

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

2/86

وزارة التعليم العلي
Ministère de l'Enseignement Supérieur

lex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

INGENIORAT D'ETAT EN GENIE MECANIQUE

SUJET :

VIBRO - ISOLATION OPTIMUM DES
VIBRATIONS DE LA CAROSSERIE D'UNE
VOITURE DANS LE PLAN VERTICAL

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
الكلية
الهندسة
الكلية الوطنية
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHÈQUE

Proposé par
M. KSIAZEK

Etudié par
B. DJELLAL

Dirigé par
M. KSIAZEK

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العلي
Ministère de l'Enseignement Supérieur

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

INGENIORAT D'ETAT EN GENIE MECANIQUE

SUJET :

VIBRO - ISOLATION OPTIMUM DES
VIBRATIONS DE LA CAROSSERIE D'UNE
VOITURE DANS LE PLAN VERTICAL

Proposé par
M. KSIAZEK

Etudié par
D. DJELLAL

Dirigé par
M. KSIAZEK

PROMOTION : JANVIER 86

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

لَقَدْ أَرْسَلْنَا رُسُلَنَا بِالْبَيِّنَاتِ وَأَنْزَلْنَا
مَعَهُمُ الْكِتَابَ وَالْمِيزَانَ لِيَقُومَ النَّاسُ بِالْقِسْطِ
وَأَنْزَلْنَا الْحَدِيدَ فِيهِ بَأْسٌ شَدِيدٌ وَمَنْفَعٌ
لِلنَّاسِ وَلِيَعْلَمَ اللَّهُ مَنْ يَنْصُرُهُ وَرُسُلَهُ بِالْغَيْبِ
إِنَّ اللَّهَ قَوِيٌّ عَزِيزٌ

سورة الحديد

اللَّهُ تَقَبَّلَ مِنَّا أَغْرَانَا وَاجْعَلْهَا خَالِصَةً
لِوَجْهِكَ الْكَرِيمِ وَوَفِّقْنَا لِلْعَمَلِ بِهَا فِي مَرْضَاتِكَ
آيَةٌ

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur Marek Ksiasek
pour son aide efficace et son suivi durant cette
étude ainsi que tous les professeurs qui ont cont-
-ribué à ma formation

Il en est de même à tous les amis qui m'ont porté
leur sincère aide.

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'J. K.' with a stylized flourish.

DEDICACES

- A la mémoire de ma mère
 - A mon père
 - A ma grand-mère Rahma
 - A mes frères et soeurs
 - A toute ma famille
 - A tous mes amis et notamment Mâameri-Méd
et K. Diffallah
- Je dédie ce modeste travail

— بن يحيى - جلال —

Benyahia

ملخص

يهدف هذا المشروع إلى دراسة عزل الاهتزازات لمنظومة صلبة تتمثل في هيكل سيارة. بفرض أن التعريضات عشوائية، حصلنا تحليلياً بواسطة نظرية فينر هوبف على أنظمة مثلى لعزل الاهتزازات

Résumé

Ce projet consiste à étudier la Vibro-isolation d'un système solide à deux degrés de liberté représentant la Carrosserie d'une automobile. Pour des excitations aléatoires, la Vibro-isolation optimale des suspensions a été obtenue analytiquement par la théorie de Wiener-Hopf.

Summary

This study considers the Vibro-isolation of a two degree of Freedom solid system representing an automobil body. The optimum Vibro-isolation suspensions have been obtained analytically. The Wiener-Hopf theory has been applied when the system is subjected to random excitations.

LEGENDE DES SYMBOLES

i = rayon de giration

J = moment d'inertie

L = Longueur entre les suspensions avant et arrière

m = masse de la carrosserie

C = fonctionnelle

λ_i = multiplicateurs de Lagrange

β = Coefficient caractérisant la diversité de réaction des hommes entre les vibrations angulaires, longitudinales avec les vibrations verticales

τ = Constante du temps

H_i^+ = Fonction de transfert stable caractérisant la meilleure transmission des suspensions

φ = déplacement angulaire de la carrosserie

Z_n = déplacement vertical

σ^2 = dispersion

ε = paramètre constant

η_i = fonction de balance.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

CHAPI GENERALITES

| | |
|---|---|
| 1.1: Processus aleatoire ou stochastique | 5 |
| 1.2: Définition d'une fonction aléatoire | 5 |
| 1.3: Caracteristiques probabilistes d'un processus aléatoire | 5 |
| 1.4: Processus aléatoire stationnaire | 6 |
| 1.5: Processus ergodique | 7 |
| 1.6: Fonction de Correlation | 7 |
| 1.7: Densité spectrale | 8 |

CHAPII TRANSFORMATION LINEAIRE DE PROCESSUS ALEATOIRE STATIONNAIRE

| | |
|--|----|
| 2.1: systemes lineaires | 9 |
| 2.2: systemes stables et réalisables | 11 |
| 2.2.1 : systemes stables | 11 |
| 2.2.2 : systemes réalisables | 12 |
| 2.3: système physiquement réalisable | 12 |
| 2.4: Propriétés fondamentales de la fonction de transfert d'un systeme lineaire | 13 |

| | |
|--|----|
| 2.5: Expression de la dispersion de la grandeur de sortie d'un système linéaire | 15 |
|--|----|

CHAP III DESCRIPTION MICROPROFIL de LA ROUTE PAR LA DENSITE SPECTRALE $[S_y(\omega)]$

| | |
|---|----|
| 3.1: Sources de sollicitations | 17 |
| 3.2: Caractéristiques statistiques du microprofil de la route | 19 |
| 3.3: Méthodes d'enregistrement des microprofils | 21 |
| 3.3.1: Méthode directe | 21 |
| 3.3.2: Méthode indirecte | 21 |
| 3.4: Méthode de terminaison de la fonction de corrélation à partir des données expé- rimentales | 24 |

CHAP IV: CONSTRUCTION ANALYTIQUE DU SYSTEME DE VIBRO-ISOLATION OPTIMUM

| | |
|---|----|
| 4.1 Modèle physique de la carrosserie | 26 |
| 4.2 Hypothèses | 27 |
| 4.3 Problèmes de critères de la vibro- isolation | 27 |

| | |
|---|----|
| 4.3.1: Critères des déplacements relatifs | 27 |
| 4.3.2: Critères d'accélération minimales | 28 |
| 4.4: Formulation mathématique du Problème | 29 |
| 4.5: Détermination des différentes dispersions | 33 |
| 4.6: Solution générale du problème par la méthode de Wiener Hopf | 35 |
| 4.7: Détermination analytique de H_1 et H_2 réalisables et stables | |
| 4.7.1 Méthode matricielle | 39 |
| 4.7.2 Cas particulier | 50 |
| 4.7.3 Calcul des dispersions $\sigma_{z_1-y_1}^2$ et $\sigma_{z_2-y_2}^2$ pour une excitation de type bruit blanc | 57 |
| Chap V Conclusion | 59 |

INTRODUCTION

Très souvent dans l'étude des systèmes mécaniques en mouvement on est confronté à des actions présentées comme des perturbations extérieures non contrôlables ou à caractères aléatoires. Ces dernières provoquent des vibrations nuisibles. Par exemple les irrégularités de la surface d'une route ou d'un revêtement d'aérodrome engendrent des vibrations dans les objets qui s'y déplacent, ou encore les excentricités d'ordre aérodynamique de la poussée d'un moteur à réaction etc. Les vibrations des voitures sont dues aux excitations qui sont de différentes natures. Les sources principales des vibrations des voitures sont :

1. Les irrégularités de la surface de la route
2. excentricité et déséquilibre des roues

Donc la Vibro-isolation est l'ensemble des moyens techniques permettant de diminuer l'effet des vibrations des systèmes mécaniques en mouvement. Cette Vibro-isolation est assurée par trois types de systèmes

A- Les systèmes passifs qui agissent par l'action des ressorts et amortisseurs

B - les systèmes actifs qui agissent par l'action des servo-
-mécanisme de type pneumatiques ou électro-hydraulique
ces derniers jouissent de plusieurs propriétés

a - Amplificateur de puissance depuis un signal de basse
puissance vers un signal de puissance plus élevée

b - Indépendance vis à vis du milieu extérieur

c - Combinaison des deux systèmes de vibro-isolation passifs
et actifs

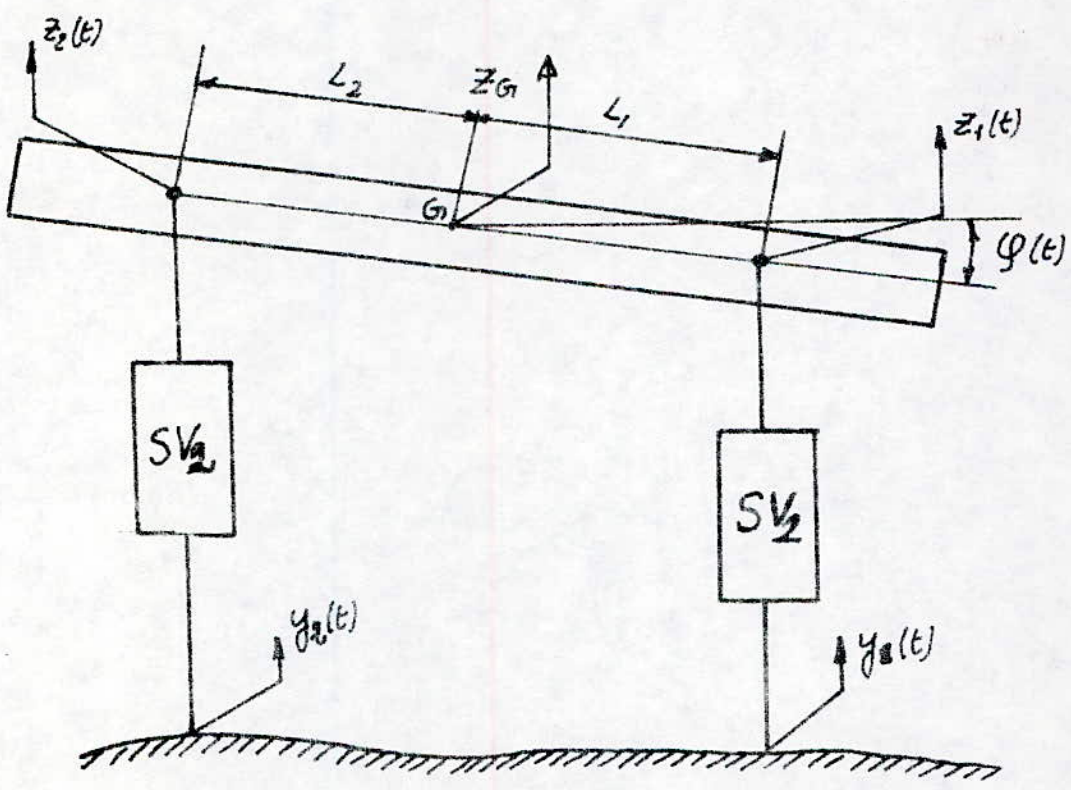
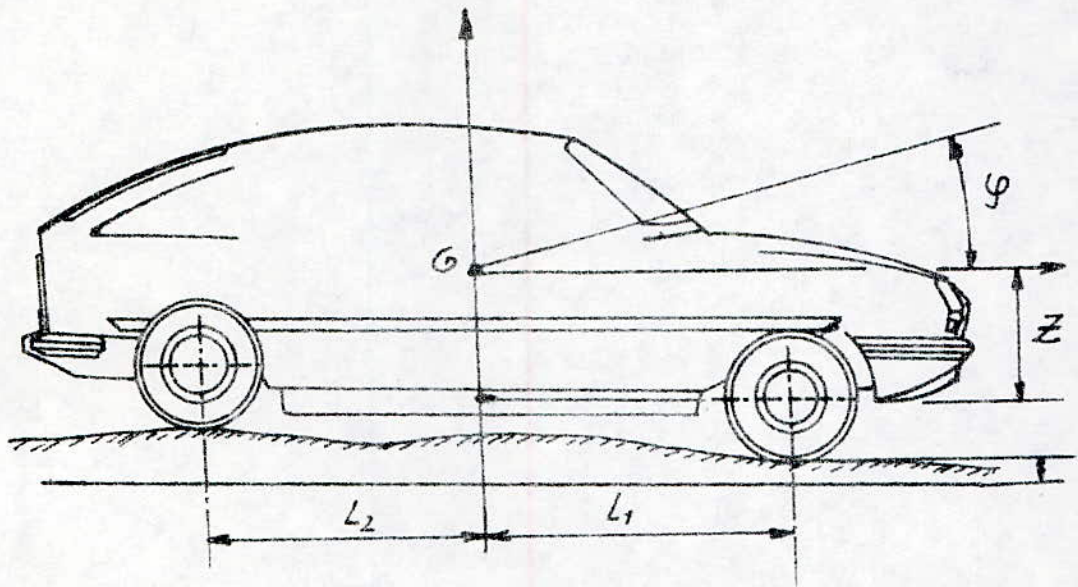
Objectif du projet

3

Considérons un véhicule qui se déplace avec une vitesse V sur une route dont le profil présente des irrégularités. Les sollicitations qui agissent sur le châssis sont liées aux irrégularités de la route. Si à l'instant t_1 l'irrégularité se trouve sous les roues avant, alors elle se trouvera sous les roues arrière à l'instant $t_2 = t_1 + \tau$ avec $\tau = \frac{L}{V}$

Les perturbations aléatoires résultantes ainsi, engendrent au niveau du châssis des différentes vibrations. On suppose dans notre étude que les perturbations aléatoires sont stationnaires et érgodiques, et que les vibrations sont verticales.

