

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**



**Ecole Nationale Polytechnique**  
**Département de Génie Civil**

**Mémoire de Master**

**En vue d'obtention du diplôme de Master en Génie Civil**

**Analyse du phénomène de la concentration  
de contraintes dans une plaque percée par  
la méthode des éléments finis**

Membres de jury :

**Pr. R. MITICHE-KETTAB** (Présidente de jury)

**MAA. M.DEMIDEM** (Encadreur)

**MAA. A.CHIKH** (Examinatrice)

**MAA. S.LAKHAL** (Examineur)

Réalisé par :

**Mr. SALAH Mohamed El-Mostapha** (Ingénieur)

***Promotion septembre 2014***

# REMERCIEMENTS

*Toute notre gratitude et remerciements vont à ALLAH le tout puissant pour nous avoir donné force, patience, courage et volonté pour bien mener et achever ce modeste travail.*

*Nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance à Mr. M.DEMIDEM pour son suivi durant l'évolution de ce travail, ainsi que ses précieux conseils avisés, et ses remarques pertinentes et qui a mis à notre disposition ses compétences afin de bien mener ce projet.*

*Nous remercions également le président et les membres de jury pour avoir accepté d'évaluer notre modeste travail.*

*Nous tenons à remercier tous les enseignants de l'ENP qui ont contribué de près ou de loin à nos cinq années de formation.*

*Un spécial merci à ami SALAH pour ses précieux conseils et encouragements.*

*Nous adressons nos plus sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail, sans oublier nos camarades de génie civil.*

*Enfin, nous ne saurions terminer nos remerciements sans les adresser à nos familles pour les sacrifices qu'elles ont faits pour que nous terminions nos études.*

# DEDICACE

*Je commence par rendre grâce à dieu et sa bonté, pour sa patience, sa compétence, et le courage qu'il m'a donné pour arriver à ce stade.*

*Je dédie ce modeste travail*

*A mes très chers PARENTS, aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et bien être.*

*A ma sœur SARAH et mon frère ABDELGHAFUR  
pour leur soutien patience et amour.*

*A mon camarade HAFSA pour son aide et ses encouragements.*

*A ma famille et tous mes amis (es).*

*Mohamed El-Mostapha*

# RESUME

## الملخص:

دراستناهي تحليل الأثار المترتبة على مشكلة تركيز الإجهاد وضعت في لوحة الفولاذ مثقب تحت التوتر. وباستخدام طريقة العناصر المحدودة من خلال برنامج (فورتران باور ستايشن) وافترضات المرونة الخطية واقترح عدة نماذج تسمح لنا لتقريب أفضل للقيمة النظرية لمعامل تركيز الإجهاد .

## كلمات السر :

لوحة الفولاذ, تركيز الإجهاد, العناصر المحددة, مرونة الخطية.

## Résumé :

Notre étude consiste en l'analyse des conséquences du problème de la concentration de contrainte développée dans une plaque en acier trouée et soumise à une tension. L'utilisation de la méthode des éléments finis à travers un programme en FORTRAN Power Station en tenant compte des hypothèses de l'élasticité linéaire et la proposition de plusieurs modèles va nous permettre d'approcher au mieux la valeur théorique du coefficient de concentration de contraintes  $K_t$ .

## Mots clés :

Plaque en acier, la concentration de contrainte, éléments finis, élasticité

## Abstract:

Our study is the analysis of the consequences of the problem of stress concentration developed in a plate of steel perforated under a tension. Using the finite element method through a program in FORTRAN Power Station by the assumptions of linear elasticity and the proposal of several models will allow us to best approximate the theoretical value of the coefficient of stress concentration  $K_t$ .

## Key words:

Plate of steel, Stress concentration, finite elements, linear elasticity.

# TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE.....	1
I. PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS .....	2
I.1. Introduction.....	2
I.2. Principe de la méthode des éléments finis (MEF) .....	2
I.2.1. Description de la MEF .....	2
I.2.2. Caractéristiques d'un élément.....	3
I.2.3. Notion d'élément de référence.....	4
I.3. Etapes caractéristiques d'étude des structures par la MEF .....	5
I.3.1. Définition du domaine " $V$ " .....	5
I.3.2. Représentation de la géométrie de chaque élément " $V_e$ " .....	5
I.4. Convergence de la MEF .....	7
I.4.1. Types de convergence .....	7
I.4.2. Critère de convergence.....	7
I.5. ETAPES D'UN PROGRAMME D'ELEMENTS FINIS .....	8
I.6. Conclusion .....	8
II. THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE .....	9
II.1. Introduction .....	9
II.2. Equations gouvernantes .....	9
II.2.1. Les équations d'équilibre.....	9
II.2.2. Les équations de compatibilités.....	10
II.2.3. Equations déformation-déplacement .....	11
II.2.4. Equations contrainte-déformations (loi de comportement) .....	11
II.3. Déformation plane .....	12
II.4. Contrainte plane .....	14
II.5. Conclusion .....	14
III. CONCENTRATION DE CONTRAINTES .....	15
III.1. Introduction .....	15
III.2. Définitions .....	15
III.3. Coefficient théorique de concentration de contraintes « $K_t$ » .....	17
III.4. Conclusion.....	19
IV. APPLICATION : CAS D'UNE PLAQUE EN ACIER .....	20

IV.1. Description des hypothèses et caractéristique de la plaque .....	20
IV.2. Présentation du programme de calcul [9] .....	20
IV.3. Modèle N°1 .....	22
IV.3.1. Etape 1 .....	22
IV.3.2. Etape 2 .....	22
IV.3.3. Etape 3 .....	23
IV.3.4. Etape 4 .....	23
IV.3.5. Etape 5 .....	23
IV.3.6. Etape 6 .....	24
IV.3.7. Etape 7 .....	25
IV.4. Modèle N°2.....	25
IV.5. Modèle N°3 (Model 18x18) .....	28
IV.6. Modèle N°4 (Model 18x18 - raffiné) .....	32
IV.7. Modèle N°5 (Model 18x18 – raffiné –Ellipse 1).....	35
IV.8. Modèle N°6 (Model 18x18 – raffiné –Ellipse 2).....	38
IV.5. Conclusion .....	40
CONCLUSION GENERALE .....	41
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	42
ANNEXES .....	43

# LISTE DES FIGURES

Figure I.1. Division d'un domaine en éléments finis .....	2
Figure I.2. Élément unidimensionnel. ....	2
Figure I.3. Élément bidimensionnel. ....	3
Figure I.4. Élément tridimensionnel.....	3
Figure I.5. Élément de référence Q8. ....	4
Figure I.6. Organigramme d'étapes caractéristiques d'un programme d'éléments finis. ....	8
Figure II.1. Etat de contrainte.....	9
Figure II.2. Etat de déformation plane. ....	13
Figure II.3. Etat de contrainte plane.....	14
Figure III.1. Illustration schématique qualitative montrant l'origine de la concentration de contraintes. ....	15
Figure III.2. Champs de contraintes dans différents cas de pièces lisses ou entaillées.....	16
Figure III.3. Plaque percée en flexion : influence de la morphologie sur la localisation de contrainte maximale. ....	17
Figure III.4. Barres entaillées, soumises à une traction. ....	18
Figure IV.1. Schéma de la plaque perforée sollicitée en traction. ....	20
Figure IV.2. Trou circulaire, maillage 5X6 éléments. ....	22
Figure IV. 3. Déplacement – Model 5X6. ....	24
Figure IV. 4. Contraintes – Model 5X6. ....	24
Figure IV.5. Coefficient concentration de contraintes – Model 5X6. ....	25
Figure IV. 6. Trou circulaire, Maillage 9X10 éléments.....	25
Figure IV. 7. Déplacements – Model 9X10.....	26
Figure IV. 8. Trou circulaire, Maillage 18X18 éléments.....	28
Figure IV. 9. Déplacements – Model 18X18.....	29
Figure IV. 10. Contraintes – Model 18X18.....	30
Figure IV. 11. Coefficient concentration de contraintes – Model 18X18.....	31
Figure IV. 12. Déplacement – Model 18X18 – raffiné.....	33
Figure IV. 13. Contraintes – Model 18X18 – raffiné. ....	33
Figure IV. 14. Coefficient concentration de contraintes – Model 18X18 – raffiné.....	34
Figure IV. 15. Déplacement – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 1.....	35
Figure IV. 16. Contraintes – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 1. ....	36
Figure IV. 17. Coefficient concentration de contraintes – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 1.....	37
Figure IV. 18. Déplacement – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 2.....	38
Figure IV. 19. Contraintes – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 2. ....	39
Figure IV. 20. Coefficient concentration de contraintes – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 2.....	40

# LISTE DES TABLEAUX

Tableau III.1. Valeurs de $K$ de trois barres pour différents rapports du rayon de l'entaille à la longueur restante. ....	19
Tableau IV.1. Valeurs des déplacements (model 5X6). ....	23
Tableau IV.2. Valeurs des contraintes (Model 5X6). ....	24
Tableau IV.3. Valeurs de $Kt$ (Model 5X6) ....	24
Tableau IV. 4. Déplacements – Model 9X10. ....	26
Tableau IV. 5. Contraintes – Model 9X10. ....	27
Tableau IV. 6. Coefficient concentration de contraintes – Model 9X10. ....	27
Tableau IV. 7. Déplacements – Model 18X18. ....	29
Tableau IV. 8. Contraintes – Model 18X18. ....	30
Tableau IV. 9. Coefficient concentration de contraintes – Model 18X18. ....	31
Tableau IV. 10. Déplacements – Model 18X18 – raffiné. ....	32
Tableau IV. 11. Contraintes – Model 18X18 – raffiné. ....	33
Tableau IV. 12. Coefficient concentration de contraintes – Model 18X18 – raffiné. ....	34
Tableau IV. 13. Déplacement – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 1. ....	35
Tableau IV. 14. Contraintes – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 1. ....	36
Tableau IV. 15. Coefficient concentration de contraintes – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 1. ....	37
Tableau IV. 16. Déplacement – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 2. ....	38
Tableau IV. 17. Contraintes – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 2. ....	39
Tableau IV. 18. Coefficient concentration de contraintes – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 2. ....	40

## LISTE DES NOTATIONS

$E$  : Module de Young.

$\nu$  : Coefficient de Poisson.

$r$  : Réactions internes.

$f$  : Forces.

$K'$  : Matrice de rigidité.

$f_e$  : Vecteur force.

$V_r$  : Élément de référence.

$V_e$  : Élément réel.

$N_i$  : Fonctions d'interpolations.

$G$  : Module de cisaillement.

$\delta_{ij}$  : Indice de CRONECKER.

**INTRODUCTION**

**GENERALE**

## INTRODUCTION GENERALE

### INTRODUCTION GENERALE

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux, et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Je pense bien sûr aux projets spatiaux, aéronautiques et nucléaires dans lesquels la sécurité est vitale.

D'autres types de projets d'envergure sont liés à notre environnement : contrôle de la pollution thermique, acoustique ou chimique, aménagement des cours d'eau, prévision météorologique. Pour dominer ces projets, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes. Il peut ainsi prévoir l'influence de ses décisions au moment de la conception du système.

Le présent projet intitulé « analyse du phénomène de la concentration de contrainte dans une plaque perforée par la méthode des éléments finis » a pour objet d'étudier le problème de concentration de contraintes à travers l'analyse du comportement du matériau, en particulier dans la zone en question.

Je commencerais par présenter la méthode des éléments finis, dans le premier chapitre, qui me permettra par la suite de décrire le comportement d'un élément du système représenté par une plaque perforée soumise à un effort axial, et ceci grâce à des équations aux dérivées partielles. Je vais résoudre ces dernières à l'aide d'un programme en FORTRAN Power Station, élaboré par Mr. M.DEMIDEM (Ecole Nationale Polytechnique – Algérie).

J'exposerai ensuite la théorie de l'élasticité linéaire, dans le chapitre suivant, qui me permettra de formuler le problème de concentration de contrainte. Ce dernier sera abordé dans le troisième chapitre, où je présenterais les aspects de ce phénomène, entre autre le coefficient de concentration de contraintes.

Je consacrerai le dernier chapitre pour l'application des notions présentées auparavant, et ceci par l'analyse de plusieurs modèles de maillage, pour une plaque mince en acier. Enfin, je ressortirais les paramètres qui peuvent aider à la compréhension du phénomène de concentration de contraintes.

**PRESENTATION  
DE  
LA METHODE  
DES ELEMENTS  
FINIS**

## I. PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

**I.1. Introduction**

C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problème stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaire, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.

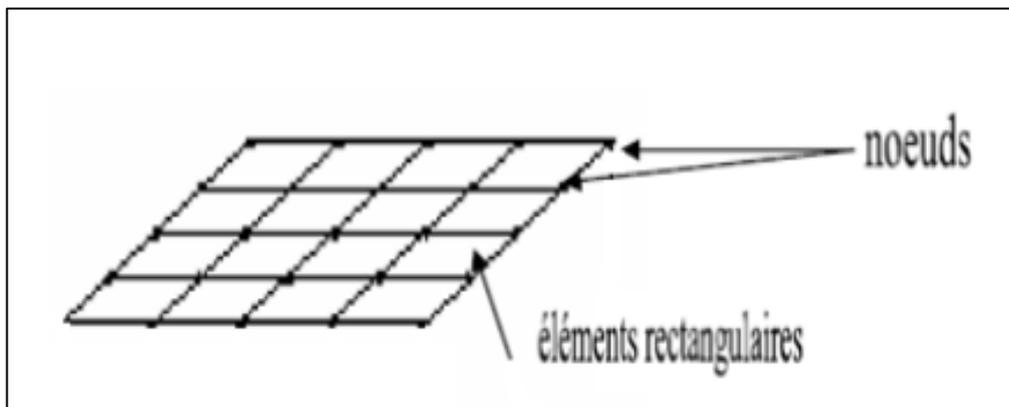
La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur l'ordinateur.

**I.2. Principe de la méthode des éléments finis (MEF) [1]****I.2.1. Description de la MEF**

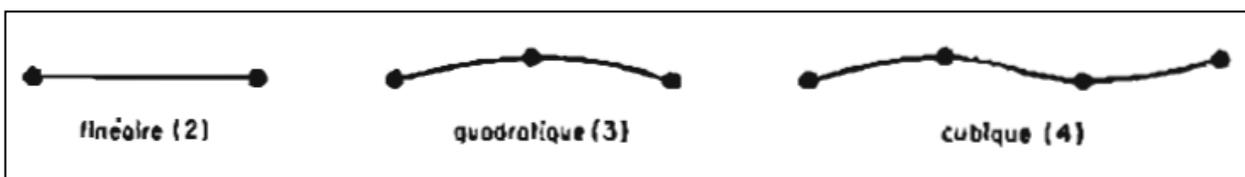
L'analyse des contraintes et des déplacements est l'un des plus importants domaines d'application de la méthode des éléments finis. Plus la structure à analyser par cette méthode soit complexe, plus la vitesse et la capacité des ordinateurs utilisés augmenteront.

