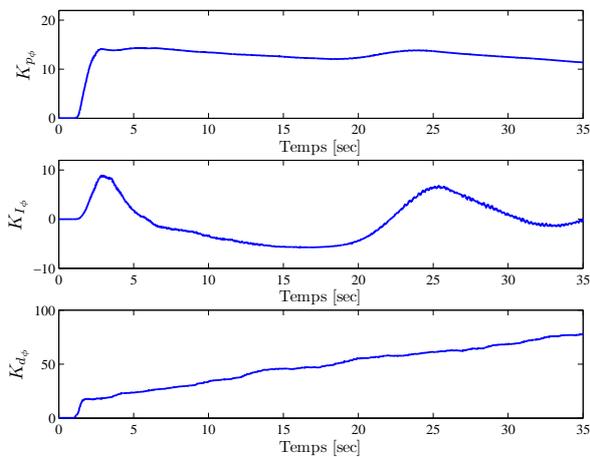


Figure 2.12: Les gains  $K_{p_\phi}$ ,  $K_{I_\phi}$  et  $K_{d_\phi}$ .

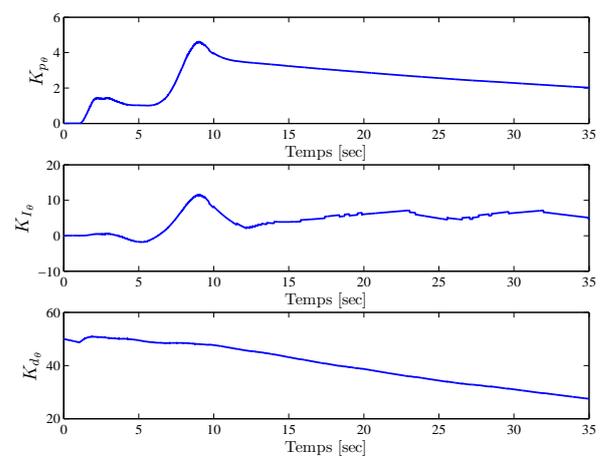


Figure 2.13: Les gains  $K_{p_\theta}$ ,  $K_{I_\theta}$  et  $K_{d_\theta}$ .

## 2.7. Conclusion

Dans ce chapitre, une loi de commande PID adaptative a été proposée et développée pour une classe des systèmes MIMO non linéaires incertains et affines en l'entrée. Après avoir prouvé l'existence d'une commande explicite idéale capable d'assurer les objectifs de commande, nous nous sommes tournés ensuite vers l'approximation de cette commande idéale inconnue par une loi de commande adaptative de type PID. Les trois fameux gains  $K_p$ ,  $K_I$  et  $K_d$  du contrôleur PID sont les paramètres ajustables ; le mécanisme d'adaptation est conçu de telle sorte à minimiser l'erreur résultante entre la commande idéale inconnue et la sortie du contrôleur PID utilisé.

En effet, la simplicité d'implémentation et le vif succès que connaît le contrôleur PID dans le domaine industriel sont les raisons qui nous ont poussé de développer ce contrôleur pour une classe des systèmes MIMO non linéaires incertains. Il est important de noter ici que les hypothèses faites lors de la conception de cette approche sont communément utilisées dans la littérature et vérifiées par plusieurs systèmes physiques. Le contrôleur et son mécanisme d'adaptation, outre leur simplicité d'implémentation, ils assurent la stabilité de la boucle fermée ainsi que la convergence des erreurs de poursuite vers un petit voisinage de zéro. Les résultats expérimentaux issus de l'application de cette approche dans la commande du simulateur d'hélicoptère à 3DOF montrent bien la faisabilité et l'efficacité de cette approche dans les applications pratiques.

Dans le chapitre 3, nous allons introduire un algorithme de commande sans modèle stable à base d'un observateur, examiné aussi en expérimentation dans le pilotage du simulateur d'hélicoptère à 3DOF.

---

**Chapitre 3.**

**Commande sans modèle avec observateur d'une classe des systèmes  
non linéaires MIMO**



---

## Chapitre 3.

---

# Commande sans modèle avec observateur d'une classe des systèmes non linéaires MIMO

---

↖ L'observation recueille les faits ; la réflexion les combine ;  
l'expérience vérifie le résultat de la combinaison. ↗

↪ Denis Diderot <sup>1</sup>

---

### 3.1. Introduction

La conception d'une stratégie de commande robuste sans modèle à base d'un observateur pour une classe des systèmes MIMO non linéaires incertains fait l'objet de ce chapitre. Nous pouvons qualifier de commande robuste toute loi de commande qui cherche à garantir les performances et la stabilité d'un système soumis à l'effet des perturbations exogènes et/ou des erreurs de modélisation. Cet axe de recherche est très actif surtout en ce qui concerne la commande  $H_2$  ([105][106]), la commande  $H_\infty$  ([106][107]) et la commande avec rejet de perturbation ([108][109]).

La loi de commande que nous allons proposer ici se compose d'un terme linéaire, utilisé pour spécifier la dynamique du système en boucle fermée, et d'un terme de compensation développé à partir d'un estimateur des effets des incertitudes et des perturbations externes. L'estimateur en question est conçu par la théorie de stabilité de Lyapunov. Deux variantes de cette méthode de commande seront dégagées. En premier temps, nous allons présenter la structure de la loi de commande lorsque le vecteur d'état est mesurable. Deuxièmement, nous allons proposer la structure de la loi de commande lorsqu'un observateur est utilisé pour reconstruire le vecteur d'erreur. La stabilité de la boucle de commande sera étudiée par l'approche de Lyapunov. Une étude expérimentale sera consacrée à la validation de la commande robuste sans modèle à base d'observateur proposée sur le simulateur d'hélicoptère à 3DOF.

Ce chapitre est construit ainsi : la section 3.2 expose la formulation du problème. Quant à la section 3.3, elle est consacrée à la conception de la loi de commande sans modèle robuste dans le cas où les états du système à commander sont mesurables. La synthèse de la loi de commande sans modèle robuste à base d'un observateur et l'analyse de la stabilité de la boucle fermée fait l'objet de la section 3.4. La validation expérimentale sur le simulateur d'hélicoptère à 3DOF ainsi que l'analyse des résultats obtenus sont traitées dans la section 3.5.

---

1. Écrivain, Philosophe, Encyclopédiste (1813 - 1878).

### 3.2. Formulation du problème

Soit  $\Sigma$  un système non linéaire multivariables MIMO composé de  $q$  sous systèmes interconnectés. Chaque sous système  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , est représenté comme suit

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_{i1} = x_{i2}, \dot{x}_{i2} = x_{i3}, \dots, \dot{x}_{i r_i - 1} = x_{i r_i} \\ \dot{x}_{i r_i} = f_i(\mathbf{x}, u_i) + d_i(t) \\ y_i = x_{i1} \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{x} = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1 r_1}, \dots, x_{q1}, x_{q2}, \dots, x_{q r_q}]^T \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état complet,  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , est le degré relatif du sous système  $\Sigma_i$  avec  $n = \sum_{i=1}^q r_i$ ,  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_q]^T \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur d'entrée de commande,  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_q]^T \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur de sortie,  $f_i(\mathbf{x}, u_i)$ ,  $i = 1, \dots, q$ , sont des fonctions non linéaires continues supposées inconnues, et  $\mathbf{d} = [d_1, \dots, d_q]^T \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur de perturbation.

La représentation entrée-sortie du système (3.1) est donnée par

$$y_i^{(r_i)} = f_i(\mathbf{x}, u_i) + d_i(t), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.2)$$

Afin de concevoir une loi de commande pour le système (3.2), nous le réécrivons sous la forme suivante

$$y_i^{(r_i)} = \alpha_i u_i + \Delta_i(\mathbf{x}, u_i, t), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.3)$$

avec,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  est un paramètre constant donné, et  $\Delta_i(\mathbf{x}, u_i, t)$  un terme regroupant les effets des incertitudes et des perturbations exogènes sur le sous système  $\Sigma_i$  et il est défini par

$$\Delta_i(\mathbf{x}, u_i, t) = -\alpha_i u_i + f_i(\mathbf{x}, u_i) + d_i(t), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.4)$$

Réécrivons le système (3.3) comme suit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= A_i \mathbf{x}_i + B_i (\Delta_i(\mathbf{x}, u_i, t) + \alpha_i u_i), \quad i = 1, \dots, q \\ y_i &= C_i^T \mathbf{x}_i \end{aligned} \quad (3.5)$$

où  $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i r_i}]^T \in \mathbb{R}^{r_i}$  est le vecteur d'état du sous système  $\Sigma_i$  et

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{r_i \times r_i}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{r_i \times 1}, \quad C_i^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times r_i} \quad (3.6)$$

En posant  $\alpha = \text{diag} [\alpha_1, \dots, \alpha_q]$ ,  $A = \text{diag} [A_1, \dots, A_q]$ ,  $B = \text{diag} [B_1, \dots, B_q]$ ,  $C^T = \text{diag} [C_1^T, \dots, C_q^T]$  et  $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = [\Delta_1(\mathbf{x}, u_1, t), \dots, \Delta_q(\mathbf{x}, u_q, t)]^T$ . La représentation d'état de la dynamique globale du système  $\Sigma$  devient

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B(\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \alpha\mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= C^T\mathbf{x}\end{aligned}\quad (3.7)$$

Dans ce qui suit, notre objectif sera de synthétiser une commande  $\mathbf{u}$  pour le système (3.7) afin d'assurer le suivi d'une trajectoire prédéfinie  $\mathbf{y}_d = [y_{d1}, \dots, y_{dq}]^T \in \mathbb{R}^q$  tout en garantissant la bornitude de tous les signaux de la boucle fermée.

Soit  $\mathbf{x}_d = [y_{d1}, y_{d1}^{(1)}, \dots, y_{d1}^{(r_1-1)}, \dots, y_{dq}, y_{dq}^{(1)}, \dots, y_{dq}^{(r_q-1)}]^T \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état désiré du système à commander, et  $\mathbf{E} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x} = [\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_q]^T \in \mathbb{R}^n$  l'erreur de poursuite avec  $\mathbf{E}_i = [y_{di} - y_i, \dots, y_{di}^{(r_i-1)} - y_i^{(r_i-1)}]^T = [e_i, \dots, e_i^{(r_i-1)}]^T \in \mathbb{R}^{r_i}$ ,  $i = 1, \dots, q$ . En utilisant (3.3) et (3.5), la dynamique de l'erreur en boucle fermée de chaque sous système  $\Sigma_i$  s'écrit

$$\dot{\mathbf{E}}_i = A_i\mathbf{E}_i + B_i \left( y_{di}^{(r_i)} - \alpha_i u_i - \Delta_i(\mathbf{x}, u_i, t) \right), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.8)$$

En posant  $\mathbf{y}_d^{(r)} = [y_{d1}^{(r_1)}, \dots, y_{dq}^{(r_q)}]^T \in \mathbb{R}^q$ , la dynamique de l'erreur en boucle fermée du système  $\Sigma$  devient alors

$$\dot{\mathbf{E}} = A\mathbf{E} + B \left( \mathbf{y}_d^{(r)} - \alpha\mathbf{u} - \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right) \quad (3.9)$$

Dans la suite de ce chapitre, les deux hypothèses suivantes sont retenues afin de concevoir la loi de commande.

**Hypothèse 3.1.** Les trajectoires de référence  $y_{di}(t)$ ,  $i = 1, \dots, q$ , ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $r_i$  sont supposées connues, continues et bornées.  $\square$

**Hypothèse 3.2.** Pour chaque sous système  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , la dérivée  $\frac{\partial f_i(\mathbf{x}, u_i)}{\partial u_i}$  est non nulle et bornée et la constante choisie  $\alpha_i$  vérifie  $\left| \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, u_i)}{\partial u_i} - 1 \right| < 1$ .  $\square$

**Remarque 3.1.** Nous soulignons ici que l'objectif, dans ce qui suit, est de trouver une commande  $u_i$  afin d'annuler le terme inconnu  $\Delta_i(\mathbf{x}, u_i, t)$  regroupant l'effet des incertitudes et des perturbations. Comme  $\Delta_i(\mathbf{x}, u_i, t)$  contient aussi la commande  $u_i$ , nous sommes donc devant un problème du point fixe. En effet, l'hypothèse 3.2 garantit que l'application  $u_i \mapsto \frac{1}{\alpha_i} \left( y_{di}^{(r_i)} + K_{c_i}^T \mathbf{E}_i - \Delta_i(\mathbf{x}, u_i, t) \right)$  est strictement contractante<sup>2</sup>, avec  $K_{c_i}$  un vecteur défini par la suite, et par conséquent garantit l'existence d'une solution pour le problème de commande. En outre, d'après l'hypothèse 3.2,  $\alpha_i$  et  $\frac{\partial f_i(\mathbf{x}, u_i)}{\partial u_i}$  doivent être de même signe et  $|\alpha_i| > \frac{1}{2} \left| \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, u_i)}{\partial u_i} \right|$ .  $\square$

Si les fonctions non linéaires  $f_i(\mathbf{x}, u_i)$  et  $d_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, q$ , sont connues, *i.e.* le terme  $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  est connu, pour atteindre les objectifs de commande, nous pouvons utiliser la loi de commande non linéaire  $\mathbf{u}(t) = [u_1, \dots, u_q]^T \in \mathbb{R}^q$ , telle que

$$u_i = \frac{1}{\alpha_i} \left( y_{di}^{(r_i)} + K_{c_i}^T \mathbf{E}_i - \Delta_i(\mathbf{x}, u_i, t) \right), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.10)$$

avec  $K_{c_i} = [k_{c_i}^{r_i}, \dots, k_{c_i}^1]^T \in \mathbb{R}^{r_i}$  un vecteur des gains de commande choisi de telle sorte que la matrice  $(A_i - B_i K_{c_i}^T)$  soit stable.

---

2. Soit une fonction  $g$  dérivable dans un intervalle  $I$ , non nécessairement borné. Si la dérivée  $\frac{\partial g}{\partial x}$  vérifie  $\max_{x \in I} \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| = K < 1$  alors  $g$  est une application strictement contractante sur l'intervalle  $I$ .

Par substitution de (3.10) dans (3.8), nous obtenons

$$\dot{\mathbf{E}}_i = \left( A_i - B_i K_{c_i}^T \right) \mathbf{E}_i, \quad i = 1, \dots, q \quad (3.11)$$

Notons  $K_c^T = \text{diag} \left[ K_{c_1}^T, \dots, K_{c_q}^T \right]^T$ , la dynamique globale de l'erreur en boucle fermée peut se mettre

$$\dot{\mathbf{E}} = \left( A - B K_c^T \right) \mathbf{E} \quad (3.12)$$

Donc, lorsque nous choisissons la loi de commande de la forme (3.10), la boucle fermée est asymptotiquement stable ce qui implique que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}(t) = 0$ . Par conséquent, la sortie  $y_i(t)$  de chaque sous système  $\Sigma_i$  converge asymptotiquement vers sa trajectoire de référence  $y_{di}(t)$ , *i.e.*  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$  avec  $e_i(t) = y_{di}(t) - y_i(t)$ .

Du fait que les fonctions non linéaires  $f_i(\mathbf{x}, u_i)$  et  $d_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, q$ , sont inconnues, *i.e.* le terme  $\Delta_i(\mathbf{x}, u_i, t)$  est inconnu, l'implémentation de la loi de commande (3.10) est malheureusement impossible. Notre but consiste alors à estimer ce terme inconnu et d'utiliser l'estimation pour le calcul de la loi de commande. Dans ce qui vient après, nous allons développer en premier temps la structure de cette commande lorsque le vecteur d'état est supposé mesurable et ensuite la commande est synthétisée à base d'un observateur lorsque le vecteur d'état n'est pas disponible à la mesure.

### 3.3. Conception de la loi de commande sans modèle robuste

Dans la section précédente, nous avons mis en évidence l'existence d'une commande de la forme (3.10), qui peut satisfaire l'objectif de commande du système (3.7). Néanmoins, la commande (3.10) ne peut être implémentée que lorsque le terme  $\Delta_i(\mathbf{x}, u_i, t)$  dans la loi de commande est bien connu. Pour surmonter ce problème, un estimateur  $\hat{\Delta}_i(t)$  de  $\Delta_i(\mathbf{x}, u_i, t)$  sera élaboré et utilisé dans le calcul de la commande. De ce fait, la loi de commande peut être facilement implémentée.

Par l'utilisation de l'estimé  $\hat{\Delta}_i(t)$  au lieu de  $\Delta_i(\mathbf{x}, u_i, t)$ , la commande (3.10) devient

$$u_i = \frac{1}{\alpha_i} \left( y_{di}^{(r_i)} + K_{c_i}^T \mathbf{E}_i - \hat{\Delta}_i(t) \right), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.13)$$

En remplaçant (3.13) dans (3.8), il vient

$$\dot{\mathbf{E}}_i = \left( A_i - B_i K_{c_i}^T \right) \mathbf{E}_i + B_i \tilde{\Delta}_i(t), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.14)$$

avec  $\tilde{\Delta}_i(t) = \hat{\Delta}_i(t) - \Delta_i(\mathbf{x}, u_i, t)$ ,  $i = 1, \dots, q$ . Notons  $\hat{\Delta}(t) = \left[ \hat{\Delta}_1(t), \dots, \hat{\Delta}_q(t) \right]^T$  et  $\tilde{\Delta}(t) = \hat{\Delta}(t) - \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ , la dynamique en boucle fermée du système  $\Sigma$  peut s'écrire

$$\dot{\mathbf{E}} = \left( A - B K_c^T \right) \mathbf{E} + B \tilde{\Delta}(t) \quad (3.15)$$

Afin de concevoir notre loi de commande, les hypothèses suivantes seront considérées par la suite :

**Hypothèse 3.3.** Pour une matrice définie positive  $Q_1$  donnée, il existe une solution  $P_1$  symétrique et définie positive pour l'équation matricielle suivante

$$(A - BK_c^T)^T P_1 + P_1 (A - BK_c^T) + 4\varepsilon_\alpha P_1 B B^T P_1 = -Q_1 \quad (3.16)$$

avec  $\varepsilon_\alpha$  un paramètre de conception positif.  $\square$

**Hypothèse 3.4.** Le terme  $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  c'est une fonction continue et sa dérivée  $\dot{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  est bornée et satisfait  $0 \leq \left\| \dot{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right\|^2 \leq \psi_0 + \mathbf{E}^T P_1 B B^T P_1 \mathbf{E}$ , avec  $\psi_0$  est une constante positive inconnue et  $P_1$  est la matrice définie dans (3.16).  $\square$

Afin de développer la loi d'estimation pour  $\hat{\Delta}_i(t)$ , nous adoptons la fonction de Lyapunov  $V$  suivante

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T P_1 \mathbf{E} + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}^T \tilde{\Delta} \quad (3.17)$$

La dérivée temporelle de  $V$  s'écrit

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}}^T P_1 \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^T P_1 \dot{\mathbf{E}} + \tilde{\Delta}^T \dot{\tilde{\Delta}} \quad (3.18)$$

En utilisant (3.15), l'équation précédente devient

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T (A - BK_c^T)^T P_1 \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^T P_1 (A - BK_c^T) \mathbf{E} + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}^T B^T P_1 \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^T P_1 B \tilde{\Delta} + \tilde{\Delta}^T \dot{\tilde{\Delta}} \quad (3.19)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \left( (A - BK_c^T)^T P_1 + P_1 (A - BK_c^T) \right) \mathbf{E} + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}^T B^T P_1 \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^T P_1 B \tilde{\Delta} \\ &+ \tilde{\Delta}^T \dot{\tilde{\Delta}} - \tilde{\Delta}^T \dot{\tilde{\Delta}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Nous utilisons comme loi d'estimation pour  $\hat{\Delta}_i(t)$  l'équation différentielle de premier ordre ci-dessous

$$\dot{\tilde{\Delta}} = -\frac{1}{\varepsilon_\Delta} \tilde{\Delta} = -\frac{1}{\varepsilon_\Delta} \tilde{\Delta} + \frac{1}{\varepsilon_\Delta} \Delta \quad (3.21)$$

avec  $\varepsilon_\alpha > 0$  un paramètre de conception. En se servant de (3.21), (3.20) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \left( (A - BK_c^T)^T P_1 + P_1 (A - BK_c^T) \right) \mathbf{E} + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}^T B^T P_1 \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^T P_1 B \tilde{\Delta} \\ &- \frac{1}{\varepsilon_\Delta} \tilde{\Delta}^T \tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}^T \dot{\tilde{\Delta}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

et avec l'inégalité

$$\frac{1}{2} \tilde{\Delta}^T B^T P_1 \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^T P_1 B \tilde{\Delta} \leq \frac{1}{4\varepsilon_\Delta} \tilde{\Delta}^T \tilde{\Delta} + \varepsilon_\Delta \mathbf{E}^T P_1 B B^T P_1 \mathbf{E} \quad (3.23)$$

L'équation (3.22) peut être bornée de la manière suivante

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \left( (A - BK_c^T)^T P_1 + P_1 (A - BK_c^T) + 2\varepsilon_\Delta P_1 B B^T P_1 \right) \mathbf{E} - \frac{3}{4\varepsilon_\Delta} \tilde{\Delta}^T \tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}^T \dot{\tilde{\Delta}} \quad (3.24)$$

En utilisant l'inégalité

$$\left| \tilde{\Delta}^T \dot{\tilde{\Delta}} \right| \leq \varepsilon_{\Delta} \left\| \dot{\tilde{\Delta}} \right\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_{\Delta}} \left\| \tilde{\Delta} \right\|^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon_{\Delta}} \left\| \tilde{\Delta} \right\|^2 + \varepsilon_{\Delta} \left( \psi_0 + \mathbf{E}^T P_1 B B^T P_1 \mathbf{E} \right) \quad (3.25)$$

L'inégalité (3.24) devient

$$\dot{V} \leq \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \left( (A - BK_c^T)^T P_1 + P_1 (A - BK_c^T) + 4\varepsilon_{\Delta} P_1 B B^T P_1 \right) \mathbf{E} - \frac{1}{2\varepsilon_{\Delta}} \tilde{\Delta}^T \tilde{\Delta} + \varepsilon_{\Delta} \psi_0 \quad (3.26)$$

et d'après (3.16), nous obtenons

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \mathbf{E}^T Q_1 \mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon_{\Delta}} \frac{1}{2} \tilde{\Delta}^T \tilde{\Delta} + \varepsilon_{\Delta} \psi_0 \quad (3.27)$$

Ce qui peut être réécrit encore comme suit

$$\dot{V} \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q_1)}{\lambda_{\max}(P_1)} \frac{1}{2} \lambda_{\max}(P_1) \|\mathbf{E}\|^2 - \frac{1}{\varepsilon_{\Delta}} \frac{1}{2} \tilde{\Delta}^T \tilde{\Delta} + \varepsilon_{\Delta} \psi_0 \quad (3.28)$$

définissons  $\gamma = \min\left(\frac{\lambda_{\min}(Q_1)}{\lambda_{\max}(P_1)}, \frac{1}{\varepsilon_{\Delta}}\right)$ . Avec ce choix (3.28) devient

$$\dot{V} \leq -\frac{\gamma}{2} \lambda_{\max}(P_1) \|\mathbf{E}\|^2 - \frac{\gamma}{2} \tilde{\Delta}^T \tilde{\Delta} + \varepsilon_{\Delta} \psi_0 \quad (3.29)$$

En utilisant (3.17), l'inégalité précédente peut s'écrire finalement

$$\dot{V} \leq -\gamma V + \varepsilon_{\Delta} \psi_0 \quad (3.30)$$

La stabilité en boucle fermée et la bornitude de toutes les variables peut être montrée par le biais du théorème suivant :

**Théorème 3.1.** *Considérons le système non linéaire (3.1). Supposons que les hypothèses 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4 sont satisfaites. Alors, la loi de commande (3.13), appliquée au système (3.1), garantit la bornitude de tous les signaux de la boucle fermée ainsi que la convergence des erreurs de poursuites  $\mathbf{E}(t)$  vers un petit voisinage autour de zéro.* ■

**Preuve.** À partir de (3.30), on déduit

$$0 \leq V(t) \leq \frac{\varepsilon_{\Delta} \psi_0}{\gamma} + \left( V(0) - \frac{\varepsilon_{\Delta} \psi_0}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} \quad (3.31)$$

Donc, par conséquent, la stabilité pratique du système en boucle fermée et la bornitude de  $\mathbf{E}(t)$  et  $\tilde{\Delta}$ . En outre, un choix du paramètre de conception  $\varepsilon_{\Delta}$  suffisamment petit assure la convergence de  $\mathbf{E}(t)$  vers un petit voisinage autour de zéro. ▲

Considérons de nouveau la loi d'estimation (3.21); celle-ci est réécrite par la relation suivante

$$\hat{\Delta}_i(p) = \frac{1}{1 + \varepsilon_{\Delta} p} \Delta_i(p), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.32)$$

avec  $p$  est la variable de Laplace. D'après (3.32), nous concluons que  $\hat{\Delta}_i(t)$  est obtenu à partir du filtrage du terme inconnu  $\Delta_i(t)$  par le filtre  $\frac{1}{1+\varepsilon_\Delta p}$ , et nous avons aussi  $\hat{\Delta}_i(t) \rightarrow \Delta_i(t)$  quand  $\varepsilon_\Delta \rightarrow 0$ . Malheureusement le terme  $\Delta_i(t)$  est inconnu. Pour contourner ce problème, nous exploitons l'équation (3.3) qui peut être réécrite comme suit

$$\Delta_i(t) = \dot{x}_{ir_i} - \alpha_i u_i \quad (3.33)$$

donc la loi d'estimation (3.32) devient

$$\hat{\Delta}_i(p) = \frac{1}{1 + \varepsilon_\Delta p} (\dot{x}_{ir_i}(p) - \alpha_i u_i(p)), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.34)$$

La substitution de (3.34) dans la loi de commande (3.13) donne

$$u_i(p) = \frac{1}{\alpha_i} \left( y_{di}^{(r_i)}(p) + K_{c_i}^T \mathbf{E}_i(p) - \frac{1}{1 + \varepsilon_\Delta p} (\dot{x}_{ir_i}(p) - \alpha_i u_i(p)) \right), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.35)$$

ou encore

$$u_i(p) = \frac{1}{\alpha_i} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_\Delta p} \right) \left( y_{di}^{(r_i)}(p) + K_{c_i}^T \mathbf{E}_i(p) \right) - \frac{1}{\alpha_i} \frac{\dot{x}_{ir_i}(p)}{\varepsilon_\Delta p}, \quad i = 1, \dots, q \quad (3.36)$$

Finalement, et après la simplification, on trouve la loi de commande ci-dessous

$$u_i(p) = \frac{1}{\alpha_i} \left( y_{di}^{(r_i)}(t) + K_{c_i}^T \mathbf{E}_i(t) \right) + \frac{1}{\alpha_i \varepsilon_\Delta} \int_0^t \left( y_{di}^{(r_i)}(\tau) + K_{c_i}^T \mathbf{E}_i(\tau) \right) d\tau - \frac{1}{\alpha_i \varepsilon_\Delta} x_{ir_i}(t) \quad (3.37)$$

La commande (3.37) a été développée lorsque le vecteur d'état du système est mesurable. Cette commande n'a pas besoin de connaître le modèle du système à commander. Avec un choix adéquat de  $\alpha_i$ ,  $K_{c_i}$  et  $\varepsilon_\Delta$ , *i.e.* pour lesquels les hypothèses 3.2, 3.3 et 3.4 sont satisfaites, nous pouvons assurer ainsi la poursuite de trajectoires désirées pour un système non linéaire appartenant à la classe des systèmes MIMO étudiée. Dans ce qui suit, nous allons étendre notre étude au cas où le vecteur d'erreur  $\mathbf{E}_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, q$ , est reconstruit par un observateur d'erreur conçu pour ce but. Par ce fait, la loi de commande sans modèle à base d'observateur résultante requiert uniquement la mesure de la sortie  $y_i$  pour le calcul de la commande  $u_i$ .

### 3.4. Commande sans modèle robuste avec observateur

La présence du vecteur d'erreur de poursuite dans la loi de commande (3.37) s'avère bel et bien l'inconvénient principal de cette approche lorsqu'une partie du vecteur d'état ou le vecteur complet est indisponible. Maintenant, après avoir vu le principe de la synthèse de la commande sans modèle présentée dans ce chapitre, nous allons nous intéresser au cas où un observateur d'erreur est utilisé afin d'estimer convenablement le vecteur d'erreur  $\mathbf{E}_i(t)$ .

Définissons un observateur d'état pour le système (3.5) de la forme suivante

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}_i &= A_i \hat{\mathbf{x}}_i + B_i \left( \hat{\Delta}_i + \alpha_i u_i \right) + K_{o_i} (y_i - \hat{y}_i), \quad i = 1, \dots, q \\ \hat{y}_i &= C_i^T \hat{\mathbf{x}}_i\end{aligned}\quad (3.38)$$

avec  $\hat{\mathbf{x}}_i$  est l'estimé de  $\mathbf{x}_i$ ,  $K_{o_i}$  est la matrice des gains de l'observateur choisie de sorte que  $A_i - K_{o_i} C_i^T$  soit une matrice Hurwitz. Notons  $\hat{\mathbf{E}}_i = \left[ \hat{e}_i(t), \dots, \hat{e}_i^{(r_i-1)}(t) \right]^T \in \mathbb{R}^{r_i}$  avec  $\hat{e}_i = y_{di}(t) - \hat{y}_i(t)$ , et en utilisant (3.38), nous obtenons

$$\dot{\hat{\mathbf{E}}}_i = A_i \hat{\mathbf{E}}_i + B_i \left( y_{di}^{(r_i)} - \alpha_i u_i - \hat{\Delta}_i \right) + K_{o_i} C_i^T \left( \mathbf{E}_i - \hat{\mathbf{E}}_i \right) \quad (3.39)$$

Nous adoptons dans ce cas la loi de commande

$$u_i = \frac{1}{\alpha_i} \left( y_{di}^{(r_i)} + K_{c_i}^T \hat{\mathbf{E}}_i - \hat{\Delta}_i \right), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.40)$$

En substituant (3.40) dans (3.39), l'équation (3.39) devient

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{E}}}_i &= (A_i - B_i K_{c_i}^T) \hat{\mathbf{E}}_i + K_{o_i} (e_i - \hat{e}_i), \quad i = 1, \dots, q \\ \hat{e}_i &= C_i^T \hat{\mathbf{E}}_i\end{aligned}\quad (3.41)$$

Avec (3.40), la dynamique en boucle fermée (3.8), s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_i &= A_i \mathbf{E}_i - B_i K_{c_i}^T \hat{\mathbf{E}}_i + B_i \tilde{\Delta}_i, \quad i = 1, \dots, q \\ e_i &= C_i^T \mathbf{E}_i\end{aligned}\quad (3.42)$$

Nous définissons l'erreur d'observation  $\tilde{\mathbf{E}}_i = \mathbf{E}_i - \hat{\mathbf{E}}_i = \left[ \tilde{e}_i(t), \dots, \tilde{e}_i^{(r_i-1)}(t) \right]^T \in \mathbb{R}^{r_i}$  avec  $\tilde{e}_i = e_i - \hat{e}_i$ .

Soustrayons (3.41) de (3.42), ça donne

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_i &= (A_i - K_{o_i} C_i^T) \tilde{\mathbf{E}}_i + B_i \tilde{\Delta}_i, \quad i = 1, \dots, q \\ \tilde{e}_i &= C_i^T \tilde{\mathbf{E}}_i\end{aligned}\quad (3.43)$$

Notons aussi  $\hat{\mathbf{E}} = \left[ \hat{\mathbf{E}}_1, \dots, \hat{\mathbf{E}}_q \right]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{\mathbf{E}} = \left[ \tilde{\mathbf{E}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{E}}_q \right]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\hat{\mathbf{e}} = [\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_q]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{\mathbf{e}} = [\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_q]^T \in \mathbb{R}^n$  et  $K_o = \text{diag} [K_{o_1}, \dots, K_{o_q}]$ . Donc, la dynamique de l'observateur complet devient

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{E}}} &= (A - B K_c^T) \hat{\mathbf{E}} + K_o (e - \hat{e}) \\ \tilde{\mathbf{e}} &= C^T \hat{\mathbf{E}}\end{aligned}\quad (3.44)$$

et la dynamique de l'erreur d'observation s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{E}}} &= (A - K_o C^T) \tilde{\mathbf{E}} + B \tilde{\Delta} \\ \tilde{\mathbf{e}} &= C^T \tilde{\mathbf{E}}\end{aligned}\quad (3.45)$$

Afin de développer notre contrôleur à base d'observateur, les hypothèses suivantes seront considérées dans le reste de cette partie.