Pour minimiser les effets de ces vibrations, on prévoit deux systèmes de vibration SV_1 et SV_2 (voir figure) que l'on optimise selon un critère d'optimisation qui sera décrit par la suite. Vu que ces systèmes sont complexes, on doit les modéliser par un modèle mathématique qui permet leur optimisation et ce à l'aide de la méthode de Wiener-Hopf.



I GENERALITES

1.1 Processus aléatoire ou stochastique

Au cours d'un processus expérimental, les valeurs des fonctions aléatoires varient avec le temps. Donc le fait qu'on ne puisse jamais prédire le caractère du processus pour le futur, même s'il est connu pour le passé, constitue la propriété fondamentale des processus aléatoires. A l'heure actuelle, les méthodes et l'outil mathématique de la théorie des processus aléatoires sont largement utilisés dans l'analyse et la synthèse des systèmes mécaniques.

1.2 Définition d'une fonction aléatoire

Une fonction est dite aléatoire lorsque, pour toute valeur de la variable indépendante, sa valeur est aléatoire. Les valeurs concrètes des fonctions aléatoires résultantes d'une expérience sont appelées réalisations de la fonction aléatoire.

1.3 Caractéristiques probabilistes d'un processus aléatoire

Pour décrire les propriétés fondamentales d'un processus aléatoire on utilise cinq fonctions non aléatoires caractérisant ce processus.

1. L'espérance mathématique de la fonction aléatoire qui caractérise le comportement moyen du processus est définie par :

$$X(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 w(x, t_1) dx$$

ou $w(x_1, t_1)$ est la densité de probabilité du 1^{er} ordre et $x_1(t_1)$ la variable aléatoire.

2. Moyenne quadratique :

$$\overline{X^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 w(x, t) dx$$

3. Fonction de corrélation :

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 w(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

4. Fonction de corrélation mutuelle

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} x_1 y(x, y, t_1, t_2) dx dy$$

5. Variance

$$\sigma_x^2(t) = \overline{[X(t) - \overline{X(t)}]^2} = \overline{X^2(t)} - [\overline{X(t)}]^2$$

1.4. Processus aléatoire stationnaire

Un processus aléatoire, exprimé par un ensemble de variables $x_k(t)$ est dit stationnaire lorsque les lois de probabilité des deux groupes de valeurs de ces variables :

$$[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)]$$

et

$$[x(t_1+\tau), x(t_2+\tau), \dots, x(t_n+\tau)]$$

sont identiques c'est à dire que ces propriétés statistiques sont invariante par rapport à un changement arbitraire de l'origine de temps. Ainsi on a :

$$W_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = W_n(x_1, x_2, \dots, x_n; (t_1+\tau), (t_2+\tau), \dots, (t_n+\tau))$$

avec W_n = densité de probabilité d'ordre n .

1.5. Processus ergodique

La propriété d'ergodicité consiste en ce que chaque réalisation particulière de la fonction aléatoire permet d'estimer les propriétés statistiques de l'ensemble entier des réalisations particulières. Cette possibilité d'obtenir les caractéristiques probabilistes d'une fonction aléatoire stationnaire à l'aide de l'une seule de ses réalisations présente un grand intérêt pratique car cela permet de réduire le volume des études expérimentales et par la même de réduire les coûts matériels.

1.6. Fonction de corrélation

Pour les processus stationnaires jouissant de la propriété d'ergodicité, nous pouvons écrire pour la fonction de corrélation :

$$R(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$$

La fonction de corrélation mutuelle est donc :

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt$$

La Fonction de corrélation est liée à la probabilité pour que la fonction aléatoire $x(t)$ ayant la valeur x_1 au temps t , ait la valeur x_2 au temps $t+\tau$, c'est à dire que cette fonction exprime le lien mutuel entre $x(t)$ et $x(t+\tau)$.

17. Densité spectrale

La densité spectrale $S(\omega)$ se définit comme la transformée de Fourier de la fonction de corrélation $R(\tau)$ soit :

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

et par conséquent :

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

La notion de densité spectrale $S(\omega)$ peut être reliée à celle de spectre courant $X_T(j\omega)$ d'un processus aléatoire stationnaire $x(t)$ ou $X_T(j\omega)$ est la transformée de Fourier de $x(t)$

$$X_T(j\omega) = \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T x_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

or

$$R_T(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t) x_T(t+\tau) dt$$

$$S_T(\omega) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{j\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t+\tau) e^{-j\omega(t+\tau)} d\tau$$

et comme

$$X_T(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{j\omega t} dt$$

d'où

$$S_T(\omega) = \frac{1}{2T} X_T(j\omega) \cdot X_T(-j\omega)$$

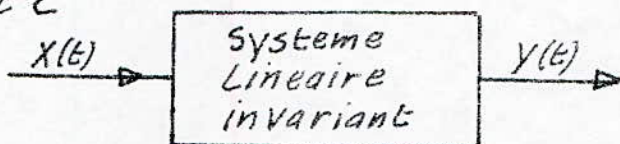
$$S_T(\omega) = \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2$$

II TRANSFORMATION LINEAIRE DES PROCESSUS ALEATOIRES STATIONNAIRES

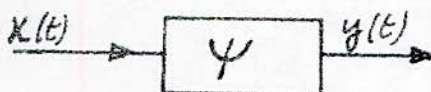
2.1. Systemes lineaires

Soient $x(t)$ et $y(t)$ respectivement l'entrée et la sortie d'un système invariant

On dit qu'un système est invariant, si une entrée $x(t)$ produisant une sortie $y(t)$, l'entrée $x(t+z)$ produit la sortie $y(t+z)$ cette propriété doit être vérifiée quelle que soit l'entrée $x(t)$ et quel que soit z



on peut associer à tout système un opérateur Ψ fonctionnel qui transforme l'espace X de $x(t)$ d'entrée dans l'espace Y du processus $y(t)$ de sortie



$x(t)$ et $y(t)$ sont reliés par l'intermédiaire de l'opérateur Ψ de la façon suivante :

$$\Psi\{x(t)\} = y(t)$$

Ψ est dit linéaire ainsi que le système associé, si :

$$\Psi\{x_1(t) + x_2(t)\} = y_1(t) + y_2(t)$$

$$\text{et } \Psi\{\lambda x(t)\} = \lambda y(t)$$

On caractérise généralement un système linéaire invariant par sa réponse en fréquence. On démontre que si on applique une entrée sinusoïdale on aura :

$$x(t) = X(j\omega) e^{j\omega t}$$

la sortie en régime permanent doit être de la forme :

$$y(t) = Y(j\omega) e^{j\omega t}$$

le rapport des amplitudes complexes de $y(t)$ et de $x(t)$ est une fonction de ω que l'on dénote par :

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \quad \text{on pose } j\omega = p$$

et que l'on appelle fonction de transfert

si l'on passe à la transformée de Fourier, on sait que :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(p) e^{pt} dp \quad \text{et} \quad X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt$$

$$\text{alors} \quad y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(p) X(p) e^{pt} dp$$

si on applique ce résultat au cas où le signal d'entrée est une impulsion unitaire :

$$x = \delta(t)$$

sa transformée de Fourier est :

$$X(p) = 1$$

La réponse impulsionnelle de ce système à donc pour transfo-

transformée de Fourier

$$Y(p) = H(p)$$

$$\text{d'où } h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(p) e^{pt} dp \quad \text{et} \quad H(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-pt} dt$$

c'est à dire que $H(p)$ est la transformée de Laplace de $h(t)$.

Le signal de sortie $y(t)$ du système est donné en fonction de $x(t)$ et de $h(t)$ par

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) x(t-u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) h(t-u) du$$

2.2. Systemes stables et réalisables

2.2.1. Systemes stables

Un système linéaire est stable si à tout signal d'entrée borné correspond un signal de sortie qui est borné ou si la réponse impulsionnelle du système est intégrable en valeur absolue; c'est à dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(u)| du < +\infty$$

dans le domaine des fréquences :

$$|H(p)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| e^{-pt} dt$$

Pour que le système soit stable, il faut que la fonction de transfert $H(p)$ ait pour domaine de convergence l'axe imaginaire pour lequel on a $\sigma = 0$ c.à.d $p = j\omega$.

donc

$$H(p) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt < +\infty$$

2.2.2. Système réalisable

Un système réalisable est un système dont la sortie n'anticipe pas l'entrée

Dans le domaine des fréquences, la condition pour qu'un système soit réalisable est que la fonction de transfert $H(p)$ ait pour domaine de convergence le demi-plan définie par $\text{Re}(p) > \sigma_0$ les singularités de $H(p)$ se trouvent à gauche de la droite $s = \sigma_0 + j\omega$ de telle façon que

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(p) e^{pt} d\omega = 0 \text{ pour } t < 0$$

2.3 Système physiquement réalisable

Un système est physiquement réalisable, s'il est à la fois stable et réalisable

Dans le domaine des fréquences

le système est dit physiquement réalisable si l'intégrale I est définie par :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Log} |H(p)| d\omega}{1 + \omega^2} \leq M < +\infty$$

ou $|H(p)|$ est le module de la fonction de transfert d'un système physiquement réalisable

2.4. Propriétés fondamentales de la fonction de transfert d'un système linéaire

La Fonction de transfert $H(s)$ est considérée comme la caractéristique fondamentale de tout système linéaire soit $H(s)$ est une fraction rationnelle du type :

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

avec $m \leq n$ et $s = j\omega$

les coefficients $b_0, b_1, \dots, b_m; a_0, a_1, \dots, a_n$ sont réels

soit, en effet d_i l'un des pôles complexes de $H(s)$, c'est à dire

$$[D(s)]_{s=d_i} = 0$$

De même si z_i est l'un des zéros complexes de $H(s)$ ceci

signifie que : $[N(s)]_{s=z_i} = 0$

Les fonctions de transfert des systèmes linéaires stables possèdent les propriétés essentielles suivantes

1°) Les zéros et pôles complexes de $H(s)$ ne peuvent être que complexes conjugués

2°) Les pôles de $H(s)$ d'un système stable doivent se situer dans le demi-plan de gauche (plan des complexes) que l'on

dénote par : $\left[\frac{N(s)}{D(s)} \right]^+$

3°) si les pôles de $H(s)$ sont situés sur l'axe imaginaire, ils doivent être simples

Lemme :

l'intégrale ci-dessous définie par :

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} H(s) ds$$

est nulle si :

a- $H(s)$ n'a aucun pôle dans le demi-plan droite

b- $H(s)$ n'a aucun pôle dans le demi-plan gauche

Dans le cas où $H(s)$ possède des pôles dans le demi-plan droite et le demi-plan gauche, alors :

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} H(s) ds \neq 0$$

2.5. Expression de la dispersion de la grandeur de sortie d'un système linéaire

soit $x(t)$ et $y(t)$ les deux grandeurs d'entrée et de sortie d'un système linéaire stationnaire

on suppose que l'espérance mathématique est nulle donc:

$$\sigma_y^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) \cdot y(t) dt$$

or $y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(-j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$

d'où $\sigma_y^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(-j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right) dt$

et comme $Y(-j\omega) = H_{y/x}(-j\omega) \cdot X(-j\omega)$

en effet $\sigma_y^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{y/x}(-j\omega) \cdot X(-j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) dt$

$$\sigma_y^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T H_{y/x}(-j\omega) \cdot X(-j\omega) \cdot \frac{1}{2\pi} d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt$$

avec $I = Y(j\omega) = H_{y/x}(j\omega) \cdot X(j\omega)$

$$\sigma_y^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{y/x}(j\omega)|^2 \cdot |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{y/x}(j\omega)|^2 \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(j\omega)|^2}{2T}}_{S_x(\omega)} d\omega$$

Finallement

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} |H_{y/x}(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega$$

ou $S_x(\omega)$ est la densité spectrale

Dans les cas particuliers on aura :

- Dispersion de l'écart $(x(t) - x_0(t))$ avec $x(t)$ est la sortie et $x_0(t)$ est l'entrée

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{x_0}}(j\omega) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s) ds \quad s = j\omega$$

- Dispersion de l'accélération de sortie $\ddot{x}(t)$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} |H_{\ddot{x}/\ddot{x}_0}(j\omega)|^2 S_{\ddot{x}_0}(s) ds$$

III DESCRIPTION MICROPROFIL DE LA ROUTE PAR LA DENSITE SPECTRALE ($S(\omega)$)

3.1 Sources de sollicitations

Une voiture en mouvement sur une route dont la surface présente des irrégularités est soumise à des vibrations aléatoires, en supposant que les conditions d'exploitation (Comportement de la voiture, la route, etc) sont les mêmes. Les vibrations de n'importe quelle masse de la voiture seront différentes pour chaque passage effectué.

Le microprofil de la route est une fonction aléatoire du chemin parcouru $x(t)$, c'est à dire les ordonnées pour $x(t)$ quelconque sont des valeurs aléatoires; un enregistrement d'une fonction aléatoire du microprofil longitudinal de la route illustre une réalisation.