Lorsque cette méthode est utilisée pour déterminer des contraintes ou des déplacements dus à un système de charges connus dans une structure, celle-ci sera divisée en un nombre d'éléments finis.



*Figure I.1. Division d'un domaine en éléments finis*

Je présenterais ci-après quelques formes d'éléments classiques :



*Figure I.2. Élément unidimensionnel.*

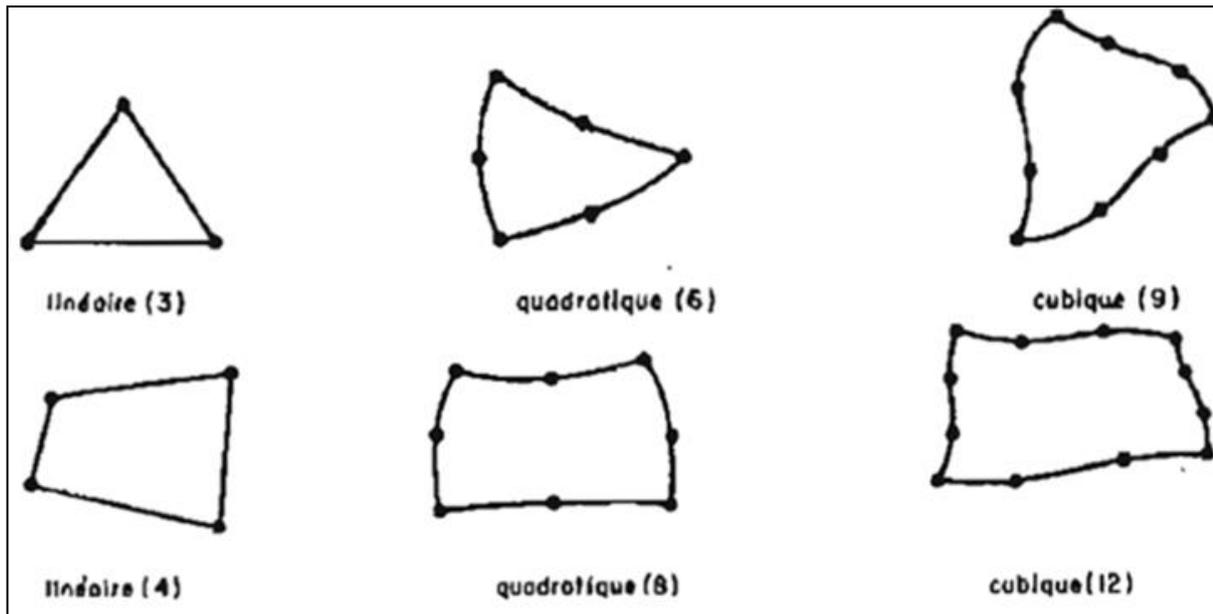


Figure I.3. Elément bidimensionnel.

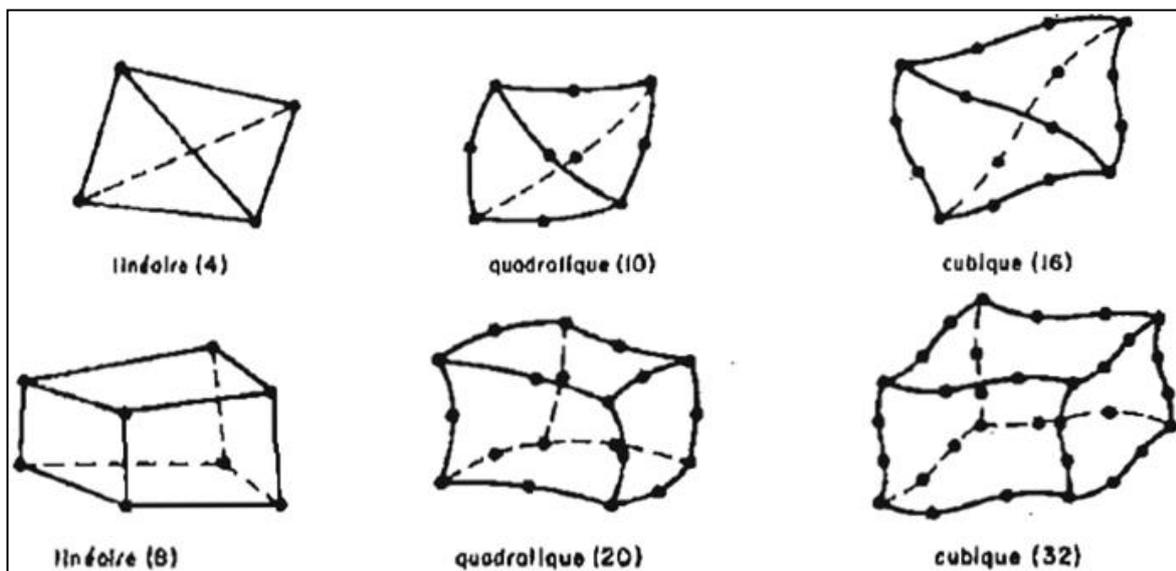


Figure I.4. Elément tridimensionnel.

De cette façon, la structure à étudier est remplacée par un ensemble d'éléments supposés liés les uns aux autres en un nombre fini de points appelés "points nodaux".

### I.2.2. Caractéristiques d'un élément

La description d'élément fini comprend les caractéristiques suivantes :

- **Géométrie**

Un élément fini peut être 1D, 2D, ou 3D sa forme est simple.

- **Matériau**

Le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope et ses propriétés mécaniques  $E$  et  $\nu$ ).

- **Nœuds**

Les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres. Ils occupent des positions stratégiques comme les sommets.

- **Degrés de libertés**

Pour tout élément fini. On doit faire le choix d'une ou plusieurs fonctions (en générale le champ des déplacements), elles sont exprimées en fonction des valeurs particulière qu'elles prennent aux nœuds, valeurs qui deviennent les inconnues nodales. L'union ; par leur degrés de libertés nodales communes, de deux éléments adjacents, puis d'un troisième, et ainsi de suite, permet de reconstituer, pièce par pièce, la solution (assemblage). Pour aboutir à un résultat valable, ces opérations nécessitent le respect de certaines règles, dites critères de convergence.

- **Forces nodales**

A travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. Les unes sont les réactions internes  $r$ , les autres les forces  $f$  dues aux charges appliquées à l'élément (poids propres, température, charge uniforme,...etc.).

La description précédente permet de construire les trois caractéristiques clés d'un élément qui sont :

- Sa matrice de rigidité  $K'$  ;
- Son vecteur force  $f_e$  ;
- Les conditions aux limites.

### I.2.3. Notion d'élément de référence

Un élément de référence  $V_r$  est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel  $V_e$  par une transformation géométrique.

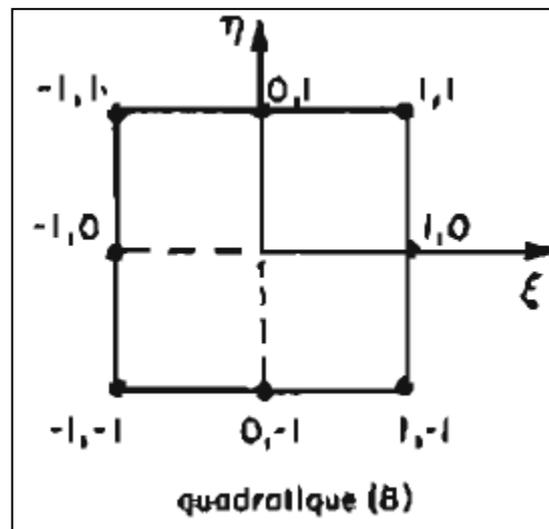


Figure I.5. Élément de référence Q8.

J'illustre par les fonctions d'interpolations d'un élément Q4 :

$$N_1 = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4}$$

$$N_2 = \frac{(1 - \xi)(1 + \eta)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4}$$

$$N_4 = \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{4}$$

$$\langle N \rangle = \langle N_1 N_2 N_3 N_4 \rangle$$

$$\langle N \rangle = \frac{1}{4} \langle (1 - \xi)(1 - \eta); (1 - \xi)(1 + \eta); (1 + \xi)(1 + \eta); (1 + \xi)(1 - \eta) \rangle$$

### I.3. Etapes caractéristiques d'étude des structures par la MEF [2]

#### I.3.1. Définition du domaine "V"

On choisit un ensemble de points, sur le domaine "V". Ces points peuvent éventuellement coïncider avec les nœuds d'interpolation. Puis on remplace le domaine "V" par un ensemble d'élément "V<sub>e</sub>" de formes relativement simples. Chaque élément "V<sub>e</sub>" doit être défini analytiquement de manière unique en fonction des coordonnées des nœuds géométriques qui appartiennent à cet élément.

La partition du domaine "V" en élément "V<sub>e</sub>" doit respecter les deux règles suivantes :

- Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leur frontière commune, si elle existe cette condition exclut le recouvrement de deux éléments. Les frontières entre éléments peuvent être des points, des courbes ou des surfaces.
- L'ensemble de tous les éléments "V<sub>e</sub>" doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donnée "V". nous excluons en particulier les vides entre éléments.

$$V = \sum_e V_e$$

#### I.3.2. Représentation de la géométrie de chaque élément "V<sub>e</sub>"

On utilise une transformation τ linéaire par rapport aux coordonnées {X<sub>n</sub>} des nœuds géométriques de l'élément réel "V<sub>e</sub>"

$$\tau : \xi \quad x(\xi) = [\bar{N}(\xi)]\{\bar{X}_n\}$$

$$X(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta)X_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta)X_2 + \dots + \bar{N}_n(\xi, \eta)X_n = \langle \bar{N} \rangle \left\{ \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{matrix} \right\}$$

$\bar{N}_L$  : Fonction de transformation géométrique.

{X<sub>n</sub>} : Coordonnées des nœuds géométriques de l'élément réel "V<sub>e</sub>".

X(ξ) : Coordonnées des nœuds géométriques de l'élément de référence "V<sub>r</sub>".

#### I.3.2.1. Construction de la fonction N(ξ) et $\bar{N}(\xi)$

Les fonctions de transformations géométriques  $\bar{N}(\xi)$  et les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence N(ξ) ont les mêmes propriétés, elles peuvent parfois être construites directement à partir des polynômes classiques de type Lagrange ou Hermite.

Les polynômes de l'interpolation de Lagrange dont l'expression générale est :

$$N_i^n = \prod_{j \neq i}^{n+1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \text{ Avec } j \neq i$$

$N_i^n(x)$  : est un polynôme de degré  $n$ , qui passe par  $n$  points  $X_j$  ( $j \neq i$ ) et vaut 1 au point restant  $X_i$ .

### I.3.2.2. Calcul des matrices de rigidité de chaque élément $[K^e]$

En se basant sur le principe des travaux virtuels, la matrice de rigidité d'un élément rectangulaire en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = t \int_{-b}^b \int_{-a}^a [B]^T [D] [B] dx dy$$

Par transformation d'intégrale on peut passer de l'intégration de la formule juste en dessus sur l'élément réel " $V_e$ " à une intégration plus simple sur l'élément de référence " $V_r$ " on obtient la formule suivante :

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] \det[J] d\xi d\eta$$

$$dx dy = \det[J] d\xi d\eta$$

[B] : matrice relie les déformations en  $x$  au variable nodale (déplacements).

[D] : matrice des propriétés physiques d'élément ( $E, \nu$ , etc.).

[J], det [J] : matrice Jacobéenne et son déterminant.

Matrice de jacobéen [J] d'un élément quadrilatéral quatre nœuds :

$$x(\xi, \eta) = \langle N_1 \ N_1 \ N_1 \ N_1 \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

$$y(\xi, \eta) = \langle N_1 \ N_1 \ N_1 \ N_1 \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & -(1+\eta) & (1+\eta) & (1-\eta) \\ -1(1-\xi) & (1-\xi) & (1+\xi) & -(1+\xi) \end{bmatrix}$$

$$\det[J] = A_0 + A_1\xi + A_2\eta$$

$$A_0 = \frac{1}{8}[(y_4 - y_2)(X_3 - X_1) - (y_3 - y_1)(X_4 - X_2)]$$

$$A_1 = \frac{1}{8}[(y_3 - y_4)(X_2 - X_1) - (y_2 - y_1)(X_3 - X_4)]$$

$$A_2 = \frac{1}{8}[(y_4 - y_1)(X_3 - X_2) - (y_3 - y_2)(X_4 - X_1)]$$

### I.3.2.3. Résolution du système d'équation globale

Après l'assemblage, le système d'équations algébriques globales s'écrit :

$$[K]\{U_n\} = \{F\}$$

- Modification de  $[K]$  et  $\{F\}$  pour prendre en compte les conditions aux limites.
- Triangularisation de  $[K]$ .
- Calcul de la solution  $U$ .

## I.4. Convergence de la MEF [3]

### I.4.1. Types de convergence

- **La convergence  $h$**

Par raffinement du maillage sans modification de l'interpolation, considérons un maillage donné d'éléments finis, on appelle  $h$  la dimension qui caractérise la taille géométrique d'un élément fini obtenue en subdivisant davantage le domaine en éléments toujours plus petits et chaque nouvelle division contient la précédente et on conserve pour les éléments de même type, la même approximation du champ de déplacement.

Si les critères de convergence sont remplis, la solution approchée tend vers la solution exacte quand la taille des éléments tend vers zéro  $h \rightarrow 0$  c'est le principe de la convergence  $h$ .

- **La convergence  $p$**

Par enrichissement de l'interpolation sans changement de maillage. Partons d'un maillage donné d'élément fini, on appelle  $p$  le degré des polynômes utilisé pour l'interpolation, on conserve le maillage choisi et on enrichit le champ approché des éléments en augmentant le degré  $p$ .

Alors si les critères de convergence sont satisfaits la solution approchée tend vers la solution exacte lorsque le degré de l'interpolation tend vers l'infini  $P \rightarrow \infty$ . C'est la technique de la convergence  $p$ .

### I.4.2. Critère de convergence

La convergence de la solution éléments finis vers la solution exacte au fur et à mesure que le nombre d'éléments augmente peut se faire soit de manière monotone soit de manière non monotone.

- **Convergence monotone**

Les éléments doivent être complets et compatibles.