**Hypothèse 3.5.** Pour deux matrices données  $\bar{Q}_1$  et  $\bar{Q}_2$  définies positives, il existe deux matrices  $\bar{P}_1$  et  $\bar{P}_2$  symétriques et définies positives solutions du système d'équations suivant

$$\left(A - K_o C^T\right)^T \bar{P}_1 + \bar{P}_1 \left(A - K_o C^T\right) + 2\varepsilon_\alpha \bar{P}_1 B B^T \bar{P}_1 + \varepsilon_\alpha^2 I_{n \times n} = -\bar{Q}_1 \quad (3.46)$$

$$\left(A - B K_c^T\right)^T \bar{P}_2 + \bar{P}_2 \left(A - B K_c^T\right) + \frac{1}{\varepsilon_\alpha^2} \bar{P}_2 K_o K_o^T \bar{P}_2 = -\bar{Q}_2 \quad (3.47)$$

avec  $\varepsilon_\alpha$  un paramètre de conception positif.  $\square$

**Hypothèse 3.6.** La dérivée temporelle  $\dot{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  du terme  $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  est bornée et satisfait  $0 \leq \left\| \dot{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right\|^2 \leq \bar{\psi}_0 + \tilde{\mathbf{E}}^T \bar{P}_1 B B^T \bar{P}_1 \tilde{\mathbf{E}}$ , avec  $\bar{\psi}_0$  est une constante positive inconnue et  $\bar{P}_1$  est la matrice définie dans (3.46).  $\square$

Considérons la fonction de Lyapunov candidate suivante

$$V = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}}^T \bar{P}_2 \hat{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^T \bar{P}_1 \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}^T \tilde{\Delta} \quad (3.48)$$

En utilisant (3.44) et (3.45), la dérivée temporelle  $\dot{V}$  de (3.48) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^T \left( (A - K_o C^T)^T \bar{P}_1 + \bar{P}_1 (A - K_o C^T) \right) \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \tilde{\Delta} B^T \bar{P}_1 \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^T \bar{P}_1 B \tilde{\Delta} \\ &+ \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}}^T \left( (A - B K_c^T)^T \bar{P}_2 + \bar{P}_2 (A - B K_c^T) \right) \hat{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^T C K_o^T \bar{P}_2 \hat{\mathbf{E}} \\ &+ \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^T \bar{P}_2 K_o C^T \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\Delta}^T \dot{\Delta} - \tilde{\Delta}^T \dot{\Delta} \end{aligned} \quad (3.49)$$

En choisissant comme loi d'estimation pour  $\hat{\Delta}(t)$  celui de (3.21), il vient

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^T \left( (A - K_o C^T)^T \bar{P}_1 + \bar{P}_1 (A - K_o C^T) \right) \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \tilde{\Delta} B^T \bar{P}_1 \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^T \bar{P}_1 B \tilde{\Delta} \\ &- \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \tilde{\Delta}^T \tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}^T \dot{\Delta} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}}^T \left( (A - B K_c^T)^T \bar{P}_2 + \bar{P}_2 (A - B K_c^T) \right) \hat{\mathbf{E}} \\ &+ \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^T C K_o^T \bar{P}_2 \hat{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}}^T \bar{P}_2 K_o C^T \tilde{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

En utilisant les inégalités suivantes

$$\frac{1}{2} \tilde{\Delta} B^T \bar{P}_1 \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^T \bar{P}_1 B \tilde{\Delta} \leq \frac{1}{4\varepsilon_\alpha} \tilde{\Delta}^2 + \varepsilon_\alpha \tilde{\mathbf{E}}^T \bar{P}_1 B B^T \bar{P}_1 \tilde{\mathbf{E}} \quad (3.51)$$

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^T C K_o^T \bar{P}_2 \hat{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}}^T \bar{P}_2 K_o C^T \tilde{\mathbf{E}} \leq \frac{1}{2\varepsilon_\alpha^2} \tilde{\mathbf{E}}^T \bar{P}_2 K_o K_o^T \bar{P}_2 \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\varepsilon_\alpha^2}{2} \hat{\mathbf{E}}^T \hat{\mathbf{E}} \quad (3.52)$$

$$\left| \tilde{\Delta}^T \dot{\Delta} \right| \leq \varepsilon_\alpha \left\| \dot{\Delta} \right\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_\alpha} \left\| \tilde{\Delta} \right\|^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon_\alpha} \left\| \tilde{\Delta} \right\|^2 + \varepsilon_\alpha \left( \bar{\psi}_0 + \tilde{\mathbf{E}}^T \bar{P}_1 B B^T \bar{P}_1 \tilde{\mathbf{E}} \right) \quad (3.53)$$

L'équation (3.51) peut être bornée comme suit

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{E}}^T \left( (A - K_o C^T)^T \bar{P}_1 + \bar{P}_1 (A - K_o C^T) + 2\varepsilon_\alpha \bar{P}_1 B B^T \bar{P}_1 + \varepsilon_\alpha^2 I_{n \times n} \right) \tilde{\mathbf{E}} \\ &+ \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}}^T \left( (A - B K_c^T)^T \bar{P}_2 + \bar{P}_2 (A - B K_c^T) + \frac{1}{\varepsilon_\alpha^2} \bar{P}_2 K_o K_o^T \bar{P}_2 \right) \hat{\mathbf{E}} - \frac{1}{2\varepsilon_\alpha} \tilde{\Delta}^2 \\ &+ \varepsilon_\Delta \bar{\psi}_0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

À partir de (3.46) et (3.47), (3.54) devient

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{E}}^T \bar{Q}_1 \tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{E}}^T \bar{Q}_2 \hat{\mathbf{E}} - \frac{1}{2\varepsilon_\alpha} \tilde{\Delta}^2 + \varepsilon_\Delta \bar{\psi}_0 \quad (3.55)$$

En utilisant (3.55), nous pouvons obtenir l'inégalité suivante

$$\dot{V} \leq -\frac{\lambda_{\min}(\bar{Q}_1)}{\lambda_{\max}(\bar{P}_1)} \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\bar{P}_1) \|\tilde{\mathbf{E}}\|^2 - \frac{\lambda_{\min}(\bar{Q}_2)}{\lambda_{\max}(\bar{P}_2)} \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\bar{P}_2) \|\hat{\mathbf{E}}\|^2 - \frac{1}{\varepsilon_\alpha} \frac{1}{2} \tilde{\Delta}^T \tilde{\Delta} + \varepsilon_\Delta \bar{\psi}_0 \quad (3.56)$$

Choisissons  $\bar{\gamma} = \min\left(\frac{\lambda_{\min}(\bar{Q}_1)}{\lambda_{\max}(\bar{P}_1)}, \frac{\lambda_{\min}(\bar{Q}_2)}{\lambda_{\max}(\bar{P}_2)}, \frac{1}{\varepsilon_\alpha}\right)$ , (3.56) peut être réécrite ainsi

$$\dot{V} \leq -\frac{\bar{\gamma}}{2} \lambda_{\max}(\bar{P}_1) \|\tilde{\mathbf{E}}\|^2 - \frac{\bar{\gamma}}{2} \lambda_{\max}(\bar{P}_2) \|\hat{\mathbf{E}}\|^2 - \frac{\bar{\gamma}}{2} \tilde{\Delta}^T \tilde{\Delta} + \varepsilon_\Delta \bar{\psi}_0 \quad (3.57)$$

En utilisant (3.48), (3.57) peut se simplifier finalement à l'inégalité suivante

$$\dot{V} \leq -\bar{\gamma}V + \varepsilon_\Delta \bar{\psi}_0 \quad (3.58)$$

Ainsi la stabilité de l'ensemble du système et de l'observateur peut être formellement prouvée par le théorème suivant :

**Théorème 3.2.** *Considérons le système non linéaire (3.1). Supposons que les hypothèses 3.1, 3.2, 3.5 et 3.6 sont satisfaites. Alors, la loi de commande (3.40) avec l'observateur d'erreur (3.41) garantissent la bornitude de tous les signaux de la boucle fermée ainsi que la convergence des erreurs  $\tilde{\mathbf{E}}(t)$  et  $\hat{\mathbf{E}}(t)$  vers un petit voisinage autour de zéro.* ■

**Preuve.** À partir de (3.58), on déduit

$$0 \leq V(t) \leq \frac{\varepsilon_\Delta \bar{\psi}_0}{\bar{\gamma}} + \left(V(0) - \frac{\varepsilon_\Delta \bar{\psi}_0}{\bar{\gamma}}\right) e^{-\bar{\gamma}t} \quad (3.59)$$

Ce qui implique que les signaux  $\tilde{\mathbf{E}}(t)$ ,  $\hat{\mathbf{E}}(t)$  et  $\tilde{\Delta}(t)$  sont bornés en boucle fermée. De plus, par le choix de  $\varepsilon_\Delta$  suffisamment petit, nous pouvons assurer la convergence de  $\tilde{\mathbf{E}}(t)$  et  $\hat{\mathbf{E}}(t)$  vers un petit voisinage autour de zéro. ▲

Reprenons maintenant la loi d'estimation (3.21), celle-ci peut être réécrite sous la forme suivante

$$\hat{\Delta}_i(p) = -\frac{1}{\varepsilon_\Delta p} \tilde{\Delta}_i(p), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.60)$$

Dans la loi de commande (3.40), nous remplaçons  $\hat{\Delta}_i$  par (3.60), il vient

$$u_i(p) = \frac{1}{\alpha_i} \left( y_{di}^{(r_i)}(p) + K_{c_i}^T \hat{\mathbf{E}}_i(p) + \frac{1}{\varepsilon_\Delta p} \tilde{\Delta}_i(p) \right), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.61)$$

À partir de (3.43), nous avons  $\tilde{e}_i = H(p) \tilde{\Delta}_i$  avec  $H(p) = C_i^T (sI - (A_i - K_{o_i} C_i^T))^{-1} B_i$ , donc (3.61) devient

$$u_i(p) = \frac{1}{\alpha_i} \left( y_{di}^{(r_i)}(p) + K_{c_i}^T \widehat{\mathbf{E}}_i(p) + \frac{H^{-1}(p)}{\varepsilon_{\Delta} p} \tilde{e}_i(p) \right), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.62)$$

**Remarque 3.2.** Pour contourner le problème de causalité dans la loi de commande (3.62) posé par la présence de  $H^{-1}(p)$ , la loi de commande  $u_i(p)$  sera filtrée telle que  $u_{fi}(p) = \frac{1}{(1+\omega_i p)^{(r_i-1)}} u_i(p)$ , avec  $\omega_i$  un paramètre de conception positif.  $\square$

**Remarque 3.3.** Dans le cas des systèmes MIMO de deuxième ordre, .i.e.  $r_i = 2$ , pour une matrice des gains de l'observateur  $K_{o_i} = \text{diag} [k_{o_i}^1, k_{o_i}^2]$ , la loi de commande  $u_i(p)$  peut être réécrite

$$u_i(p) = \frac{1}{\alpha_i} \left( y_{di}^{(r_i)}(p) + K_{c_i}^T \widehat{\mathbf{E}}_i(p) + \frac{p^2 + k_{o_i}^1 p + k_{o_i}^2}{\varepsilon_{\Delta} p} \tilde{e}_i(p) \right), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.63)$$

et la commande filtrée  $u_{fi}(p)$  par

$$u_{fi}(p) = \frac{1}{(1 + \omega_i p)} u_i(sp), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.64)$$

En utilisant (3.63), (3.64) s'écrit

$$u_{fi}(p) = \frac{1}{\alpha_i (1 + \omega_i p)} \left( y_{di}^{(r_i)}(p) + K_{c_i}^T \widehat{\mathbf{E}}_i(p) \right) + \frac{1}{\alpha_i} \frac{p^2 + k_{o_i}^1 p + k_{o_i}^2}{\varepsilon_{\Delta} p (1 + \omega_i p)} \tilde{e}_i(p), \quad i = 1, \dots, q \quad (3.65)$$

ou encore

$$u_{fi}(p) = \frac{1}{\alpha_i (1 + \omega_i p)} \left( y_{di}^{(r_i)}(p) + K_{c_i}^T \widehat{\mathbf{E}}_i(p) \right) + \frac{1}{\alpha_i \omega_i \varepsilon_{\Delta}} \tilde{e}_i(p) + \frac{1}{\alpha_i \varepsilon_{\Delta}} \frac{(k_{o_i}^1 \omega_i - 1) p + \omega_i k_{o_i}^2}{\omega_i p^2 + p} \tilde{e}_i(p) \quad (3.66)$$

Par conséquent, le problème de causalité ne se pose pas.  $\square$

### 3.5. Commande sans modèle avec observateur appliquée à l'hélicoptère à 3DOF

À présent que le principe et la structure de la commande sans modèle avec observateur sont définis, il s'agit maintenant d'examiner les performances de cet algorithme de commande en expérimentation sur le simulateur d'hélicoptère à 3DOF.

Le protocole expérimental retenu pour cette application ainsi que l'objectif de commande sont les mêmes que pour le chapitre 2. Là aussi, nous envisageons d'assurer la convergence des deux angles *Elevation* et *Travel* ( $\psi, \phi$ ) vers les trajectoires désirées ( $\psi_d, \phi_d$ ) tout en gardant la bornitude de l'angle *Pitch*  $\theta$ . Pour ce faire, trois algorithmes de commande de la forme (3.66) avec trois observateurs de la forme (3.41) seront utilisés.

#### 3.5.1. Conception de la loi de commande pour l'hélicoptère à 3DOF

Dans le but de faciliter l'application de l'approche de commande sans modèle avec observateur exposée précédemment au simulateur d'hélicoptère à 3DOF, nous commençons d'abord par réécrire son modèle sous une forme entrée sortie adéquate. Pour ce faire, tout au long de ce chapitre, outre

les frottements aérodynamiques, nous tenons également compte de l'effet des autres perturbations exogènes sur la dynamique de chaque angle, et elles seront notées  $d_i(t)$ ,  $i \in (\psi, \theta, \phi)$ .

Le modèle de l'hélicoptère (2.60) peut se mettre comme suit

$$y_i^{(2)} = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + d_i(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.67)$$

avec  $\mathbf{x} = [\psi, \dot{\psi}, \theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}]^T$  est le vecteur d'état,  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$  est le vecteur d'entrée de commande et les éléments  $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , sont donnés par

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{J_\psi} \left( M_h g \cos(\psi) L_a - M_w g \cos(\psi) L_w - f_\psi(\dot{\psi}) \right) + \frac{1}{J_\psi} (K_f \cos(\theta) L_a) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{J_\theta} \left( -f_\theta(\dot{\theta}) \right) + \frac{1}{J_\theta} K_f L_h \\ f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{J_\phi} \left( -f_\phi(\dot{\phi}) \right) + \frac{1}{J_\phi} K_f L_a \cos(\psi) \end{aligned} \quad (3.68)$$

En notant aussi  $\mathbf{y} = [\psi, \theta, \phi]$  et  $\mathbf{d} = [d_\psi, d_\theta, d_\phi]^T$ , nous déduisons ainsi que (3.67) est dans la forme entrée sortie générale définie dans (3.2) avec  $q = 3$  et  $r_i = 2$  dans ce cas.

Au vu de ce qui précède, il est possible de réaliser les objectifs de commande pour le simulateur d'hélicoptère à 3DOF avec le choix des entrées  $(u_1, u_2, u_3)$  comme des sorties de trois contrôleurs de la forme (3.66). Pour ce faire, nous définissons premièrement les erreurs de poursuite par  $e_\psi = \psi_d - \psi$ ,  $e_\theta = \theta_d - \theta$  et  $e_\phi = \phi_d - \phi$ .

Donc, les commandes des angles s'écrivent

$$u_1(p) = \frac{1}{\alpha_\psi(1+\omega_\psi p)} \left( \psi_d^{(2)}(p) + K_{c_\psi}^T \widehat{\mathbf{E}}_\psi(sp) \right) + \frac{1}{\alpha_\psi \omega_\psi \varepsilon_\Delta} \tilde{e}_\psi(p) + \frac{(k_{o_\psi}^1 \omega_\psi - 1)p + \omega_\psi k_{o_\psi}^2}{\alpha_\psi \varepsilon_\Delta (\omega_\psi p^2 + p)} \tilde{e}_\psi(p) \quad (3.69)$$

$$u_2(p) = \frac{1}{\alpha_\theta(1+\omega_\theta p)} \left( \theta_d^{(2)}(p) + K_{c_\theta}^T \widehat{\mathbf{E}}_\theta(p) \right) + \frac{1}{\alpha_\theta \omega_\theta \varepsilon_\Delta} \tilde{e}_\theta(p) + \frac{1}{\alpha_\theta \varepsilon_\Delta} \frac{(k_{o_\theta}^1 \omega_\theta - 1)p + \omega_\theta k_{o_\theta}^2}{\omega_\theta p^2 + p} \tilde{e}_\theta(p) \quad (3.70)$$

$$u_3(s) = \frac{1}{\alpha_\phi(1+\omega_\phi p)} \left( \phi_d^{(2)}(p) + K_{c_\phi}^T \widehat{\mathbf{E}}_\phi(p) \right) + \frac{1}{\alpha_\phi \omega_\phi \varepsilon_\Delta} \tilde{e}_\phi(p) + \frac{1}{\alpha_\phi \varepsilon_\Delta} \frac{(k_{o_\phi}^1 \omega_\phi - 1)p + \omega_\phi k_{o_\phi}^2}{\omega_\phi p^2 + p} \tilde{e}_\phi(p) \quad (3.71)$$

avec  $\widehat{\mathbf{E}}_\psi$ ,  $\widehat{\mathbf{E}}_\theta$  et  $\widehat{\mathbf{E}}_\phi$  sont les erreurs estimées calculées par les observateurs suivants

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{\mathbf{E}}}_i &= (A_i - B_i K_{c_i}^T) \widehat{\mathbf{E}}_i + K_{o_i} (e_i - \hat{e}_i), \quad i \in (\psi, \theta, \phi) \\ \hat{e}_i &= C_i^T \widehat{\mathbf{E}}_i \end{aligned} \quad (3.72)$$

avec  $\tilde{e}_\psi = e_\psi - \hat{e}_\psi$ ,  $\tilde{e}_\theta = e_\theta - \hat{e}_\theta$  et  $\tilde{e}_\phi = e_\phi - \hat{e}_\phi$ . Les matrices  $A_i$ , les vecteurs  $B_i$  et  $C_i$  sont définis respectivement par  $A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$  et  $C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Dans le paragraphe suivant, nous présentons les résultats obtenus lors de la mise en œuvre expérimentale de cet algorithme de commande.

### 3.5.2. Résultats expérimentaux

Pour implémenter en temps réel la commande sans modèle avec observateur et mettre en évidence ses performances, nous nous sommes servis du même dispositif expérimental du chapitre 2. Un schéma illustratif de cette application est montré sur la figure 3.1.

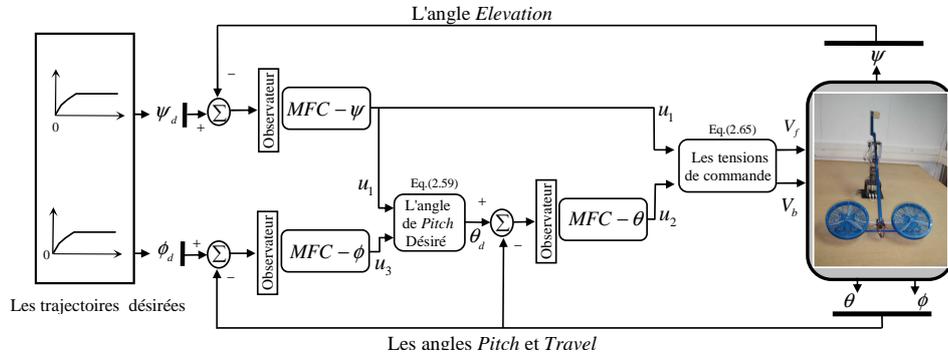


FIGURE 3.1: Commande sans modèle avec observateur appliquée à l'hélicoptère à 3DOF.

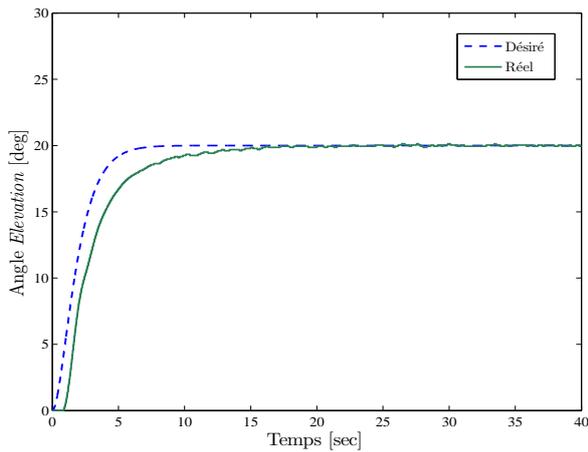


Figure 3.2: Trajectoires  $\psi(t)$  et  $\psi_d(t)$ .

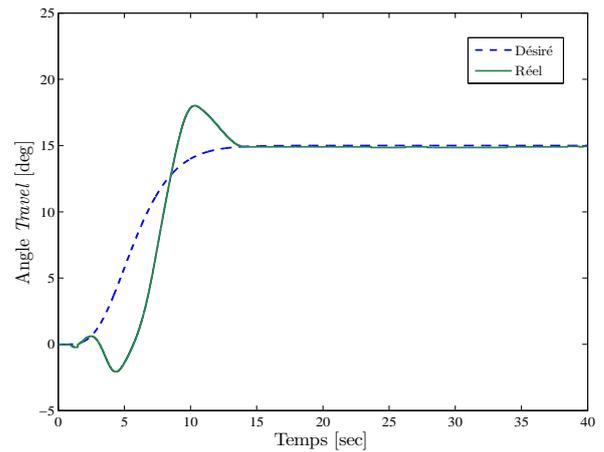


Figure 3.3: Trajectoires  $\phi(t)$  et  $\phi_d(t)$ .

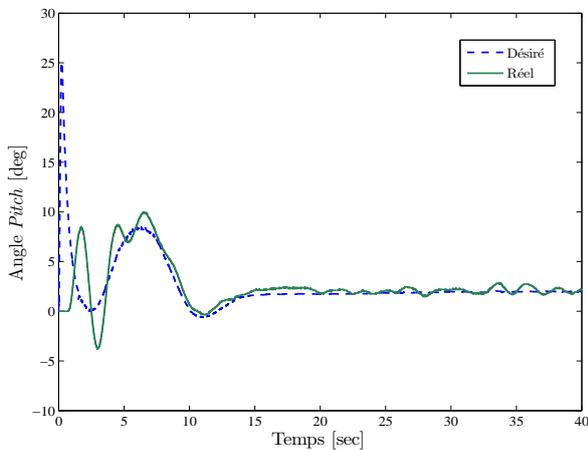


Figure 3.4: Trajectoires  $\theta(t)$  et  $\theta_d(t)$ .

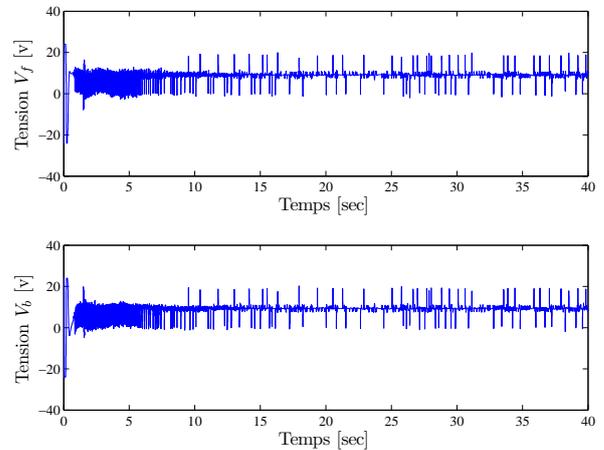
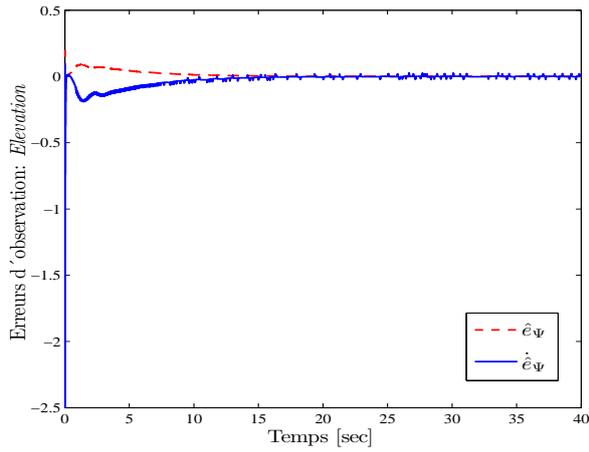
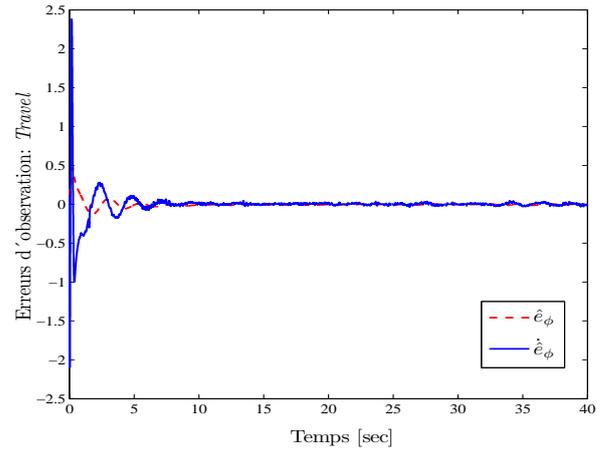
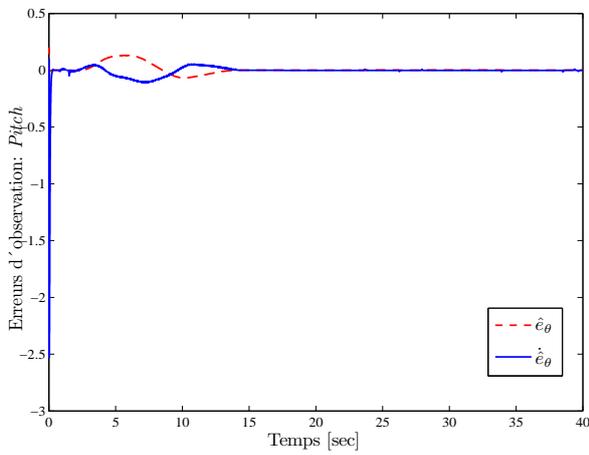
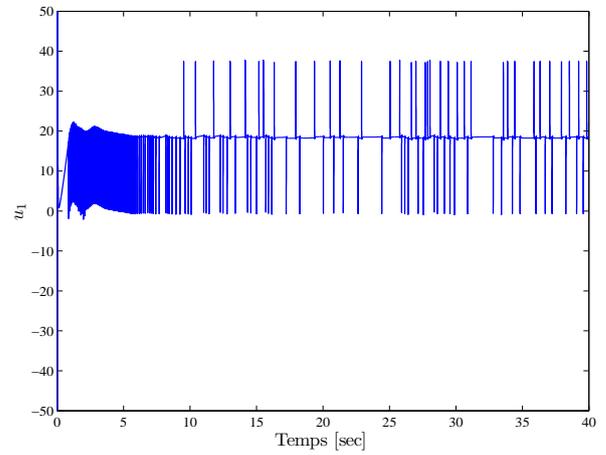
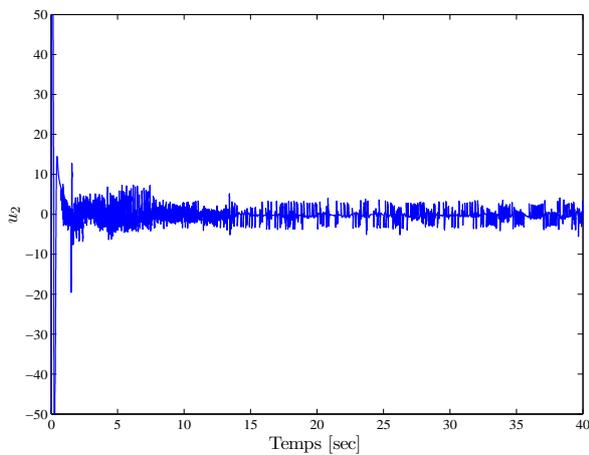
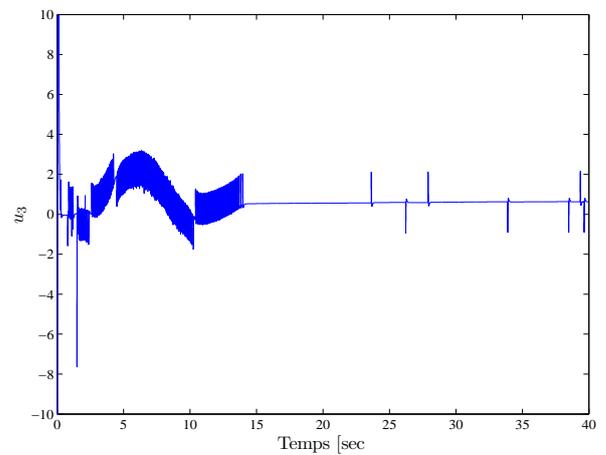


Figure 3.5: Tensions de commande  $V_f$  et  $V_b$ .

Figure 3.6: Erreurs d'observation  $\hat{e}_\psi$  et  $\dot{\hat{e}}_\psi$ .Figure 3.7: Erreurs d'observation  $\hat{e}_\phi$  et  $\dot{\hat{e}}_\phi$ .Figure 3.8: Erreurs d'observation  $\hat{e}_\theta$  et  $\dot{\hat{e}}_\theta$ .Figure 3.9: Signal de commande  $u_1$ .Figure 3.10: Signal de commande  $u_2$ .Figure 3.11: Signal de commande  $u_3$ .

L'objectif de la commande consiste à déplacer l'hélicoptère de sa position initiale ( $\psi = 0^\circ, \phi = 0^\circ$ ) vers la position finale ( $\psi = 20^\circ, \phi = 15^\circ$ ). Afin d'assurer la continuité au niveau des consignes,

les trajectoires de référence  $(\psi_d(t), \theta_d(t), \phi_d(t))$  sont filtrées, respectivement, par les trois filtres linéaires  $H_\psi = \frac{1}{(p+1)^2}$ ,  $H_\theta = \frac{1}{(0.5p+1)}$  et  $H_\phi = \frac{1}{(p+1)}$ , avec  $p$  est l'opérateur de Laplace. La période d'échantillonnage est fixée à  $0.001 \text{ sec}$ ; les paramètres de la loi de commande et de l'observateur utilisés sont les suivants :  $\omega_\psi = \omega_\theta = \omega_\phi = 0.01 \text{ sec}$ ,  $\varepsilon_\Delta = 0.01 \text{ sec}$ ,  $\alpha_\psi = 0.8$ ,  $\alpha_\theta = \alpha_\phi = 5$ ,  $K_{c\psi} = [75, 20]$ ,  $K_{c\theta} = K_{c\phi} = [10, 1]$ ,  $K_{0\psi} = [200, 3500]$ ,  $K_{0\theta} = [40, 700]$  et  $K_{0\phi} = [80, 1400]$ .

Les figures 3.2 à 3.11 exposent les résultats issus de cette expérimentation. Les deux angles à piloter  $\psi(t)$  et  $\phi(t)$  convergent avec un temps de réponse relativement court vers leurs trajectoires désirées  $\psi(t)$  et  $\phi(t)$  respectivement, comme elles le montrent les figures 3.2 et 3.3. Il apparaît clairement que la poursuite pour l'angle *Travel* se fait avec un dépassement contrairement à la poursuite de l'angle *Elevation* où la référence est atteinte sans dépassement. De sa part, l'angle *pitch*  $\theta(t)$ , qui est montrée sur la figure 3.4, suit sa référence  $\theta_d(t)$  avec une faible erreur de poursuite. La figure 3.5 présente les deux tensions  $V_f$  et  $V_b$  appliquées aux deux moteurs avant et arrière. Ces deux tensions, et pendant toute la phase de commande, elles restent dans la plage de fonctionnement (voir le tableau 2.1.). Cependant, pour les deux commandes, une forte oscillation peut se voir au régime transitoire avant que la commande soit relativement lisse au régime établi. Les erreurs d'observation pour les trois angles sont exposées sur les figures 3.6, 3.7 et 3.8. Comme elles le montrent ces figures, les erreurs d'observation  $(\hat{e}_i, \dot{\hat{e}}_i)$ ,  $i \in (\psi, \theta, \phi)$ , convergent toutes vers zéro avec des temps de réponse acceptables.

### 3.6. Conclusion

Le chapitre 3 a proposé une commande robuste sans modèle à base d'un observateur pour une classe des systèmes MIMO non linéaires incertains. En premier temps, nous avons introduit une loi de commande composée d'une partie linéaire, permettant de spécifier la dynamique du système bouclé, et d'un terme qui annule l'effet des incertitudes et des perturbations exogènes. Comme nous l'avons montré, si le modèle du système et les perturbations sont bien connus, cette loi de commande peut assurer les objectifs de commande. Du moment que le modèle est supposé inconnue, cette loi de commande ne peut pas être calculée et implémentée. Pour cela, nous avons opté pour développer un compensateur des incertitudes et des perturbations externes à base d'un estimateur synthétisé par la théorie de stabilité de Lyapunov. Ensuite, nous avons élargi notre étude au cas où le vecteur d'état est reconstruit par un observateur; ainsi la structure de commande à base d'observateur a été dégagée aussi. La stabilité pratique du schéma de commande proposé est prouvée par une approche de type Lyapunov.

La validation expérimentale de la loi de commande sans modèle à base d'observateur présentée dans ce chapitre a été faite sur un simulateur d'hélicoptère à 3DOF.

Dans le prochain chapitre, nous allons introduire une commande linéaire adaptative pour une classe des systèmes SISO non affines. Les performances de cette approche seront examinées expérimentalement en commande de position d'un actionneur électropneumatique.

---

Chapitre 4.