Les enregistrements de la figure (3.1) illustrent l'ensemble des réalisations

Les vibrations de la voiture varient en fonction du temps, alors ils sont des processus aléatoires. En supposant que la voiture se déplace uniformément, on peut passer au processus aléatoire en mettant $x(t) = Vt$ (V : Vitesse de la voiture)

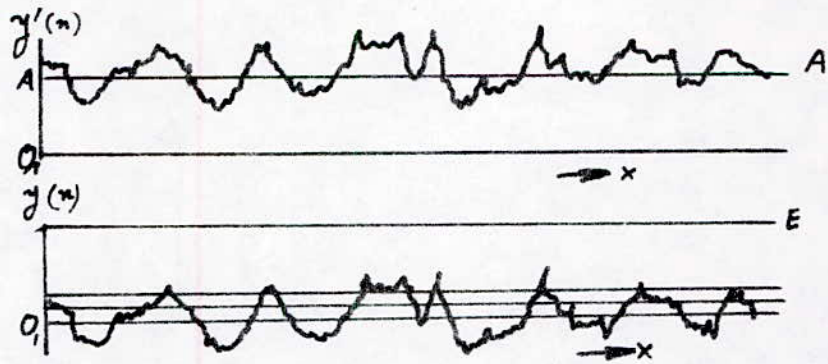
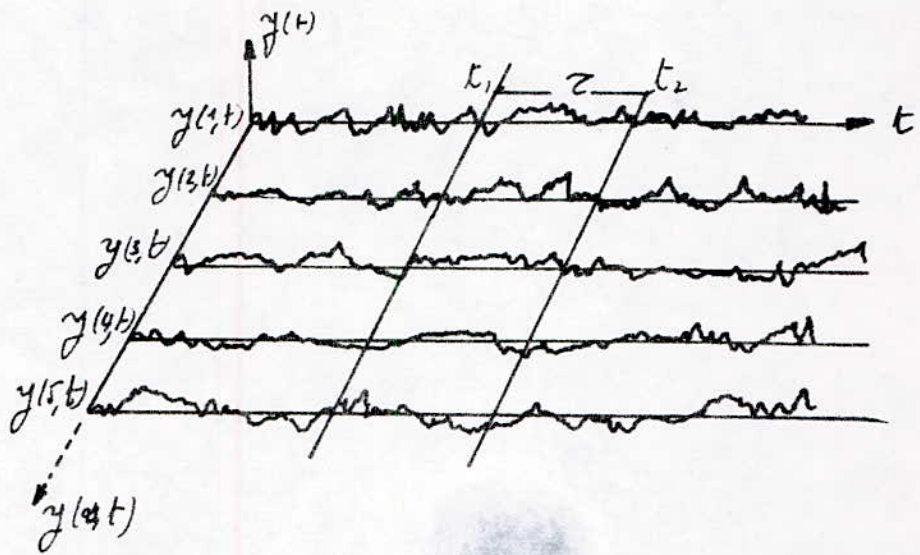


Fig. 3.1.

3.2 Caractéristiques statistiques du microprofil de la route.

Un processus aléatoire est un ensemble de nbre infinis de réalisations qui est représenté dans le cas général par $Y(\alpha, x)$

ou $-\infty < x < +\infty$ et $\alpha = 1, 2, \dots, \infty$

Le microprofil de la route est considéré comme une fonction aléatoire remplissant les conditions suivantes :

1°) - La fonction aléatoire est stationnaire et ergodique

2°) - Les ordonnées du microprofil sont distribuées suivant la loi normale.

3°) - Les longueurs des irrégularités sont limitées de haut et de bas

4°) Le microprofil varie aléatoirement seulement dans le plan vertical et longitudinal de la route

Le microprofil de la route étant une fonction aléatoire, ses caractéristiques statistiques sont donc :

a - La valeur moyenne de ses ordonnées ou l'espérance mathématique; en effet :

si $y'_i(x)$ sont les ordonnées du microprofil mesurées d'une certaine horizontale, la valeur moyenne de l'ensemble de réalisations est donnée par :

$$\langle Y \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{y_i(x)}{\alpha}$$

La valeur moyenne d'une réalisation sur la longueur de la route L_y devient :

$$\langle Y \rangle = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} y(x) dx$$

La valeur moyenne $\langle Y \rangle$ correspond à la droite A-A de la figure (31)

b. La dispersion des ordonnées :

elle est définie par :

$$\langle Y^2 \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{y_i^2(x)}{\alpha}$$

Dans le cas d'une réalisation on aura :

$$\langle Y^2 \rangle = \lim \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} y^2(x) dx$$

c. La fonction de corrélation du microprofil :

Elle est définie pour un ensemble de réalisations par :

$$R_y(x_1, x_2) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{y_i(x_1) y_i(x_2)}{\alpha}$$

Dans le cas d'une réalisation R_y devient :

$$R_y(x, x+x_s) = \lim \frac{1}{2L_y} \int_0^{L_y} y(x) y(x+x_s) dx$$

3.3 Méthode d'enregistrement des microprofils

Les deux méthodes principales d'enregistrement sont :

3.3.1. Méthode directe

Cette méthode se base sur la mesure des ordonnées du microprofil de la route sur un segment choisi (distance). La mesure s'effectue par nivellement, mais il s'avère que la méthode directe est peu efficace et exige beaucoup de travail; Par exemple, pour calculer une ordonnée, il faut effectuer α multiplications et α additions. Vu le grand nombre de fonctions de corrélations dont la détermination se relève indispensable dans l'étude des processus aléatoire, on comprend facilement l'intérêt d'appareils permettant d'effectuer ces calculs automatiquement

3.3.2. Méthode indirecte

Cette méthode se base sur l'enregistrement des vibrations d'un certain système mécanique à caractère connu. Parmi beaucoup d'appareils on peut citer :

Le dispositif construit sur la base d'un pendule (voir Fig: 2.3). Si on effectue un petit déplacement de la masse m_2 , on peut provoquer un changement très nette de la distance entre le point A et le point D

Si ce dispositif se trouve sur la poutre BD les vibrations du -

pendule ne dépendront que des vibrations verticales du point B qui se situe sur la même verticale que le point A appelé centre des oscillations. Les vibrations ne dépendront pas alors du déplacement du point D. Par contre, si on fixe le point B de la poutre DB sur l'axe de la roue de la voiture, (voir Fig: 3,3); Le pendule va donner le signal qui correspond au déplacement vertical de la roue. Ce signal sera bien sûr filtré par le pneu ce qui laisse croire que celui-ci n'est pas une illustration exacte du microprofil de la route. Sachant que les caractéristiques dynamiques du pneu sont connues, retrouver les caractéristiques statiques du microprofil une fois ayant enregistré le signal par le dispositif considéré.

Ce dispositif nous permet aussi d'estimer l'influence du microprofil de la route dans les conditions très mauvaises, par exemple dans le cas des routes herbacées ou boueuses.

Les inconvénients de cette méthode sont:

- 1°) - Pour des fréquences basses, le dispositif donne des signaux faibles
- 2°) - L'enregistrement n'est pas juste si la roue décolle de la route. Si on veut réduire ces inconvénients, le dispositif devient plus compliqué.

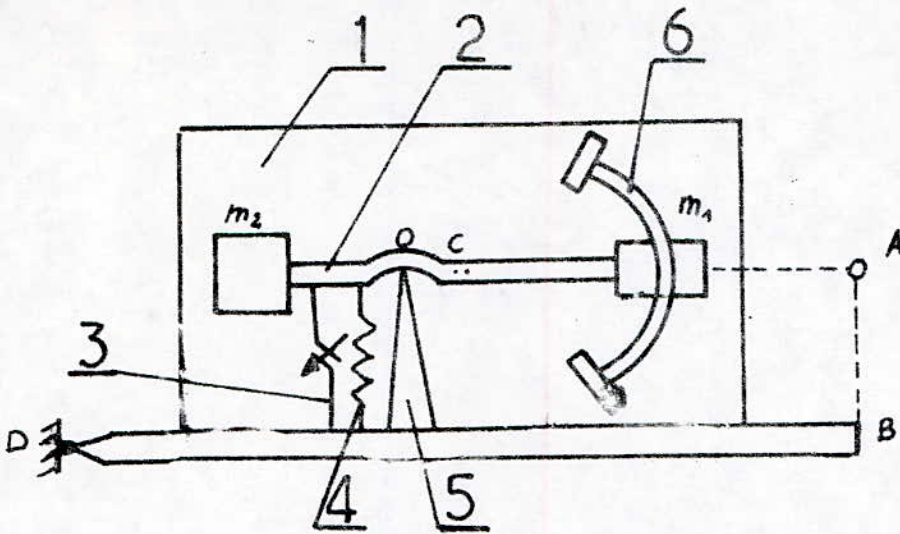


Fig. 32. Dispositif d'enregistrement des vibrations

- | | | | |
|---|-------------------|---|-------------|
| 1 | Caissa hermétique | 4 | Ressort |
| 2 | Pendule | 5 | Support |
| 3 | Capteur | 6 | Amortisseur |

m_1, m_2 Masses coulissantes

ρ : Rayon d'inertie : $AO \cdot AC = \rho^2$

C : centre de gravité

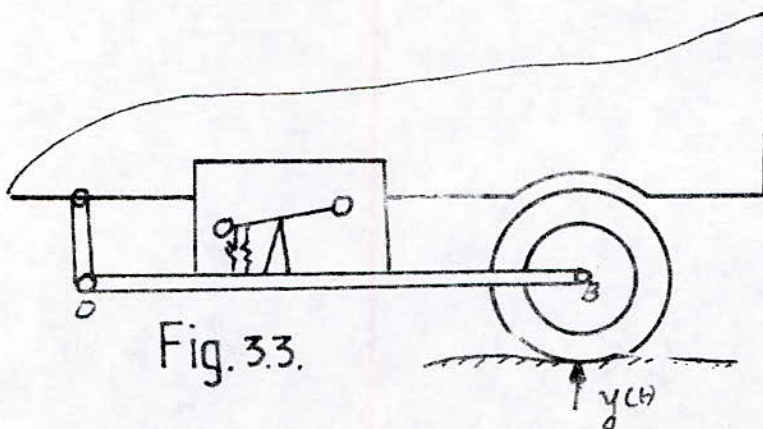
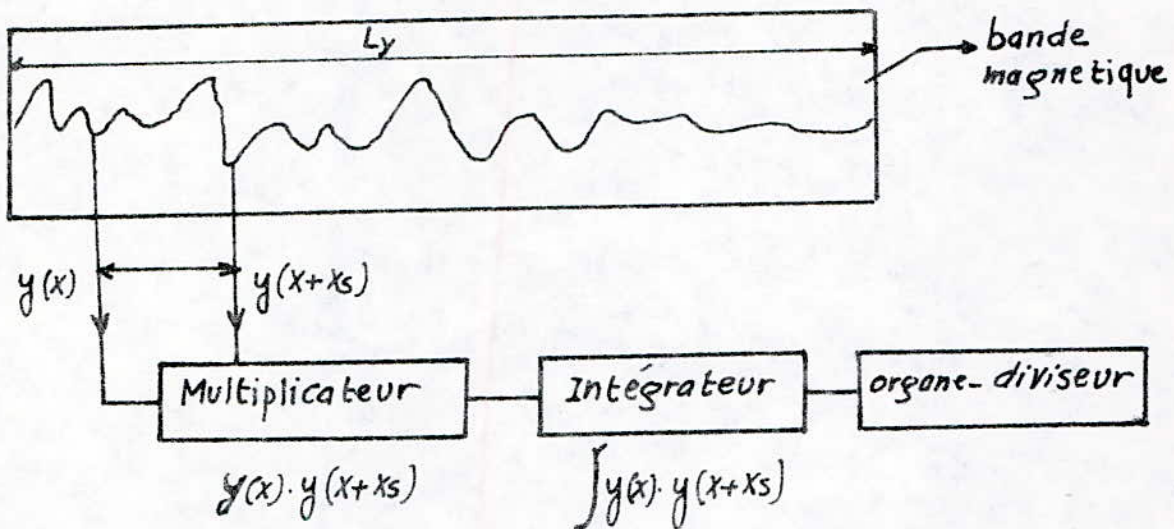


Fig. 33.

3.4. Méthode de détermination de la fonction de corrélation à partir des données expérimentales

À partir d'un enregistrement sur une bande magnétique du microprofil d'une route, on obtient la fonction de corrélation $R_y(x, x+x_s)$ et par suite la densité spectrale et ce à l'aide d'un appareil appelé corrélateur représenté par la figure simplifiée ci-dessous



La fonction de corrélation normée est donnée par :

$$\rho_y(x_s) = \frac{R_y(x_s)}{\sigma_y^2}$$

$$\text{avec } \sigma_y^2 = R_y(0)$$

La figure 3.4 présente les exemples des fonctions de corrélation ρ_y typiques où chacune d'elles correspond à un type de route.