#### Élément complet

Les fonctions de déplacement doivent être en mesure de représenter :

- Déplacement de corps rigide ;
- Etat de déformation constante.

Elément compatible

Les déplacements au sein des éléments et à travers les limites séparant les éléments doivent être continus. Physiquement la compatibilité assure qu'il n'y aura pas apparition d'espace ou vides entre éléments lorsque l'assemblage est chargé. La comptabilité est difficile à satisfaire lorsque les degrés de liberté aux nœuds sont dépendants.

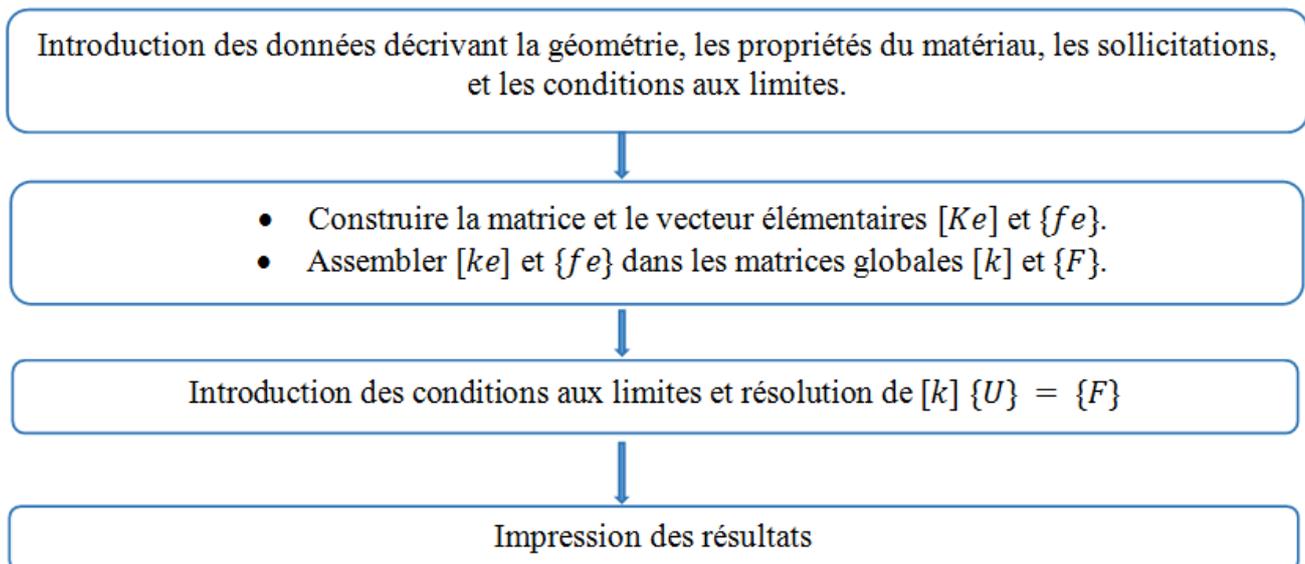
- **Convergence non monotone**

En pratique, nous remarquons souvent que la solution Eléments Finis converge vers la solution exacte malgré l'emploi d'élément ne préservant pas la continuité inter-éléments.

Il s'agit dans ce cas de convergence non monotone due à l'utilisation d'éléments incompatibles.

**I.5. ETAPES D'UN PROGRAMME D'ELEMENTS FINIS [2]**

Le tableau suivant résume les parties de base de programme d'ordinateur pour la résolution complète d'un problème par la méthode des éléments finis.



*Figure I.6. Organigramme d'étapes caractéristiques d'un programme d'éléments finis.*

**I.6. Conclusion**

Ce chapitre nous a permis de comprendre les notions fondamentales de la MEF qu'on va faire appel par la suite dans le but de exploiter le programme en Fortran Power Station. Par contre, des notions complémentaires que j'exposerai dans le chapitre suivant sont nécessaires pour bien maîtriser le comportement de l'élément, et cerner l'étude en question.

**THEORIE  
DE  
L'ELASTICITE  
LINEAIRE**

## II. THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE

**II.1. Introduction**

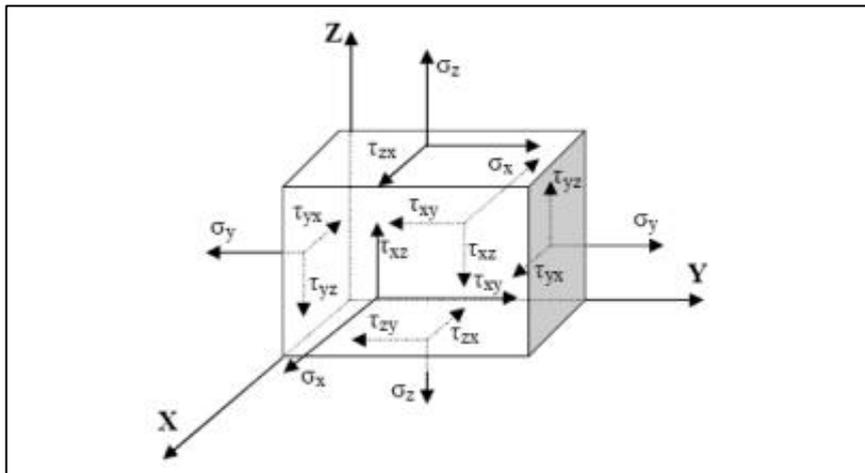
La formulation en élément finis en mécanique des structures est basée sur l'élasticité linéaire, dans ce chapitre on présente les équations générales de la théorie de l'élasticité linéaire.

**II.2. Equations gouvernantes [4]****II.2.1. Les équations d'équilibre**

Le corps est soumis à des forces extérieures qui peuvent être classées en deux catégories :

- Forces volumiques : ceux sont des forces à distance associées à la masse du corps et réparties sur tout le volume.
- Forces surfacique : ceux sont des forces de contact réparties sur toute la surface de contact.

Dans le cas général chaque point matériel est soumis à neuf composantes de contrainte.



*Figure II.1. Etat de contrainte.*

Les équations d'équilibre contrôlent le changement des composantes du tenseur des contraintes lors du passage d'un point à un autre avoisinant. Les équations d'équilibre en tout point sont définies par la formule suivante :

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$$

$F_i$  : Les composantes des forces volumiques suivant les directions  $i$ .

### II.2.2. Les équations de compatibilités

Il existe six composante de déformation ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$ ) et trois composantes de déplacement ( $u_x, u_y, u_z$ ). Il est possible de se donner trois fonctions quelconques suffisamment dérivables étant déduire les six fonctions de  $\varepsilon_{ij}$ . Par contre il n'est pas possible de faire l'inverse. Il devrait par conséquent exister trois relations liants les  $\varepsilon_{ij}$ .

Du point de vue mathématique, ces relations expriment les restrictions sur la forme de  $\varepsilon_{ij}$  pour que le système d'équations différentielles soit intégrable. Les conditions d'intégrabilité sont appelées conditions de compatibilité. Elles assurent l'existence de champs de déplacement et son unicité.

En fait, les déplacements sont obtenus à des constantes près qui sont déterminées par les conditions aux limites.

Les conditions de compatibilités sont des conditions nécessaires pour l'existence de solution unique en termes de déplacement.

Ces équations ont été obtenues par Saint-Venant en 1864, s'énoncent comme suit :

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\delta_x \delta_y} = \frac{\partial^e \varepsilon_x}{\delta_y^2} + \frac{\partial^e \varepsilon_y}{\delta_x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\delta_y \delta_z} = \frac{\partial^e \varepsilon_y}{\delta_z^2} + \frac{\partial^e \varepsilon_z}{\delta_y^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial_x \partial_z} = \frac{\partial^e \varepsilon_x}{\delta_z^2} + \frac{\partial^e \varepsilon_z}{\delta_x^2} \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} 2. \frac{\partial^e \varepsilon_x}{\partial_x \partial_y} = \frac{\partial}{\partial_x} \left[ \frac{\partial y_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial y_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial y_{xz}}{\partial x} \right] \\ 2. \frac{\partial^e \varepsilon_y}{\partial_x \partial_z} = \frac{\partial}{\partial_x} \left[ \frac{\partial y_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial y_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial y_{xz}}{\partial y} \right] \\ 2. \frac{\partial^e \varepsilon_z}{\partial_x \partial_y} = \frac{\partial}{\partial_x} \left[ \frac{\partial y_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial y_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial y_{xy}}{\partial z} \right] \end{array} \right. \end{cases}$$

Remarque : bien que le nombre des équations de compatibilité est six. Elles ont un degré d'indépendance égale à trois.

### II.2.3. Equations déformation-déplacement

Les relations déformation-déplacement pour la théorie d'élasticité linéaire au nombre de six sont données par l'équation suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

### II.2.4. Equations contrainte-déformations (loi de comportement)

Sous l'action d'une contrainte normale uni-axiale, la plupart des matériaux ont un comportement bien défini dans le domaine élastique. Ce comportement se traduit par la relation :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Avec  $E$  : module d'élasticité.

Considérons un élément soumis à un état de contrainte tridimensionnel, la déformation totale dans les directions  $x$ ,  $y$ , et  $z$  est alors donnée par :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \end{cases}$$

La relation dans le domaine élastique entre les contraintes et les déplacements, pour un corps soumis à un état de contrainte de cisaillement pur tridimensionnel, a été trouvée expérimentalement et elle a la forme suivante :

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} \end{cases}$$

Avec :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$G$  : Le module de cisaillement, appelé aussi le module de rigidité.

Les équations contrainte-déformation peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$$

Avec  $C_{ijkl}$  dans ce cas (symétrique, orthotrope et isotrope) est donné par la matrice suivante :

$$C = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

La loi de HOOKE pour un matériau linéaire isotrope est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Avec :  $\lambda$  et  $\mu$  : coefficient de LAME :

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = G$$

$\delta_{ij}$  : Symbole de CRONECKER.

### II.3. Déformation plane [4, 5]

On peut dire qu'on est en présence d'un problème de déformation plane lorsqu'on a un corps dont l'une des dimensions est très importante par rapport aux deux autres.

Un tel problème est peut être défini par un cylindre ou un prisme si les conditions aux limites sur les surfaces latérales (parallèles à l'axe z) font intervenir des déplacements ou vecteur contrainte parallèle au plan (x, y), et si ces conditions aux limites sont uniformes le long de l'axe z, c'est-à-dire indépendante de z (comme le cas d'un barrage).

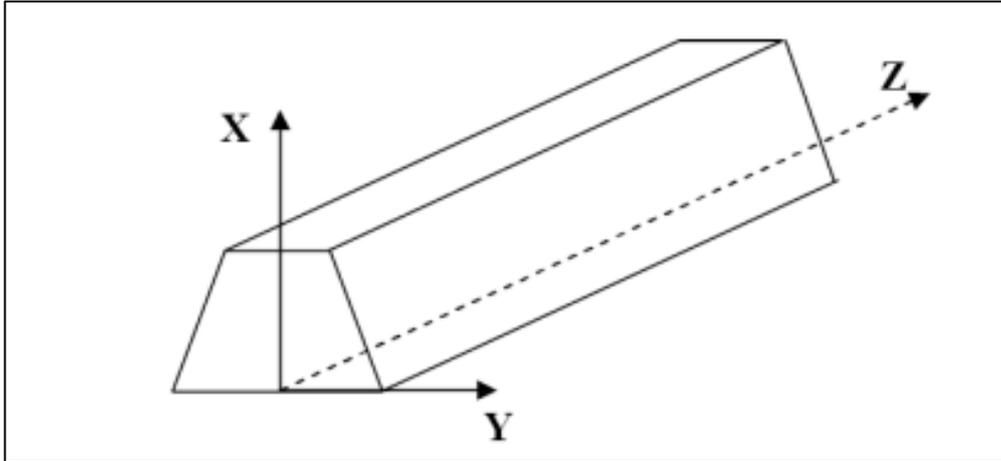


Figure II.2. Etat de déformation plane.

Dans ce cas :

$$u_x = u_x(X, Y)$$

$$u_y = u_y(X, Y)$$

$$z = 0$$

$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$  Mais  $\sigma_{zz} \neq 0$ , on peut tirer les relations suivantes :

Les relations contrainte-déformation

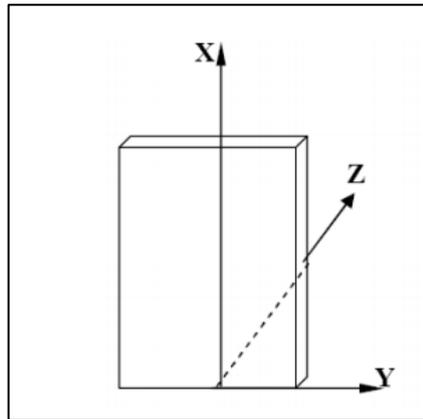
$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Les équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases}$$

## II.4. Contrainte plane [4, 5]

La différence entre les deux situations déformation plane et contrainte plane est que le premier cas est vraiment bidimensionnel alors que la situation en contrainte plane n'est pas vraiment bidimensionnelle. L'état de contrainte plane est peut être définie par le cas d'une plaque ou d'un disque, d'où la dimension dans la direction z est très petite par rapport aux dimensions x et y.



*Figure II.3. Etat de contrainte plane.*

Dans le cas d'une plaque chargée dans leur plan de solution de type contrainte plane indépendante de z. Dans le cas de contrainte plane on a :

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0, \quad \varepsilon_{zz} \neq 0$$

Les équations contrainte-déformation :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Avec} \quad \gamma_{xx} = \varepsilon_{xx} \quad \text{et} \quad \gamma_{yy} = \varepsilon_{yy} \quad \text{et} \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$$

Les équations d'équilibre seront donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \end{cases}$$

## II.5. Conclusion

Ce chapitre nous permettra de considérer un état de contrainte plane pour l'étude de notre plaque métallique. Cet élément va être étudié en tenant compte du phénomène expliqué dans le chapitre suivant.

