

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

Laboratoire de Commande des Processus



Mémoire

Présenté au Laboratoire de Commande des Processus
en vue de l'obtention du titre de

Magister

en Automatique
par

Hakim ACHOUR

Ingénieur d'Etat en Automatique de l'UMMTO

Intitulé

**Application des techniques modernes de l'automatique à l'automobile :
Aspects motorisation et confort**

Soutenue publiquement le **05/ 01/ 2010** devant le jury composé de:

D. BERKANI	Professeur ENP	Président
D. BOUKHETALA	Professeur ENP	Rapporteur
M. LOUDINI	Maître de Conférences A ENSI	Examineur
N. BALI	Maître de Conférences A USTHB	Examineur
A. NAIT SEGHIR	Maître de Conférences A USTHB	Examineur
F. BOUDJEMA	Professeur ENP	Invité



Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Commande des Processus (LCP) de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger (ENP), sous la direction de Monsieur D. Boukhetala et la co-direction de Monsieur F. Boudjema, que je remercie pour leur encadrement, leur disponibilité et surtout pour leurs conseils scientifiques et humains. Je leur suis très reconnaissant pour la liberté et la confiance qu'ils m'ont témoignées tout au long de ce travail.

Je remercie les membres du jury, qui m'ont fait l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur M. Tadjine pour avoir mis à ma disposition la documentation nécessaire sur les LMI.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur N. Lagraa de m'avoir proposé son aide alors qu'il était à l'étranger en stage préparatoire pour son doctorat.

Je ne peux oublier de remercier mes deux amis, Abdeslam Sedki et Abderezak Mézari, pour leur précieuse aide en des moments très critiques.

Enfin, je ne terminerai pas mes remerciements sans avoir une pensée sympathique pour toutes les personnes qui m'ont soutenu ne serait ce qu'avec un sourire.

Sommaire

Introduction générale.....1

Chapitre I : Moteurs thermiques à allumage commandé

I.1 Introduction.....4

I.2 Généralités sur les moteurs thermiques à allumage commandé.....5

I.3 Principe du downsizing.....7

 I.3.1 La suralimentation.....9

 I.3.2 Commande des turbocompresseurs.....11

I.4 Modélisation du circuit d'air des moteurs thermiques à allumage commandé13

 I.4.1 Modèle de l'admission d'air.....14

 I.4.1.1 Débit d'air admis dans les cylindres \dot{m}_{cyl} 16

 I.4.1.2 Débit d'air traversant la vanne papillon \dot{m}_{pap} 16

 I.4.2 Modèle du turbocompresseur.....18

 I.4.2.1 Dynamique du turbocompresseur.....18

 I.4.2.2 Modèle du compresseur.....18

 I.4.2.3 Modèle de la turbine.....19

 I.4.3 Modèle de la dynamique du vilebrequin..... 21

I.5 Conclusion.....24

Chapitre II : Commande de l'admission d'air

II.1 Introduction.....25

II.2 Modèle flou de type TS.....26

 II.2.1 Définition des modèles TS.....26

 II.2.2 Construction d'un modèle flou TS.....26

II.3	Stabilité et stabilisation des modèles flous TS.....	28
II.3.1	Analyse de stabilité des modèles TS.....	28
II.3.2	Conditions de base pour la stabilisation quadratique des modèles TS.....	29
II.3.3	Stabilisation avec observateur flou.....	31
II.3.4	Stabilisation avec approche H^∞	34
II.4	Stabilisation avec structure intégrale des modèles TS perturbés.....	36
II.4.1	Commande avec observateur.....	39
II.4.2	Exemple.....	44
II.5	Application à la commande de l'admission d'air d'un moteur thermique à allumage commandé.....	49
II.5.1	Suivi de consigne en pression collecteur d'un moteur à aspiration naturelle...49	
II.5.2	Suivi de consigne en pression collecteur d'un moteur turbocompressé.....56	
II.5.2.1	Obtention d'un modèle flou TS pour la commande de la vanne de décharge.....	57
II.6	Conclusion.....	60

Chapitre III : Approche robuste pour la stabilisation de modèles flous TS incertains

III.1	Introduction.....	61
III.2	Synthèse de commande sans observateur.....	62
III.2.1	Exemple.....	66
III.3	Synthèse de commande avec observateur.....	68
III.3.1	Exemple.....	74
III.4	Application à la commande en couple d'un moteur thermique à allumage Commandé.....	76
III.4.1	Modèle pour la commande en couple.....	76
III.4.2	Suivi de consigne en couple.....	78
III.5	Conclusion.....	82

Conclusion générale et perspectives.....	83
---	-----------

Bibliographie.....	86
---------------------------	-----------

Annexe A.....	92
----------------------	-----------

Annexe B.....	97
----------------------	-----------

Nomenclature

I. Symboles

Seules les variables principales sont reprises dans ce glossaire :

C_m	: couple moteur indiqué (Nm)
C_{eff}	: couple moteur effectif (obtenu sur l'arbre) (Nm)
C_{ch}	: couple de charge (Nm)
\dot{m}_{pap}	: débit massique d'air au papillon ($kg \cdot s^{-1}$)
\dot{m}_{cyl}	: débit massique d'air admis dans les cylindres ($kg \cdot s^{-1}$)
p_{col}	: pression dans le collecteur d'admission (Pa)
p_{am_pap}	: pression en amont de la vanne papillon (Pa)
p_{amb}	: pression ambiante ou atmosphérique ($= 10^5 Pa$)
p_{int}	: pression de suralimentation après l'échangeur (<i>intercooler</i>) (Pa)
p_{ech}	: pression dans le collecteur d'échappement (Pa)
ϕ_{pap}^o	: angle d'ouverture de la vanne papillon (rad)
ϕ_{pap}	: ouverture de la vanne papillon (%)
ϕ_{c_pap}	: commande d'ouverture papillon (%)
ϕ_{c_wg}	: commande de fermeture de la vanne de décharge (%)
T_{col}	: température dans le collecteur d'admission ($^{\circ}K$)
T_{am_pap}	: température en amont de la vanne papillon ($^{\circ}K$)
T_{amb}	: température ambiante (atmosphérique) ($^{\circ}K$)
T_{ech}	: température dans le collecteur d'échappement ($^{\circ}K$)
θ	: angle du vilebrequin (rad)
$\dot{\theta}$: régime instantané du moteur thermique ($rad \cdot s^{-1}$)
$\ddot{\theta}$: accélération instantanée du moteur thermique ($rad \cdot s^{-2}$)
P_{turb}	: puissance fournie par la turbine (<i>watt</i>)

P_{comp}	: puissance consommée par le compresseur (<i>watt</i>)
P_{frot}	: puissance consommée par les frottements (<i>watt</i>)
ω_{turb}	: régime du turbocompresseur ($rad \cdot s^{-1}$)
$\dot{\omega}_{turb}$: accélération du turbocompresseur ($rad \cdot s^{-2}$)
I_m	: moment d'inertie de l'arbre moteur ($kg \cdot m^2$)
I_{turb}	: moment d'inertie du turbocompresseur ($kg \cdot m^2$)
R	: constante des gaz parfaits ($\approx 287 J \cdot kg^{-1} \cdot ^\circ K^{-1}$)
N_e	: régime du moteur thermique ($tr \cdot min^{-1}$)
n_{cyl}	: nombre de cylindres
V_{col}	: volume du collecteur d'admission (m^3)
V_{cyl}	: cylindrée totale du moteur thermique (m^3)

II. Acronymes

PMH	: Point Mort Haut
PMB	: Point Mort Bas
PME	: Pression Moyenne Effective
TS	: Takagi-Sugeno
LMI	: Linear Matrix Inequality (inégalité matricielle linéaire)
BMI	: Bilinear Matrix Inequality (inégalité matricielle bilinéaire)
PDC	: Parallel Distributed Compensation
LTI	: Linear Time Invariant (linéaire invariant dans le temps)
ISS	: Input to State Stability

III. Ensembles et domaines

R	: Ensemble des nombres réels
R^+	: Ensemble des nombres réels positifs ou nuls
R^{+*}	: Ensemble des nombres réels strictement positifs
R^p	: Espace réel euclidien de dimension p
$R^{p \times q}$: Ensemble des matrices de dimension $(p \times q)$ à élément réels
C^1	: Ensemble des fonctions continûment dérivables

Introduction générale

Introduction générale

Depuis l'invention de l'automobile, les motorisations à combustion interne n'ont cessé d'être améliorées pour devenir de plus en plus performantes de moins en moins polluantes. En effet, les systèmes mécaniques qui jusqu'à récemment permettaient de piloter complètement les moteurs (câble d'accélérateur, carburateur, arbre à cames, etc. ...), sont peu à peu remplacés par des systèmes de commande électro-mécaniques ou électroniques (papillon motorisé, injecteur, soupape électromagnétique, etc. ...). L'emploi généralisé de ces nouveaux systèmes se justifie par la nécessité de maîtriser le comportement du moteur avec comme objectif de réaliser un bon compromis entre les émissions de polluants, la consommation de carburant et les performances du véhicule. Le caractère confidentiel des recherches dans ce domaine n'a permis que à très peu de résultats d'être publiés [STE96], [AND02], [LAU03] [KRI06], [COL06], [SPR06], [KHI07], [ARG07], [ERI07]. Cela est justifié du fait de la concurrence entre les constructeurs et équipementiers automobile. Le sujet est d'actualité, principalement en Europe, en raison des nouvelles réglementations de réduction de polluants (monoxyde de carbone (CO), oxydes d'azote (NO_x), hydrocarbures (HC)) et des engagements des constructeurs d'automobile à réduire les émissions de CO_2 . En effet, des problèmes liés aux limites des techniques de commande classiques (cartographies statiques) sont à l'origine des recherches effectuées dans ce domaine. Des techniques de commande avancées sont alors nécessaires pour aller plus loin dans la maîtrise des dynamiques internes du moteur. En outre, les objectifs de commande sont multiples, en plus de la réduction des émissions polluantes, les performances du véhicule doivent être améliorées pour ainsi arriver à assurer un meilleur confort de conduite.

Ce travail entre dans le cadre de la commande des moteurs thermiques à allumage commandé à injection indirecte multipoint. Par définition, le moteur thermique est un transformateur d'énergie chimique en énergie mécanique. Vu son autonomie de fonctionnement, il reste, de loin, le plus utilisé dans les systèmes de motorisation automobile. Cependant, même dans des conditions optimales de fonctionnement, un moteur automobile d'aujourd'hui offre un rendement maximal de l'ordre de 36% pour un moteur essence et de

42% pour un moteur diesel. C'est-à-dire, qu'en moyenne, un peu plus d'un tiers de l'énergie fournie par le carburant est transformée en énergie utile pour faire avancer le véhicule, le reste étant principalement dissipé en chaleur dans l'atmosphère. Ces conditions optimales correspondent cependant à une utilisation du moteur à charge élevée. Or, en règle générale, les véhicules automobiles sont utilisés sur de petits parcours en agglomération, ce qui se traduit finalement par une sollicitation des moteurs à faibles charges. Dans ces conditions, le rendement se trouve dégradé avec des valeurs n'atteignant que 15%.

Une des solutions permettant d'améliorer les performances du moteur (rendement, consommation, ...) repose sur le concept de la réduction de la cylindrée (ou downsizing). Celui-ci consiste à réduire la cylindrée du moteur (donc sa taille et son poids), en conservant un niveau de performance équivalent à un moteur de plus forte cylindrée au moyen de la technique de suralimentation en air par turbocompresseur. Ce procédé permet de diminuer substantiellement les pertes énergétiques du moteur. En effet, le turbocompresseur permet d'augmenter la pression à l'admission au-delà de la valeur atmosphérique. Cette élévation de la pression à l'admission influe directement sur le remplissage en air des cylindres, et par conséquent, sur le couple fourni par le moteur et son rendement.

L'objectif principal de ce travail concerne donc la commande du circuit d'air des moteurs thermiques à allumage commandé.

Le présent travail se décompose en trois chapitres.

Le premier chapitre commence par des généralités sur les moteurs thermiques à allumage commandé ainsi que le principe de la réduction de la cylindrée (downsizing). Il présente ensuite la modélisation du circuit d'air des moteurs thermiques à allumage commandé.

Le deuxième chapitre s'intéresse à la commande de l'admission d'air par une approche de commande basée sur les modèles flous de type Takagi-Sugeno [TAK85]. L'intérêt des modèles flous de type Takagi-Sugeno (TS) est la représentation exacte dans un espace des variables d'état des modèles non linéaires. Après un bref rappel théorique, le problème de suivi de consigne des modèles TS est traité par une loi de commande avec structure intégrale. Cette loi de commande se base sur un problème de minimisation selon un critère H_∞ . La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'application de la loi de commande au moteur

considéré. Deux cas sont alors traités : le premier considère le cas d'un moteur à aspiration naturelle, et le second, le cas d'un moteur avec turbocompresseur.

Les modèles considérés dans ce travail sont non linéaires et présentent des incertitudes de modélisation. La synthèse de lois de commande floues nécessite la prise en compte de ces types de modèle. Le troisième chapitre présente alors une synthèse de commande robuste pour les modèles TS incertains. La synthèse de la loi de commande concerne, aussi bien le cas où tous les états sont disponibles que celui avec observateur.

Les modèles considérés sont également susceptibles d'être soumis à des perturbations externes. Ainsi, l'atténuation des perturbations est parmi les spécifications des performances qu'il faut prendre en considération. L'approche ainsi développée assure la stabilité de la structure de commande, l'atténuation des perturbations, la robustesse vis-à-vis des incertitudes de modélisation et la mise sous forme LMI des résultats obtenus. Enfin, des résultats de simulation de l'application de cette loi de commande illustreront les performances obtenues dans le cas d'un suivi de consigne en couple moteur.

Chapitre I :

Moteurs thermiques à allumage commandé

Chapitre I : Moteurs thermiques à allumage commandé

I.1 Introduction

Parce qu'il est une des causes du réchauffement planétaire, la concentration en dioxyde de carbone (CO_2) dans l'air constitue depuis une décennie l'une des préoccupations majeures des chercheurs. Les différents modes de transport représentant près du quart des émissions de CO_2 , les constructeurs automobiles ont alors conclu des accords volontaires par lesquels ils s'engagent sur l'ensemble de leur parc à réduire les émissions de CO_2 et donc la consommation de carburant. L'association des Constructeurs Européens d'Automobiles (ACEA) s'est engagée vis-à-vis de la commission européenne à réduire le taux d'émission de CO_2 des véhicules automobiles individuels en 2008 à 140g/km et en 2012 à 120g/km [COL06]. Outre le dioxyde de carbone, trois émissions néfastes doivent être limitées : le monoxyde de carbone (CO), les hydrocarbures (HC) et les oxydes d'azote (NO_x).

Depuis plusieurs années, il a donc fallu optimiser le fonctionnement des moteurs pour minimiser les émissions polluantes et assurer au conducteur un compromis entre le confort ou l'agrément de conduite, les performances et la consommation de carburant. Cette optimisation a conduit à une augmentation du nombre d'organes de commande sur le moteur à essence : bougie d'allumage, injecteurs, papillon motorisé, turbocompresseur pilotable..., aboutissant ainsi à un plus grand nombre de degrés de liberté. L'implémentation systématique d'un calculateur dans un véhicule date de 1992 pour les moteurs essence. Pour les véhicules diesel, seules les dernières générations de moteurs possédant un système «common rail» en sont

équipées. Avec l'augmentation du nombre d'actionneurs d'une part et l'avènement de l'électronique et l'informatique embarquée d'autre part, de nouvelles possibilités ont vu le jour. L'automatique a un rôle majeur à jouer dans la commande et le contrôle des motorisations.

Ce chapitre présente tout d'abord le fonctionnement du moteur à allumage commandé. Ensuite, le *downsizing* (la réduction de la cylindrée des moteurs), un concept permettant de réduire la consommation et les émissions de CO_2 , est détaillé. Enfin, ce chapitre présente la modélisation du circuit d'air des moteurs thermiques à allumage commandé.

I.2 Généralités sur les moteurs thermiques à allumage commandé

Par définition, un moteur thermique à allumage commandé est un moteur alternatif à combustion interne permettant de produire un travail mécanique, sous forme de rotation du vilebrequin, à partir de la combustion d'un mélange carburé (air-essence) à l'intérieur d'un cylindre, dans lequel se déplace un piston en mouvement alternatif (figure I.1). Les deux limites extrêmes du mouvement sont appelées respectivement point mort haut (PMH) et point mort bas (PMB). Le volume balayé par ce déplacement de piston est la cylindrée unitaire du moteur.

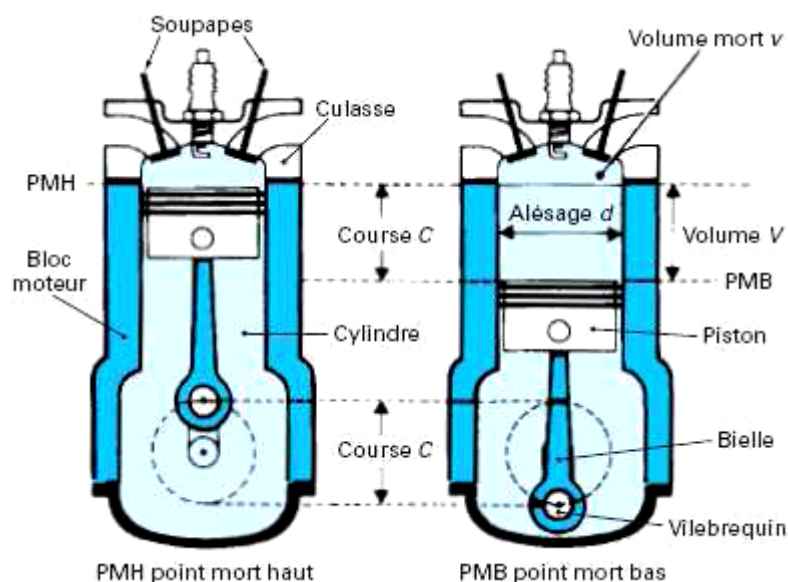


Figure I.1. Moteur thermique à allumage commandé [W1]

Les variantes essentielles dans les moteurs thermiques à allumage commandé résident dans son cycle de fonctionnement (deux temps ou quatre temps) ainsi que ses modes d'alimentation et de combustion. En effet, le mélange carburé est réalisé, soit avant son introduction dans les cylindres (injection indirecte) soit dans les cylindres (injection directe). Dans le cadre de ce travail, on s'intéressera principalement au moteur thermique 4-temps à allumage commandé à injection indirecte. La figure I.2 montre les quatre temps d'un cycle de fonctionnement de ce type de moteur. Ce cycle se déroule pendant 720° vilebrequin ($^\circ\text{V}$), c'est-à-dire pendant deux tours.

1^{er} temps : Admission ($0^\circ\text{V} < \theta < 180^\circ\text{V}$)

La phase d'admission se produit alors que le piston descend du PMH au PMB, créant ainsi une dépression dans le cylindre. Les pertes de charges sur le circuit d'admission (papillon, soupape...) empêche le remplissage théorique des cylindres de ce réaliser complètement.

2^{eme} temps : Compression ($180^\circ\text{V} < \theta < 360^\circ\text{V}$)

Les soupapes étant fermées, le piston remonte vers le PMH en comprimant la masse gazeuse enfermée. La pression dans le cylindre croît et, sans combustion, elle atteindrait 10 à 20 bar au PMH, selon le rapport volumétrique. L'allumage intervient quelques instants avant le PMH, afin de prendre en compte le délai nécessaire au développement de la combustion.

3^{eme} temps : Combustion ($360^\circ\text{V} < \theta < 540^\circ\text{V}$)

La combustion se développe et la pression croît rapidement pour arriver normalement à son maximum une dizaine de degré après le PMH, atteignant des valeurs supérieures à 90 bar à pleine charge. Le piston descend ensuite vers le PMB, la pression des gaz décroît en même temps que du travail est fourni au piston.

4^{eme} temps : Echappement ($540^\circ\text{V} < \theta < 720^\circ\text{V}$)

La soupape d'échappement s'ouvre lorsque le piston atteint le PMB, les gaz de combustion s'évacuent, au début sous l'effet de leur propre pression, puis sous la poussée du piston qui remonte.

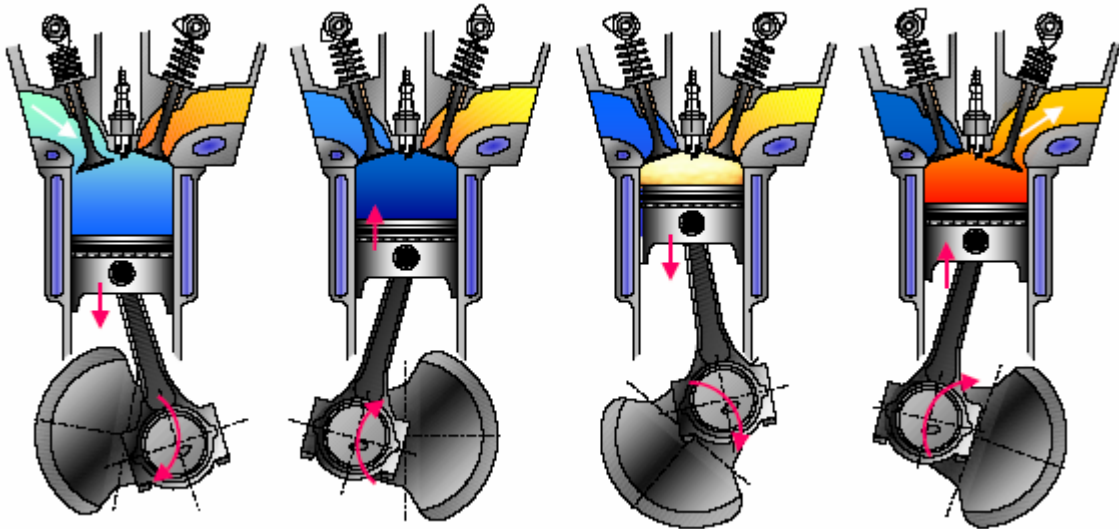


Figure I.2 : Cycle à 4-temps d'un moteur à allumage commandé [COL06]

L'admission d'essence de ces moteurs est réalisée, de plus en plus, par des injecteurs à commande électronique. Quant à l'admission d'air, elle est modulée par une vanne papillon motorisée, placée en général à l'entrée de la conduite d'admission. Le travail produit par le moteur est alors directement lié au remplissage des cylindres en air, d'où l'utilité d'un ajout de système de suralimentation pour améliorer les performances du moteur.

I.3 Principe du downsizing

Le *downsizing*, littéralement la réduction de la cylindrée des moteurs, est l'un des concepts les plus prometteurs pour diminuer la consommation et les émissions en particulier de CO_2 . Le principe du downsizing réside dans le déplacement des points de fonctionnement moteur vers des zones à meilleur rendement. Il peut être réalisé à l'aide d'une suralimentation en air, basée dans la majorité des cas, sur l'ajout d'un turbocompresseur au circuit d'air classique (figure I.3).

La figure I.4 [COL06] illustre l'effet du downsizing sur la consommation spécifique (g/kWh) en fonction du point de fonctionnement moteur. Ce dernier est souvent défini en fonction du régime (tr/min) et de la charge (PME, en bar) du moteur. Pour un moteur conventionnel atmosphérique (figure I.4 (a)), les points de meilleur rendement se situent à pleine charge (zone claire), alors que pour un moteur typé downsizing (figure I.4 (b)), les points de meilleur rendement se situent plutôt à mi-charge. Comme la plupart des conditions

de conduite sont à moyenne voire basse charge, le downsizing permet d'obtenir un gain significatif sur la consommation.

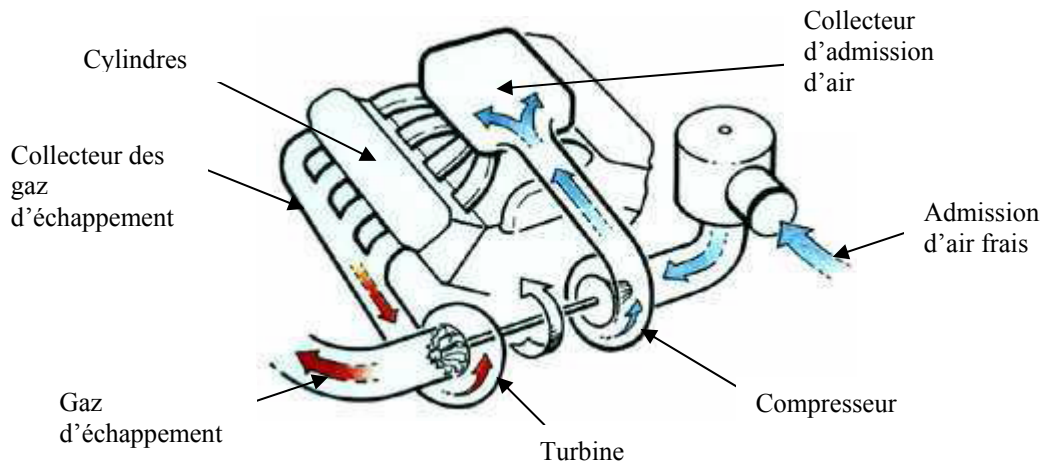
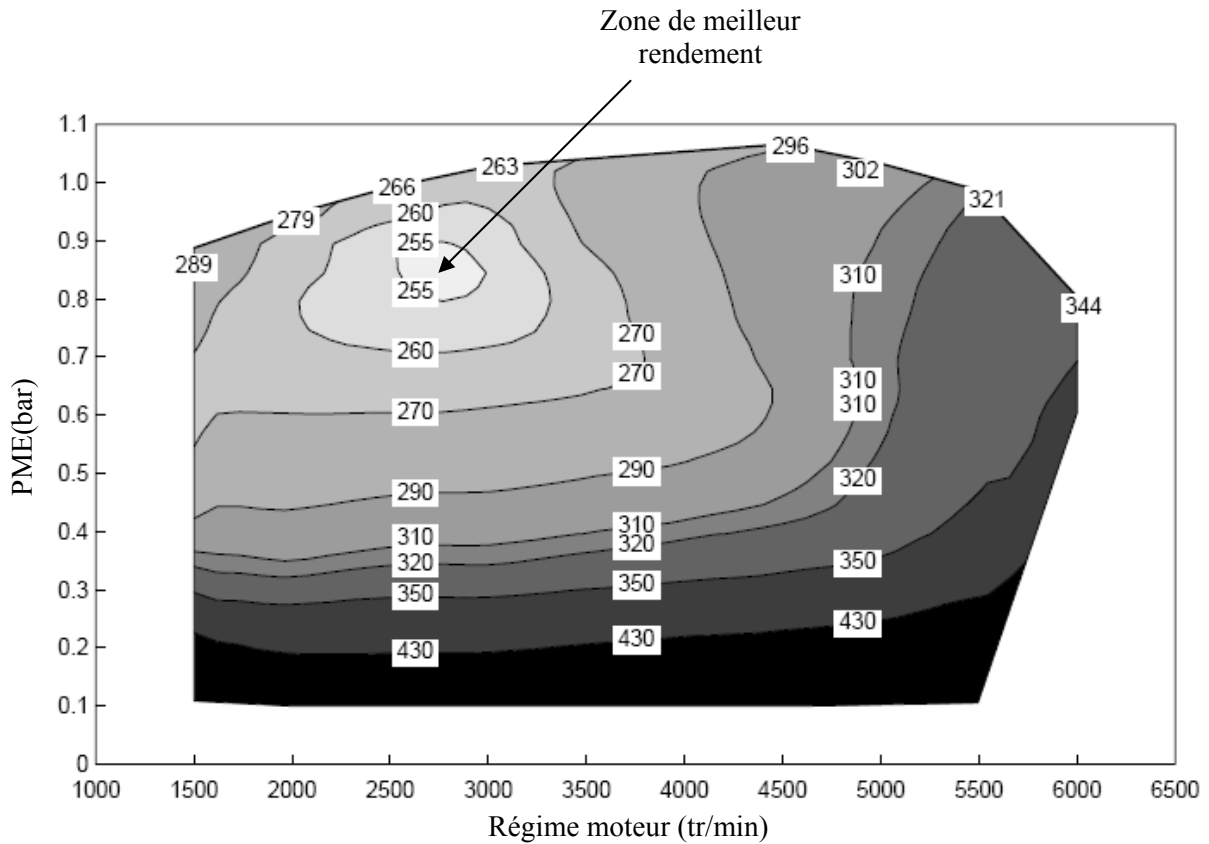
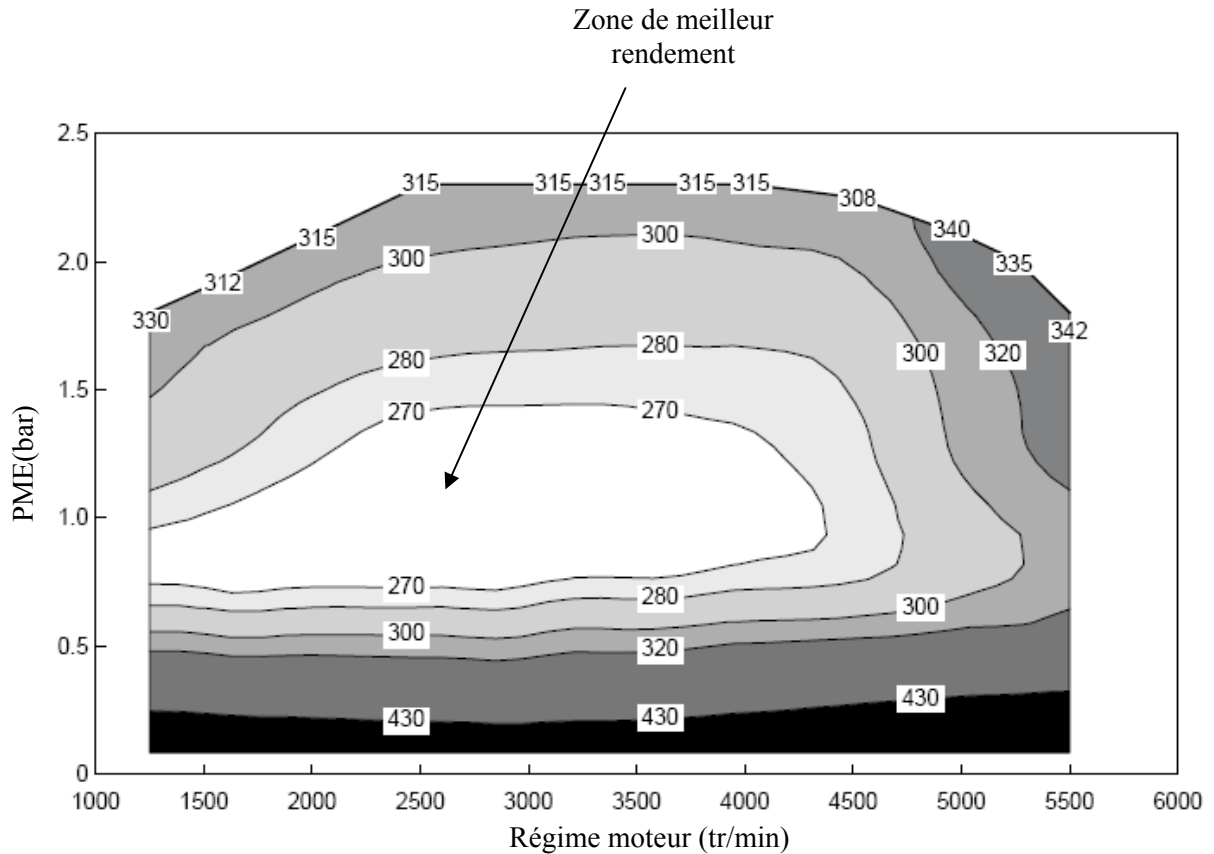


Figure I.3 : Suralimentation des moteurs thermiques

Pendant ces phases et pour les moteurs à allumage commandé atmosphériques, le rendement moteur est médiocre notamment à cause des pertes par pompage, d'où le recour à la réduction de la cylindrée et la suralimentation.



(a) Moteur conventionnel (atmosphérique)



(b) Moteur typé *downsizing*

Figure I.4 : Consommation spécifique effective (g/kWh) d'un moteur thermique en fonction du régime moteur (tr/min) et de la Pression Moyenne Effective (bar) [COL06]

I.3.1 La suralimentation

Le turbocompresseur permet de récupérer une partie de l'énergie perdue à l'échappement (gaz d'échappement) et de l'a réinjecter à l'admission. Cette opération est réalisée à l'aide d'une turbine placée à la sortie du collecteur d'échappement qui entraîne un compresseur monté en amont du papillon d'admission d'air frais. La figure I.5 représente un schéma fonctionnel d'un moteur thermique à allumage commandé turbocompressé [ERI02a], [FRE04], [COL06], [KHI07].