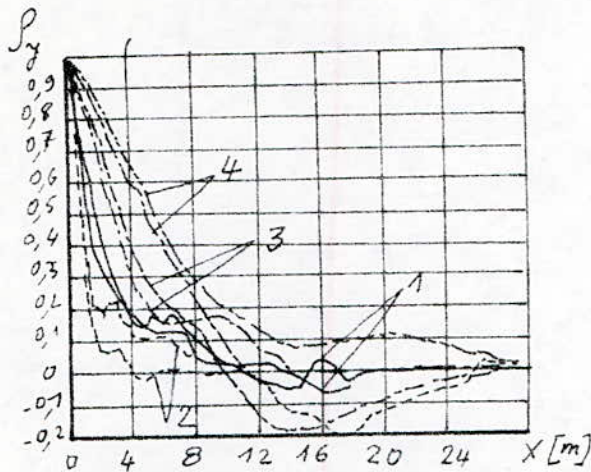


Fig: 3.4

1 = route de type piste

2 = route de type piste qui présente des montées et des descentes brusques

3 = route normale

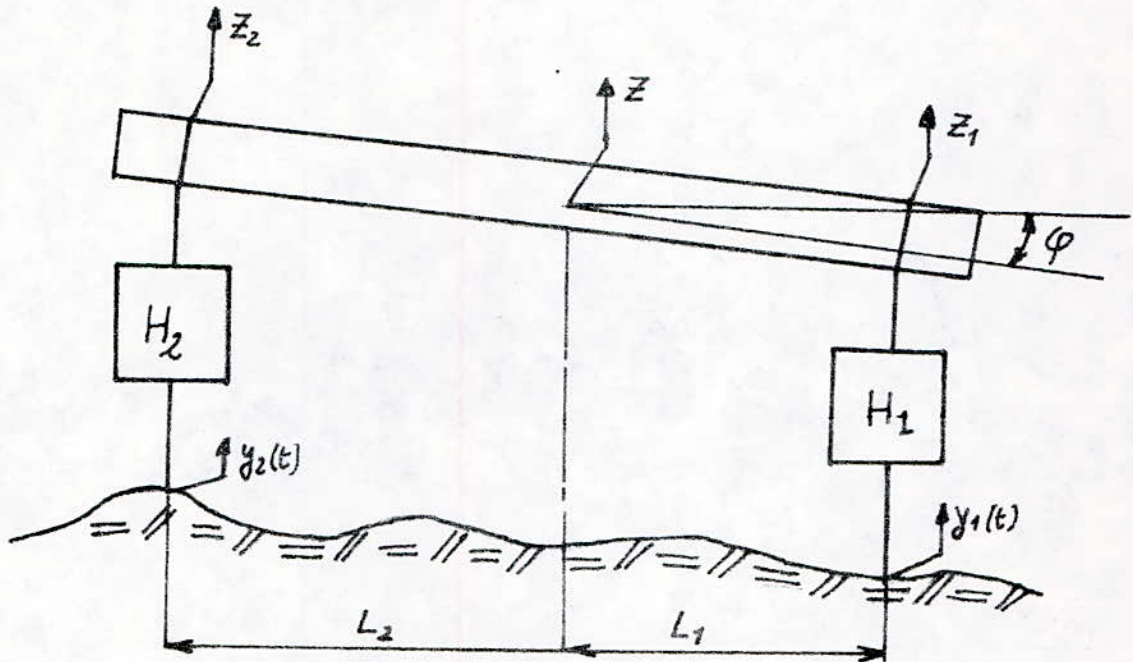
4 = route à tapis-goudron (auto-route)

D'après les caractéristiques des routes de la figure 3,4; on constate que pour les routes de mauvaises qualités (2-1) la fonction de corrélation diminue rapidement en fonction de $[X_m]$. C'est à dire il ont tendance à avoir une densité spectrale de type bruit blanc.

On appelle bruit blanc stationnaire tout processus aléatoire stationnaire, dans lequel la densité spectrale est constante.

IV CONSTRUCTION ANALYTIQUE DU SYSTEME DE VIBRO-ISOLATION OPTIMUM

4.1. Modèle physique de la carrosserie



$z_1(t)$ et $z_2(t)$ déplacements verticaux des parties avant et arrière de la carrosserie

$Z(t)$ déplacement vertical du centre de gravité de la carrosserie

$\varphi(t)$ déplacement angulaire de la carrosserie

H_1 et H_2 représentent les suspensions avant et arrière ou bien analytiquement H_1 et H_2 sont les deux fonctions de transfert à optimiser pour avoir une meilleur transmission

Avec $L = L_1 + L_2$

$$z_1 = z - L_1 \varphi$$

$$z_2 = z + L_2 \varphi$$

$$z_2 - z_1 = (L_1 + L_2) \varphi$$

$$z_1 + L_1 \frac{z_2 - z_1}{L_1 + L_2} \varphi = z$$

$$z = \frac{L_2 z_1 + L_1 z_2}{L_1 + L_2}$$

$$\varphi = \frac{z_2 - z_1}{L_1 + L_2}$$

d'où

$$\begin{bmatrix} z \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{L_1 + L_2} & \frac{L_1}{L_1 + L_2} \\ -\frac{1}{L_1 + L_2} & \frac{1}{L_1 + L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -L_1 \\ 1 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \varphi \end{bmatrix}$$

4.2. Hypothèses

- Notre système de Vibro-isolation (V.I) est linéaire
- on suppose qu'il n'existe que des vibrations Verticales
- Les excitations $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont des processus aléatoires stationnaires et ergodiques, leur densité spectrale est une fonction rationnelle de ω^2

4.3. Problème de critères de la vibro-isolation

4.3.1. Critères des déplacements relatifs

soit $\delta_1(t) = z_1(t) - y_1(t)$

$$\delta_2(t) = z_2(t) - y_2(t)$$

Les déplacements relatifs de l'avant et l'arrière de notre —

Carrosserie; on désire que ces déplacements soient minimum et on les caractérise par leurs Valeurs moyenne quadratique

$$\langle \delta_1^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta_1^2(t) dt$$

et

$$\langle \delta_2^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta_2^2(t) dt$$

4.3.2: Critères d'accélération minimale

Le but de ce critère est de minimiser l'accélération du S.V.I donc de lui imposer par la suite la souplesse afin d'avoir du confort et de sécurité

Les Valeurs quadratiques moyennes des accélérations sont :

$$\langle \ddot{z}^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \ddot{z}^2(t) dt$$

$$\langle \ddot{\varphi}^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \ddot{\varphi}^2(t) dt$$

Nos systèmes de Vibro-isolation prévus doivent être d'une part souple pour avoir une accélération minimale d'autre part il doivent être rigides pour limiter les déplacements relatifs Pour trouver une solution optimale satisfaisant à chacun de ces deux critères contradictoires sans avoir une influence

entre eux, il faut donc minimiser le critère suivant

$$C = \langle \ddot{z}^2(t) \rangle + \beta^2 \langle L^2 \ddot{\varphi}^2(t) \rangle + \lambda_1 \langle \delta_1^2(t) \rangle + \lambda_2 \langle \delta_2^2(t) \rangle$$

appelé la fonctionnelle

Si on considère que les valeurs moyennes de $\langle \delta_i^2(t) \rangle$, $\langle \ddot{z}^2(t) \rangle$ et $\langle \ddot{\varphi}^2(t) \rangle$ sont nulles, on aura :

$$\langle \ddot{z}^2(t) \rangle = \sigma_z^2 ; \langle L^2 \ddot{\varphi}^2(t) \rangle = L^2 \sigma_\varphi^2 ; \langle \delta^2(t) \rangle = \sigma_{z_1 - y_1}^2 \text{ et } \langle \delta_2^2(t) \rangle = \sigma_{z_2 - y_2}^2$$

La fonctionnelle devient :

$$C = \sigma_z^2 + \beta^2 L^2 \sigma_\varphi^2 + \lambda_1 \sigma_{y_1 - z_1}^2 + \lambda_2 \sigma_{y_2 - z_2}^2$$

$$\text{ou } \sigma_z^2 + \beta^2 L^2 \sigma_\varphi^2 = C_1 \text{ de confort}$$

$$\lambda_1 \sigma_{y_1 - z_1}^2 + \lambda_2 \sigma_{y_2 - z_2}^2 = C_2 \text{ de sécurité}$$

4.4. Formulation mathématique du problème

D'après le schéma bloc de la figure (4.2) on a :

$$\frac{\bar{F}_1}{\bar{y}_1 - \bar{z}_1} = H_{11} \quad ; \quad \frac{\bar{F}_1}{\bar{y}_1} = \frac{H_{11} H_{12}}{1 + H_{11} H_{12}}$$

$$\frac{\bar{F}_1}{y_1 - z_1} = s^2 H_{11} \Rightarrow \frac{s^2 H_{11} (y_1 - z_1)}{\bar{y}_1} = \frac{H_{11} H_{12}}{1 + H_{11} H_{12}}$$

$$\text{d'où } \frac{y_1 - z_1}{\bar{y}_1} = \frac{H_{12}}{s^2 (1 + H_{22} H_{12})} \quad \text{avec } H_{12} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{F}_1}$$

$$\text{Ainsi que : } \frac{\bar{F}_2}{\bar{y}_2 - \bar{z}_2} = H_{22} \quad ; \quad \frac{\bar{F}_2}{\bar{y}_2} = \frac{H_{22} H_{21}}{1 + H_{22} H_{21}}$$

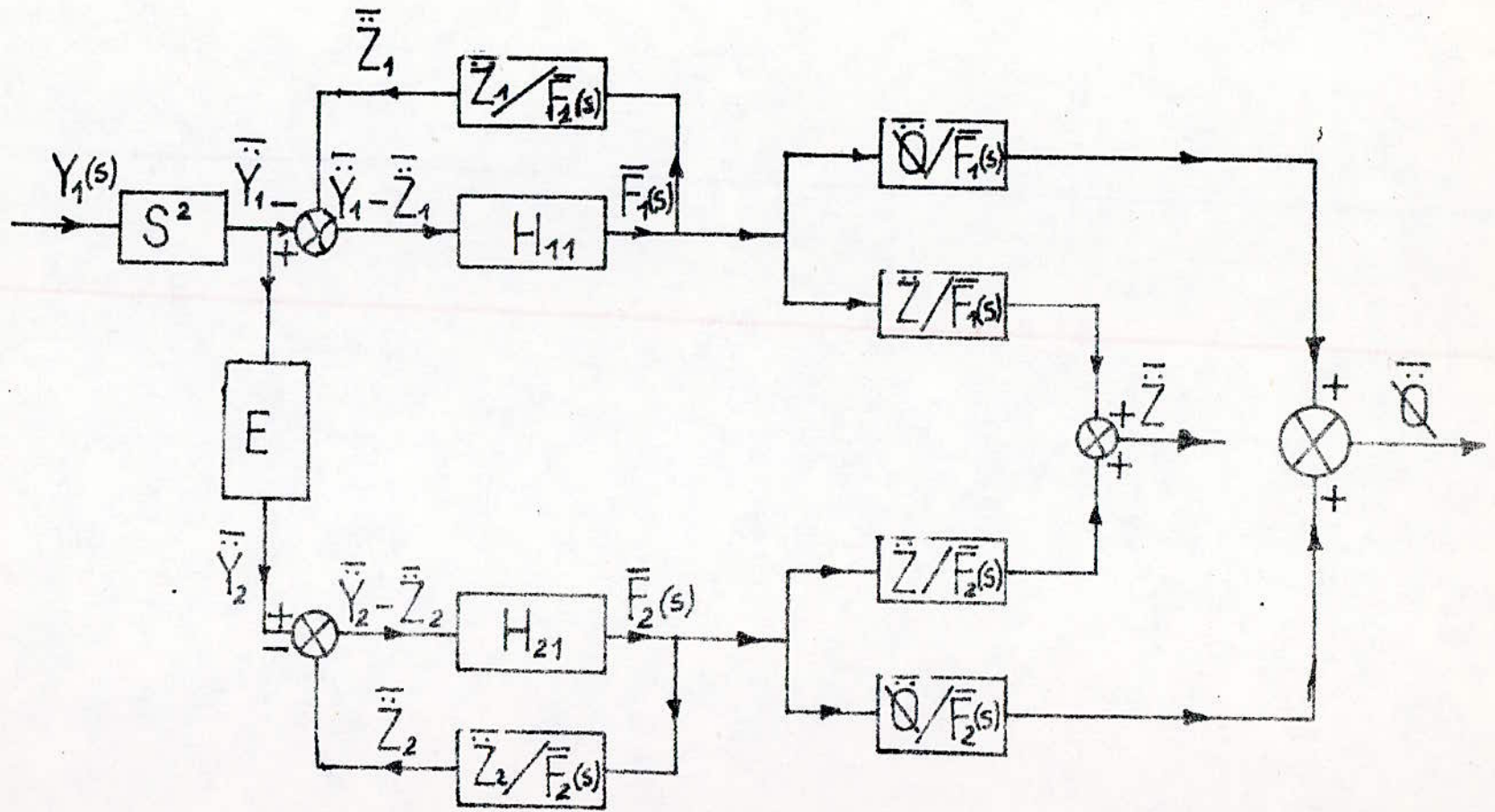


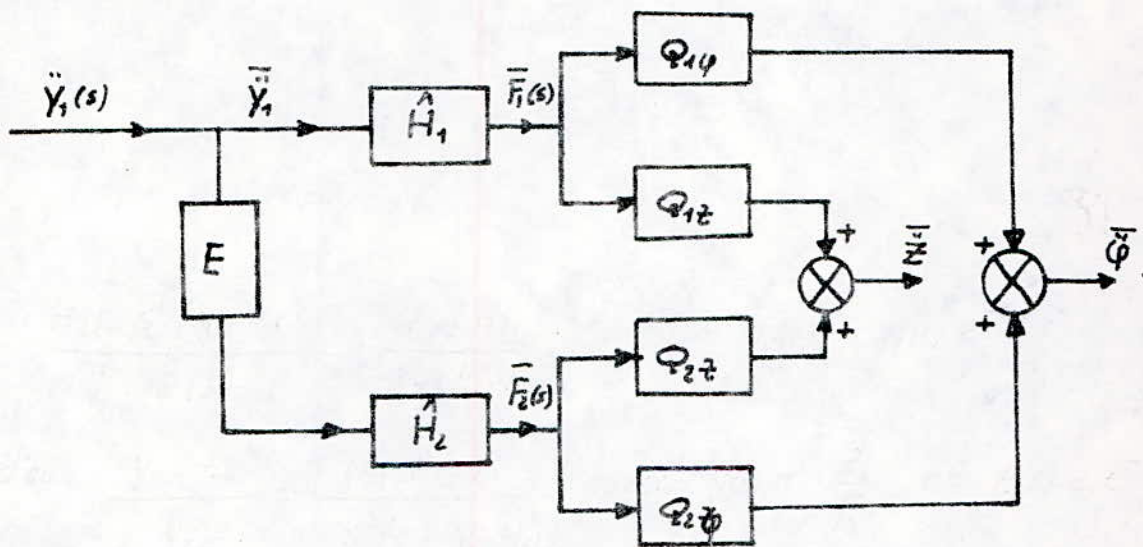
Fig. 4.2

$$\frac{H_{22} \cdot s^2 (y_2 - z_2)}{\bar{y}_1 \cdot E(s)} = \frac{H_{22} H_{21}}{1 + H_{22} H_{21}} \quad \text{et} \quad y_2(t) = y_1(t) e^{-sz}$$