Commande linéaire adaptative d'une classe des systèmes SISO non affines



---

## Chapitre 4.

---

# Commande linéaire adaptative d'une classe des systèmes SISO non affines

---

◀ Se révolter ou s'adapter, il n'y a guère d'autre choix dans la vie. ▶

↔ **Gustave Le Bon**<sup>1</sup>

---

### 4.1. Introduction

La commande des systèmes non linéaires non affines ne cesse de solliciter l'attention des chercheurs en théorie de la commande au cours de la dernière décennie. Cet intérêt est justifié par le nombre important des systèmes industriels qui font partie de cette classe des systèmes non linéaires, entre autres les réacteurs chimiques ([110]), les systèmes de vol ([111]) et les systèmes électropneumatiques ([112][113]). En outre, il y a plusieurs systèmes physiques présentés et étudiés comme étant des systèmes affines, et ce, après la simplification et la négligence de certaines dynamiques, surtout au niveau des actionneurs, malgré que ces systèmes sont naturellement des systèmes non affines. Le fait d'utiliser un modèle affine du système à commander au lieu de son modèle non affine, qui est le plus proche de sa dynamique réelle, peut dégrader les performances de la boucle de commande dans certain plage de fonctionnement et il peut même amener à l'instabilité.

Du moment que l'entrée de commande n'apparaît pas linéairement, la synthèse d'une loi de commande pour un système non affine est souvent un vrai challenge, et ceci, même si le modèle du système est bien connu, contrairement au cas d'un système affine. Un nombre considérable des stratégies de commande sont proposées dans la littérature. Plusieurs structures de commande adaptative floue ont été introduites pour les systèmes non affines. Des approches directes sont proposées dans ([114][115][116]) et des approches indirectes dans ([21][20][117]). Des méthodes de commande adaptative neuronale, directe et indirecte, ont été aussi développées pour cette classe des systèmes, comme dans ([118][119][120]). D'autres techniques de commande sont appliquées sur ces systèmes, comme la commande prédictive ([121]), la commande par mode de glissement ([122]), la commande optimale ([123]), la commande tolérante aux défauts ([124]) et la commande  $H_\infty$  ([125]).

Compte tenu de la difficulté particulière de la commande des systèmes non affines, et ce, même si le modèle est bien connu, il est judicieux d'envisager la conception des commandes sans modèle pour cette classe des systèmes non linéaires. Dans ce contexte, nous allons introduire une stratégie

---

1. Médecin, Anthropologue, Psychologue social, Sociologue (1841 - 1931).

de commande linéaire adaptative stable, qui ne requiert pas la connaissance du modèle, avec une structure simple pour une classe des systèmes non linéaires monovariabiles incertains non affines en l'entrée. En premier temps, nous nous servons du théorème des fonctions implicites ([3][4]) pour prouver l'existence d'une commande idéale implicite capable de satisfaire les objectifs de commande. En ce qui concerne la structure de la loi de commande, nous allons l'établir en s'aidant du théorème de la valeur moyenne ([3]). Nous développons ensuite pour les gains de la commande linéaire une loi d'adaptation stable pour approcher au mieux la commande idéale implicite. La stabilité de la boucle de commande sera prouvée par l'approche de Lyapunov. Les performances de cette stratégie de commande sont examinées en expérimentation en commande de position d'un actionneur électropneumatique.

Ce chapitre est construit ainsi : premièrement, et dans la section 4.2, nous formulons proprement le problème posé. Nous nous intéressons ensuite dans la section 4.3 à la synthèse de la loi de commande linéaire adaptative, pour la classe des systèmes SISO non affines étudiée, ainsi que la conception de sa loi d'adaptation et nous y discutons aussi les conditions nécessaires pour la stabilité de la boucle fermée. La section 4.4 est consacrée à la description et la modélisation de l'actionneur électropneumatique. Quant à elle, la section 4.5 contient la présentation et l'analyse des résultats expérimentaux obtenus lors de l'application en temps réel de la commande linéaire adaptative à l'actionneur électropneumatique.

## 4.2. Formulation du problème

Considérons un système non linéaire incertain mono-entrée mono-sortie non affine décrit par la forme normale suivante ([126])

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(\mathbf{x}, u) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T = [y, \dots, y^{(n-1)}]^T \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système supposé mesurable,  $u(t) \in \mathbb{R}$  est l'entrée de commande,  $y(t) \in \mathbb{R}$  est sa sortie, et  $f(\mathbf{x}, u)$  une fonction non linéaire continue supposée inconnue.

En dérivant la sortie  $y$  par rapport au temps  $t$  jusqu'à l'apparition explicite de la commande  $u$ , nous obtenons ainsi la représentation entrée-sortie du système (4.1), telle que

$$y^{(n)} = f(\mathbf{x}, u) \quad (4.2)$$

Notre objectif par la suite sera de concevoir une loi de commande pour l'entrée  $u$  afin d'assurer pour la sortie  $y$  la poursuite d'une trajectoire de référence ainsi que la bornitude de tous les signaux du système en boucle fermée. Pour ce faire, les hypothèses suivantes sont retenues dans le reste de ce chapitre.

**Hypothèse 4.1.** La fonction  $f_u(\mathbf{x}, u) = \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial u}$  est non nulle et bornée pour tout  $(\mathbf{x}, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Donc, le terme  $f_u(\mathbf{x}, u)$  soit strictement positif ou strictement négatif et ceci pour tout  $(\mathbf{x}, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Sans perte de généralité, il est supposé que  $0 < \delta_0 < f_u(\mathbf{x}, u) < \delta_1$  avec  $\delta_0$  et  $\delta_1$  sont deux

constantes positives. Dans ce contexte, notons qu'avec peu de modification, notamment dans la conception de la loi de commande, les résultats de ce chapitre peuvent s'accommoder au cas où  $-\delta_0 < f_u(\mathbf{x}, u) < -\delta_1 < 0$ .  $\square$

**Hypothèse 4.2.** La trajectoire de référence  $y_d(t)$  ainsi que ses dérivées  $y_d^{(i)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont supposées connues, continues et bornées.  $\square$

Définissons l'erreur de poursuite pour la sortie  $y$  comme suit

$$e(t) = y_d(t) - y(t) \quad (4.3)$$

et une erreur filtrée de la forme suivante

$$s(t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^n \int_0^t e(\tau) d\tau, \lambda > 0 \quad (4.4)$$

D'après l'équation (4.4) et selon le concept de la commande par mode de glissement, nous déduisons que pour  $s(t) = 0$ , nous avons une équation différentielle linéaire dont la solution implique la convergence vers zéro de  $\int_0^t e(\tau) d\tau$ ,  $e(t)$ ,  $\dot{e}(t)$ ,  $\dots$ , et  $e^{(n-1)}$  ([71]). De ce fait, l'objectif de stabilisation du vecteur  $\left[ \int_0^t e(\tau) d\tau, e, \dots, e^{(n-1)} \right]^T$  de dimension  $(n+1)$  se simplifie à la synthèse d'un contrôleur garantissant la convergence vers zéro du signal  $s(t)$ . De même, pour une bornitude du signal  $s(t)$  par une constante  $\Phi$  telle que  $|s(t)| \leq \Phi$ , nous aurons ([71][126])  $|z^{(i)}(t)| \leq 2^i \lambda^{(i-n)} \Phi$ ,  $i = 0, \dots, n$  avec  $z = \int_0^t e(\tau) d\tau$ . D'où, une augmentation du paramètre de conception  $\lambda$  peut diminuer la largeur de ces bandes.

**Proposition 4.1.** Considérons le système non linéaire incertain défini dans (4.1) et l'erreur filtrée  $s(t)$  donnée par (4.4). Il existe donc une commande idéale  $u^*$  assurant la convergence vers zéro de  $s(t)$  quand  $t \rightarrow \infty$ , et par conséquent la convergence vers zéro de  $\int_0^t e(\tau) d\tau$ ,  $e(t)$ ,  $\dot{e}(t)$ ,  $\dots$ , et  $e^{(n-1)}$  quand  $t \rightarrow \infty$ .  $\blacksquare$

**Preuve.** La dérivée temporelle de (4.4) peut être écrite sous la forme

$$\dot{s} = y_d^{(n)} + \beta_n e^{(n-1)} + \dots + \beta_1 e - \beta_1 e(0) - f(\mathbf{x}, u) \quad (4.5)$$

avec  $\beta_i = \frac{(n)!}{(n-i+1)!(i-1)!} \lambda^{n-i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Soit  $\omega$  un signal défini par

$$\omega = y_d^{(n)} + \beta_n e^{(n-1)} + \dots + \beta_1 e - \beta_1 e(0) + Ks + K_0 \tanh(s/\varepsilon_0) \quad (4.6)$$

avec  $K > 0$ ,  $K_0 > 0$ ,  $\varepsilon_0$  une petite constante positive, et  $\tanh(\cdot)$  est la fonction tangente hyperbolique.

**Remarque 4.1.** Nous utilisons le terme  $K_0 \tanh(s/\varepsilon_0)$  dans le signal  $\omega$  défini par (4.6) afin de doter la loi de commande linéaire adaptative qui sera proposée par la suite d'une certaine robustesse. En effet, le terme  $K_0 \tanh(s/\varepsilon_0)$  ce n'est qu'une approximation lisse de la fonction discontinue  $K_0 \text{sign}(s)$  souvent considérée dans la commande robuste. Le choix du gain  $K_0$  dépend de la dynamique de convergence souhaitée ainsi que de l'amplitude maximale des perturbations agissant sur le système. En revanche, la valeur de  $\varepsilon_0$  influe principalement sur les performances en régime établi.  $\square$

Par soustraction et addition du terme  $Ks + K_0 \tanh(s/\varepsilon_0)$  au second membre de l'équation (4.5), on obtient

$$\dot{s} = -Ks - K_0 \tanh(s/\varepsilon_0) - (f(\mathbf{x}, u) - \omega) \quad (4.7)$$

D'après l'hypothèse (4.1) et le fait que le signal  $\omega$ , défini dans (4.6), ne dépend pas explicitement de l'entrée  $u$ , la dérivée partielle de  $f(\mathbf{x}, u) - \omega$ , par rapport à  $u$  satisfait

$$\frac{\partial (f(\mathbf{x}, u) - \omega)}{\partial u} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, u)}{\partial u} > 0 \quad (4.8)$$

Par conséquent, en utilisant le théorème des fonctions implicites ([3][4]), on déduit que l'équation algébrique non linéaire  $f(\mathbf{x}, u) - \omega = 0$  peut être résolue localement par rapport à l'entrée  $u$  et ceci pour tout  $(\mathbf{x}, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Donc, il existe une commande idéale  $u^*(\mathbf{x}, \omega)$  qui satisfait l'égalité suivante

$$f(\mathbf{x}, u^*(\mathbf{x}, \omega)) - \omega = 0 \quad (4.9)$$

D'où, lorsque nous choisissons l'entrée  $u$  du système (4.1) comme une loi de commande idéale, i.e.  $u = u^*(\mathbf{x}, \omega)$ , la dynamique en boucle fermée (4.7) se simplifie à

$$\dot{s} = -Ks - K_0 \tanh(s/\varepsilon_0) \quad (4.10)$$

ce qui implique que  $s(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  et, par conséquent,  $\int_0^t e(\tau) d\tau$ ,  $e(t)$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $n - 1$  convergent aussi vers zéro.  $\blacktriangle$

De ce qui est déjà vu précédemment, on en déduit que la loi de commande idéale inconnue  $u^*(\mathbf{x}, \omega)$  peut assurer la bornitude de tous les signaux en boucle fermée ainsi que la poursuite d'une trajectoire de référence  $y_d(t)$ . Néanmoins, cette loi de commande idéale ne peut pas être calculée et implémentée même si la fonction  $f(\mathbf{x}, u)$  est bien connue. Dans la suite, l'objectif est d'estimer au mieux cette loi de commande idéale en utilisant une loi de commande linéaire avec un mécanisme d'adaptation robuste et stable.

### 4.3. Conception de la commande linéaire adaptative

Le théorème des fonctions implicites a été utilisé précédemment pour prouver l'existence d'une commande idéale. Cette commande peut garantir les objectifs de commande d'un système non linéaire faisant partie de la classe des systèmes (4.1) et répondant aux exigences imposées par les deux hypothèses 4.1 et 4.2. Cependant, le théorème des fonctions implicites sert juste à prouver l'existence d'une telle commande sans donner sa forme ou la procédure de synthèse à suivre pour l'obtenir. Dans ce qui suit, nous allons approcher cette loi de commande idéale inconnue par une loi de commande de structure linéaire avec un mécanisme d'adaptation stable, robuste et simple à implémenter.

#### 4.3.1. Structure de la loi de commande

Nous allons utiliser dans cette partie le théorème de la valeur moyenne ([3]) afin d'établir la structure de la loi de commande linéaire. À base de ce théorème, le développement de la commande idéale  $u^*(\mathbf{x}, \omega)$  autour de vecteur d'état désiré  $\mathbf{x}_d = [y_d, \dots, y_d^{(n-1)}]^T$  s'écrit de la manière suivante

$$u^*(\mathbf{x}, \omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)) = u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) = u^*(\mathbf{x}_d) + \frac{\partial u^*(\mathbf{x}_\lambda, \mathbf{x}_d)}{\partial \mathbf{x}_\lambda} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) \quad (4.11)$$

avec  $0 < \lambda < 1$  et  $\mathbf{x}_\lambda = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{x}_d$ . Notons  $K_e(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) = \frac{\partial u^*(\mathbf{x}_\lambda, \mathbf{x}_d)}{\partial \mathbf{x}_\lambda}$ , donc (4.11) peut se mettre encore

$$u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) = K_e(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) + u^*(\mathbf{x}_d) = K_e(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) \mathbf{e} + u^*(\mathbf{x}_d) \quad (4.12)$$

où  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = [e \dots e^{(n-1)}]^T$ . Supposons qu'il existe des paramètres optimaux variables dans le temps  $\mathbf{K}_e^* \in \mathbb{R}^n$ ,  $K_i^* \in \mathbb{R}$  et  $K_0^* \in \mathbb{R}$  avec des dérivées temporelles bornées pour lesquels la commande idéale  $u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)$  vérifie

$$u^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) = \mathbf{K}_e^* \mathbf{e} + K_i^* \int_0^\tau e(\tau) d\tau + K_0^* + \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) \quad (4.13)$$

avec  $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)$  est l'erreur d'approximation et  $(\mathbf{K}_e^*, K_i^*, K_0^*)$  sont les paramètres optimaux inconnus minimisant la fonction  $|\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)|$ .

Notons  $\Pi(\mathbf{e}) = [e^T, \int_0^\tau e(\tau) d\tau, 1]^T = [e, \dots, e^{(n-1)}, \int_0^\tau e(\tau) d\tau, 1]^T$  et  $\Theta^* = [\mathbf{K}_e^*, K_i^*, K_0^*]^T$ , donc nous pouvons écrire (4.13) comme suit

$$u^* = \Pi^T(\mathbf{e}) \Theta^* + \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) \quad (4.14)$$

Une hypothèse sur l'erreur d'approximation  $\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)$  est retenue dans ce travail afin d'établir un résultat de stabilité.

**Hypothèse 4.3.** L'erreur d'approximation dans (4.14) est bornée telle que

$$\varepsilon^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) \leq \bar{\varepsilon}_0 s^2 + \bar{\varepsilon}_1 \quad (4.15)$$

avec  $\bar{\varepsilon}_0$  et  $\bar{\varepsilon}_1$  sont deux constantes positives. □

Comme le vecteur des paramètres optimaux  $\Theta^*$  est inconnu, son estimation par une loi d'adaptation sera envisagée. Soit  $\Theta$  une estimation du vecteur idéal  $\Theta^*$ ; nous définissons la loi de commande comme une approximation linéaire adaptative du contrôleur idéal (4.14), *i.e.* la loi de commande pour le système (4.1) est choisie telle que

$$u = \Pi^T(\mathbf{e}) \Theta \quad (4.16)$$

Après avoir spécifié la structure du contrôleur, l'objectif suivant est de concevoir un mécanisme d'adaptation pour le vecteur des paramètres ajustables  $\Theta$  pour que la loi de commande  $u$  peut approcher au mieux la commande idéale implicite  $u^*$ .

### 4.3.2. Conception de la loi d'adaptation

Dans cette partie, nous allons développer une loi d'adaptation pour le vecteur des paramètres  $\Theta$  afin que le contrôleur linéaire (4.16) peut estimer la commande idéale implicite (4.14). Le mécanisme d'adaptation sera synthétisé dans le but de minimiser un critère quadratique de l'erreur entre la commande idéale inconnue  $u^*$  et la commande  $u$  fournie par le contrôleur linéaire, tout en garantissant la bornitude de ces paramètres estimés ainsi que la stabilité de la boucle fermée. Pour atteindre ce but, nous définissons en premier temps l'erreur entre  $u^*$  et  $u$  par

$$e_u = u^* - u \quad (4.17)$$

En utilisant (4.14) et (4.16), l'erreur à l'entrée du système (4.17) s'écrit aussi

$$e_u = u^* - \Pi^T(e) \Theta = \Pi^T(e) \tilde{\Theta} + \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) \quad (4.18)$$

avec  $\tilde{\Theta} = \Theta^* - \Theta$  est le vecteur d'erreur des paramètres estimés.

Par le biais du théorème de la valeur moyenne ([3]), il existe donc une constante  $\lambda$  avec  $0 < \lambda < 1$ , telle que la fonction non linéaire  $f(\mathbf{x}, u)$  peut être exprimée autour de  $u^*$  par

$$f(\mathbf{x}, u) = f(\mathbf{x}, u^*) + f_{u_\lambda}(u - u^*) \quad (4.19)$$

avec  $f_{u_\lambda} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, u_\lambda)}{\partial u_\lambda}$  pour  $u_\lambda = \lambda u + (1 - \lambda) u^*$ .

La substitution de (4.19) dans l'équation d'erreur (4.7) donne

$$\dot{s} = -Ks - K_0 \tanh(s/\varepsilon_0) - (f(\mathbf{x}, u^*) + f_{u_\lambda}(u - u^*) - \omega) \quad (4.20)$$

et avec (4.9), (4.20) devient

$$\dot{s} = -Ks - K_0 \tanh(s/\varepsilon_0) - f_{u_\lambda}(u - u^*) \quad (4.21)$$

ce qui peut s'écrire encore

$$\dot{s} + Ks + K_0 \tanh(s/\varepsilon_0) = f_{u_\lambda}(u^* - u) = f_{u_\lambda} e_u \quad (4.22)$$

**Remarque 4.2.** Du moment que la commande  $u^*$  est inconnue, le signal  $e_u$  défini dans (4.17) est donc indisponible. Pour surmonter cette difficulté, l'équation (4.22) sera utilisée par la suite. En effet, l'équation (4.22) montre bien que même si l'erreur  $e_u$  n'est pas disponible, la quantité  $f_{u_\lambda} e_u$  est mesurable. Ce fait nous servira pour le choix de la loi d'adaptation paramétrique.  $\square$

Considérons maintenant la fonction de coût quadratique  $J(\Theta)$ , qui mesure l'écart entre la commande idéale implicite  $u^*$  et la commande actuelle  $u$  fournie par le contrôleur linéaire, choisie comme

$$J(\Theta) = \frac{1}{2} e_u^2 = \frac{1}{2} (u^* - u)^2 = \frac{1}{2} (u^* - \Pi^T(e) \Theta)^2 \quad (4.23)$$

Une méthode de type gradient ([71][19]) est alors utilisée ici pour minimiser le critère (4.23). La loi d'adaptation proposée pour les paramètres  $\Theta$  est de la forme

$$\dot{\Theta} = -\eta(t) \nabla_{\Theta} J(\Theta) \quad (4.24)$$

avec  $\eta(t)$  un paramètre positif variable dans le temps. À partir de (4.23), le gradient de  $J(\Theta)$  par rapport à  $\Theta$  est

$$\nabla_{\Theta} J(\Theta) = -\Pi(e) e_u \quad (4.25)$$

D'où, la loi de mise à jour (4.24) devient

$$\dot{\Theta} = \eta(t) \Pi(e) e_u \quad (4.26)$$

Comme le signal  $e_u$  n'est pas disponible, la loi d'adaptation (4.26) ne peut pas être implémentée. Afin de résoudre ce problème par la suite, nous choisissons le paramètre de conception  $\eta(t)$  comme  $\eta(t) = \eta_0 f_{u_\lambda}$ , avec  $\eta_0$  une constante positive. Donc, il vient

$$\dot{\Theta} = \eta_0 \Pi(e) (f_{u_\lambda} e_u) \quad (4.27)$$

et avec (4.22), nous obtenons

$$\dot{\Theta} = \eta_0 \Pi(e) (\dot{s} + Ks + K_0 \tanh(s/\varepsilon_0)) \quad (4.28)$$

Malheureusement, la loi d'adaptation (4.28) ne peut pas garantir la bornitude des erreurs paramétriques  $\tilde{\Theta}$  avec la présence des erreurs d'approximation ([70][126]). Donc, pour améliorer le mécanisme d'adaptation (4.28), nous modifions cette loi par l'ajout d'un terme  $\sigma$ -modification comme suit

$$\dot{\Theta} = \eta_0 \Pi(e) (\dot{s} + Ks + K_0 \tanh(s/\varepsilon_0)) - \eta_0 \sigma \Theta \quad (4.29)$$

avec  $\sigma$  une petite constante positive. Il est important de signaler que la loi d'adaptation est modifiée de telle sorte que la dérivée de la fonction de Lyapunov candidate, utilisée prochainement pour analyser la stabilité en boucle fermée, soit définie négative dans l'espace des paramètres estimés, lorsque ces paramètres dépassent certaines bornes ([70]).

### 4.3.3. Analyse de la stabilité en boucle fermée

Après avoir donné, à l'aide du théorème de la valeur moyenne et du théorème des fonctions implicites, la forme de la loi de commande et son algorithme de mise à jour capables de bien estimer la commande idéale implicite pour le système (4.1), nous allons nous intéresser aux performances de cette approche proposée. Pour étudier la convergence de l'erreur de poursuite ainsi que la stabilité de la boucle fermée, nous choisissons la fonction de Lyapunov candidate ci-dessous

$$V = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2\eta_0} \tilde{\Theta}^T \tilde{\Theta} \quad (4.30)$$

La dérivée temporelle de (4.30) s'écrit

$$\dot{V} = s\dot{s} - \frac{1}{\eta_0} \tilde{\Theta}^T \dot{\Theta} + \frac{1}{\eta_0} \tilde{\Theta}^T \dot{\Theta}^* \quad (4.31)$$

par substitution de (4.22) et (4.29) dans (4.31), il vient

$$\dot{V} = s(-Ks - K_0 \tanh(s/\varepsilon_0) + f_{u_\lambda} e_u) - \tilde{\Theta}^T (\Pi(e) f_{u_\lambda} e_u - \sigma \Theta) + \frac{1}{\eta_0} \tilde{\Theta}^T \dot{\Theta}^* \quad (4.32)$$

À partir de (4.18), nous pouvons écrire la dérivée temporelle  $\dot{V}$  sous la forme suivante

$$\dot{V} = -Ks^2 - K_0s \tanh(s/\varepsilon_0) + sf_{u_\lambda}e_u - (e_u - \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d))f_{u_\lambda}e_u + \sigma\tilde{\Theta}^T\Theta + \frac{1}{\eta_0}\tilde{\Theta}^T\dot{\Theta}^* \quad (4.33)$$

ce qui peut être simplifié encore à

$$\dot{V} = -Ks^2 - K_0s \tanh(s/\varepsilon_0) + sf_{u_\lambda}e_u - e_u f_{u_\lambda}e_u + \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)f_{u_\lambda}e_u + \sigma\tilde{\Theta}^T\Theta + \frac{1}{\eta_0}\tilde{\Theta}^T\dot{\Theta}^* \quad (4.34)$$

en utilisant les inégalités suivantes

$$\sigma\tilde{\Theta}^T\Theta \leq -\frac{\sigma}{2}\|\tilde{\Theta}\|^2 + \frac{\sigma}{2}\|\Theta^*\|^2 \quad (4.35)$$

$$\frac{1}{\eta_0}\tilde{\Theta}^T\dot{\Theta}^* \leq \frac{\sigma}{4}\|\tilde{\Theta}\|^2 + \frac{1}{\sigma\eta_0^2}\|\dot{\Theta}^*\|^2 \quad (4.36)$$

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d)f_{u_\lambda}e_u \leq \frac{1}{4}f_{u_\lambda}e_u^2 + f_{u_\lambda}\varepsilon^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) \quad (4.37)$$

$$sf_{u_\lambda}e_u \leq \frac{1}{4}f_{u_\lambda}e_u^2 + f_{u_\lambda}s^2 \quad (4.38)$$

L'équation (4.34) peut être bornée de la manière suivante

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{2}f_{u_\lambda}e_u^2 - K_0s \tanh(s/\varepsilon_0) - (K - f_{u_\lambda})s^2 - \frac{\sigma}{4}\|\tilde{\Theta}\|^2 + \frac{\sigma}{2}\|\Theta^*\|^2 + \frac{1}{\sigma\eta_0^2}\|\dot{\Theta}^*\|^2 \\ & + f_{u_\lambda}\varepsilon^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) \end{aligned} \quad (4.39)$$

en se servant de l'inégalité (4.15), nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{2}f_{u_\lambda}e_u^2 - K_0s \tanh(s/\varepsilon_0) - (K - f_{u_\lambda})s^2 - \frac{\sigma}{4}\|\tilde{\Theta}\|^2 + \frac{\sigma}{2}\|\Theta^*\|^2 + \frac{1}{\sigma\eta_0^2}\|\dot{\Theta}^*\|^2 \\ & + f_{u_\lambda}\bar{\varepsilon}_0s^2 + f_{u_\lambda}\bar{\varepsilon}_1 \end{aligned} \quad (4.40)$$

et après simplification, l'inégalité (4.40) devient

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{2}f_{u_\lambda}e_u^2 - K_0s \tanh(s/\varepsilon_0) - (K - (1 + \bar{\varepsilon}_0)f_{u_\lambda})s^2 - \frac{\sigma}{4}\|\tilde{\Theta}\|^2 + \frac{\sigma}{2}\|\Theta^*\|^2 \\ & + \frac{1}{\sigma\eta_0^2}\|\dot{\Theta}^*\|^2 + f_{u_\lambda}\bar{\varepsilon}_1 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Le vecteur des paramètres  $\Theta^*$  et sa dérivée  $\dot{\Theta}^*$  ainsi que la fonction  $f_{u_\lambda}$  sont tous supposés bornés, donc nous pouvons définir une borne constante et positive  $\psi$ , telle que

$$\psi = \sup_t \left( \frac{\sigma}{2}\|\Theta^*\|^2 + \frac{1}{\sigma\eta_0^2}\|\dot{\Theta}^*\|^2 + f_{u_\lambda}\bar{\varepsilon}_1 \right) \quad (4.42)$$

avec ce choix, nous pouvons mettre (4.42) comme suit

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}f_{u_\lambda}e_u^2 - K_0s \tanh(s/\varepsilon_0) - (K - (1 + \bar{\varepsilon}_0)f_{u_\lambda})s^2 - \frac{\sigma}{4}\|\tilde{\Theta}\|^2 + \psi \quad (4.43)$$

Supposons que le paramètre de conception  $K$  est choisi tel que  $K > (1 + \bar{\varepsilon}_0)\delta_1$ , l'inégalité (4.43) peut être écrite comme dans (4.44) avec  $\gamma = \min(2 \times (K - (1 + \bar{\varepsilon}_0)\delta_1), 0.5\sigma\eta_0)$

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}f_{u_\lambda}e_u^2 - K_0s \tanh(s/\varepsilon_0) - \frac{\gamma}{2}s^2 - \frac{\gamma}{2\eta_0}\|\tilde{\Theta}\|^2 + \psi \quad (4.44)$$

en utilisant (4.30), il résulte que

$$\dot{V} \leq -\gamma V + \psi \quad (4.45)$$

Le théorème qui suit montre bien la bornitude de tous les signaux en boucle fermée ainsi que la convergence de l'erreur de poursuite vers un petit voisinage de zéro.

**Théorème 4.1.** *Considérons le système non linéaire (4.1). Supposons que les hypothèses 4.1 à 4.3 sont satisfaites. La loi de commande (4.16) avec la loi d'adaptation (4.29) garantit la bornitude de tous les signaux de la boucle fermée ainsi que la convergence de l'erreur de poursuite vers un petit voisinage autour de zéro.* ■

**Preuve.** En utilisant l'inégalité (4.45), il s'ensuit que

$$V(t) \leq V(0)e^{-\gamma t} + \frac{\psi}{\gamma} \quad (4.46)$$

à partir de (4.46), nous pouvons déduire facilement que pour  $V \geq \frac{\psi}{\gamma}$  nous avons  $\dot{V} \leq 0$ . Donc, en se basant sur le théorème de Lyapunov, les signaux  $s(t)$ ,  $\tilde{\Theta}(t)$  et  $u(t)$  en boucle fermée sont bornés. De plus, en utilisant les équations (4.30) et (4.46), nous pouvons écrire  $|s(t)| \leq \sqrt{|s(0)|^2 + \frac{1}{\eta_0}|\tilde{\Theta}(0)|^2}e^{-0.5\gamma t} + \sqrt{\frac{2\psi}{\gamma}}$ . D'où, avec un choix approprié des paramètres  $K$ ,  $\sigma$  et  $\eta_0$ , nous obtenons une convergence de l'erreur de poursuite vers un petit voisinage de zéro. Notons  $\Phi = \sqrt{\frac{2\psi}{\gamma}}$ ; comme  $e^{-0.5\gamma t} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , il existe un temps  $T$  tel que  $|s(t)| \leq \Phi$  pour  $t > T$ . Par conséquent, les erreurs de poursuite convergent vers des ensembles résiduels tels que  $|z^{(i)}(t)| \leq 2^i\lambda^{(i-n)}\Phi$ ,  $i = 0, \dots, n$ , avec  $z = \int_0^t e(\tau) d\tau$ . Ce qui achève la preuve. ▲

**Remarque 4.3.** Il est à noter qu'à cause de la structure intégrale de la loi d'adaptation (4.29), cette loi de mise à jour peut être implémentée malgré la présence de la dérivée temporelle de  $s(t)$ . En utilisant (4.4), la dérivée temporelle  $\dot{s}(t)$  est donnée par

$$\dot{s}(t) = \varpi + e^{(n)} \quad (4.47)$$

avec  $\varpi = \beta_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + \beta_1\dot{e}$ . Donc, la loi d'adaptation (4.29) se réécrit

$$\dot{\Theta} = \eta_0\Pi(e)e^{(n)} + \varphi \quad (4.48)$$

où  $\varphi = \eta_0\Pi(e)\{\varpi + Ks + K_0\tanh(s/\varepsilon_0)\} - \eta_0\sigma\Theta$ . À partir de (4.48), nous obtenons  $\Theta(t)$  sous la forme suivante

$$\Theta(t) = \Theta(0) + \int_0^t \varphi d\tau + \eta_0 \int_0^t (\Pi(e)e^{(n)}) d\tau \quad (4.49)$$

Le premier terme  $\int_0^t \varphi d\tau$  est simple à calculer puisque  $\varphi$  dépend uniquement des signaux mesurables. Cependant, le deuxième terme  $\eta_0 \int_0^t \left( \Pi(e) e^{(n)} \right) d\tau$  soulève la question sur la disponibilité du signal  $e^{(n)}(t)$ . Comme  $\Pi(e) = \left[ e^T, \int_0^t e(\tau) d\tau, 1 \right]^T = \left[ e, \dots, e^{(n-1)}, z(t), 1 \right]^T$  avec  $z(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$ , en utilisant l'intégration par parties, les éléments du vecteur  $\int_0^t \left( \Pi(e) e^{(n)} \right) d\tau$  peuvent être calculés sans utiliser  $e^{(n)}(t)$ . Les éléments  $\int_0^t e^{(i)} e^{(n)} d\tau$ ,  $i = 0, \dots, n-2$ ,  $\int_0^t \left( e^{(n-1)} e^{(n)} \right) d\tau$ ,  $\int_0^t \left( ze^{(n)} \right) d\tau$  et  $\int_0^t e^{(n)} d\tau$  sont calculés par :  $\int_0^t \left( e^{(i)} e^{(n)} \right) d\tau = e^{(i)} e^{(n-1)} \Big|_0^t - \int_0^t \left( e^{(i+1)} e^{(n-1)} \right) d\tau$ ,  $\int_0^t \left( e^{(n-1)} e^{(n)} \right) d\tau = \frac{1}{2} \left( e^{(n-1)} \right)^2 \Big|_0^t$ ,  $\int_0^t \left( ze^{(n)} \right) d\tau = ze^{(n-1)} \Big|_0^t - \int_0^t \left( ee^{(n-1)} \right) d\tau$  et  $\int_0^t e^{(n)} d\tau = e^{(n-1)} \Big|_0^t$ . Par conséquent, le signal  $e^{(n)}(t)$  n'est pas nécessaire pour le calcul des paramètres du contrôleur linéaire.  $\square$

#### 4.4. Description du système électropneumatique

Le contrôleur linéaire adaptatif stable conçu dans ce chapitre a été validé expérimentalement sur un système électropneumatique. Nous allons présenter dans cette partie une description générale du banc électropneumatique de l'IRCCyN; qui est utilisé pour examiner les performances des algorithmes de commande et de l'observation développés pour ce type d'actionneurs.