Avec la rotation du turbocompresseur, la pression dans le collecteur d'admission peut atteindre des valeurs supérieures à la pression atmosphérique (figure I.6). Par conséquent la charge en air admissible par les cylindres est augmentée.

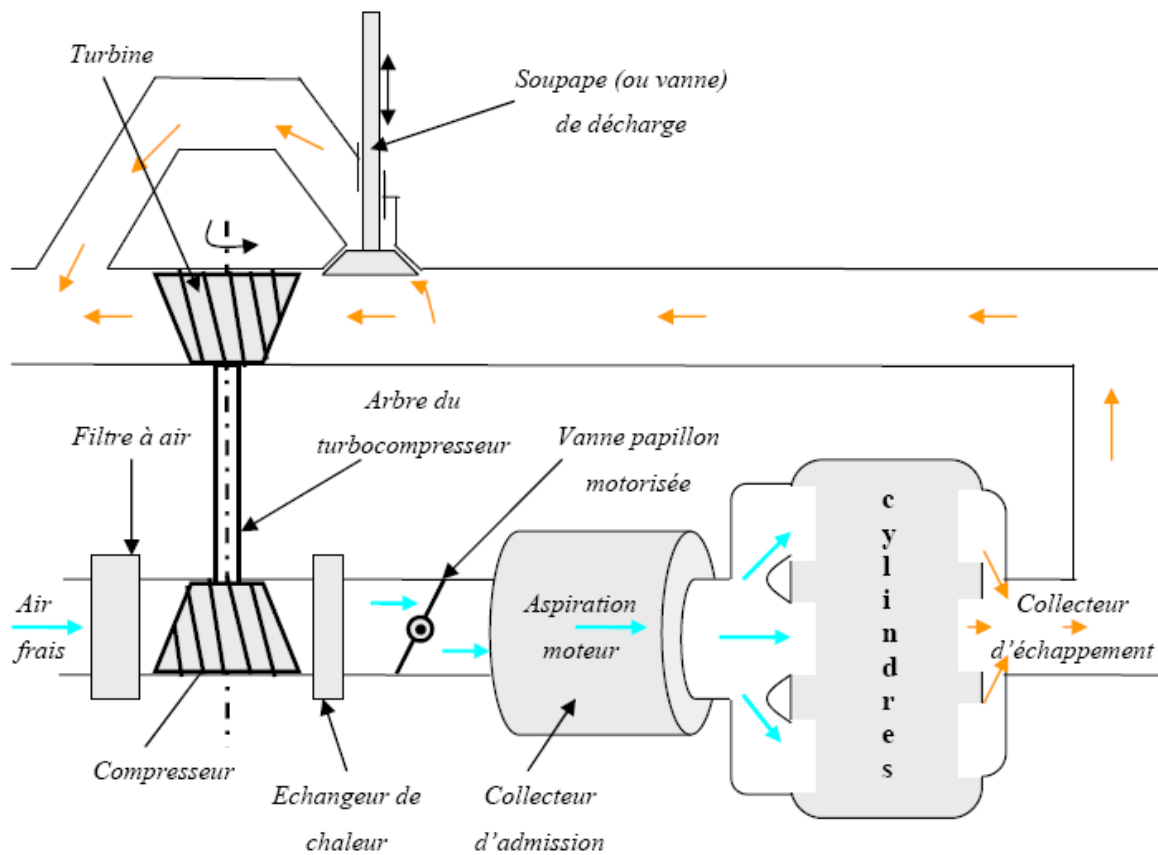


Figure I.5 : Principe de la suralimentation à base d'un turbocompresseur [KHI07]

La suralimentation est alors vue comme un système qui présente un effet d'une augmentation fictive de la cylindrée du moteur sans augmentation des pertes par frottement et par pompage (travail nécessaire pour remplir le moteur de mélange frais), ce qui permet d'accroître la puissance du moteur et de réduire sa consommation.

La figure I.6 montre comment évolue la pression dans le collecteur d'admission d'un moteur thermique turbocompressé. L'amorçage ainsi que la dynamique, relativement lente du turbocompresseur (de l'ordre de la seconde par rapport à la dynamique de la vanne papillon motorisée qui est de l'ordre de quelques dizaines de millisecondes) sont les principaux inconvénients de ce système de suralimentation.

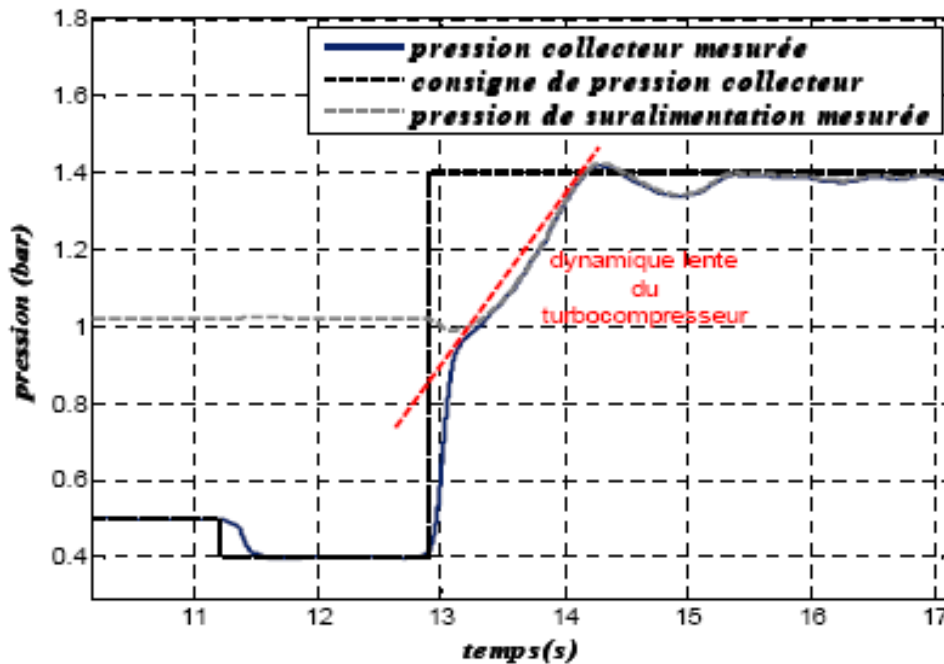


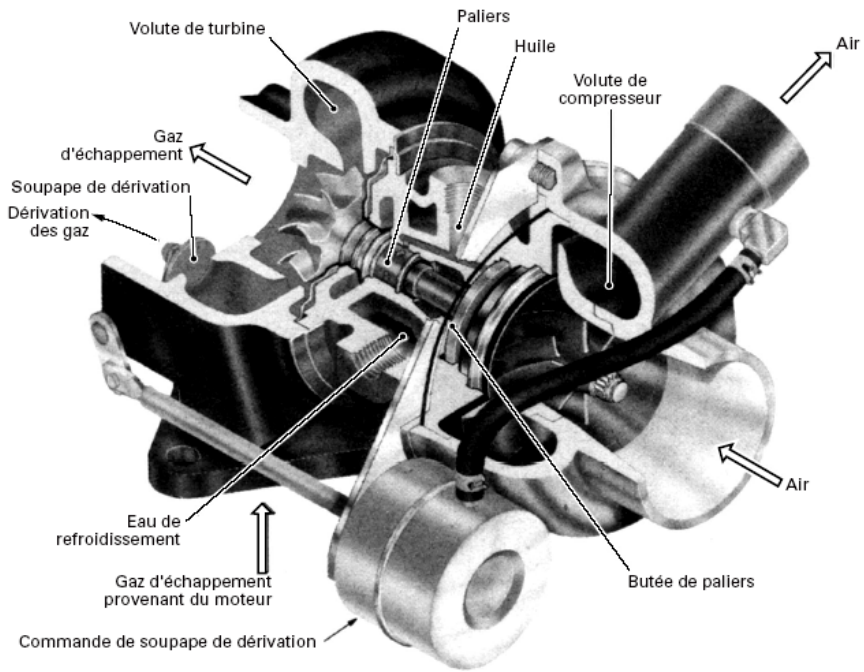
Figure I.6 : Dynamique de la pression d’admission d’un moteur suralimenté par turbocompresseur [KHI07]

I.3.2 Commande des turbocompresseurs

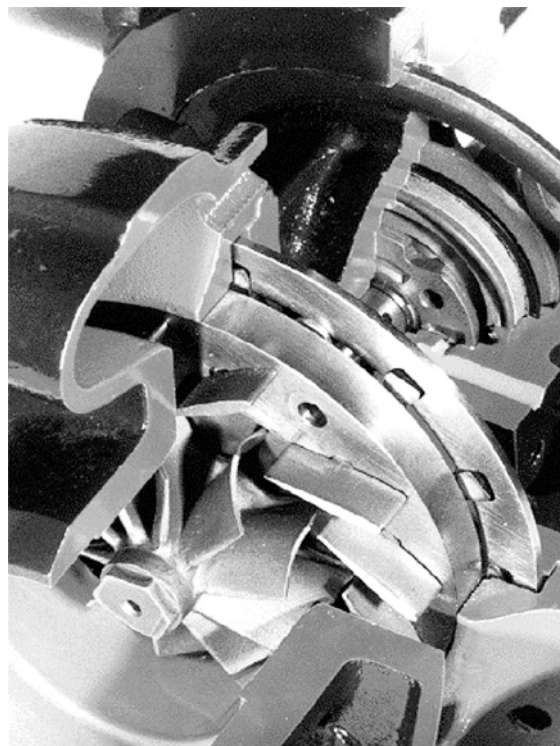
A fin de réduire le temps de réponse du turbocompresseur, les actionneurs les plus utilisés sont la vanne de décharge ou *wastegate* permettant la dérivation d’une partie des gaz d’échappement (figure I.7 (a)) et la turbine à géométrie variable qui adapte les caractéristiques du turbocompresseur à chaque point de fonctionnement de turbine (figure I.7 (b)).

L’action principale de ces actionneurs consiste à agir sur les variations du débit des gaz d’échappement traversant la turbine pour moduler sa vitesse de rotation.

Dans le cas particulier des moteurs thermiques à allumage commandé, il est nécessaire de limiter l’amplitude de la pression dans le collecteur d’admission afin d’éviter l’apparition de cliquetis (phénomènes d’auto-allumage du mélange résiduel dans les cylindres et qui induit des détonations incontrôlées pouvant endommager rapidement le moteur (figure I.8)).



(a) Turbocompresseur avec soupape de décharge



(b) Turbine à géométrie variable

Figure I.7 : Turbocompresseur et différents systèmes de pilotage [W1]

De plus, l'élévation de la température causée par la vitesse de rotation excessivement grande de la turbine peut réduire la durée de vie du système de suralimentation. Ces deux phénomènes sont à prendre en compte lors de l'élaboration des lois de commande de l'admission d'air du moteur.

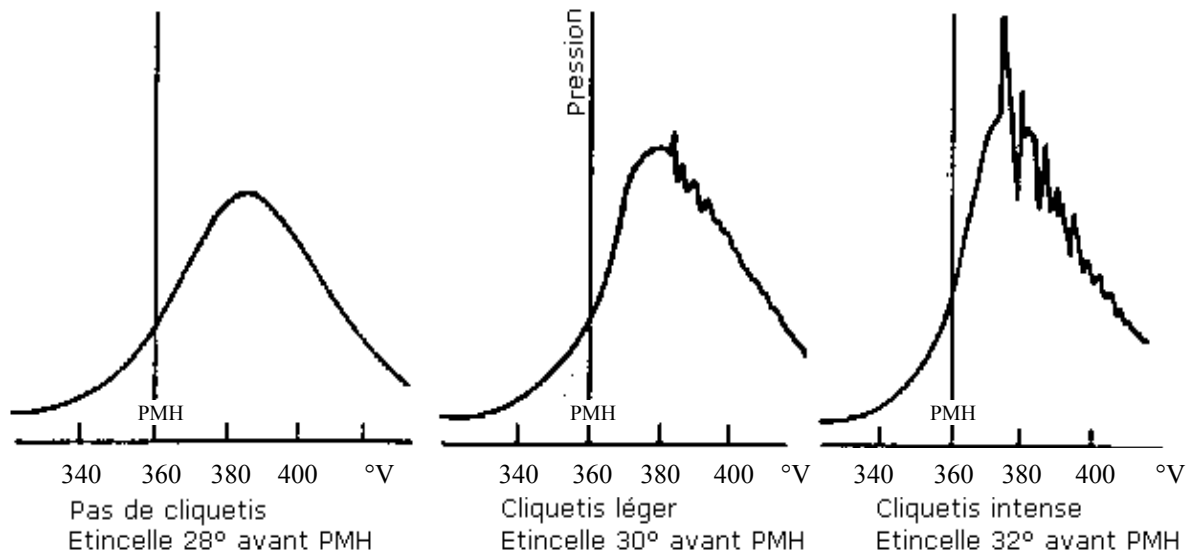


Figure I.8 : Diagramme de pression avec cliquetis [W1]

I.4 Modélisation du circuit d'air des moteurs thermiques à allumage commandé

Le fonctionnement des moteurs thermiques à allumage commandé est régi par des dynamiques et phénomènes très variés (thermodynamique, mécanique, chimique,...), non linéaires et faisant intervenir une multitude de paramètres et d'organes de réglage.

Le choix du type de modèle, de sa structure, de son architecture et de sa complexité dépend des objectifs fixés (étude des phénomènes physiques, simulation, conception du contrôle, contrôle temps réel, estimation, observation, diagnostic,...) et des contraintes imposées (nature du système considéré, temps de développement, outils,...). Dans le cadre général du contrôle moteur (simulation, conception, implantation, mise au point), les modèles choisis se limitent aux modèles dits 'orientés commande' [HEN97], [ERI02a], [FRE04] basés sur la description, en valeur moyenne, des variables du moteur afin de réduire leur

complexité. Ces derniers décrivent les variations de variables d'état considérées en valeur moyenne, calculées sur un ou plusieurs cycles de fonctionnement. L'architecture des modèles moteurs utilisés est détaillée à la figure I.9, elle est découpée en plusieurs sous-modèles décrivant les relations régissant le comportement des composantes physiques du moteur. Dans le cas d'un moteur suralimenté, ce découpage fonctionnel représente respectivement : l'admission d'air, l'admission d'essence, la combustion, la dynamique du vilebrequin, les dynamiques des gaz d'échappement (pression, température,...) et la dynamique du turbocompresseur.

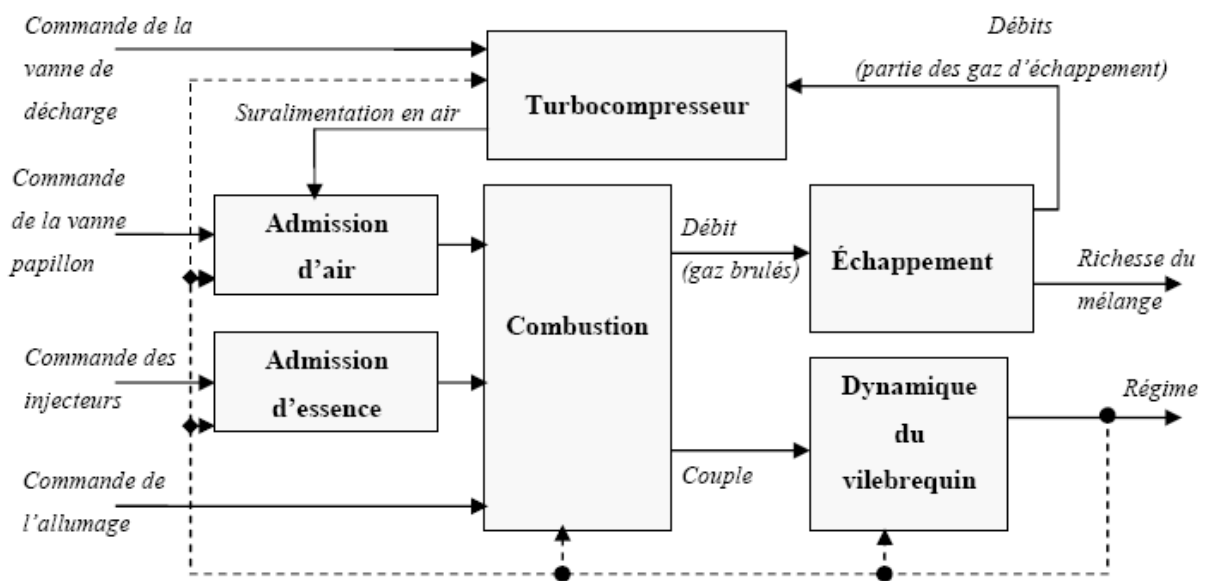


Figure I.9 : Représentation fonctionnelle d'un moteur thermique avec suralimentation en air

Dans la suite, les modèles utilisés pour l'admission d'air, le turbocompresseur et la dynamique du vilebrequin sont détaillés.

I.4.1 Modèle de l'admission d'air

La grandeur caractéristique qui est généralement considérée pour représenter l'admission d'air dans un moteur est la pression dans le collecteur d'admission p_{col} . En effet, la masse d'air admise dans le cylindre est fonction de la pression p_{col} .

La dynamique de l'air dans le collecteur peut être décrite par le modèle de remplissage-vidage qui exprime le bilan de masse d'air dans la pipe d'admission (figure I.10).

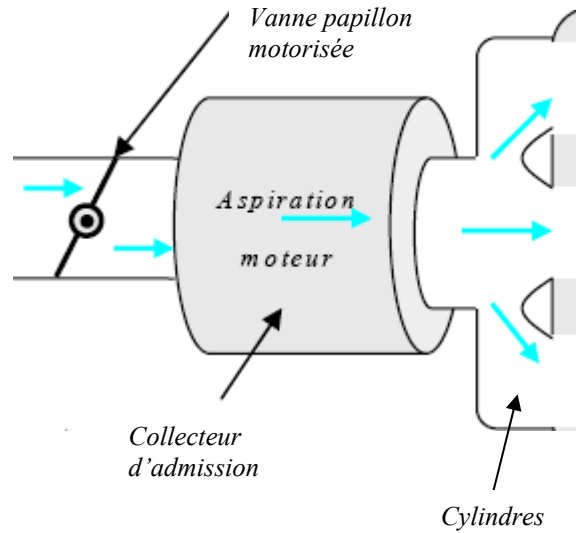


Figure I.10 : schéma du collecteur d'admission

Le collecteur étant supposé indéformable, son volume est constant, la relation des gaz parfaits permet d'obtenir la pression p_{col} :

$$p_{col} = \frac{R T_{col} m_{col}}{V_{col}} \quad (I.1)$$

où T_{col} et m_{col} sont respectivement la température et la masse des gaz dans le collecteur d'admission, R la constante des gaz parfaits et V_{col} le volume fixé du collecteur.

En dérivant (I.1) et en considérant une température constante (ou à variation lente) dans le collecteur d'admission, il vient :

$$\dot{p}_{col} = \frac{R T_{col} \frac{dm_{col}}{dt}}{V_{col}} = \frac{R T_{col}}{V_{col}} (\dot{m}_{pap} - \dot{m}_{cyl}) \quad (I.2)$$

où, $\dot{m}_{cyl} = \sum_{i=1}^{n_{cyl}} \dot{m}_{cyl_i}$ est le débit massique d'air admis dans les cylindres avec n_{cyl} le nombre de cylindres et \dot{m}_{pap} le débit massique d'air au papillon.

La modélisation des éléments qui se trouvent en amont de la vanne papillon motorisée (filtre à air, échangeur de chaleur) n'est pas prise en compte, ainsi que la dynamique de la température dans le collecteur d'admission. Par hypothèse, cette température est supposée maintenue constante par l'échangeur de chaleur.

I.4.1.1 Débit d'air admis dans les cylindres \dot{m}_{cyl}

L'augmentation du rendement pour un moteur thermique dépend principalement du remplissage en air des cylindres qui conditionne l'injection d'essence. Ce débit d'air entrant dans les cylindres n'étant pas mesurable. La solution est alors d'estimer la masse d'air admise dans les cylindres à chaque cycle de fonctionnement du moteur à partir des variables disponibles à la mesure. La représentation utilisée est celle définie dans [AND01], [AND05], [KHI07] et se met sous la forme :

$$\dot{m}_{cyl}(N_e, p_{col}) = \frac{V_{cyl}}{120 R T_{col}} (s_1(N_e) p_{col} + s_2(N_e)) N_e \quad (I.3)$$

où V_{cyl} est la cylindrée totale du moteur, N_e est le régime moyen du moteur en tours par minute, $s_1(N_e)$ et $s_2(N_e)$ sont des fonctions du régime qui peuvent être considérées constantes, suivant la précision désirée. Dans [KHI07], $s_1 = 0,0281$ et $s_2 = -1,6208$.

Cette forme de modèle est souvent utilisée pour la prédiction de la charge en air des cylindres afin d'effectuer une gestion fine de l'injection d'essence. Dans le cadre de ce travail, ce modèle est seulement utilisé dans la commande de l'admission d'air.

I.4.1.2 Débit d'air traversant la vanne papillon \dot{m}_{pap}

La vanne papillon joue un rôle majeur pour la régulation du régime moteur. En effet, la variation de l'angle d'ouverture papillon ϕ_{pap}° influe directement sur le débit de l'air \dot{m}_{pap} , et par conséquent sur le régime moteur.

Dans le cas où le débit traversant la vanne papillon est considéré comme un fluide compressible, il est possible de décrire la dynamique de ce dernier à partir des équations de Barré-St Venant [ERI02a], [LAU03], [FRE04], [COL06]:

$$\dot{m}_{pap} = C_d \frac{p_{am_pap}}{\sqrt{R T_{am_pap}}} S_{ré}(\phi_{pap}^\circ) g(p_r) \quad (I.4)$$

avec C_d le coefficient de perte de charge, p_{am_pap} et T_{am_pap} sont respectivement la pression et la température en amont de la vanne papillon, R est la constante des gaz parfaits,

ϕ_{pap}° est l'angle d'ouverture de la vanne papillon, $S_{ré}(\phi_{pap}^\circ)$ est la section réelle d'ouverture de cette vanne et p_r le rapport entre la pression dans le collecteur d'admission p_{col} est la pression en amont de la vanne papillon p_{am_pap} . L'hypothèse d'un écoulement unidirectionnel consiste à satisfaire la condition (I.5) suivante :

$$\begin{cases} p_r = \frac{P_{col}}{P_{am_pap}} & si \quad \frac{P_{col}}{P_{am_pap}} < 1 \\ p_r \approx 1 & si \quad \frac{P_{col}}{P_{am_pap}} \geq 1 \end{cases} \quad (I.5)$$

Le coefficient de perte de charge C_d est un paramètre qui dépend principalement de l'angle d'ouverture de la vanne papillon. Pour réduire la complexité, ce coefficient est regroupé dans une seule fonction $S_{eff}(\phi_{pap}^\circ)$ avec la section d'ouverture réelle de la vanne papillon $S_{ré}(\phi_{pap}^\circ)$:

$$S_{eff}(\phi_{pap}^\circ) = C_d S_{ré}(\phi_{pap}^\circ) \quad (I.6)$$

Plusieurs approximations existent pour avoir une relation simple qui modélise au mieux cette surface [ERI02a], [AND01], [KHI07].

L'approximation qui est présenté est décrite dans [KHI07] et prend la forme suivante :

$$S_{eff}(\phi_{pap}^\circ) = a_1 \left(\cos(a_2 \phi_{pap}^\circ + a_3) \right) + a_4 \quad (I.7)$$

avec $a_1 = 0,0005$, $a_2 = 2,4468$, $a_3 = 0,0251$ et $a_4 = 0,0001$ des paramètres constants identifiés.

La fonction non linéaire continue $g(p_r)$ est définie par les équations de Barré-St Venant [ERI02a], [LAU03], [FRE04], [COL06] comme suit :

$$g(p_r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} (p_r)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\left(1 - (p_r)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}, & si \quad p_r > \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, & si \quad p_r \leq \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{cases} \quad (I.8)$$

Le paramètre γ est le rapport entre la chaleur spécifique à volume constant et la chaleur spécifique à pression constante (pour l'air, $\gamma = 1,4$).

I.4.2 Modèle du turbocompresseur

Dans un moteur suralimenté par turbocompresseur, la masse volumique de l'air d'admission est augmentée du fait de la compression de l'air dans le compresseur, cela permet d'augmenter de manière importante la pression moyenne effective (PME) et par conséquent, le couple et la puissance du moteur. Cependant, la limitation de l'élévation de la pression dans le collecteur d'admission est nécessaire pour éviter l'apparition du phénomène de cliquetis.

Le turbocompresseur étant l'assemblage de deux machines, la turbine et le compresseur, sa modélisation passe naturellement par la construction de trois modèles : le compresseur, la turbine et l'axe turbo qui assure le couplage.

I.4.2.1 Dynamique du turbocompresseur

L'axe turbo, reliant la turbine et le compresseur, est modélisé par l'équation fondamentale de la dynamique, régissant la vitesse de rotation du turbo ω_{turb} :

$$I_{turb} \omega_{turb} \dot{\omega}_{turb} = P_{turb} - P_{comp} - P_{frot} \quad (I.9)$$

où P_{turb} , P_{comp} et P_{frot} sont respectivement la puissance de la turbine, du compresseur et de frottement, et I_{turb} l'inertie du turbocompresseur. En règle générale, les frottements sont négligés ($P_{frot} \approx 0$).

I.4.2.2 Modèle du compresseur

Deux équations physiques régissent le compresseur [W1]. La première permet de calculer la puissance P_{comp} consommée par le compresseur :

$$P_{comp} = \frac{\dot{m}_{comp} c_p T_{amb}}{\eta_{comp}} \left(\left(\frac{P_{int}}{P_{amb}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \quad (I.10)$$

et la seconde le rendement η_{comp} :

$$\eta_{comp} = \frac{\left(\frac{p_{int}}{p_{amb}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\frac{T_{comp}}{T_{amb}} - 1} \quad (I.11)$$

où \dot{m}_{comp} est le débit d'air traversant le compresseur, T_{amb} et T_{comp} les températures respectivement ambiante et après compresseur, p_{amb} et p_{int} les pressions respectivement ambiante et suralimentation (après compresseur), c_p le coefficient de chaleur massique à pression constante et γ le rapport des chaleurs massiques à pression et volume constants.

L'association de ces deux équations et des caractéristiques des compresseurs, appelées *cartographies*, permet de modéliser complètement la partie compresseur. Ces cartographies (figure I.11), construites à partir d'essais expérimentaux, sont données par le constructeur. Relativement pauvres en nombre de points, elles expriment le rendement η_{comp} et la vitesse de rotation ω_{turb} en fonction du rapport de pression $\frac{p_{int}}{p_{amb}}$ et du débit massique \dot{m}_{comp} .

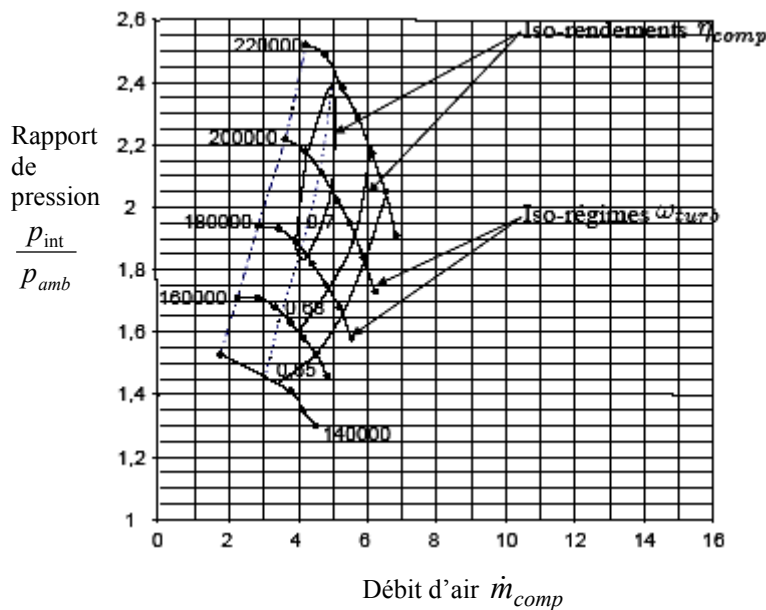


Figure I.11 : Exemple de cartographie de compresseur [COL06]

I.4.2.3 Modèle de la turbine

Comme pour le compresseur, deux relations thermodynamiques régissent la turbine. La première équation permet de calculer la puissance P_{turb} fournie par la turbine :

$$P_{turb} = \dot{m}_{turb} c_p T_{ech} \eta_{turb} \left(1 - \left(\frac{p_t}{p_{ech}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \quad (I.12)$$

et la deuxième équation le rendement η_{turb} :

$$\eta_{turb} = \frac{1 - \frac{T_{turb}}{T_{ech}}}{1 - \left(\frac{p_t}{p_{ech}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad (I.13)$$

où \dot{m}_{turb} est le débit de la turbine, T_{ech} et T_{turb} les températures respectivement à l'échappement et après turbine, p_{ech} et p_t les pression respectivement à l'échappement et après turbine (en aval de la turbine).

L'association de ces deux équations et des caractéristiques des turbines, appelées *cartographies*, permet de modéliser complètement la partie turbine. Ces cartographies (figure I.12), obtenues à partir d'essais expérimentaux, sont données par le constructeur, elles donnent le rendement η_{turb} et le débit massique \dot{m}_{turb} en fonction du rapport de pression

$\frac{p_t}{p_{ech}}$ et de la vitesse de rotation ω_{turb} .

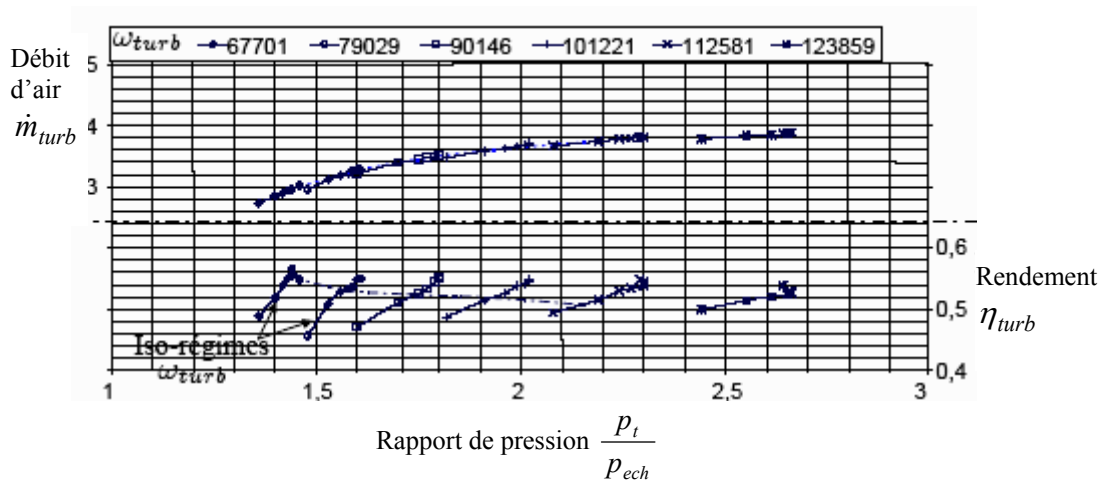


Figure I.12 : Exemple de cartographie de la turbine [COL06]

Cependant, il existe certains modèles statiques qui permettent d'obtenir une approximation assez fiable des données de ces cartographies. Ces modèles peuvent aussi être identifiés à partir des données expérimentales issues d'un banc d'essais moteur.

L'objectif est de modéliser l'effet des variations de la vanne de décharge sur la dynamique du turbocompresseur et par conséquent sur la pression de suralimentation. La structure utilisée pour approximer la dynamique de la pression de suralimentation est définie dans [KHI07], et se met sous la forme :

$$\dot{p}_{int} = \frac{1}{\tau_{comp}} \left(-p_{int} + f(N_e, \phi_{c_wg}, \phi_{pap}, p_{col}) \right) \quad (I.14)$$

avec :

$$f(N_e, \phi_{c_wg}, \phi_{pap}, p_{col}) = \begin{cases} \alpha_1 N_e + \alpha_2 N_e \phi_{c_wg} + \alpha_3 \phi_{pap} + \alpha_4 p_{col} & \text{si } p_{col} > p_{amb} \\ \alpha_5 & \text{si } p_{col} \leq p_{amb} \end{cases} \quad (I.15)$$

où N_e est la vitesse de rotation du vilebrequin en tr/min , p_{col} la pression dans le collecteur d'admission en Pa , ϕ_{pap} l'angle d'ouverture de la vanne papillon en %, ϕ_{c_wg} la commande de fermeture de la vanne de décharge en %, τ_{comp} la constante de temps en seconde et $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ des paramètres constants à estimer.

I.4.3 Modèle de la dynamique du vilebrequin

Le schéma de la figure I.13 représente l'ensemble piston/bielle/manivelle en mouvement dans chaque cylindre d'un moteur à allumage commandé qui permet d'obtenir la rotation du vilebrequin à partir de la translation des pistons. Ces mouvements de translation proviennent de la combustion d'un mélange air/carburant mis sous pression dans les cylindres.