**CONCENTRATION**

**DE CONTRAINTES**

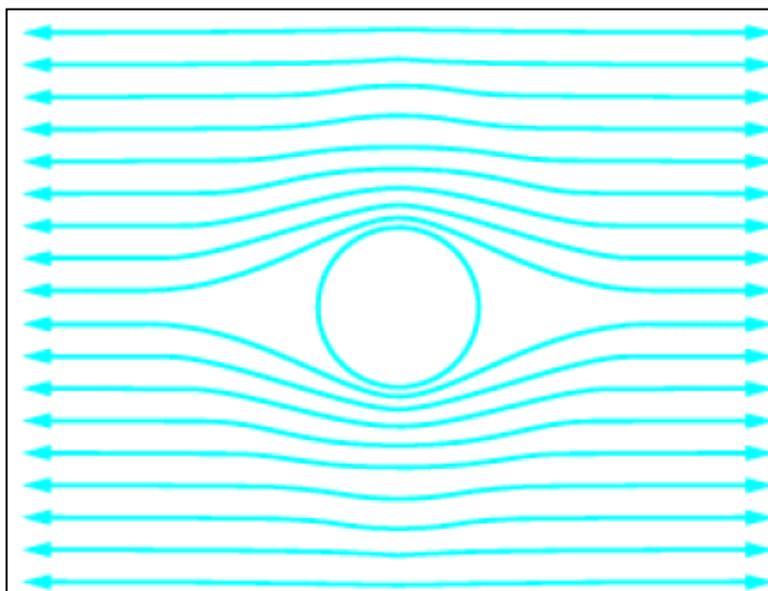
## III. CONCENTRATION DE CONTRAINTES

**III.1. Introduction**

La concentration de contraintes est un problème souvent rencontré dans la conception d'un composant ou organe mécanique. C'est un phénomène d'augmentation locale des contraintes dans une zone comportant une modification géométrique de la pièce. Il apparaît dans une discontinuité de l'élément ou d'une structure.

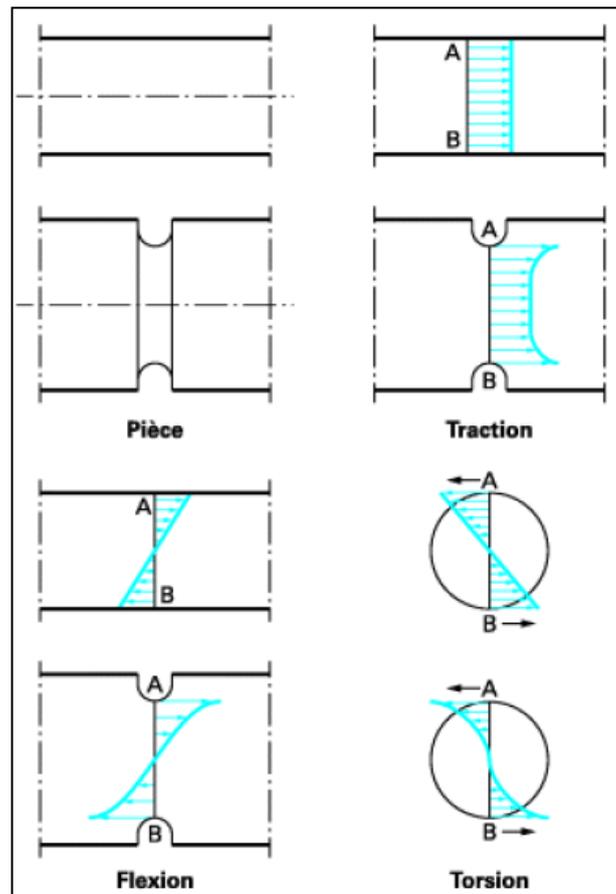
**III.2. Définitions [5, 6, 7]**

En règle générale, toutes les discontinuités de forme provoquent ce phénomène. Afin de bien illustrer ce problème, je parle d'une plaque en présence d'un trou sous traction. En effet, sans présence d'un trou les lignes de contraintes sont homogènes, si j'utilise la densité des lignes comme la valeur des contraintes en traction. Après réalisation d'un trou, on constate que ces lignes, sont perturbées autour du trou et la densité augmente. Chaque modification de discontinuité entraîne un nouveau type de distribution de contraintes. On peut donc modifier la concentration de contraintes en générant un grand nombre de combinaisons de géométrie d'éléments possibles. Par exemple, si on introduit deux trous dans la plaque, la distance entre les deux trous permet de faire varier sensiblement l'importance de cette concentration de contraintes.



*Figure III.1. Illustration schématique qualitative montrant l'origine de la concentration de contraintes.*

Il faut toutefois être conscient que ce phénomène existe, non seulement dans des pièces ou composants mécaniques, mais également dans une structure. Le cas de structures soudées est un bon exemple. En effet, la forme du cordon de soudage peut modifier considérablement la concentration de contraintes. On peut également avoir des phénomènes de concentration de contraintes microscopiques, au niveau des stries d'usinage par exemple. L'effet d'une entaille sur une pièce est la création de concentration de contraintes locales.

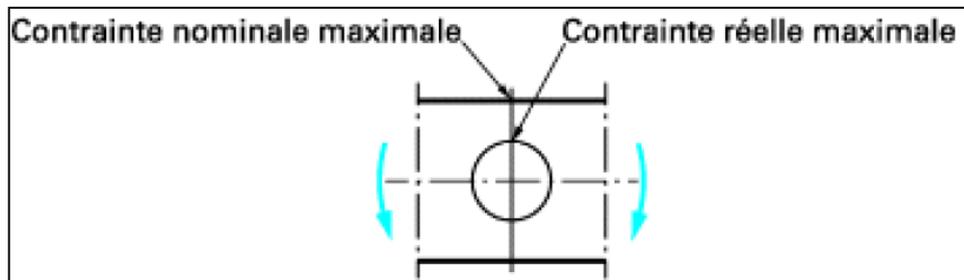


*Figure III.2. Champs de contraintes dans différents cas de pièces lisses ou entaillées.*

Dans une pièce non entaillée, la répartition des contraintes se représente par des droites et résulte de l'application des formules classiques de résistance de matériaux ; on a affaire dans ce cas à des contraintes nominales. Dans le cas de la flexion et de la torsion, la contrainte nominale est maximale en A et en B.

Dans le cas de pièce entaillée avec la même section nominale, cette répartition est modifiée par le phénomène de concentration de contraintes. On parle alors de contraintes réelles. Dans le cas de la figure III.2., les contraintes réelles sont également maximales en A et en B.

Dans certains cas, la morphologie de la pièce combinée, avec une sollicitation, fait que les contraintes nominales maximales et contraintes réelles maximales ne se trouvent pas au même point (Figure III.3.). Il faut signaler que ce type de configuration est relativement fréquent dans un composant ou une structure mécanique.



*Figure III.3. Plaque percée en flexion : influence de la morphologie sur la localisation de contrainte maximale.*

On constate que la section de la pièce n'est donc pas le seul paramètre de calcul ; il faut aussi tenir compte d'autres paramètres, la géométrie de la pièce et surtout la nature de la sollicitation.

### III.3. Coefficient théorique de concentration de contraintes « $K_t$ » [6, 7]

Les définitions qui suivent reposent sur une constatation fondamentale. Pour un type de chargement donné, le rapport entre la contrainte réelle (dans le cas où elle est inférieure à la limite d'élasticité) et la contrainte nominale en un point ne dépend pas de la valeur de la charge appliquée. Le choix du coefficient qui représentera les concentrations de contraintes est donc tout naturel.

L'indice « t » est employé pour indiquer que ces coefficients sont théoriques et que leur calcul repose sur les hypothèses de la théorie de l'élasticité.

L'expression mathématique ci-après a été donnée par PETERSON à la suite des travaux de NEUBER, pour des formes de pièces simples, pour le cas en traction il propose :

$$K_t = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

$a$  : La demi-longueur de l'entaille.

$\rho$  : Le rayon de courbure de l'entaille.

Dans le cas d'un trou, on a :

$$a = \rho \quad \text{D'où} \quad K_t = 3$$

$K_t$  est défini comme le rapport de la contrainte maximale réelle dans la zone de discontinuité (entaille, trou, etc.) à la contrainte dans la section nette :

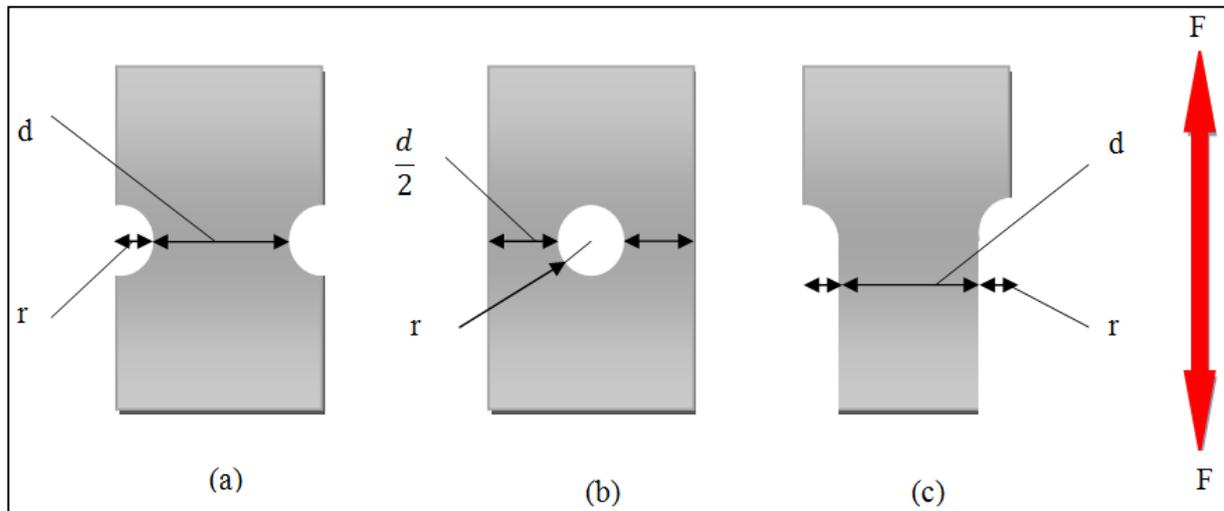
$$K_t = \frac{\sigma_{réelle}}{\sigma_{nominale}}$$

$\sigma_{réelle}$  est calculé par les méthodes numériques comme la méthode des éléments finis ou par les méthodes analytiques pour les géométries simples. Elle est également mesurable par les techniques d'analyse de contraintes expérimentales comme la photoélasticimétrie, l'extensométrie ou encore les méthodes thermiques.

$\sigma_{nominale}$  est calculable à l'aide des formules de résistance des matériaux, en considérant la pièce comme une barre ou une plaque sans prendre en compte la discontinuité géométrique.

Pour le cas de la torsion, il faut considérer les contraintes de cisaillement pour faire les calculs.

A titre d'exemple, considérons les trois barres prismatiques soumises à une traction, entaillées de manières différentes :



*Figure III.4. Barres entaillées, soumises à une traction. [8]*

**Tableau III.1. Valeurs de  $K$  de trois barres pour différents rapports du rayon de l'entaille à la longueur restante. [8]**

r/d	0,05	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
(a)	2,55	2,35	2,05	1,62	1,4	1,3	1,22
(b)	2,65	2,5	2,3	2,2	2,1	2,06	2,02
(c)	1,92	1,8	1,66	1,5	1,38	1,28	1,22

« Le tableau indique que plus le changement de section du barreau est rapide ( $r/d$  est faible), plus le coefficient de concentration de contraintes est grand. Donc le concepteur ne doit pas varier trop brusquement les sections des éléments de la structure, ou bien il sera conduit à tenir compte de l'influence de ce paramètre ». [8]

Le coefficient théorique de concentration de contraintes  $K_t$  dépend uniquement de la géométrie de la pièce et du type de sollicitation. Dans ce cas, j'ai supposé que le matériau de la plaque est homogène et continu.

Je précise aussi que la limite d'utilisation de  $K_t$  :

- Les sollicitations sont statiques ;
- Les contraintes réelles sont calculées comme si le matériau avait un comportement purement élastique ;
- $K_t$  est une valeur relative, donc un nombre adimensionnel.

### III.4. Conclusion

En plus des problèmes de rupture statiques, la prise en compte des concentrations de contraintes en fatigue est un domaine important dans une démarche d'allègement de structures. En effet, la fatigue est la cause de la plupart des cas de rupture des composants contenant des concentrations de contraintes.

Donc, une analyse s'impose pour montrer comment traiter ce type de problème dans le contexte de calcul de structure par éléments finis.

**APPLICATION**  
**CAS D'UNE PLAQUE**  
**EN ACIER**

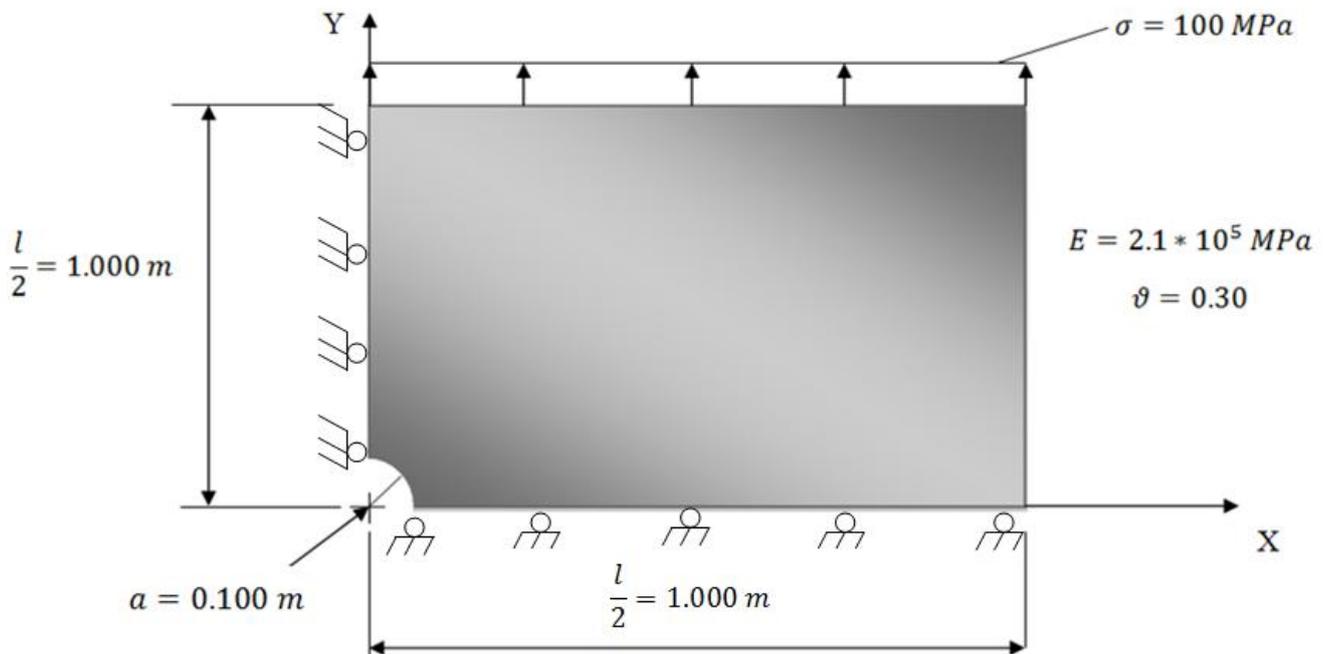
## IV. APPLICATION : CAS D'UNE PLAQUE EN ACIER

**IV.1. Description des hypothèses et caractéristique de la plaque**

Je propose de se focaliser sur le cas de la plaque trouée sollicitée en traction. Cette plaque est de largeur «  $2l$  », percée d'un trou circulaire de rayon «  $a$  » est soumise à un état de tension de densité surfacique uniforme «  $\sigma$  » suivant l'axe Y. La plaque est en état de contraintes planes. Le rayon du trou est supposé petit devant les dimensions de la plaque. La matrice des contraintes de traction est de la forme :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Compte tenu des symétries, on ne représente les composantes de la matrice des contraintes que dans le quart de la pièce. D'où j'ai supposé aussi que la plaque s'appuie simplement suivant les deux directions X et Y.