De nos jours, les actionneurs pneumatiques sont de plus en plus utilisés dans un très grand nombre d'installations industrielles. Ces actionneurs permettent le positionnement d'une charge à masse variable avec la possibilité de choisir le profil des mouvements ([127]). Ils présentent de nombreuses et importantes qualités souvent méconnues, entre autres un meilleur rapport poids/puissance que l'actionneur électrique (induisant un poids plus faible), une plus grande résistance à l'humidité, une plus grande durée de vie dans des milieux hostiles, une maintenance réduite, des qualités environnementales (pas de fluide polluant comme un actionneur hydraulique) et un faible échauffement en cas de surcharge. Ces actionneurs peuvent être donc intéressants pour l'actionnement de structures mécaniques complexes, en particulier celles qui sont mobiles et autonomes ([127]).



Figure 4.1: Vue générale du banc d'essais électropneumatique de l'IRCCyN.

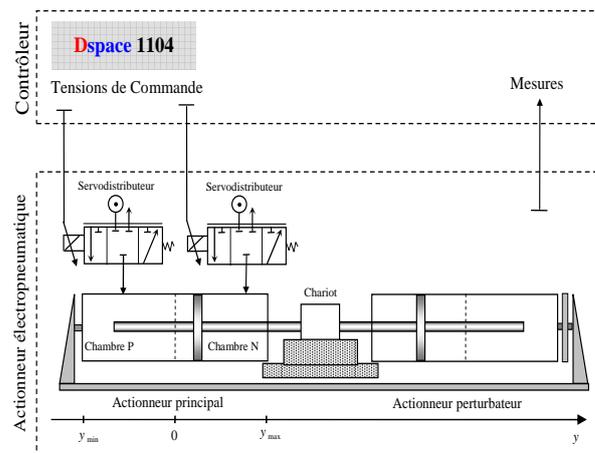


Figure 4.2: Schéma du banc d'essais.

Néanmoins, la commande de ces systèmes est un vrai challenge et elle est considérée comme

un frein à la pénétration industrielle de ces types d'actionneurs. En effet, ils sont caractérisés par de fortes non-linéarités et incertitudes liées essentiellement à la compressibilité de l'air et aux lois d'écoulements aux travers des restrictions des modulateurs de puissance. De plus, la modélisation des débits massiques est délicate et nécessite une attention particulière. De ce fait, l'implémentation des techniques de commande basées sur la connaissance d'un modèle de l'actionneur est une tâche difficile.

#### 4.4.1. Présentation générale

Le banc électropneumatique disponible à l'IRCCyN est illustré par la figure 4.1. La partie mécanique de ce système est composée d'un chariot guidé par une glissière à billes. Il est mis en mouvement rectiligne par deux vérins pneumatiques identiques mais antagonistes situés de chaque côté du chariot. L'un des vérins, appelé vérin principal, est piloté par la loi de commande à tester. Le deuxième, appelé vérin perturbateur, exerce une force extérieure indépendante pouvant avoir la même amplitude et une dynamique tout aussi rapide que celle développée par le vérin principal. Une source d'énergie pneumatique alimente le banc en air comprimé. Il est équipé aussi d'un servodistributeur joue le rôle d'un modulateur de puissance délivrant, en fonction de la commande, l'énergie pneumatique nécessaire pour assurer le mouvement du chariot ([127][128][129]).

#### 4.4.2. Equipement et instrumentation

Le banc d'essai électropneumatique est bien instrumenté afin de mesurer et contrôler l'évolution des grandeurs physiques qui interviennent dans le fonctionnement de ce système. Un capteur LVDT<sup>2</sup> est utilisé pour mesurer la position du chariot mobile, des capteurs de pression pour chaque chambre du vérin, un capteur de force monté en série avec le vérin et un capteur de pression d'alimentation pour vérifier que la pression d'alimentation est bien de 7 bar et ne varie pas trop ([128]). Le banc d'essai est équipé aussi d'une carte DSpace pilotée par un PC grâce à Matlab/Simulink/Real Time Workshop et Control Desk. Cette carte reçoit et traite les signaux en provenance des capteurs, calcule les commandes du vérin principal et les envoie aux servovalves, elle envoie aussi la consigne d'effort au régulateur PID analogique contrôlant le servodistributeur du vérin de perturbation ([128]).

#### 4.4.3. Modélisation du système électropneumatique

Les actionneurs électropneumatiques sont généralement constitués par des éléments de nature physique différente et couplés. Pour cela, l'obtention d'un modèle dynamique précis et qui reflète bien le comportement d'un tel actionneur n'est pas une tâche facile. Sous certaines hypothèses, il est possible d'avoir des modèles aussi bien pour la simulation que pour la synthèse d'une commande ou d'un observateur. La modélisation de ce type des systèmes est traitée dans plusieurs travaux ([127][128][129]). Par la suite, nous considérons seulement la commande du vérin principal soumis à un effort extérieur quelconque. Pour cette raison, nous ne détaillons pas la modélisation du vérin de perturbation et nous nous intéressons qu'à l'effort  $F$  généré par ce vérin.

---

2. de l'anglais Linear Variable Differential Transformer.

Plusieurs grandeurs physiques interviennent dans la dynamique du banc d'essais à savoir : la position du chariot mobile  $y$ , sa vitesse  $v$ , les pressions dans les 2 chambres  $P$  et  $N$  du vérin principal notées respectivement  $p_P$  et  $p_N$ , où la chambre  $P$  correspond à la chambre qui engendre un mouvement Positif du chariot suivant l'axe  $y$  et la chambre  $N$  engendre un mouvement Négatif, nous avons aussi la force perturbatrice  $F$ , les forces de frottement dans le vérin  $F_f$ , et  $T_N$  et  $T_P$  les températures dans les chambres  $P$  et  $N$  du vérin principal ([128]).

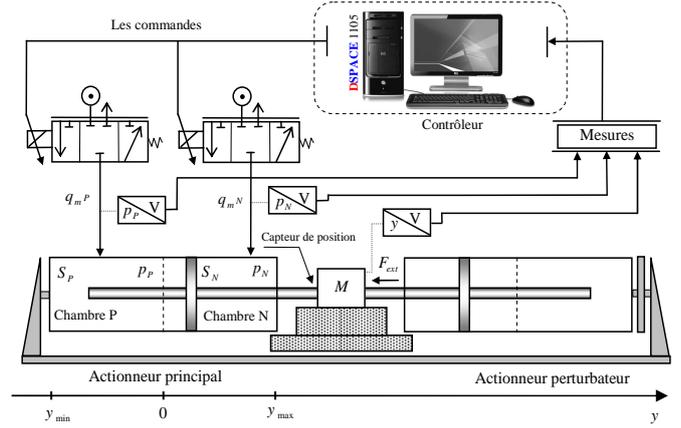


FIGURE 4.3: Modélisation du banc d'essais électropneumatique.

#### 4.4.3.1. Dynamique de la partie mécanique

En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur la partie mobile constituée par le chariot et les pistons des deux vérins et sous les hypothèses d'une liaison tige/chariot rigide et d'un solide indéformable, le mouvement en translation  $y$  de la partie mécanique est gouverné par l'équation dynamique suivante

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{M} (S_P p_P - S_N p_N - F_f - F) \end{aligned} \quad (4.50)$$

avec  $M$  la masse en mouvement qui est celle du chariot et des 2 tiges,  $S_P$  et  $S_N$  sont respectivement les surfaces utiles du piston pour la chambre  $P$  et pour la chambre  $N$ ,  $F_f$  est la force de frottement composée de frottements visqueux, fonction linéaire de la vitesse, et de frottements secs. Ces derniers sont des phénomènes complexes qui peuvent être modélisés de plusieurs manières ([128]).

#### 4.4.3.2. Dynamique des pressions

L'évolution de la pression dans chacune des chambres du vérin, à volume variable en fonction de la position du piston, est obtenue par l'application du premier principe de la thermodynamique et l'équation de la continuité (conservation de la masse). Les hypothèses traditionnellement retenues pour concevoir le modèle dynamique d'une chambre sont les suivantes ([127][128][129]) : l'air est un gaz parfait, l'énergie cinétique du gaz est négligeable dans la chambre, l'écoulement s'effectue sans échange de chaleur ou de travail avec l'extérieur, l'échange de travail avec le piston est réversible, les conduites d'alimentation et d'échappement sont à la même hauteur, la gravité n'a aucune influence, l'évolution de la pression est polytropique. L'équation dynamique résultante de la pression dans chaque chambre s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dp_P}{dt} &= \frac{\bar{k} r_0 T_P}{V_P(y)} \left( q_{mP} (u_P, p_P) - \frac{S_P}{r_0 T_P} p_P v \right) \\ \frac{dp_N}{dt} &= \frac{\bar{k} r_0 T_N}{V_N(y)} \left( q_{mN} (u_N, p_N) + \frac{S_N}{r_0 T_N} p_N v \right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

et les températures  $T_P$  et  $T_N$  dans les chambres du vérin sont données par

$$\begin{aligned} T_P &= T_{P_0} \left( \frac{p_{P_0}}{p_P} \right)^{\frac{1-\bar{k}}{\bar{k}}} \\ T_N &= T_{N_0} \left( \frac{p_{N_0}}{p_N} \right)^{\frac{1-\bar{k}}{\bar{k}}} \end{aligned} \quad (4.52)$$

avec  $u_P$  et  $u_N$  les commandes des servodistributeurs,  $q_{mP}$  et  $q_{mN}$  les débits massiques relatifs aux deux chambres,  $r_0$  la constante des gaz parfaits,  $\bar{k}$  le coefficient polytropique,  $T_P$  et  $T_N$  sont les températures dans les chambres  $P$  et  $N$  respectivement,  $T_{P_0}$  (resp.  $T_{N_0}$ ) la température initiale dans la chambre  $P$  (resp.  $N$ ),  $p_{P_0}$  (resp.  $p_{N_0}$ ) la pression initiale dans la chambre  $P$  (resp.  $N$ ),  $V_P(y)$  et  $V_N(y)$  les volumes des chambres du vérin donnés par les équations suivantes

$$\begin{aligned} V_P(y) &= V_P(0) + S_P \cdot y, \quad \text{avec } V_P(0) = V_{DP} + 0.5S_P l \\ V_N(y) &= V_N(0) - S_N \cdot y, \quad \text{avec } V_N(0) = V_{DN} + 0.5S_N l \end{aligned} \quad (4.53)$$

où  $l$  représente la course du vérin,  $V_P(0)$  et  $V_N(0)$  les volumes pour la position  $y = 0$  dans les deux chambres avec  $V_{DP}$  et  $V_{DN}$  les volumes morts présents à chaque extrémité du vérin.

#### 4.4.3.3. Modèle du système électropneumatique

Un modèle de commande pour le banc d'essai électropneumatique, celui utilisé dans la littérature ([127][128][129]), est obtenu à partir du modèle de mouvement de la partie mécanique (4.50) et de la dynamique des pressions (4.51) en faisant les hypothèses supplémentaires suivantes ([127][128][129]) : la dynamique des servodistributeurs est négligée, les frottements secs sont négligés et, ainsi, le frottement se compose uniquement de frottement visqueux linéairement dépendants de la vitesse ( $F_f = -bv$  avec  $b$  le coefficient de frottement visqueux) et on suppose aussi que la température du vérin est la même que la température ambiante ( $T = T_N = T_P$ ).

Par la suite, nous considérons seulement le contexte monovarié de la commande, *i.e.* commande en position  $y$ , ce qui suppose que les deux servodistributeurs sont pilotés avec une source de pression commune et une commande de signe opposé :  $u = u_P = -u_N$ , il est possible donc de décrire la dynamique du banc électropneumatique (servo-distributeur + vérin linéaire + charge) par le modèle d'état non linéaire suivant ([127][128][129][113]).

$$\begin{aligned} \frac{dp_P}{dt} &= \frac{\bar{k}r_0T}{V_P(y)} \left( q_m(u, p_P) - \frac{S}{r_0T} p_P v \right) \\ \frac{dp_N}{dt} &= \frac{\bar{k}r_0T}{V_N(y)} \left( q_m(-u, p_N) + \frac{S}{r_0T} p_N v \right) \\ \frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{M} (S(p_P - p_N) - b_v v - F) \end{aligned} \quad (4.54)$$

avec  $S = S_P = S_N$  est la surface utile du vérin, égale pour les deux chambres, car le vérin est à double tige.

#### 4.4.4. Analyse bibliographique

L'importance de l'actionneur électropneumatique pour le monde industriel a fait de ce système l'objet de plusieurs recherches ces derniers temps. Ces recherches sont focalisées essentiellement sur la modélisation, l'observation et la commande. Néanmoins, la conception de nouvelles lois de

commande c'est ce qui attire le plus les chercheurs. Dans ([130]), un contrôleur backstepping et un contrôleur par mode de glissement ont été examinés en expérimentation pour commander la position et la pression dans une chambre. Dans ([131]), des algorithmes de commande avec un retour d'état à gains fixes ou variables, des lois de commandes non linéaires linéarisantes ainsi qu'une loi non linéaire multidimensionnelle, développée à base de la théorie de la platitude sous contraintes de critères énergétiques, ont été testés sur un actionneur électropneumatique linéaire. Dans ([129]), des approches de commande non linéaires robustes sont développées à base d'un modèle triangulaire de l'actionneur électropneumatique pour assurer la poursuite de trajectoires en position et en pression. Une étude comparative a été réalisée aussi entre les approches non linéaires proposées et la commande par platitude, la commande backstepping et la commande par mode de glissement. Dans ([127]), des stratégies de commande par modes glissants d'ordre supérieur à convergence en temps fini sont développées et examinées expérimentalement sur un actionneur électropneumatique. Il s'agit d'une commande basée sur le concept d'*Integral Sliding Mode*, d'une commande à trajectoire précalculée monovariante (seule la position du vérin est commandée) et d'une commande à trajectoire précalculée multivariante (la position et la pression dans une chambre sont contrôlées). Dans le même travail de recherche, un observateur par modes glissants et un observateur à grand gain sont synthétisés et examinés. Dans ([128]), une commande par modes glissants d'ordre 1 à amplitude adaptative a été appliquée à un actionneur électropneumatique. L'idée de base de cette approche est de faire varier l'amplitude de la commande dynamiquement en fonction de l'erreur sur la variable de glissement. Si l'erreur est trop grande, l'amplitude augmente assez rapidement ; si elle est à l'intérieur d'une couche limite, l'amplitude est réduite petit à petit, jusqu'à atteindre une valeur proche de celle des incertitudes/perturbations. D'autres méthodes de commande sont proposées dans la littérature pour ce système, entre autres une commande floue et une commande neuronale dans ([132]), une commande passive dans ([133]), une commande backstepping dans ([134]) et une commande linéaire adaptative dans ([113]).

## 4.5. Commande linéaire adaptative appliquée au système électropneumatique

L'implémentation de la loi de commande linéaire adaptative, développée précédemment, ainsi que l'analyse des résultats expérimentaux obtenus seront notre objectif dans ce paragraphe. La position  $y$  du piston est la grandeur du système pneumatique qu'on souhaite contrôler. Cependant, il reste une dynamique des zéros stable<sup>3</sup> correspondant à l'évolution des pressions. Dans ce qui suit, nous allons établir, en premier temps, la représentation entrée sortie du système telle que les deux pressions,  $p_P$  et  $p_N$ , apparaîtront dans cette représentation, seront traitées comme *des états bornées*.

### 4.5.1. Conception d'une commande linéaire adaptative pour l'actionneur

Il est facile de déduire d'après (4.54) que la position  $y$  du piston est de degré relatif égal à 3 par rapport à l'entrée  $u$ . D'où, après une manipulation simple, nous obtenons

$$y^{(3)} = \frac{S\bar{k}r_0T}{M} \left( \frac{q_m(u, p_P)}{V_P(y)} - \frac{q_m(-u, p_N)}{V_N(y)} \right) - \frac{\bar{k}S^2}{M} \left( \frac{p_P}{V_P(y)} + \frac{p_N}{V_N(y)} \right) \dot{y} - \frac{1}{M} (b_v \dot{y} + \dot{F}_{ext}) \quad (4.55)$$

3. La stabilité de la dynamique de pression dans les deux chambres  $P$  et  $N$  a été abordée dans plusieurs travaux ([135][127]).

À présent que la relation entrée sortie pour l'actionneur pneumatique a été définie, nous allons nous intéresser dans ce qui suit à l'application de la commande linéaire adaptative à ce système. Pour ce faire, nous désignons, à ce stade, par  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T = [y, \dot{y}, \ddot{y}]^T$  le vecteur d'état et par  $\mathbf{p} = [p_P, p_N]^T$  le vecteur de pression. Avec cette notation, nous pouvons réécrire la représentation entrée sortie (4.55) comme suit

$$y^{(3)} = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, u) \quad (4.56)$$

Du moment que la pression dans (4.56) est bornée, avec la même méthodologie<sup>4</sup> et les mêmes étapes que pour (4.2), nous aboutissons à une loi de commande linéaire adaptative de la forme (4.16) dont les gains sont mis à jour par une loi d'adaptation de la forme (4.29).

**Remarque 4.4.** Nous nous proposons ici de discuter la réalisation de l'hypothèse (4.1) pour le cas du système pneumatique. Comme nous avons déjà vu précédemment, l'application de la commande linéaire adaptative au système (4.56) requiert que la dérivée  $f_u(\mathbf{x}, \mathbf{p}, u) = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, u)}{\partial u}$  soit strictement positive et bornée telle que  $0 < \delta_0 < f_u(\mathbf{x}, \mathbf{p}, u) < \delta_1$  pour tout  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, u) \in \Omega$ , avec  $\delta_0$  et  $\delta_1$  deux constantes positives, et  $\Omega$  est le domaine physique<sup>5</sup> de ce système. Comme les débits massiques  $q_m(u, p_P)$  et  $q_m(-u, p_N)$  sont inconnus, il n'est pas possible de vérifier la réalisation de cette hypothèse dans le cas général, mais il est important de souligner que si nous remplaçons les deux débits massiques par leurs approximations affines utilisées souvent dans la littérature ([128][127][113]) :  $q_m(u, p_P) = \varphi_P + \psi_P u$  et  $q_m(-u, p_N) = \varphi_N - \psi_N u$  avec  $\varphi_j > 0$  et  $\psi_j > 0$ , nous en déduisons que  $f_u(\mathbf{x}, \mathbf{p}, u) = \frac{S \bar{k} r_0 T}{M} \left( \frac{\psi_P}{V_P(y)} + \frac{\psi_N}{V_N(y)} \right) > 0$  et bornée, ce qui prouve que l'hypothèse (4.1) est vérifiée dans ce cas.  $\square$

Définissons maintenant l'erreur de poursuite par  $e(t) = y_d(t) - y(t)$  et l'erreur filtrée par  $s(t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^3 \int_0^t e(\tau) d\tau$ ,  $\lambda > 0$ . Notons aussi  $\Pi(e) = \left[ e, e^{(1)}, e^{(2)}, \int_0^\tau e(\tau) d\tau, 1 \right]^T$  et  $\Theta = [\mathbf{K}_e, K_i, K_0]^T$ , avec  $\mathbf{K}_e = [K_{e-1}, K_{e-2}, K_{e-3}]^T$ , le vecteur des paramètres du contrôleur à adapter. Il est possible de réaliser les objectifs de commande en terme de poursuite de trajectoires pour la position  $y$  du piston par la loi de commande suivante

$$u = \Pi^T(e) \Theta \quad (4.57)$$

avec ses paramètres  $\Theta$  sont mis à jour par la loi d'adaptation ci-après

$$\dot{\Theta} = \eta_0 \Pi(e) (\dot{s} + Ks + K_0 \tanh(s/\varepsilon_0)) - \eta_0 \sigma \Theta \quad (4.58)$$

Nous allons dans la suite présenter les résultats issus de la mise en oeuvre expérimentale de la loi de commande (4.57) et sa loi de mise à jour (4.58) pour la commande du système pneumatique.

#### 4.5.2. Résultats expérimentaux

Le contrôleur linéaire adaptatif a été implémenté avec une carte DSPACE de type DS1104 sous l'environnement Simulink du logiciel MATLAB pour une période d'échantillonnage fixée à 0.001 sec,

4. Pour plus de détails, le lecteur est renvoyé à ([113]).

5. Notons  $\mathbf{X} = [p_P, p_N, y, \dot{y}, \ddot{y}]^T$ , le domaine physique  $\Omega$  de cet actionneur est défini par ([113]) :  
 $\Omega = \{ \mathbf{X} \mid 1bar \leq p_P \leq 7bar, 1bar \leq p_N \leq 7bar, |y| \leq 72mm, |\dot{y}| \leq 1m/s, |\ddot{y}| \leq 15m/s^2 \}$

il est donné sur la figure 4.4 un schéma illustratif de cette application. La trajectoire que nous voulons faire suivre à la position du piston est  $y_d = 50 \sin(0.2\pi t)$  mm. Le profil de la force perturbatrice, quant à elle, est choisi comme un signal carré avec une amplitude de 500 N et une fréquence de 0.05 Hz. Les paramètres de la commande ont été choisis de manière à avoir une bonne précision au niveau de la poursuite de trajectoire ainsi qu'une bonne robustesse par rapport à la force perturbatrice. Les paramètres du contrôleur utilisés en expérimentation sont les suivants :  $\lambda = 3$  pour l'erreur filtrée,  $K = 50$ ,  $K_0 = 1$ ,  $\eta_0 = 3$ ,  $\sigma = 0.05$  et  $\varepsilon_0 = 0.1$  pour la loi d'adaptation des gains. Le vecteur des gains initiaux utilisé est  $\Theta(0) = [0, 0, 0, 0]^T$ .

Les résultats de l'évaluation expérimentale de ce contrôleur, avec les paramètres de conception définis dans le paragraphe précédent, sont illustrés sur les figures 4.5 à 4.12. La position du piston  $y(t)$  ainsi que sa trajectoire désirée  $y_d(t)$  sont données par la figure 4.5, et l'erreur de poursuite par la figure 4.7. Nous pouvons constater un bon suivi de trajectoire résultant avec un temps de réponse d'environ 1.5 sec. et un dépassement d'ordre de 1%. L'allure temporelle de la commande  $u$  appliquée au système est exposée sur la figure 4.6. Malgré l'effet des erreurs de mesure et l'utilisation des dérivateurs numériques, la commande est relativement lisse et reste dans la plage de fonctionnement.

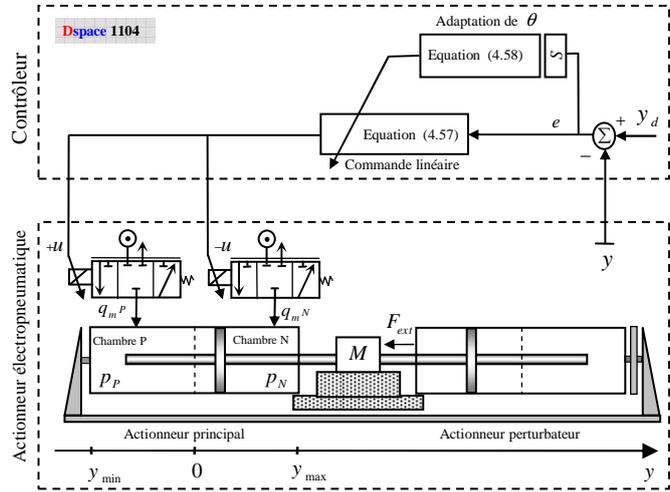


FIGURE 4.4: La commande linéaire adaptative appliquée au système hydraulique

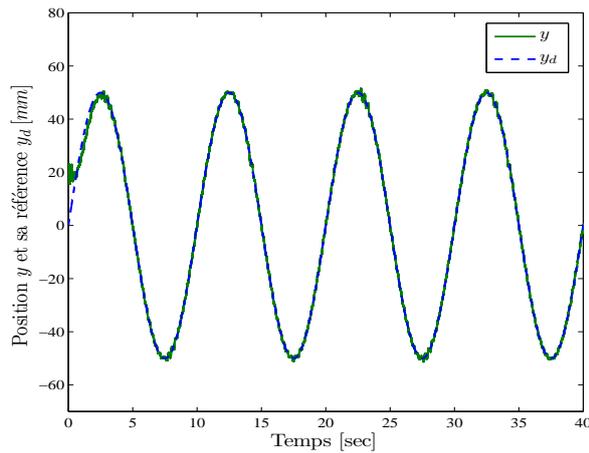


Figure 4.5: Évolution temporelle de la position du piston  $y$ .

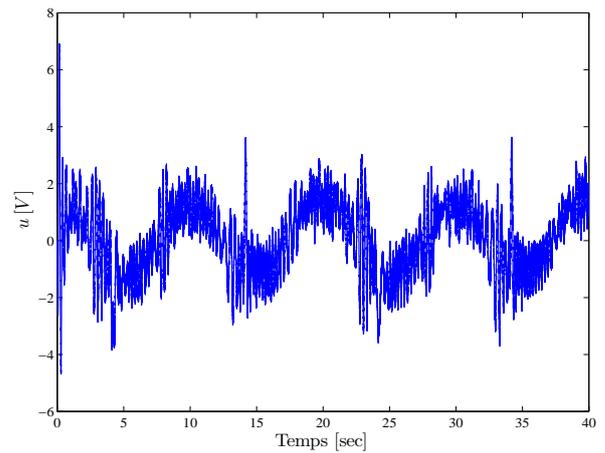


Figure 4.6: Signal de commande  $u$ .

Les paramètres estimés  $K_0$ ,  $K_i$  et  $\mathbf{K}_e = [K_{e-1}, K_{e-2}, K_{e-3}]$  sont montrés sur les figures 4.9 et 4.10. Il est apparait clairement que tous les paramètres estimés sont bornés et ils évoluent à chaque fois que l'amplitude de la force perturbatrice change, et ce, pour compenser son effet. La figure 4.8

présente l'allure de la force perturbatrice appliquée à l'actionneur durant la phase de commande.

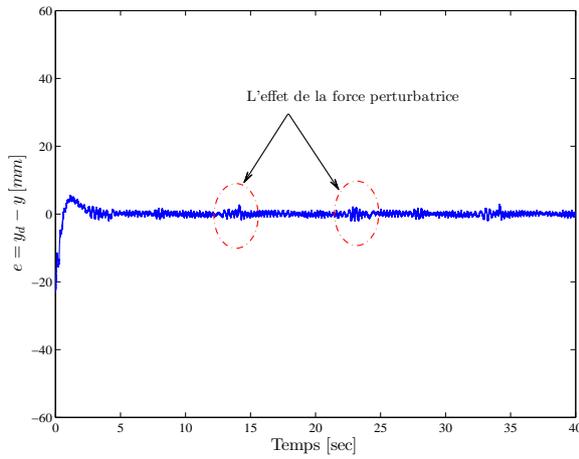


Figure 4.7: Erreur de poursuite résultante.

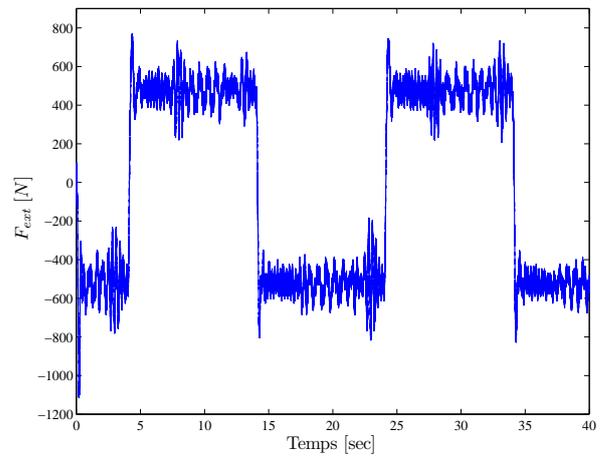


Figure 4.8: Force perturbatrice appliquée.

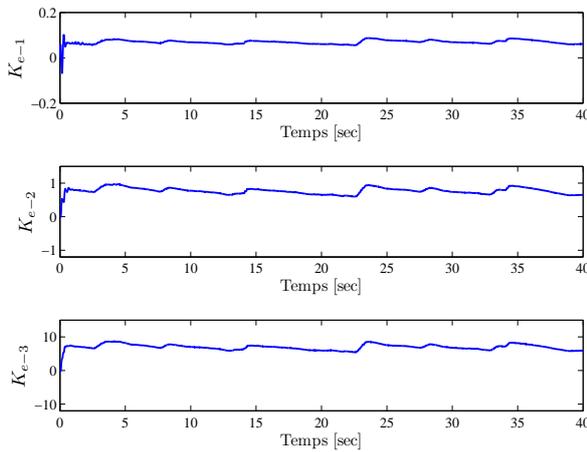


Figure 4.9: Évolution des gains  $K_{e-1}$ ,  $K_{e-2}$  et  $K_{e-3}$ .

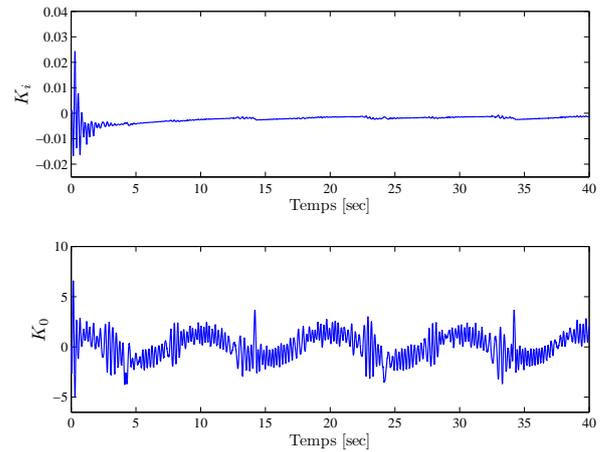


Figure 4.10: Évolution des gains  $K_i$  et  $K_0$ .

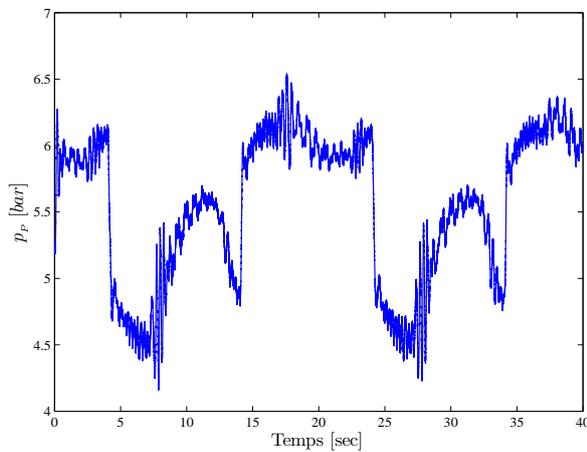


Figure 4.11: Pression dans la chambre  $P$ .

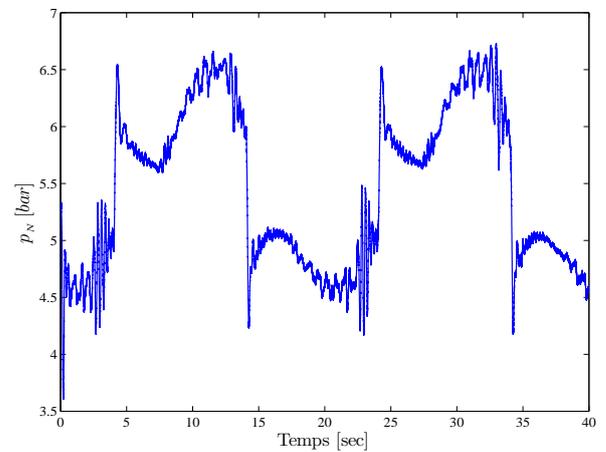


Figure 4.12: Pression dans la chambre  $N$ .

L'évolution temporelle des pressions  $p_P$  et  $p_N$  sont données sur les figures 4.11 et 4.12 respectivement. Les deux pressions manifestent une forte stabilité, ce qui met en évidence, et expérimentalement, le comportement stable des dynamiques internes.

## 4.6. Conclusion

Au cours de ce chapitre, une stratégie de commande linéaire adaptative a été proposée pour une classe des systèmes non linéaires monovariabiles incertains non affines en l'entrée. Premièrement, en s'aidant du théorème des fonctions implicites, nous avons démontré l'existence d'une commande idéale capable de satisfaire les objectifs de commande en termes de poursuite et de stabilité. Néanmoins, la commande idéale implicite ne peut pas être connue et calculée même si le modèle du système est disponible, contrairement au cas des systèmes affines en la commande. Nous nous sommes intéressés ensuite à l'approximation de cette commande idéale, qui est l'idée principale de cette approche. Pour ce faire, le théorème de la valeur moyenne nous a permis d'approcher et de représenter la commande idéale comme étant la somme d'un terme linéaire, avec des gains, et d'un deuxième terme qui représente l'erreur d'approximation. Nous avons procédé ensuite au développement d'une loi de mise à jour en ligne pour les gains de la commande linéaire afin de minimiser l'erreur à l'entrée du système, *i.e.* pour minimiser une fonction quadratique de l'erreur entre la commande idéale inconnue et la sortie du contrôleur linéaire.

Il convient de souligner que cette approche n'exige pas la connaissance du modèle dynamique du système et que la loi de commande et son mécanisme d'adaptation sont simples à implémenter. Cette approche garantit, sous certaines hypothèses physiquement acceptables, la bornitude de tous les signaux de la boucle fermée et la convergence de l'erreur de poursuite à un petit voisinage autour de zéro.

Les performances de cette stratégie de commande ont été étudiées et examinées expérimentalement dans la commande en position d'un actionneur électropneumatique.