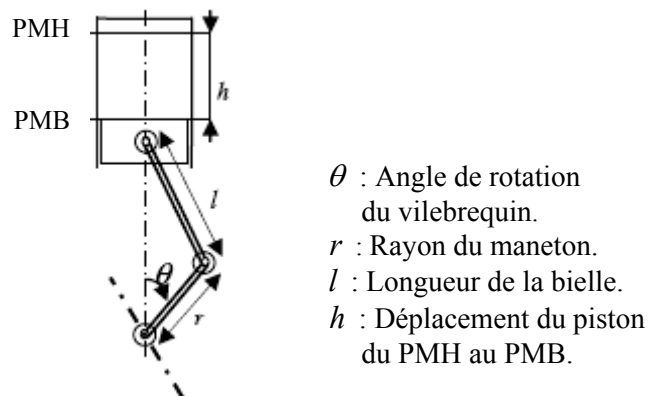


Figure I.13 : schéma synoptique du mouvement de rotation du vilebrequin

En utilisant le principe fondamental de la dynamique, l'équation classique obtenue pour les mouvements de rotation donne une relation entre le couple moteur C_m et l'accélération angulaire du vilebrequin $\ddot{\theta}$:

$$I_m(\theta) \ddot{\theta} = C_m - C_r \quad (\text{I.16})$$

C_r représente le couple résistant du moteur, et $I_m(\theta)$ le moment d'inertie de l'arbre moteur. Il est formulé par une relation comportant la somme d'un terme constant et d'une partie variable [LAU03] :

$$I_m(\theta) = I_{eq} + M_{eq} r^2 f(\theta)^2 \quad (\text{I.17})$$

où I_{eq} est le moment d'inertie équivalent des masses rotatives, M_{eq} la masse équivalente des masses alternatives, r est le rayon du vilebrequin, θ est l'angle de rotation du vilebrequin et $f(\theta)$ une fonction donnée par la formule (I.18) :

$$f(\theta) = \sin(\theta) + \frac{\frac{r}{l} \sin(2\theta)}{2\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2(\theta)}} \quad (\text{I.18})$$

avec l la longueur de la bielle.

Le couple moteur instantané pour un moteur à quatre cylindres peut être obtenu en utilisant les formules théoriques liant le couple aux forces de pression appliquées sur les pistons dans les chambres de combustion [LAU03] :

$$C_m = \sum_{i=1}^4 a_{1_i}(\theta) p_{cyl_i}(\theta) + a_2(\theta, \dot{\theta}) \quad (\text{I.19})$$

avec $p_{cyl_i}(\theta)$ la pression dans le cylindre i . Le couple moyen est alors obtenu à partir de la moyenne glissante du couple instantané sur un ou plusieurs cycle moteur.

Le couple résistant C_r , englobe le couple des frottements C_f , le couple des masses en oscillation C_{osc} et le couple de charge C_{ch} .

$$C_r = C_f + C_{osc} + C_{ch} \quad (I.20)$$

La grandeur la plus souvent utilisée pour réaliser des lois de commande est le couple moteur effectif C_{eff} qui correspond à :

$$C_{eff} = C_m - C_f - C_{osc} \quad (I.21)$$

Le couple moteur effectif C_{eff} peut aussi être décrit par des formules issues de l'expérimentation comme dans [LAU03] avec la relation (I.22):

$$C_{eff} = \beta_1 \bar{m}_{af} + \beta_2 \bar{m}_{af} (\lambda_i - 1) + \beta_3 \bar{m}_{af} (\lambda_i - 1)^2 + \beta_4 + \beta_5 \dot{\theta} + \beta_6 \dot{\theta}^2 \quad (I.22)$$

où \bar{m}_{af} est la masse d'air moyenne emprisonnée dans les cylindres durant l'admission, et $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ et β_6 des coefficients constants à estimer. $\dot{\theta}$ est la vitesse instantanée de rotation du moteur et λ est la richesse du mélange carburé.

Ou avec la relation (I.23) :

$$C_{eff} = \gamma_1 + \gamma_2 \dot{m}_{cyl} + \gamma_3 \lambda + \gamma_4 \lambda^2 + \gamma_5 \delta_{av} + \gamma_6 \delta_{av}^2 + \gamma_7 \dot{\theta} + \gamma_8 \dot{\theta}^2 + \gamma_9 \dot{\theta} \delta_{av} + \gamma_{10} \delta_{av} \dot{m}_{cyl} + \gamma_{11} \delta_{av}^2 \dot{m}_{cyl} + \gamma_{12} \delta_{av} \dot{m}_{egr} \quad (I.23)$$

où δ_{av} est l'angle d'avance à l'allumage, \dot{m}_{cyl} et \dot{m}_{egr} les débits respectivement cylindres et d'EGR (Exhaust Gaz Recirculation) et $\gamma_1, \dots, \gamma_{12}$ sont des paramètres constants à estimer.

Ou encore dans [KHI07] avec l'expression (I.24) suivante :

$$C_{eff} = \sigma_1 + \sigma_2 p_{col} + \sigma_3 p_{col}^2 + \sigma_4 p_{col}^3 + \sigma_5 \lambda + \sigma_6 \lambda^2 + \sigma_7 \lambda p_{col} + \sigma_8 \lambda^2 p_{col} + \sigma_9 \lambda p_{col}^2 + \sigma_{10} N_e + \sigma_{11} N_e p_{col} + \sigma_{12} \lambda N_e p_{col} + \sigma_{13} \delta_{av} + \sigma_{14} \frac{\delta_{av}^2}{N_e} + \sigma_{15} \delta_{av} \lambda \quad (I.24)$$

où δ_{av} est l'angle d'avance à l'allumage en degré, N_e la vitesse de rotation du vilebrequin en tr/min , p_{col} la pression dans le collecteur d'admission en bar , λ la richesse du mélange air-essence mesurée à l'échappement et $\sigma_1, \dots, \sigma_{15}$ des paramètres constants à estimer.

I.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné des généralités sur les moteurs thermiques à allumage commandé ainsi que le principe de la réduction de la cylindrée (downsizing). Nous avons ensuite présenté la modélisation du circuit d'air des moteurs thermiques à allumage commandé dans ces deux versions atmosphérique et suralimenté. La modélisation a été axée sur des modèles dynamiques de l'admission d'air, du turbocompresseur et de la dynamique du vilebrequin.

La commande de la chaîne d'air du moteur thermique à allumage commandé turbocompressé est relativement complexe à cause de la multiplicité des actionneurs (commande de la vanne papillon et de la vanne de décharge). En effet, le système est fortement non linéaire, multivariable, à dynamique rapide et comporte des saturations d'actionneurs. En outre, les objectifs de la commande sont multiples : consommation, pollution et performance. Il est alors nécessaire de recourir à des techniques de commande avancées. Dans cette démarche, le chapitre suivant détail la méthode de commande utilisée.

Chapitre II :

Commande de l'admission d'air

Chapitre II : Commande de l'admission d'air

II.1 Introduction

La commande de l'admission d'air est un point crucial pour les moteurs thermiques à allumage commandé. En effet, la dynamique globale d'un moteur essence est de l'ordre de celle de l'admission d'air, par conséquent, elle doit être particulièrement soignée pour ne pas pénaliser les performances globales du moteur. Le moteur considéré est un moteur essence à injection indirecte avec turbocompresseur. Le principe du turbocompresseur consiste à récupérer une partie de l'énergie à l'échappement et de la réinjecter à l'admission. Cette opération permet d'augmenter la charge en air des cylindres et par conséquent la puissance et le couple du moteur.

Dans ce manuscrit, la modélisation utilisée pour le circuit d'admission d'air fait appel au formalisme flou de type Takagi-Sugeno (TS). Ainsi, une approche de commande non linéaire à base de modèle TS appliquée à la commande de l'admission d'air d'un moteur thermique à allumage commandé est traitée. Le cas classique de stabilité et de stabilisation de modèle TS est d'abord présenté. Il fait appel au formalisme des inégalités matricielles linéaires (LMI). Pour l'application considérée, la loi de commande qui assure le suivi de consigne des modèles TS est détaillée. Elle est basée sur un problème de minimisation selon un critère H_∞ . Ce type de commande est alors testé en simulation sur le modèle du circuit d'admission d'air du moteur thermique pour réaliser un suivi de consigne en pression collecteur. Dans un premier temps, afin d'assurer un suivi de consigne pour le cas sans suralimentation, puis un suivi de consigne est réalisé dans le cas où le turbocompresseur est utilisé.

II.2 Modèle flou de type TS

II.2.1 Définition des modèles TS

Les modèles Takagi-Sugeno (TS) sont composés d'un ensemble de modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires vérifiant la propriété de somme convexe (II.2) [TAK85]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) = 1 \quad (\text{II.2})$$

avec $0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1$, pour tout t .

$x(t) \in R^n$ représente le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ le vecteur des entrées et $y(t) \in R^p$ le vecteur des sorties. Les matrices $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times m}$, $C_i \in R^{p \times n}$, $i \in \{1, \dots, r\}$ représentent un ensemble de r modèles linéaires. Les fonctions d'activation $\mu_i(z(t))$ ont la propriété de somme convexe et sont fonctions d'un vecteur $z(t) \in R^z$ appelé vecteur des prémisses. Ce dernier peut être composé de variables d'état ou de fonctions de variables d'état.

II.2.2 Construction d'un modèle flou TS

Plusieurs méthodes existent pour obtenir un modèle flou TS. Une première méthode dite par identification, permet à partir des données sur les entrées et les sorties, d'identifier les paramètres du modèle local correspondant aux différents points de fonctionnement [TAK85], une deuxième méthode consiste à linéariser le modèle autour d'un ensemble de points de fonctionnement choisis judicieusement [TAN01] ; dans ce cas, il s'agit de modèles locaux affines pour lesquels le modèle flou est obtenu par interconnexion des modèles locaux avec des fonctions d'activation. La troisième méthode est adaptée pour les systèmes non linéaires de complexité modérée. Elle permet son obtention à partir d'un modèle mathématique non linéaire [TAN01]. Dans ce cas, le modèle TS représente de manière exacte le modèle non linéaire. Il ne s'agit pas d'une approximation (comme pourrait l'être la linéarisation autour de points de fonctionnement), le modèle TS obtenu est identique au modèle non linéaire dans un compact de l'espace des variables de prémisses.

La méthode qui permet de passer d'un modèle non linéaire affine en la commande à un modèle TS est appelée approche par secteur linéaire [TAN01].

Le passage d'un modèle, où $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ et $h(\cdot)$ sont des fonctions non linéaires :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t))x(t) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = h(x(t))x(t) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

à un modèle de type TS (II.1) est obtenu en suivant les démarches données ci-dessous.

On considère le modèle non linéaire (II.3) en supposant qu'il existe un compact des variables

de prémisses $z(t) \in c \subset R^z$ sur lequel les non linéarités sont bornées. Soient $nl_i(t) \in \left[\begin{matrix} \bar{nl}_i \\ \underline{nl}_i \end{matrix} \right]$

les bornes inf et sup des termes non linéaires, $i \in \{1, \dots, k\}$, on peut alors écrire dans $c \subset R^z$ [TAN01], [KRU06] :

$$nl_i(z_i(t)) = \bar{nl}_i w_0^i(z_i(t)) + \underline{nl}_i w_1^i(z_i(t)) \quad (\text{II.4})$$

avec :

$$\begin{cases} w_0^i(z_i(t)) = \frac{nl_i(z_i(t)) - \underline{nl}_i}{\bar{nl}_i - \underline{nl}_i} \\ w_1^i(z_i(t)) = \frac{\bar{nl}_i - nl_i(z_i(t))}{\bar{nl}_i - \underline{nl}_i} \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Notons de façon évidente qu'on a $w_0^i(z_i(t)) \geq 0$, $w_1^i(z_i(t)) \geq 0$ et $w_0^i(z_i(t)) + w_1^i(z_i(t)) = 1$. Les fonctions d'activation $\mu_i(z(t))$, $i \in \{1, \dots, r\}$ du modèle TS (II.1) se construisent alors directement à partir de :

$$\mu_{1+i_1+i_2 \times 2 + \dots + i_k \times 2^{k-1}}(z(t)) = \prod_{j=1}^k w_{i_j}^j(z_j(t)) \quad (\text{II.6})$$

Le nombre de règles floues formant le modèle TS est fonction du nombre de non linéarités (k) prises en compte dans le modèle (II.3). Il augmente en puissance de 2 si le découpage de chaque non linéarité se fait selon deux fonctions d'appartenance, i.e $r = 2^k$. Les règles des modèles flous TS peuvent alors se représenter sous la forme suivante :

R_i : si $z_1(t)$ est $w_{1,0}^1(z_1(t))$ et ... et $z_k(t)$ est $w_{1,0}^k(z_k(t))$ alors

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases}, i = 1, \dots, r$$

La méthode utilisée pour obtenir la représentation floue de type TS à partir d'un modèle mathématique non linéaire est décrite en détail par un exemple illustratif en Annexe B (exemple B.2).

II.3 Stabilité et stabilisation des modèles flous TS

Que ce soit pour l'analyse de la stabilité ou pour le calcul des lois de commande stabilisantes, l'approche basée sur la seconde méthode de Lyapunov reste, de loin, la plus utilisée. En effet, la structure d'un modèle TS se prête à l'application des concepts et des approches de l'automatique classique par le fait que ce type de modèle est une interconnexion d'un ensemble de modèles linéaires locaux. Un aperçu sur le concept de stabilité le plus utilisé dans l'étude des modèles TS est rappelé dans ce qui suit.

II.3.1 Analyse de stabilité des modèles TS

Considérons le cas d'un système autonome d'écrit par le modèle flou de type TS de la forme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) A_i x(t) \quad (\text{II.7})$$

La fonction candidate de Lyapunov la plus couramment utilisée est dite quadratique. Elle est définie par :

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t), \quad P = P^T > 0 \quad (\text{II.8})$$

Ainsi, la stabilité quadratique peut être vérifiée en calculant la dérivée de la fonction (II.8) :

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{d}{dt} (x(t)^T P x(t)) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \quad (\text{II.9})$$

En remplaçant (II.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \left(\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) A_i x(t) \right)^T P x(t) + x(t)^T P \left(\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) A_i x(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) x(t)^T (A_i^T P + P A_i) x(t) \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Prouver la stabilité quadratique du modèle (II.7) revient à vérifier l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) x(t)^T (A_i^T P + P A_i) x(t) < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (\text{II.11})$$

Ainsi, les conditions suffisantes pour la convergence asymptotique de l'état $x(t)$, à partir d'une condition initiale $x(0) = x_0 \neq 0$, vers le point d'équilibre $x(t) = 0$, sont données par le théorème suivant :

Théorème II.1 [TAN01] :

Le modèle TS continu (II.7) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique $P > 0$ telle que :

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (\text{II.12})$$

Sachant que $\mu_i(z(t)) \geq 0$, on en déduit que l'inégalité (II.11) est vraie si et seulement si (II.12) est vérifiée.

II.3.2 Conditions de base pour la stabilisation quadratique des modèles TS

La stabilisation quadratique d'un modèle TS s'appuie sur une loi de commande de type PDC (Parallel Distributed Compensation). Celle-ci correspond à un retour d'état non linéaire qui utilise les mêmes fonctions $\mu_i(z(t))$ que le modèle et des gains constants K_i tels que :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) K_i x(t) \quad (\text{II.13})$$

La commande PDC, notamment la stabilisation quadratique, se base sur la fonction de Lyapunov pour montrer la convergence du modèle flou en boucle fermée, en l'occurrence

déterminer les retours d'états correspondants à chaque modèle LTI composant le modèle TS. Ainsi, à partir d'une telle fonction, on peut trouver une matrice définie positive P commune entre tous les modèles locaux en boucle fermée. Pour obtenir le modèle flou en boucle fermée, on applique la commande PDC (II.13) au modèle TS (II.1). Ainsi, le modèle TS obtenu prend la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) G_{ij} x(t) \quad (\text{II.14})$$

avec :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j \quad (\text{II.15})$$

Le modèle TS d'écrit en (II.14) est globalement asymptotiquement stabilisé via la loi de commande PDC (II.13) s'il existe une matrice définie positive P et des matrices $K_i, i \in \{1, \dots, r\}$ qui vérifient [TAN01] :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (\text{II.16})$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0, \quad i < j \quad (\text{II.17})$$

avec $\mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \neq 0, \quad t > 0$

Il est à remarquer que les inégalités (II.16) et (II.17) ne sont pas linéaires en les variables P et K_i . Dans ce cas, le calcul des gains de retour d'état K_i passe nécessairement par la transformation des inégalités précédentes en un problème équivalent prenant la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI) qui peut être résolu par les outils d'optimisation convexe [GAH95]. Cette transformation est réalisée par les changements de variables bijectifs usuels suivants : $X = P^{-1}$ et $N_i = K_i X$, d'où après congruence avec $X = P^{-1}$ des inégalités (II.16) et (II.17), on obtient les expressions LMI suivantes en fonction des variables X et N_i

$$\begin{cases} XA_i^T + A_i X - N_i^T B_i^T - B_i N_i < 0, & i = 1, \dots, r \\ XA_i^T + A_i X + XA_j^T + A_j X - N_j^T B_i^T - B_i N_j - N_i^T B_j^T - B_j N_i \leq 0, & i < j \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

Les conditions de stabilité (II.16) et (II.17) sont assez conservatives car elle demande la stabilité de tous les modèles dominants (i.e. $i = j$) et croisés (i.e. $i \neq j$). Le théorème suivant permet de réduire ce conservatisme en tenant compte des interactions entre les modèles locaux voisins (caractérisés par le nombre s de modèles locaux actifs à chaque instant). Les conditions obtenues n'imposent que la stabilité des modèles dominants.

Théorème II.2 [CHA02] :

S'il existe des matrices symétriques $P > 0$, $M \geq 0$ et des matrices $K_i, i = 1, \dots, r$ qui vérifient

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + (s-1)M < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (\text{II.19})$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - M \leq 0, \quad i < j \quad (\text{II.20})$$

avec $\mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) \neq 0$, $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ et s étant le nombre maximal de modèles locaux actifs simultanément telle que $1 < s \leq r$, alors le modèle TS décrit en (II.14) est globalement asymptotiquement stable.

D'autres théorèmes peuvent être utilisés pour réduire le degré de conservatisme [KRU06].

II.3.3 Stabilisation avec observateur flou

La loi de commande de type PDC présentée auparavant, est basée sur la connaissance de l'état. Par conséquent, dans le cas où l'état du système n'est pas totalement disponible, il est nécessaire d'avoir recours à un observateur permettant d'estimer l'état du système. Dans le cas des modèles TS, on privilégie les observateurs flous TS (se basant généralement sur des modèles linéaires) de type "Luenberger". Ces derniers, ont pour avantage d'avoir la même structure que les modèles TS.

La structure la plus simple d'un observateur flou TS est obtenue par interconnexion de plusieurs observateurs locaux de type Luenberger. Il s'écrit d'une façon générale comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{z}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{z}(t)) C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

où $\hat{x}(t)$ et $\hat{z}(t)$ représente respectivement l'état estimé de l'observateur flou et le vecteur de prémisse reconstruit, et L_i les gains de l'observateur.

Remarque : Tout au long de ce travail, on supposera que toutes les variables de prémisses sont mesurables c'est-à-dire $\hat{z}(t) = z(t)$ et les fonctions d'activation de l'observateur sont les mêmes que celles caractérisant le modèle TS (II.14).

Pour évaluer la convergence de l'observateur flou (II.21), on considère l'erreur d'estimation du vecteur d'état donnée par :

$$e_o(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (\text{II.22})$$

Note : L'indice 'o' indique que l'erreur est liée à l'observateur.

Tenant compte du modèle TS (II.1) et de l'observateur (II.21), la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{e}_o(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \theta_{ij} e_o(t) \quad (\text{II.23})$$

avec :

$$\theta_{ij} = A_i - L_i C_j \quad (\text{II.24})$$

Ainsi, la synthèse d'un tel observateur consiste en la détermination des gains locaux L_i afin d'assurer la convergence vers zéro de la dynamique de l'erreur d'estimation (II.23).

Le retour d'état reconstruit en utilisant une commande PDC s'écrit :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) K_i \hat{x}(t) \quad (\text{II.25})$$

Tenant compte de (II.25), le modèle TS (II.1) devient :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (G_{ij} x(t) + B_i K_j e_o(t)) \quad (\text{II.26})$$

où $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ et $e_o(t)$ est définie en (II.22). Combinant (II.26) et (II.23), on obtient le système augmenté suivant :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \bar{G}_{ij} \bar{x}(t) \quad (\text{II.27})$$

avec :

$$\bar{G}_{ij} = \begin{bmatrix} G_{ij} & B_i K_j \\ 0 & \theta_{ij} \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t)^T & e_o(t)^T \end{pmatrix}^T \quad (\text{II.29})$$

Ainsi, le système augmenté décrit en (II.27) est globalement asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques $P > 0$, $M > 0$ et des matrices $L_i, K_i, i = 1, \dots, r$ qui vérifient

$$\bar{G}_{ii}^T P + P \bar{G}_{ii} + (s-1)M < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (\text{II.30})$$

$$\left(\frac{\bar{G}_{ij} + \bar{G}_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{\bar{G}_{ij} + \bar{G}_{ji}}{2} \right) - M \leq 0, \quad i < j \quad (\text{II.31})$$

avec $\mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \neq 0$.

Il s'agit d'un problème dont les variables sont P, M, L_i et K_i qui n'est pas transformable en LMI par les techniques classiques de changement de variables. La solution la plus répandue se caractérise par l'application d'une propriété dite de séparation. Cette dernière garantie pour les systèmes linéaires est également valide dans le cas des modèles TS dont les variables de prémisses sont mesurables [MA98], [YON00], [CHA02]. Elle garantit l'existence d'une fonction de Lyapunov, paramétrée par un scalaire positif α , de la forme suivant :

$$V(\bar{x}(t)) = \bar{x}(t)^T P(\alpha) \bar{x}(t) \quad (\text{II.32})$$

$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & \alpha P_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

L'application de cette propriété de séparation est donnée par le théorème suivant.

Théorème II.3 [CHA02] :

S'il existe des matrices symétriques $P_1 > 0$, $P_2 > 0$, $M_1 > 0$ et $M_2 > 0$ qui vérifient

$$\begin{cases} G_{ii}^T P_1 + P_1 G_{ii} + (s-1)M_1 < 0, & i=1, \dots, r \\ \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P_1 + P_1 \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - M_1 < 0, & i < j \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

$$\begin{cases} \theta_{ii}^T P_2 + P_2 \theta_{ii} + (s-1)M_2 < 0, & i=1, \dots, r \\ \left(\frac{\theta_{ij} + \theta_{ji}}{2} \right)^T P_2 + P_2 \left(\frac{\theta_{ij} + \theta_{ji}}{2} \right) - M_2 < 0, & i < j \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

alors la fonction (II.32) avec $\sigma \geq \max(\sigma_1, \sigma_2)$, respectant les conditions (II.36) et (II.37), est une fonction de Lyapunov qui prouve la stabilité asymptotique globale du système augmenté (II.27).

$$\sigma_1 = \frac{\lambda_{\min} \left[P_1 L_i C_i (\theta_{ii}^T P_2 + P_2 \theta_{ii} + (s-1)M_2)^{-1} (P_1 L_i C_i)^T \right]}{\lambda_{\max} \left[G_{ii}^T P_1 + P_1 G_{ii} + (s-1)M_1 \right]} \quad (\text{II.36})$$

$$\sigma_2 = \frac{\lambda_{\min} \left[P_1 (L_i C_j + L_j C_i) \left(\left(\frac{\theta_{ij} + \theta_{ji}}{2} \right)^T P_2 + P_2 \left(\frac{\theta_{ij} + \theta_{ji}}{2} \right) - M_2 \right)^{-1} (P_1 (L_i C_j + L_j C_i))^T \right]}{\lambda_{\max} \left[\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P_1 + P_1 \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - M_1 \right]} \quad (\text{II.37})$$

II.3.4 Stabilisation avec approche H_∞

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la synthèse de commande pour les modèles TS perturbés. La loi de commande ainsi élaborée est basée sur un problème de minimisation selon un critère H_∞ .

Considérons le modèle TS perturbé suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + \varphi(t)) \quad (\text{II.38})$$

où $\varphi(t)$ est une perturbation externe inconnue avec une borne supérieur $\varphi_{up} \geq \|\varphi(t)\|$.

Pour synthétiser une commande PDC (II.13) permettant de stabiliser et d'atténuer les perturbations du système (II.38), le critère H_∞ correspondant serait donc défini comme suit:

$$\int_0^{tf} x(t)^T Q x(t) dt \leq \eta^2 \int_0^{tf} \varphi(t)^T \varphi(t) dt \quad (\text{II.39})$$

où Q est une matrice définie positive et η est le taux d'atténuation à minimiser.

Le système en boucle fermée est alors donné par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) [G_{ij} x(t) + \varphi(t)] \quad (\text{II.40})$$

où G_{ij} est défini en (II.15).

En considérant les conditions initiales de l'état du système, le critère (II.39) devient :

$$\int_0^{tf} x(t)^T Q x(t) dt \leq x(0)^T P(0) x(0) + \eta^2 \int_0^{tf} \varphi(t)^T \varphi(t) dt \quad \text{avec } P = P^T > 0 \quad (\text{II.41})$$

De la condition (II.41), le théorème (II.4) montre une condition suffisante assurant la stabilité avec atténuation des perturbations.

Théorème II.4 [MAN05] :

Le système en boucle fermée (II.40) est stable, s'il existe une matrice $P = P^T > 0$, une constante positive $\gamma = \eta^2$ et des gains de retour d'état K_i montrés dans (II.13) et qui satisfont les conditions suivantes :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + \gamma^{-1} P P + Q < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (\text{II.42})$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) + \gamma^{-1} P P + Q < 0, \quad i < j \quad (\text{II.43})$$

avec $\mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \neq 0, \quad t > 0$

La commande des procédés non linéaires peut être vue sous différentes facettes. En plus de la stabilisation, on distingue aussi les problèmes de régulation, ou de suivi de consigne

(ou trajectoire). Pour le cas des modèles flous TS, un suivi de consigne peut être réalisé avec une structure intégrale ; comme explicité dans le paragraphe suivant. Dans un contexte global, la prise en compte de l'effet des perturbations est aussi nécessaire.

II.4 Stabilisation avec structure intégrale des modèles TS perturbés

De manière à assurer une erreur statique nulle, une structure intégrale [LAU03], [GUE03], [DEL05], [ARG07] est ajoutée au schéma de commande PDC permettant la stabilisation du système non linéaire. La figure II.1 donne un schéma de principe de la structure de commande.

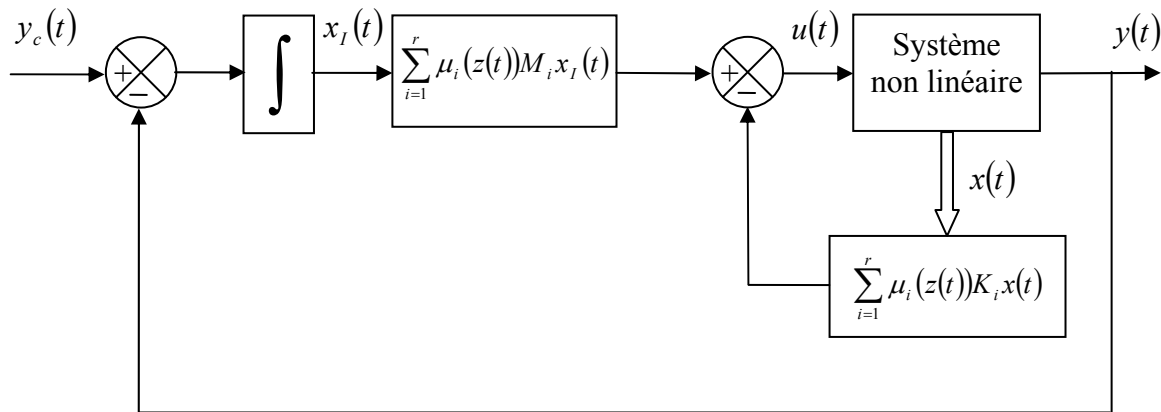


Figure II.1. Schéma de commande avec structure intégrale

Avec cette structure de commande, l'erreur statique $\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t)$ converge vers zéro, ce qui permet dans ce cas d'avoir le suivi de la consigne désirée. Pour prendre en compte les perturbations, on considère la même approche que celle développée dans le paragraphe §II.3.4. Dans ce dernier, un critère H^∞ est considéré permettant d'atténuer l'effet des perturbations sur le système.

Le modèle TS perturbé considéré se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + \varphi(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) C_i x(t) + v(t) \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

où $\varphi(t)$ est une perturbation externe inconnue avec une borne supérieure $\varphi_{up} \geq \|\varphi(t)\|$ et $v(t)$ un bruit de mesure de la sortie.

Pour la suite, un modèle d'état augmenté $X(t)^T = [x(t)^T \quad x_I(t)^T]$ est considéré, où $x_I(t)$ est défini tel que $\dot{x}_I(t) = y_c(t) - y(t)$. Ce dernier prend alors la forme suivante :

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) (\bar{A}_i X(t) + \bar{B}_i u(t) + A_\varphi \varphi(t) + A_v v(t) + B_c y_c(t)) \quad (\text{II.45})$$

avec :

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_\varphi = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_v = \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

La loi de commande PDC (II.13) devient alors :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) [K_i \quad -M_i] \begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} = - \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \bar{K}_i X(t) \quad (\text{II.46})$$

Le modèle augmenté (II.45) en boucle fermée dans le cas de la loi de commande PDC (II.46) est donné par :

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (\bar{G}_{ij} X(t) + \bar{F}_i \bar{\phi}(t)) \quad (\text{II.47})$$

avec :

$$\bar{G}_{ij} = \bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K}_j, \quad \bar{F}_i = [A_v \quad A_\varphi \quad B_c] \quad \text{et} \quad \bar{\phi}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \varphi(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.48})$$

Ainsi, en tenant compte des conditions initiales, le critère H_∞ peut être écrit comme suit :

$$\int_0^{t_f} X(t)^T Q X(t) dt \leq X(0)^T P X(0) + \eta^2 \int_0^{t_f} \bar{\phi}(t)^T \bar{\phi}(t) dt \quad (\text{II.49})$$

où $X(0)$ représente le vecteur des conditions initiales du modèle (II.47).

L'objectif maintenant est de déterminer les gains \bar{K}_i , pour le modèle augmenté (II.47) en garantissant la performance H^∞ (II.49) pour tout $\bar{\phi}(t)$. La synthèse de commande consiste d'abord à atténuer au maximum l'effet des perturbations, ensuite à garantir la stabilité quadratique du modèle augmenté (II.47) sans $\bar{\phi}(t)$.

Le théorème suivant montre une condition suffisante assurant la stabilité avec atténuation des perturbations.

Théorème II.5 [MAN05] :

Pour $t > 0$ et $\mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) \neq 0$,

S'il existe des matrices symétriques définies positives $P = P^T > 0$, $M > 0$ et une constante positive γ , tels que les conditions suivantes sont vérifiées.

$$\bar{G}_{ii}^T P + P \bar{G}_{ii} + \gamma^{-1} P \bar{F}_i \bar{F}_i^T P + (s-1)M + sQ < 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, r \quad (\text{II.50})$$

et

$$(\bar{G}_{ij} + \bar{G}_{ji})^T P + P (\bar{G}_{ij} + \bar{G}_{ji}) + \gamma^{-1} P (\bar{F}_i \bar{F}_i^T + \bar{F}_j \bar{F}_j^T) P - 2M < 0, \quad \text{pour } i < j \leq r \quad (\text{II.51})$$

Alors, le critère H^∞ (II.49) est assuré pour le modèle augmenté (II.47) pour une atténuation $\gamma = \eta^2$, et la stabilité quadratique est garantie.