*Figure IV.1. Schéma de la plaque perforée sollicitée en traction.*

**IV.2. Présentation du programme de calcul [9]**

Le programme a été développé afin de déterminer les valeurs des déplacements en chaque degré de liberté ainsi que les contraintes au milieu de chaque élément du maillage adopté.

J'ai choisi, pour ce projet, de travailler avec un élément quadratique Q8 pour l'ensemble des modèles que j'ai proposés. Je précise que pour chaque modèle j'avais des paramètres bien précis que je dois les introduire, d'où la nécessité de connaître les variables ci-après :

- NXE : Nombre d'éléments dans la direction X.
- NXESS : Nombre d'élément dans la partie supérieure du domaine.
- NYE : Nombre d'élément dans la direction Y.
- N : Nombre de degré de liberté du domaine.
- W : Demi-largeur de la bande (R+1) Nombre de D.D.L – 1 (R : Plus grande différence entre les indices d'un même élément).
- NN : Nombre de nœuds.
- NL : Nombre de degré de liberté chargé.
- NR : Nombre de nœuds restreints.
- GP : Nombre de point de gauss (GP=3).
- ArchH : Hauteur totale de l'arche.
- ArchL : Longueur totale de l'arche.
- by(I) : Hauteur des ellipses (de la plus grande vers la plus petite).
- ax(I) : Bases des ellipses (bases des ellipses de la plus grande vers la plus petite).
- IDCODE : IDCODE=1 en contrainte planes.
- IDSTR : IDSTR=1 pour la structure en arche.

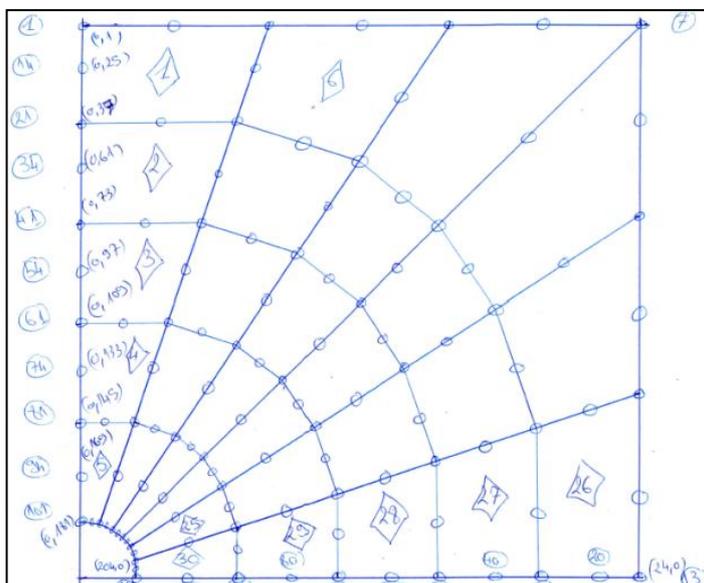
Pour ce qui suit, je vais proposer quelques modèles en variant le maillage et en procédant un raffinement autour de la zone de concentration de contraintes.

Je procéderai comme suit :

- Etape 1 : Introduction des paramètres du modèle ou maillage choisi,
- Etape 2 : Définition des caractéristiques géométriques et physiques,
- Etape 3 : Précision des conditions aux limites,
- Etape 4 : Calcul et entrée des forces reprises par chaque nœud.
- Etape 5 : Exécution du programme et impression des résultats.
- Etape 6 : Tracé des courbes de déplacement et de contrainte suivant l'axe Y.
- Etape 7 : Tracé de la courbe du coefficient de concentration de contraintes  $K_t$  selon l'axe X.

**IV.3. Modèle N°1**

Le premier model a été conçu de telle sorte à avoir cinq éléments dans la direction Y, et six éléments dans l'autre direction, comme schématisé :



*Figure IV.2. Trou circulaire, maillage 5X6 éléments.*

**IV.3.1. Etape 1**

L'introduction des paramètres dans le programme est faite comme suit :

```

6   5   204   41   113   22   7   3
3   1   1
1.0  1.0
    
```

**IV.3.2. Etape 2**

Les caractéristiques géométriques ainsi que celle du matériau sont présentées ci-après :

```

0.82
0.64
0.46
0.28
0.10

0.82
0.64
0.46
0.28
0.10

2.1E5  2.1E5  2.1E5  2.1E5  2.1E5  2.1E5

0.3    0.3    0.3    0.3    0.3    0.3
0.3    0.3    0.3    0.3    0.3    0.3
0.3    0.3    0.3    0.3    0.3    0.3
0.3    0.3    0.3    0.3    0.3    0.3
0.3    0.3    0.3    0.3    0.3    0.3
    
```

**IV.3.3. Etape 3**

Les conditions aux limites pour chaque nœud aux deux bords de la plaque sont :

1		
1		
0		
	53	
13	0	
0	1	
1		
	54	
14	1	
1	0	
0		
	60	
20	0	
0	1	
1		
	61	
21	1	
1	0	
0		
	73	94
	0	1
33	1	0
0		
	74	
1	1	100
	0	0
34		1
1		
0	80	
	0	
	1	101
40		1
0		0
1	81	
	1	
	0	
		113
41		0
1	93	
	0	1
0	1	

**IV.3.4. Etape 4**

Les contraintes reprises par chaque nœud le long des extrémités de la plaque :

1	6,69872981
3	13,39745962
5	14,43375673
7	15,47005384
9	18,30127019
11	21,13248654
13	10,56624327

**IV.3.5. Etape 5**

L'exécution du programme nous a aidé à retrouver les résultats dans les tableaux : IV.1 ; IV.2 ; IV.3.

**Tableau IV.1. Valeurs des déplacements (model 5X6).**

N° du degré de liberté	Déplacement * 10 <sup>(-5)</sup> [m]
1	49,56
25	44,6
37	39,59
61	35,70
73	31,83
97	27,90
109	24,09
133	20,46
145	17,18
169	14,82
181	13,58

**Tableau IV.2. Valeurs des contraintes (Model 5X6).**

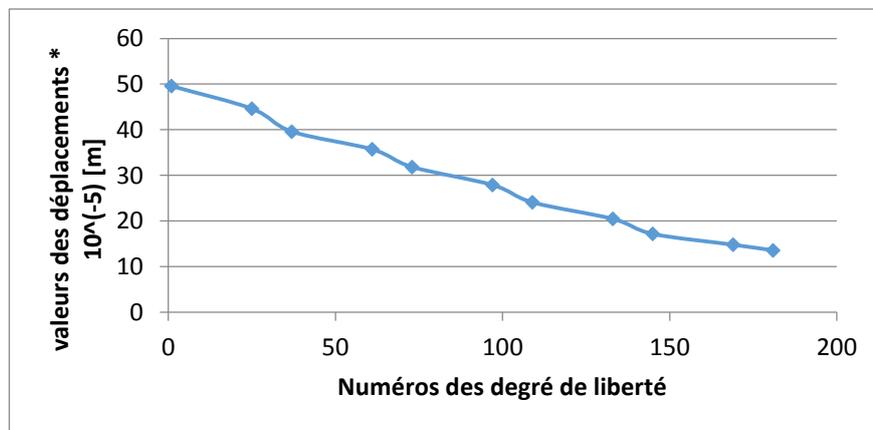
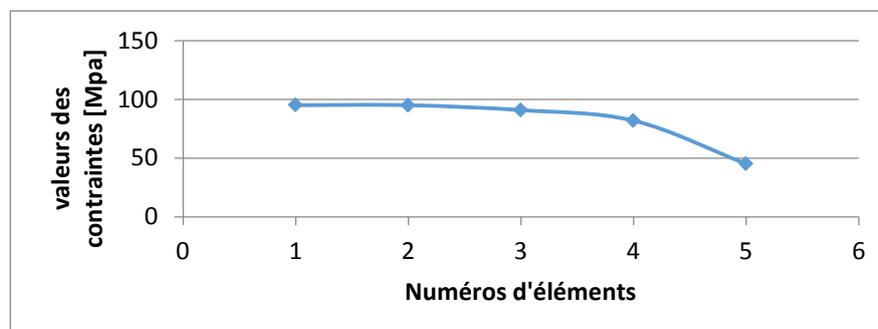
N° d'élément	Contrainte [Mpa]
1	95,03
2	94,97
3	90,78
4	81,83
5	45,07

**Tableau IV.3. Valeurs de  $K_t$  (Model 5X6)**

N° d'élément	$K_t$ [Adim]
26	0,9683
27	0,9827
28	0,9985
29	1,0330
30	1,1790

**IV.3.6. Etape 6**

Traçons maintenant les courbes de déplacements, contraintes en utilisant les valeurs trouvées dans les tableaux.

**Figure IV. 3. Déplacement – Model 5X6.****Figure IV. 4. Contraintes – Model 5X6.**

**IV.3.7. Etape 7**

En dernier lieu, nous avons exploité les résultats du tableau IV.3 afin de tracer le graphe ci-après :

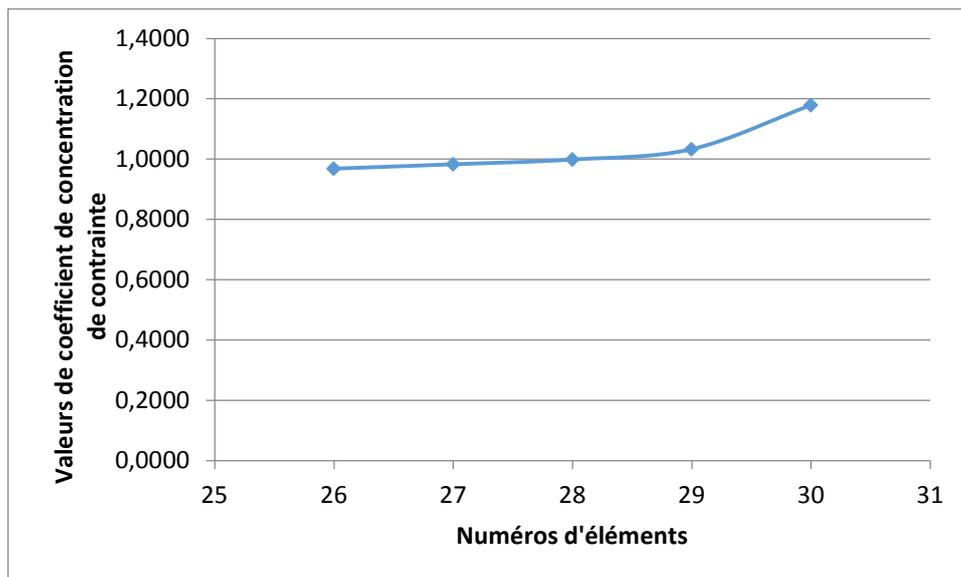


Figure IV.5. Coefficient concentration de contraintes – Model 5X6.

**IV.4. Modèle N°2**

Nous avons passé à un model de 9X10 éléments, et nous avons passé par les mêmes étapes dans le but d'améliorer les résultats trouvés pour le coefficient de concentration de contraintes.