Dans le chapitre 5, nous allons proposer deux schémas de commande sans modèle stables pour une classe des systèmes SISO non linéaires non affines avec une dynamiques des zéros. Les deux schémas seront validés expérimentalement en commande en position d'un actionneur électropneumatique.

---

**Chapitre 5.**

**Commandes sans modèle d'une classe des systèmes non linéaires avec  
une dynamique des zéros**



---

## Chapitre 5.

---

# Commandes sans modèle d'une classe des systèmes non linéaires avec une dynamique des zéros

---

◁ La vie est l'adaptation continue de relations internes à des relations externes. ▷

↯ **Herbert Spencer**<sup>1</sup>

---

### 5.1. Introduction

Deux stratégies de commande sans modèle seront introduites dans ce chapitre pour une classe des systèmes monovariabiles incertains non affines en la commande avec une dynamique des zéros. La conception de nouvelles lois de commande assez performantes pour cette classe des systèmes a fait l'objet de plusieurs efforts de recherche ces dernières années. Nous pouvons citer entre autres la commande PI dans ([136]), la commande par dynamique inverse dans ([137][138][139][140]) et la commande adaptative dans ([141][18][142]). Néanmoins, les travaux de recherche et de développement menés sur cette classe sont très peu nombreux, contrairement au cas des autres classes des systèmes non linéaires.

Les deux schémas de commande proposés ici reposent sur l'estimation d'une commande par dynamique inverse idéale capable de satisfaire les objectifs de commande en termes de poursuite de trajectoire désirée et de stabilité. La première approche est une réalisation simple d'un estimateur rapide de la commande par dynamique inverse idéale qui sera développé à base de la théorie de perturbation singulière. Dans la deuxième approche, nous allons utiliser un système d'inférence flou pour estimer la commande par dynamique inverse idéale inconnue. Pour ce faire, un mécanisme de mise à jour pour les paramètres de sortie du système flou sera conçu. Pour les deux approches, la stabilité de la boucle de commande sera étudiée et les performances seront examinées en expérimentation en commande en position d'un actionneur électropneumatique.

Ce chapitre est construit ainsi : la formulation du problème de commande est donnée dans la section 5.2. La conception d'un contrôleur PI robuste et l'analyse de ses performances sont présentées dans la section 5.3 avec un rappel sur la théorie de perturbation singulière et le théorème de Tikhonov. La section 5.5 introduit un contrôleur flou adaptatif avec l'analyse de la stabilité de la boucle fermée. L'étude expérimentale des deux schémas de commande sur l'actionneur électropneumatique est abordée dans les sections 5.4 et 5.6.

---

1. Philosophe, Sociologue (1820 - 1903).

## 5.2. Formulation du problème

Considérons un système non linéaire incertain mono-entrée mono-sortie non affine et à minimum de phase décrit par la forme normale suivante

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_{r-1} = x_r \\ \dot{x}_r = f(x, z, u), \\ \dot{z} = q(x, z, u), \\ y = x_1 \end{cases} \quad (5.1)$$

avec  $x(0) = x_0$  et  $z(0) = z_0$  pour tout  $(x, z, u) \in D_x \times D_z \times D_u$  avec  $D_x \subset \mathbb{R}^r$ ,  $D_z \subset \mathbb{R}^{n-r}$  et  $D_u \subset \mathbb{R}$  sont des domaines contenant respectivement leurs origines. Le vecteur d'état complet du système (5.1) est  $\begin{bmatrix} x^T & z^T \end{bmatrix}^T$  avec  $x = [x_1, \dots, x_r]^T = [y, \dots, y^{(r-1)}]^T$  et  $y$  est la sortie du système,  $u$  est l'entrée de commande,  $r$  est le degré relatif du système et  $f : D_x \times D_z \times D_u \rightarrow \mathbb{R}$  et  $q : D_x \times D_z \times D_u \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$  sont des fonctions continûment dérivables de leurs arguments.

la représentation entrée-sortie du système (5.1) s'écrit

$$\begin{cases} y^{(r)} = f(x, z, u), & x(0) = x_0 \\ \dot{z} = q(x, z, u), & z(0) = z_0 \end{cases} \quad (5.2)$$

L'objectif de commande pour le système (5.2) sera de développer une loi de commande pour l'entrée  $u$ , qui n'exige pas la connaissance du modèle du système à commander et assure la poursuite d'une trajectoire de référence pour la sortie  $y$  ainsi que la bornitude de tous les signaux en boucle fermée. Afin de réaliser cet objectif, les hypothèses suivantes sont retenues dans le reste de ce chapitre

**Hypothèse 5.1.** Pour le système (5.1), la fonction  $f_u(x, z, u) = \partial f / \partial u$  est non nulle et bornée telle que  $0 < \delta_0 < |\partial f / \partial u| < \delta_1$  pour tout  $(x, z, u) \in D_x \times D_z \times D_u$ , avec  $\delta_0$  et  $\delta_1$  sont des constantes positives. Cela implique que la seule connaissance nécessaire du système est le signe de  $\partial f / \partial u$ ,  $\text{sgn}(\partial f / \partial u) \in \{-1, +1\}$ .  $\square$

**Hypothèse 5.2.** La trajectoire de référence  $y_d(t)$  ainsi que ses dérivées  $y_d^{(i)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, r+1$ , sont supposées connues, continues et bornées.  $\square$

Nous définissons l'erreur de poursuite par  $e(t) = y_d(t) - y(t)$ , le vecteur d'erreur par  $\mathbf{e} = x_d - x = [e, \dot{e}, \dots, e^{(r-1)}]^T \in \mathbb{R}^r$  et une erreur filtrée  $\sigma$  comme suit

$$\sigma(t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{r-1} e(t), \quad \lambda > 0 \quad (5.3)$$

En utilisant (5.3),  $\sigma(t) = 0$  représente une équation différentielle linéaire dont la solution implique que l'erreur de poursuite  $e(t)$  converge vers zéro avec une constante de temps  $(r-1)/\lambda$ . Les dérivés de  $e(t)$  jusqu'à l'ordre  $r-1$  convergent aussi vers zéro ([71]). Donc, l'objectif de stabilisation du vecteur d'erreur  $\mathbf{e} = [e, \dot{e}, \dots, e^{(r-1)}]^T$  se simplifie à la conception d'une loi de commande pour assurer la convergence de  $\sigma(t)$  vers zéro. De même, pour une bornitude du signal  $\sigma(t)$  par une

constante  $\Phi$  telle que  $|\sigma(t)| \leq \Phi$ , il en résulte ([71])  $|e^{(i)}(t)| \leq 2^i \lambda^{(i-r+1)} \Phi$ ,  $i = 0, \dots, r-1$ . Cette bande peut être réduite par l'augmentation du paramètre de conception  $\lambda$ .

La dérivée temporelle de l'erreur filtrée (5.3) peut se mettre sous la forme

$$\dot{\sigma} = y_d^{(r)}(t) + \beta_{r-1}e^{(r-1)} + \dots + \beta_1\dot{e} - f(x, z, u) \quad (5.4)$$

avec  $\beta_i = \frac{(r-1)!}{(r-i)!(i-1)!} \lambda^{r-i}$ ,  $i = 1, \dots, r-1$ .

À partir de (5.2) et (5.4), nous obtenons la dynamique suivante

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = y_d^{(r)}(t) + \beta_{r-1}e^{(r-1)} + \dots + \beta_1\dot{e} - f(x, z, u), & \sigma(0) = \sigma_0 \\ \dot{z} = q(x, z, u), & z(0) = z_0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Puisque  $\partial f / \partial u \neq 0$ , et en s'aidant du théorème des fonctions implicites ([3][4]), il existe une commande de dynamique inverse idéale pour (5.5), qui peut être trouvée en résolvant l'équation suivante par rapport à  $u$

$$y_d^{(r)}(t) + \beta_{r-1}e^{(r-1)} + \dots + \beta_1\dot{e} - f(x, z, u) = -K\sigma - K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0) \quad (5.6)$$

avec  $K > 0$  et  $K_0 > 0$ ,  $\varepsilon_0$  une petite constante positive et  $\tanh(\cdot)$  est la fonction tangente hyperbolique. En substituant (5.6) dans (5.5), nous obtenons  $\dot{\sigma} = -K\sigma - K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0)$ , ce qui implique que  $e(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

Comme il est difficile de trouver la solution explicite  $u$  de l'équation (5.6), et ce, même si le modèle est bien connu, les deux approches que nous allons proposer dans ce chapitre ont pour objectif l'estimation de cette commande idéale  $u^*$  solution de (5.6). Dans la première approche, la solution  $u$  sera approximée par un estimateur de dynamique rapide. Quant à la deuxième approche, l'approximation de  $u$  sera faite par un estimateur flou avec des paramètres adaptatifs.

### 5.3. Loi de commande PI robuste

Une stratégie de commande PI robuste stable et simple à implémenter sera développée dans cette section en se basant sur la théorie de perturbation singulière et le théorème de Tikhonov. L'idée de cette approche repose sur l'estimation de la commande par dynamique inverse idéale solution de (5.6) en choisissant un estimateur convenable ayant une dynamique rapide.

#### 5.3.1. Rappel sur la théorie de perturbation singulière

La théorie de perturbation singulière nous facilite l'analyse, la formulation et la conception des stratégies de commande pour les systèmes non linéaires complexes. Cette théorie a été introduite par Tikhonov en 1952 sur les systèmes d'équations différentielles contenant de petits paramètres dans la dérivée ([143]), et depuis cette date, le théorème principal de cette théorie porte son nom. À l'aide de ce théorème, il est possible de surmonter la difficulté de l'analyse et de la synthèse, à laquelle nous pouvons se heurter, d'un système dynamique ayant une forte non-linéarité, et ce, si nous arrivions à identifier les dynamiques lentes et rapides qui le constituent. Ensuite, les deux dynamiques, lentes et rapides, seront étudiées avec des échelles de temps différentes.

Le fait de travailler avec des échelles de temps différentes ça permet de comprendre facilement le comportement de chacun des sous systèmes et de tirer ainsi des résultats sur le système global. Plusieurs versions et formulations du théorème de Tikhonov peuvent être trouvées dans la littérature ([3][144][145]). Ici, nous utilisons la version basée sur la fonction de Lyapunov présentée dans ([3]) et qui est, d'ailleurs, la version la plus utilisée dans la synthèse et l'analyse des lois de commande.

Considérons le problème de résolution du système suivant ([3])

$$\Sigma_\epsilon : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), \epsilon), & x(0) = \xi(\epsilon) \\ \epsilon \dot{u} = g(t, x(t), u(t), \epsilon), & u(0) = \varphi(\epsilon) \end{cases} \quad (5.7)$$

avec  $\epsilon$  est un réel positif suffisamment petit,  $\xi(\epsilon)$  et  $\varphi(\epsilon)$  sont des fonctions continues et lisses par rapport à  $\epsilon$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  sont continûment différentiables par rapport à leurs arguments pour  $(t, x, u, \epsilon) \in [0, \infty) \times D_x \times D_u \times [0, \epsilon_0]$ , avec  $D_x \subset \mathbb{R}^n$  et  $D_u \subset \mathbb{R}^m$  sont des ensembles ouverts et  $\epsilon_0 > 0$ .

Dans le système (5.7), il est clair que lorsque nous posons  $\epsilon = 0$ , l'ordre de l'équation d'état se réduit de  $n + m$  à  $n$ . Nous supposons que le système  $\Sigma_\epsilon$  est dans la forme standard, *i.e.* l'équation algébrique

$$0 = g(t, x, u, 0) \quad (5.8)$$

possède  $l \geq 1$  racines réelles isolées notées  $u = h_i(t, x)$ ,  $i \in \{1, \dots, l\}$ , avec  $(t, x) \in [0, \infty) \times D_x$ . Cette supposition assure, en effet, l'existence d'un modèle réduit d'ordre  $n$  pour chaque racine de (5.8) ([3]). Nous choisissons l'une de ces racines  $h(t, x)$ , et désormais nous omettons l'indice  $i$ , nous substituons la racine considérée dans la première équation de (5.7), quand  $\epsilon = 0$ , nous obtenons le modèle réduit  $\Sigma_0$  suivant

$$\Sigma_0 : \dot{x}(t) = f(t, x(t), h(t, x), 0), \quad x(0) = \xi(0) \quad (5.9)$$

Considérons maintenant le changement de variable suivant

$$v = u - h(t, x) \quad (5.10)$$

Le système résultant

$$\Sigma_b : \frac{dv}{d\tau} = g(t, x, v + h(t, x), 0), \quad v(0) = \varphi_0 - h(0, \xi_0) \quad (5.11)$$

est appelé système de la couche limite, avec  $\varphi_0 = \varphi(0)$  et  $\xi_0 = \xi(0)$ ,  $(t, x) \in [0, \infty) \times D_x$ , sont traités comme des paramètres fixes. La nouvelle échelle de temps  $\tau$  dans (5.11) est liée au temps  $t$  par la relation  $\tau = t/\epsilon$ . Le résultat donné dans le théorème 5.1 est issu du travail de Tikhonov<sup>2</sup> ([3][137][138][139][140]); une preuve de ce théorème est donnée dans ([3]) (voir l'annexe C.18, p 706).

**Théorème 5.1.** *Considérons le système perturbé  $\Sigma_\epsilon$  défini dans (5.7) et soit  $u = h(t, x)$  une racine isolée de (5.8). Supposons que les conditions suivantes sont remplies pour tous  $(t, x, u - h(t, x), \epsilon) \in$*

2. Un mathématicien russe, son nom complet est Andreï Nikolaïevitch Tikhonov (1906 - 1993).

$[0, \infty) \times D_x \times D_v \times [0, \epsilon_0]$  pour certains domaines  $D_x \subset \mathbb{R}^n$  et  $D_v \subset \mathbb{R}^m$ , qui contiennent respectivement leurs origines :

A.1 sur tout sous-ensemble compact de  $D_x \times D_v$ , les fonctions  $f, g$ , leurs premières dérivées partielles par rapport à  $(x, u, \epsilon)$  et la première dérivée partielle de  $g$  par rapport à  $t$  sont continues et bornées,  $h(t, x)$  et  $\frac{\partial g}{\partial u}(t, x, u, 0)$  aient des premières dérivées partielles bornées par rapport à leurs arguments et  $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, h(t, x), 0)$  est lipschitzienne par rapport à  $x$ , uniformément en  $t$ , les données initiales  $\xi(\epsilon)$  et  $\varphi(\epsilon)$  sont des fonctions lisses de  $\epsilon$  ;

A.2 L'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable du système réduit  $\Sigma_0$  défini dans (5.9) ; il existe une fonction de Lyapunov  $V(t, x) : [0, \infty) \times D_x \rightarrow [0, \infty)$  qui satisfait

$$\begin{aligned} W_1(x) &\leq V(t, x) \leq W_2(x), \\ \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) f(t, x, h(t, x), 0) &\leq -W_3(x) \end{aligned} \quad (5.12)$$

pour  $(t, x) \in [0, \infty) \times D_x$ , avec  $W_1, W_2$  et  $W_3$  sont des fonctions continues définies positives sur  $D_x$ . Soit  $c$  un nombre non négatif tel que  $\{x \in D_x \mid W_1(x) \leq c\}$  est un sous-ensemble compact de  $D_x$  ;

A.3 L'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable du système de la couche limite  $\Sigma_b$ , uniformément en  $(t, x)$  ; soit  $R_v \subset D_v$  le bassin d'attraction du système autonome

$$\frac{dv}{d\tau} = g(0, \xi_0, v + h(0, \xi_0), 0) \quad (5.13)$$

et soit  $\Omega_v$  un sous-ensemble compact de  $R_v$ .

Donc, pour chaque ensemble compact  $\Omega_x \subset \{W_2(x) \leq \rho c, 0 < \rho < 1\}$ , il existe une constante positive  $\epsilon^*$  telle que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\xi_0 \in \Omega_x$ ,  $\varphi_0 - h(0, \xi_0) \in \Omega_v$  et  $0 < \epsilon < \epsilon^*$ , le système  $\Sigma_\epsilon$  a une solution unique  $x_\epsilon(t), u_\epsilon(t)$  dans  $[0, \infty)$ , qui satisfait

$$x_\epsilon(t) - \tilde{x}(t) = O(\epsilon) \quad (5.14)$$

$$u_\epsilon(t) - h(t, \tilde{x}(t)) - \hat{v}(t/\tau) = O(\epsilon) \quad (5.15)$$

uniformément pour  $t \in [0, \infty)$ , avec  $\tilde{x}(t)$  et  $\hat{v}(\tau)$  sont les solutions du système réduit  $\Sigma_0$  et le système de la couche limite  $\Sigma_b$ , respectivement. En outre, pour chaque  $t_b > 0$ , il existe  $\epsilon^{**} \leq \epsilon^*$  tel que

$$u_\epsilon(t) - h(t, \tilde{x}(t)) = O(\epsilon) \quad (5.16)$$

uniformément pour  $t \in [t_b, \infty)$  quand  $\epsilon < \epsilon^{**}$ . ■

La stratégie de commande sans modèle présentée par la suite est développée à base du théorème de Tikhonov. Pour étudier la stabilité de la boucle de commande, il suffit de vérifier la satisfaction de A.1, A.2 et A.3 du théorème 5.1. Comme nous allons voir, la conception de la loi de commande sera formalisée sous la forme d'un problème de perturbation singulière et, ainsi, l'étude de la stabilité se ramène à l'étude et la résolution du système de perturbation singulière équivalent.

### 5.3.2. Conception d'un contrôleur PI robuste

Considérons la classe des systèmes non linéaires non affines à minimum de phase (5.1) et l'erreur filtrée définie dans (5.3) et notons

$$f_e(t, \mathbf{e}, z, u) = y_d^{(r)}(t) + \beta_{r-1}e^{(r-1)} + \dots + \beta_1\dot{e} - f(\mathbf{e} + x_r, z, u) \quad (5.17)$$

Donc (5.5) peut être réécrite comme suit

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = f_e(t, \mathbf{e}, z, u) & \sigma(0) = \sigma_0 \\ \dot{z} = q(\mathbf{e} + x_r, z, u), & z(0) = z_0 \end{cases} \quad (5.18)$$

Comme il était déjà démontré dans la section 5.2, avec une commande  $u^*$  solution de  $f_e(t, \mathbf{e}, z, u) = -K\sigma - K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0)$ , la dynamique de l'erreur de poursuite en boucle fermée est gouvernée par l'équation différentielle  $\dot{\sigma} = -K\sigma - K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0)$ , ce qui implique que  $e(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Donc, avec  $u^*$  comme entrée de commande, il est possible d'assurer la poursuite d'une trajectoire de référence donnée. Néanmoins, il est difficile de trouver la solution explicite  $u^*$ , et ce, même si la dynamique du système est bien connue. Pour cela, dans ce qui suit, la solution exacte de la dynamique inverse  $u^*$  sera approximée par la dynamique rapide suivante

$$\epsilon \dot{u} = \alpha (f_e(t, \mathbf{e}, z, u) + K\sigma + K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0)) \quad (5.19)$$

avec  $\epsilon$  un paramètre de conception positif et  $\alpha = \text{sgn}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)$ . Pour obtenir une meilleure approximation de la solution exacte  $u^*$  et garantir la stabilité de la boucle fermée, la valeur de  $\epsilon$  doit être choisie suffisamment petite.

Pour simplifier la conception de la loi de commande, notons

$$\mathcal{H}(t, \sigma, z, u) = f_e(t, \mathbf{e}, z, u) + K\sigma + K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0) \quad (5.20)$$

En utilisant (5.18) et (5.19), la dynamique résultante en boucle fermée devient

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \mathcal{H}(t, \sigma, z, u) - K\sigma - K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0), & \sigma(0) = \sigma_0 \\ \dot{z} = q(\mathbf{e} + x_r, z, u), & z(0) = z_0 \\ \epsilon \dot{u} = \alpha \mathcal{H}(t, \sigma, z, u), & u(0) = u_0 \end{cases} \quad (5.21)$$

Soit  $u^* = \mathcal{L}(t, \sigma, z)$  une racine isolée de  $\mathcal{H}(t, \sigma, z, u) = 0$ . Avec la théorie de perturbation singulière, le système réduit de la dynamique (5.21) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = -K\sigma - K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0), & \sigma(0) = \sigma_0 \\ \dot{z} = q(\mathbf{e} + x_r, z, \mathcal{L}(t, \sigma, z)), & z(0) = z_0 \end{cases} \quad (5.22)$$

Maintenant, nous définissons  $v = u - \mathcal{L}(t, \sigma, z)$  avec  $\tau = t/\epsilon$ . Le système de la couche limite de (5.21) est le suivant

$$\frac{dv}{d\tau} = \alpha \mathcal{H}(t, \sigma, z, v + \mathcal{L}(t, \sigma, z)) \quad (5.23)$$

### 5.3.3. Stabilité de la boucle fermée

Il convient, dans un premier temps, de mettre en avant l'équivalence entre les différentes variables et fonctions évoquées dans le théorème de Tikhonov 5.1 et celles du système (5.21). Pour cela, nous considérons la remarque suivante :

**Remarque 5.1.** Pour simplifier l'application du théorème de Tikhonov 5.1 au système (5.21) ainsi que la vérification des suppositions A.1 à A.3 pour ce système, nous identifions  $x$ ,  $z$ ,  $y$  et  $h(t, x)$  du théorème 5.1, notés ici par  $x_s$ ,  $z_s$ ,  $y_s$  et  $h_s(t, x_s)$  respectivement pour distinction, avec les quantités de (5.21) par  $x_s \sim [\sigma^T, z^T]^T$ ,  $z_s \sim u$ ,  $y_s \sim v$  et  $h_s(t, x_s) \sim \mathcal{L}(t, \sigma, z)$ . Nous identifions aussi  $f$  et  $g$  du théorème 5.1, notés ici par  $f_s$  et  $g_s$ , avec les quantités dans (5.21) comme suit<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} f_s &\sim [\mathcal{H}(t, \sigma, z, u) - K\sigma - K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0), q(e + x_r, z, u)]^T \\ g_s &\sim \alpha \mathcal{H}(t, \sigma, z, u) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Dans ce qui suit, nous allons traduire la première hypothèse du théorème 5.1. Tout d'abord, il est clair que pour avoir  $f_s$  et  $g_s$  continus et bornés sur tout sous-ensemble compact de  $D_{x_s} \times D_{y_s}$  nécessitent que  $f$ ,  $q$ ,  $x_d$  et  $y_d^{(r)}$  soient continus et bornés sur tout sous-ensemble compact de  $D_{\sigma \times z} \times D_v$ . En plus, la condition de continuité et de bornitude des premières dérivées partielles de  $f_s$  et  $g_s$  par rapport à  $(x_s, z_s, \varepsilon)$  est remplie lorsque les premières dérivées partielles de  $f$  et  $q$  par rapport à  $(x, z, u)$  sont continus et bornés. La condition que la première dérivée partielle de  $g_s$  par rapport à  $t$ , correspond dans le cas du système (5.21) à la première dérivée partielle de  $\alpha \mathcal{H}(t, \sigma, z, u)$  par rapport à  $t$ , exige que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $y_d^{(r+1)}$  soient continus et bornés.  $\square$

Dans ce qui suit, l'hypothèse suivante sur le système (5.21) est retenue afin d'établir un résultat de stabilité.

**Hypothèse 5.3.** Pour tout  $[t, \sigma, z, u - \mathcal{L}(t, \sigma, z), \varepsilon] \in [0, \infty) \times D_{\sigma, z} \times D_v \times [0, \varepsilon_0]$  avec  $D_{\sigma, z} \subset \mathbb{R}^n$  et  $D_v \subset \mathbb{R}^m$  certains domaines contiennent respectivement leurs origines :

- B.1 Sur tout sous-ensemble compact de  $D_{\sigma, z} \times D_v$ , les fonctions  $f$ ,  $q$  et leurs premières dérivées partielles par rapport à  $(x, z, u)$  sont continues et bornées,  $\mathcal{L}(t, \sigma, z)$  et  $\frac{\partial f}{\partial u}(x, z, u)$  aient des premières dérivées partielles bornées par rapport à leurs arguments et  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial q}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial q}{\partial z}$  comme fonctions de  $(x(t), z, \mathcal{L}(t, \sigma, z))$  sont lipschitziennes par rapport à  $\sigma$  et  $z$ , uniformément en  $t$ .
- B.2 - L'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable du système

$$\dot{z} = q(x_r(t), z, \mathcal{L}(t, 0, z)) \quad (5.25)$$

- L'application  $(\sigma, z) \mapsto q(x(t), z, \mathcal{L}(t, \sigma, z))$  est continûment différentiable et lipschitzienne en  $(\sigma, z)$ , uniformément en  $t$ .

- B.3 L'application  $(t, \sigma, z, v) \mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(x(t), z, v + \mathcal{L}(t, \sigma, z))$  est minorée par un nombre positif pour tout  $(t, \sigma, z) \in [0, \infty) \times D_{\sigma, z}$ .

$\square$

Dans le but d'étudier la stabilité du système (5.21) et la convergence de l'erreur de poursuite  $e(t) = y_d(t) - y(t)$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $(r - 1)$ , nous établissons le théorème suivant :

3. La fonction  $\tanh(y)$  est continûment différentiable et sa dérivée  $\frac{1}{\cosh^2(y)}$  est globalement bornée, par conséquent elle est globalement lipschitzienne.

**Théorème 5.2.** *Considerons le système (5.21). Supposons que B.1, B.2 et B.3 dans l'hypothèse 5.3 sont satisfaites. Donc, l'origine de (5.21) est exponentiellement stable. En plus, soit  $\Omega_b$  un sous-ensemble compact de  $R_v$ , avec  $R_v \subset D_v$  désigne le bassin d'attraction du système autonome*

$$\frac{dv}{d\tau} = \alpha \mathcal{H}(0, \sigma_0, z_0, v + \mathcal{L}(0, \sigma_0, z_0)) \quad (5.26)$$

*Donc, pour tout sous-ensemble compact de  $\Omega_{z,\sigma} \subset D_{z,\sigma}$  il existe une constante positive  $\epsilon^*$  et un  $T > 0$  tels que pour tout  $t \geq 0$ ,  $(\sigma_0, z_0) \in \Omega_{z,\sigma}$ ,  $u_0 - \mathcal{L}(0, \sigma_0, z_0) \in \Omega_v$  et  $0 < \epsilon < \epsilon^*$ , le système (5.21) a une solution unique  $\sigma(t, \epsilon)$ ,  $z(t, \epsilon)$ ,  $u(t, \epsilon)$  dans  $[0, \infty)$  avec*

$$\begin{aligned} \sigma(t, \epsilon) - \bar{\sigma}(t) &= o(\epsilon) \\ z(t, \epsilon) - z_r(t) &= o(\epsilon) \\ u(t, \epsilon) - \mathcal{L}(t, \sigma, z_r(t)) &= o(\epsilon) \end{aligned} \quad (5.27)$$

*où  $\bar{\sigma}(t)$  et  $z_r$  sont la solution du système réduit (5.22). En outre, il existe  $T < \infty$  de telle sorte que l'erreur de poursuite converge vers un petit voisinage de l'origine. ■*

**Proof.** Afin de prouver le théorème précédent, nous devons vérifier que toutes les hypothèses du théorème de Tikhonov 5.1 sont remplies. Tout d'abord, à la lumière de la remarque 5.1, il est clair que l'hypothèse B.1 implique que A.1 est satisfaite.

Dans ce qui suit, nous allons démontrer que la deuxième hypothèse, c'est à dire A.2, du théorème de Tikhonov est satisfaite. Ainsi, nous devons montrer que l'origine du système réduit (5.22) est exponentiellement stable. Pour cela, nous suivons une procédure similaire aux preuves du lemme 4.7 dans ([3]) et du théorème 4 dans ([140]). Pour le système (5.22), nous avons  $\sigma = 0$  est un point d'équilibre exponentiellement stable, et sa solution  $\sigma(t)$  vérifie pour tout  $t \geq t_0$

$$|\sigma(t)| \leq k_\sigma |\sigma(t_0)| \exp(-\lambda_\sigma(t - t_0)), \quad (5.28)$$

avec  $t_0 \geq 0$  est le temps initial,  $k_\sigma$  et  $\lambda_\sigma$  sont des constantes positives.

En revanche, pour l'hypothèse B.2, le système

$$\dot{z} = q(x_r(t), z, \mathcal{L}(t, 0, z)) \quad (5.29)$$

possède 0 comme un point d'équilibre exponentiellement stable, implique que le système

$$\dot{z} = q(e + x_r, z, \mathcal{L}(t, \sigma, z)) \quad (5.30)$$

avec  $\sigma$  comme entrée, est exponentiellement stable au sens entrée état, voir la preuve du lemme 4.6 dans ([3]), et sa solution satisfait

$$\|z(t)\| \leq k_z \|z(\kappa)\| \exp(-\lambda_z(t - \kappa)) + \sup_{\kappa \leq \zeta \leq t} c_z |\sigma(\zeta)| \quad (5.31)$$

pour tout  $t \geq \kappa \geq t_0$ , avec  $k_z$ ,  $\lambda_z$  et  $c_z$  sont des constantes positives.

Nous substituons  $\kappa = \frac{t+t_0}{2}$  dans (5.31). Donc,  $z(t)$  vérifie

$$\|z(t)\| \leq k_z \left\| z\left(\frac{t+t_0}{2}\right) \right\| \exp\left(-\frac{\lambda_z(t-t_0)}{2}\right) + \sup_{\frac{t+t_0}{2} \leq \zeta \leq t} c_z |\sigma(\zeta)| \quad (5.32)$$

En outre, pour estimer  $\|z\left(\frac{t+t_0}{2}\right)\|$  dans (5.32), nous substituons  $\kappa = t_0$  dans (5.31) et nous remplaçons aussi  $t$  par  $\frac{t+t_0}{2}$  pour obtenir

$$\left\|z\left(\frac{t+t_0}{2}\right)\right\| \leq k_z \|z(t_0)\| \exp\left(-\frac{\lambda_z(t-t_0)}{2}\right) + \sup_{t_0 \leq \zeta \leq \frac{t+t_0}{2}} c_z |\sigma(\zeta)| \quad (5.33)$$

D'après (5.28), nous pouvons déduire les inégalités suivantes

$$\sup_{t_0 \leq \zeta \leq \frac{t+t_0}{2}} c_z |\sigma(\zeta)| \leq c_z k_\sigma |\sigma(t_0)| \quad (5.34)$$

$$\sup_{\frac{t+t_0}{2} \leq \zeta \leq t} c_z |\sigma(\zeta)| \leq c_z k_\sigma |\sigma(t_0)| \exp\left(-\frac{\lambda_\sigma(t-t_0)}{2}\right) \quad (5.35)$$

Maintenant, nous définissons  $x_{\sigma z} = [\sigma^T, z^T]^T$  comme l'état composite. En utilisant (5.32), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \|x_{\sigma z}(t)\| &\leq |\sigma(t)| + \|z(t)\| \leq |\sigma(t)| + k_z \left\|z\left(\frac{t+t_0}{2}\right)\right\| \exp\left(-\frac{\lambda_z(t-t_0)}{2}\right) \\ &\quad + \sup_{\frac{t+t_0}{2} \leq \zeta \leq t} c_z |\sigma(\zeta)| \end{aligned} \quad (5.36)$$

En substituant (5.28) et (5.35) dans (5.36), et en utilisant le fait que  $\exp(-|a|) \leq \exp\left(-\frac{|a|}{2}\right)$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , nous obtenons

$$\|x_{\sigma z}(t)\| \leq (1 + c_z) k_\sigma |\sigma(t_0)| \exp\left(-\frac{\lambda_\sigma(t-t_0)}{2}\right) + k_z \left\|z\left(\frac{t+t_0}{2}\right)\right\| \exp\left(-\frac{\lambda_z(t-t_0)}{2}\right) \quad (5.37)$$

En utilisant l'inégalité (5.33), nous avons

$$\begin{aligned} \|x_{\sigma z}(t)\| &\leq (1 + c_z) k_\sigma |\sigma(t_0)| \exp\left(-\frac{\lambda_\sigma(t-t_0)}{2}\right) \\ &\quad + k_z \exp\left(-\frac{\lambda_z(t-t_0)}{2}\right) \left( \sup_{t_0 \leq \zeta \leq \frac{t+t_0}{2}} c_z |\sigma(\zeta)| + k_z \|z(t_0)\| \exp\left(-\frac{\lambda_z(t-t_0)}{2}\right) \right) \end{aligned} \quad (5.38)$$

et à partir de (5.34), nous trouvons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \|x_{\sigma z}(t)\| &\leq (1 + c_z) k_\sigma |\sigma(t_0)| \exp\left(-\frac{\lambda_\sigma(t-t_0)}{2}\right) + c_z k_\sigma k_z |\sigma(t_0)| \exp\left(-\frac{\lambda_\sigma(t-t_0)}{2}\right) \\ &\quad + k_z^2 \|z(t_0)\| \exp(-\lambda_z(t-t_0)) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Nous choisissons  $\lambda_{\sigma z} = \frac{1}{2} \min\{\lambda_\sigma, \lambda_z\}$ , et en utilisant le fait que  $|\sigma(t_0)| \leq \|x_{\sigma z}(t_0)\|$  et  $\|z(t_0)\| \leq \|x_{\sigma z}(t_0)\|$ , nous obtenons enfin

$$\|x_{\sigma z}(t)\| \leq k_{\sigma z} \|x_{\sigma z}(t_0)\| \exp(-\lambda_{\sigma z}(t-t_0)) \quad (5.40)$$

avec  $k_{\sigma z} = (1 + c_z) k_\sigma + c_z k_\sigma k_z + k_z^2$ , valable pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$ . Ainsi, nous concluons que  $x_{\sigma z} = (0, 0)$  est un point d'équilibre exponentiellement stable du système réduit (5.22)

Vu de ce qui précède et en s'aidant du théorème inverse de Lyapunov ([3]), il existe donc une fonction de Lyapunov  $V : [0, \infty) \times D_{\sigma,z} \rightarrow [0, \infty)$  satisfaisant

$$\begin{aligned} c_1 \|x_{\sigma z}\|^2 &\leq V(t, x_{\sigma z}) \leq c_2 \|x_{\sigma z}\|^2, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_{\sigma z}} \tilde{\mathcal{H}}(t, x_{\sigma z}) &\leq -c_3 \|x_{\sigma z}\|^2, \end{aligned} \quad (5.41)$$

avec

$$\tilde{\mathcal{H}}(t, x_{\sigma z}) = \begin{bmatrix} -K\sigma - K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0) \\ q(\mathbf{e} + x_r, z, \mathcal{L}(t, \sigma, z)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (5.42)$$

Par conséquent, la condition de la fonction de Lyapunov évoquée dans l'hypothèse A.2 du théorème de Tikhonov 5.1 est remplie avec  $W_1(\underline{x}) = c_1 \|\underline{x}\|^2$ ,  $W_2(\underline{x}) = c_2 \|\underline{x}\|^2$  et  $W_3(\underline{x}) = c_3 \|\underline{x}\|^2$ . En choisissant  $c$  suffisamment petit, l'ensemble  $\{x_{\sigma z} \in D_{\sigma,z} \mid W_1(x_{\sigma z}) = c_1 \|x_{\sigma z}\|^2 \leq c\}$  devient compact. De l'analyse précédente, nous déduisons que la satisfaction de l'hypothèse B.2 du théorème 5.2 implique la satisfaction de l'hypothèse A.2 du théorème de Tikhonov. 5.1.