Les conditions montrées dans le théorème II.5, présentent des conditions BMI (Bilinear Matrix Inequality). Dans la suite, une méthode permettant de résoudre ce problème BMI est présenté. Elle consiste en un changement de variable judicieux permettant de transformer le problème BMI en un problème LMI. Cette transformation est réalisée par le changement de variable $\bar{N}_i = \bar{K}_i X$. D'où en pré-et post-multipliant par $P^{-1} = X$ les BMI (II.50) et (II.51), et avec un complément de schur, on obtient les LMI suivantes en \bar{N}_i et X :

$$\begin{bmatrix} X\bar{A}_i^T + \bar{A}_i X - \bar{N}_i^T \bar{B}_i^T - \bar{B}_i \bar{N}_i + (s-1)Mx & X & B_c & A_\phi & A_v \\ X & -Q^{-1}/s & 0 & 0 & 0 \\ B_c^T & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ A_\phi^T & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ A_v^T & 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (\text{II.52})$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \bar{X}\bar{A}_i^T + \bar{A}_i X + \bar{X}\bar{A}_j^T + \bar{A}_j X - \bar{N}_j^T \bar{B}_i^T - \bar{B}_i \bar{N}_j - \bar{N}_i^T \bar{B}_j^T - \bar{B}_j \bar{N}_i - 2Mx & B_c & A_\varphi & A_v & & \\ & B_c^T & & & -\frac{\gamma}{2}I & 0 & 0 \\ & A_\varphi^T & & & 0 & -\frac{\gamma}{2}I & 0 \\ & A_v^T & & & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{2}I \end{array} \right] < 0, \quad i < j \quad (\text{II.53})$$

avec: $Mx = X M X$

Les variables X , \bar{N}_i et Mx i.e $P = X^{-1}$, $\bar{K}_i = \bar{N}_i X^{-1}$ et $M = X^{-1} M x X^{-1}$ sont obtenues en résolvant les LMI (II.52) et (II.53). Alors, s'il existe des matrices définies positives P et M tels que (II.52) et (II.53) sont vérifiées, le critère H_∞ (II.49) est assuré pour le modèle augmenté (II.47) pour une atténuation $\gamma = \eta^2$, et la stabilité quadratique est garantie.

La technique de synthèse basée sur le retour d'état (loi de commande PDC) nécessite de disposer de tout le vecteur d'état. Comme cette condition est rarement vérifiée, l'usage d'un observateur devient nécessaire.

II.4.1 Commande avec observateur

Dans ce paragraphe, le problème de stabilisation des modèles TS perturbés est traité de la même manière que le paragraphe précédent. La principale différence se situe dans le calcul des gains K_i et L_i . Pour ce dernier, un théorème de séparation permet de calculer séparément les gains K_i et L_i . Notons que pour pouvoir appliquer ce théorème, les variables de prémisses doivent être mesurables.

Le modèle TS perturbé considéré est donné par l'équation (II.44). Comme tous les états ne sont pas disponibles, on considère l'observateur flou TS (II.21). L'erreur d'observation donnée par l'équation (II.22) est : $e_o(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

A partir des équations (II.44), (II.21) et (II.22), la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\dot{e}_o(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \left((A_i - L_i C_j) e_o(t) - L_i v(t) + \varphi(t) \right) \quad (\text{II.54})$$

Pour introduire la structure intégrale, un modèle d'état augmenté $X(t)^T = \begin{bmatrix} x(t)^T & x_i(t)^T \end{bmatrix}$ est considéré. Sa forme globale est donnée par l'équation (II.45).

La loi de commande PDC (II.46) est réécrite en fonction de l'état estimé comme suit :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \bar{K}_i \hat{X}(t) \quad (\text{II.55})$$

avec $\hat{X}(t)^T = [\hat{x}(t)^T \quad x_r(t)^T]$

Tenant compte de (II.55), le modèle augmenté (II.45) en boucle fermée est donné par :

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) ((\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K}_j) X(t) + \bar{B}_i K_j e_o(t) + A_\varphi \varphi(t) + A_v v(t) + B_c y_c(t)) \quad (\text{II.56})$$

Par conséquent, à partir des dynamiques (II.54) et (II.56), nous pouvons définir le système augmenté suivant :

$$\dot{\bar{X}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (\bar{G}_{ij} \bar{X}(t) + \bar{F}_i \bar{\phi}(t)) \quad (\text{II.57})$$

avec :

$$\bar{G}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - L_i C_j & 0 \\ \bar{B}_i K_j & \bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K}_j \end{bmatrix}, \quad \bar{X}(t) = \begin{bmatrix} e_o(t) \\ X(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.58})$$

$$\bar{F}_i = \begin{bmatrix} -L_i & I & 0 \\ A_v & A_\varphi & B_c \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \bar{\phi}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \varphi(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix}$$

Ainsi, en tenant compte des conditions initiales, le critère H_∞ (II.49) peut être modifié comme suit :

$$\int_0^{t_f} X(t)^T Q X(t) dt = \int_0^{t_f} \bar{X}(t)^T \bar{Q} \bar{X}(t) dt \leq \bar{X}(0)^T P \bar{X}(0) + \eta^2 \int_0^{t_f} \bar{\phi}(t)^T \bar{\phi}(t) dt \quad (\text{II.59})$$

où $\bar{X}(0)$ représente le vecteur des conditions initiales du système (II.57), $\bar{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$ et

$$\bar{\phi}(t)^T \bar{\phi}(t) = y_c(t)^T y_c(t) + \varphi(t)^T \varphi(t) + v(t)^T v(t).$$

L'objectif est de chercher d'une part, les conditions sur les gains K_i et L_i garantissant la performance H^∞ (II.59) pour tout $\bar{\phi}(t)$ et d'autre part d'assurer que le système bouclé (II.60) est stable.

$$\dot{\bar{X}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \bar{G}_{ij} \bar{X}(t) \quad (\text{II.60})$$

Les conditions du théorème (II.5) sont des BMI. Dans la suite, une solution consiste, par application du principe de séparation, à résoudre ce problème BMI en deux étapes dont chacune est un problème LMI. Ainsi, ces LMI peuvent être résolues efficacement par les techniques d'optimisations convexes [GAH95].

Pour appliquer le principe de séparation, on considère une forme diagonale des matrices P et M .

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.61})$$

En prenant $\gamma = \eta^2$ et en substituant (II.61) dans (II.50) et (II.51), les conditions du théorème II.5 deviennent respectivement :

$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} < 0 \text{ (définie négative)}, \quad i = 1, \dots, r \quad (\text{II.62})$$

et

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} < 0 \text{ (définie négative)}, \quad i < j \leq r \quad (\text{II.63})$$

où :

$$I_{11} = (A_i - L_i C_i)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C_i) + \gamma^{-1} P_1 (L_i L_i^T + I) P_1 + (s-1) M_1$$

$$I_{12} = (\bar{B}_i K_i)^T P_2 + \gamma^{-1} P_1 (-L_i A_v^T + A_\phi^T) P_2$$

$$I_{21} = I_{12}^T = P_2 (\bar{B}_i K_i) + \gamma^{-1} P_2 (-A_v L_i^T + A_\phi) P_1$$

$$I_{22} = (\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K}_i)^T P_2 + P_2 (\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K}_i) + \gamma^{-1} P_2 (A_v A_v^T + A_\phi A_\phi^T + B_c B_c^T) P_2 + (s-1) M_2 + s Q$$

et

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= (A_i - L_i C_j)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C_j) + (A_j - L_j C_i)^T P_1 + P_1 (A_j - L_j C_i) + \gamma^{-1} P_1 (L_i L_i^T + L_j L_j^T + 2I) P_1 - 2M_1 \\
 J_{12} &= (\bar{B}_i K_j)^T P_2 + (\bar{B}_j K_i)^T P_2 + \gamma^{-1} P_1 (-(L_i + L_j) A_v^T + 2A_\phi^T) P_2 \\
 J_{21} &= J_{12}^T = P_2 (\bar{B}_i K_j) + P_2 (\bar{B}_j K_i) + \gamma^{-1} P_2 (-A_v (L_i + L_j)^T + 2A_\phi) P_1 \\
 J_{22} &= (\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K}_j)^T P_2 + P_2 (\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K}_j) + (\bar{A}_j - \bar{B}_j \bar{K}_i)^T P_2 + P_2 (\bar{A}_j - \bar{B}_j \bar{K}_i) + 2\gamma^{-1} P_2 (A_v A_v^T + A_\phi A_\phi^T + B_c B_c^T) P_2 - 2M_2
 \end{aligned}$$

A partir de (II.62) et (II.63), on constate des termes non LMI, notamment dans les blocs diagonaux. Pour les éliminer, on considère le changement de variable bijectif $y_i = P_1 L_i$. En appliquant un complément de Schur §AnnexB, (II.62) et (II.63) deviennent respectivement :

$$\begin{bmatrix} D_{11} & P_1 & y_i & I_{12} \\ P_1 & -\gamma I & 0 & 0 \\ y_i^T & 0 & -\gamma I & 0 \\ I_{12}^T & 0 & 0 & I_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (\text{II.64})$$

et

$$\begin{bmatrix} E_{11} & P_1 & y_i & y_j & J_{12} \\ P_1 & -\frac{\gamma}{2} I & 0 & 0 & 0 \\ y_i^T & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ y_j^T & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ J_{12}^T & 0 & 0 & 0 & J_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad i < j \leq r \quad (\text{II.65})$$

où :

$$D_{11} = A_i^T P_1 + P_1 A_i - C_i^T y_i^T - y_i C_i + (s-1)M_1$$

et

$$E_{11} = A_i^T P_1 + P_1 A_i + A_j^T P_1 + P_1 A_j - C_j^T y_i^T - y_i C_j - C_i^T y_j^T - y_j C_i - 2M_1$$

Pour résoudre les inégalités (II.64) et (II.65), on procédera en deux étapes dont chacune consiste à résoudre une LMI. Tout d'abord, il s'agit de trouver P_2 , K_i et M_2 à partir des blocs diagonaux I_{22} et J_{22} ensuite P_1 , L_i et M_1 à partir des inégalités (II.64) et (II.65) comme expliqué ci-dessous:

D'abord, notons que (II.64) et (II.65) impliquent respectivement :

$$I_{22} = (\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K}_i)^T P_2 + P_2 (\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K}_i) + \gamma^{-1} P_2 (A_v A_v^T + A_\phi A_\phi^T + B_c B_c^T) P_2 + (s-1) M_2 + s Q < 0,$$

pour $i = 1, \dots, r$ (II.66)

et

$$J_{22} = (\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K}_j)^T P_2 + P_2 (\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K}_j) + (\bar{A}_j - \bar{B}_j \bar{K}_i)^T P_2 + P_2 (\bar{A}_j - \bar{B}_j \bar{K}_i) + 2\gamma^{-1} P_2 (A_v A_v^T + A_\phi A_\phi^T + B_c B_c^T) P_2 - 2M_2 < 0,$$

pour $i < j \leq r$ (II.67)

En effectuant une congruence de (II.66) et (II.67) avec P_2^{-1} et avec les changements de variables bijectifs $X_2 = P_2^{-1}$, $\bar{N}_i = \bar{K}_i X_2$ et $Mx_2 = X_2 M_2 X_2$, et un complément de Schur, (II.66) et (II.67) sont respectivement équivalents à :

$$\begin{bmatrix} X_2 \bar{A}_i^T + \bar{A}_i X_2 - \bar{N}_i^T \bar{B}_i^T - \bar{B}_i \bar{N}_i + (s-1) Mx_2 & X_2 & B_c & A_\phi & A_v \\ & X_2 & -Q^{-1}/s & 0 & 0 \\ & B_c^T & 0 & -\gamma I & 0 \\ & A_\phi^T & 0 & 0 & -\gamma I \\ & A_v^T & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0,$$

pour $i = 1, \dots, r$ (II.68)

et

$$\begin{bmatrix} X_2 \bar{A}_i^T + \bar{A}_i X_2 + X_2 \bar{A}_j^T + \bar{A}_j X_2 - \bar{N}_j^T \bar{B}_i^T - \bar{B}_i \bar{N}_j - \bar{N}_i^T \bar{B}_j^T - \bar{B}_j \bar{N}_i + 2Mx_2 & B_c & A_\phi & A_v \\ & B_c^T & -\frac{\gamma}{2} I & 0 \\ & A_\phi^T & 0 & -\frac{\gamma}{2} I \\ & A_v^T & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{2} I \end{bmatrix} < 0,$$

pour $i < j \leq r$ (II.69)

Les variables X_2 , \bar{N}_i et Mx_2 i.e $P_2 = X_2^{-1}$, $\bar{K}_i = \bar{N}_i X_2^{-1}$ et $M_2 = X_2^{-1} Mx_2 X_2^{-1}$ sont obtenues en résolvant les LMI (II.68) et (II.69).

Dans une seconde étape, on substitue P_2 , M_2 et \bar{K}_i dans (II.64) et (II.65) puis on résoud la nouvelle LMI obtenue en P_1 , M_1 et L_i (i.e $L_i = P_1^{-1} y_i$). Alors, s'il existe des matrices définies positives P_1 , P_2 , M_1 et M_2 tels que (II.64) et (II.65) sont vérifiées, le critère H_∞ (II.59) est

assuré pour le système augmenté (II.57) pour une atténuation $\gamma = \eta^2$, et la stabilité quadratique du système en boucle fermé (II.60) est garantie.

Dans la suite, un exemple d'illustration de cette loi de commande est présenté.

Remarque II.1

Pour une meilleur atténuation des perturbations et bruits de mesure, les conditions du théorème II.5 peuvent être formulées comme un problème de minimisation, de telle sorte que le taux d'atténuation du critère H^∞ soit le plus réduit possible.

$$\min_{P,M} \eta^2$$

sous les contraintes $P = P^T > 0, M > 0$, (II.50) et (II.51).

II.4.2 Exemple

Considérons le modèle non linéaire de dimension 4 suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \sin(x_3) + (x_1^2 + 1)u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 x_2 + x_1 + u_2 \\ \dot{x}_4 &= \sin(x_3) \\ y_1 &= (x_1^2 + 1)x_4 + x_2 \\ y_2 &= x_2 + x_3 \end{aligned} \tag{II.70}$$

Ce modèle peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sin(x_3)/x_3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(x_3)/x_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & x_1^2 + 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{II.71}$$

Supposons que $x_1(t)$ et $x_3(t)$ sont mesurables. Par ailleurs, $x_2(t)$ et $x_4(t)$ sont estimés à partir d'un observateur flou. Il est supposé que $x_1(t) \in [-a, a]$, $x_3(t) \in [-b, b]$ où a et b sont deux constantes positives.

L'équation (II.71) présente deux non linéarités qu'on notera $nl_1(x_1(t))$ et $nl_2(x_3(t))$ respectivement tels que :

$$nl_1(x_1(t)) = x_1^2(t), \quad nl_2(x_3(t)) = \frac{\sin(x_3(t))}{x_3(t)} \quad (\text{II.72})$$

Un représentant TS s'obtient en considérant comme vecteur des prémisses $z(t) = [x_1(t) \quad x_3(t)]$.

Ainsi, $\forall x(t) \in [-a, a] \times [-b, b]$, les deux non linéarités s'écrivent :

$$\begin{aligned} nl_1(x_1(t)) &= a^2 \cdot w_0^1(x_1(t)) + 0 \cdot w_1^1(x_1(t)), \\ nl_2(x_3(t)) &= 1 \cdot w_0^2(x_3(t)) + \frac{\sin b}{b} \cdot w_1^2(x_3(t)). \end{aligned} \quad (\text{II.73})$$

Les fonctions d'appartenances sont :

$$\begin{aligned} w_0^1(x_1(t)) &= \frac{x_1^2(t)}{a^2}, \quad w_1^1(x_1(t)) = 1 - w_0^1(x_1(t)) = 1 - \frac{x_1^2(t)}{a^2} \\ w_0^2(x_3(t)) &= \begin{cases} \frac{b \sin(x_3(t)) - \sin b x_3(t)}{x_3(t)(b - \sin b)}, & x_3(t) \neq 0 \\ 1, & x_3(t) = 0 \end{cases} \\ w_1^2(x_3(t)) &= 1 - w_0^2(x_3(t)) = \begin{cases} \frac{b(x_3(t) - \sin(x_3(t)))}{x_3(t)(b - \sin b)}, & x_3(t) \neq 0 \\ 0, & x_3(t) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{II.74})$$

En utilisant (II.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_1(z(t)) &= w_0^1(x_1(t))w_0^2(x_3(t)), \quad \mu_2(z(t)) = w_1^1(x_1(t))w_0^2(x_3(t)), \\ \mu_3(z(t)) &= w_0^1(x_1(t))w_1^2(x_3(t)), \quad \mu_4(z(t)) = w_1^1(x_1(t))w_1^2(x_3(t)). \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

Un représentant TS de (II.71) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(z(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (\text{II.76})$$

où :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & a^2+1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & C_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sin b/b & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin b/b & 0 \end{bmatrix}, & B_3 &= \begin{bmatrix} a^2+1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & C_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & a^2+1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sin b/b & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin b/b & 0 \end{bmatrix}, & B_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & C_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Il représente exactement le modèle non linéaire (II.71) dans un espace $U = [-a, a] \times [-b, b]$ de l'espace d'état.

Pour la simulation, on considère le modèle (II.74) avec $a = 0,8$ et $b = 0,6$. On calcul les gains K_i et L_i selon les étapes définies dans §II.4.1 par la méthode de minimisation donnée dans la remarque II.1. En choisissant : $Q = \text{diag}[10^{-8} \ 10^{-8} \ 10^{-8} \ 10^{-8} \ 10^{-7} \ 10^{-7}]$, et à partir des conditions (II.68) et (II.69), on détermine :

$$\begin{aligned}
 \bar{K}_1 &= \begin{bmatrix} 34.3592 & 235.8301 & 0.24683 & -180.0270 & -00.8223 & -186.8778 \\ -2.8289 & -35.2163 & 39.9363 & 420.8174 & -221.5175 & 185.1020 \end{bmatrix} \\
 \bar{K}_2 &= \begin{bmatrix} 52.0770 & 359.6098 & 01.4066 & -296.3932 & 11.3681 & -293.7687 \\ 01.3461 & -09.7079 & 44.4916 & 453.2844 & -253.9050 & 188.0600 \end{bmatrix} \\
 \bar{K}_3 &= \begin{bmatrix} 34.3931 & 236.1803 & 2.1690 & -183.2749 & 00.8530 & -188.4248 \\ 00.1391 & -11.3510 & 35.6653 & 348.7586 & -191.9146 & 141.0419 \end{bmatrix} \\
 \bar{K}_4 &= \begin{bmatrix} 52.1415 & 360.1267 & 01.3467 & -297.6190 & 11.8116 & -294.6131 \\ 03.8125 & 10.7354 & 40.4782 & 386.8390 & -225.9367 & 147.9290 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Les conditions (II.64) et (II.65) permettent également de calculer :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 6.1075 & -178.1841 \\ -19.0193 & 648.2107 \\ 13.3482 & -439.1937 \\ 17.4034 & -542.7793 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 12.2104 & -90.3180 \\ -40.2372 & 332.8787 \\ 27.7590 & -224.8351 \\ 35.5592 & -277.7423 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 4.5153 & -176.2136 \\ -13.3057 & 641.0445 \\ 9.4630 & -434.3123 \\ 12.6007 & -536.7928 \end{bmatrix}, \quad L_4 = \begin{bmatrix} 12.4360 & -89.1996 \\ -40.9494 & 328.7356 \\ 28.2495 & -222.0135 \\ 36.1896 & -274.3029 \end{bmatrix}$$

Le taux d'atténuation minimisé est : $\eta = \sqrt{0.0244} = 0.1562$

Notons que puisque $x_1(t)$ et $x_3(t)$ sont mesurables, la commande PDC appliquée au système s'écrit en fonction des états et des d'états estimés, comme explicité ci-dessous.

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \bar{K}_i [x_1(t) \hat{x}_2(t) x_3(t) \hat{x}_4(t) x_l(t)^T]^T$$

La figure II.2 illustre les simulations effectuées pour une consigne $y_c(t) = (0.25 \ 0.35)^T$, avec la condition initiale $x(0) = (0, 0, 0, 10^{-2})$. Les variables d'états estimés $\hat{x}_2(t)$ et $\hat{x}_4(t)$ sont représentées par des lignes discontinues.

Dans la suite, des applications de ce résultat théorique sur le moteur thermique à allumage commandé sont traitées. De plus, dans les applications qui suivent, les variables de prémisses ainsi que l'état sont toujours mesurables. En effet, dans des conditions réelles d'utilisation, des capteurs permettent de mesurer les différentes variables du moteur (pressions, températures, positions angulaires, vitesses angulaires, etc. ...).

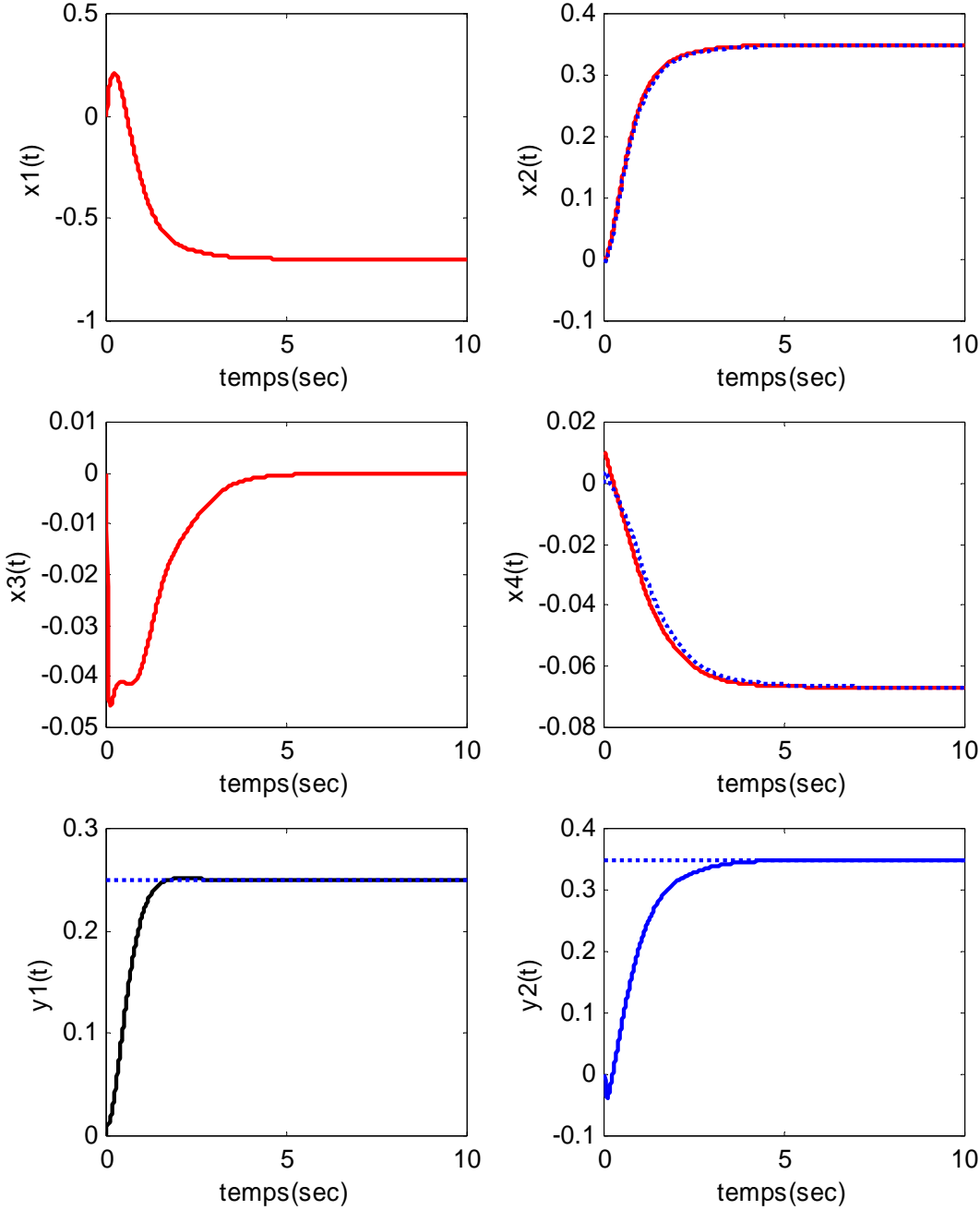


Figure II.2. Suivi de consigne et variables d'états associées

II.5 Application à la commande de l'admission d'air d'un moteur thermique à allumage commandé

La puissance et le couple d'un moteur thermique à allumage commandé sont directement liés au remplissage en air des cylindres. La dynamique de ce remplissage dépend principalement des variations de la pression dans le collecteur d'admission. Ainsi, et vu l'importance de la commande en couple d'une part et le fait que ce dernier n'est pas mesurable sur véhicule de série d'autre part, la commande de la pression collecteur devient une alternative naturelle pour agir indirectement sur les variations du couple moteur.

Dans le chapitre précédent, un développement théorique a abouti à un modèle non linéaire du circuit d'admission d'air. Cette forme de modèle est exploitée dans cette partie afin de développer une loi de commande floue permettant de ramener la pression dans le collecteur d'admission à un point de consigne désiré. Deux situations sont considérées. Dans la première, le moteur est à aspiration naturelle (la pression d'admission d'air correspond à la pression atmosphérique). Un suivi de consigne en pression collecteur est alors assuré avec la vanne papillon motorisée comme seul actionneur. Quant à la deuxième, le modèle du moteur prend en compte l'existence d'une suralimentation en air (turbocompresseur). Ainsi, un second actionneur (vanne de décharge ou wastegate) est à commander afin d'assurer le suivi de la consigne désiré.

II.5.1 Suivi de consigne en pression collecteur d'un moteur à aspiration naturelle

La modélisation de la dynamique de la pression dans le collecteur considère les équations (I.2), (I.3) et (I.4). L'équation (I.2) est décrite par un modèle mathématique de la forme :

$$\dot{p}_{col} = \frac{R T_{col}}{V_{col}} (\dot{m}_{pap} - \dot{m}_{cyl}) \quad (II.77)$$

où, $\dot{m}_{cyl} = \sum_{i=1}^{n_{cyl}} \dot{m}_{cyl_i}$ est le débit d'air admis dans les cylindres avec n_{cyl} le nombre de cylindres, \dot{m}_{pap} est le débit d'air au papillon, V_{col} est le volume du collecteur, R est la constante des gaz parfaits et T_{col} la température à l'intérieur du collecteur d'admission. Cette dernière, considérée constante, est égale à la température en amont du papillon T_{am_pap} . Pour obtenir

une représentation sous forme d'état, l'équation (II.77) est écrite à l'aide de fonctions non linéaires $f_1(x_1, x_2)$ et $f_2(x_1, \dot{\theta})$.

Ainsi, en prenant en compte la dynamique de la vanne papillon, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)x_2 - f_2(x_1, \dot{\theta})x_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{\tau_{pap}}(-x_2 + u) \end{cases} \quad (\text{II.78})$$

avec : $x_1 = p_{col}$, $x_2 = \phi_{pap}$, $u = \phi_{c_pap}$

et les fonctions non linéaires :

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{RT_{col}}{x_2 V_{col}} \dot{m}_{pap}(x_1, x_2) \quad (\text{II.79})$$

$$f_2(x_1, \dot{\theta}) = \frac{RT_{col}}{x_1 V_{col}} \dot{m}_{cyl}(x_1, \dot{\theta}) \quad (\text{II.80})$$

Avec leurs bornes :

$$\underline{f}_1 \leq f_1(\cdot) \leq \bar{f}_1, \underline{f}_2 \leq f_2(\cdot) \leq \bar{f}_2, \bar{f}_1 = 2, \underline{f}_1 = 0,5, \bar{f}_2 = 60 \text{ et } \underline{f}_2 = 10 \text{ [KHI07]}$$

La sortie correspond à la pression collecteur mesurée :

$$y = x_1 \quad (\text{II.81})$$

La mise sous forme d'un modèle TS de (II.78) s'obtient en considérant la représentation suivante des deux non linéarités :

$$f_1(x_1, x_2) = \bar{f}_1 w_0^1(x_1, x_2) + \underline{f}_1 w_1^1(x_1, x_2) \quad (\text{II.82})$$

$$f_2(x_1, \dot{\theta}) = \bar{f}_2 w_0^2(x_1, \dot{\theta}) + \underline{f}_2 w_1^2(x_1, \dot{\theta}) \quad (\text{II.83})$$

avec :

$$\begin{cases} w_0^1(x_1, x_2) = \frac{f_1(x_1, x_2) - \underline{f}_1}{\overline{f}_1 - \underline{f}_1} \\ w_1^1(x_1, x_2) = \frac{\overline{f}_1 - f_1(x_1, x_2)}{\overline{f}_1 - \underline{f}_1} \end{cases} \quad (\text{II.84})$$

$$\begin{cases} w_0^2(x_1, \dot{\theta}) = \frac{f_2(x_1, \dot{\theta}) - \underline{f}_2}{\overline{f}_2 - \underline{f}_2} \\ w_1^2(x_1, \dot{\theta}) = \frac{\overline{f}_2 - f_2(x_1, \dot{\theta})}{\overline{f}_2 - \underline{f}_2} \end{cases} \quad (\text{II.85})$$

Les fonctions d'activations se calculent directement à partir de l'équation (II.6) comme suit :

$$\begin{aligned} \mu_1(z(t)) &= w_0^1(x_1, x_2)w_0^2(x_1, \dot{\theta}), & \mu_2(z(t)) &= w_1^1(x_1, x_2)w_0^2(x_1, \dot{\theta}), \\ \mu_3(z(t)) &= w_0^1(x_1, x_2)w_1^2(x_1, \dot{\theta}), & \mu_4(z(t)) &= w_1^1(x_1, x_2)w_1^2(x_1, \dot{\theta}). \end{aligned} \quad (\text{II.86})$$

Le modèle flou TS de (II.78) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(z(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (\text{II.87})$$

où :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -\overline{f}_2 & \overline{f}_1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{pap}} \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \tau_{pap} \end{bmatrix}, & C_1 &= [1 \quad 0] \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -\overline{f}_2 & \underline{f}_1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{pap}} \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \tau_{pap} \end{bmatrix}, & C_2 &= [1 \quad 0] \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -\underline{f}_2 & \overline{f}_1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{pap}} \end{bmatrix}, & B_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \tau_{pap} \end{bmatrix}, & C_3 &= [1 \quad 0] \\ A_4 &= \begin{bmatrix} -\underline{f}_2 & \underline{f}_1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{pap}} \end{bmatrix}, & B_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \tau_{pap} \end{bmatrix}, & C_4 &= [1 \quad 0] \end{aligned}$$

Après la mise sous forme d'un modèle TS, l'objectif est de déterminer les gains de la loi de commande PDC permettant d'avoir un suivi de consigne en pression collecteur. La démarche à suivre est décrite en détail dans le paragraphe §II.4.

On calcule les gains \bar{K}_i selon les conditions (II.52) et (II.53) par la méthode de minimisation donnée dans la remarque II.1. En choisissant $Q = \text{diag}[10^{-8} \quad 10^{-8} \quad 10^{-4}]$, les gains suivant sont obtenus :

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_1 \\ \bar{K}_2 \\ \bar{K}_3 \\ \bar{K}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3732 & 0.0103 & -5.2042 \\ 0.2039 & 0.0055 & -2.7607 \\ 0.2578 & 0.0070 & -3.5752 \\ 0.0779 & 0.0019 & -1.0252 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Et le taux d'atténuation minimisé est : $\eta = \sqrt{0.0083} = 0.0911$

La matrice Q est choisie de manière à avoir un régime transitoire assez rapide et sans dépassement.

Les résultats des figures (II.3-II.5-II.7) illustrent les simulations effectuées pour un suivi de consigne en pression collecteur (des échelons de consigne en pression) à trois régimes moteurs différents. On constate de bonnes performances en terme de suivi de consigne pour des régimes moteurs variant de 1500 à 3500 tr/min. les évolutions de la commande de la vanne papillon sont données sur les figures (II.4-II.6-II.8). On remarque que la commande n'est pas trop chahutée malgré des gains relativement élevés. En terme de rapidité, le temps de réponse (à 95% de la valeur finale) est de l'ordre de 0.3 s à 0.55 s, ce qui représente un résultat acceptable pour l'application considérée.

Enfin, pour montrer les performances de la loi de commande avec le critère H_∞ , une perturbation est appliquée sur la variable d'état $x_1(t)$ (figure II.9 à II.11) et des bruits de mesure sur la sortie $y(t)$ (figure II.12-II.13). Comme le montre ces figures, la loi de commande assure un bon suivi de consigne avec une très bonne atténuation des perturbations et bruits de mesure. La figure II.11 montre un exemple des évolutions des fonctions d'activation $\mu_i(z(t))$ correspondant au cas du modèle perturbé.