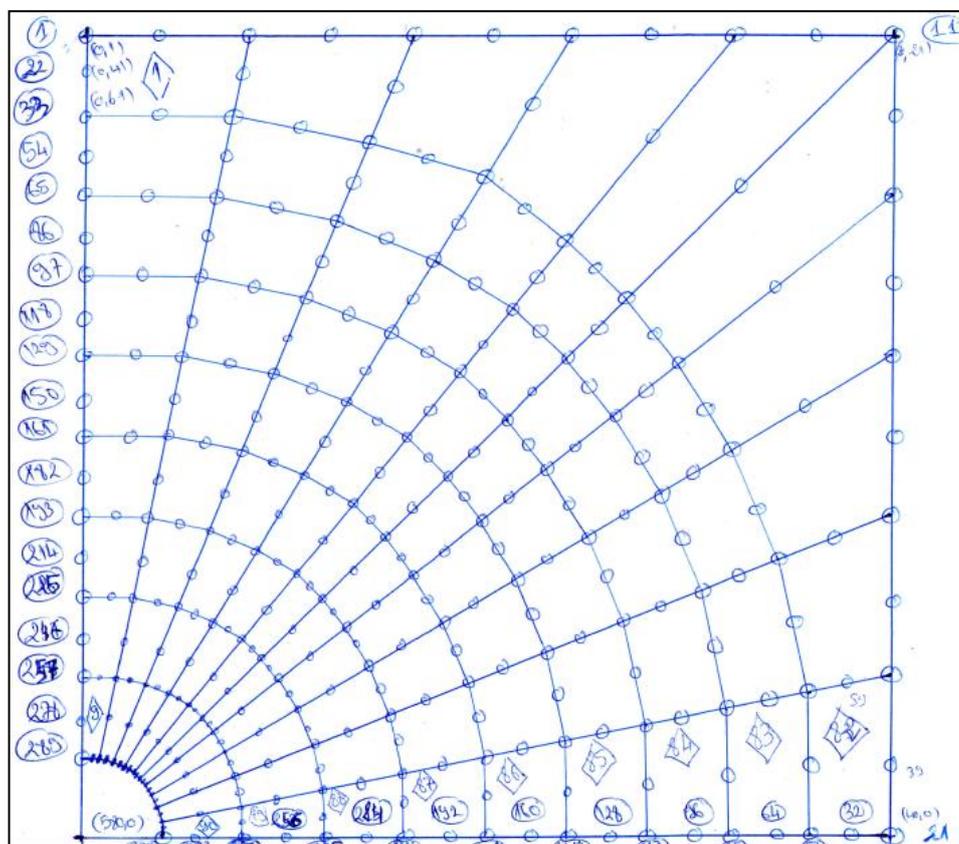
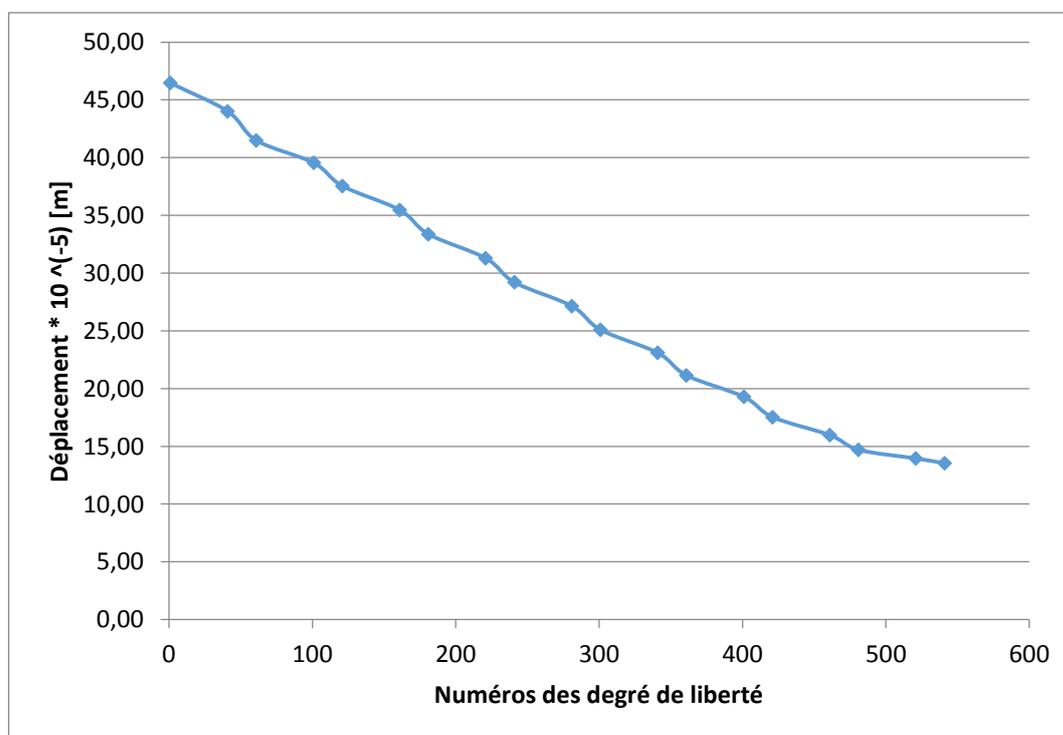


Figure IV. 6. Trou circulaire, Maillage 9X10 éléments.

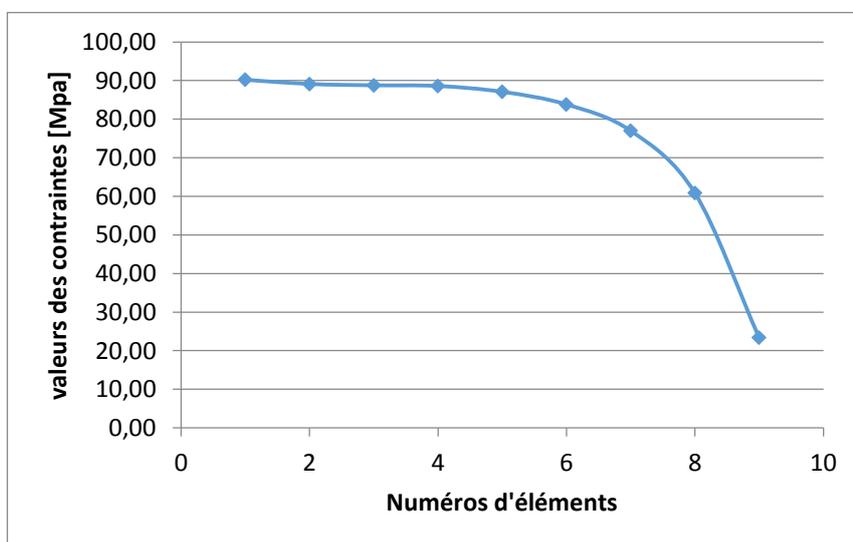
**Tableau IV. 4. Déplacements – Model 9X10.**

N° du degré de liberté	Déplacements *10 <sup>(-5)</sup> [m]
1	46,46
41	44,00
61	41,48
101	39,54
121	37,54
161	35,46
181	33,37
221	31,28
241	29,20
281	27,14
301	25,09
341	23,09
361	21,14
401	19,28
421	17,53
461	15,97
481	14,7
521	13,95
541	13,54

**Figure IV. 7. Déplacements – Model 9X10.**

**Tableau IV. 5. Contraintes – Model 9X10.**

N° d'élément	Contrainte [Mpa]
1	90,21
2	89,11
3	88,78
4	88,60
5	87,09
6	83,81
7	76,98
8	60,83
9	23,35

**Figure IV. 7. Contraintes – Model 9X10.****Tableau IV. 6. Coefficient concentration de contraintes – Model 9X10.**

Numéros des éléments	Kt
82	0,9244
83	0,9376
84	0,9478
85	0,957
86	0,967
87	0,9806
88	1,005
89	1,072
90	1,402

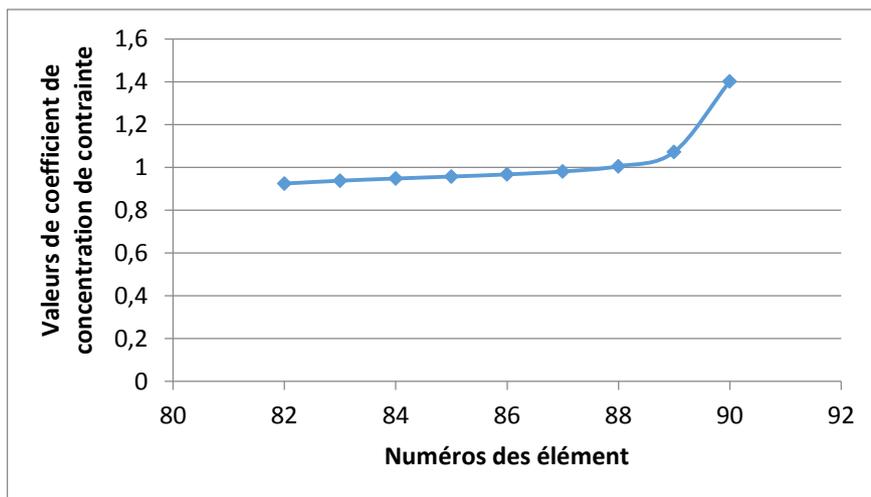


Figure IV.8. Coefficient concentration de contraintes – Model 9X10.

**IV.5. Modèle N°3 (Model 18x18)**

Comme les résultats des modèles précédents n'étaient satisfaisants, il était utile de passer à un maillage plus important de 18X18 éléments. Pour ce modèle, on a suivi la même procédure dans le but d'avoir une idée assez claire sur l'ordre de grandeur du coefficient de concentration de contraintes.

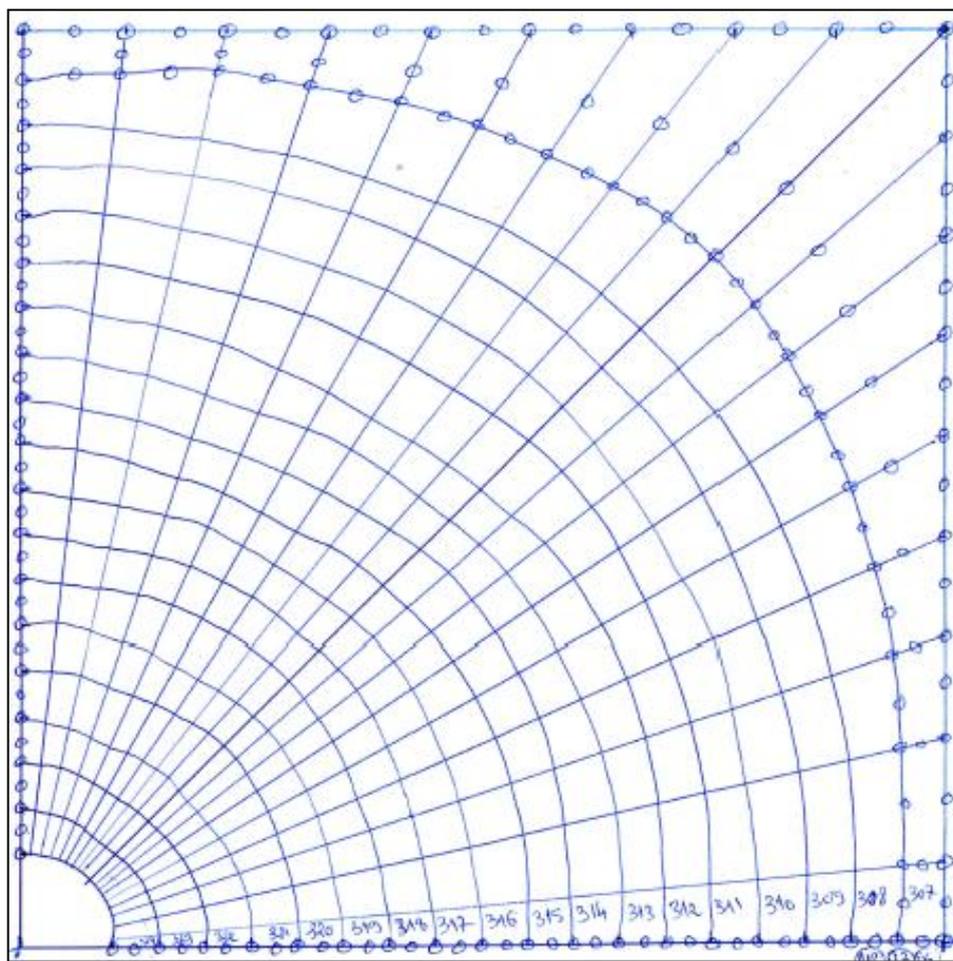
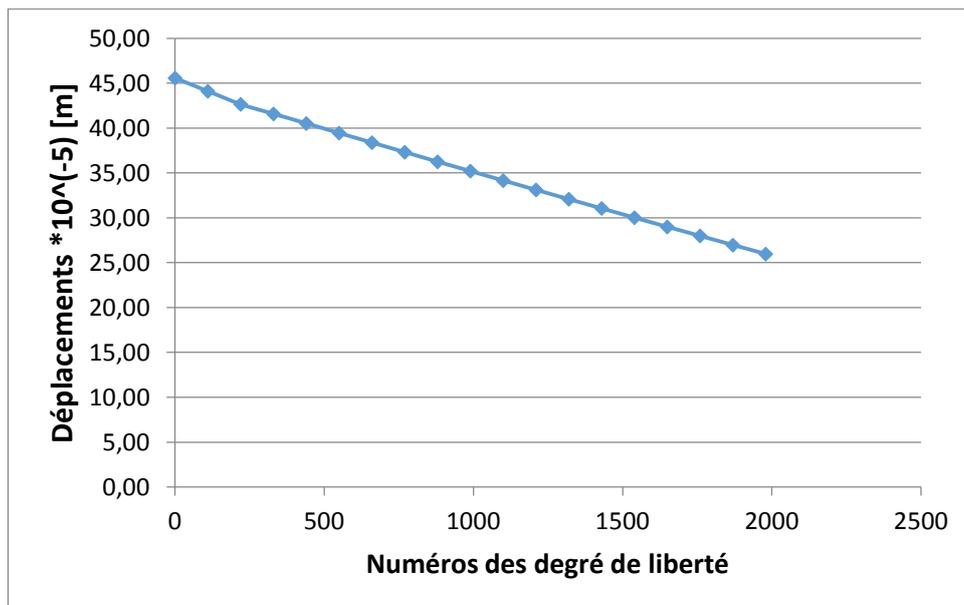


Figure IV. 8. Trou circulaire, Maillage 18X18 éléments.

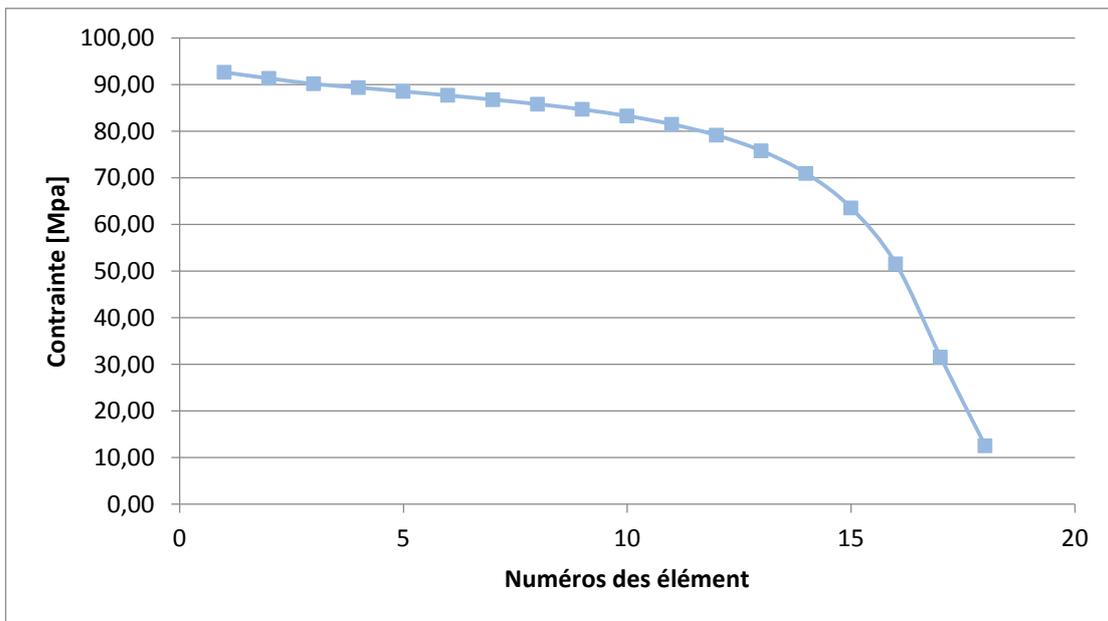
**Tableau IV. 7. Déplacements – Model 18X18.**

N° du degré de liberté	Déplacements *10 <sup>(-5)</sup> [m]
1	45,55
111	44,09
221	42,64
331	41,57
441	40,51
551	39,43
661	38,37
771	37,30
881	36,24
991	35,19
1101	34,14
1211	33,1
1321	32,06
1431	31,03
1541	30
1651	28,98
1761	27,97
1871	26,96
1981	25,96