Dans le but de discuter la réalisation de l'hypothèse A.3 du théorème de Tikhonov, *i.e.* l'origine de  $\frac{dv}{d\tau} = \alpha \mathcal{H}(t, \sigma, z, v + \mathcal{L}(t, \sigma, z))$  est exponentiellement stable, nous allons étudier la stabilité du modèle linéaire du système de la couche limite (5.23). À ce stade là, notons  $\tilde{g}(\tau, v) = \alpha \mathcal{H}(\varepsilon\tau, \sigma(\varepsilon\tau), z(\varepsilon\tau), v + \mathcal{L}(\varepsilon\tau, \sigma(\varepsilon\tau), z(\varepsilon\tau)))$ . De ce fait, le système linéaire correspondant au système de la couche limite  $\frac{dv}{d\tau} = \tilde{g}(\tau, v)$  s'écrit  $\frac{d\tilde{v}}{d\tau} = A(\tau) \tilde{v}$ , avec

$$A(\tau) = \left. \frac{\partial \tilde{g}}{\partial v}(\tau, v) \right|_{v=0} = - \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x(\varepsilon\tau), z(\varepsilon\tau), \mathcal{L}(\varepsilon\tau, \sigma(\varepsilon\tau), z(\varepsilon\tau))) \right| \quad (5.43)$$

Par conséquent, avec l'hypothèse B.3, nous concluons que pour tout  $(\tau, x, z) \in [0, \infty) \times D_x \times D_z$ , l'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable du système linéaire. De plus, en utilisant le théorème 4.13 dans ([3]), nous déduisons la stabilité exponentielle de l'origine du système de la couche limite (5.23).

Nous déduisons de l'analyse précédente que toutes les hypothèses du théorème de Tikhonov, *i.e.* A.1, A.2 et A.3, sont remplies, par conséquent, pour chaque ensemble compact  $\Omega_{\sigma,z}$  donné par

$$\Omega_{\sigma,z} \subset \left\{ x_{\sigma z} \in D_{\sigma,z} \mid W_2(x_{\sigma z}) = c_2 \|x_{\sigma z}\|^2 \leq \rho c, 0 < \rho < 1 \right\} \quad (5.44)$$

avec  $c$  est choisi précédemment, il existe une constante positive  $\varepsilon^*$  telle que pour tout  $t > 0$ ,  $(\sigma_0, z_0) \in \Omega_{z,\sigma}$ ,  $u_0 - \mathcal{L}(0, \sigma_0, z_0) \in \Omega_v$ , et  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , le système (5.21) possède une solution unique  $\sigma(t, \varepsilon)$ ,  $z(t, \varepsilon)$ ,  $\theta(t, \varepsilon)$  dans  $[0, \infty)$ , avec

$$\begin{aligned} \sigma(t, \varepsilon) - \bar{\sigma}(t) &= o(\varepsilon) \\ z(t, \varepsilon) - z_r(t) &= o(\varepsilon) \\ u(t, \varepsilon) - \mathcal{L}(t, \sigma, z_r(t)) &= o(\varepsilon) \end{aligned} \quad (5.45)$$

avec  $\bar{\sigma}(t)$  et  $z_r$  sont la solution de (5.22). Il est clair que pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe  $T < \infty$  tel que  $\bar{\sigma}(t)$  converge vers zéro pour tout  $t \geq T$ . Nous en déduisons aussi qu'il existe une petite bande  $\Phi(\varepsilon)$  telle que  $\sigma(t, \varepsilon) \leq \Phi(\varepsilon)$  pour  $t \geq T$ . Par conséquent, les erreurs de poursuite convergent vers les ensembles résiduels tels que  $\left| e^{(i)}(t) \right| \leq 2^i \lambda^{(i-r+1)} \Phi(\varepsilon)$ ,  $i = 0, \dots, r-1$ . Ce qui achève la preuve de ce théorème.  $\blacktriangle$

### 5.3.4. Structure équivalente de la loi de commande

Dans cette section, nous nous intéressons à extraire une structure équivalente et simple de l'estimateur de la dynamique inverse (5.19). Comme nous allons le voir au travers la proposition 5.1, la réalisation de la dynamique (5.19) est un contrôleur PI robuste, qui peut être implémenté sans connaître la dynamique du système à commander.

**Proposition 5.1.** Pour chaque estimateur de la dynamique inverse idéale (5.19) avec  $u_0 = u(0)$ , il existe un contrôleur PI robuste équivalent, qui n'est autre qu'une réalisation simple de cette dynamique d'estimation, donné par

$$u = \frac{\alpha}{\epsilon} \left( \sigma(t) + \int_0^t \left( K\sigma(\tau) + K_0 \tanh\left(\frac{\sigma(\tau)}{\epsilon_0}\right) \right) d\tau - \sigma(0) \right) + u_0. \quad (5.46)$$

et qui n'exige pas, ainsi, la connaissance du modèle pour l'implémentation. ■

**Preuve.** En utilisant (5.19) et (5.21), l'approximation rapide de la dynamique inverse idéale (5.6) s'écrit  $\epsilon \dot{u} = \alpha \mathcal{H}(t, \sigma, z, u)$ ,  $u(0) = u_0$ , avec  $\mathcal{H}(t, \sigma, z, u) = \dot{\sigma} + K\sigma + K_0 \tanh(\sigma/\epsilon_0)$ , ce qui permet d'écrire encore après la substitution de  $\mathcal{H}(t, \sigma, z, u)$

$$\dot{u} = \frac{\alpha}{\epsilon} (\dot{\sigma} + K\sigma + K_0 \tanh(\sigma/\epsilon_0)) \quad (5.47)$$

en intégrant par rapport au temps  $t$  les deux membres de l'équation différentielle (5.47), nous obtenons le contrôleur PI robuste (5.46). Par conséquent, le contrôleur résultant ne dépend pas explicitement des deux fonctions inconnues  $f(x, z, u)$  et  $q(x, z, u)$ . ▲

La validation expérimentale de ce contrôleur sur l'actionneur électropneumatique et l'analyse des résultats obtenus seront l'objet de la prochaine section.

## 5.4. Commande PI robuste appliquée au système électropneumatique

Nous allons traiter dans ce qui suit l'application de la commande PI robuste au système électropneumatique. Cette commande sera testée, là aussi, dans une configuration monovariante. L'objectif est de concevoir un contrôleur capable d'assurer la commande de la position  $y$  en présence des incertitudes et de force perturbatrice agissant sur le chariot en mouvement.

### 5.4.1. Conception d'une commande PI robuste pour le système pneumatique

Considérons de nouveau le modèle dynamique de l'actionneur électropneumatique (4.54) décrit dans le chapitre précédent. En utilisant (4.55), nous pouvons réécrire ce modèle comme suit

$$\begin{aligned} y^{(3)} &= \frac{\bar{S}kr_0T}{M} \left( \frac{q_m(u, p_P)}{V_P(y)} - \frac{q_m(-u, p_N)}{V_N(y)} \right) - \frac{\bar{k}S^2}{M} \left( \frac{p_P}{V_P(y)} + \frac{p_N}{V_N(y)} \right) \dot{y} - \frac{1}{M} (b_v \ddot{y} + \dot{F}_{ext}) \\ \frac{dp_P}{dt} &= \frac{\bar{k}r_0T}{V_P(y)} \left( q_m(u, p_P) - \frac{S}{r_0T} p_P \dot{y} \right) \\ \frac{dp_N}{dt} &= \frac{\bar{k}r_0T}{V_N(y)} \left( q_m(-u, p_N) + \frac{S}{r_0T} p_N \dot{y} \right) \end{aligned} \quad (5.48)$$

Pour simplifier la conception d'un contrôleur PI robuste pour la commande en position de l'actionneur électropneumatique, nous définissons le vecteur d'état complet par  $\begin{bmatrix} x^T & z^T \end{bmatrix}^T$  avec

$x = [x_1, x_2, x_3]^T = [y, \dot{y}, \ddot{y}]^T$  et  $z = [p_P, p_N]^T$ ,  $y$  est la sortie du système et  $u$  est l'entrée de commande. Notons aussi

$$f(x, z, u) = \frac{S\bar{k}r_0T}{M} \left( \frac{q_m(u, p_P)}{V_P(y)} - \frac{q_m(-u, p_N)}{V_N(y)} \right) - \frac{\bar{k}S^2}{M} \left( \frac{p_P}{V_P(y)} + \frac{p_N}{V_N(y)} \right) \dot{y} - \frac{1}{M} (b_v \ddot{y} + \dot{F}_{ext}) \quad (5.49)$$

$$q(x, z, u) = \begin{bmatrix} \frac{\bar{k}r_0T}{V_P(y)} \left( q_m(u, p_P) - \frac{S}{r_0T} p_P \dot{y} \right) \\ \frac{\bar{k}r_0T}{V_N(y)} \left( q_m(-u, p_N) + \frac{S}{r_0T} p_N \dot{y} \right) \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Par ce fait, l'écriture de la dynamique du système (5.48) peut se simplifier à

$$\begin{cases} \dot{y}^{(3)} = f(x, z, u), & x(0) = x_0 \\ \dot{z} = q(x, z, u), & z(0) = z_0 \end{cases} \quad (5.51)$$

Il est clair que (5.51) est dans la forme entrée sortie générale définie dans (5.2), avec  $r = 3$  dans ce cas. En outre, il est important de signaler que lorsque nous nous servons de l'identification expérimentale des débits massiques, comme il était évoqué dans la remarque 4.4, la condition  $f_u(x, z, u) = \partial f / \partial u > 0$  est satisfaite.

Rappelons maintenant que l'objectif de commande pour l'actionneur électropneumatique est de faire suivre à la position  $y$  du piston une trajectoire désirée. Pour cela, nous définissons l'erreur de poursuite par  $e(t) = y_d(t) - y(t)$  et l'erreur filtrée par  $\sigma(t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 e(t)$ ,  $\lambda > 0$ , et l'entrée de l'actionneur électropneumatique  $u = u_p = -u_N$  est choisie comme étant la sortie du contrôleur  $u = \frac{1}{\epsilon} \left( \sigma(t) + \int_0^t \left( K\sigma(\tau) + K_0 \tanh\left(\frac{\sigma(\tau)}{\epsilon_0}\right) \right) d\tau - \sigma(0) \right) + u_0$ . Dans ce qui suit, nous allons présenter et analyser les résultats obtenus lors de l'étude expérimentale.

#### 5.4.2. Résultats expérimentaux

La loi de commande PI robuste a été implémentée avec une carte DSPACE de type DS1104 sous l'environnement Simulink du logiciel MATLAB pour une période d'échantillonnage fixée à 0.001 sec. Un schéma illustratif de cette application est donné sur la figure 5.1. La trajectoire désirée pour la position  $y$  du piston est  $y_d = 50 \sin(0.2\pi t)$  mm et la force perturbatrice  $F$  utilisée c'est un signal carré d'une amplitude de 500 N et d'une fréquence de 0.05 Hz.

Les paramètres du contrôleur adoptés en expérimentation sont donnés comme suit :  $\lambda = 2$  pour l'erreur filtrée,  $K = 0.5$ ,  $K_0 = 1$ ,  $\epsilon = 0.01$  et  $\epsilon_0 = 0.1$ . Pour cette expérience, nous avons utilisé

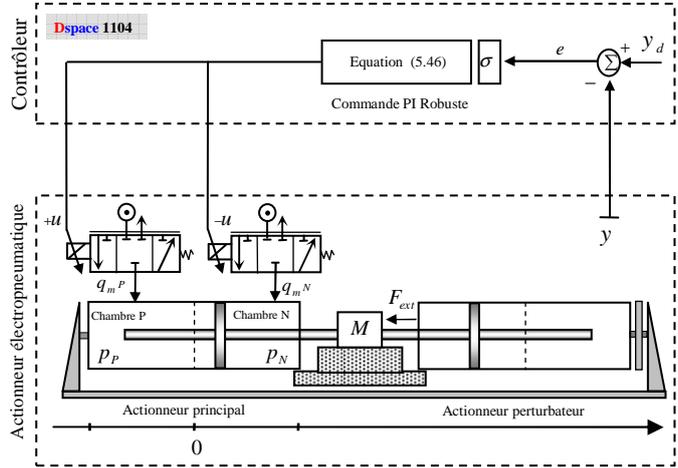


FIGURE 5.1: La commande PI robuste appliquée à l'actionneur électropneumatique.

$\sigma(0) = 0$  et  $u_0 = 0$  dans la loi de commande implémentée.

Les figures 5.2 à 5.7 exposent les résultats expérimentaux obtenus lors de l'application de la commande PI robuste à l'actionneur électropneumatique. Ces figures illustrent l'évolution temporelle de : la position du chariot, la pression dans les chambres  $P$  et  $N$ , la tension de commande et la force perturbatrice. Comme elles le montrent les figures 5.2 et 5.4, la sortie de chariot suit bien la sortie désirée avec un temps de convergente rapide, en environ 3 sec., et une erreur ne dépassant pas 3 mm. Sur les mêmes figures, une robustesse vis-à-vis de l'effet de la force perturbatrice s'y est manifestée : le contrôleur arrive rapidement à compenser l'effet de cette force. L'évolution de la commande appliquée au système est montrée par la figure 5.3. Il apparaît clairement que le signal de commande reste dans la plage de fonctionnement<sup>4</sup> admissible et il n'y en a pas des grands pics de tension malgré que le système est soumis à l'effet de la force perturbatrice. Les pressions dans les chambres  $P$  et  $N$  sont illustrées par les figures 5.6 et 5.7. D'après ces courbes, nous constatons une stabilité et une bornitude de la pression dans les deux chambres.

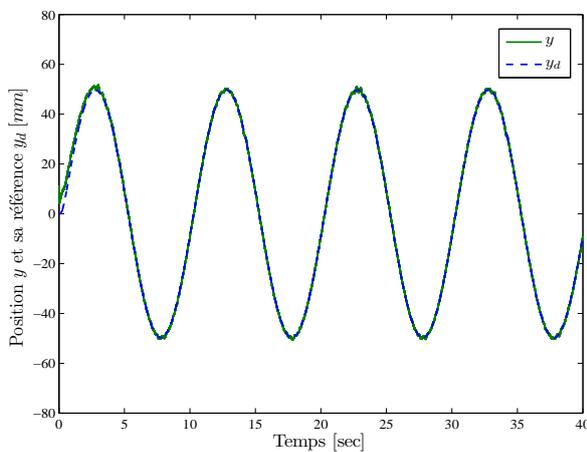


Figure 5.2: Évolution temporelle de la position du piston  $y$ .

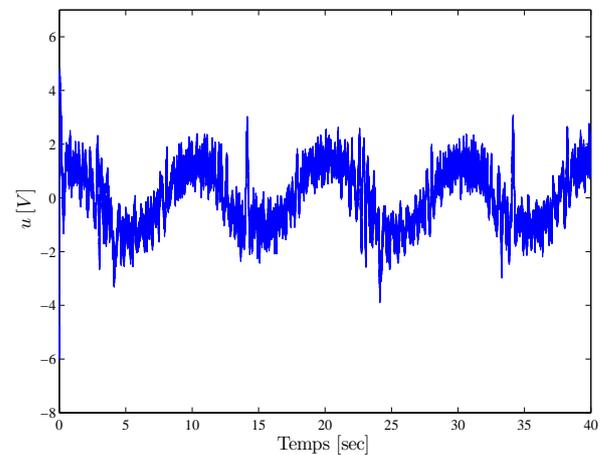


Figure 5.3: Signal de commande  $u$ .

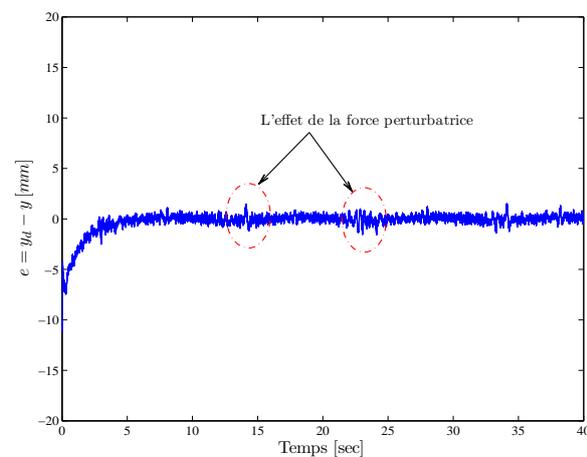


Figure 5.4: Erreur de poursuite résultante.

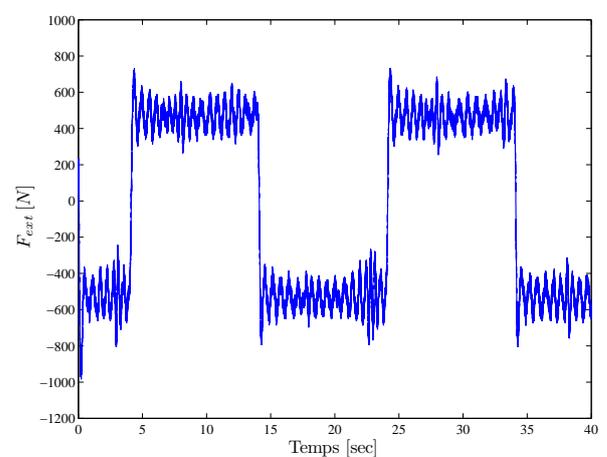
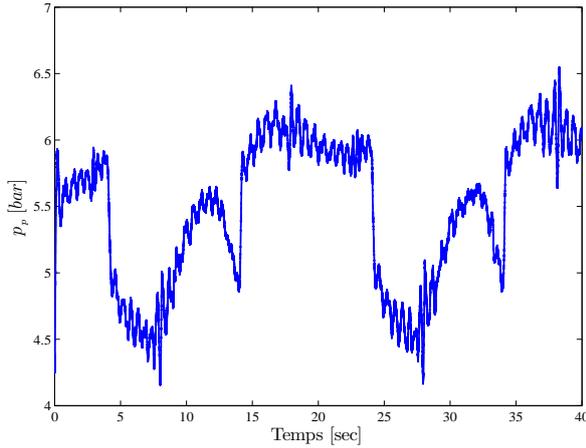
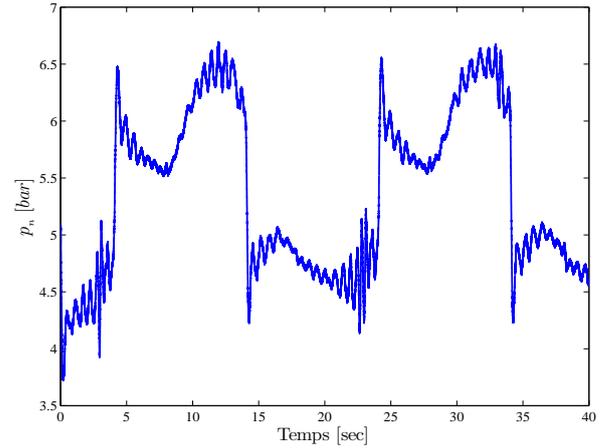


Figure 5.5: Force perturbatrice appliquée.

4. La tension d'alimentation  $u \in [-10V; +10V]$  ([113]).


 Figure 5.6: Pression dans la chambre  $P$ .

 Figure 5.7: Pression dans la chambre  $N$ .

## 5.5. Loi de commande floue adaptative

Nous allons introduire dans cette section une commande floue adaptative conçue dans le but de mieux approcher la commande idéale  $u^*$  solution de (5.6). Pour ce faire, nous allons nous servir de la propriété et de la capacité d'approximation d'un système flou ([146][147][148]) ayant une structure convenablement spécifiée, et ce, selon le théorème d'approximateurs universels ([149]). Avant d'aborder le concept de ce contrôleur floue adaptatif et d'entrer dans les détails de sa synthèse, il est judicieux de débiter cette étude, dans le but de clarté, par une description de l'approximateur flou utilisé.

### 5.5.1. Brève description de l'approximateur flou utilisé

L'approximateur utilisé dans ce travail est un système flou multi entrées mono sortie de type Takagi-Sugeno d'ordre zéro ([149][115]). Avec un tel système, il est possible de représenter une relation non linéaire entre un ensemble d'entrée  $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_m]^T \in \Omega_\pi \subset \mathbb{R}^m$  et une sortie  $y_f \in \mathbb{R}$ , avec  $\Omega_\pi = \Omega_{\pi_1} \times \dots \times \Omega_{\pi_m}$  et  $\Omega_{\pi_i} \in \mathbb{R}$ . Si on définit  $M_i$  ensembles flous  $F_i^j$ ,  $j = 1, \dots, M_i$ , pour chaque entrée  $\pi_i$ , alors le système flou sera composé par un ensemble de règles floues de la forme ([149])

$$R^k : \text{if } \pi_1 \text{ is } G_1^k \text{ and } \dots \pi_m \text{ is } G_m^k \text{ then } y_f \text{ is } y_f^k \quad (k = 1, \dots, N) \quad (5.52)$$

avec  $G_i^k \in \{F_i^1, \dots, F_i^{M_i}\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $y_f^k$  est une constante réelle associée à la partie conclusion de la  $k^{\text{th}}$  règle et  $N$  le nombre total des règles.

En utilisant la défuzzification de type barycentrique, la sortie du système flou est donnée comme suit ([149])

$$y_f(\pi) = \frac{\sum_{k=1}^N \mu_k(\pi) y_f^k}{\sum_{k=1}^N \mu_k(\pi)} \quad (5.53)$$

pour  $\mu_k(\pi) = \prod_{i=1}^m \mu_{G_i^k}(\pi_i)$  et  $G_i^k \in \left\{ \mu_{F_i^1}, \dots, \mu_{F_i^{M_i}} \right\}$ , avec  $\mu_{F_i^j}(\pi_i)$  est la fonction d'appartenance associée à l'ensemble flou  $F_i^j$ .

En introduisant le concept des fonctions floues de base ([149][115]), la sortie (5.53) peut se mettre sous la forme compacte ci-après

$$y_f(\pi) = w^T(\pi) \Theta \quad (5.54)$$

avec  $\Theta = [y_f^1, \dots, y_f^N]^T$  est un vecteur regroupant tous les paramètres de la partie conclusion, et  $w(\pi) = [w_1(\pi), \dots, w_N(\pi)]^T$  est le vecteur des fonctions floues de base défini par

$$w_k(\pi) = \frac{\mu_k(\pi)}{\sum_{k=1}^N \mu_k(\pi)}, \quad k = 1, \dots, N \quad (5.55)$$

Le système flou (5.54) est supposé être bien défini de telle sorte que  $\sum_{k=1}^N \mu_k(\pi) \neq 0$  pour tout  $\pi \in \Omega_\pi$ .

Notons que le système flou (5.54) est un approximateur universel des fonctions continues sur un ensemble compact si ses paramètres sont convenablement conçus ([149]).

### 5.5.2. Loi de commande

Considérons de nouveau la classe des systèmes non linéaires non affines à minimum de phase (5.1) et l'erreur filtrée définie dans (5.3). Comme il était déjà démontré dans la section 5.2, avec une commande  $u^*$  solution de 5.6, la dynamique de l'erreur de poursuite en boucle fermée est gouvernée par l'équation différentielle  $\dot{\sigma} = -K\sigma - K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0)$ , ce qui implique que  $e(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Donc, avec  $u^*$  comme entrée de commande, il est possible d'assurer la poursuite d'une trajectoire de référence donnée. Néanmoins, il est difficile de trouver la solution explicite  $u^*$ , et ce, même si la dynamique du système est bien connue. Pour cela, dans ce qui suit, la solution exacte de la dynamique inverse  $u^*$  sera approximée par un système d'inférence flou de la forme (5.54).

Soit  $\vartheta$  un signal défini par

$$\vartheta = y_d^{(r)}(t) + \beta_{r-1} e^{(r-1)} + \dots + \beta_1 \dot{e} + K\sigma + K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0) \quad (5.56)$$

La dynamique en boucle fermée (5.5) peut s'écrire encore

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = -(f(x, z, u) - \vartheta) - K\sigma - K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0), \\ \dot{z} = q(x, z, u), \end{cases} \quad (5.57)$$

En se basant sur le théorème des fonctions implicites, la solution  $u^*$  de la dynamique inverse (5.6), i.e.  $f(x, z, u^*) - \vartheta = 0$ , est en fonction de  $x$ ,  $z$  et  $\vartheta$ . Dans cette partie, notre objectif est d'estimer cette solution optimale  $u^*(x, z, \vartheta)$  par un système d'inférence flou de la forme (5.54).

Afin d'obtenir un résultat de stabilité, nous considérons l'hypothèse suivante sur la dynamique interne :

**Hypothèse 5.4.** Considérons le système non linéaire (5.57). Pour chaque commande stabilisante  $u(x, z, \vartheta(t, \sigma))$  du sous système  $\dot{\sigma} = -(f(x, z, u) - \vartheta) - K\sigma - K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0)$ , l'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable du système

$$\dot{z} = q(x_r(t), z, u(x_r(t), z, \vartheta(t, 0))) \quad (5.58)$$

□

La structure de la loi de commande floue utilisée pour approcher la commande idéale inconnue  $u^*(x, z, \vartheta)$  solution de (5.6) est choisie comme suit

$$u = u_f = w^T(\pi) \Theta \quad (5.59)$$

avec  $\pi = [x^T, z^T, \vartheta]$  et  $w(\pi)$  est un vecteur des fonctions floues de base convenablement choisi par l'utilisateur et  $\Theta$  est le vecteur des paramètres ajustés.

Nous supposons qu'il existe un vecteur des paramètres variables dans le temps  $\Theta^*$  avec des dérivées bornées tel que la commande idéale inconnue  $u^*$  solution de (5.6) vérifie

$$u^* = w^T(\pi) \Theta^* + \varepsilon(\pi) \quad (5.60)$$

avec  $\varepsilon(\pi)$  représente l'erreur d'approximation supposée bornée telle que  $|\varepsilon(\pi)| \leq \bar{\delta}$  pour tout  $\pi \in \Omega_\pi$  avec  $\bar{\delta}$  une constante positive.

La loi de commande étant sélectionnée, il reste donc à déterminer la loi de mise à jour des paramètres réglables  $\Theta$  pour mieux approcher la solution de (5.6).

### 5.5.3. Conception de la loi d'adaptation

Le mécanisme de mise à jour pour le vecteur des paramètres  $\Theta$  sera synthétisé dans le but de minimiser un critère quadratique de l'erreur entre la commande idéale inconnue  $u^*$  et la commande  $u$  fournie par le contrôleur flou. En plus, afin d'assurer la stabilité dans la présence des erreurs d'approximation ([70]), un terme linéaire est ajouté. La loi d'adaptation choisie est de la forme suivante

$$\dot{\Theta} = -\alpha\eta(t) \nabla_{\Theta} J(\Theta) - \eta_0 \varrho \Theta \quad (5.61)$$

avec  $\eta(t)$  un paramètre positif variable dans le temps,  $\eta_0$  et  $\varrho$  sont deux paramètres de conception positifs et  $\nabla_{\Theta} J(\Theta)$  est le gradient de la fonction de coût quadratique  $J(\Theta) = \frac{1}{2} e_u^2 = \frac{1}{2} (u^* - u)^2 = \frac{1}{2} (u^* - w^T(\pi) \Theta)^2$ . La loi d'adaptation (5.61) peut s'écrire encore

$$\dot{\Theta} = \alpha\eta(t) \Pi(e) e_u - \eta_0 \varrho \Theta \quad (5.62)$$

avec  $e_u = u^* - u$ . En utilisant (5.59) et (5.60), l'erreur à l'entrée du système  $e_u$  s'écrit aussi

$$e_u = u^* - w^T(\pi) \Theta = w^T(\pi) \tilde{\Theta} + \varepsilon(\pi) \quad (5.63)$$

avec  $\tilde{\Theta} = \Theta^* - \Theta$  est le vecteur d'erreur des paramètres estimés.

Par le biais du théorème de la valeur moyenne ([3]), il existe donc une constante  $\lambda$  avec  $0 < \lambda < 1$ , telle que la fonction non linéaire  $f(x, z, u)$  peut être exprimée autour de  $u^*$  par

$$f(x, z, u) = f(x, z, u^*) + f_{u_\lambda} (u - u^*) \quad (5.64)$$

avec  $f_{u_\lambda} = \frac{\partial f(x,z,u_\lambda)}{\partial u_\lambda}$  pour  $u_\lambda = \lambda u + (1 - \lambda) u^*$ .

La substitution de (5.64) dans la première équation de (5.57) donne

$$\dot{\sigma} = -K\sigma - K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0) - (f(x, z, u^*) + f_{u_\lambda}(u - u^*) - \vartheta) \quad (5.65)$$

et comme  $f(x, z, u^*) - \vartheta = 0$ , (5.65) devient

$$\dot{\sigma} = -K\sigma - K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0) - f_{u_\lambda}(u - u^*) \quad (5.66)$$

ce qui peut s'écrire encore

$$\dot{\sigma} + K\sigma + K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0) = f_{u_\lambda}(u^* - u) = f_{u_\lambda} e_u \quad (5.67)$$

Nous choisissons le paramètre de conception  $\eta(t)$  dans (5.62) comme  $\eta(t) = \eta_0 f_{u_\lambda}$  et nous substituons (5.67) dans (5.62), nous obtenons finalement la structure de la loi de commande comme suit

$$\dot{\Theta} = \eta_0 \alpha w(\pi) (\dot{\sigma} + K\sigma + K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0)) - \eta_0 \varrho \Theta \quad (5.68)$$

Après avoir donné la forme de la loi de commande floue et son algorithme de mise à jour capables de bien estimer la solution idéale de l'équation (5.6), nous allons nous intéresser aux performances de cette approche proposée.