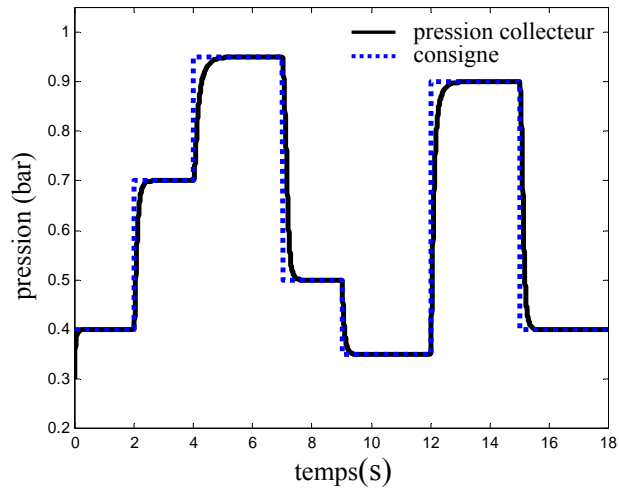


Figure II.3. Suivi de consigne en pression collecteur à $1500 \text{ trs} \cdot \text{min}^{-1}$

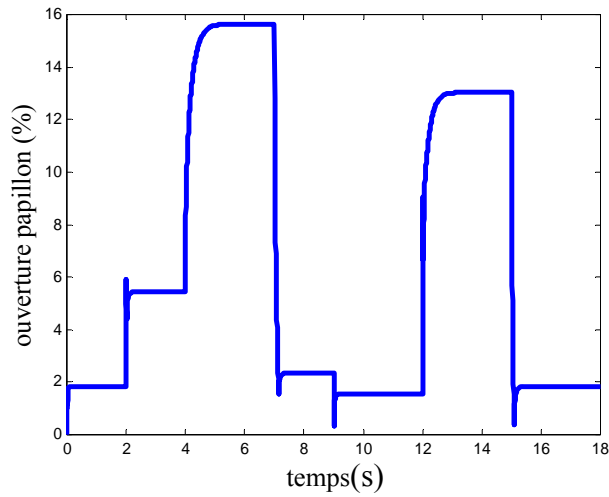


Figure II.4. Commande de la vanne papillon motorisée à $1500 \text{ trs} \cdot \text{min}^{-1}$

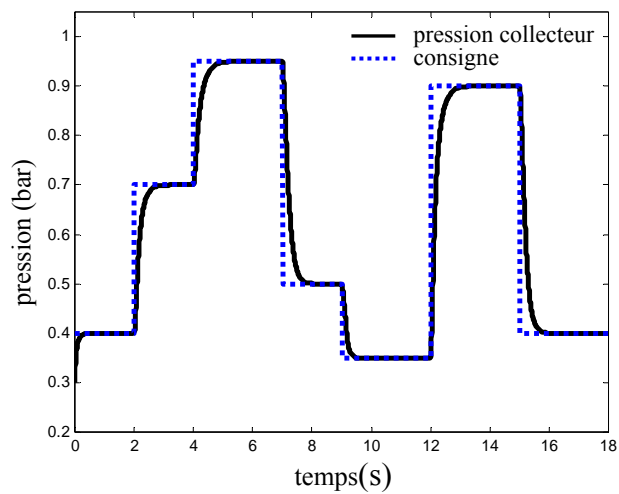


Figure II.5. Suivi de consigne en pression collecteur à $2500 \text{ trs} \cdot \text{min}^{-1}$

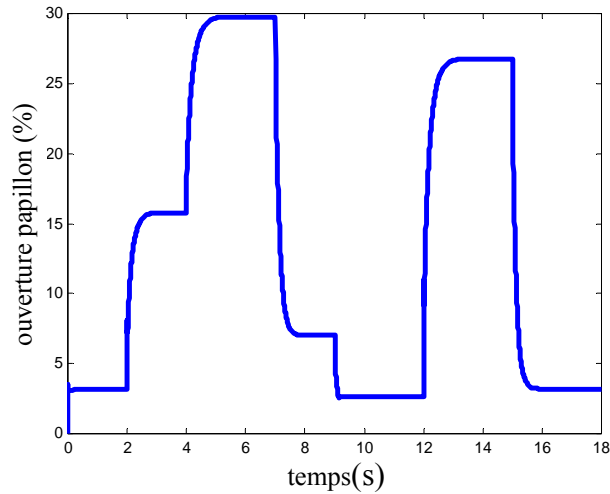


Figure II.6. Commande de la vanne papillon motorisée à $2500 \text{ trs} \cdot \text{min}^{-1}$

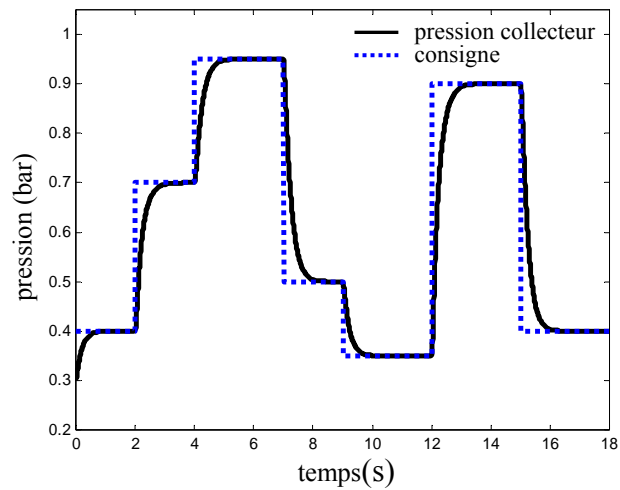


Figure II.7. Suivi de consigne en pression collecteur à $3500 \text{ trs} \cdot \text{min}^{-1}$

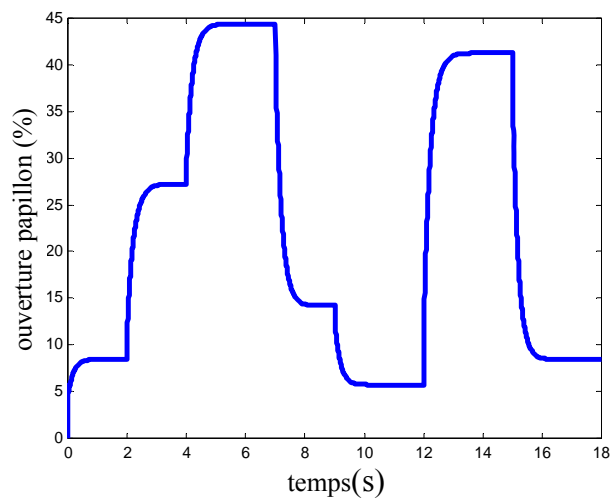


Figure II.8. Commande de la vanne papillon motorisée à $3500 \text{ trs} \cdot \text{min}^{-1}$

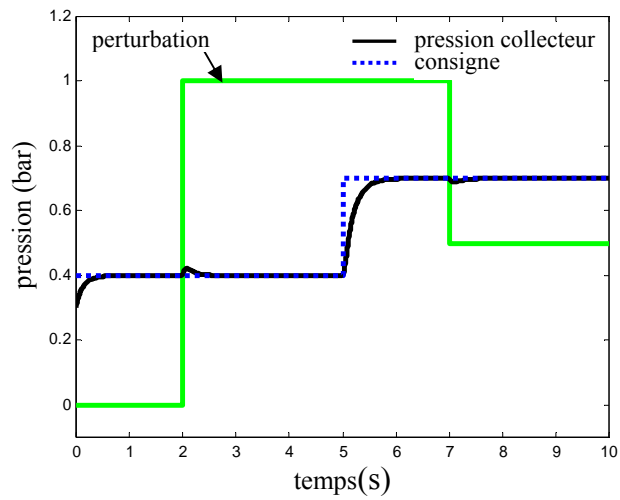


Figure II.9. Suivi de la consigne pression collecteur avec perturbation à $3000 \text{ trs} \cdot \text{min}^{-1}$

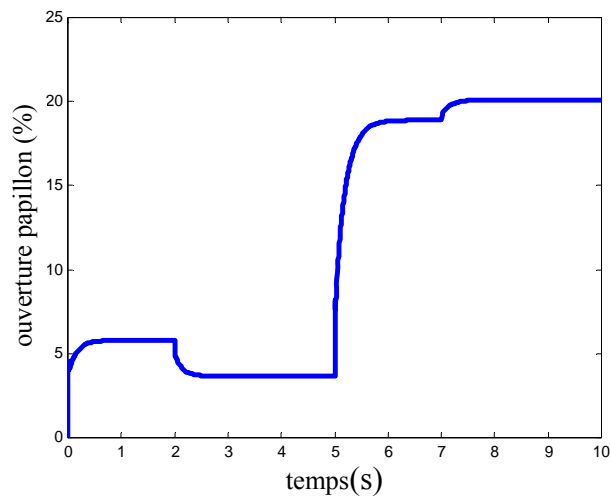


Figure II.10. Commande du papillon avec perturbation à $3000 \text{ trs} \cdot \text{min}^{-1}$

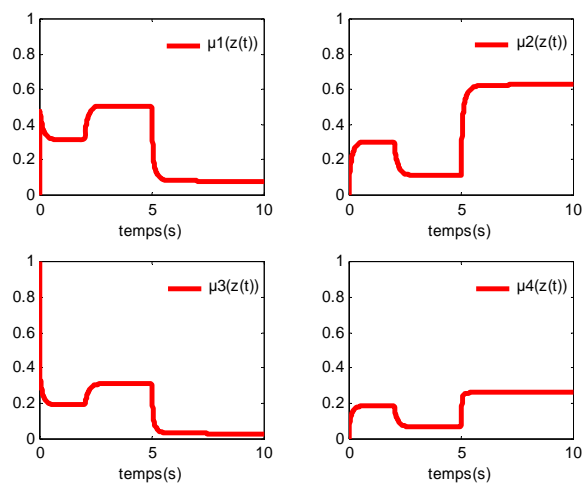


Figure II.11. Evolution des fonctions d'activations des sous modèles flous

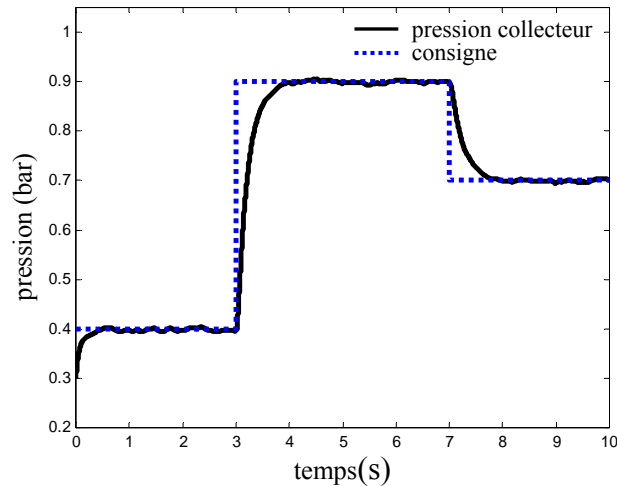


Figure II.12. Suivi de la consigne pression collecteur avec bruits sur la sortie à $3000 \text{ trs} \cdot \text{min}^{-1}$

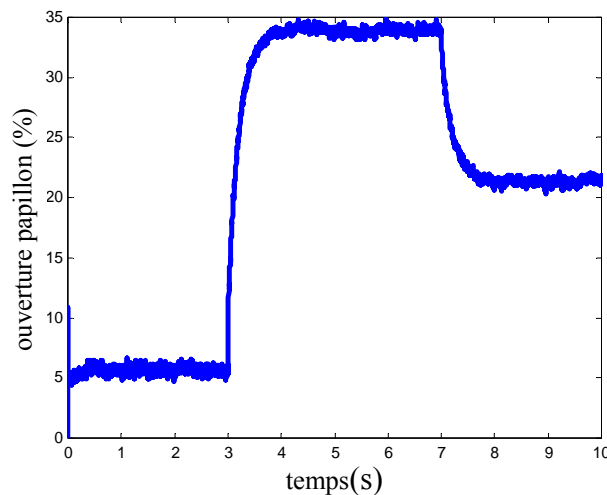


Figure II.13. Commande du papillon avec bruits de mesure à $3000 \text{ trs} \cdot \text{min}^{-1}$

II.5.2 Suivi de consigne en pression collecteur d'un moteur turbocompressé

A la commande du circuit d'air du moteur thermique vue précédemment est ajouté un système de suralimentation en air à base d'un turbocompresseur (figure I.5). Un second actionneur est alors disponible lorsque la pression de consigne dépasse la valeur atmosphérique. Cet actionneur représenté par la vanne de décharge (wastegate), placé au niveau de l'échappement, permet d'agir sur la dynamique du turbocompresseur en modulant le débit de gaz traversant l'orifice de la turbine. Pour contrôler la dynamique du turbocompresseur, il existe principalement deux objectifs antagonistes [ERI02a], [FRE04]. Le premier correspond à l'économie d'énergie, qui conduit indirectement à la réduction des émissions polluantes. Le deuxième concerne la réduction du temps de réponse en couple du moteur.

La loi de commande consiste alors à faire suivre à la pression collecteur une variation de consigne donnée tout en minimisant les pertes de pompage, c'est-à-dire, en réduisant l'écart entre la pression à l'admission et à l'échappement. Pour atteindre cet objectif, les motoristes indiquent que le papillon motorisé doit être le plus ouvert possible pendant les phases de fonctionnement du turbocompresseur (pression collecteur supérieur à la pression atmosphérique) [ERI02a], [COL06] afin d'avoir un maximum d'air dans les cylindres.

Dans la suite, la structure de commande du papillon calculée précédemment est gardée et adaptée aux nouvelles bornes des variables du modèle. La commande de la vanne de décharge est ajoutée à cette structure et se base sur une stratégie de commande décentralisée permettant de gérer les deux actionneurs afin de faire suivre à la pression collecteur une variation de consigne donnée.

II.5.2.1 Obtention d'un modèle flou TS pour la commande de la vanne de décharge

Le modèle dynamique de la pression de suralimentation reprend les équations (I.14) et (I.15) comme suit :

$$\dot{p}_{\text{int}} = \frac{1}{\tau_{\text{comp}}} \left(-p_{\text{int}} + f(N_e, \phi_{c_wg}, \phi_{pap}, p_{col}) \right) \quad (\text{II.88})$$

avec :

$$f(N_e, \phi_{c_wg}, \phi_{pap}, p_{col}) = \alpha_1 N_e + \alpha_2 N_e \phi_{c_wg} + \alpha_3 \phi_{pap} + \alpha_4 p_{col} \quad (\text{II.89})$$

tels que : $\alpha_1 = 9,4699$, $\alpha_2 = 0,129$, $\alpha_3 = -29,0342$, $\alpha_4 = 0,8103$ et $\alpha_5 = 1,01$ sont des paramètres estimés.

Comme pour le cas de la commande de la vanne papillon, le modèle dynamique (II.88) est réécrit sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = g_1(N_e, \phi_{pap}, p_{col}) x(t) + g_2(N_e) u \quad (\text{II.90})$$

avec : $x(t) = p_{\text{int}}$, $u = \phi_{c_wg}$

et les fonctions non linéaires :

$$g_1(N_e, \phi_{pap}, p_{col}) = \frac{\alpha_1 N_e + \alpha_3 \phi_{pap} + \alpha_4 p_{col}}{\tau_{\text{int}} p_{\text{int}}} - \frac{1}{\tau_{\text{int}}} \quad (\text{II.91})$$

$$g_2(N_e) = \frac{\alpha_2 N_e}{\tau_{\text{int}}} \quad (\text{II.92})$$

La sortie du modèle correspond à la pression de suralimentation mesurée :

$$y(t) = p_{\text{int}} \quad (\text{II.93})$$

On considère les bornes suivantes des deux fonctions non linéaires :

$$\underline{g}_1 \leq g_1(\cdot) \leq \bar{g}_1, \quad \underline{g}_2 \leq g_2(\cdot) \leq \bar{g}_2 \quad \text{avec} \quad \bar{g}_1 = 2,74, \quad \underline{g}_1 = -2,46, \quad \bar{g}_2 = 1,35 \cdot 10^3 \quad \text{et} \quad \underline{g}_2 = 580,5$$

Ainsi, le modèle flou TS obtenu est composé de quatre règles (deux non linéarités). Ce dernier s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(z(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (\text{II.94})$$

où :

$$A_1 = A_3 = \bar{g}_1, \quad A_2 = A_4 = \underline{g}_1, \quad B_1 = B_2 = \bar{g}_2, \quad B_3 = B_4 = \underline{g}_2, \quad C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$$

Les gains correspondant à la résolution des conditions (II.52) et (II.53) du problème LMI (théorème II.5) pour une matrice de pondération $Q = [10^{-9} \quad 5 \cdot 10^{-9}]$ sont :

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_1 \\ \bar{K}_2 \\ \bar{K}_3 \\ \bar{K}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4310 & -1.3446 \\ 0.4225 & -1.3295 \\ 0.6816 & -2.1260 \\ 0.6656 & -2.0997 \end{bmatrix}$$

Le taux d'atténuation minimisé est : $\eta = \sqrt{0.00098} = 0.0313$

La matrice Q est choisie de manière à avoir un temps de réponse en pression collecteur de l'ordre d'une seconde.

La stratégie de commande pour les deux actionneurs consiste à diviser le domaine de fonctionnement en deux zones [COL06]. La première zone correspond aux variations de consigne pour des pressions inférieures à la pression atmosphérique. Dans ce cas, le papillon assure le suivi de consigne avec une vanne de décharge entièrement ouverte. Quant à la

deuxième zone, les variations de consigne sont supérieures à la valeur atmosphérique. Dans ce cas, la vanne papillon est totalement ouverte et la vanne de décharge est actionnée de manière à assurer le suivi de consigne en pression collecteur.

Le résultat de simulation de l'application de cette stratégie de commande est illustré par les figures (II.14 et II.15). La figure II.14 montre le suivi de consigne en pression collecteur et la figure II.15 montre la réponse des actionneurs d'air (papillon et wastegate) correspondant. Les actionneurs sont saturés comme il faut : lorsque la consigne de pression est inférieure à la pression atmosphérique, la vanne de décharge est complètement ouverte (0 % de fermeture) ; lors d'un transitoire montant, le papillon et la vanne de décharge sont à 100 % ; lorsque la consigne de pression est supérieur à la pression atmosphérique, le papillon est à 100 % d'ouverture.

Des tests en simulation à différents régimes ont été réalisés. Ces derniers ont aussi montré de bonnes performances, malgré la présence d'erreurs de modélisation dans le modèle d'état. En effet, les approximations utilisées dans la modélisation ainsi que les hypothèses simplificatrices engendrent forcément des pertes d'information. Allant dans ce sens, le chapitre III traite le problème de la commande robuste des modèles TS incertains.

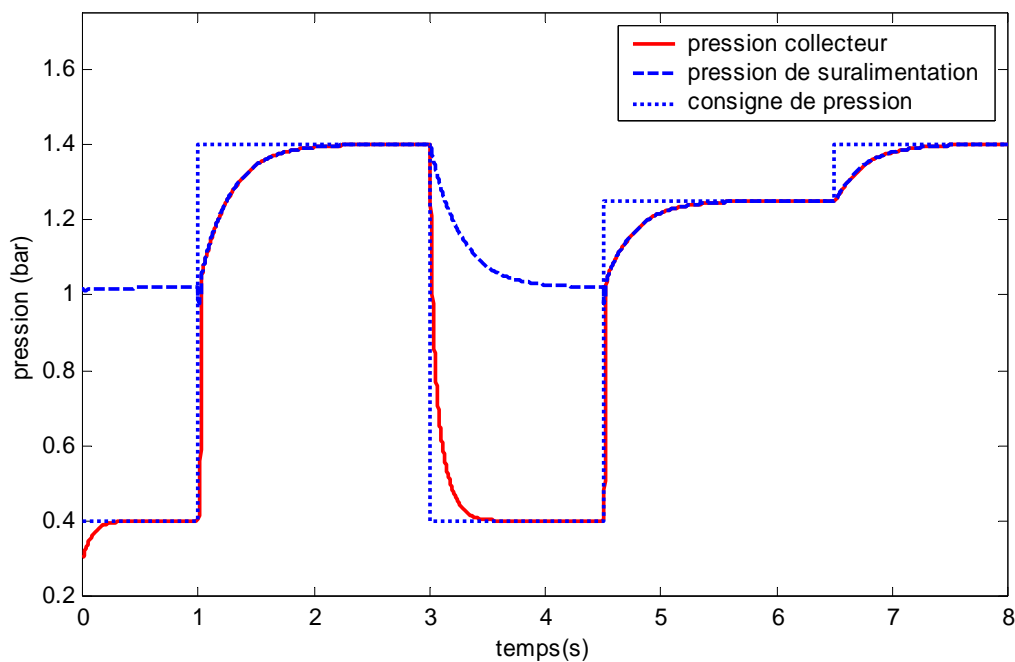


Figure II.14. Suivi de consigne en pression collecteur du moteur turbocompressé à $3000 \text{ trs} \cdot \text{min}^{-1}$

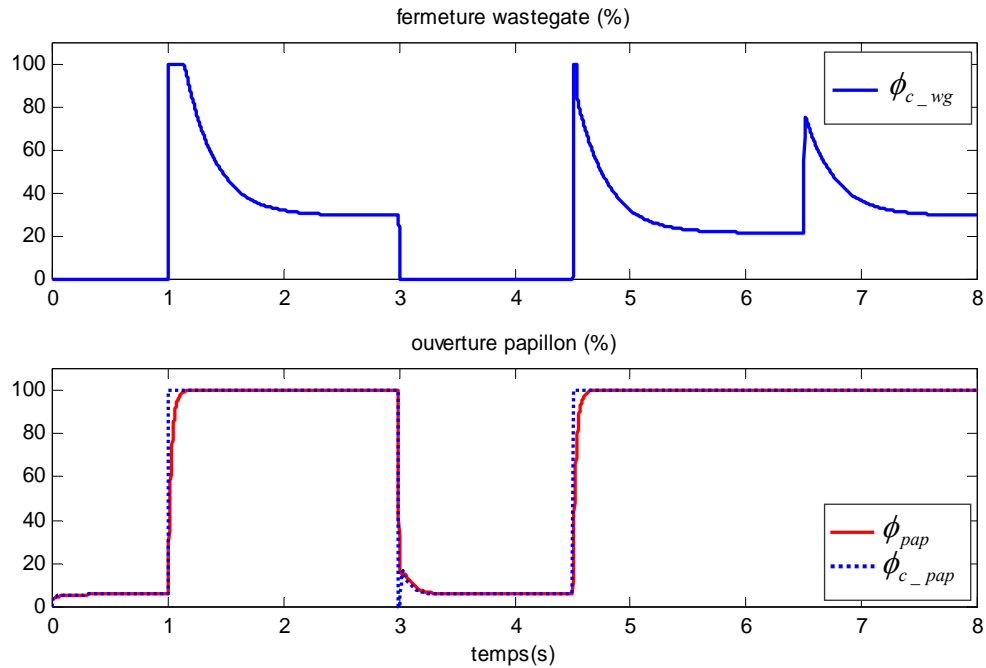


Figure II.15. Commande des actionneurs du moteur turbocompressé à $3000 \text{ trs} \cdot \text{min}^{-1}$

II.6 Conclusion

Dans ce chapitre, la synthèse et l'application de la loi de commande floue avec critère de performance H^∞ sur le circuit d'air d'un moteur thermique à allumage commandé avec et sans suralimentation en air ont été présentées. L'objectif est d'améliorer les performances du moteur en matière de consommation de carburant et de couple moteur fourni.

L'approche de commande s'appuie sur la représentation par des modèles flous de type Takagi-Sugeno (TS). L'intérêt de ce type de modèles est d'arriver à obtenir une méthodologie systématique d'obtention des lois de commande. Néanmoins, il reste des restrictions au niveau du nombre de règles qui ne doit pas être trop grand pour ne pas avoir des conditions très conservatives. Une étude non exhaustive de la stabilité et de la stabilisation a été d'abord présentée. Le problème de suivi de consigne des modèles TS avec critère H^∞ pour le cas sans et avec observateur a été ensuite détaillé. Les résultats ainsi développés se présentent sous forme BMI, une méthode pour résoudre ce problème a été exposée. Enfin, l'approche présentée ne concerne que les modèles certains et perturbés. Dans le chapitre qui suit, nous présentons une méthode employant la même approche H^∞ dont les résultats seront présentés sous forme de LMI, et prenant en considération les modèles TS incertains.

Chapitre III :
Approche robuste pour la stabilisation
de modèles flous TS incertains

Chapitre III : Approche robuste pour la stabilisation de modèles flous TS incertains

III.1 Introduction

Ce dernier chapitre est consacré à la présentation d'une loi de commande PDC robuste prenant en compte un critère de performance ainsi que des incertitudes de modélisation. On s'intéresse principalement à la stabilisation des modèles TS perturbés avec incertitudes paramétriques bornées sans et avec observateur. La littérature dans ce domaine commence à être abondante, les résultats principaux sont donnés dans un contexte de commande principalement, i.e. sans observateur [TAN01]. Lorsque la commande est considérée dans son ensemble, i.e. avec observateur et avec des incertitudes de modélisation, les résultats sont nettement moins nombreux, et le plus souvent très conservatifs [LAU03]. La commande avec observateur et variables de prémisses mesurables est abordée par [YON00] avec le principe de séparation. En revanche dans le cas où les variables de prémisses ne sont pas mesurables, dans [LAU03] l'auteur considère le découpage sur les variables non mesurables comme des incertitudes de modélisation.

Ce chapitre est donc structuré de la manière suivante : Une première partie est consacrée au problème de stabilisation dans le cas où tous les états sont disponibles. Dans ce cas, les conditions obtenues se mettent directement sous forme LMI. La deuxième partie considère la commande dans son ensemble, i.e. avec observateur. Les résultats sont également exprimés sous forme LMI. A la fin de chaque partie, un exemple de simulation est présenté afin d'illustrer la faisabilité des conditions LMI. La dernière partie est consacrée à l'application des conditions obtenues pour la commande du moteur thermique, afin d'assurer

un suivi de consigne en couple. Notons que cette variable n'est pas mesurable sur les véhicules de série. La solution la plus répandue consiste à utiliser un modèle statique qui permet d'estimer le couple à partir de variables disponibles à la mesure.

III.2 Synthèse de commande sans observateur

Soit le modèle flou TS incertain et perturbé défini comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) [(A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) + D_1 w(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) (C_i + \Delta C_i)x(t) + D_2 w(t) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Nous supposons dans un premier temps que l'état est totalement disponible. Les matrices A_i, B_i, C_i, D_1 et D_2 sont de dimensions appropriées et $w(t)$ correspond aux perturbations et aux bruits de mesures. $\Delta A_i, \Delta B_i$ et ΔC_i représentent les incertitudes du modèle qui peuvent être soit des incertitudes paramétriques ou dues à des incertitudes de modélisation. Ces incertitudes sont exprimées dans notre cas de la manière suivante :

$$\Delta A_i = H_a F_{ai}(t) E_{ai}, \Delta B_i = H_b F_{bi}(t) E_{bi} \text{ et } \Delta C_i = H_c F_{ci}(t) E_{ci} \quad (\text{III.2})$$

avec $H_a, H_b, H_c, E_{ai}, E_{bi}$ et E_{ci} des matrices constantes, et les matrices incertaines $F_{ai}(t), F_{bi}(t)$ et $F_{ci}(t)$, bornées de la façon suivante :

$$F_{ai}(t)^T F_{ai}(t) \leq I, F_{bi}(t)^T F_{bi}(t) \leq I \text{ et } F_{ci}(t)^T F_{ci}(t) \leq I \quad (\text{III.3})$$

L'atténuation H_∞ liée au vecteur d'état est défini comme suit :

$$\int_0^{tf} x(t)^T Q x(t) dt \leq x(0)^T P(0) x(0) + \eta^2 \int_0^{tf} w(t)^T w(t) dt \quad (\text{III.4})$$

où Q est une matrice définie positive, η est le taux d'atténuation à minimiser et $x(0)$ est le vecteur des conditions initiales.

Comme dans le cas classique, la loi de commande utilisée pour la stabilisation est de type PDC :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) K_i x(t) \quad (\text{III.5})$$

Pour obtenir le modèle flou en boucle fermée, on applique la commande PDC (III.5) au modèle TS (III.1). Ainsi, le modèle TS obtenu prend la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (G_{ij} x(t) + F w(t)) \quad (\text{III.6})$$

avec :

$$G_{ij} = A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j \quad \text{et} \quad F = D_1 \quad (\text{III.7})$$

Considérons la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) \quad \text{avec} \quad P = P^T > 0 \quad (\text{III.8})$$

Pour montrer la stabilité du modèle en boucle fermée (III.6) tout en garantissant la performance H^∞ (III.4), nous devons vérifier la contrainte suivante :

$$\frac{dV(x(t))}{dt} + x(t)^T Q x(t) - \eta^2 w(t)^T w(t) \leq 0 \quad (\text{III.9})$$

En dérivant la fonction de Lyapunov (III.8) et d'après (III.6), l'inégalité (III.9) devient :

$$x(t)^T (G_{ij}^T P + P G_{ij} + Q) x(t) + w(t)^T F^T P x(t) + x(t)^T P F w(t) - \eta^2 w(t)^T w(t) \leq 0 \quad (\text{III.10})$$

L'inégalité (III.10) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G_{ij}^T P + P G_{ij} + Q & P F \\ F^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.11})$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} G_{ij}^T P + P G_{ij} + Q & PF \\ F^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.12})$$

En remplaçant les matrices définies en (III.7), on obtient :

$$\begin{bmatrix} (A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j)^T P + P(A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j) + Q & P D_1 \\ D_1^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.13})$$

Afin de pouvoir résoudre cette condition, on effectue une séparation des incertitudes du système, l'inégalité (III.13) peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$\Pi + \Delta \Pi \leq 0 \quad (\text{III.14})$$

avec :

$$\Pi = \begin{bmatrix} (A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) + Q & P D_1 \\ D_1^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

et

$$\Delta \Pi = \begin{bmatrix} (\Delta A_i - \Delta B_i K_j)^T P + P(\Delta A_i - \Delta B_i K_j) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

En remplaçant les incertitudes définies en (III.2), (III.16) devient :

$$\Delta \Pi = \begin{bmatrix} E_{ai}^T F_{ai}(t)^T H_a^T P + P H_a F_{ai}(t) E_{ai} - K_j^T E_{bi}^T F_{bi}(t)^T H_b^T P - P H_b F_{bi}(t) E_{bi} K_j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En procédant à l'élimination de certains éléments de la matrice grâce à la procédure détaillée dans le lemme B.3 de l'annexe B, nous pouvons de la même manière éliminer les éléments anti-diagonaux de la matrice incertaine $\Delta \Pi$. Ainsi, $\Delta \Pi$ se retrouve majorée de la façon suivante :

$$\Delta \Pi \leq \begin{bmatrix} \tau_1 E_{ai}^T E_{ai} + \tau_1^{-1} P H_a H_a^T P + \tau_2 K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j + \tau_2^{-1} P H_b H_b^T P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.17})$$

avec τ_1 et τ_2 des paramètres constants qui peuvent être fixés ou recherchés.

Grâce à (III.17), l'inégalité (III.14) est donc équivalente à :

$$\begin{bmatrix} P(A_i - B_i K_j) + I + Q + \tau_1 E_{ai}^T E_{ai} + \tau_1^{-1} P H_a H_a^T P + \tau_2 K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j + \tau_2^{-1} P H_b H_b^T P & P D_1 \\ D_1^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.18})$$

avec $I = (A_i - B_i K_j)^T P$.

Pour aboutir à une condition LMI, nous effectuons un changement de variable en pré et post multipliant (III.18) par $\text{diag}[X \quad I]$ avec $X = P^{-1}$. En posant :

$$S_{ij} = X A_i^T + A_i X - N_j^T B_i^T - B_i N_j + \tau_1^{-1} H_a H_a^T + \tau_2^{-1} H_b H_b^T + X Q X + \tau_1 X E_{ai}^T E_{ai} X + \tau_2 N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j$$

on obtient :

$$\begin{bmatrix} S_{ij} & D_1 \\ D_1^T & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.19})$$

Avec des compléments de Schur effectués sur le bloc S_{ij} , on retrouve l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} X A_i^T + A_i X - N_j^T B_i^T - B_i N_j + \tau_1^{-1} H_a H_a^T + \tau_2^{-1} H_b H_b^T & X & X E_{ai}^T & N_j^T E_{bi}^T & D_1 \\ X & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai} X & 0 & -\tau_1^{-1} I & 0 & 0 \\ E_{bi} N_j & 0 & 0 & -\tau_2^{-1} I & 0 \\ D_1^T & 0 & 0 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.20})$$

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}$$

Ainsi, en utilisant la relaxation donnée par Tanaka et Sano [TAN94] (Annexe B), le résultat exprimé ci-dessus donne une condition suffisante assurant la stabilité du modèle TS incertain (III.6) avec atténuation des perturbations.