**Figure IV. 9. Déplacements – Model 18X18.**

**Tableau IV. 8. Contraintes – Model 18X18.**

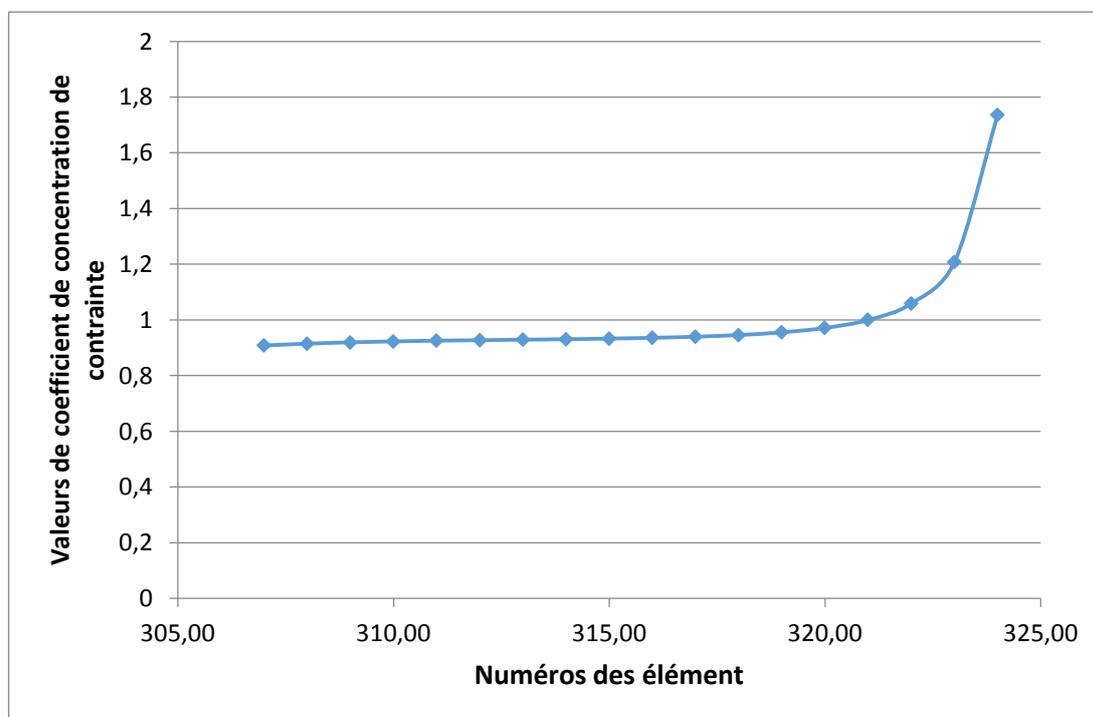
N° d'élément	Contrainte [Mpa]
1	92,59
2	91,31
3	90,11
4	89,33
5	88,50
6	87,65
7	86,75
8	85,78
9	84,64
10	83,25
11	81,47
12	79,09
13	75,77
14	70,94
15	63,53
16	51,56
17	31,51
18	12,50



**Figure IV. 10. Contraintes – Model 18X18.**

**Tableau IV. 9. Coefficient concentration de contraintes – Model 18X18.**

N° d'élément	Kt [Adim]
307,00	0,9082
308,00	0,9148
309,00	0,9195
310,00	0,9229
311,00	0,9254
312,00	0,9273
313,00	0,9291
314,00	0,9308
315,00	0,9329
316,00	0,9358
317,00	0,9398
318,00	0,9459
319,00	0,9554
320,00	0,9713
321,00	0,9999
322,00	1,059
323	1,208
324	1,736

**Figure IV. 11. Coefficient concentration de contraintes – Model 18X18.**

**IV.6. Modèle N°4 (Model 18x18 - raffiné)**

Dans ce model, on a pris le même maillage, mais nous allons constater que la variation du rayon du maillage va nous conduire à améliorer les résultats.

*Tableau IV. 10. Déplacements – Model 18X18 – raffiné.*

N° du degré de liberté	Déplacements *10 <sup>(-5)</sup> [m]
1	45,55
73	44,09
109	42,64
181	41,57
217	40,51
289	39,43
325	38,37
397	37,30
433	36,24
505	35,19
541	34,14
613	33,1
649	32,06
721	31,03
757	30
829	28,98
865	27,97
937	26,96
973	25,96
1045	24,98
1081	24,00
1153	23,03
1189	22,07
1261	21,13
1297	20,21
1369	19,30
1405	18,42
1477	17,57
1513	16,76
1585	15,99
1621	15,28
1693	14,64
1729	14,08
1801	13,64
1837	13,34

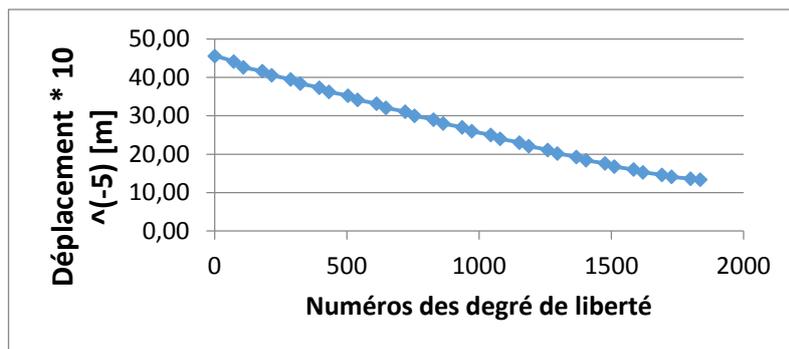


Figure IV. 12. Déplacement – Model 18X18 – raffiné.

Tableau IV. 11. Contraintes – Model 18X18 – raffiné.

N° d'élément	Contrainte [MPa]
1	92,59
2	91,31
3	90,11
4	89,33
5	88,50
6	87,65
7	86,75
8	85,78
9	84,64
10	83,25
11	81,47
12	79,09
13	75,77
14	70,94
15	63,53
16	51,56
17	31,51
18	11,48

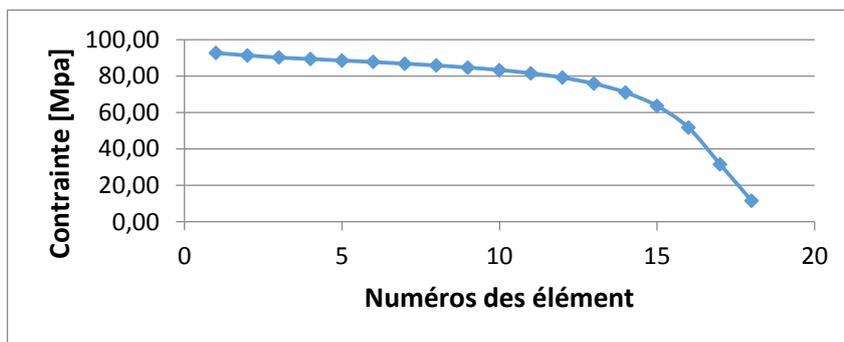
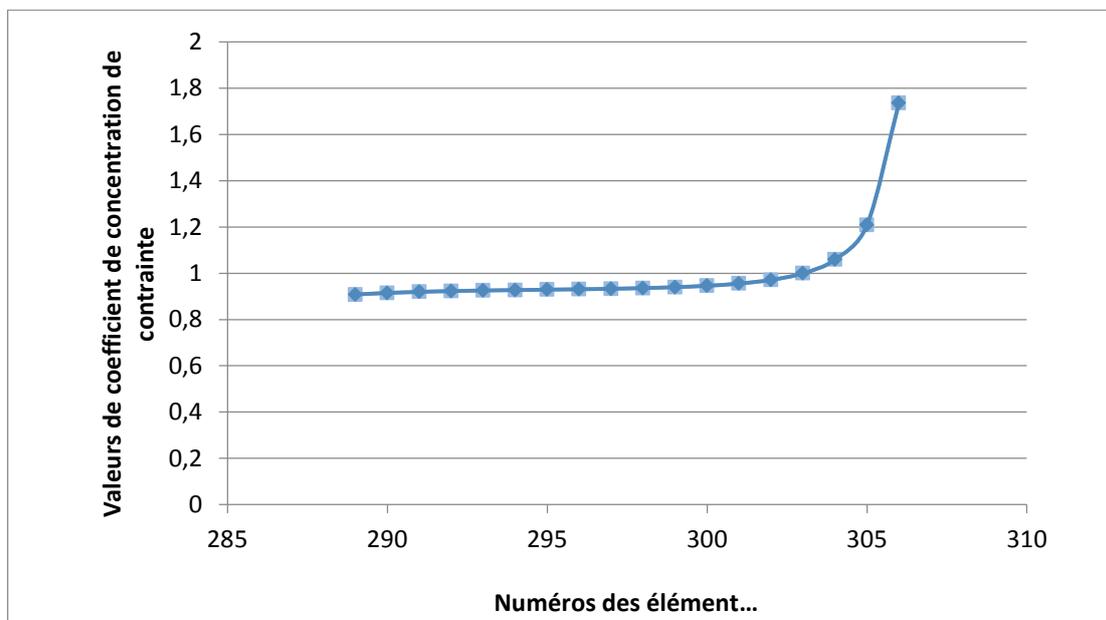


Figure IV. 13. Contraintes – Model 18X18 – raffiné.

**Tableau IV. 12. Coefficient concentration de contraintes – Model 18X18 – raffiné.**

N° d'élément	Kt [Adim]
289	0,9082
290	0,9148
291	0,9195
292	0,9229
293	0,9254
294	0,9273
295	0,9291
296	0,9308
297	0,9329
298	0,9358
299	0,9398
300	0,9459
301	0,9554
302	0,9713
303	0,9999
304	1,059
305	1,208
306	1,736

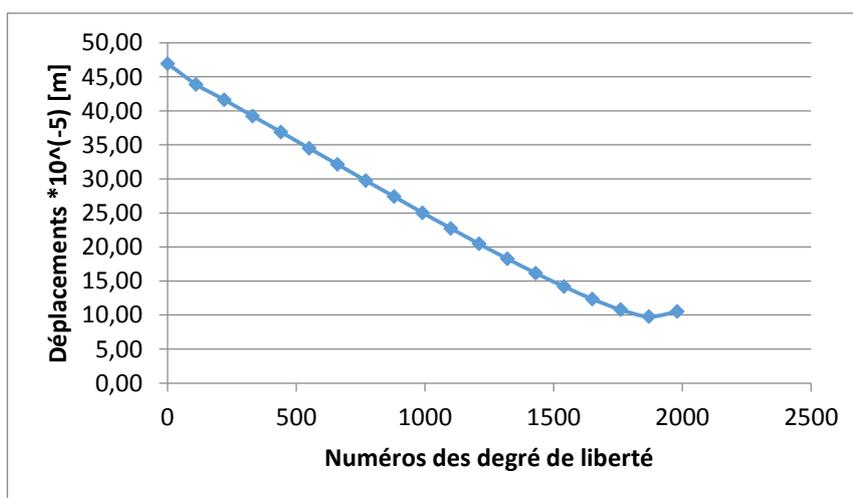
**Figure IV. 14. Coefficient concentration de contraintes – Model 18X18 – raffiné.**

### IV.7. Modèle N°5 (Model 18x18 – raffiné – Ellipse 1)

Le passage d'une forme d'ouverture circulaire à une géométrie elliptique nous donne de plus en plus des résultats performants, et une vision plus claire.

*Tableau IV. 13. Déplacement – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 1.*

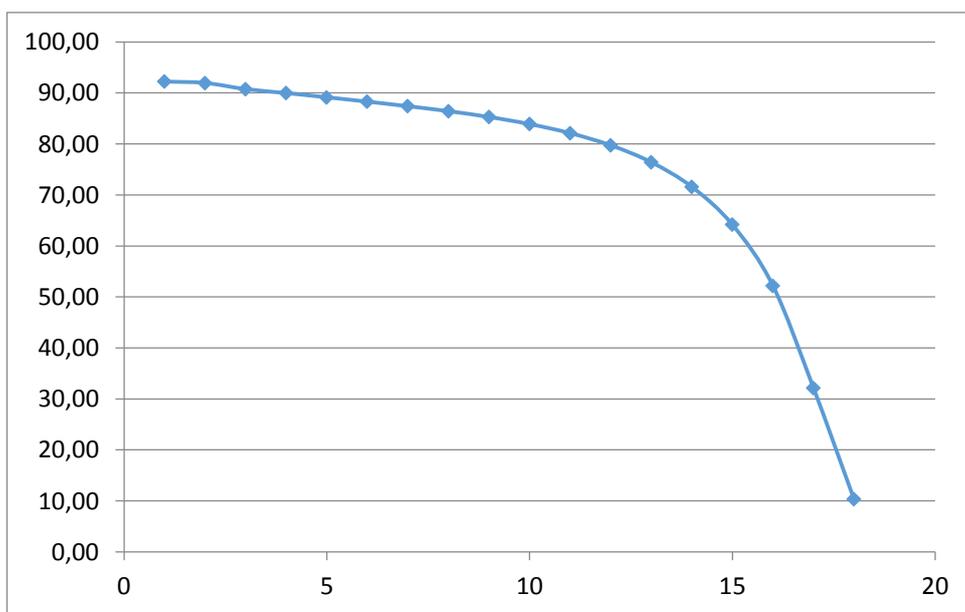
N° du degré de liberté	Déplacements * 10 <sup>(-5)</sup> [m]
1	46,91
111	43,88
221	41,61
331	39,22
441	36,88
551	34,48
661	32,13
771	29,73
881	27,39
991	25,02
1101	22,73
1211	20,45
1321	18,26
1431	16,15
1541	14,17
1651	12,34
1761	10,79
1871	9,76
1981	10,52



*Figure IV. 15. Déplacement – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 1.*