#### 5.5.4. Analyse de la stabilité en boucle fermée

Pour étudier la convergence de l'erreur de poursuite ainsi que la stabilité de la boucle fermée, nous choisissons la fonction de Lyapunov candidate ci-dessous

$$V = \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{1}{2\eta_0} \tilde{\Theta}^T \tilde{\Theta} \quad (5.69)$$

La dérivée temporelle  $\dot{V}$  de (5.69) est donnée par

$$\dot{V} = \sigma \dot{\sigma} - \frac{1}{\eta_0} \tilde{\Theta}^T \dot{\tilde{\Theta}} + \frac{1}{\eta_0} \tilde{\Theta}^T \dot{\tilde{\Theta}}^* \quad (5.70)$$

Par substitution de (5.67) et (5.68) dans (5.70), nous obtenons

$$\dot{V} = \sigma (-K\sigma - K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0) + f_{u_\lambda} e_u) - \tilde{\Theta}^T (w(\pi) f_{u_\lambda} e_u - \varrho \Theta) + \frac{1}{\eta_0} \tilde{\Theta}^T \dot{\tilde{\Theta}}^* \quad (5.71)$$

À partir de (5.63), la dérivée temporelle  $\dot{V}$  s'écrit

$$\dot{V} = -K\sigma^2 - K_0 \sigma \tanh(\sigma/\varepsilon_0) + \sigma f_{u_\lambda} e_u - (e_u - \varepsilon(\pi)) f_{u_\lambda} e_u + \varrho \tilde{\Theta}^T \Theta + \frac{1}{\eta_0} \tilde{\Theta}^T \dot{\tilde{\Theta}}^* \quad (5.72)$$

Ce qui peut être simplifié encore à

$$\dot{V} = -K\sigma^2 - K_0\sigma \tanh(\sigma/\varepsilon_0) + \sigma f_{u_\lambda} e_u - e_u f_{u_\lambda} e_u + \varepsilon(\pi) f_{u_\lambda} e_u + \varrho \tilde{\Theta}^T \Theta + \frac{1}{\eta_0} \tilde{\Theta}^T \dot{\Theta}^* \quad (5.73)$$

En utilisant les inégalités suivantes

$$\varrho \tilde{\Theta}^T \Theta \leq -\frac{\varrho}{2} \|\tilde{\Theta}\|^2 + \frac{\varrho}{2} \|\Theta^*\|^2 \quad (5.74)$$

$$\frac{1}{\eta_0} \tilde{\Theta}^T \dot{\Theta}^* \leq \frac{\varrho}{4} \|\tilde{\Theta}\|^2 + \frac{1}{\varrho \eta_0^2} \|\dot{\Theta}^*\|^2 \quad (5.75)$$

$$\varepsilon(\pi) f_{u_\lambda} e_u \leq \frac{1}{4} f_{u_\lambda} e_u^2 + f_{u_\lambda} \varepsilon^2(\pi) \quad (5.76)$$

$$\sigma f_{u_\lambda} e_u \leq \frac{1}{4} f_{u_\lambda} e_u^2 + f_{u_\lambda} \sigma^2 \quad (5.77)$$

L'équation (5.73) peut être bornée de la manière suivante

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{2} f_{u_\lambda} e_u^2 - K_0 \sigma \tanh(\sigma/\varepsilon_0) - (K - f_{u_\lambda}) \sigma^2 - \frac{\varrho}{4} \|\tilde{\Theta}\|^2 + \frac{\varrho}{2} \|\Theta^*\|^2 + \frac{1}{\varrho \eta_0^2} \|\dot{\Theta}^*\|^2 \\ & + f_{u_\lambda} \delta^2 \end{aligned} \quad (5.78)$$

Le vecteur des paramètres  $\Theta^*$  et sa dérivée  $\dot{\Theta}^*$  ainsi que la fonction  $f_{u_\lambda}$  sont tous supposés bornés, donc nous pouvons définir une borne constante et positive  $\psi$ , telle que

$$\psi = \sup_t \left( \frac{\varrho}{2} \|\Theta^*\|^2 + \frac{1}{\varrho \eta_0^2} \|\dot{\Theta}^*\|^2 + f_{u_\lambda} \delta^2 \right) \quad (5.79)$$

avec ce choix, nous pouvons mettre (5.79) comme suit

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} f_{u_\lambda} e_u^2 - K_0 \sigma \tanh(\sigma/\varepsilon_0) - (K - f_{u_\lambda}) \sigma^2 - \frac{\varrho}{4} \|\tilde{\Theta}\|^2 + \psi \quad (5.80)$$

Supposons que le paramètre de conception  $K$  est choisi tel que  $K > \delta_1$ , l'inégalité (5.80) peut être écrite comme dans (5.81) avec  $\gamma = \min(2 \times (K - \delta_1), 0.5\varrho\eta_0)$ .

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} f_{u_\lambda} e_u^2 - K_0 \sigma \tanh(\sigma/\varepsilon_0) - \frac{\gamma}{2} \sigma^2 - \frac{\gamma}{2\eta_0} \|\tilde{\Theta}\|^2 + \psi \quad (5.81)$$

En utilisant (4.30), il résulte que

$$\dot{V} \leq -\gamma V + \psi \quad (5.82)$$

Le théorème qui suit montre bien la bornitude de tous les signaux en boucle fermée,  $x(t)$ ,  $z(t)$ , et  $u(t)$  ainsi que la convergence de l'erreur de poursuite  $e(t)$  vers un petit voisinage de zéro.

**Théorème 5.3.** *Considérons le système non linéaire (5.1). Supposons que les hypothèses 5.1, 5.2 et 5.4 sont satisfaites. La loi de commande (5.59) avec la loi d'adaptation (5.68) garantit :*

1. *La stabilité de la boucle fermée ainsi que la convergence de l'erreur de poursuite vers un petit voisinage autour de zéro ;*

2. La dynamique interne est stable et elle vérifie  $\|z(t)\| \leq k_z \|z(\kappa)\| \exp(-\lambda_z(t - \kappa)) + \sup_{\kappa \leq \zeta \leq t} c_z |\sigma(\zeta)|$  pour tout  $t \geq \kappa \geq t_0$ , avec  $k_z$ ,  $\lambda_z$  et  $c_z$  sont des constantes positives. ■

**Preuve.** En utilisant l'inégalité (5.82), il résulte

$$V(t) \leq V(0) e^{-\gamma t} + \frac{\psi}{\gamma} \quad (5.83)$$

à partir de (5.83), nous pouvons déduire facilement que pour  $V \geq \frac{\psi}{\gamma}$  nous avons  $\dot{V} \leq 0$ . Donc, en se basant sur le théorème de Lyapunov, les signaux  $\sigma(t)$ ,  $\tilde{\Theta}(t)$  et  $u(t)$  en boucle fermée sont bornés. De plus, en utilisant les équations (5.69) et (5.83), nous pouvons écrire  $|\sigma(t)| \leq \sqrt{|\sigma(0)|^2 + \frac{1}{\eta_0} |\tilde{\Theta}(0)|^2} e^{-0.5\gamma t} + \sqrt{\frac{2\psi}{\gamma}}$ . D'où, avec un choix approprié des paramètres  $K$ ,  $\varrho$  et  $\eta_0$ , nous obtenons une convergence de l'erreur de poursuite vers un petit voisinage de zéro. Notons  $\Phi = \sqrt{\frac{2\psi}{\gamma}}$ ; comme  $e^{-0.5\gamma t} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , il existe un temps  $T$  tel que  $|\sigma(t)| \leq \Phi$  pour  $t > T$ . Par conséquent, les erreurs de poursuite convergent vers des ensembles résiduels tels que  $|e^{(i)}(t)| \leq 2^i \lambda^{(i-r+1)} \Phi$ ,  $i = 0, \dots, r-1$ .

Au vu de ce qui précède, la loi de commande floue  $u_f$  de (5.59), avec la loi d'adaptation (5.68), est stabilisante pour la dynamique  $\dot{\sigma} = -(f(x, z, u) - \vartheta) - K\sigma - K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0)$ . Ainsi, si l'hypothèse 5.4 est remplie avec  $u(x, z, \vartheta(t, \sigma)) \equiv u_f$  dans ce cas, *i.e.* l'origine de  $\dot{z} = q(x_r(t), z, u_f|_{\sigma=0})$  est exponentiellement stable, le système

$$\dot{z} = q(x, z, u(x, z, \vartheta(t, \sigma))) \quad (5.84)$$

avec  $\sigma$  comme entrée, est exponentiellement stable au sens entrée état, voir la preuve du lemme 4.6 dans ([3]), et sa solution satisfait

$$\|z(t)\| \leq k_z \|z(\kappa)\| \exp(-\lambda_z(t - \kappa)) + \sup_{\kappa \leq \zeta \leq t} c_z |\sigma(\zeta)| \quad (5.85)$$

pour tout  $t \geq \kappa \geq t_0$ , avec  $k_z$ ,  $\lambda_z$  et  $c_z$  sont des constantes positives. Ce qui achève la preuve. ▲

## 5.6. Commande adaptative floue appliquée au système électropneumatique

Dans cette partie, nous allons procéder à la vérification et le test de la commande adaptative floue en expérimentation sur le système pneumatique. Nous allons aborder ici la commande de ce système dans le contexte monovarié. Donc, l'objectif de commande est de faire suivre à la position  $y$  du piston une trajectoire de référence  $y_d$ , et ce, malgré l'effet de la force perturbatrice  $F$ .

### 5.6.1. Conception d'une commande adaptative floue pour le système pneumatique

Comme nous avons montré dans (5.51), la dynamique de l'actionneur électropneumatique est dans la forme entrée sortie générale de la classe des systèmes étudiée dans ce chapitre, définie dans (5.2). Afin d'appliquer la commande adaptative floue à ce système, nous définissons l'erreur de poursuite par  $e(t) = y_d(t) - y(t)$  et l'erreur filtrée par  $\sigma(t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^2 e(t)$ ,  $\lambda > 0$ , et l'entrée de l'actionneur électropneumatique  $u = u_p = -u_N$  est choisie comme étant la sortie du contrôleur flou  $u = w^T(\pi)\theta$ . Le vecteur des paramètres ajustés  $\theta$  est mis à jour par la loi d'adaptation  $\dot{\theta} = \eta w(\pi)(\dot{\sigma} + K\sigma + K_0 \tanh(\sigma/\varepsilon_0)) - \eta \varrho \theta$ .

Dans cette étude expérimentale, nous avons utilisé le vecteur des entrées du système flou suivant :  $\pi = [\pi_1, \pi_2, \pi_3] = [y, 0.5(p_P + p_N), \vartheta]^T$ . En plus, nous avons défini les fonctions d'appartenance de type Gaussiennes telles que  $\mu_{F_1^1}(\pi_1) = \exp\left\{-0.5\left(\frac{\pi_1+0.005}{0.002}\right)^2\right\}$ ,  $\mu_{F_1^2}(\pi_1) = \exp\left\{-0.5\left(\frac{\pi_1}{0.002}\right)^2\right\}$  et  $\mu_{F_1^3}(\pi_1) = \exp\left\{-0.5\left(\frac{\pi_1-0.005}{0.002}\right)^2\right\}$  pour l'entrée  $\pi_1$ ,  $\mu_{F_2^1}(\pi_2) = \exp\left\{-0.5\left(\frac{\pi_2-2}{2}\right)^2\right\}$ ,  $\mu_{F_2^2}(\pi_2) = \exp\left\{-0.5\left(\frac{\pi_2-4}{2}\right)^2\right\}$  et  $\mu_{F_2^3}(\pi_2) = \exp\left\{-0.5\left(\frac{\pi_2-6}{2}\right)^2\right\}$  pour l'entrée  $\pi_2$ , pour l'entrée  $\pi_3$  nous avons choisi  $\mu_{F_3^1}(\pi_3) = \exp\left\{-0.5\left(\frac{\pi_3+0.05}{0.02}\right)^2\right\}$ ,  $\mu_{F_3^2}(\pi_3) = \exp\left\{-0.5\left(\frac{\pi_3}{0.02}\right)^2\right\}$  et  $\mu_{F_3^3}(\pi_3) = \exp\left\{-0.5\left(\frac{\pi_3-0.05}{0.02}\right)^2\right\}$ .

Après avoir présenté la structure de la loi de commande floue adaptative conçue pour l'actionneur électropneumatique, nous allons exposer dans le prochain paragraphe les résultats issus de l'étude expérimentale.

### 5.6.2. Résultats expérimentaux

Nous avons implémenté la commande adaptative floue sur le même dispositif expérimental de la section précédente, et ceci, avec une fréquence d'échantillonnage fixée à 0.001 sec. Le schéma illustratif de cette expérimentation est donné par la figure 5.8.

Nous avons choisi les paramètres du contrôleur pour satisfaire une bonne poursuite de trajectoire et pour qu'il soit robuste vis-à-vis de l'effet de la force perturbatrice. Les paramètres du contrôleur adoptés en expérimentation sont donnés comme suit :  $\lambda = 4$  pour l'erreur filtrée,  $K = 20$ ,  $K_0 = 0.5$ ,  $\varepsilon_0 = 0.1$ ,  $\eta = 25$  et  $\rho = 0.05$  pour le mécanisme d'adaptation. Le vecteur  $\theta$  est initialisé à zéro.

Les résultats issus de cette étude expérimentale sont illustrés par les figures 5.9 à 5.14. Ces figures nous montrent la position du chariot et sa référence, les deux pressions  $p_P$  et  $p_N$ , le signal de commande, l'évolution temporelle de la force perturbatrice ainsi que la norme du vecteur des paramètres ajustés  $\Theta(t)$ . L'évolution de la position du chariot et sa trajectoire de référence sont illustrées par la figure 5.9, et l'erreur de poursuite par la figure 5.11.

Nous remarquons sur ces deux figures un bon suivi de trajectoire, résultant avec un temps de réponse très faible (moins de 2.5 sec.) et une erreur qui ne dépasse pas 4 mm. Quant à lui, le signal de commande est présenté sur la figure 5.10. Il apparaît clairement que la commande reste dans la plage de fonctionnement et il n'y en a pas des grands pics de tension malgré que le système est soumis à l'effet de la force perturbatrice, donnée par la figure 5.14, qui change son action durant la phase de commande.

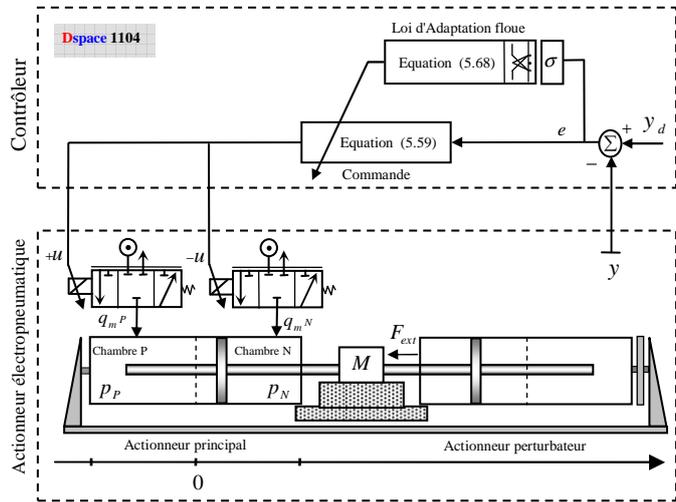


FIGURE 5.8: La commande adaptative floue appliquée à l'actionneur électropneumatique.

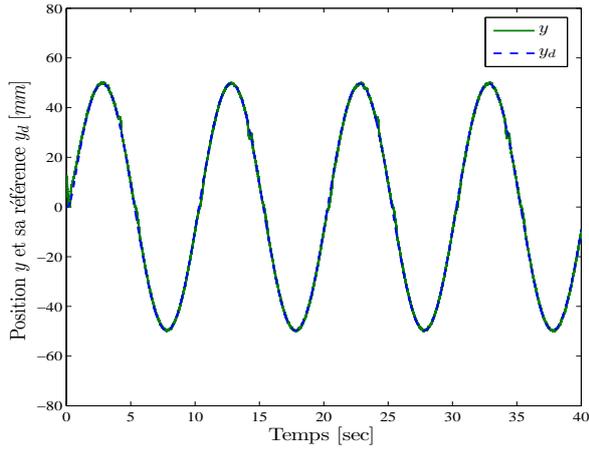


Figure 5.9: La position du piston  $y$ .

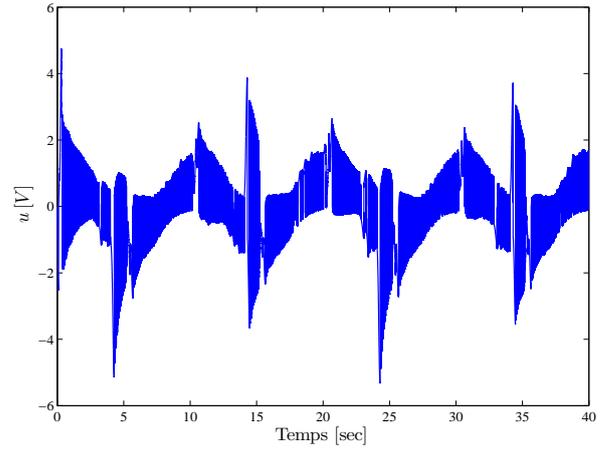


Figure 5.10: Signal de commande  $u$ .

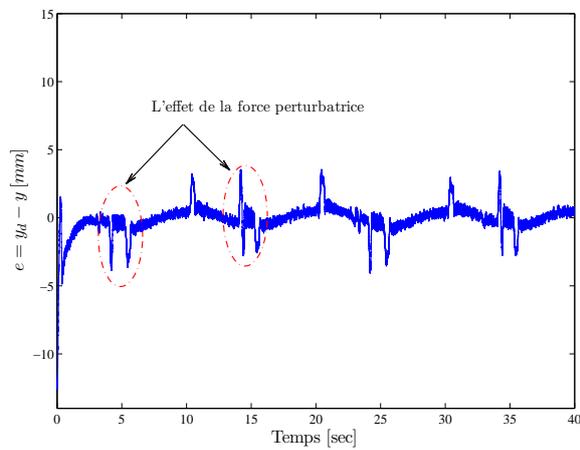


Figure 5.11: Erreur de poursuite résultante.

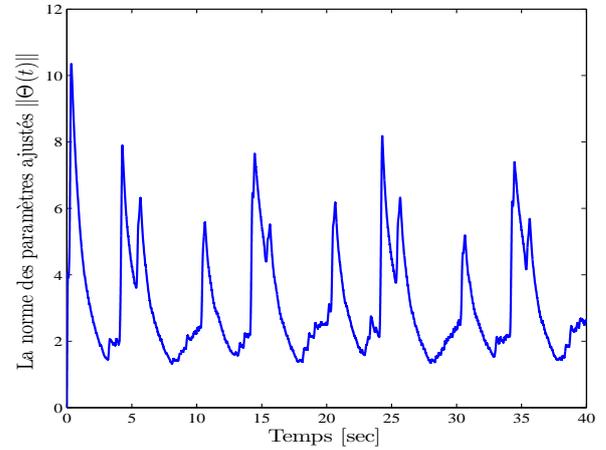


Figure 5.12: La norme du vecteur  $\Theta(t)$ .

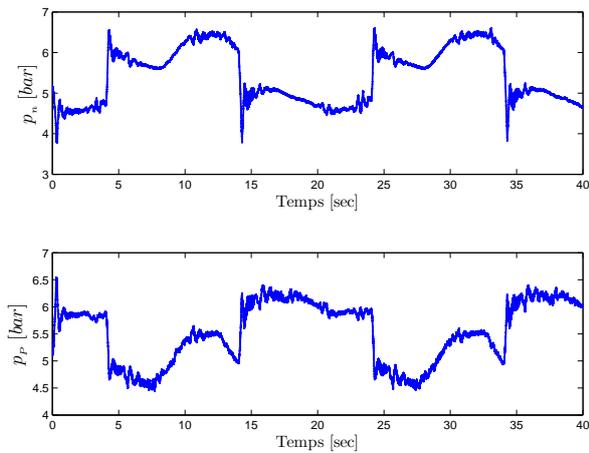


Figure 5.13: Pressions dans les chambres  $P$  et  $N$ .

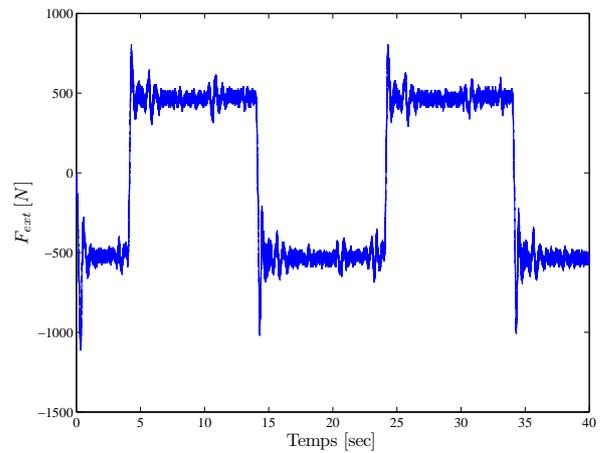


Figure 5.14: Force perturbatrice appliquée.

L'évolution temporelle de la norme des paramètres ajustés  $\|\Theta(t)\|$  est donnée sur la figure 5.12. Nous remarquons que les paramètres estimés sont bornés et ils évoluent à chaque fois que l'amplitude

de la force perturbatrice change afin de compenser son effet. La figure 5.13 contient les deux courbes décrivant l'évolution des deux pressions  $p_P$  et  $p_N$  dans les chambres. Nous constatons bien que la pression dans les deux chambres est stable.

## 5.7. Conclusion

Un schéma de commande PI robuste et un schéma de commande adaptatif flou ont été proposés et développés dans ce chapitre pour une classe des systèmes non linéaires non affines avec une dynamique des zéros. Comme la conception de la commande PI robuste est basée sur la théorie de perturbation singulière, nous avons présenté dans ce chapitre un rappel sur le concept de cette théorie. Pour les deux approches, l'idée repose sur l'estimation d'une certaine dynamique idéale inverse.

En ce qui concerne le premier schéma, il a été montré que lorsque la dynamique du contrôleur est choisie pour être suffisamment rapide, le signal de commande se rapproche de la solution exacte de la dynamique idéale inverse, et donc le système commandé suit le comportement désiré. Ensuite, nous avons établi le contrôleur sans modèle équivalent à cet estimateur rapide de la dynamique inverse. Dans le deuxième schéma, nous avons utilisé un système flou pour approximer au mieux la dynamique idéale inverse. Pour cela, la loi d'adaptation paramétrique a été conçue pour minimiser l'erreur entre la dynamique idéale inverse et la sortie de l'approximateur flou utilisé. L'analyse de la stabilité a été présentée pour les deux approches. Les performances de ces deux techniques de commande proposées dans ce chapitre ont été étudiées et examinées expérimentalement dans la commande en position de l'actionneur électropneumatique.

---

## Conclusion générale et perspectives

---

◁ La vie, c'est comme une bicyclette, il faut avancer  
pour ne pas perdre l'équilibre. ▷

↪ **Albert Einstein**<sup>1</sup>

Cette thèse a pour but de proposer de nouvelles stratégies de commande sans modèle pour des classes des systèmes non linéaires incertains. L'incapacité des approches de commande basées sur la connaissance d'un modèle du système à s'imposer dans le monde industriel remet en cause l'utilité d'une grande partie de ces approches. Pour pallier à ce problème, de nos jours, la tendance de recherche est de plus en plus orientée vers des algorithmes qui ne requièrent pas la connaissance du modèle de système à commander dans l'implémentation. Ce travail de thèse s'inscrit, aussi, dans cette nouvelle tendance de recherche. Dans ce contexte, nous avons focalisé notre étude sur le développement des lois de commande stables, robustes et simples à implémenter. Pour montrer l'applicabilité de tous les algorithmes de commande suggérés dans cette thèse, une validation expérimentation a été faite pour toutes les stratégies de commande développées.

Le chapitre 1 a introduit, dans un premier temps, le concept de commande sans modèle qui est le thème de recherche dans cette thèse. Ainsi, nous avons présenté un aperçu sur les stratégies de commande sans modèle proposées dans la littérature. Cette étude bibliographique nous a permis de mettre en lumière la complexité d'implémentation d'une partie importante de ces lois de commande, comme dans [45][150][46][16]. Nous avons constaté aussi que la stabilité de certaines approches n'a pas été prouvée, à l'instar des approches suggérées dans ([40][41][28][60]). Ensuite, nous avons rappelé, au travers des définitions, quelques notions sur la stabilité des systèmes physiques. Des outils mathématiques, qui nous ont servis dans le présent manuscrit, ont été exhibés aussi dans ce chapitre.

Le chapitre 2 a présenté une commande PID adaptative stable pour une classe des systèmes MIMO non linéaires incertains et affines en l'entrée. L'idée c'était d'approcher au mieux une commande idéale explicite, inconnue et susceptible d'assurer les objectifs de commande en termes de stabilité et de poursuite. Pour ce faire, un mécanisme d'adaptation a été conçu, pour chaque sous système, afin de minimiser, par la méthode du gradient, un critère quadratique décrivant l'erreur entre la loi de commande idéale inconnue et la sortie du contrôleur PID utilisée. Il est important de noter que, pour l'implémentation, cette approche ne requiert pas la connaissance du modèle du système à commander et tous les paramètres estimés, *i.e.* les gains du contrôleur, peuvent être initialisés à zéro. En plus, elle garantit la stabilité de la boucle fermée et la convergence des erreurs de poursuite

---

1. Mathématicien, Physicien, Scientifique (1879 - 1955).

vers un petit voisinage de l'origine. Les résultats théoriques de ce chapitre ont été validés sur un simulateur d'hélicoptère à 3DOF.

Le chapitre 3 a proposé une commande robuste sans modèle à base d'un observateur pour une classe des systèmes MIMO non linéaires incertains. La loi de commande développée est composée de deux parties : la première est un terme de commande linéaire utilisé pour spécifier la dynamique du système en boucle fermée ; la deuxième est un compensateur des incertitudes et des perturbations externes synthétisé à partir d'un estimateur. Ce dernier est conçu par la théorie de stabilité de Lyapunov. Deux variantes de cette stratégie de commande ont été exposées. Au début, nous avons établi la structure de la loi de commande lorsque le vecteur d'état est disponible à la mesure. Ensuite, nous avons développé la structure de commande lorsque nous utilisons un observateur pour reconstruire le vecteur d'erreur. En s'aidant de l'approche de Lyapunov, la stabilité pratique de la boucle fermée a été démontrée. Les performances de cette approche ont été également étudiées en expérimentation sur le simulateur d'hélicoptère à 3DOF.

Le chapitre 4 a exposé une loi de commande linéaire adaptative stable ayant une structure simple pour une classe des systèmes non linéaires monovariabiles incertains non affines en l'entrée. Avec le théorème des fonctions implicites, nous avons pu prouver l'existence d'une commande idéale implicite inconnue capable de satisfaire les objectifs de commande souhaités. Quant à la structure de la loi de commande, nous l'avons établi grâce au théorème de la valeur moyenne. Les gains de cette loi linéaire sont mis à jour par un mécanisme d'adaptation stable développé dans le but d'approcher au mieux la commande idéale implicite. En plus de sa simplicité en implémentation, cette commande sans modèle assure la stabilité de la boucle fermée ainsi que la convergence des erreurs de poursuite vers un petit voisinage de zéro. La dernière partie de ce chapitre a été consacrée à la validation expérimentale de cette approche en commande de la position d'un actionneur électropneumatique.

Le chapitre 5 a suggéré deux schémas de commande sans modèle pour une classe des systèmes non linéaires non affines avec une dynamique des zéros. Le premier schéma proposé dans ce chapitre est conçu à base d'un estimateur rapide de la dynamique idéale inverse développée par la théorie de perturbation singulière. Dans le deuxième schéma, l'idée est d'utiliser un système flou pour approcher une dynamique idéale inverse capable de satisfaire les objectifs de commande. Pour ce faire, nous avons synthétisé une loi d'adaptation pour le vecteur des paramètres ajustés du système flou afin de minimiser l'erreur entre la dynamique idéale inverse et la sortie de l'approximateur flou utilisé. Pour les deux stratégies, la stabilité de la boucle de commande a été étudiée. Les performances des deux stratégies de commande ont été examinées en expérimentation dans la commande en position d'un actionneur électropneumatique.

Il reste de nombreuses pistes à explorer et à développer afin de prolonger les travaux présentés dans cette thèse. On peut dévoiler quelques pistes de réflexion à développer dans l'avenir, aussi bien du point de vue théorique que pratique.

Le premier point qui nous semble être un cadre d'investigation est de développer aussi les approches proposées dans les chapitre 2, 4 et 5 à base d'un observateur pour être applicables aux

systèmes dont le vecteur d'état n'est pas complètement mesurable.

Un deuxième point à approfondir est dû à la supposition faite sur la matrice de commande, tout au long de ce manuscrit, d'être définie positive ou définie négative. Il serait très intéressant d'étendre ces résultats au cas général.

Des améliorations peuvent être envisageables sur les stratégies de commande présentées dans cette thèse, et ce, pour assurer la convergence vers zéros de toutes les erreurs de poursuite et pas uniquement la bornitude de ces erreurs.

Afin d'éprouver un peu plus les commandes ci présentées, il serait très intéressant de les appliquer sur des systèmes plus complexes.

# Annexe A.

## Implémentation de la commande linéaire adaptative

### A.1. Description de l'interface réalisée sous ControlDesk

Une interface graphique composée de 4 blocs est développée sous ControlDesk pour faciliter la commande de l'actionneur électropneumatique par l'approche linéaire adaptative, proposée dans le chapitre 4. Le bloc (1) permet de choisir le type de commande (régulation ou poursuite), le type de trajectoire pour le cas d'une poursuite (sinusoïdal, rectangulaire ou dent de scie) ainsi que leurs valeurs numériques. Le bloc (2) est réservé au choix de la force perturbatrice : la forme et les valeurs numérique. Le bloc (3) sert à saisir les paramètres de la loi d'adaptation et la dynamique de l'erreur filtrée. Le bloc (4) affiche les valeurs numériques, pendant la commande, des gains ajustés du contrôleur. Quant à lui, le bloc (5) illustre l'évolution temporelle de la position du piston, le signal de commande, l'évolution des gains, les pressions dans les deux chambres et la force perturbatrice.

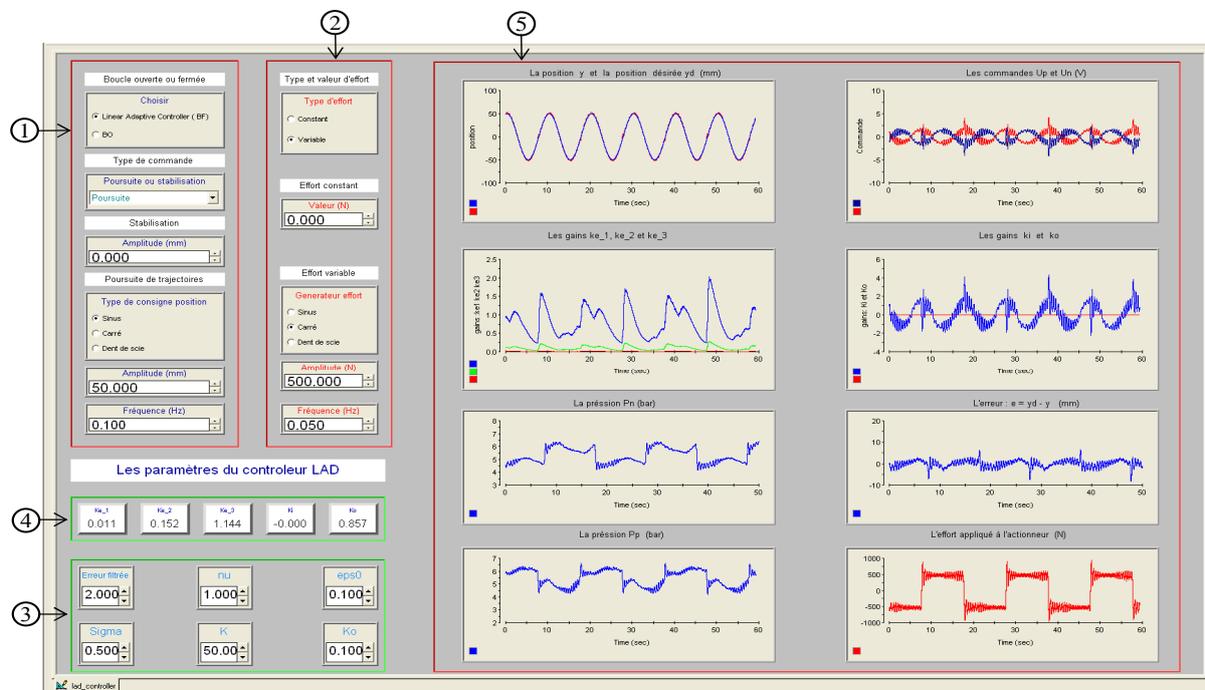


FIGURE A.1: Fenêtre conçue pour l'implémentation de la commande linéaire adaptative.

## Annexe B.

# Implémentation de la commande PI robuste

### B.1. Description de l'interface réalisée sous ControlDesk

L'interface graphique développée pour la mise en oeuvre de la commande PI robuste à l'actionneur pneumatique est montrée sur la figure B.1 ; cette fenêtre se compose de 4 blocs. Le bloc (1) est utilisé pour spécifier le mode de commande envisagé : régulation ou poursuite, et pour définir la forme de la trajectoire de référence pour le cas de la poursuite. Quant à lui, le bloc (2) permet de définir la forme et la valeur de la force perturbatrice qui va agir sur l'actionneur pendant son fonctionnement. Le bloc (3) offre la possibilité de choisir les paramètres de contrôleur à savoir : les valeurs initiales et les paramètres de conception. En ce qui concerne le bloc (4), il est utilisé pour visualiser les différentes courbes de la position du piston, du signal de commande, de l'évolution des gains, des pressions dans les deux chambres et de la force perturbatrice.