Proposition III.1 :

S'il existe une matrice symétrique définie positive $X = X^T > 0$ et des constantes positives τ_1, τ_2 et η , tels que les conditions suivantes sont vérifiées.

$$\gamma_{ii} < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (\text{III.21})$$

$$\gamma_{ij} + \gamma_{ji} < 0, \quad i < j \quad (\text{III.22})$$

avec :

$$\gamma_{ij} = \begin{bmatrix} XA_i^T + A_iX - N_j^T B_i^T - B_i N_j + \tau_1^{-1} H_a H_a^T + \tau_2^{-1} H_b H_b^T & X & XE_{ai}^T & N_j^T E_{bi}^T & D_1 \\ X & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai} X & 0 & -\tau_1^{-1} I & 0 & 0 \\ E_{bi} N_j & 0 & 0 & -\tau_2^{-1} I & 0 \\ D_1^T & 0 & 0 & 0 & -\delta I \end{bmatrix}$$

définie en (III.20) et $\mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) \neq 0$

Alors, la boucle fermée (III.6) est globalement asymptotiquement stable et assure une atténuation H^∞ $\delta = \eta^2 > 0$. Avec les changements de variables bijectifs X , et N_i i.e.

$$P = X^{-1}, \text{ et } K_i = N_i X^{-1}.$$

Dans la suite, un exemple d'illustration est présenté afin de vérifier la faisabilité de l'approche.

Dans [LAU03] l'exemple suivant est proposé.

III.2.1 Exemple :

Considérons le modèle TS incertain décrit par deux modèles locaux ($r = 2$) paramétrés par $(a, b) = (1, -0.5)$ et $\rho = -0.2172$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t)) [(A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) + D_1 w(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t)) (C_i + \Delta C_i)x(t) + D_2 w(t) \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ -1,5 & -3 + (1 + \rho)b \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{a}{2} - 2 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \quad 0]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ -1,5 & -3 + \frac{1 + \rho}{2} b \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{a}{2} - 2 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [1 \quad 0].$$

Les matrices incertaines sont données par :

$$\Delta A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 f_1(x_2) \\ 0 & (1 - \rho)b f_2(x_2) \end{bmatrix}, \quad \Delta A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 f_1(x_1) \\ 0 & \frac{1 - \rho}{2} b f_2(x_2) \end{bmatrix}, \quad \Delta B_1 = \Delta B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} f_1(x_2) \end{bmatrix}$$

et $\Delta C_1 = \Delta C_2 = 0$.

Avec la structure des incertitudes (III.2), on a :

$$\Delta A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x_2) & 0 \\ 0 & f_2(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0 & (1-\rho)b \end{bmatrix}, \quad \Delta A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x_2) & 0 \\ 0 & f_2(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0 & (1-\rho)b/2 \end{bmatrix}$$

et $\Delta B_1 = \Delta B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f_1(x_2) \frac{a}{2}$.

Ce qui implique :

$$H_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H_c = [0 \quad 0],$$

$$E_{a1} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0 & (1-\rho)b \end{bmatrix}, \quad E_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0 & \frac{1-\rho}{2}b \end{bmatrix}, \quad E_{b1} = E_{b2} = \frac{a}{2} \text{ et } E_{c1} = E_{c2} = 0.$$

Les fonctions d'appartenance du modèle flou sont :

$$w_0^1(x_1) = \frac{1}{1+x_1^2} \quad \text{et} \quad w_1^1(x_1) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2}.$$

Les fonctions d'activation sont données suivant l'équation (II.6) comme suit :

$$\mu_1(z) = w_0^1(x_1) \quad \text{et} \quad \mu_2(z) = w_1^1(x_1).$$

Les gains de la loi de commande avec la matrice de pondération $Q = \text{diag}[10^{-20} \quad 10^{-20}]$ sont obtenus en considérant les conditions de la Proposition III.1. Ainsi, à partir de (III.21) et (III.22), on obtient :

$$K_1 = [1,2193 \quad -0,4097], \quad K_2 = [1,6405 \quad -0,3772], \quad P = \begin{bmatrix} 0,3939 & -0,0587 \\ -0,0587 & 0,2298 \end{bmatrix} 10^{-8}$$

et le taux d'atténuation minimisé est : $\eta = \sqrt{0.009} = 0.0949$.

La figure III.1 présente l'allure des états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ au cours du temps pour la condition initiale $x(0)^T = [-1 \quad 1]$. On peut voir que la convergence des états vers le point d'équilibre est assurée.

La stabilisation des modèles TS incertains par retour d'état (loi de commande PDC) nécessite de disposer de tout le vecteur d'état. Comme cette condition est rarement satisfaite, l'usage d'un observateur devient nécessaire.

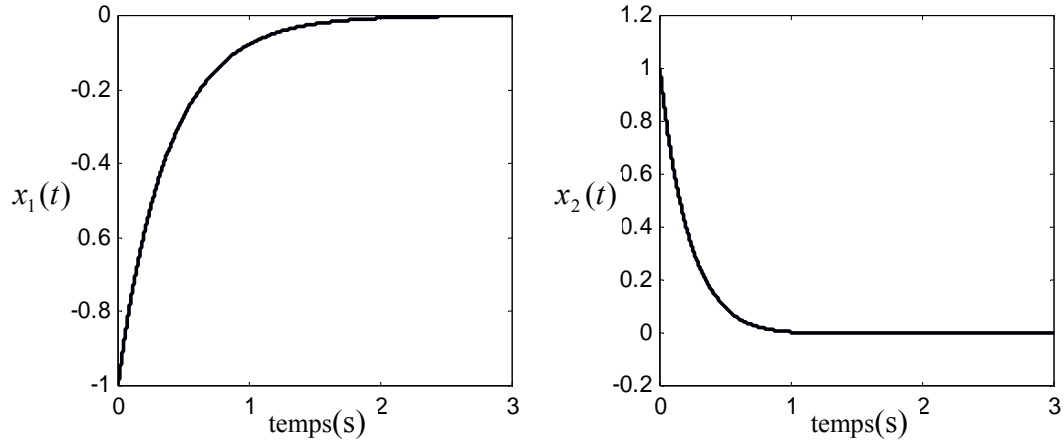


Figure III.1. Évolution des deux d'états pour la condition initiale $(-1, 1)$

III.3 Synthèse de commande avec observateur

Dans cette section, on s'intéresse à la synthèse de commande avec observateur. Les variables de prémisses sont considérées mesurables. Dans le cas où ces dernières ne sont pas mesurables, l'apparition de triples sommes, i.e. $\mu_i(z(t))\mu_j(\hat{z}(t))\mu_k(\hat{z}(t))$, dans le modèle complet avec observateur, ne permet pas d'aboutir à des résultats exploitables.

L'observateur utilisé sur le modèle incertain (III.1) est exprimé par la représentation floue TS de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

La loi de commande PDC (III.5) est ainsi réécrite en fonction de $\hat{x}(t)$ comme suit :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) K_i \hat{x}(t) \quad (\text{III.25})$$

Ainsi, pour aboutir à des résultats sous forme de LMI, on définit une variable augmenté $\bar{x}(t)$ composé de l'erreur d'estimation $e_o(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, et de la variable d'état $x(t)$.

En appliquant la commande (III.25) au modèle TS incertain (III.1), on obtient la dynamique en boucle fermée suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \left[(A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j) \hat{x}(t) + (B_i K_j + \Delta B_i K_j) e_o(t) + D_1 w(t) \right] \quad (\text{III.26})$$

La dynamique de l'erreur d'estimation s'écrit de la façon suivante :

$$\dot{e}_o(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \left[(A_i - L_i C_j + \Delta B_i K_j) e_o(t) + (\Delta A_i - L_i \Delta C_j - \Delta B_i K_j) \hat{x}(t) + (D_1 - L_i D_2) w(t) \right] \quad (\text{III.27})$$

Par conséquent, à partir des dynamiques (III.26) et (III.27), nous pouvons définir le système augmenté suivant :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (G_{ij} \bar{x}(t) + F_i w(t)) \quad (\text{III.28})$$

avec :

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - L_i C_j + \Delta B_i K_j & \Delta A_i - L_i \Delta C_j - \Delta B_i K_j \\ B_i K_j + \Delta B_i K_j & A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j \end{bmatrix}, F_i = \begin{bmatrix} D_1 - L_i D_2 \\ D_1 \end{bmatrix} \text{ et } \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} e_o(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

Les incertitudes sont décrites de la même façon que précédemment ; eqts (III.2 et III.3).

Dans ce cas, le critère H_∞ correspondant à la structure du système augmenté s'écrit :

$$\int_0^{t_f} x(t)^T Q x(t) dt = \int_0^{t_f} \bar{x}(t)^T \bar{Q} \bar{x}(t) dt \leq \bar{x}(0)^T P(0) \bar{x}(0) + \eta^2 \int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt \quad (\text{III.30})$$

où $\bar{x}(0)$ représente le vecteur des conditions initiales du système (III.28), et $\bar{Q} = \text{diag}[0 \quad Q]$.

La fonction de Lyapunov est définie en fonction de l'état augmenté $\bar{x}(t)$.

$$V(\bar{x}(t)) = \bar{x}(t)^T P \bar{x}(t) \text{ avec } P = P^T > 0 \quad (\text{III.31})$$

Pour assurer la stabilité quadratique du système en boucle fermée (III.28) tout en garantissant la performance H_∞ (III.30) avec un taux d'atténuation η , l'inégalité suivante doit être vérifiée :

$$\frac{dV(\bar{x}(t))}{dt} + \bar{x}(t)^T \bar{Q} \bar{x}(t) - \eta^2 w(t)^T w(t) \leq 0 \quad (\text{III.32})$$

Ainsi, en dérivant la fonction de Lyapunov (III.31) et d'après (III.28), on aboutit à l'inégalité suivante :

$$\bar{x}(t)^T (G_{ij}^T P + P G_{ij} + \bar{Q}) \bar{x}(t) + w(t)^T F_i^T P \bar{x}(t) + \bar{x}(t)^T P F_i w(t) - \eta^2 w(t)^T w(t) \leq 0 \quad (\text{III.33})$$

Cette inégalité peut s'écrire sous la forme quadratique suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G_{ij}^T P + P G_{ij} + \bar{Q} & P F_i \\ F_i^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.34})$$

En l'occurrence :

$$\begin{bmatrix} G_{ij}^T P + P G_{ij} + \bar{Q} & P F_i \\ F_i^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.35})$$

En posant $P = \text{diag}[P_1 \ P_2]$ et en remplaçant les matrices augmentées définies en (III.29), l'inégalité (III.35) devient :

$$\begin{bmatrix} (A_i - L_i C_j + \Delta B_i K_j)^T P_1 + J & (B_i K_j + \Delta B_i K_j)^T P_2 + P_1 (\Delta A_i - L_i \Delta C_j - \Delta B_i K_j) & P_1 (D_1 - L_i D_2) \\ (\Delta A_i - L_i \Delta C_j - \Delta B_i K_j)^T P_1 + P_2 (B_i K_j + \Delta B_i K_j) & (A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j)^T P_2 + K & P_2 D_1 \\ (D_1 - L_i D_2)^T P_1 & D_1^T P_2 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

avec $J = P_1 (A_i - L_i C_j + \Delta B_i K_j)$ et $K = P_2 (A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j)$.

On effectue une séparation des termes contenant les incertitudes, ce qui permet d'exprimer (III.36) comme suit :

$$\Pi + \Delta \Pi \leq 0 \quad (\text{III.37})$$

avec :

$$\Pi = \begin{bmatrix} (A_i - L_i C_j)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C_j) & (B_i K_j)^T P_2 & P_1 (D_1 - L_i D_2) \\ P_2 (B_i K_j) & (A_i - B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_j) + Q & P_2 D_1 \\ (D_1 - L_i D_2)^T P_1 & D_1^T P_2 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \quad (\text{III.38})$$

et

$$\Delta \Pi = \begin{bmatrix} (\Delta B_i K_j)^T P_1 + P_1 (\Delta B_i K_j) & (\Delta B_i K_j)^T P_2 + P_1 (\Delta A_i - L_i \Delta C_j - \Delta B_i K_j) & 0 \\ (\Delta A_i - L_i \Delta C_j - \Delta B_i K_j)^T P_1 + P_2 (\Delta B_i K_j) & (\Delta A_i - \Delta B_i K_j)^T P_2 + P_2 (\Delta A_i - \Delta B_i K_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.39})$$

En utilisant l'expression (III.2) relative aux incertitudes du système, (III.39) devient :

$$\Delta\Pi = \begin{bmatrix} P_1 H_b F_{bi}(t) E_{bi} K_j + L & K_j^T E_{bi}^T F_{bi}^T(t) H_b^T P_2 + P_1 H_a F_{ai}(t) E_{ai} - P_1 L_i H_c F_{cj}(t) E_{cj} - P_1 H_b F_{bi}(t) E_{bi} K_j & 0 \\ M & P_2 H_a F_{ai}(t) E_{ai} - P_2 H_b F_{bi}(t) E_{bi} K_j + N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec $L = (P_1 H_b F_{bi}(t) E_{bi} K_j)^T$, $M = (K_j^T E_{bi}^T F_{bi}^T(t) H_b^T P_2 + P_1 H_a F_{ai}(t) E_{ai} - P_1 L_i H_c F_{cj}(t) E_{cj} - P_1 H_b F_{bi}(t) E_{bi} K_j)^T$

et $N = (P_2 H_a F_{ai}(t) E_{ai} - P_2 H_b F_{bi}(t) E_{bi} K_j)^T$.

Pour éliminer les éléments anti-diagonaux nous avons utilisé également le lemme B.3 [TAN94] de l'Annexe B. par conséquent, la matrice contenant les incertitudes peut être bornée de la façon suivante :

$$\Delta\Pi \leq \text{diag}[d_1 \quad d_2 \quad 0] \quad (\text{III.40})$$

avec :

$$d_1 = (\tau_1 + \tau_4^{-1}) K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j + (\tau_1^{-1} + \tau_7^{-1}) P_1 H_b H_b^T P_1 + \tau_5^{-1} P_1 H_a H_a^T P_1 + \tau_6^{-1} P_1 L_i H_c H_c^T L_i^T P_1$$

$$d_2 = (\tau_2 + \tau_5) E_{ai}^T E_{ai} + (\tau_3 + \tau_7) K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j + (\tau_3^{-1} + \tau_4) P_2 H_b H_b^T P_2 + \tau_2^{-1} P_2 H_a H_a^T P_2 + \tau_6 E_{cj}^T E_{cj}$$

Alors, l'inégalité (III.37) implique :

$$\begin{bmatrix} (A_i - L_i C_j)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C_j) + d_1 & (B_i K_j)^T P_2 & P_1 (D_1 - L_i D_2) \\ P_2 (B_i K_j) & (A_i - B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_j) + Q + d_2 & P_2 D_1 \\ (D_1 - L_i D_2)^T P_1 & D_1^T P_2 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.41})$$

L'inégalité ainsi trouvée n'est pas encore LMI. Ainsi, pour remettre la matrice (III.41) sous forme homogène du point de vue des variables inconnues à rechercher, on effectue une congruence par la matrice (III.42) en faisant permuter les lignes et les colonnes de la matrice (III.41) suivant l'ordre 1,3 et 2.

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.42})$$

Ainsi, l'inégalité (III.41) devient :

$$\begin{bmatrix} (A_i - L_i C_j)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C_j) + d_1 & P_1 (D_1 - L_i D_2) & (B_i K_j)^T P_2 \\ (D_1 - L_i D_2)^T P_1 & -\eta^2 I & D_1^T P_2 \\ P_2 (B_i K_j) & P_2 D_1 & (A_i - B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_j) + Q + d_2 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.43})$$

On procède maintenant à un changement de variable en pré et post multipliant l'inégalité (III.43) par la matrice $\text{diag}[X_2 \quad I \quad X_2]$ avec $X_2 = P_2^{-1}$, $K_i = N_i X_2^{-1}$ et $y_i = P_1 L_i$. On obtient :

$$\left[\begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{cc} X_2 & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \Omega_1 \left[\begin{array}{cc} X_2 & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} (\tau_1 + \tau_4^{-1}) N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} N_j^T B_i^T \\ D_1^T \end{array} \right] \\ \hline B_i N_j & D_1 \\ \hline & \Omega_2 \end{array} \right] \leq 0 \quad (\text{III.44})$$

avec :

$$\Omega_1 = \left[\begin{array}{cc} (A_i - L_i C_j)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C_j) + (\tau_1^{-1} + \tau_7^{-1}) P_1 H_b H_b^T P_1 + \tau_5^{-1} P_1 H_a H_a^T P_1 + \tau_6^{-1} y_i H_c H_c^T y_i^T & P_1 D_1 - y_i D_2 \\ D_1^T P_1 - D_2^T y_i^T & -\eta^2 I \end{array} \right]$$

$$\Omega_2 = X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_j^T B_i^T - B_i N_j + X_2 Q X_2 + (\tau_3^{-1} + \tau_4) H_b H_b^T + \tau_2^{-1} H_a H_a^T + (\tau_2 + \tau_5) X_2 E_{ai}^T E_{ai} X_2 + (\tau_3 + \tau_7) N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j + \tau_6 X_2 E_{cj}^T E_{cj} X_2$$

Pour éliminer les termes non LMI, on applique le lemme B.1 (annexe B) sur le premier bloc diagonal de (III.44). On obtient :

$$\left[\begin{array}{cc} X_2 & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \Omega_1 \left[\begin{array}{cc} X_2 & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} (\tau_1 + \tau_4^{-1}) N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \leq -2\alpha \left[\begin{array}{cc} X_2 & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] - \alpha^2 \Omega_1^{-1} + \left[\begin{array}{cc} (\tau_1 + \tau_4^{-1}) N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \\ = \left[\begin{array}{cc} -2\alpha X_2 + (\tau_1 + \tau_4^{-1}) N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j & 0 \\ 0 & -2\alpha I \end{array} \right] - \alpha^2 \Omega_1^{-1} \quad (\text{III.45})$$

Ensuite, en appliquant un complément de Schur, (III.45) devient :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2\alpha X_2 + (\tau_1 + \tau_4^{-1}) N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j & 0 & \alpha & & & 0 \\ 0 & -2\alpha I & 0 & & & \alpha I \\ \alpha & 0 & (A_i - L_i C_j)^T P_1 + S + (\tau_1^{-1} + \tau_7^{-1}) P_1 H_b H_b^T P_1 + \tau_5^{-1} P_1 H_a H_a^T P_1 + \tau_6^{-1} y_i H_c H_c^T y_i^T & & & T \\ 0 & \alpha & D_1^T P_1 - D_2^T y_i^T & & & -\eta^2 I \end{array} \right] \quad (\text{III.46})$$

Avec $S = P_1 (A_i - L_i C_j)$ et $T = P_1 D_1 - y_i D_2$.

Enfin, en injectant la contrainte (III.46) dans (III.44), on obtient l'inégalité :

$$\begin{bmatrix} H_{11} & 0 & \alpha I & 0 & N_j^T B_i^T \\ 0 & -2\alpha I & 0 & \alpha I & 0 \\ \alpha I & 0 & H_{33} & P_1 D_1 - y_i D_2 & 0 \\ 0 & \alpha I & D_1^T P_1 - D_2^T y_i^T & -\eta^2 I & D_1^T \\ B_i N_j & 0 & 0 & D_1 & H_{55} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{III.47})$$

avec :

$$\begin{aligned} H_{11} &= -2\alpha X_2 + (\tau_1 + \tau_4^{-1}) N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j \\ H_{33} &= A_i^T P_1 + P_1 A_i - C_j^T y_i^T - y_i C_j + (\tau_1^{-1} + \tau_7^{-1}) P_1 H_b H_b^T P_1 + \tau_5^{-1} P_1 H_a H_a^T P_1 + \tau_6^{-1} y_i H_c H_c^T y_i^T \\ H_{55} &= X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_j^T B_i^T - B_i N_j + X_2 Q X_2 + (\tau_3^{-1} + \tau_4) H_b H_b^T + \tau_2^{-1} H_a H_a^T + (\tau_2 + \tau_5) X_2 E_{ai}^T E_{ai} X_2 \\ &\quad + (\tau_3 + \tau_7) N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j + \tau_6 X_2 E_{cj}^T E_{cj} X_2 \end{aligned}$$

Avec des compléments de Schur sur les blocs diagonaux H_{11} , H_{33} et H_{55} , on obtient l'inégalité suivante :

$$\left[\begin{array}{c|c} \Gamma & \Lambda^T \\ \hline \Lambda & \Psi \end{array} \right] \leq 0 \quad (\text{III.48})$$

avec :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} B_i N_j & \mathbf{0}_{1 \times 7} & D_1 \\ \mathbf{0}_{6 \times 1} & \mathbf{0}_{6 \times 7} & \mathbf{0}_{6 \times 1} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2\alpha X_2 & (*) & (*) & 0 & (*) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi} N_j & -\tau_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi} N_j & 0 & -\tau_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (*) \\ \alpha I & 0 & 0 & 0 & A_i^T P_1 + P_1 A_i - C_j^T y_i^T - y_i C_j & (*) & (*) & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_b^T P_1 & -(\tau_1^{-1} + \tau_7^{-1})^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_a^T P_1 & 0 & -\tau_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_c^T y_i^T & 0 & 0 & -\tau_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha I & D_1^T P_1 - D_2^T y_i^T & 0 & 0 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix}$$

et

$$\Psi = \begin{bmatrix} X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_j^T B_i^T - B_i N_j + (\tau_3^{-1} + \tau_4) H_b H_b^T + \tau_2^{-1} H_a H_a^T & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ X_2 & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai} X_2 & 0 & -\tau_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai} X_2 & 0 & 0 & -\tau_5^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi} N_j & 0 & 0 & 0 & -\tau_3^{-1} & 0 & 0 \\ E_{bi} N_j & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau_7^{-1} & 0 \\ E_{cj} X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau_6^{-1} \end{bmatrix}$$

La notation (*) correspond à la transposée d'un élément d'une matrice symétrique.

Pour réduire d'avantage le conservatisme de la LMI (III.48), on utilise la relaxation de Tanaka et Sano [TAN94] (Annexe B). On peut ainsi énoncer le résultat suivant :

Proposition III.2 :

S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_1 = P_1^T > 0$ et $X_2 = X_2^T > 0$ et des constantes positives $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, \tau_7$ et η , tels que les conditions suivantes sont vérifiées.

$$\gamma_{ii} < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (\text{III.49})$$

$$\gamma_{ij} + \gamma_{ji} < 0, \quad i < j \quad (\text{III.50})$$

avec $\gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Lambda^T \\ \Lambda & \Psi \end{bmatrix}$ définie en (III.48) et $\mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) \neq 0$

Alors, la boucle fermée (III.28) est globalement asymptotiquement stable et assure une atténuation H_∞ $\delta = \eta^2 > 0$. Avec les changements de variables bijectifs X_2, N_i et y_i i.e.

$$P_2 = X_2^{-1}, \quad K_i = N_i X_2^{-1} \quad \text{et} \quad L_i = P_1^{-1} y_i.$$

III.3.1 Exemple :

Considérons le modèle TS incertain de l'exemple précédent (page.66). La loi de commande est considérée dans ça forme globale, i.e. avec observateur. Dans ce cas, la Proposition III.2 permet à partir des conditions (III.49) et (III.50) d'obtenir :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,0015 & 0,0005 \\ 0,0005 & 0,0008 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0,0020 & -0,0002 \\ -0,0002 & 0,0012 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = [0,4764 \quad -0,1735], \quad K_2 = [0,7124 \quad -0,0561], \quad L_1 = \begin{bmatrix} 9,9484 \\ -8,2845 \end{bmatrix} \text{ et } L_2 = \begin{bmatrix} 5,2855 \\ -1,4952 \end{bmatrix}.$$

Le taux d'atténuation minimisé est : $\eta = \sqrt{0.4089} = 0.6395$ avec $Q = \text{diag}[10^{-20} \quad 10^{-20}]$.

La figure III.2 donne les courbes des états et des états estimés pour les conditions initiales $x(0)^T = [-1 \quad 1]$ et $\hat{x}(0)^T = [0 \quad 0]$. On peut voir que la convergence des états vers le point d'équilibre est lente par rapport au cas précédent, ceci est dû aux gains de commande qui sont relativement faibles. On peut très bien les améliorer, mais le propos était ici simplement de montrer la faisabilité de l'approche.

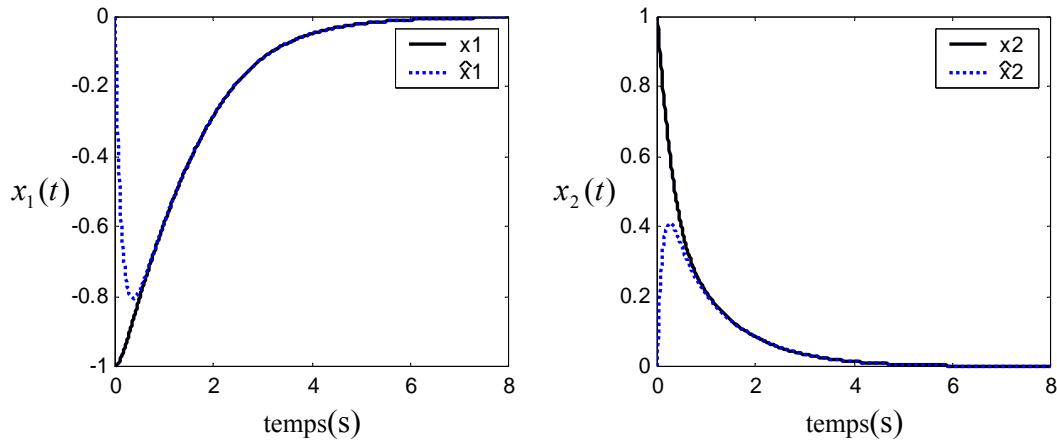


Figure III.2. Représentation des d'états et de leurs estimés

III.4 Application à la commande en couple d'un moteur thermique à allumage commandé

La commande en couple d'un moteur thermique sur un véhicule de série est un problème particulièrement complexe puisque la mesure du couple moteur n'est pas disponible. Pourtant, la maîtrise de ce dernier est un enjeu capital pour l'amélioration des performances globales du véhicule. En effet, le confort de conduite est directement lié au couple du moteur. De plus, les nouvelles boîtes de vitesse robotisées nécessitent une bonne gestion du couple (idéalement, de pouvoir réaliser un suivi de trajectoire en couple). Dans cette partie, c'est une relation statique du couple moteur qui est utilisée. Cette solution est souvent le seul recours pour synthétiser une commande directe en couple des moteurs thermiques [STE96], [LAU03] vue l'inexistence d'une mesure de couple.

L'objectif principal de cette partie, est d'appliquer la loi de commande robuste à la commande en couple d'un moteur thermique à aspiration naturelle. Dans un premier temps, le modèle flou utilisé pour calculer la loi de commande robuste est obtenu à partir des équations représentant la dynamique en couple du moteur. Ensuite, de manière à réaliser un suivi de consigne en couple, la commande robuste est appliquée au modèle flou augmenté avec structure intégrale.

III.4.1 Modèle pour la commande en couple

Le modèle d'état utilisé pour calculer la loi de commande en couple emploie la même structure que celle précédemment utilisée pour la commande de la pression collecteur. Le vecteur d'état reste alors inchangé et la seule différence consiste à prendre comme nouvelle sortie le couple estimé. La dynamique de ce dernier est décrite par un modèle statique basé sur la formulation empirique de l'équation (I.24). Cette dernière est réécrite sous la forme compacte suivante :

$$C_{eff} = g(x_1, \lambda, \delta_{av}, \dot{\theta}) \quad (\text{III.51})$$

Le modèle est alors synthétisé sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)x_2 - f_2(x_1, \dot{\theta})x_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{\tau_{pap}}(-x_2 + u) \\ y = f_3(x_1, \lambda, \delta_{av}, \dot{\theta})x_2 \end{cases} \quad (\text{III.52})$$

$$\text{où } f_3(x_1, \lambda, \delta_{av}, \dot{\theta}) = \frac{C_{eff}(x_1, \lambda, \delta_{av}, \dot{\theta})}{x_2}$$

avec ces bornes : $\underline{f}_3 \leq f_3(\cdot) \leq \bar{f}_3$, $\bar{f}_3 = 3,5$ et $\underline{f}_3 = 1$ [KHI07].

Pour obtenir une représentation floue de type TS, on considère le modèle (III.52) avec des incertitudes de modélisation sur les fonctions $f_1(x_1, x_2)$ et $f_2(x_1, \dot{\theta})$. Le nombre des fonctions non linéaires étant égal à trois. Cela permet d'obtenir le modèle flou TS incertain à huit règles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(z(t)) [(A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) + D_1 w(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(z(t)) (C_i + \Delta C_i)x(t) + D_2 w(t) \end{cases} \quad (\text{III.53})$$

avec les matrices :

$$\begin{aligned} A_1 = A_5 &= \begin{bmatrix} -\bar{f}_2 & \bar{f}_1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{pap}} \end{bmatrix}, & A_2 = A_6 &= \begin{bmatrix} -\bar{f}_2 & \underline{f}_1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{pap}} \end{bmatrix}, \\ A_3 = A_7 &= \begin{bmatrix} -\underline{f}_2 & \bar{f}_1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{pap}} \end{bmatrix}, & A_4 = A_8 &= \begin{bmatrix} -\underline{f}_2 & \underline{f}_1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{pap}} \end{bmatrix}, \\ B_1 = B_2 = \dots = B_8 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \tau_{pap} \end{bmatrix}, & C_1 = \dots = C_4 &= [0 \quad \bar{f}_3], & C_5 = \dots = C_8 &= [0 \quad \underline{f}_3]. \end{aligned}$$

Les erreurs de modélisation sont considérées bornées par une variation d'environ 3% sur chaque fonction $f_1(x_1, x_2)$ et $f_2(x_1, \dot{\theta})$. Ainsi, avec la structure des incertitudes (III.2), on obtient les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} E_{a1} = E_{a5} &= \begin{bmatrix} -0,03\bar{f}_2 & 0,03\bar{f}_1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{pap}} \end{bmatrix}, & E_{a2} = E_{a6} &= \begin{bmatrix} -0,03\bar{f}_2 & 0,03\underline{f}_1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{pap}} \end{bmatrix}, \\ E_{a3} = E_{a7} &= \begin{bmatrix} -0,03\underline{f}_2 & 0,03\bar{f}_1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{pap}} \end{bmatrix}, & E_{a4} = E_{a8} &= \begin{bmatrix} -0,03\underline{f}_2 & 0,03\underline{f}_1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_{pap}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$E_{b1} = E_{b2} = \dots = E_{b8} = 0, \quad E_{c1} = E_{c2} = \dots = E_{c8} = 0,$$

$$H_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_c = [0 \quad 0].$$

III.4.2 Suivi de consigne en couple

De manière à assurer un suivi de consigne en couple, une structure intégrale est ajoutée à la commande PDC. Le modèle (III.53) est alors augmenté de la même façon que celle utilisée dans le chapitre précédent pour le cas du suivi de consigne en pression collecteur. On obtient dans ce cas le modèle augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(z(t)) [(\bar{A}_i + \Delta\bar{A}_i)X(t) + (\bar{B}_i + \Delta\bar{B}_i)u(t) + \bar{D}_1 w(t) + B_c y_c(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^8 \mu_i(z(t)) (\bar{C}_i + \Delta\bar{C}_i)X(t) + D_2 w(t) \end{cases} \quad (\text{III.54})$$

avec le vecteur d'état augmenté : $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix}$, tel que $\dot{x}_I(t) = y_c(t) - y(t)$,

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta\bar{A}_i = \begin{bmatrix} \Delta A_i & 0 \\ -\Delta C_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta\bar{B}_i = \begin{bmatrix} \Delta B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_i = [C_i \quad 0], \quad \Delta\bar{C}_i = [\Delta C_i \quad 0]$$

$$\bar{D}_1 = \begin{bmatrix} D_1 \\ -D_2 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

La loi de commande s'écrit aussi sous une forme augmentée :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^8 \mu_i(z(t)) [K_i \quad -M_i] \begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \end{bmatrix} = -\sum_{i=1}^8 \mu_i(z(t)) \bar{K}_i X(t) \quad (\text{III.55})$$

La représentation (III.55) est encore une forme PDC et permet donc d'utiliser le résultat de la Proposition III.1 pour la stabilisation de la boucle fermée. Ainsi, pour des conditions initiales données, le résultat de l'étude de la stabilité selon Lyapunov reste valable. Autrement dit, le résultat obtenu est valable pour $y_c(t) = 0$. Pour le cas $y_c(t) \neq 0$, la stabilité entrée/sortie (ISS : Input to State Stability) est considérée [SON95].

La synthèse de la loi de commande consiste alors à déterminer les gains augmentés \bar{K}_i . La résolution du problème LMI associé (III.21 et III.22) permet ainsi d'obtenir :

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &= [0.2839 \quad 7.9073 \quad -15.2926], & \bar{K}_2 &= [0.2709 \quad 7.9042 \quad -15.2868] \\ \bar{K}_3 &= [0.3026 \quad 7.9042 \quad -15.2868], & \bar{K}_4 &= [0.2748 \quad 7.9037 \quad -15.2857] \\ \bar{K}_5 &= [0.2594 \quad 7.1714 \quad -13.8963], & \bar{K}_6 &= [0.2461 \quad 7.1684 \quad -13.8905] \\ \bar{K}_7 &= [0.2788 \quad 7.1689 \quad -13.8917], & \bar{K}_8 &= [0.2504 \quad 7.1683 \quad -13.8904] \end{aligned}$$

et le taux d'atténuation minimisé $\eta = \sqrt{0.0033} = 0.0574$.