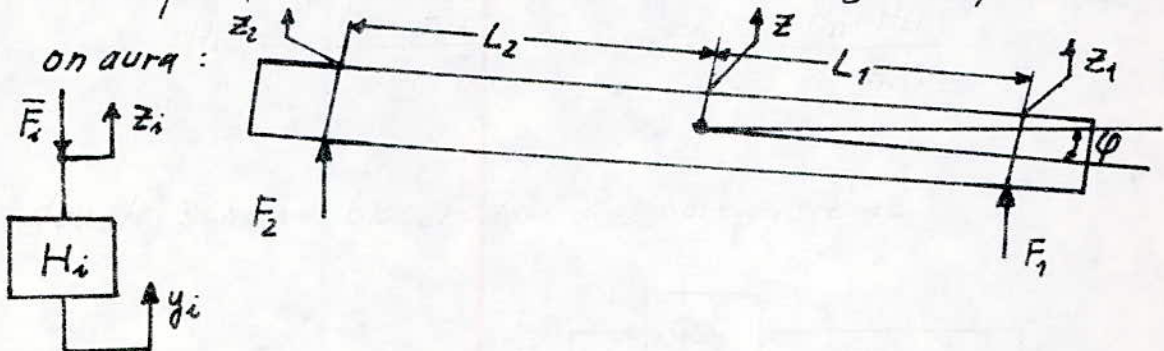
$$\text{d'où} \quad \frac{y_2 - z_2}{\bar{y}_1} = \frac{H_{21} E(s)}{s^2 (1 + H_{22} \cdot H_{21})} \quad \text{avec} \quad H_{21} = \frac{\ddot{z}_2}{\bar{F}_2} \quad \text{et} \quad E(s) = e^{-sz}$$

$$\hat{H}_1 = \frac{H_{11} \cdot H_{12}}{1 + H_{11} \cdot H_{12}} \quad \text{et} \quad \hat{H}_2 E(s) = \frac{H_{21} \cdot H_{21}}{1 + H_{22} H_{21}}$$

d'où le schéma bloc réduit de notre système.



D'autre part, si on isole la carrosserie de la figure représentatif (4.1)



on déduit les équations suivantes

$$\bar{F}_1(s) + \bar{F}_2(s) = m \bar{\ddot{z}}(s)$$

$$\bar{F}_2(s) \cdot L_2 - \bar{F}_1(s) \cdot L_1 = J_0 \bar{\ddot{\varphi}}(s)$$

avec m la masse de la carrosserie et J_0 son moment d'inertie

$$\frac{\bar{\ddot{z}}(s)}{\bar{\ddot{y}}_1(s)} = \hat{H}_1 Q_{1z} + \hat{H}_2 E(s) Q_{2z}$$

$$\frac{\bar{\ddot{\varphi}}(s)}{\bar{\ddot{y}}_1(s)} = \hat{H}_1 Q_{1\varphi} + \hat{H}_2 E(s) Q_{2\varphi}$$

et comme $\mathcal{L}\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) = s^2 y(s)$ et $\mathcal{L}\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = s^2 z(s)$

d'où

$$z(s) = 1/s^2 \left(\hat{H}_1 Q_{1z} + \hat{H}_2 E(s) Q_{2z} \right) \bar{\ddot{y}}_1(s) \quad (4.4.1)$$

$$\varphi(s) = 1/s^2 \left(\hat{H}_1 Q_{1\varphi} + \hat{H}_2 E(s) Q_{2\varphi} \right) \bar{\ddot{y}}_1(s) \quad (4.4.2)$$

alors :

$$z_1 = 1/s^2 \left(\hat{H}_1 Q_{1z} + \hat{H}_2 E(s) Q_{2z} - L_1 \hat{H}_1 Q_{1\varphi} - L_1 \hat{H}_2 E(s) Q_{2\varphi} \right) \bar{\ddot{y}}_1(s)$$

$$z_2 = 1/s^2 \left(\hat{H}_1 Q_{1z} + \hat{H}_2 E(s) Q_{2z} + L_2 \hat{H}_1 Q_{1\varphi} + L_2 \hat{H}_2 E(s) Q_{2\varphi} \right) \bar{\ddot{y}}_1(s)$$

ou encore :

$$z_1(s) = 1/s^2 \left[\hat{H}_1 (Q_{1z} - L_1 Q_{1\varphi}) + \hat{H}_2 E(s) (Q_{2z} - L_1 Q_{2\varphi}) \right] \bar{\ddot{y}}_1(s)$$

$$z_2(s) = 1/s^2 \left[\hat{H}_1 (Q_{1z} + L_2 Q_{1\varphi}) + \hat{H}_2 E(s) (Q_{2z} + L_2 Q_{2\varphi}) \right] \bar{\ddot{y}}_1(s)$$

Calcul de Q_{iz} et $Q_{i\varphi}$:

$$\left. \begin{aligned} F_1 + F_2 &= m \ddot{z} \\ F_1 Q_{1z} + F_2 Q_{2z} &= \ddot{z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_{1z} = Q_{2z} = \frac{1}{m}$$

$$\left. \begin{aligned} F_2 \cdot L_2 - F_1 L_1 &= J_G \ddot{\varphi} \\ F_2 \cdot Q_{2\varphi} + F_1 Q_{1\varphi} &= \ddot{\varphi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_{2\varphi} = \frac{L_2}{J_G} ; Q_{1\varphi} = -\frac{L_1}{J_G}$$

4.5 Détermination des différentes dispersions

$$Z_1(s) = 1/s^2 \left[\hat{H}_1 \left(\frac{1}{m} + \frac{L_1^2}{J_G} \right) + \hat{H}_2 E(s) \left(\frac{1}{m} - \frac{L_1 L_2}{J_G} \right) \right] \bar{Y}_1(s)$$

$$Z_2(s) = 1/s^2 \left[\hat{H}_1 \left(\frac{1}{m} - \frac{L_1 L_2}{J_G} \right) + \hat{H}_2 E(s) \left(\frac{1}{m} + \frac{L_2^2}{J_G} \right) \right] \bar{Y}_1(s)$$

et :

$$Z_1(s) - Y_1(s) = 1/s^2 \left[\hat{H}_1 \left(\frac{1}{m} + \frac{L_1^2}{J_G} \right) + \hat{H}_2 E(s) \left(\frac{1}{m} - \frac{L_1 L_2}{J_G} \right) - 1 \right] \bar{Y}_1(s)$$

$$Z_2(s) - Y_2(s) = 1/s^2 \left[\hat{H}_1 \left(\frac{1}{m} - \frac{L_1 L_2}{J_G} \right) + \hat{H}_2 E(s) \left(\frac{1}{m} + \frac{L_2^2}{J_G} \right) - E(s) \right] \bar{Y}_1(s)$$

avec $\bar{y}_i(s) = S \bar{y}_i(s)$ densité spectrale

on aura en fin :

$$\sigma_{z_1-y_1}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{1}{s^2} (\hat{H}_1 A_1 + \hat{H}_2 E(s) A_{12} - 1) \right|^2 s \bar{y}_1(s) ds$$

$$\sigma_{z_2-y_2}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{1}{s^2} (\hat{H}_1 A_{12} + \hat{H}_2 E(s) A_2 - E(s)) \right|^2 s \bar{y}_1(s) ds$$

$$\sigma_{z_2}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{1}{m} (\hat{H}_1 + \hat{H}_2 E(s)) \right|^2 s \bar{y}_1(s) ds$$

$$\sigma_{\varphi}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{1}{j\omega} (L_2 \hat{H}_2 E(s) - \hat{H}_1 L_1) \right|^2 s \bar{y}_1(s) ds$$

$$\text{ou : } A_1 = \frac{1}{m} + \frac{L_1^2}{j\omega} ; A_2 = \frac{1}{m} + \frac{L_2^2}{j\omega} ; A_{12} = \frac{1}{m} - \frac{L_1 L_2}{j\omega}$$

en fin notre fonctionnelle s'écrit :

$$C = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \left| \frac{1}{m} (\hat{H}_1 + \hat{H}_2 E(s)) \right|^2 + \beta^2 L^2 \left| \frac{1}{j\omega} (L_2 \hat{H}_2 E(s) - \hat{H}_1 L_1) \right|^2 + \right. \\ \left. + \lambda_1 \left| \frac{1}{s^2} (A_1 \hat{H}_1 + \hat{H}_2 E(s) A_2 - 1) \right|^2 + \right. \\ \left. + \lambda_2 \left| \frac{1}{s^2} (\hat{H}_1 A_{12} + \hat{H}_2 E(s) A_2 - E(s)) \right|^2 \right\} s \bar{y}_1(s) ds$$

4.6 Solution générale du problème par la méthode de Wiener Hlopf

soit les fonctions définies par :

$$\hat{H}_I = \hat{H}_1 + \varepsilon \eta_1(s)$$

$$\hat{H}_{II} = \hat{H}_2 + \varepsilon \eta_2(s)$$

où $\eta_1(s)$ et $\eta_2(s)$ sont deux fonctions de balance

ε : paramètre constant

\hat{H}_I et \hat{H}_{II} : sont les fonctions optimales pour laquelle la fonctionnelle C est minimale

Considérons la fonctionnelle C^* après avoir remplacé \hat{H}_1 et \hat{H}_2 par \hat{H}_I et \hat{H}_{II}

en effet :

$$C^* = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{m} (\hat{H}_1 + \varepsilon \eta_1 + (\hat{H}_2 + \varepsilon \eta_2) E(s)) \right|^2 +$$

$$+ \beta^2 L^2 \left| \frac{1}{j\omega} ((\hat{H}_2 + \varepsilon \eta_2) E(s) - \hat{H}_1 + \varepsilon \eta_1) \right|^2 +$$

$$+ \lambda_1 \left| \frac{1}{s^2} (A_1 (\hat{H}_1 + \varepsilon \eta_1) + (\hat{H}_2 + \varepsilon \eta_2) E(s) A_2 - 1) \right|^2 +$$

$$+ \lambda_2 \left| \frac{1}{s^2} ((\hat{H}_1 + \varepsilon \eta_1) A_{12} + (\hat{H}_2 + \varepsilon \eta_2) E(s) A_2 - E(s)) \right|^2 \Bigg\} s \dot{y}(s) ds$$

La différence entre C^* et C constitue l'erreur notée par :

$$\Delta c = c^* - c$$

identifier \hat{H}_1 et \hat{H}_2 à \hat{H}_I et \hat{H}_{II} revient à avoir l'écart Δc minimum pour $\varepsilon = 0$ ce qui se traduit par:

$$\left. \frac{d(\Delta c)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

ou simplement par: $\left. \frac{dc^*}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$

en appliquant la propriété $|H(s)|^2 = H(s) \cdot H(-s)$ on obtient:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varepsilon^*}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \frac{1}{m^2} \left[(\eta_1 + \eta_2 E) (\hat{H}_1^* + \hat{H}_2^* E^*) + (\hat{H}_1 + \hat{H}_2 E) (\eta_1^* + \eta_2^* E^*) \right] + \right. \\ & + \frac{\beta^2 L^2}{j\omega} \left[(L_2 \eta_2 - L_1 \eta_1) (L_2 \hat{H}_2^* E^* - L_1 \hat{H}_1^*) + (L_2 \hat{H}_2 E - L_1 \hat{H}_1) (L_2 \eta_2^* E^* - L_1 \eta_1^*) \right] \\ & + \lambda_1 \frac{1}{5^4} \left[(A_{11} \eta_1 + A_{12} \eta_2 E) (A_{11} \hat{H}_1^* + A_{12} \hat{H}_2^* E^* - 1) + (A_{11} \hat{H}_1 + A_{12} \hat{H}_2 E - 1) (A_{11} \eta_1^* + A_{12} \eta_2^* E^*) \right] \\ & + \lambda_2 \frac{1}{5^4} \left[(A_{21} \eta_1 + A_{22} \eta_2 E) (A_{21} \hat{H}_1^* + (A_{22} \hat{H}_2^* - 1) E^*) + (A_{21} \hat{H}_1 + (A_{22} \hat{H}_2 - 1) E) \right. \\ & \left. \times (A_{21} \eta_1^* + A_{22} E^* \eta_2^*) \right] \left. \right\} s \dot{\gamma}_i(s) ds \end{aligned}$$

où \hat{H}_i^* et η_i^* sont les conjuguées de \hat{H}_i et η_i .