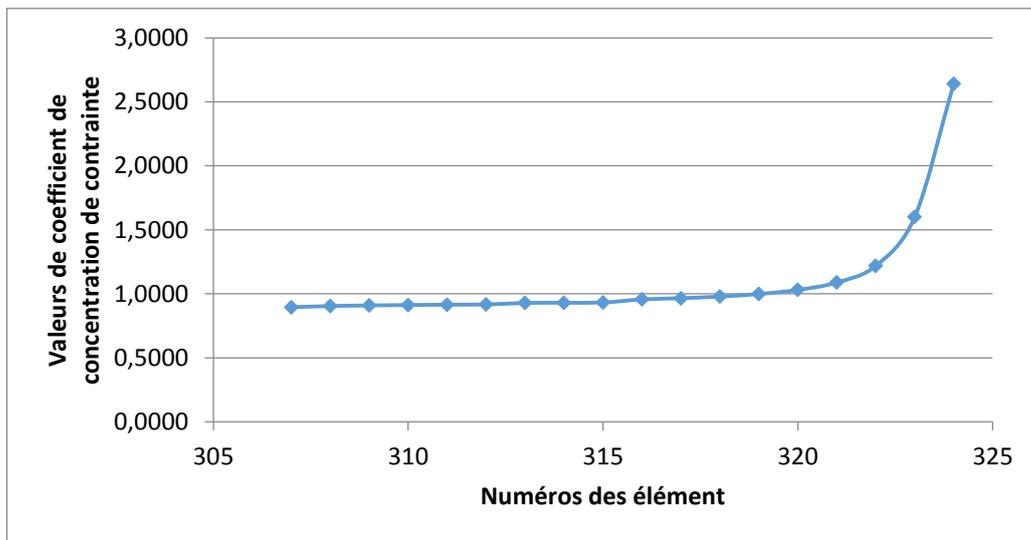
*Tableau IV. 14. Contraintes – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 1.*

N° d'élément	Contrainte [Mpa]
1	92,23
2	91,95
3	90,75
4	89,97
5	89,14
6	88,29
7	87,39
8	86,42
9	85,28
10	83,89
11	82,11
12	79,73
13	76,41
14	71,58
15	64,17
16	52,20
17	32,15
18	63,87

*Figure IV. 16. Contraintes – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 1.*

**Tableau IV. 15. Coefficient concentration de contraintes – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 1.**

N° d'élément	Kt [Adim]
307	0,8958
308	0,9048
309	0,9095
310	0,9129
311	0,9154
312	0,9173
313	0,9291
314	0,9308
315	0,9329
316	0,9567
317	0,9661
318	0,9791
319	0,9987
320	1,0310
321	1,0890
322	1,2190
323	1,6000
324	2,6420



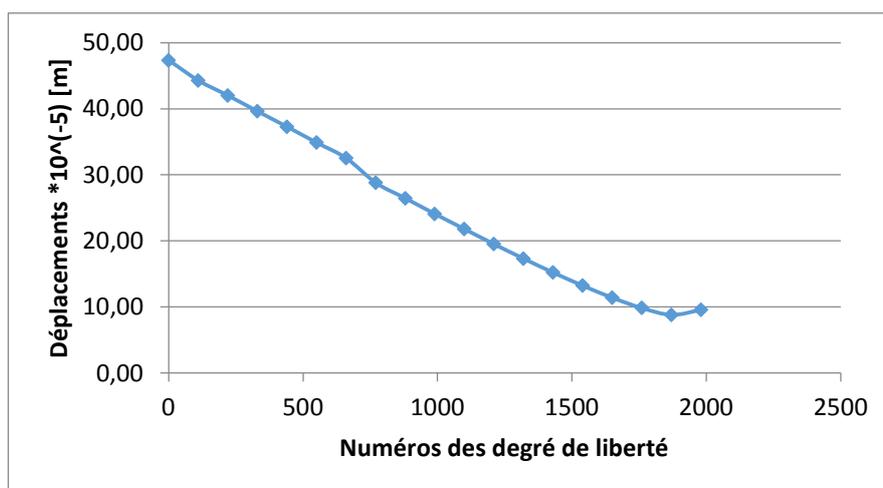
**Figure IV. 17. Coefficient concentration de contraintes – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 1.**

### IV.8. Modèle N°6 (Model 18x18 – raffiné – Ellipse 2)

Les résultats qu'on obtiendra par ce dernier model nous permettront d'approcher au mieux la valeur théorique du coefficient de concentration de contraintes.

*Tableau IV. 16. Déplacement – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 2.*

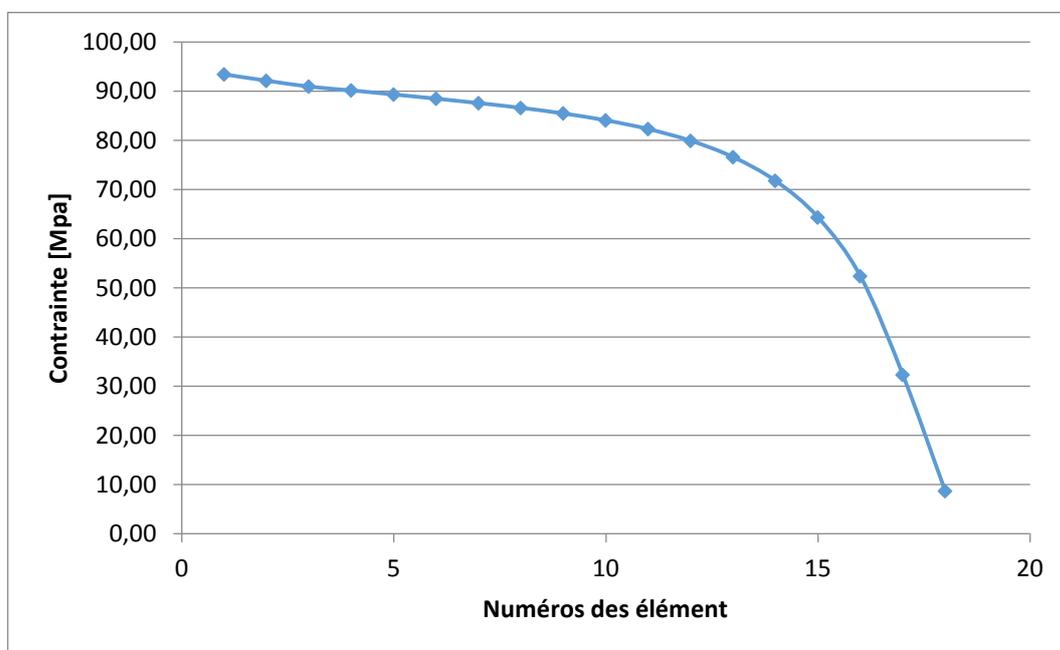
N° du degré de liberté	Déplacements *10 <sup>(-5)</sup> [m]
1	47,31
111	44,26
221	41,99
331	39,60
441	37,26
551	34,86
661	32,51
771	28,78
881	26,44
991	24,07
1101	21,78
1211	19,50
1321	17,31
1431	15,20
1541	13,22
1651	11,39
1761	9,84
1871	8,81
1981	9,57



*Figure IV. 18. Déplacement – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 2.*

**Tableau IV. 17. Contraintes – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 2.**

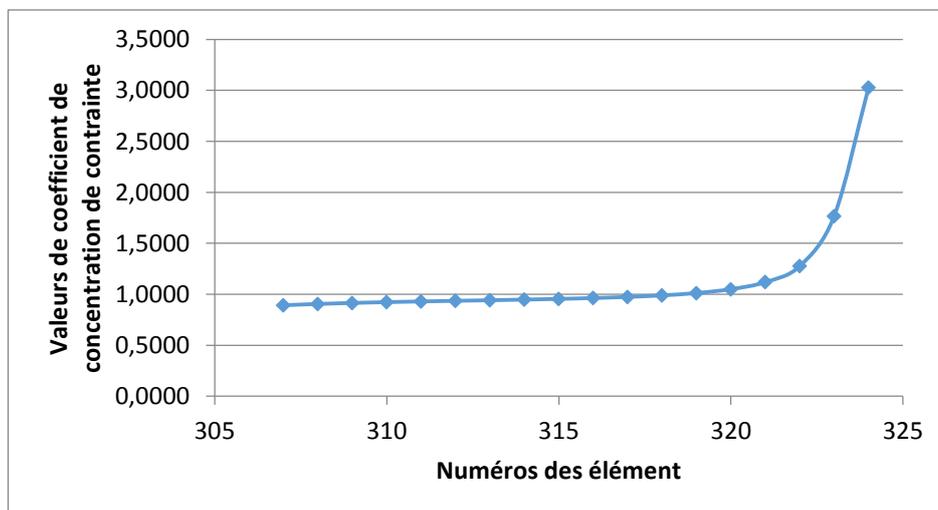
N° d'élément	Contrainte [MPa]
1	93,39
2	92,11
3	90,91
4	90,13
5	89,30
6	88,45
7	87,55
8	86,58
9	85,44
10	84,05
11	82,27
12	79,89
13	76,57
14	71,74
15	64,33
16	52,36
17	32,31
18	8,66



**Figure IV. 19. Contraintes – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 2.**

**Tableau IV. 18. Coefficient concentration de contraintes – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 2.**

N° d'élément	Kt [Adim]
307	0,8924
308	0,9050
309	0,9148
310	0,9229
311	0,9297
312	0,9357
313	0,9416
314	0,9477
315	0,9547
316	0,9631
317	0,9740
318	0,9893
319	1,0120
320	1,0500
321	1,1190
322	1,2760
323	1,7660
324	3,0270

**Figure IV. 20. Coefficient concentration de contraintes – Model 18X18 – raffiné – Ellipse 2.**

## IV.5. Conclusion

Le cas de la plaque trouée présente le double avantage de faire apparaître des contraintes et des déformations non homogènes (ce qui rend le problème non trivial) et d'avoir une solution analytique dans le cas où le trou est petit devant la largeur de la plaque.

**CONCLUSION**

**GENERALE**

## CONCLUSION GENERALE

### CONCLUSION GENERALE

Mon projet de Master consiste en l'analyse du problème de concentration de contraintes dans une plaque perforée. Il m'a permis d'élargir mes connaissances dans la méthode des éléments finis, et mettre en pratique les connaissances théoriques acquises, lors de mes cinq années d'études supérieures à l'Ecole Nationale Polytechnique - Algérie.

La plaque métallique étudiée est en acier, d'une largeur de 2 m. Le rayon du trou étant de 0.1 m, son module est de  $2.1 \cdot 10^5$  MPa, son coefficient de 0.3. Cette plaque est soumise à une sollicitation axiale selon la direction Y. Je précise que le rapport de la longueur qui est de 2m par le rayon du trou qui est de 0.1 m donne une valeur adimensionnelle de 20, ce qui permet de parler du phénomène de concentration de contraintes.

Après avoir déterminé les équations différentielles régissant le comportement de la plaque, j'ai passé à la formulation du problème en utilisant les hypothèses de l'élasticité linéaire. Ceci a permis de situer l'état de contrainte ainsi que les conditions aux limites. Ces dernières sont introduites dans les modèles ainsi que les forces appliquées sur la plaque.

J'ai utilisé plusieurs modèles afin de faire apparaître les paramètres qui régissent la réponse de la plaque. Ceci en adoptant un élément quadratique Q8, et pour différents maillage. Ensuite j'ai gardé le model 18X18, mais cette fois en raffinant le maillage autour de la zone de concentration de contraintes. En dernier, j'ai changé la géométrie de la discontinuité, j'ai passé du cercle à l'ellipse. Le dernier model m'a permis enfin d'approcher la valeur théorique du coefficient de concentration de contraintes  $K_t$ , la grandeur adimensionnelle égale à 3.

La compréhension du problème m'a exigé en effet des connaissances dans des domaines variés :

- Compréhension du problème étudié et connaissance intuitive de la nature de la solution cherchée.
- Approximation des fonctions inconnues par sous-domaines et construction des fonctions d'interpolations.
- Construction des équations du système étudié sous forme variationnelle, soit il à partir de méthodes énergétiques, soit à dérivées partielles.
- Techniques d'organisation matricielle de données.
- Méthodes numériques d'intégration, de résolution de systèmes d'équations algébriques et différentielles, linéaires et non linéaires.
- Techniques informatiques adaptées à des programmes complexes et à des volumes d'informations importants

Ce projet de Master m'a permis de connaître les différentes étapes d'exécution d'un programme en éléments finis et sa puissance dans mon problème. La maîtrise de ce type de problèmes exigent des connaissances étendues dans les domaines des éléments finis, la résistance des matériaux en particulier l'élasticité linéaire, ainsi que la compréhension du phénomène en question.

Enfin, ce mémoire de master a été une riche expérience qui va me permettre de poursuivre ma vie de recherche pleine de confiance, et mettre en pratique d'une manière convenable toutes mes connaissances théoriques acquises à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger.

**REFERENCES**

**BIBLIOGRAPHIQUES**

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] GOURI DHATT. GILBERT TOUZOT (1981), Une présentation de la méthode des éléments finis, Les presses de l'université Laval Québec Maloine S.A editeur Paris, France, 562 pages, ISBN 2-7637-6912-8.
- [2] M.DEMIDEM (2013), Notes de cours Méthode des éléments finis, Ecole Nationale Polytechnique, Algérie.
- [3] S.TIMOSHENKO C.GLOCKER H.BRAUCHLI (2001), Finite elements – Modeling and simulation, Stanford university, Deutschland, 136 pages.
- [4] S.TIMOSHENKO C.GLOCKER H.BRAUCHLI (1951), Theory of elasticity, McGraw-Hill book company, United State of America, 263 pages.
- [5] S.TIMOSHENKO (1941), Strength of material, D.VAN NOSTRAND company, United State of America, 218 pages, ISBN 2-04-010268-X.
- [6] HENRI-PAUL LIEURADE JIAN LU (1998), Concentration de contrainte, technique de l'ingénieur, France, 55 pages.
- [7] FREDERIC SANZOZ (2000), Propagation des petites fissures de fatigue dans les zones de concentration de contrainte, Ecole des mines de Paris, France, 293 pages.
- [8] R. KETTAB-MITICHE (1990), Cours de Résistance des matériaux, Ecole nationale Polytechnique d'Alger, Algérie.
- [9] Programme de calcul en FORTRAN Power Station élaboré par Mr M.DEMIDEM, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Algérie.

# ANNEXES

ANNEXES

ANNEXES

Annexe 1 : Valeurs des contraintes autour de la zone de concentration de contraintes. [9]

```
                *ELEMENT*321
                *****
                SIGMA(X)      SIGMA(Y)      TAU(XY)
                .2664E+02     .1119E+03     .2149E+01
```

```
                *ELEMENT*322
                *****
                SIGMA(X)      SIGMA(Y)      TAU(XY)
                .3737E+02     .1276E+03     .2487E+01
```

```
                *ELEMENT*323
                *****
                SIGMA(X)      SIGMA(Y)      TAU(XY)
                .4224E+02     .1766E+03     -.1181E+01
```

```
                *ELEMENT*324
                *****
                SIGMA(X)      SIGMA(Y)      TAU(XY)
                .1801E+02     .3027E+03     -.2055E+02
```