La matrice de pondération fixée est : $Q = \text{diag}[10^{-8} \quad 10^{-8} \quad 10^{-8}]$, elle est choisie de manière à avoir des conditions LMI réalisables (feasibility), et au même temps, pour avoir un bon comportement transitoire de la réponse en couple. Les valeurs numériques utilisées pour les simulations sont [KHI07] :

σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8
193,440	-281,799	6,559	36,241	-436,053	216,215	790,992	-397,041
σ_9	σ_{10}	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}	σ_{14}	σ_{15}	-
-82,223	-0.009	-0.049	0,050	2,409	-86,251	-0,751	-

Les tests en simulation de l'application de cette loi de commande au moteur considéré sont donnés par les figures (III.3 à III.5).

- La figure III.3 montre un premier test de suivi de consigne en couple sans incertitudes. Le but est de suivre le couple de consigne en présence d'une perturbation représentant une variation de couple de charge.
- Le deuxième test, figure III.4, considère le même suivi de consigne mais en présence d'erreurs. Une erreur de +50% sur le débit entrant dans les cylindres et de -50% sur le débit au niveau papillon.
- Le troisième et dernier test, figure III.5, se place dans le cadre du premier suivi de consigne avec des bruits de mesure.

Les résultats obtenus sont tout à fait satisfaisants. On peut s'apercevoir que malgré des incertitudes de modélisation (figure III.4), des bruits de mesure (figure III.5) sans oublier la perturbation, la loi de commande permet toujours d'assurer le suivi de la consigne avec une dégradation des performances acceptable. Au niveau de la commande, les sollicitations de l'actionneur sont acceptables et ne saturent pas ce dernier. Le temps de réponse en couple est de l'ordre d'une seconde. Le dépassement est nul ce qui est synonyme d'un bon confort de conduite.

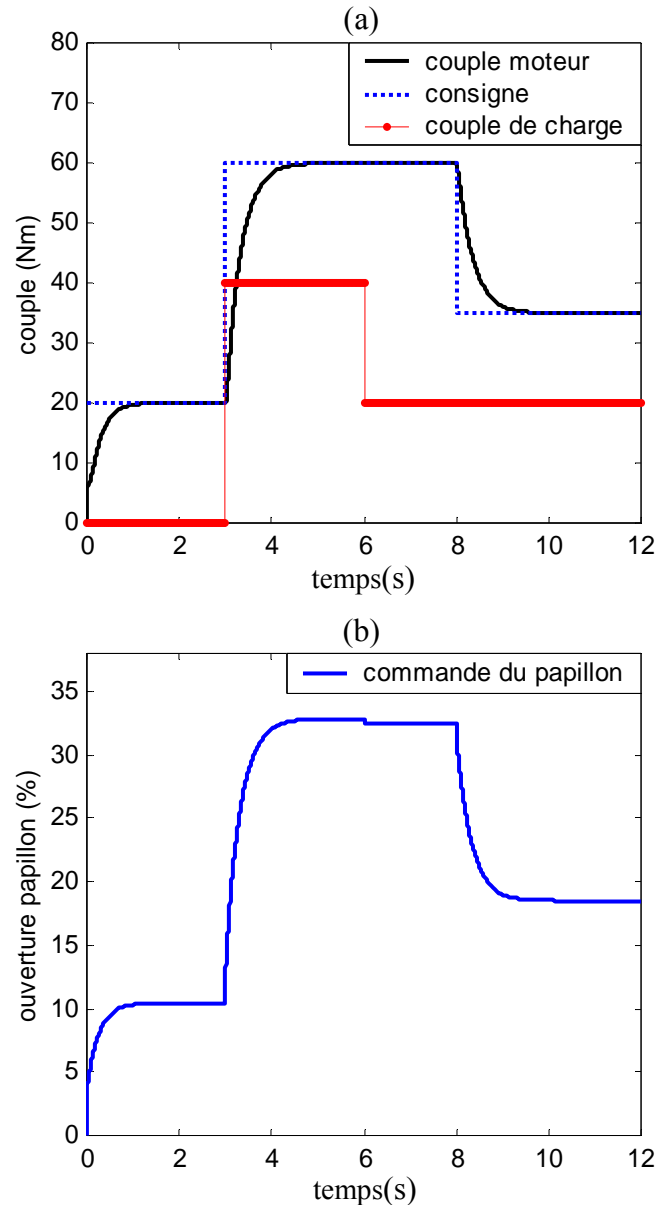
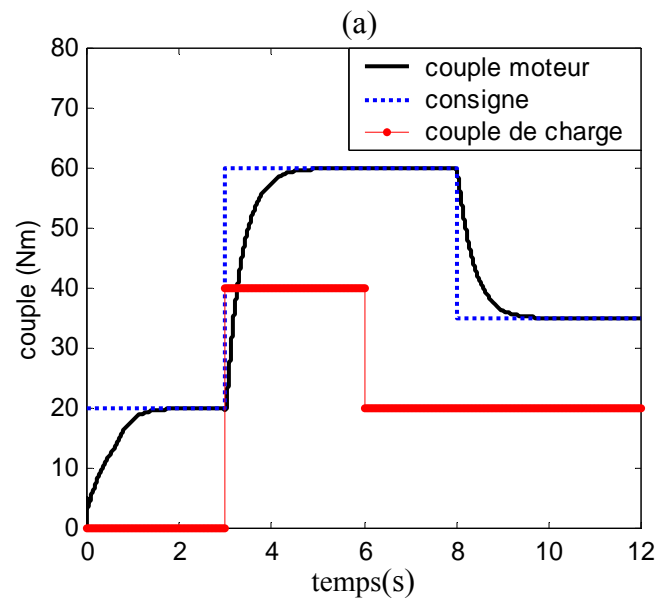


Figure III.3. Suivi de consigne (a) et commande associée (b) ($2500 \text{ trs} \cdot \text{min}^{-1}$)



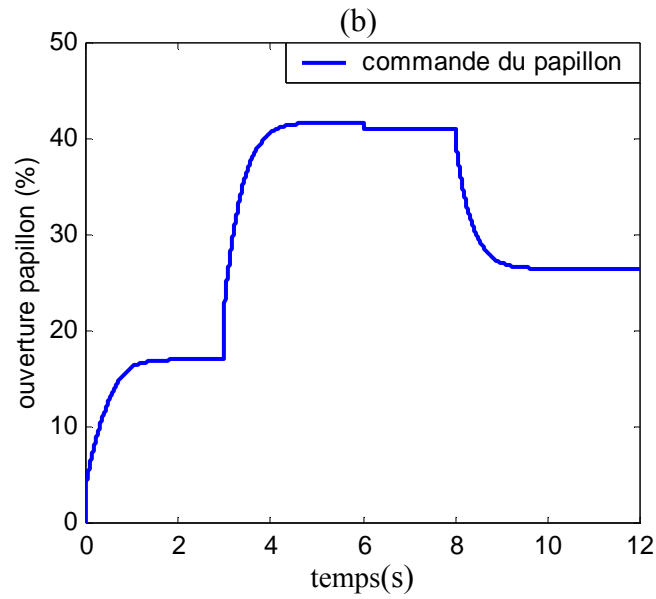


Figure III.4. Suivi de consigne (a) et commande associée (b) avec des incertitudes

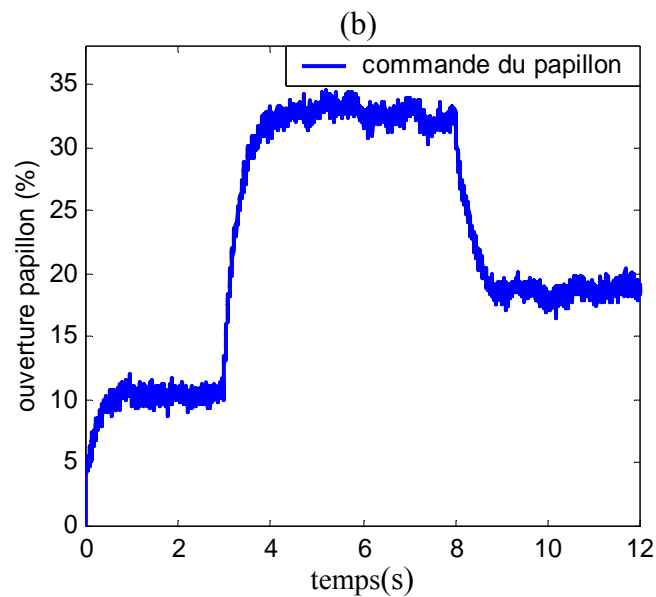
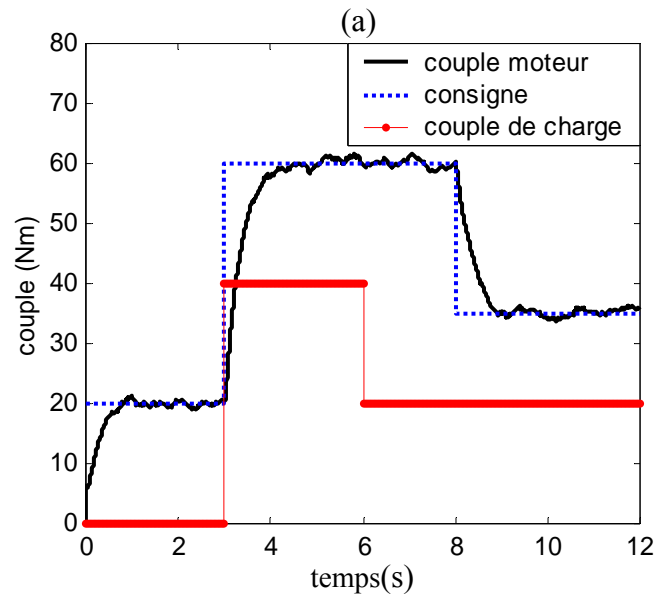


Figure III.5. Suivi de consigne (a) et commande associée (b) avec bruits de mesure

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, des résultats concernant la stabilisation des modèles flous TS incertains avec critère de performance H_∞ ont été présentés. L'étude qui a été menée concerne les modèles TS incertains et perturbés. Dans ce contexte, l'utilisation de nouvelles transformations matricielles a permis d'étendre les résultats existant [YON00], [TAN01]. Elle consiste essentiellement à améliorer l'existant par des mises sous forme de contraintes LMI différentes. Un résultat utilisant des propriétés matricielles moins conservatrices que le complément de Schur a été alors donné dans le cas de la commande seule. Pour le cas de la stabilité de l'ensemble de la boucle, i.e. avec observateur, un résultat a également été donné. Afin de vérifier la faisabilité des contraintes obtenues, un exemple de simulation a été présenté à la fin de chaque résultat. La dernière partie a été consacrée à l'application de la loi de commande sur le circuit d'air d'un moteur thermique à allumage commandé afin de réaliser un suivi de consigne en couple. Des tests en simulation ont montré des résultats tout à fait satisfaisants en terme de performances temporelles et de robustesse par rapport aux erreurs de modélisation et aux bruits de mesure. Comparé à une commande basée sur des cartographies statiques (méthodes conventionnelle utilisée de nos jours pour la commande du moteur thermique), la loi de commande à base de modèles flous TS permet de mieux gérer les transitoires du couple et donne de bons résultats en terme de suivi de la consigne. Ces performances permettent, dans des conditions réelles de fonctionnement, d'assurer un meilleur confort de conduite.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale et perspectives

L'objectif de ce travail est de réaliser la commande du circuit d'air des moteurs thermiques à allumage commandé avec ou sans suralimentation. Ce sujet, pluridisciplinaire (automatique et énergétique), est peu traité dans la littérature en particulier jusqu'à l'application réelle sur moteur et véhicule. Des méthodes à base de modèle ont été alors utilisées. Il a donc été nécessaire d'utiliser des modèles non linéaires des différentes parties mises en jeu pour la commande du circuit d'air d'un moteur thermique à allumage commandé.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté des généralités sur les moteurs thermiques à allumage commandé ainsi que le principe de la réduction de la cylindrée (Downsizing). Ce dernier présente l'avantage de diminuer la consommation de carburant ainsi que les émissions qui en découlent tout en conservant un niveau de performance équivalent à un moteur de plus forte cylindrée. Nous avons ensuite abordé le problème de la modélisation du circuit d'air. La modélisation a été axée sur des modèles dynamiques de l'admission d'air, du turbocompresseur et de la dynamique du vilebrequin. La modélisation des moteurs thermiques est très complexe, à cet effet, et à fin de réduire la complexité et avoir dans ce cas des modèles plus adaptés pour l'application des lois de commande non linéaires, les modèles qui sont choisis se limitent aux modèles dits 'orientés' commande. Ces derniers représentent un compromis entre un modèle trop simple (trop loin de la réalité) et un modèle trop complexe (inutilisable en simulation).

Parmi les différentes parties du moteur, l'admission d'air est un point crucial pour les moteurs thermiques à allumage commandé. En effet, la dynamique globale d'un moteur essence est de l'ordre de celle de l'admission d'air, par conséquent, elle doit être particulièrement soignée pour ne pas pénaliser les performances globales du moteur. Ainsi, la problématique qui est posée se situe au niveau de la commande de l'admission d'air. Cette

dernière est relativement complexe à cause de la multiplicité des actionneurs (commande de la vanne papillon et de la vanne de décharge). En outre, les objectifs de la commande sont multiples : consommation, pollution et performance. Par conséquent, les techniques classiques de commande, reposant sur des actions en boucle ouverte basées sur des cartographies statiques, ne suffisent plus pour commander ce genre de système. Nous avons alors utilisé dans le deuxième chapitre une loi de commande non linéaire à base des modèles flous de type Takagi-Sugeno (TS). L'intérêt particulier de ces modèles est le passage systématique d'un modèle non linéaire affine en la commande à un modèle TS. Ce dernier est constitué d'un ensemble de modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires. Ainsi, avec cette structure, il est possible d'appliquer tous les concepts et les approches de l'automatique classique. Dans la littérature des modèles flous de type TS, la plus part des travaux publiés traitent le problème de stabilisation, et peu de travaux concernant le problème de suivi de consigne (ou trajectoire) sont traités. Nous avons dans ce cas abordé le problème de suivi de consigne avec une structure particulière qui est la structure intégrale. Avec cette structure, nous avons, à partir d'un modèle non linéaire de la pression collecteur, réalisé un suivi de consigne en pression dans le cas d'un moteur à aspiration naturelle avec la vanne papillon comme seul actionneur. Dans le cas d'un moteur turbocompressé, le modèle du moteur prend en compte l'existence d'une suralimentation en air. Dans ce cas, un second actionneur (Wastegate) est à commander. Pour cela, une structure de commande décentralisée permettant de gérer les deux actionneurs nous a permis de réaliser le suivi de la consigne en pression collecteur.

L'étude de la robustesse vis-à-vis des incertitudes de modélisation est importante vu les difficultés concernant l'obtention de modèles très précis du moteur (erreurs de modélisation, hypothèses simplificatrices, paramètres variant dans le temps, ...). Pour étendre l'approche développée dans le chapitre deux, nous nous sommes intéressés dans le chapitre trois à la stabilisation des modèles TS incertains. Les incertitudes structurelles ou paramétriques, qui admissibles et bornées, sont généralement dues à la modélisation ou aux paramètres variant dans le temps. Ainsi, en se basant sur de nouvelles propriétés matricielles, nous avons proposé deux techniques pour garantir la stabilité pour ce type de modèle, un dans le cas de la commande seule, et un autre dans le cas où un observateur est utilisé. La particularité essentielle de ces résultats et qu'ils sont, d'une part obtenus sous forme LMI, et d'autre part résolus directement en une seule étape. Un exemple de simulation nous a permis de tester la faisabilité des conditions obtenues pour chaque résultat. La dernière partie du

chapitre a eu pour but d'appliquer les résultats de robustesse pour la commande en couple du moteur thermique. A travers les tests de simulations, nous avons constaté des résultats tout à fait satisfaisants en terme de performances temporelles et de robustesse par rapport aux erreurs de modélisation et aux bruits de mesure. L'objectif permettant de ramener le couple à sa valeur de consigne en un minimum de temps et avec le moins de dépassement possible a été très bien assuré. Cela se traduit, dans des conditions réelles de fonctionnement, en un meilleur confort de conduite.

L'approche abordée dans ce travail traite les différents asservissements des variables du moteur à allumage commandé de façon indépendantes. Les résultats obtenus sont encourageants quant à l'application des méthodes floues, mais le travail est loin d'être terminé et les perspectives sont nombreuses.

L'un des principaux points sensibles à prendre en considération dans la commande des moteurs thermiques à allumage commandé concerne l'injection d'essence. En général, il s'agit de réguler la richesse du mélange air-essence autour de la stoechiométrie. Divers travaux traitant de cette problématique utilisent une représentation par modèle moyen.

Il est à noter que la variable de commande d'avance à l'allumage a été considérée fixe. Il est donc nécessaire de prévoir son intégration dans les lois de commande futures. Enfin, un diagnostic en ligne devra être ajouté pour détecter d'éventuels ratés d'allumages, apparition de cliquetis ou de problème liés aux injecteurs. Les observateurs à entrée inconnue peuvent être à la base d'une procédure de détection et de localisation de défauts. Une fois que ces différents points seront résolus, une interconnexion des différentes régulations pourra être envisagée, afin de proposer une commande globale du moteur.

Bibliographie

Bibliographie

[AKH06] **A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot, D. Maquin.** Synthèse d'un multiobservateur robuste pour multimodèle incertain à entrées inconnues : approche LMI. CIFA 2006, Bordeaux

[AND01] **P. Andersson and L. Eriksson.** Air-to-cylinder observer on a turbocharged SI-engine with wastegate. Society of Automotive Engineers 2001-01-0262

[AND02] **P. Andersson.** Intake air dynamics on a turbocharged SI-engine with Wastegate. Thesis No. 934. Department of Electrical Engineering Linköping University, SE-581 83 Linköping, Sweden.

[AND04] **P. Andersson and L. Eriksson.** Cylinder air charge estimator in turbocharged SI-engines. SAE International 2004-01-1366

[AND05] **P. Andersson.** Air charge estimation in turbocharged spark ignition engines. Thesis No. 989. Department of Electrical Engineering Linköping University, SE-581 83 Linköping, Sweden.

[ARG07] **R. Argolini and V. Bloisi.** On optimal control of the wastegate in a turbocharged SI engine. Master's Degree Project Stockholm, Sweden June 2007

[ASS08] **W. Assawinchaichote, S. K. Nguang, P. Shi, E. Boukas.** H_∞ fuzzy state-feedback control design for nonlinear systems with D -stability constraints: An LMI approach. Mathematics and Computers in Simulation, vol. 78, pp. 514–531, 2008

[BER02] **P. Bergsten, R. Palm, and D. Driankov.** Observers for Takagi–Sugeno fuzzy systems. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B, Vol. 32, No. 1, February 2002

[BLA00] **Y. Blanco, W. Perruquetti, P. Borne.** Relaxed stability conditions for Takagi–Sugeno's fuzzy models. IEEE 0-7803-5877-5, 2000

[BUH94] **H. Bühler.** Réglage par logique floue. Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne, ISBN 2-88074-271-4

[CAM97] **S. Campeau.** Conception et analyse d'un véhicule hybride à configuration parallèle. Maitrise. ETS, Université du Québec, Montréal, Novembre 1997.

- [CHA02] **M. Chadli**. Stabilité et commande de systèmes décrits par des multimodèles. Thèse de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, décembre 2002.
- [CHA04a] **M. Chadli, J. Ragot, D. Maquin**. Multiquadratic stability and stabilisation of continuous-time multiple model. Centre de Recherche en Automatique de Nancy. INPL-CNRS-UMR 7039.
- [CHA04b] **M. Chadli, J. Ragot, D. Maquin**. Nonquadratic stabilisation of Takagi-Sugeno models: a piecewise quadratic approach. Centre de Recherche en Automatique de Nancy. INPL-CNRS-UMR 7039.
- [COL06] **G. Colin**. Contrôle des systèmes rapides non linéaires, Application au moteur à allumage commandé turbocompressé à distribution variable. Thèse de l'université d'Orléans, octobre 2006.
- [COR96] **J. P. Corriou**. Commande des procédés. Lavoisier Tec & Doc, Paris. ISBN 2-7430-0145-3.
- [DEL02] **S. Delprat**. Evaluation de stratégies de commande pour véhicules hybrides parallèles. Thèse de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, janvier 2002.
- [DEL05] **S. Delprat, P.F. Toulotte, T.M. Guerra, J. Boonaert**. Robust pole placement in LMI region for Takagi-Sugeno models: application to an automated vehicle. IFAC Triennial World Congress, Prague.
- [ERI99] **L. Eriksson**. Spark advance modeling and control. Phd thesis. Linköping University, SE-581 83 Linköping, Sweden, 1999
- [ERI02a] **L. Eriksson, L. Nielsen, J. Brügård, J. Bergström, F. Pettersson, and P. Andersson**. Modeling of a turbocharged SI engine. Annual Reviews in Control, vol. 26, pp. 129-137
- [ERI02b] **L. Eriksson, S. Frei, C. Onder, L. Guzzella**. Control and optimization of turbocharged spark ignited engines. IFAC 15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain
- [ERI07] **L. Eriksson**. Modeling and control of turbocharged SI and DI engines. Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP, Vol. 62 (2007), No. 4, pp. 523-538
- [FRE04] **S. Frei**. Performance and driveability optimisation of turbocharged engine systems (thèse). Swiss Federal Institute of Technology Zurich. ETH No 15510, 2004
- [FRI96] **E. Frisk**. Model-based fault diagnosis applied to an SI-engine. Master. Linköping University, Sweden, september 1996.
- [FRI99] **E. Frisk and L. Nielsen**. Robust residual generation for diagnosis including a reference model for residual behavior. IFAC, 1999

- [FRI08] **C. Fritzsche and H.-P. Dünow**. Advanced torque control. New Approaches in Automation and Robotics, Book edited by: Harald Aschemann, ISBN 978-3-902613-26-4, pp. 392
- [GAH95] **P. Gahinet, A. Nemirowski, A. Laub, M. Chilali**. LMI Control Toolbox. The MathWorks Inc., Natick, MA, 1995.
- [GRI07] **V-H. Grisales Palacio**. Modélisation et commande floues de type Takagi-Sugeno appliquées à un bioprocédé de traitement des eaux usées. Thèse de l'Université Paul Sabatier - Toulouse III et l'Université de los Andes, Colombie, février 2007.
- [GUE03] **T.M. Guerra, L. Vermeiren**. Stabilité et stabilisation à partir de modèles flous. Dans Commande floue 1 : de la stabilisation à la supervision, IC2 Hermès, pp.59-98.
- [GUE03a] **K. Guelton**. Estimation des caractéristiques du mouvement humain en station debout. Mise en œuvre d'observateurs flous sous forme descripteur. Thèse de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, décembre 2003.
- [GUE08] **K. Guelton, S. Delprat, T-M. Guerra**. An alternative to inverse dynamics joint torques estimation in human stance based on a Takagi– Sugeno unknown-inputs observer in the descriptor form. Control Engineering Practice, vol. 16, pp. 1414– 1426, 2008
- [GUZ06] **L. Guzzella and C. Onder**. Past, present and future of automotive control. B.A. Francis et al. (Eds.): Control of Uncertain Systems, LNCIS 329, pp. 163–182, 2006. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006
- [GUZ07] **L. Guzzella and A. Sciarretta**. Vehicle propulsion systems. Introduction to modeling and optimization. Springer Berlin Heidelberg New York, ISBN 978-3-540-74691-1 2nd Edition
- [HEN90] **E. Hendricks et S. C. Sorensen**. Mean value modeling of spark ignition engines. SAE paper 900616.
- [HEN97] **E. Hendricks**. Engine modelling for control applications: A critical survey. Meccanica 32: 387–396, 1997.
- [HEN99] **D. Henrion**. Stabilité des systèmes linéaires incertains à commande contrainte. Thèse de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, octobre 1999
- [HIE07] **H. Hiereth and P. Preninger**. Charging the internal combustion engine. Springer Wien New York, ISBN 978-3-211-33033-3
- [HOH00] **S. Hohmann, M. Sackmann, V. Krebs**. Non linear torque control of spark ignition engine. Institut für Reglung-und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), Germany.
- [HOR02] **T. Hori, K. Tanaka, H.O. Wang**. A piecewise Takagi-Sugeno fuzzy model construction and relaxation of stability conditions. Proceeding of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada USA. IEEE 0-7803-7516-5, 2002

- [ING05] **G. A. Ingram, M. A. Franchek, V. Balakrishnan, G. Surnilla.** Robust SISO H_∞ controller design for nonlinear systems.
Control Engineering Practice, vol. 13, pp. 1413–1423, 2005
- [KHI07] **D. Khiar.** Modélisation et commande d'un moteur thermique à allumage commandé.
Thèse de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, Mai 2007.
- [KHI07a] **D. Khiar, J. Lauber, T. Floquet, G. Colin, T-M. Guerra, Y. Chamailard.** Robust Takagi-Sugeno fuzzy control of a spark ignition engine.
Control Engineering Practice, vol. 15, pp. 1446 – 1456, 2007
- [KOL00] **I. Kolmanovsky, A. G. Stefanopoulou.** Evaluation of turbocharger power assist system using optimal control techniques.
Society of Automotive Engineers, Inc. 2000-01-0519
- [KRI06] **I. Kristoffersson.** Model predictive control of a turbocharged engine. Masters' Degree Project.
KTH Electrical Engineering, Stockholm, Sweden, 2006.
- [KRU06] **A. Kruszewski.** Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno : Mise sous forme LMI.
Thèse de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, décembre 2006.
- [KSO03] **M. Ksontini, F. Delmotte, T-M. Guerra, A. Kamoun.** Disturbance rejection using Takagi-Sugeno fuzzy model applied to an interconnected tank system.
IEEE 0-7803-7952-7, 2003
- [LAB02] **Y. Labit.** Contribution a la commande non linéaire par des approches linéaires.
Thèse de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 2002.
- [LAU03] **J. Lauber.** Moteur à allumage commandé avec EGR : modélisation et commande non linéaires.
Thèse de l'université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, LAMIH, décembre 2003.
- [LIN07] **C. Lin, Q-G.Wang, T. H. Lee, Y. He.** LMI Approach to analysis and control of Takagi-Sugeno fuzzy systems with time delay.
Springer, ISBN-13 978-3-540-49552-9
- [LIU03] **X. Liu et Q. Zhang.** New approaches to controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI. Automatica, Vol.39(9), pp1571-1582, 2003
- [LO 04] **J-C. Lo, M-L. Lin.** Robust H_∞ nonlinear modeling and control via uncertain fuzzy systems.
Fuzzy Sets and Systems, vol. 143, pp. 189–209, 2004
- [MA98] **X.J. Ma, Z. Q. Sun, Y.Y. He.** Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer
IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 6, n°1, pp. 41-50, 1998

[MAN05] **B. Mansouri**. Contribution à la synthèse de lois de commandes en poursuite de trajectoire pour les systèmes flous de type Takagi Sugeno incertains.
Thèse de l'Université de Reims Champagne-Ardenne. U.F.R des Sciences Exactes et Naturelles, décembre 2005.

[MAN09] **B. Mansouri, N. Manamanni, K. Guelton, A. Kruszewski, T.M. Guerra**. Output feedback LMI tracking control conditions with H^∞ criterion for uncertain and disturbed T-S models.
Information Sciences, vol. 179, pp. 446 – 457, 2009

[MOU04] **O. Mouhib**. (In-) validation de modèles de systèmes incertains.
Thèse. service Automatique de Supélec, Université Paris XI U.F.R Scientifique D'orsay, 2004

[PAG06] **A. Pagot, A. Duparchy, X. Gautrot, P. Leduc and G. Monnier**. Combustion approach for downsizing: the IFP concept.
Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP, Vol. 61, No. 1, pp. 139-153, 2006

[PEA00] **D. Peaucelle**. Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres.
Thèse de l'Université Toulouse III - Paul Sabatier, LAAS-CNRS, juillet 2000.

[RIP99] **P. Ripoll**. Conception d'un système de diagnostic flou appliqué au moteur automobile.
Thèse de l'université de Savoie, décembre 1999.

[SAL08] **J.V. Salcedo, M. Martinez, S. Garcia-Nieto**. Stabilization conditions of fuzzy systems under persistent perturbations and their application in nonlinear systems.
Engineering Applications of Artificial Intelligence, vol. 21, pp. 1264– 1276, 2008

[SCO97] **G. Scorletti**. Approche unifiée de l'analyse et de la commande des systèmes par formulation LMI.
Thèse de l'Université Paris XI U.F.R Scientifique D'orsay, juin 1997

[SON95] **E. D. Sontag, Y. Wang**. On characterizations of the input to state stability property.
System and Control Letters, Vol. 24, pp. 351-359, 1995

[SOU06] **H.Souley Ali, M. Darouach, M. Zasadzinski**. Approche LMI pour la synthèse des filtres H^∞ non biaisés.
Cifa-2006-HAL

[SPR06] **P. Spring**. Modeling and control of pressure-wave supercharged engine system (thèse). Swiss Federal Institute of Technology Zurich, ETH No 16490, 2006

[SPR07] **P. Spring, C.H. Onder, L. Guzzella**. EGR control of pressure-wave supercharged IC engines.
Control Engineering Practice, vol. 15, pp. 1520–1532, 2007.

[STE96] **A. Stefanopoulou**. Modeling and control of advanced technology engines.
Phd thesis (Electrical Engineering:Systems) in The University of Michigan, USA, 1996.

- [TAK85] **T. Takagi, M. Sugeno.** Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control.
IEEE Transactions on SMC, Vol. 15, pp. 116-132, 1985
- [TAN94] **K. Tanaka et M. Sano.** A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 2, pp119-134, 1994
- [TAN96] **K. Tanaka I, T. Ikeda and H. Wang.** Design of fuzzy control systems based on relaxed LMI stability conditions.
Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, December 1996
- [TAN01] **K. Tanaka, H.O. Wang.** Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach.
John Wiley & Sons, Inc., New York, Wiley-Interscience ISBN 0-471-22459-6.
- [TIN06] **C-S. Ting.** Stability analysis and design of Takagi–Sugeno fuzzy systems.
Information Sciences, vol. 176, pp. 2817–2845, 2006
- [TOU06] **P.F. Toulotte.** Attelage virtuel pour véhicules automatisés.
Thèse de l’Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, septembre 2006.
- [TOU07] **P.F. Toulotte, S. Delprat, T.M. Guerra, J. Boonaert.** Vehicle spacing control using robust fuzzy control with pole placement in LMI region.
Engineering Applications of Artificial Intelligence 2007, doi:10.1016/j.engappai.2007.07.009
- [TUA01] **H.D Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, Y. Yamamoto.** Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. IEEE Trans. on Fuzzy Systems Vol.9, pp324-332, 2001
- [YON00] **J. Yoneyama, M. Nishikawa, H. Katayama, A. Ichikawa.** Output stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems.
Fuzzy Sets and Systems, vol. 111, pp. 253-266, 2000
- [YON06a] **J. Yoneyama.** Robust H_∞ control analysis and synthesis for Takagi–Sugeno general uncertain fuzzy systems.
Fuzzy Sets and Systems, vol. 157, pp. 2205 – 2223, 2006
- [YON06b] **J. Yoneyama.** Output feedback stabilization of fuzzy systems with unobservable premise variables.
Proceedings of the 2006 IEEE/SMC International Conference on System of Systems Engineering, Los Angeles, CA, USA. IEEE 1-4244-0188-7, 2006
- [YON07] **J. Yoneyama.** Robust stability and stabilization for uncertain Takagi–Sugeno fuzzy time-delay systems.
Fuzzy Sets and Systems, vol. 158, pp. 115 – 134, 2007
- [W1] Site Internet de Technique de l’ingénieur: <http://www.Techniques-ingenieur.fr>

Annexes

Annexe A

Généralités sur les moteurs thermiques à combustion interne

Les moteurs thermiques ont pour rôle de transformer l'énergie thermique à l'énergie mécanique. Ils sont appelés les moteurs à combustion interne par opposition aux moteurs à combustion externe (les machines à vapeur, le moteur Stirling....).

Dans ces moteurs, la chaleur est produite par une combustion dans une chambre à volume variable et elle est utilisée pour augmenter la pression au sein d'un gaz qui remplit cette chambre (ce gaz est d'ailleurs initialement composé du combustible et du comburant : air). Cette augmentation de pression se traduit par une force exercée sur un piston, le piston, en mouvement rectiligne alternatif, entraîne un système bielle manivelle qui permet d'obtenir le mouvement rotatif du vilebrequin.