$$\left. \frac{dc^*}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \frac{1}{m^2} \left[\eta_1 (\hat{H}_1^* + \hat{H}_2^* E) + \eta_2 E (\hat{H}_1^* + \hat{H}_2^* E) + \eta_1^* (\hat{H}_1 + \hat{H}_2 E) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \eta_2^* E^* (\hat{H}_1 + \hat{H}_2 E) \Big] + \frac{\beta^2 L^2}{J_4^2} \left[(-\eta_1 L_1 (L_2 \hat{H}_2^* E^* - L_1 \hat{H}_1) + \eta_2 L_2 E (L_2 \hat{H}_2^* E - L_1 \hat{H}_1^*) - \right. \\
& \left. - \eta_1^* L_1 (L_2 \hat{H}_2 E - L_1 \hat{H}_1) + \eta_2^* L_2 E^* (L_2 \hat{H}_2 E - L_1 \hat{H}_1) \right] + \lambda_1 \frac{1}{S^4} \left[\eta_1 A_1 (A_1 \hat{H}_1^* + \right. \\
& \left. + A_{12} \hat{H}_2^* E^*) + \eta_2 A_{12} E (A_1 \hat{H}_1^* + A_{12} \hat{H}_2^* E^* - 1) + \eta_1^* A_1 (A_1 \hat{H}_1 + A_{12} \hat{H}_2 E - 1) + \right. \\
& \left. + \eta_2^* A_{12} E^* (A_1 \hat{H}_1 + A_{12} \hat{H}_2 E - 1) \right] + \lambda_2 \frac{1}{S^4} \left[\eta_1 A_{12} (A_{12} \hat{H}_1^* + (A_2 \hat{H}_2^* - 1) E^*) \right. \\
& \left. + \eta_2 A_2 E (A_{12} \hat{H}_1^* + (A_2 \hat{H}_2^* - 1) E) + \eta_1^* A_{12} (A_{12} \hat{H}_1 + (A_2 \hat{H}_2 - 1) E) + \eta_2^* A_2 E^* \times \right. \\
& \left. \times (A_{12} \hat{H}_1 + (A_2 \hat{H}_2 - 1) E) \right] \Big\} s \ddot{y}(s) ds
\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable de s en $(-s)$; $\frac{dC^*}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0$

implique :

$$\begin{aligned}
& \eta_1^* \left\{ \frac{1}{m^2} (\hat{H}_1 + \hat{H}_2 E) - \frac{\beta^2 L^2}{J_4^2} L_1 (L_2 \hat{H}_2 E - L_1 \hat{H}_1) + \frac{\lambda_1 A_1}{S^4} (A_1 \hat{H}_1 + A_{12} \hat{H}_2 E - 1) + \right. \\
& \left. + \lambda_2 \frac{A_{12}}{S^4} (A_{12} \hat{H}_1 + (A_2 \hat{H}_2 - 1) E) \right\} s \ddot{y}(s) = 0
\end{aligned}$$

$$\text{et } \eta_2^* \left\{ \frac{1}{m^2} E^* (\hat{H}_1 + \hat{H}_2 E) + \frac{\beta^2 L^2}{J_4^2} L_2 E^* (L_2 \hat{H}_2 E - L_1 \hat{H}_1) + \right.$$

$$\left. + \lambda_1 \frac{A_{12}}{S^4} E^* (A_1 \hat{H}_1 + A_{12} \hat{H}_2 E - 1) + \lambda_2 \frac{A_2}{S^4} E^* (A_{12} \hat{H}_1 + (A_2 \hat{H}_2 - 1) E) \right\} s \ddot{y}(s) = 0$$

Par hypothese on peut mettre $S\ddot{y}(s) = S^4 s_0 G_1(s) G_2(-s)$ où s_0 est une constante ; $\left. \frac{dC^*}{dE} \right|_{E=0} = 0$ donne :

$$\left[\hat{H}_1 \left(\frac{1}{m^2} + \frac{\beta^2 L^2}{J_4^2} L_1^2 + \lambda_1 \frac{A_1^2}{S^4} + \lambda_2 \frac{A_{12}^2}{S^4} \right) + \hat{H}_2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{\beta^2 L^2}{J_4^2} L_1 L_2 + \lambda_1 \frac{A_1 A_{12}}{S^4} + \lambda_2 \frac{A_{12} A_2}{S^4} \right) E - \left(\lambda_1 \frac{A_1}{S^4} + \lambda_2 \frac{A_{12}}{S^4} E \right) \right] S^4 s_0 G_1(s) G_2(-s) = 0 \quad (4.6.1)$$

et

$$\left[\hat{H}_1 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{\beta^2 L^2}{J_4^2} L_1 L_2 + \lambda_1 \frac{A_{12} A_1}{S^4} + \lambda_2 \frac{A_2 A_{12}}{S^4} \right) + \hat{H}_2 \left(\frac{1}{m^2} + \frac{\beta^2 L^2}{J_4^2} L_2^2 + \lambda_1 \frac{A_{12}^2}{S^4} + \lambda_2 \frac{A_2^2}{S^4} \right) - \left(\lambda_1 \frac{A_1^2}{S^4} + \lambda_2 \frac{A_2}{S^4} \right) \right] S^4 s_0 G_1(s) G_2(-s) = 0 \quad (4.6.2)$$

En multipliant (4.6.1) et (4.6.2) par m^2 et en posant :

$$K(s) = s^4 + \frac{m^2 \beta^2 L^2}{J_4^2} L_1^2 s^4 + \lambda_1 m^2 A_1^2 + \lambda_2 m^2 A_{12}^2$$

$$R(s) = s^4 - \frac{m^2 \beta^2 L^2}{J_4^2} L_1 L_2 s^4 + \lambda_1 m^2 A_{12} A_1 + \lambda_2 m^2 A_2 A_{12}$$

$$U(s) = s^4 + \frac{m^2 \beta^2 L^2}{J_4^2} L_2^2 s^4 + \lambda_1 m^2 A_{12}^2 + \lambda_2 m^2 A_2^2$$

$$W(s) = \lambda_1 A_{12} m^2 + \lambda_2 A_2 m^2 E$$

$$V(s) = \lambda_1 m^2 A_1 + \lambda_2 A_{12} m^2 E$$

$$E = e^{-s\tau} ; E^* = e^{s\tau}$$

on obtient le systeme d'equations en \hat{H}_1 et \hat{H}_2 suivant

$$K(s) \cdot G_1(s) \cdot \hat{H}_1(s) + R(s) G_1(s) E \hat{H}_2(s) = V(s) G_1(s) \quad (4.6.3)$$

$$R(s) G_1(s) E^* \hat{H}_1(s) + U(s) G_1(s) \hat{H}_2(s) = W(s) G_1(s) E^* \quad (4.6.4)$$

4.7. Détermination analytique de H_1 et H_2 réalisables et stables.

4.7.1 Méthode matricielle.

si on résoud le système d'équations déjà trouvé, on obtient \hat{H}_1 et \hat{H}_2 optimum mais irréalisables physiquement, pour cela on prévoit deux fonctions notées par $\Phi_1^-(s)$ et $\Phi_2^-(s)$ qui ont leurs pôles dans le demi plan droite des complexes afin d'avoir \hat{H}_1 et \hat{H}_2 optimum et réalisables.

le système d'équations en \hat{H}_1 et \hat{H}_2 s'écrit donc :

$$K(s) \cdot G_1(s) \cdot \hat{H}_1(s) + R(s) G_1(s) E \cdot \hat{H}_2(s) = V(s) G_1(s) + \Phi_1^-(s) \quad (4.6.5)$$

$$R(s) G_1(s) E^* \hat{H}_1(s) + U(s) G_1(s) \hat{H}_2(s) = W(s) G_1(s) E^* + \Phi_2^-(s) \quad (4.6.6)$$

(4.6.6) x E donne :

$$K(s) \cdot G_1(s) \cdot \hat{H}_1(s) + R(s) G_1(s) E \cdot \hat{H}_2(s) = V(s) G_1(s) + \Phi_1^-(s) \quad (4.6.7)$$

$$R(s) G_1(s) E^* \hat{H}_1(s) + U(s) G_1(s) \hat{H}_2(s) = W(s) G_1(s) + \Phi_2^-(s) E \quad (4.6.8)$$

Ecrivons ce système d'équations sous la forme matricielle suivante :

$$D(j\omega) H^*(j\omega) G(j\omega) = N(j\omega) G(j\omega) + \Phi(j\omega) \quad (4.6.9)$$

où : $s = j\omega$

$$D(j\omega) = \begin{vmatrix} K(j\omega) & R(j\omega) \\ R(j\omega) & U(j\omega) \end{vmatrix}$$

$$H^+(j\omega) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \end{vmatrix}$$

$$N(j\omega) = \begin{vmatrix} V(j\omega) \\ W(j\omega) \end{vmatrix} G(j\omega) ; \quad \Phi^-(j\omega) = \begin{vmatrix} \Phi_1^-(j\omega) \\ \Phi_2^-(j\omega) E \end{vmatrix}$$

on pose :

$$\frac{m^2 \beta^2 L^2}{\gamma_1^2} L_1^2 = f_1^2 \quad ; \quad m^2 (\lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_{12}^2) = \theta_1$$

$$\frac{m^2 \beta^2 L^2}{\gamma_1^2} L_1 L_2 = f^2 \quad ; \quad m^2 (\lambda_1 A_{12} A_1 + \lambda_2 A_2 A_{12}) = \theta$$

$$\frac{m^2 \beta^2 L^2}{\gamma_2^2} L_2^2 = f_2^2 \quad ; \quad m^2 (\lambda_1 A_{12}^2 + \lambda_2 A_2^2) = \theta_2$$

d'où

$$D(j\omega) = \begin{vmatrix} (1+f_1^2)(j\omega)^4 + \theta_1 & (1-f^2)(j\omega)^4 + \theta \\ (1-f^2)(j\omega)^4 + \theta & (1+f_2^2)(j\omega)^4 + \theta_2 \end{vmatrix} \quad (4.7.1)$$

$$\text{Det}(D(j\omega)) = [(1+f_1^2)(j\omega)^4 + \theta_1][(1+f_2^2)(j\omega)^4 + \theta_2] - [(1-f^2)(j\omega)^4 + \theta]^2$$

$$\text{Det}(D(j\omega)) = [(1+f_1^2)(1+f_2^2) - (1-f^2)^2](j\omega)^8 + [(1+f_1^2)\theta_2 + (1+f_2^2)\theta_1 - 2\theta(1-f^2)](j\omega)^4 + \theta_1\theta_2 - \theta^2$$

Determinons les zeros $b_{1,2}$ de $\det(D(j\omega))$ en posant :

$$b_1 = (j\omega_1)^4 \text{ et } b_2 = (j\omega_2)^4$$

$$\Delta = \left[(1+j_1^2)\theta_2 + (1+j_2^2)\theta_1 - 2\theta(1-j^2) \right]^2 - 4 \left[(1+j_1^2)(1+j_2^2) - (1-j^2) \right] \left[\theta_1\theta_2 - \theta^2 \right]$$

$$b_{1,2} = \frac{- \left[(1+j_1^2)\theta_2 + (1+j_2^2)\theta_1 - 2\theta(1-j^2) \right] \pm \sqrt{\Delta}}{2 \left[(1+j_1^2)(1+j_2^2) - (1-j^2) \right]}$$

mettons $D(j\omega)$ sous la forme $[D^-(j\omega)]^{-1} D^+(j\omega)$

où : $D^-(j\omega)$ est une matrice dont les elements ont des zeros dans le demi-plan droit des Complexes

$D^+(j\omega)$ est une matrice dont les éléments ont des zeros dans le demi-plan gauche des Complexes

Pour pouvoir mettre $D(j\omega)$ sous la forme desirée, on présente

$D(j\omega)$ sous cette forme :

$$D(j\omega) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} s^4 + \omega_1^4 & 0 \\ 0 & s^4 + \omega_2^4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} \quad (4.7.2)$$

$$s = j\omega$$

ω_1, ω_2 sont les pulsations du systemes

Après identification de (4.7.2) avec (4.7.1) on trouve :

$$b_{11} = \theta_1 - b_1(1+f_2^2) ; b_{12} = b_1(1-f_1^2) - \theta$$

$$b_{21} = b_2(1-f_1^2) - \theta ; b_{22} = \theta_2 - b_2(1+f_1^2)$$

$$L_{11} = (1+f_1^2)b_{11} + (1-f_2^2)b_{12} ; L_{12} = (1+f_2^2)b_{12} + (1-f_1^2)b_{11}$$

$$L_{21} = (1+f_1^2)b_{21} + (1-f_2^2)b_{22} ; L_{22} = (1-f_1^2)b_{21} + (1+f_2^2)b_{22}$$

d'autre part : $w_1^4 = \frac{\theta_1 b_{11} + \theta b_{12}}{L_{11}} ; w_2^4 = \frac{\theta_2 b_{22} + \theta b_{21}}{L_{22}}$

$$s^4 + w_1^4 = d(s) \cdot d(-s)$$

$$d(s) = As^2 + Bs + C ; d(-s) = As^2 - Bs + C$$

on trouve après identification

$$A = 1$$

$$B = \sqrt{2} w_1$$

$$C = w_1^2$$

$$\text{d'où } s^4 + w_1^4 = (s^2 + \sqrt{2} w_1 s + w_1^2)(s^2 - \sqrt{2} w_1 s + w_1^2)$$

$$s^4 + w_2^4 = (s^2 + \sqrt{2} w_2 s + w_2^2)(s^2 - \sqrt{2} w_2 s + w_2^2)$$

Alors :

$$\begin{vmatrix} s^4 + w_1^4 & 0 \\ 0 & s^4 + w_2^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s^2 - \sqrt{2} w_1 s + w_1^2 & 0 \\ 0 & s^2 - \sqrt{2} w_2 s + w_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s^2 + \sqrt{2} w_1 s + w_1^2 & 0 \\ 0 & s^2 + \sqrt{2} w_2 s + w_2^2 \end{vmatrix}$$

en fin on aura :

$$[D(s)]^{-1} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} s^2 - \sqrt{2} w_1 s + w_1^2 & 0 \\ 0 & s^2 - \sqrt{2} w_2 s + w_2^2 \end{vmatrix}$$

$$D^-(s) = \begin{vmatrix} [s^2 - \sqrt{2} \omega_1 s + \omega_1^2]^{-1} & 0 \\ 0 & [s^2 - \sqrt{2} \omega_2 s + \omega_2^2]^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$D^+(s) = \begin{vmatrix} s^2 + \sqrt{2} \omega_1 s + \omega_1^2 & 0 \\ 0 & s^2 + \sqrt{2} \omega_2 s + \omega_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}$$

$$[D^+(s)]^{-1} = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{22} & L_{12} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} [s^2 + \sqrt{2} \omega_1 s + \omega_1^2]^{-1} & 0 \\ 0 & [s^2 + \sqrt{2} \omega_2 s + \omega_2^2]^{-1} \end{vmatrix}$$

La relation (4.6.9) devient donc :

$$D^+(s) H^+(s) G^+(s) = D^-(s) N(s) \cdot G^+(s) + D^-(s) [G^-(s)]^{-1} \Phi^-(s)$$

$H^+(s)$: représente la matrice colonne dont les éléments sont $H_1^+(s)$ et $H_2^+(s)$, c'est à dire les meilleures caractéristiques de transmissions des suspensions

$G^+(s)$: c'est la densité spectrale stable.