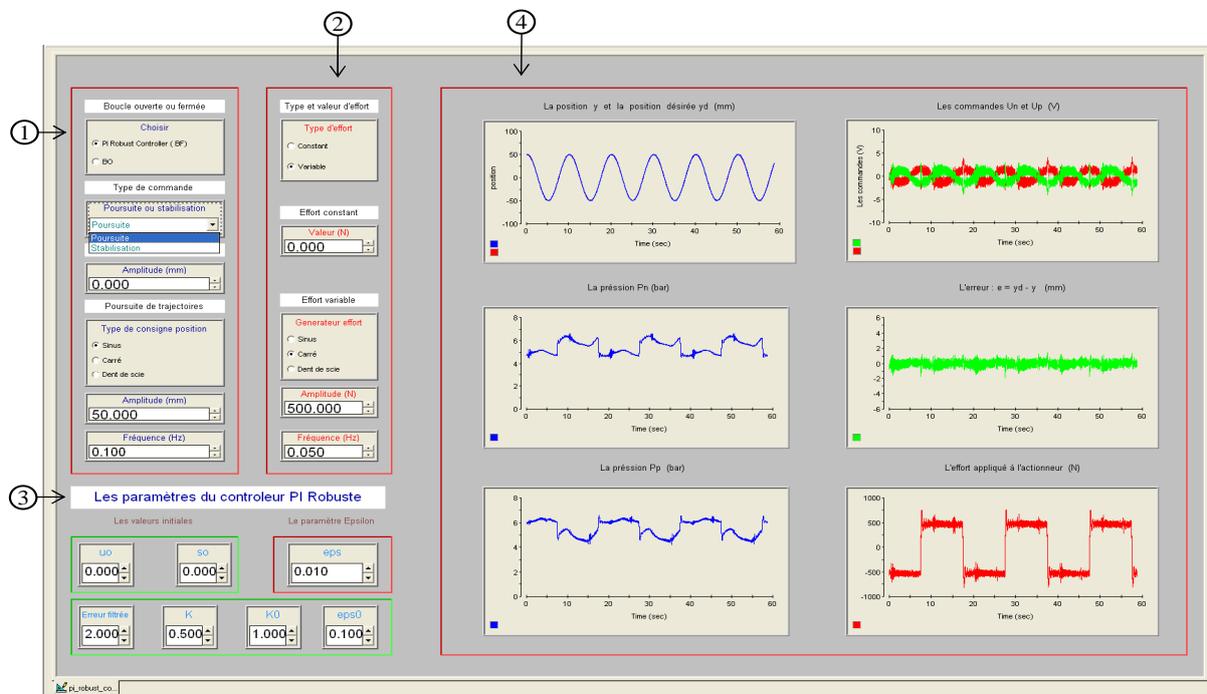


FIGURE B.1: Fenêtre conçue pour l'implémentation de la commande PI robuste.

# Annexe C.

## Implémentation de la commande adaptative floue

### C.1. Description de l'interface réalisée sous ControlDesk

Pour la commande adaptative floue, une interface graphique a été aussi réalisée afin de simplifier son utilisation dans la commande de l'actionneur pneumatique. Comme il est montré sur la figure C.1, quatre blocs construisent cette fenêtre. Le bloc (1) nous sert à déterminer le mode de commande : régulation ou poursuite, de choisir le profil de la consigne pour le cas de la poursuite de trajectoire, et définir par ce fait la position que nous voulons faire suivre au piston. Le bloc (2) est réservé au choix de la force perturbatrice : la forme et les valeurs numérique. Le bloc (3) permet à l'opérateur de définir les paramètres de la loi d'adaptation. Quant à lui, le bloc (4) est réservé à la visualisation des courbes de la position de piston, de signal de commande, de l'évolution des gains, des pressions dans les deux chambres et de la force perturbatrice.

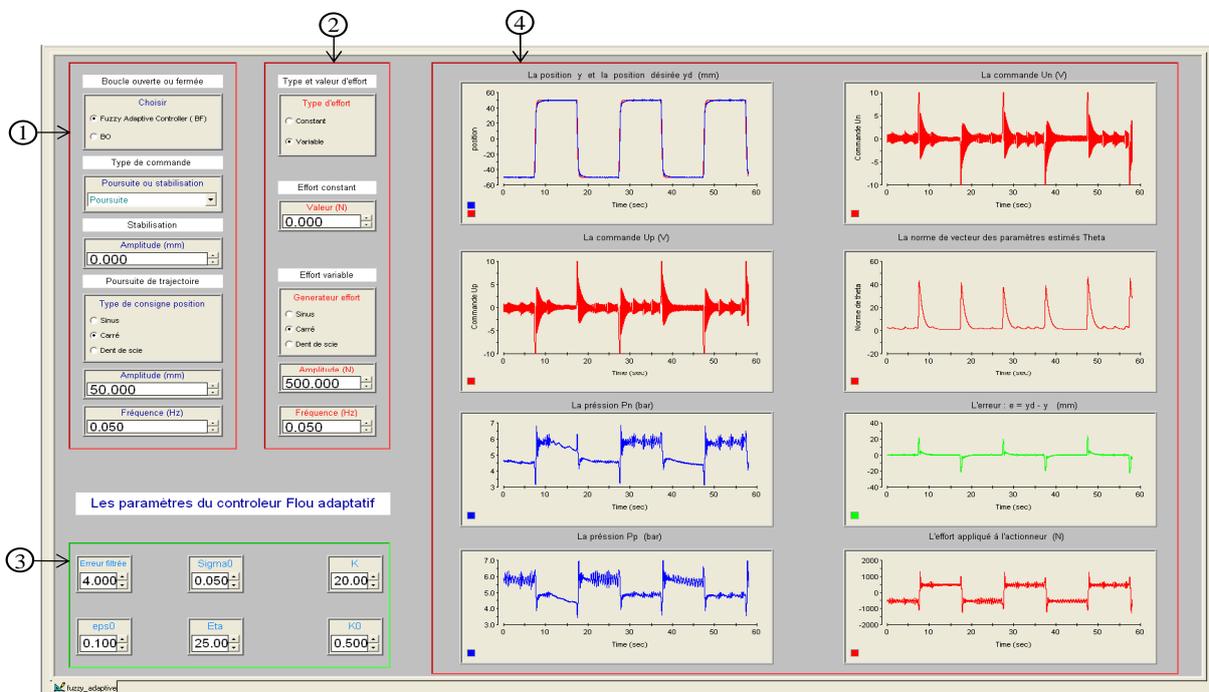


FIGURE C.1: Fenêtre conçue pour l'implémentation de la commande adaptative floue.

---

## Bibliographie

---

- [1] P. de LARMINAT : *Analysis and Control of Linear Systems*. ISTE. Wiley, 2013.
- [2] S.P. BOYD et C.H. BARRATT : *Linear Controller Design : Limits of Performance*. Prentice-Hall information and system sciences series. Prentice-Hall International, 1991.
- [3] H.K. KHALIL : *Nonlinear Systems (2nd ed.)*. Prentice-Hall, 1996.
- [4] A. ISIDORI : *Nonlinear Control Systems*. Communications and Control Engineering. Springer, 1995.
- [5] M. KRSTIC, P.V. KOKOTOVIC et I. KANELLAKOPOULOS : *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1st édition, 1995.
- [6] M. FLIESS et C. JOIN : Commande sans modèle et commande à modèle restreint. *e-STA*, 5(4):1–23, 2008.
- [7] M. FLIESS, C. JOIN, M. MBOUP et H. SIRA-RAMIREZ : Vers une commande multivariable sans modèle. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Bordeaux, France, 2006.
- [8] **A. Boubakir**, F. BOUDJEMA, C. BOUBAKIR et S. LABIOD : A fuzzy sliding mode controller using nonlinear sliding surface applied to the coupled tanks system. *International Journal of Fuzzy Systems*, 10(2), 2008.
- [9] S. LABIOD : *Contribution à la commande adaptative floue des systèmes non linéaires*. Thèse de doctorat, École Nationale Polytechnique d'Alger, 2005.
- [10] T. BOUARAR : *Contribution à la synthèse de lois de commande pour les descripteurs de type Takagi-Sugeno incertains et perturbés*. Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne Ardenne, 2009.
- [11] I. EKER et Y. TORUN : Fuzzy logic control to be conventional method. *Energy Conversion and Management*, 47(4):377–394, 2006.
- [12] M. MARSEGUERRA, E. ZIO et F. CADINI : Genetic algorithm optimization of a model-free fuzzy control system. *Annals of Nuclear Energy*, 32(7):712–728, 2005.
- [13] P. SARMA : Multivariable gain-scheduled fuzzy logic control of an exothermic reactor. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 14(4):457–471, 2001.
- [14] Q. LU et M. MAHFOUF : Multivariable self-organizing fuzzy logic control using dynamic performance index and linguistic compensators. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 25(8):1537–1547, 2012.
- [15] M.B. KADRI et S. HUSSAIN : Model free adaptive control based on FRM with an approach to reduce the control activity. In *IEEE International Conference on Systems Man and Cybernetics*, pages 2110–2115, Istanbul, Turkey, 2010.
- [16] M.B. KADRI : Disturbance rejection using fuzzy model free adaptive control (FMFAC) with adaptive conditional defuzzification threshold. *Journal of the Franklin Institute*, 351(5):3013–3031, 2014.
- [17] P.A. PHAN et T.J. GALE : Direct adaptive fuzzy control with a self-structuring algorithm. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(8):871–899, 2008.
- [18] A. BOULKROUNE, M. TADJINE, M. M'SAAD et M. FARZA : Adaptive fuzzy controller for non-affine systems with zero dynamics. *International Journal of Systems Science*, 40(4):367–382, 2009.

- 
- [19] S. LABIOD et T.M. GUERRA : Direct adaptive fuzzy control for a class of MIMO nonlinear systems. *International Journal of Systems Science*, 38(8):665–675, 2007.
- [20] S. LABIOD et T.M. GUERRA : Indirect adaptive fuzzy control for a class of nonaffine nonlinear systems with unknown control directions. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 8(4):903–907, 2010.
- [21] D.-L. YU, T.K. CHANG et D.-W. YU : A stable self-learning PID control for multivariable time varying systems. *Control Engineering Practice*, 15(12):1577–1587, 2007.
- [22] Y. LI et Y. DU : Indirect adaptive fuzzy observer and controller design based on interval type-2 t-s fuzzy model. *Applied Mathematical Modelling*, 36(4):1558–1569, 2012.
- [23] M. MARSEGUERRA et E. ZIO : Model-free fuzzy tracking control of a nuclear reactor. *Annals of Nuclear Energy*, 30(9):953–981, 2003.
- [24] J. VILLAGRA, V. MILANES, J. PEREZ et C. GONZALEZ : Model-free control techniques for stop & go systems. In *International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, pages 1899–1904, 2010.
- [25] M.B. KADRI : Rejecting multiplicative input disturbance using fuzzy model-free adaptive control. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 39(3):2381–2392, 2014.
- [26] C.-L.-M. HARNOLD et K.Y. LEE : Application of the free-model based neural networks in model reference adaptive inverse control. In *American Control Conference*, pages 1664–1668, Chicago, Illinois, USA, 2000.
- [27] Z. ZHENG et N. WANG : Model-free control based on neural networks. In *International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, pages 2180–2183, Beijing, China, 2002.
- [28] L.D.S. COELHO, M.W. PESSÔA, R.R. SUMAR et A.A.R. COELHO : Model-free adaptive control design using evolutionary-neural compensator. *Expert Systems with Applications*, 37(1):499–508, 2010.
- [29] B.G. LIPTAK : *Process Control and Optimization*. Instrument Engineers’ Handbook, Fourth Edition. Taylor & Francis, 2005.
- [30] J. KANG, W. MENG, A. ABRAHAM et H. LIU : An adaptive PID neural network for complex nonlinear system control. *Neurocomputing*, 135(0):79–85, 2014.
- [31] M. CHEMACHEMA : Output feedback direct adaptive neural network control for uncertain SISO nonlinear systems using a fuzzy estimator of the control error. *Neural Networks*, 36:25–34, 2012.
- [32] I. KAR et L. BEHERA : Direct adaptive neural control for affine nonlinear systems. *Applied Soft Computing*, 9(2):756–764, 2009.
- [33] S.J. YOO, J.B. PARK et Y.H. CHOI : Indirect adaptive control of nonlinear dynamic systems using self recurrent wavelet neural networks via adaptive learning rates. *Information Sciences*, 177(15):3074–3098, 2007.
- [34] I. BARUCH, J.M.F. ALBINO, R. GARRIDO et E. GORTCHEVA : An indirect adaptive neural control of nonlinear plants. In *International Joint Conference on Neural Networks*, pages 337–342, Como, Italy, 2000.
- [35] O. MOHARERI, R. DHAOUADI et A.B. RAD : Indirect adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot via neural networks. *Neurocomputing*, 88:54–66, 2012.
- [36] **A. Boubakir**, F. BOUDJEMA et S. LABIOD : A neuro-fuzzy-sliding mode controller using nonlinear sliding surface applied to the coupled tanks system. *International Journal of Automation and Computing*, 6(1):72–80, 2009.
- [37] C. HUA, C. YU et X. GUAN : Neural network observer-based networked control for a class of nonlinear systems. *Neurocomputing*, 133:103–110, 2014.

- 
- [38] S. TAYYEBI et M. ALISHIRI : The control of MSF desalination plants based on inverse model control by neural network. *Desalination*, 333(1):92–100, 2014.
- [39] C.-Z. PAN, X.-Z. LAI, S.X. YANG et M. WU : An efficient neural network approach to tracking control of an autonomous surface vehicle with unknown dynamics. *Expert Systems with Applications*, 40(5):1629–1635, 2013.
- [40] M. FLIESS et C. JOIN : Intelligent PID controllers. In *16th Mediterrean Conference on Control and Automation*, Ajaccio, France, 2008.
- [41] M. FLIESS et C. JOIN : Model-free control. *International Journal of Control*, 86(12):2228–2252, 2013.
- [42] **A. Boubakir**, S. LABIOD, F. BOUDJEMA et F. PLESTAN : A model-free control applied to a quadrotor. In *International Conference on Electrical, Electronics and Automatic, ICEEA*, Bejaia, Algeria, 2010.
- [43] M. MBOUP, C. JOIN et M. FLIESS : Numerical differentiation with annihilators in noisy environment. *Numerical Algorithms*, 50(4):439–467, 2009.
- [44] M. FLIESS, C. JOIN et H. SIRA-RAMIREZ : Non-linear estimation is easy. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 4(1):12–27, 2008.
- [45] J. CHEN, F. YANG et Q.-L. HAN : Model-free predictive  $h_\infty$  control for grid-connected solar power generation systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, PP(99):1320–1326, 2014.
- [46] B.R. WOODLEY, J.P. HOW et R.L. KOSUT : Model free subspace based  $h_\infty$  control. In *American Control Conference*, pages 2712–2717, Arlington, VA, USA, 2001.
- [47] B.R. WOODLEY : *Model free subspace based  $H_\infty$  control*. Thèse de doctorat, université de Stanford, 2001.
- [48] R. PÉREZ-ALCOCER, E. OLGUÍN-DÍAZ et L.A. TORRES-MÉNDEZ : Model-free robust control for fluid disturbed underwater vehicles. In *Intelligent Robotics and Applications*, volume 7507 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 519–529. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [49] M. PRZYBYLA, R. MADONSKI, M. KORDASZ et P. HERMAN : An experimental comparison of model-free control methods in a nonlinear manipulator. In *Intelligent Robotics and Applications*, volume 7101 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 53–62. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [50] **A. Boubakir**, S. LABIOD, F. BOUDJEMA et A. BENALLEGUE : Robust controller applied to a quadrotor unmanned aerial vehicle. In *International Conference on Automation and Mechatronics*, Oran, Algeria, 2011.
- [51] A. AL-TAMIMI, F.L. LEWIS et M. ABU-KHALAF : Model-free Q-learning designs for linear discrete-time zero-sum games with application to H-infinity control. *Automatica*, 43(3):473–481, 2007.
- [52] R. MADONSKI et P. HERMAN : Model-free control of a two-dimensional system based on uncertainty reconstruction and attenuation. In *2013 Conference on Control and Fault-Tolerant Systems*, pages 542–547, Nice, France, 2013.
- [53] M. LI, D. LI, J. WANG et C. ZHAO : Active disturbance rejection control for fractional-order system. *ISA Transactions*, 52(3):365–374, 2013.
- [54] S. SYAFIIE, F. TADEO et E. MARTINEZ : Model-free learning control of neutralization processes using reinforcement learning. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 20(6):767–782, 2007.
- [55] C.-L. LAI et P.-L. HSU : Analysis and implementation of a model-free approach in network-induced delay compensation for remote control systems. In *IEEE International Conference on Control Applications*, pages 1250–1255, Denver, CO, USA, 2011.
- [56] V.D. YURKEVICH : *Design of Nonlinear Control Systems with the Highest Derivative in Feedback*. Series on stability, vibration, and control of systems. World Scientific, 2004.

- 
- [57] D. SUN, X. SHAO et G. FENG : A model-free cross-coupled control for position synchronization of multi-axis motions : Theory and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 15(2):306–314, 2007.
- [58] Z. HOU et Y. ZHU : Controller-dynamic-linearization-based model free adaptive control for discrete-time nonlinear systems. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 9(4):2301–2309, 2013.
- [59] Z. HOU et S. JIN : Data-driven model-free adaptive control for a class of MIMO nonlinear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 22(12):2173–2188, 2011.
- [60] C.-K. LIN, T.-H. LIU, J. t. YU, L.-C. FU et C.-F. HSIAO : Model-free predictive current control for interior permanent-magnet synchronous motor drives based on current difference detection technique. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61(2):667–681, 2014.
- [61] R. RAYGOSA-BARAHONA, V. PARRA-VEGA, E. OLGUIN-DIAZ et L. MUNOZ-UBANDO : A model-free backstepping with integral sliding mode control for underactuated ROVs. In *8th International Conference on Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control*, pages 1–7, Merida City, Mexico, 2011.
- [62] D. LEE, M. CHOI et H. BANG : Model-free linear quadratic tracking control for unmanned helicopters using reinforcement learning. In *5th International Conference on Automation, Robotics and Applications*, pages 19–22, Wellington, New Zealand, 2011.
- [63] G. QI, Z. CHEN et Z. YUAN : Model-free control of affine chaotic systems. *Physics Letters A*, 344(2–4):189–202, 2005.
- [64] S. LI, Y. LI, B. LIU et T. MURRAY : Model-free control of lorenz chaos using an approximate optimal control strategy. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(12):4891–4900, 2012.
- [65] Z.-W. ZHANG, X.-W. WANG, X.-J. ZHONG et X. MING : Development of a type of Model-Free Adaptive (MFA) control and its application in China. In *The 6th PSU-UNS International Conference on Engineering and Technology*, pages 1–4, Novi Sad, Serbia, 2013.
- [66] R. BOURDAIS : *Une contribution à la modélisation et à la commande des systèmes non linéaires à commutation*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lille, 2007.
- [67] I. ELLOUZE : *Étude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs*. Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine de Metz, 2010.
- [68] A. BOULKROUNE : *Commande floue adaptative avec et sans observateur des systèmes non linéaires incertains*. Thèse de doctorat, École Nationale Polytechnique d’Alger, 2009.
- [69] L. HETEL : *Stabilité et commande robuste des systèmes à commutation*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2007.
- [70] P.A. IOANNOU et J. SUN : *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [71] J.-J. SLOTINE et W. LI : *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [72] **A. Boubakir** : *Méthodes de commande par mode de glissement appliquées au bras manipulateur et au système hydraulique CE105 à réservoirs couplés*. Mémoire de magistère, École Militaire Polytechnique, 2007.
- [73] **A. Boubakir**, S. LABIOD et F. BOUDJEMA : A stable self-tuning proportional-integral-derivative controller for a class of multi-input multi-output nonlinear systems. *Journal of Vibration and Control*, 18(2):228–239, 2012.
- [74] **A. Boubakir**, S. LABIOD, F. BOUDJEMA et F. PLESTAN : Design and experimentation of a self-tuning PID control applied to the 3DOF helicopter. *Archives of Control Sciences*, 23(3):311–331, 2013.

- 
- [75] J. APKARIAN : *3d Helicopter Experiment Manual*. Quanser Consulting, Canada, 1998.
- [76] H. ZHU, L. LI, Y. ZHAO, Y. GUO et Y. YANG : CAS algorithm-based optimum design of controller in AVR system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42(2):792–800, 2009.
- [77] J.G. ZIEGLER et N.B. NICHOLS : Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the ASME*, 64:759–768, 1942.
- [78] K. J. ASTROM et T. HAGGLUND : *PID Controllers : Theory, Design, and Tuning, 2nd Ed.* The Instrument, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, NC, 1995.
- [79] L. OLIVIER, G. MICHEL, M. MAGNUS, B. EMMANUEL et T. LIONEL : Iterative feedback tuning of PID parameters : comparison with classical tuning rules. *Control Engineering Practice*, 11(9):1023–1033, 2003.
- [80] Z. JINHUA, Z. JIAN, D. HAIFENG et W. SUNAN : Self-organizing genetic algorithm based tuning of PID controllers. *Information Sciences*, 179(7):1007–1018, 2009.
- [81] W.-D. CHANG, R.-C. HWANG et J.-G. HSIEH : A self-tuning PID control for a class of nonlinear systems based on the lyapunov approach. *Journal of Process Control*, 12(2):233–242, 2002.
- [82] W.-D. CHANG et J.-J. YAN : Adaptive robust PID controller design based on a sliding mode for uncertain chaotic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 26(1):167–175, 2005.
- [83] I. MIZUMOTO, D. IKEDA, T. HIRAHATA et Z. IWAI : Design of discrete time adaptive PID control systems with parallel feedforward compensator. *Control Engineering Practice*, 18(2):168–176, 2010.
- [84] R. YUSOF, S. OMATU et M. KHALID : Self-tuning PID control : A multivariable derivation and application. *Automatica*, 30(12):1975–1981, 1994.
- [85] T. YAMAMOTO et S.L. SHAH : Design and experimental evaluation of a multivariable self-tuning PID controller. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 151(5):645–652, 2004.
- [86] D.-L. YU, T.K. CHANG et D.-W. YU : Fault tolerant control of multivariable processes using auto-tuning PID controller. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics*, 35(1):32–43, 2005.
- [87] O.M. ALMEIDA, L.L.N. REIS, L.D.S. BEZERRA et S.E.U. LIMA : A MIMO fuzzy logic autotuning PID controller : Method and application. In *Applied Soft Computing Technologies : The Challenge of Complexity*, volume 34 de *Advances in Soft Computing*, pages 569–580. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [88] K. TAMURA et H. OHMORI : Auto-tuning method of expanded PID control for MIMO systems. In *9th IFAC workshop on adaptive and learning in control and signal processing*, pages 98–103, St. Petersburg, Russia, 2007.
- [89] L.V.R. ARRUDA, M.C.S. SWIECH, M.R.B. DELGADO et F. NEVES-JR : PID control of MIMO process based on rank niching genetic algorithm. *Applied Intelligence*, 29(3):290–305, 2008.
- [90] M.M. CHAIKOVSKII et I.B. YADYKIN : Optimal tuning of PID controllers for MIMO bilinear plants. *Automation and Remote Control*, 70(1):118–132, 2009.
- [91] M. Willjuice IRUTHAYARAJAN et S. BASKAR : Evolutionary algorithms based design of multivariable PID controller. *Expert Systems with Applications*, 36(5):9159–9167, 2009.
- [92] M. ODELGA, A. CHRIETTE et F. PLESTAN : Control of 3 DOF helicopter : A novel autopilot scheme based on adaptive sliding mode control. In *American Control Conference*, pages 2545–2550, Montreal, Canada, 2012.
- [93] **A. Boubakir**, S. LABIOD, F. BOUDJEMA et F. PLESTAN : Model free controller with an observer applied in real-time to a 3-dof helicopter. *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, 22(6):1564–1581, 2014.

- 
- [94] I.M. MEZA-SÀNCHEZ, L.T. AGUILAR, A. SHIRIAEV, L. FREIDOVICH et Y. ORLOV : Periodic motion planning and nonlinear  $h_\infty$  tracking control of a 3-dof underactuated helicopter. *International Journal of Systems Science*, 42(5):829–838, 2011.
- [95] A.T. KUTAY, A.J. CALISE, M. IDAN et N. HOVAKIMYAN : Experimental results on adaptive output feedback control using a laboratory model helicopter. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(2):196–202, 2005.
- [96] J. WITT, S. BOONTO et H. WERNER : Approximate model predictive control of a 3–dof helicopter. In *46th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4501–4506, New Orleans, LA, USA, 2007.
- [97] A.L. FRADKOV, B. ANDRIEVSKY et D. PEAUCELLE : Estimation and control under information constraints for LAAS helicopter benchmark. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 18(5):1180–1187, 2010.
- [98] T. KIEFER, K. GRAICHEN et A. KUGI : Trajectory tracking of a 3dof laboratory helicopter under input and state constraints. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 18(4):944–952, 2010.
- [99] H. RÍOS, A. ROSALES, A. FERREIRA et A. DÁVILA : Robust regulation for a 3-dof helicopter via sliding-modes control and observation technique. In *American Control Conference*, pages 4427–4432, Baltimore, MD, USA, 2010.
- [100] Y. YU et Y. ZHONG : Robust attitude control of a 3dof helicopter with multi–operation points. *Journal of Systems Science and Complexity*, 22(2):207–219, 2009.
- [101] F.G. Marques de CARVALHO et E.M. HEMERLY : Adaptive elevation control of a three degrees-of-freedom model helicopter using neural networks by state and output feedback. In *ABCMSymposium Series in Mechatronics*, volume 3, pages 106–113, 2008.
- [102] T. KIEFER, K. GRAICHEN et W. KEMMETMÜLLER : Modeling and flatness-based control of a 3dof helicopter laboratory experiment. In *6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, pages 207–212, Stuttgart, Germany, 2004.
- [103] A.N. KHIZER, D. YAPING et X.X. YANG : Simpler fuzzy logic controller (SFLC) design for 3dof laboratory scaled helicopter. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, 15(2):228–241, 2013.
- [104] Z. FANG, W. GAO et L. ZHANG : Robust adaptive integral backstepping control of a 3-dof helicopter. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 9:1–8, 2012.
- [105] A. SABERI, P. SANNUTI et B.M. CHEN : *H<sub>2</sub> [H tief 2] Optimal Control*. Prentice-Hall International Series in Systems and Control Engineering. Prentice Hall PTR, 1995.
- [106] U. MACKENROTH : *Robust Control Systems : Theory and Case Studies*. Springer, 2004.
- [107] I. PETERSEN, V.A. UGRINOVSKII et A.V. SAVKIN : *Robust Control Design Using H<sub>∞</sub> Methods*. Communications and Control Engineering. Springer London, 2000.
- [108] S. LI, X. YANG et D. YANG : Active disturbance rejection control for high pointing accuracy and rotation speed. *Automatica*, 45(8):1854–1860, 2009.
- [109] H. FENG et S. LI : Active disturbance rejection control based on weighed-moving-average-state-observer. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 411(1):354–361, 2014.
- [110] S.S. GE, C.C. HANG et T. ZHANG : Nonlinear adaptive control using neural networks and its application to CSTR systems. *Journal of Process Control*, 9(4):313–323, 1998.
- [111] J.D. BOSKOVIC, L. CHEN et R.K. MEHRA : Adaptive control design for nonaffine models arising in flight control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 27(2):209–217, 2004.
- [112] Z. CHEN, C. SHAN et H. ZHU : Adaptive fuzzy sliding mode control algorithm for a non-affine nonlinear system. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 3(4):302–311, 2007.

- 
- [113] **A. Boubakir**, F. PLESTAN, S. LABIOD et F. BOUDJEMA : A stable linear adaptive controller applied to a pneumatic actuator system. *In IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6112–6117, Florence, Italy, 2013.
- [114] J.-H. PARK, G.-T. PARK, S.-H. KIM et C.-J. MOON : Direct adaptive self-structuring fuzzy controller for nonaffine nonlinear system. *Fuzzy Sets and Systems*, 153(3):429–445, 2005.
- [115] S. LABIOD et T.M. GUERRA : Adaptive fuzzy control of a class of SISO nonaffine nonlinear systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(10):1098–1126, 2007.
- [116] Y.-S. HUANG et M. WU : Robust decentralized direct adaptive output feedback fuzzy control for a class of large-sale nonaffine nonlinear systems. *Information Sciences*, 181(11):2392–2404, 2011.
- [117] Y. LI, S. TONG, T. LI et X. JING : Adaptive fuzzy control of uncertain stochastic nonlinear systems with unknown dead zone using small-gain approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 235:1–24, 2014.
- [118] S.S. GE, T.H. LEE et J. WANG : Adaptive control of non-affine nonlinear systems using neural networks. *In IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pages 13–18, Rio Patras, Greece, 2000.
- [119] T.-P. ZHANG, Q. ZHU et Y.-Q. YANG : Adaptive neural control of non-affine pure-feedback nonlinear systems with input nonlinearity and perturbed uncertainties. *International Journal of Systems Science*, 43(4):691–706, 2012.
- [120] M. CHEN et S.S. GE : Direct adaptive neural control for a class of uncertain nonaffine nonlinear systems based on disturbance observer. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 43(4):1213–1225, 2013.
- [121] R.K. MUTHA, W.R. CLUETT et A. PENLIDIS : Nonlinear model-based predictive control of control nonaffine systems. *Automatica*, 33(5):907–913, 1997.
- [122] G. BARTOLINI et E. PUNTA : Sliding mode output-feedback stabilization of uncertain nonlinear nonaffine systems. *Automatica*, 48(12):3106–3113, 2012.
- [123] D. WANG, D. LIU, Q. WEI, D. ZHAO et N. JIN : Optimal control of unknown nonaffine nonlinear discrete-time systems based on adaptive dynamic programming. *Automatica*, 48(8):1825–1832, 2012.
- [124] Q. SONG et Y.-D. SONG : PI-like fault-tolerant control of nonaffine systems with actuator failures . *Acta Automatica Sinica*, 38(6):1033–1040, 2012.
- [125] H. HONGYI et P. XIAFU :  $h_\infty$  control of a class of non-affine nonlinear system. *In Control Conference (CCC) Chinese*, pages 646–650, Zhangjiajie, Hunan, China, 2007.
- [126] **A. Boubakir**, S. LABIOD, F. BOUDJEMA et F. PLESTAN : Linear adaptive control of a class of siso nonaffine nonlinear systems. *International Journal of Systems Science*, 45(12):2490–2498, 2014.
- [127] A. GIRIN : *Contribution à la commande non linéaire d'un système électropneumatique pour une utilisation aéronautique : Application sur un benchmark Dédicé*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2007.
- [128] V. BREGEAULT : *Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2010.
- [129] K. TURKI : *Nouvelles approches pour la synthèse de lois de commande non linéaires robustes. application à un actionneur électropneumatique et proposition d'une solution au problème du redécollage*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2010.
- [130] M. SMAOUI, X. BRUN et D. THOMASSET : Systematic control of an electropneumatic system : integrator backstepping and sliding mode control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(5):905–913, 2006.
- [131] X. BRUN : *Commandes linéaires et non linéaires en électropneumatique. Méthodologies et applications*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1999.

- [132] T. VESSELENYI, S. DZIŤTAC, I. DZIŤTAC et M.-J. MANOLESCU : Fuzzy and neural controllers for a pneumatic actuator. *International Journal of Computers, Communications & Control*, 2(4):375–387, 2007.
- [133] K.T. SAIED, M. SMAOUI, D. THOMASSET, F. MNIF et N. DERBEL : Nonlinear passivity based control law with application to electropneumatic system. *In the 17th IFAC World Congress*, Coex, South Korea, 2008.
- [134] A. FREDERIC, B. XAVIER, S. SYLVIE et B. ERIC : Non-linear position control of a pneumatic actuator with closed-loop stiffness and damping tuning. *In European Control Conference*, pages 1089–1094, Zürich, Switzerland, 2013.
- [135] E. RICHARD : *De la commande linéaire et non linéaire en position des systèmes électropneumatiques*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1990.
- [136] J. TEO, J.P. HOW et E. LAVRETSKY : Proportional-integral controllers for minimum-phase nonaffine-in-control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(6):1477–1483, 2010.
- [137] N. HOVAKIMYAN, E. LAVRETSKY et A. SASANE : Dynamic inversion for nonaffine-in-control systems via time-scale separation. Part I. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 13(4):451–465, 2007.
- [138] N. HOVAKIMYAN, E. LAVRETSKY et C. CAO : Dynamic inversion for multivariable non-affine-in-control systems via time-scale separation. *International Journal of Control*, 81(12):1960–1967, 2008.
- [139] J. TEO, J.P. HOW et E. LAVRETSKY : On approximate dynamic inversion and proportional-integral control. *In American Control Conference*, pages 1592–1597, 2009.
- [140] J. TEO et J.P. HOW : On approximate dynamic inversion. Rapport technique ACL09-01, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, May 2009. Aerospace Controls Lab.
- [141] S.S. GE et J. ZHANG : Neural-network control of nonaffine nonlinear system with zero dynamics by state and output feedback. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 14(4):900–918, 2003.
- [142] T. HAYAKAWA, W.M. HADDAD et N. HOVAKIMYAN : Neural network adaptive control for a class of nonlinear uncertain dynamical systems with asymptotic stability guarantees. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 19(1):80–9, 2008.
- [143] A.N. TIKHONOV : Systems of differential equations containing a small parameter multiplying the derivative (in russian). *Mat. Sborn.*, 31(73):575–586, 1952.
- [144] K. YADI : *Perturbations singulières : approximations, stabilité pratique et applications à des modèles de compétition*. Thèse de doctorat, Université de Haute-Alsace de Mulhouse, 2008.
- [145] S.E. RONCERO : *Three-time-scale nonlinear control of an autonomous helicopter on a platform*. Thèse de doctorat, Université de Sevilla, 2011.
- [146] L.-X. WANG et J.M. MENDEL : Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 3(5):807–814, 1992.
- [147] J.J. BUCKLEY : Universal fuzzy controllers. *Automatica*, 28(6):1245–1248, 1992.
- [148] J.J. BUCKLEY : Sugeno type controllers are universal controllers. *Fuzzy Sets and Systems*, 53(3):299–303, 1993.
- [149] L.-X. WANG : *Adaptive Fuzzy Systems and Control : Design and Stability Analysis*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1994.
- [150] J.-H. KIM et F.L. LEWIS : Model-free  $H_\infty$  control design for unknown linear discrete-time systems via Q-learning with LMI. *Automatica*, 46(8):1320–1326, 2010.