Les moteurs sont classés en deux catégories suivant la technique d'inflammation du mélange carburant-air :

- les moteurs à allumage commandé (moteur à essence)
- les moteurs à allumage par compression (moteur Diesel)

Dans les moteurs à allumage commandé, un mélange convenable essence-air, obtenu à l'aide d'un injecteur (injection indirecte), est admis dans la chambre de combustion du cylindre où l'inflammation est produite par une étincelle, généralement d'origine électrique, en un moment bien déterminé du cycle.

Dans les moteurs à allumage par compression, le carburant est du gazole. On l'injecte sous pression dans la chambre de combustion contenant de l'air, préalablement comprimé et chaud, au contact duquel il s'enflamme spontanément. Ces moteurs sont appelés moteur Diesel.

Les performances d'un moteur dépendent, en premier lieu, de la quantité d'énergie dégagée par la combustion, donc de la quantité ainsi que de la qualité du mélange carburé présent dans la chambre de combustion. Celles-ci sont aussi directement liées à la géométrie du moteur (volume de la chambre (cylindrée unitaire) et nombre de chambres ou cylindres du moteur (cylindrée totale)).

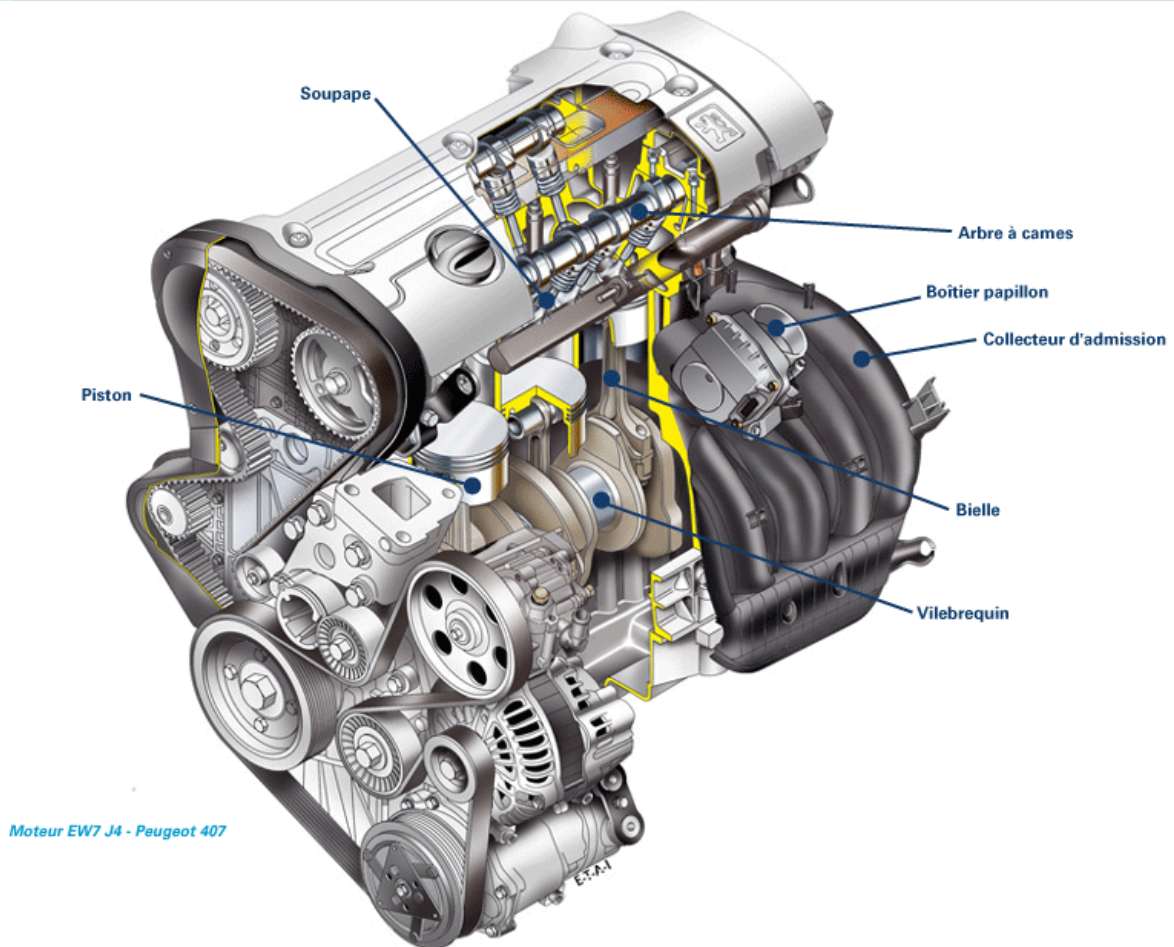


Figure 1. Architecture d'un moteur thermique [W1]

Afin d'augmenter la puissance moyenne et de réduire les acyclismes au niveau des variations du couple qui sont dus au mouvement alternatif du piston, la configuration multicylindre est privilégiée. Selon la disposition des cylindres, différents types de moteurs multicylindres sont utilisés : moteur en ligne, moteur en V et moteur à plat.

Les particularités essentielles du moteur AC résident dans ses modes d'alimentation et de combustion. En effet, le moteur est alimenté avec un mélange air-carburant réalisé soit avant son introduction dans le cylindre (injection indirecte), soit dans le cylindre (injection directe). La quantité d'air admise est modulée par un volet (le papillon) situé dans la tubulure d'admission et le carburant est dosé par un système d'injection. La proportion normalisée en masse entre carburant et comburant est appelée richesse du mélange carburé et est donnée par :

$$\phi = \frac{m_{carb}}{m_{air}} PCO \quad (A.1)$$

où PCO est le pouvoir comburivore qui représente la masse d'air m_{air} nécessaire à la combustion stoechiométrique de l'unité de masse de carburant m_{carb} :

$$PCO = \left(\frac{m_{air}}{m_{carb}} \right)_{\text{stoechiométrie}} \quad (\text{A.2})$$

Pour un hydrocarbure, le pouvoir comburivore est de l'ordre de 14,7 grammes d'air par gramme de carburant. Par conséquent, si $\phi = 1$, la combustion est dite stoechiométrique. Un mélange de richesse supérieure à 1 sera dit riche ; de richesse inférieure à 1, il sera dit pauvre. La richesse influence beaucoup sur les émissions de polluants comme le montre la figure 2. Un compromis de richesse doit être effectué pour chaque polluant.

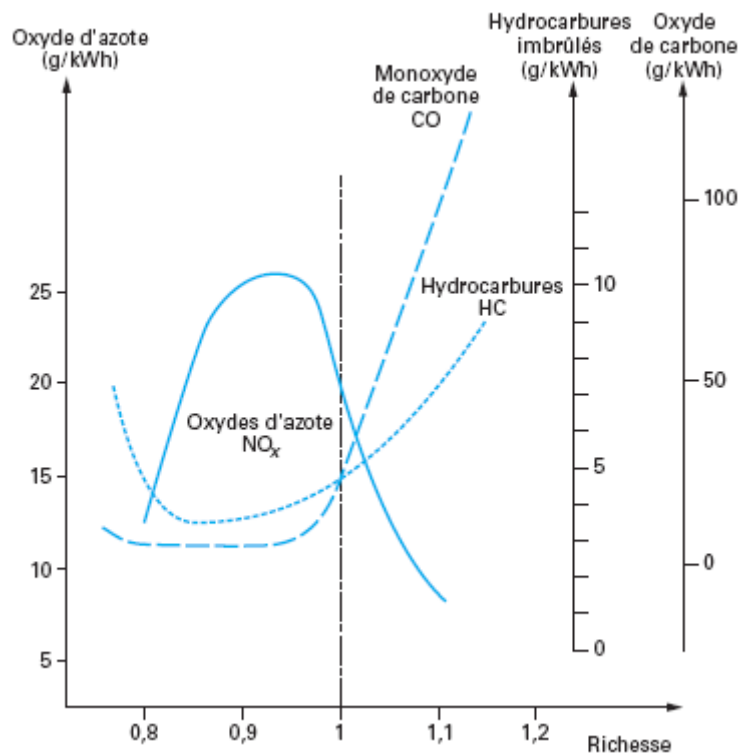


Figure 2 – Évolution des émissions de polluants en fonction de la richesse [W1]

Le cycle à 4 temps est très souvent décrit sous forme d'un diagramme dit de Clapeyron. Ce diagramme, illustré à la figure 3, donne la pression des gaz dans le cylindre en fonction de leur volume à une température donnée. L'admission des gaz se déroule de g à b en passant par a. La compression des gaz se développe de b à c. De c à d, il y a combustion, puis de d à e, il y a détente des gaz. Enfin, l'échappement se produit de e à g en passant par f.

La surface délimitée par la courbe d'évolution de la pression en fonction du volume représente le travail des gaz. La surface A (orange) sur la figure 3 correspond à la boucle haute pression et représente le travail fourni par le moteur. La surface B (bleue) correspond à la boucle basse pression et représente le travail nécessaire pour introduire le mélange frais dans le cylindre. Ce dernier constitué en majeure partie par le travail de pompage de l'air dans le cylindre, est appelé pertes par pompage. La réduction des pertes par pompage est une des clefs qui permettent d'augmenter le rendement du moteur AC.

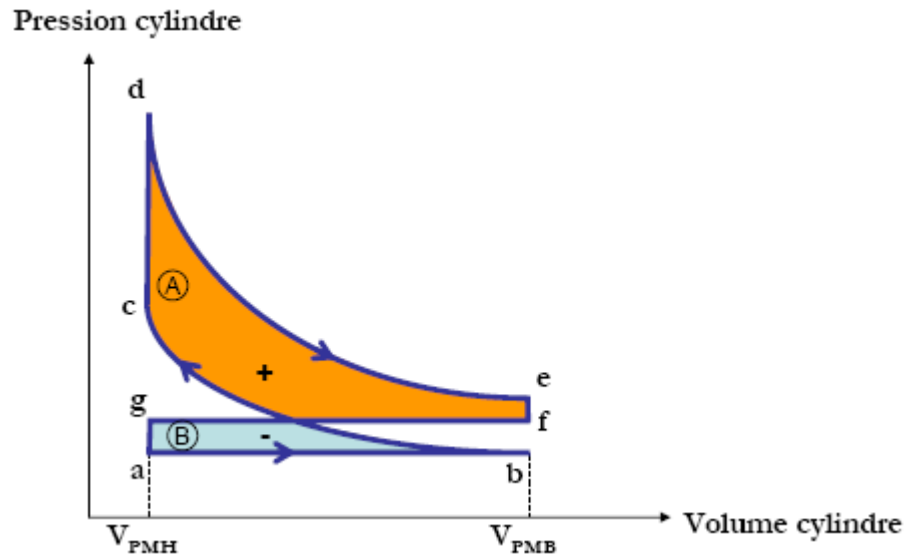


Figure 3: Diagramme théorique de Clapeyron de la pression en fonction du volume

Le travail indiqué W_i du moteur :

$$W_i = -\oint_{\text{cycle}} P_{\text{cyl}} dV_{\text{cyl}} \quad (\text{A.3})$$

où P_{cyl} et V_{cyl} sont respectivement la pression et le volume du cylindre. Par convention, le travail est négatif lorsque le moteur produit du travail car il est cédé par le système (vu du côté gaz). Par la suite, le travail sera considéré comme positif lorsque les gaz cèdent de l'énergie et sera négatif quand il s'agit de pertes (vu du côté vilebrequin). Ce travail est appelé indiqué car il a été mesuré la première fois par Watt sur une machine à vapeur grâce à un manomètre enregistreur appelé indicateur de Watt. Il est exprimé en Joules (J) lorsque les pressions sont exprimées en Pascal (Pa) et les volumes en mètre cube (m^3).

Pour comparer les performances de différents moteurs, la notion de Pression Moyenne Indiquée (PMI) est introduite :

$$PMI = \frac{1}{V_{cyl}} \oint_{cycle} P_{cyl} dV_{cyl} = \frac{W_i}{V_{cyl}} \quad (A.4)$$

où V_{cyl} est le volume déplacé du cylindre, i.e. la cylindrée. Elle représente la pression constante qu'il faudrait appliquer sur le piston pour obtenir le travail indiqué W_i .

A partir du travail indiqué W_i , le couple indiqué C_i est défini par :

$$C_i = \frac{W_i n_{cyl}}{4\pi} = \frac{PMI n_{cyl} V_{cyl}}{4\pi} \quad (A.5)$$

où n_{cyl} est le nombre de cylindres.

Le couple effectif C_e , réellement délivré par l'arbre et mesuré au banc moteur, est déterminé par :

$$C_e = C_i - C_{frot} \quad (A.6)$$

où C_{frot} est le couple de frottements. Au banc moteur, C_{frot} est déduit de la mesure de C_e et de C_i .

Par analogie avec la PMI , à partir de (A.5), la Pression Moyenne Effective (PME) est définie :

$$PME = \frac{C_e 4\pi}{n_{cyl} V_{cyl}} \quad (A.7)$$

Enfin, la Pression Moyenne de Frottement (PMF) est caractérisée par la relation :

$$PMF = PMI - PME \quad (A.8)$$

Annexe B

Problèmes LMI et différentes formes de relaxations

B.1. Problèmes à base de contraintes LMI

Le but de cette annexe est de donner des conditions de stabilité/stabilisation sous la forme d'un problème à résoudre composé de contraintes LMI (Linear Matrix Inequality). La description des contraintes LMI ainsi qu'une méthode permettant de résoudre les problèmes qui leurs sont associés sont présentées dans cette partie. Différents lemmes sont alors présentés. Ils permettent de manipuler les inégalités matricielles afin de les rendre linéaires en les inconnues quand cela est possible.

Les contraintes LMI (Linear Matrix Inequality) s'écrivent comme suit :

Définition B.1 : étant donnée une famille de matrices symétriques P_0 et P_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ de $R^{p \times p}$ et un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, une LMI stricte (resp. non stricte) en x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ s'écrit sous la forme :

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^n x_i P_i < 0 \quad (\text{resp. } \leq 0) \quad (\text{B.1})$$

L'ensemble des solutions $S = \{x \in R^n, F(x) < 0\}$ est convexe, ce qui nous amène à considérer une contrainte LMI comme une contrainte convexe.

Un problème de faisabilité LMI s'écrit :

$$\text{Trouver } x_i, i \in \{1, \dots, n\} \text{ tels que } F(x) < 0. \quad (\text{B.2})$$

(B.2) est équivalent à $\inf \lambda_{\max}(F(x)) < 0$.

En général, les conditions sur la stabilité ne sont pas données sous forme de LMI directement. Pour cela, elles nécessitent quelques transformations matricielles. Dans la suite, nous présentons quelques techniques de transformation matricielle utiles pour les résultats établis dans ce mémoire.

a. Congruence :

Si $P(x) > 0$ et X est régulière, alors : $X^T P(x) X > 0$

b. Complément de Schur :

Soient trois matrices $R(x) = R(x)^T$, $Q(x) = Q(x)^T$ et $S(x)$ affines par rapport à la variable x .
les LMI suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
 i) \quad & \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \\
 ii) \quad & R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

c. Complément de Schur généralisé :

Soient R , S , Y , X et U des matrices de taille appropriée. Les LMI suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}
 i) \quad & \begin{bmatrix} Y & X & U \\ X^T & R & 0 \\ U^T & 0 & S \end{bmatrix} > 0 \\
 ii) \quad & R > 0, \quad S > 0, \quad Y - X R^{-1} X^T - U S^{-1} U^T > 0
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

d. Contrainte quadratique convexe :

La contrainte sur la norme $\|Z(x)\| < 1$ où $Z(x) \in R^{p,q}$ est affine par rapport à la variable $x \in R^p$ est représentée par :

$$\begin{bmatrix} I_p & Z(x) \\ Z(x) & I_q \end{bmatrix} > 0 \tag{B.5}$$

Lemme B.1 :

Soit une matrice définie négative $\Omega < 0$.

Quelque soit une matrice x de dimension approprié telle que $X^T \Omega X < 0$ alors ; $\exists \alpha \in R$ telle que $\alpha > 0$ et $X^T \Omega X \leq -2\alpha X - \alpha^2 \Omega^{-1}$

$$\tag{B.6}$$

e. Lemme de S- procédure :

C'est une technique qui permet d'approcher un ensemble de contraintes quadratiques par une seule contrainte quadratique.

Lemme B.2 : Soient F_0, \dots, F_p des fonctions quadratiques de la variable $\xi \in R^m$ avec :

$$F_i(\xi) = \xi^T T_i \xi + 2u_i^T \xi + v_i \quad (\text{B.7})$$

où $T_i = T_i^T \in R^p, i \in \{0, \dots, p\}$.

Alors la proposition (1) implique la proposition (2)

$$(1) \text{ il existe } \tau_i \geq 0, i \in \{1, \dots, p\} \text{ tels que } \begin{bmatrix} T_0 & u_0 \\ u_0^T & v_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^p \tau_i \begin{bmatrix} T_i & u_i \\ u_i^T & v_i \end{bmatrix} \geq 0$$

$$(2) F_0(\xi) \geq 0 \text{ pour tout } \xi \neq 0 \text{ tel que } F_i(\xi) \geq 0, i \in \{1, \dots, p\}.$$

f. Le carré matriciel et ses dérivées :

Lemme B.3 : Soit deux matrices A et B de dimensions appropriées, on a

$$A^T B + B^T A \leq \gamma A^T A + \gamma^{-1} B^T B \quad (\text{B.8})$$

où γ est une constante positive.

Pour réduire le conservatisme, cette propriété peut être également écrite en fonction d'une matrice définie positive $M > 0$.

$$A^T B + B^T A \leq A^T M A + B^T M^{-1} B \quad (\text{B.9})$$

Les propriétés (B.8) et (B.9) ont l'avantage de pouvoir éliminer les termes anti-diagonaux et les ramener dans les blocs diagonaux, comme l'explique l'exemple B.1.

Exemple B.1 :

On souhaite éliminer les termes anti-diagonaux A et B de la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} Y & W^T + B^T A^T \\ W + AB & Z \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.10})$$

(B.10) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} Y & W^T \\ W & Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B^T A^T \\ AB & 0 \end{bmatrix} < 0$$

or :

$$\begin{bmatrix} 0 & B^T A^T \\ AB & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \end{bmatrix}$$

En utilisant la propriété (B.9), on obtient l'inégalité :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 0 & A^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

La condition (B.10) est satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} Y + B^T M^{-1} B & W^T \\ W & Z + A M A^T \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.12})$$

g. Lemme d'élimination :

Ce lemme est aussi connu sous le nom de projection, il est très utilisé dans les formulations LMI.

Lemme B.4 : Pour des matrices réelles $W = W^T$, M et N de tailles appropriées, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- Il existe une matrice réelle K telle que :

$$W + M K N^T + N K^T M^T < 0 \quad (\text{B.13})$$

- Il existe un scalaire réel σ tel que :

$$W < \sigma M M^T \text{ et } W < \sigma N N^T$$

- Les compléments orthogonaux M^\perp et N^\perp de M et N , respectivement, vérifient :

$$M^{\perp T} W M^\perp < 0 \text{ et } N^{\perp T} W N^\perp < 0 \quad (\text{B.14})$$

B.2. Les inégalités matricielles bilinéaires

Beaucoup de problèmes de commande se présentent sous forme d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI). Aujourd'hui, il n'existe pas de méthodes exactes pour résoudre ce genre de

problème, mais des heuristiques ont été mises en place dans différents cadres. D'une façon générale, une BMI est définie comme suit :

Définition B.2 : On appelle BMI en $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$, une contrainte de la forme :

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^n x_i P_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j P_{ij} < 0 \quad (\text{resp. } \leq 0) \quad (\text{B.15})$$

où les matrices P_i et P_{ij} appartenant à $R^{p \times p}$ sont symétriques.

Ce type de contrainte, constitue un problème d'optimisation non convexe. Il peut y avoir plusieurs solutions locales qui ne se résolvent pas par les techniques d'optimisation convexe comme celles de résolution des LMI. Pour ce genre de problèmes, des méthodes itératives sans garantir la convergence permettent de résoudre certaines classes de BMI.

Certaines BMI peuvent se ramener facilement à des LMI. Dans cette issue, plusieurs méthodes sont envisageables. On distingue la méthode de changement de variable judicieux et les techniques d'élimination des variables en utilisant le lemme d'élimination.

La plupart des problèmes de stabilité et de stabilisation rencontrés concernent des quantités utilisant une somme de la forme : $\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \gamma_i < 0$, ou deux sommes voire plus. Les différents résultats assurant le caractère négatif de la somme sont présentés dans la partie suivante.

B.3. Relaxations

Dans toute cette partie on suppose que la seule connaissance disponible sur les μ_i est la propriété de somme convexe. Dans le cas d'une simple somme, avec γ_i des matrices de taille appropriée, il s'agit de trouver des conditions suffisantes assurant :

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \gamma_i < 0 \quad (\text{B.16})$$

Le seul résultat qui sera utilisé est :

Lemme B.5 : Soit γ_i des matrices de taille appropriée, (B.16) est vérifiée si :

$$\gamma_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (\text{B.17})$$

Remarque B.1 : Notons que ces conditions ne sont que suffisantes et introduisent forcément du conservatisme.

Dans le cas d'une double somme avec γ_{ij} des matrices de taille appropriée :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \gamma_{ij} < 0 \quad (\text{B.18})$$

Une solution triviale à (B.18) est : $\gamma_{ij} < 0, \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$. Puisque $\mu_i(\cdot) \mu_j(\cdot) = \mu_j(\cdot) \mu_i(\cdot)$

(B.18) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \gamma_{ij} &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))^2 \gamma_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{j \neq i}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \gamma_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))^2 \gamma_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (\gamma_{ij} + \gamma_{ji}) \end{aligned}$$

Ainsi, le résultat suivant est présenté :

Lemme B.6 [TAN94] : Soient γ_{ij} des matrices de taille appropriée. (B.18) est vérifiée si :

$$\gamma_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (\text{B.19})$$

$$\gamma_{ij} + \gamma_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2, i < j \quad (\text{B.20})$$

avec $\mu_i(\cdot) \mu_j(\cdot) \neq 0$.

Remarque B.2 : Notons que le nombre de conditions à vérifier est $r(r+1)/2$, et que ce nombre croît en fonction du nombre de règles r .

Le fait d'utiliser une fonction de Lyapunov quadratique implique la recherche d'une matrice $P = P^T$ unique qui se retrouve dans toutes les $r(r+1)/2$ inégalités. Il est alors clair que le nombre de règles est un facteur essentiel pour réduire le conservatisme des résultats issus des conditions (B.19) et (B.20) du Lemme B.6.

Ainsi, disposant d'un modèle TS, le problème fondamental qui se pose lors de la synthèse de commande du type PDC est celui du conservatisme des conditions sur les gains de retour. Par conséquent, dans le but d'avoir des résultats beaucoup moins conservatifs, des conditions de relaxations existent pour améliorer le lemme B.6. Ces relaxations peuvent être groupées en deux familles. La première famille est celle des relaxations qui n'introduisent aucune variable supplémentaire. La deuxième famille regroupe les autres types de relaxations. La principale

différence en termes d'efficacité est que les relaxations introduisant des variables supplémentaires produisent des problèmes LMI qui sont moins conservatifs mais plus longs à résoudre voire impossible à cause de la puissance de calcul des ordinateurs actuels. Nous présentons dans la suite les deux résultats qui nous paraissent correspondre au meilleur compromis qualité de la solution /compatibilité avec les solveurs actuels.

Le lemme suivant est issu de [TUA01]. Le domaine des solutions satisfaisant ses conditions inclut les domaines des solutions du lemme B.6.

Lemme B.7 [TUA01] : Soient γ_{ij} des matrices de taille appropriée. (B.18) est vérifiée si :

$$\gamma_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{2}{r-1} \gamma_{ii} + \gamma_{ij} + \gamma_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2, i \neq j \quad (\text{B.22})$$

Des relaxations plus efficaces existent en termes de taille des domaines de solutions. Néanmoins, elles nécessitent l'introduction de variables additionnelles. Leur nombre fait croître la complexité du problème à résoudre, et même pour des problèmes de taille faible on peut atteindre les limites des solveurs actuels. Le lemme suivant est issu de [LIU03]. Il représente un bon compromis entre conservatisme et complexité.

Lemme B.8 [LIU03] : Soient γ_{ij} des matrices de taille appropriée. (B.18) est vérifiée s'il existe des matrices $Q_{ij} > 0$ et $Q_{ij} = Q_{ji}^T$ telle que :

$$\gamma_{ii} + Q_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (\text{B.23})$$

$$\gamma_{ij} + \gamma_{ji} + Q_{ij} + Q_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2, i < j \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & Q_{(r-1)r} \\ Q_{r1} & \cdots & Q_{r(r-1)} & Q_{rr} \end{bmatrix} > 0. \quad (\text{B.25})$$

L'exemple suivant détail l'approche par secteur non linéaire du chapitre II (méthode d'obtention systématique de modèle TS).

Exemple B.2 :

Considérons le modèle non linéaire affine en la commande suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \sin(x_1(t)) \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ x_2^2(t) \end{pmatrix} u(t) \quad (\text{B.26})$$

L'équation (B.26) présente deux non linéarités qu'on notera $nl_1(x_1(t))$ et $nl_2(x_2(t))$ respectivement tels que :

$$nl_1(x_1(t)) = \sin(x_1(t)), \quad nl_2(x_2(t)) = x_2^2(t) \quad (\text{B.27})$$

Nous remarquons que le terme non linéaire $\sin(x_1(t))$ est borné $\forall x_1(t) \in \mathbb{R}^n$ i.e. $nl_1(x_1(t)) \in [-1, 1]$ alors que le terme $x_2^2(t)$ ne peut l'être que sur un compact défini par $x_2(t) \in [-a, a]$ avec $a > 0$ i.e. $nl_2(x_2(t)) \in [0, a^2]$. En utilisant l'équation (II.4), on peut transformer les termes non linéaires $nl_1(x_1(t))$ et $nl_2(x_2(t)) \forall x(t) \in \mathbb{R}^n \times [-a, a]$, $a > 0$, tel que :

$$nl_1(x_1(t)) = 1 \cdot w_0^1(z_1(t)) + (-1) \cdot w_1^1(z_1(t)) \quad (\text{B.28})$$

$$nl_2(x_2(t)) = a^2 \cdot w_0^2(z_2(t)) + 0 \cdot w_1^2(z_2(t)) \quad (\text{B.29})$$

avec les fonctions d'appartenance données par :

$$w_0^1(x_1(t)) = \frac{\sin(x_1(t)) + 1}{2}, \quad w_1^1(x_1(t)) = \frac{1 - \sin(x_1(t))}{2} \quad (\text{B.30})$$

$$w_0^2(x_2(t)) = \frac{x_2^2(t)}{a^2}, \quad w_1^2(x_2(t)) = \frac{a^2 - x_2^2(t)}{a^2}$$

On aboutit alors à quatre modèles locaux, obtenus à partir des quatre combinaisons possibles des bornes des termes non linéaires $nl_1(x_1(t))$ et $nl_2(x_2(t))$ ($k = 2$, i.e. $r = 4$) décrits par les matrices des modèles locaux suivants :

Règle 1 : *Si* $x_1(t)$ est $w_0^1(x_1(t))$ *et* $x_2(t)$ est $w_0^2(x_2(t))$ *alors* $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$

Règle 2 : *Si* $x_1(t)$ est $w_1^1(x_1(t))$ *et* $x_2(t)$ est $w_0^2(x_2(t))$ *alors* $\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t)$

Règle 3 : *Si* $x_1(t)$ est $w_0^1(x_1(t))$ *et* $x_2(t)$ est $w_1^2(x_2(t))$ *alors* $\dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t)$

Règle 4 : *Si* $x_1(t)$ est $w_1^1(x_1(t))$ *et* $x_2(t)$ est $w_1^2(x_2(t))$ *alors* $\dot{x}(t) = A_4x(t) + B_4u(t)$

avec :

$$A_1 = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = B_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les fonctions d'activations ($r = 4$) sont obtenues à partir de l'équation (II.6) comme suit :

$$\mu_{1+i_1+i_2 \times 2}(z(t)) = \prod_{j=1}^2 w_{i_j}^j(z_j(t)) = w_{i_1}^1(z_1(t))w_{i_2}^2(z_2(t)) \quad (\text{B.31})$$

avec $z(t) = [z_1(t) \quad z_2(t)] = [x_1(t) \quad x_2(t)]$. Ainsi,

- pour $i_1 = i_2 = 0$:

$$\mu_1(x_1(t), x_2(t)) = w_0^1(x_1(t))w_0^2(x_2(t))$$

- pour $i_1 = 1$ et $i_2 = 0$:

$$\mu_2(x_1(t), x_2(t)) = w_1^1(x_1(t))w_0^2(x_2(t))$$

- pour $i_1 = 0$ et $i_2 = 1$:

$$\mu_3(x_1(t), x_2(t)) = w_0^1(x_1(t))w_1^2(x_2(t))$$

- pour $i_1 = i_2 = 1$:

$$\mu_4(x_1(t), x_2(t)) = w_1^1(x_1(t))w_1^2(x_2(t))$$

On obtient à la fin le modèle Takagi-Sugeno suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(x_1(t), x_2(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (\text{B.32})$$

Ce modèle représente exactement le modèle non linéaire (B.26) dans le domaine $R^n \times [-a, a]$ de l'espace d'état.

ملخص :

الموضوع الرئيسي لهذا البحث هو التحكم في مسلك الهواء لدى المحركات الحرارية ذات الإشعال المتحكم سواء مع أو بدون زيادة إمداد الهواء. يعرض الفصل الأول مفاهيم عامة حول المحركات الحرارية ذات الإشعال المتحكم بالإضافة إلى مبدأ تخفيض حجم الأسطوانات (Downsizing). يتم بعد ذلك تقديم نظرة عامة حول نموذج مسلك الهواء لمحرك حراري ذو إشعال متحكم. الفصل الثاني يهتم بالتحكم في دخول الهواء. تركيب قاعدة التحكم يعتمد على نماذج ضبابية من نوع Takagi-Sugeno. بعد مراجعة سريعة لهذا النوع من النماذج، يتم تطبيق هذه القاعدة من أجل التحكم في ضغط مجمع الهواء. النماذج المأخوذة بعين الاعتبار لاختبار لخطية و فيها نسبة معينة من الإرتياب و الخطأ. يتم إذا تقديم في الفصل الثالث تركيبة تحكم ثابتة بالنسبة للنماذج الضبابية Takagi-Sugeno ذات الإرتياب حسب المعيار H_∞ . شروط الإستقرار مع و بدون راصد تقدم أيضا. تعرض بعد ذلك تطبيقات لقاعدة التحكم الثابتة من أجل التحكم في مزدوجة المحرك.

كلمات مفتاحية : محرك ذو إشعال متحكم، آلة تربين ضاغطة، نماذج Takagi-Sugeno، متباينة مصفوفة خطية (LMI)، معيار H_∞ ، تحكم ضبابي ثابت.

Résumé :

Le thème principal de ce travail concerne la commande du circuit d'air des moteurs thermiques à allumage commandé avec ou sans suralimentation.

Le premier chapitre présente des généralités sur les moteurs thermiques à allumage commandé ainsi que le principe de la réduction de la cylindrée (Downsizing). Il présente ensuite la modélisation du circuit d'air d'un moteur thermique à allumage commandé. Le second chapitre s'intéresse à la commande de l'admission d'air. La synthèse de la loi de commande est basée sur les modèles flous de type Takagi-Sugeno. Après un rapide rappel de ce type de modèle, son application à la commande en pression collecteur est abordée. Les modèles considérés sont non linéaires et présentent des incertitudes de modélisation. Le troisième chapitre présente alors une synthèse de commande robuste concernant les modèles flous Takagi-Sugeno incertains selon un critère H_∞ . Des conditions de stabilisation sans et avec observateur d'état sont également données. Des applications de cette loi de commande robuste sur la commande en couple sont ensuite présentées.

Mot clés : Moteur à allumage commandé, turbocompresseur, modèles Takagi-Sugeno, inégalité matricielle linéaire (LMI), critère H_∞ , commande floue robuste.

Abstract :

This work deals with the control of the air path of spark ignition engines with or without turbocharging.

The first chapter presents generalities about spark ignition engines as well as the downsizing concept. It then gives an overview about modeling of the air path of a spark ignition engine. The second chapter is about inlet air control. The control law synthesis is based on the Takagi-Sugeno fuzzy models description. After a brief description of this kind of models, it is used in the controller's synthesis for manifold pressure control. The models considered are non linear and uncertain. So the third chapter gives a robust control synthesis for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy models based on H_∞ criterion. Stability conditions are also given with and without a state observer. Applications of this robust control law to the engine torque control are then presented.

Keywords : Spark ignition engine, turbocharger, Takagi-Sugeno models, linear matrix inequality (LMI), H_∞ criterion, robust fuzzy control.