$D^-(s) [G^-(s)]^{-1} \Phi^-(s)$: admet des pôles dans le demi-plan droit

ce qui prouve son instabilité et par suite on en tiendra pas en compte dans les calculs.

$$\text{Posons } D^+(s) N(s) G^+(s) = \Psi(s) = \Psi^+(s) + \Psi^-(s)$$

en effet $H^+(s)$ est donnée par :

$$H^+(s) = [D^+(s)]^{-1} \Psi^+(s) [G^+(s)]^{-1} \quad (4.7.3)$$

- Détermination de $\Psi^+(s)$

$$\text{avec : } N(s) = \begin{vmatrix} m^2 (\lambda_1 A_{11} + \lambda_2 A_{12} E) \\ m^2 (\lambda_1 A_{12} + \lambda_2 A_{22} E) \end{vmatrix}$$

$$D^-(j\omega) = \begin{vmatrix} \frac{b_{11}}{s^2 - \sqrt{2} \omega_1 s + \omega_1^2} & \frac{b_{12}}{s^2 - \sqrt{2} \omega_1 s + \omega_1^2} \\ \frac{b_{21}}{s^2 - \sqrt{2} \omega_2 s + \omega_2^2} & \frac{b_{22}}{s^2 - \sqrt{2} \omega_2 s + \omega_2^2} \end{vmatrix}$$

d'où

$$\Psi(s) = \begin{vmatrix} \frac{m^2 \lambda_1 (b_{11} A_{11} + b_{12} A_{22})}{s^2 - \sqrt{2} \omega_1 s + \omega_1^2} + \frac{m^2 \lambda_2 (A_{12} b_{11} + A_{22} b_{22}) E}{s^2 - \sqrt{2} \omega_1 s + \omega_1^2} \\ \frac{m^2 \lambda_1 (A_{12} b_{21} + A_{22} b_{22})}{s^2 - \sqrt{2} \omega_2 s + \omega_2^2} + \frac{m^2 \lambda_2 (A_{12} b_{21} + A_{22} b_{22}) E}{s^2 - \sqrt{2} \omega_2 s + \omega_2^2} \end{vmatrix} G^+(s)$$

$$\text{posons : } m^2 \lambda_1 (b_{11} A_{11} + b_{12} A_{22}) = B ; m^2 \lambda_2 (A_{12} b_{11} + A_{22} b_{22}) = F$$

$$m^2 \lambda_1 (A_{12} b_{21} + A_{22} b_{22}) = C ; m^2 \lambda_2 (A_{12} b_{12} + A_{22} b_{22}) = K$$

or par hypothese : $s\ddot{y}(s) = s_0 s^4 G^+(s) \cdot G^-(s)$

pour $S\ddot{y}(s) = N^2$ bruit blanc

$$s_0 = N^2 ; G^+(s) \cdot G^-(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{(-s)^2} \Rightarrow G^+(s) = \frac{1}{s^2}$$

d'où

$$\Psi(s) = \left[\begin{array}{l} \frac{B}{s^2(s^2 - \sqrt{2}\omega_1 s + \omega_1^2)} + \frac{C e^{-s\tau}}{s^2(s^2 - \sqrt{2}\omega_1 s + \omega_1^2)} \\ \frac{F}{s^2(s^2 - \sqrt{2}\omega_2 s + \omega_2^2)} + \frac{K e^{-s\tau}}{s^2(s^2 - \sqrt{2}\omega_2 s + \omega_2^2)} \end{array} \right]$$

Etudions la stabilité de $\Psi(s)$

en effet :

$$\frac{B}{s^2(s^2 - \sqrt{2}\omega_1 s + \omega_1^2)} = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{es+d}{s^2 - \sqrt{2}\omega_1 s + \omega_1^2}$$

après identification on trouve :

$$\begin{aligned} a &= \frac{B}{\omega_1^2} \\ b &= -e = \frac{B\sqrt{2}}{\omega_1^3} \\ d &= \frac{A}{\omega_1^2} \end{aligned}$$

et par suite :

$$\left[\frac{B}{s^2(s^2 - \sqrt{2}\omega_1 s + \omega_1^2)} \right]^+ = \frac{B/\omega_1^2}{s^2} + \frac{B\sqrt{2}/\omega_1^3}{s}$$

$$\left[\frac{c e^{-zs}}{s^2(s^2 - \sqrt{2}\omega_1 s + \omega_1^2)} \right]^+ = \frac{c/\omega_1^2 e^{-zs} + \frac{c\sqrt{2}}{\omega_1^3} e^{-zs}}{s^2} + \left[\frac{-c\sqrt{2}/s + c/\omega_1^2}{s^2 - \sqrt{2}\omega_1 s + \omega_1^2} \right]^+$$

$$\frac{-c\sqrt{2} s + \frac{c}{\omega_1^2}}{\omega_1^3 s^2 - \sqrt{2}\omega_1 s + \omega_1^2} = \frac{a + jb}{s - (1+j)\sqrt{\omega_1} s \omega_1} + \frac{e + jd}{s - (1-j)\sqrt{\omega_1} s \omega_1}$$

après identification on trouve :

$$a = e = -\frac{c\sqrt{2}}{2\omega_1^3}$$

$$b = d = 0$$

donc :

$$\frac{-c\sqrt{2} s + \frac{c}{\omega_1^2}}{\omega_1^3 s^2 - \sqrt{2}\omega_1 s + \omega_1^2} e^{-zs} = -\frac{c\sqrt{2}}{2\omega_1^3} \left[\frac{e^{-zs}}{s - (1+j)\sqrt{\omega_1} s \omega_1} + \frac{e^{-zs}}{s - (1-j)\sqrt{\omega_1} s \omega_1} \right]$$

et comme :

$$\left[\frac{e^{j\omega z}}{(j\omega - \alpha)^n} \right]^+ = \frac{e^{j\omega z}}{(j\omega - \alpha)^n} - \frac{e^{\alpha z}}{(j\omega - \alpha)^n} \sum_{\beta=0}^{n-1} \frac{z^\beta (j\omega - \alpha)^\beta}{\beta!}$$

pour $\text{Re}[\alpha] > 0$

$$z \leq 0$$

$$\left[\frac{-c\sqrt{2}}{\omega_1^3} s + \frac{c}{\omega_1^2} e^{-2s} \right]^+ = -\frac{c\sqrt{2}}{2\omega_1^3} \left[\frac{e^{-2s} - e^{-(1+j)\sqrt{\omega_1^2} z}}{s - (1+j)\sqrt{\omega_1^2} z} + \frac{e^{-2s} - e^{-(1-j)\sqrt{\omega_1^2} z}}{s - (1-j)\sqrt{\omega_1^2} z} \right] =$$

$$= \frac{-c\sqrt{2}}{2\omega_1^3} \frac{(e^{-2s} - e^{-(1+j)\sqrt{\omega_1^2} z})(s - (1-j)\sqrt{\omega_1^2} z) + (e^{-2s} - e^{-(1-j)\sqrt{\omega_1^2} z})(s - (1+j)\sqrt{\omega_1^2} z)}{s^2 - \sqrt{2}\omega_1 s + \omega_1^2} =$$

$$= \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$N(s) = -\frac{c\sqrt{2}}{2\omega_1^3} \left\{ s \left[(e^{-2s} - e^{-(1+j)\sqrt{\omega_1^2} z}) + (e^{-2s} - e^{-(1-j)\sqrt{\omega_1^2} z}) \right] + \right.$$

$$\left. + ((j+1)\sqrt{\omega_1^2} z) (e^{-2s} - e^{-(1+j)\sqrt{\omega_1^2} z}) + (-1-j)\sqrt{\omega_1^2} z (e^{-(1-j)\sqrt{\omega_1^2} z} - e^{-2s}) \right\}$$

$$N(s) = -\frac{c\sqrt{2}}{2\omega_1^3} \left\{ s (2e^{-2s} - 2e^{-\sqrt{\omega_1^2} z} \cos \sqrt{\omega_1^2} z) - \sqrt{\omega_1^2} z (2e^{-2s} - 2e^{-\sqrt{\omega_1^2} z} \cos \sqrt{\omega_1^2} z) \right.$$

$$\left. \times (\cos \sqrt{\omega_1^2} z - \sin \sqrt{\omega_1^2} z) \right\}$$

on pose $\frac{N(s)}{D(s)} = H_{01}^+(s)$

d'où :

$$\left[\frac{c e^{-2s}}{s^2 (s^2 - \sqrt{2}\omega_1 s + \omega_1^2)} \right]^+ = \frac{c/\omega_1^2}{s^2} e^{-2s} + \frac{c\sqrt{2}/\omega_1^3}{s} e^{-2s} + H_{01}^+(s)$$

où $H_{01}^+(s) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow 0$

en fin :

$$\left[\frac{B}{s^2(s^2 - \sqrt{2}\omega_1 s + \omega_1^2)} + \frac{c e^{-2s}}{s^2(s^2 - \sqrt{2}\omega_1 s + \omega_1^2)} \right]^+ =$$

$$\frac{B/\omega_1^2 + \frac{B\sqrt{2}}{\omega_1^3} s + \left(c/\omega_1^2 + \frac{c\sqrt{2}}{\omega_1^3} s \right) e^{-2s}}{s^2} + H_{01}^+(s)$$

$$= \frac{(B + c e^{-2s}) \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{\sqrt{2}}{\omega_1^3} s \right)}{s^2} + H_{01}^+(s)$$

de la même manière on trouve :

$$\left[\frac{F}{s^2(s^2 - \sqrt{2}\omega_2 s + \omega_2^2)} + \frac{k e^{-2s}}{s^2(s^2 - \sqrt{2}\omega_2 s + \omega_2^2)} \right]^+ =$$

$$= \frac{F/\omega_2^2 + \frac{F\sqrt{2}}{\omega_2^3} s + \left(k/\omega_2^2 + \frac{k\sqrt{2}}{\omega_2^3} s \right) e^{-2s}}{s^2} + H_{02}^+(s)$$

$$= \frac{(F + k e^{-2s}) \left(\frac{1}{\omega_2^2} + \frac{\sqrt{2}}{\omega_2^3} s \right)}{s^2} + H_{02}^+(s)$$

avec $H_{02}^+(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

et $N(s) = -\frac{k\sqrt{2}}{2\omega_2^3} \left\{ s \left[\left(e^{-2s} - e^{-(1+j)\sqrt{\omega_2} s \omega_2^2} \right) + \left(e^{-2s} - e^{-(1-j)\sqrt{\omega_2} s \omega_2^2} \right) \right] + \right.$

$$\left. + \left((j+1)\sqrt{\omega_2} s \omega_2^2 \right) \left(e^{-2s} - e^{-(1+j)\sqrt{\omega_2} s \omega_2^2} \right) + \left((-1-j)\sqrt{\omega_2} s \omega_2^2 \right) \left(e^{-2s} - e^{-(1-j)\sqrt{\omega_2} s \omega_2^2} \right) \right\}$$

$D(s) = s^2 - \sqrt{2}\omega_2 s + \omega_2^2$; $H_{02}^+(s) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow 0$

$\psi^+(s)$ est donné donc par :

$$\psi^+(s) = \begin{vmatrix} \frac{(B + ce^{-2s})\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{\sqrt{2}}{\omega_1^3}s\right) + H_{01}^+(s)}{s^2} \\ \frac{(F + Ke^{-2s})\left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{\sqrt{2}}{\omega_2^3}s\right) + H_{02}^+(s)}{s^2} \end{vmatrix}$$

et par suite la meilleure caractéristique de transmission est donnée par (4.7.3) donc :

$$H^+(s) = [D^+(s)]^{-1} \psi^+(s) [G^+(s)]^{-1}$$

où $H^+(s) = \begin{vmatrix} H_1^+(s) \\ H_2^+(s) \end{vmatrix}$; $G^+(s) = 1/s^2 \Rightarrow [G^+(s)]^{-1} = s^2$

$$[D^+(s)]^{-1} = \frac{1}{L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12}} \begin{vmatrix} L_{22} & -L_{12} \\ -L_{21} & L_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [s^2 + \sqrt{2}\omega_1 s + \omega_1^2]^{-1} & 0 \\ 0 & [s^2 + \sqrt{2}\omega_2 s + \omega_2^2]^{-1} \end{vmatrix}$$

en fin :

$$\begin{vmatrix} H_1^+(s) \\ H_2^+(s) \end{vmatrix} = \frac{1}{L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12}} \begin{vmatrix} L_{22} & -L_{12} \\ -L_{21} & L_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{(B + ce^{-2s})\left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{\sqrt{2}}{\omega_1^3}s\right) + s^2 H_{01}^+(s)}{s^2 + \sqrt{2}\omega_1 s + \omega_1^2} \\ \frac{(F + Ke^{-2s})\left(\frac{1}{\omega_2^2} + \frac{\sqrt{2}}{\omega_2^3}s\right) + s^2 H_{02}^+(s)}{s^2 + \sqrt{2}\omega_2 s + \omega_2^2} \end{vmatrix}$$

4.7.2 : Cas particulier

$$L_1 = L_2 = \frac{L}{2}$$

$$\beta = 0,5$$

$$J_0 = i^2 m \quad ; \quad i^2 = L_1 L_2$$

Les différentes expressions précédentes deviendront donc :

$$A_1 = \frac{1}{m} + \frac{L_1^2}{J_0} = \frac{2}{m} \quad ; \quad \theta_1 = 4\lambda_1$$

$$A_2 = \frac{1}{m} + \frac{L_2^2}{J_0} = \frac{2}{m} \quad ; \quad \theta_2 = 4\lambda_2$$

$$A_{12} = 0 \quad ; \quad \theta = 0$$

$$b_{11} = 8\lambda_1 \quad L_{11} = 16\lambda_1$$

$$b_{22} = 8\lambda_2 \quad L_{22} = 16\lambda_2$$

$$b_{12} = 0 \quad L_{12} = 0$$

$$b_{21} = 0 \quad L_{21} = 0$$

$$f_1^2 = f_2^2 = f^2 = 4\beta^2 = 1$$

$$B = m^2 \lambda_1 (b_{11} A_1 + b_{12} A_{12}) = 16m \lambda_1^2$$

$$K = m^2 \lambda_2 (A_{12} b_{12} + A_2 b_{22}) = 16m \lambda_2^2$$

$$C = m^2 \lambda_2 (A_1 b_{21} + A_{12} b_{22}) = 0$$

$$F = m^2 \lambda_1 (A_1 b_{21} + A_{12} b_{22}) = 0$$

Les meilleures caractéristiques de transmission pour ce cas particulier sont données par :

$$\begin{vmatrix} H_1^+(s) \\ H_2^+(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{L_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{22}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{B \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{\sqrt{2}}{\omega_1^3} s \right)}{s^2 + \sqrt{2} \omega_1 s + \omega_1^2} \\ \frac{K \left(\frac{1}{\omega_2^2} + \frac{\sqrt{2}}{\omega_2^3} s \right) e^{-sZ} + s^2 H_{02}^+(s)}{s^2 + \sqrt{2} \omega_2 s + \omega_2^2} \end{vmatrix}$$

$$\text{avec } L_{11} = 16\lambda_1 \quad B = 16m\lambda_1^2$$

$$L_{22} = 16\lambda_2 \quad K = 16m\lambda_2^2$$

$$\begin{vmatrix} H_1^+(s) \\ H_2^+(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{m\lambda_1 \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{\sqrt{2}}{\omega_1^3} s \right)}{s^2 + \sqrt{2} \omega_1 s + \omega_1^2} \\ \frac{m\lambda_2 \left(\frac{1}{\omega_2^2} + \frac{\sqrt{2}}{\omega_2^3} s \right) e^{-sZ} + s^2 H_{02}^+(s)}{s^2 + \sqrt{2} \omega_2 s + \omega_2^2} \end{vmatrix}$$

$$\text{ou } H_{02}^+(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\text{avec } N(s) = -\frac{m\lambda_2\sqrt{2}}{2\omega_2^3} \left\{ \left(2e^{-2s} - e^{-\sqrt{0,5}\omega_2 z} \cdot e^{\cos\sqrt{0,5}\omega_2 z} \right) - \sqrt{0,5}\omega_2 \left(2e^{-2s} - e^{-\sqrt{0,5}\omega_2 z} \right) \times \left(\cos\sqrt{0,5}\omega_2 z - \sin\sqrt{0,5}\omega_2 z \right) \right\}$$

$$D(s) = s^2 + \sqrt{2}\omega_2 s + \omega_2^2$$

et comme $w_1^4 = 2d_1$ et $w_2^4 = 2d_2$

$$H_1^+(s) = \frac{m(\sqrt{2}w_1s + w_1^2)}{2(s^2 + \sqrt{2}w_1s + w_1^2)}$$

$$H_2^+(s) = \frac{m(\sqrt{2}w_2s + w_2^2)e^{-2s} + s^2 H_{03}^+(s)}{2(s^2 + \sqrt{2}w_2s + w_2^2)}$$

4.7.3: Calcul des dispersions $\sigma_{z_1-y_1}^2$ et $\sigma_{z_2-y_2}^2$ pour une excitation de type bruit blanc

a) Dispersion $\sigma_{z_1-y_1}^2$

$$\sigma_{z_1-y_1}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{1}{s^2} \left(\hat{H}_1 A_1 - \hat{H}_2 E(s) A_{12} - 1 \right) \Big|_{s_1}^2 ds$$

avec $A_1 = \frac{2}{m}$; $A_{12} = 0$ et $\hat{H}_1 = H_1$

$$S\ddot{y}_1(s) = \sigma_0^2 = \text{Constante}$$

$$\sigma_{z_1-y_1}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{1}{s^2} \left(H_1 A_1 - 1 \right) \Big|_{s_1}^2 ds$$

$$H_1 = \frac{\sqrt{2} \omega_1 s + \omega_1^2}{s^2 + \sqrt{2} \omega_1 s + \omega_1^2}$$

$$\sigma_{z_1-y_1}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{-1}{s^2 + \sqrt{2} \omega_1 s + \omega_1^2} \right| \sigma_0^2 ds$$

d'après la table d'intégrale on aura

$$\frac{\sigma_{z_1-y_1}^2}{\sigma_0^2} = \frac{C_1^2 d_0 + C_0^2 d_2}{2 d_0 d_1 d_2}$$

où $C_0 = 1$

$$d_1 = \sqrt{2} w_1$$

$$d_2 = 1$$

$$d_0 = w_1^2$$

d'où

$$\frac{\sigma_{z_1-y_1}^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{2\sqrt{2} w_1^3}$$

$$\text{avec } w_1 = (2\lambda_1)^{1/4} \Rightarrow \frac{\sigma_{z_1-y_1}^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{2^{9/4} \lambda_1^{3/4}}$$

b) Dispersion $\sigma_{z_2-y_2}^2$

$$\sigma_{z_2-y_2}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{1}{s^2} (\hat{H}_1 A_{12} + A_2 \hat{H}_2 E(s) - E(s)) \right|^2 S_{\tilde{y}_1}(s) ds$$

$$A = \frac{2}{m}; \quad A_{12} = 0 \quad \text{et} \quad \hat{H}_2 E(s) = H_2$$

$$S_{\tilde{y}_1}(s) = \sigma_0^2 = \text{Constante.}$$

$$\sigma_{z_2-y_2}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{1}{s^2} (A_2 H_2 - E(s)) \right|^2 S_{\tilde{y}_1} ds$$

$$\text{avec } H_2 = \frac{m(\sqrt{2} w_2 s + w_2^2) e^{-2s} + s^2 H_{03}^+(s)}{2(s^2 + \sqrt{2} w_2 s + w_2^2)}$$

$$\text{où } H_{03}^+(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$N(s) = -\frac{m\gamma_2 \sqrt{2}}{2\omega_2^3} \left\{ 1 \left(2e^{-z} - e^{-\sqrt{0,5}\omega_2 z} \cdot 2 \cos \sqrt{0,5}\omega_2 z \right) - \sqrt{0,5}\omega_2 \left(2e^{-z} - 2e^{-\sqrt{0,5}\omega_2 z} \right) \times \left(\cos \sqrt{0,5}\omega_2 z - \sin \sqrt{0,5}\omega_2 z \right) \right\}$$

$$D(s) = s^2 - \sqrt{2}\omega_2 s + \omega_2^2$$

$$\sigma_{z_2-\gamma_2}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{-s^2 + 2e^{-\sqrt{0,5}\omega_2 z} \left[\left(\sqrt{0,5}\omega_2 \cos \sqrt{0,5}\omega_2 z s - 0,5\omega_2^2 (\cos \sqrt{0,5}\omega_2 z - \sin \sqrt{0,5}\omega_2 z) \right) \right]}{s^4 + \omega_2^4} \sigma_0^2 ds$$

$$\text{or } |s^4 + \omega_2^4|^2 = s^8 + 2s^4\omega_2^4 + \omega_2^8$$

$$s^8 + 2s^4\omega_2^4 + \omega_2^8 = d(s) d(-s)$$

$$d(s) = As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E$$

$$d(-s) = As^4 - Bs^3 + Cs^2 - Ds + E$$

Après identification on trouve :

$$A = 1$$

$$B = 2\sqrt{2}\omega_2$$

$$C = 4\omega_2^2$$

$$D = 2\sqrt{2}\omega_2$$

$$E = \omega_2^4$$

$$\text{donc } d(s) = s^4 + 2\sqrt{2}\omega_2 s^3 + 4\omega_2^2 s^2 + 2\sqrt{2}\omega_2^3 s + \omega_2^4$$

d'après la table d'intégrale on trouve :

$$\frac{\sigma_{z_2-\gamma_2}^2}{\sigma_0^2} = \frac{c_2^2 d_0 d_1 d_4 + (c_1^2 - 2c_0 c_2) d_0 d_3 d_4 + c_0^2 (-d_1 d_4^2 + d_1 d_3 d_4)}{2d_0 d_4 (-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)}$$

$$\text{ou } C_2 = -1$$

$$C_1 = 2e^{-\sqrt{0,5}w_2 z} (\sqrt{0,5}w_2 \cos\sqrt{0,5}w_2 z)$$

$$C_0 = -0,5w_2^2 (\cos\sqrt{0,5}w_2 z - \sin\sqrt{0,5}w_2 z)$$

$$d_4 = 1; d_3 = 2\sqrt{2}w_2; d_2 = 4w_2^2; d_1 = 2\sqrt{2}w_2^3; d_0 = w_2^4$$

Pour calculer la valeur de z constante de temps on a dressé le tableau suivant pour certains types de Voiture

| Type de Voiture | $L = L_1 + L_2$ (m) | V km/h | V m/h | $z = \frac{L}{V}$ |
|-----------------|---------------------|----------|---------|-------------------|
| BX16 CITROEN | 2,655 | 50 | 13,88 | 0,19 |
| LNA CITROEN | 2,230 | 80 | 22,22 | 0,10 |
| KADETT (G.S) | 2,420 | 120 | 33,33 | 0,07 |

on prendra la valeur moyenne de z

$$\text{d'où } z = \frac{0,19 + 0,10 + 0,07}{3} = 0,121$$

$$\text{Alors : } C_1 = 2e^{0,085w_2 z} (\sqrt{0,5}w_2 \cos 0,085w_2 z)$$

$$C_0 = -0,5w_2^2 (\cos 0,085w_2 z - \sin 0,085w_2 z)$$

$$\text{d'où } \frac{\sigma_{z_2 - y_2}^2}{\sigma_0^2} = \frac{2\sqrt{2}w_2^4 + (C_1 + 2C_0)2\sqrt{2}w_2^2 + C_0^2 6\sqrt{2}}{64w_2^7}$$

avec $\omega_2^4 = 2\lambda_2$

$$\frac{\sigma_{z_1-y_1}^2}{\sigma_0^2} = \frac{4\sqrt{2}\lambda_2 + (C_1 - 2C_0)2\sqrt{2}(2\lambda_2)^{2/4} + C_0 6\sqrt{2}}{64(2\lambda_2)^{7/4}}$$

Un programme a été élaboré pour représenter les variations de $\sigma_{z_1-y_1}^2$ et $\sigma_{z_2-y_2}^2$ en fonction de $\lambda_i = \lambda_0 \frac{\rho}{1-\rho}$ avec $\lambda_0 = 1$ [unités] la variation de λ_i de 0 à ∞ équivaut à la variation de ρ de 0 à 1. A partir de la figure représentative de $\sigma_{z_1-y_1}^2$ et $\sigma_{z_2-y_2}^2$, on remarque, que quand λ tend vers l'infini ($\rho \rightarrow 1$) $\sigma_{z_1-y_1}^2$ et $\sigma_{z_2-y_2}^2$ tendent vers zéro ce qui explique la meilleure Vibro-isolation.

PROGRAMME POUR CALCULER I1 et I4

```

20 PRINT TAB(5);"R";TAB(25);"I1";TAB(40);"I4"
30 PRINT:PRINT
40 L0=1
50 FOR R=.05 TO .95 STEP .05
60 L=L0*R/(1-R)
65 H=2^(3/4)*L^(3/4)
70 W=(2*L)^(1/4)
80 C1=2*EXP(-.085*W)*SQR(.5)*W*COS(.085*W)
90 C0=-.5*W^2*(COS(.085*W)-SIN(.085*W))
100 I1=1/H
110 I4=(2*SQR(2)*W^4+(C1^2+2*C0)*2*SQR(2)*W^2+C0^2*6*SQR(2)*W)/(64*W^7)
120 PRINT TAB(5);R;TAB(20);I1;TAB(35);I4
130 NEXT R
140 END

```

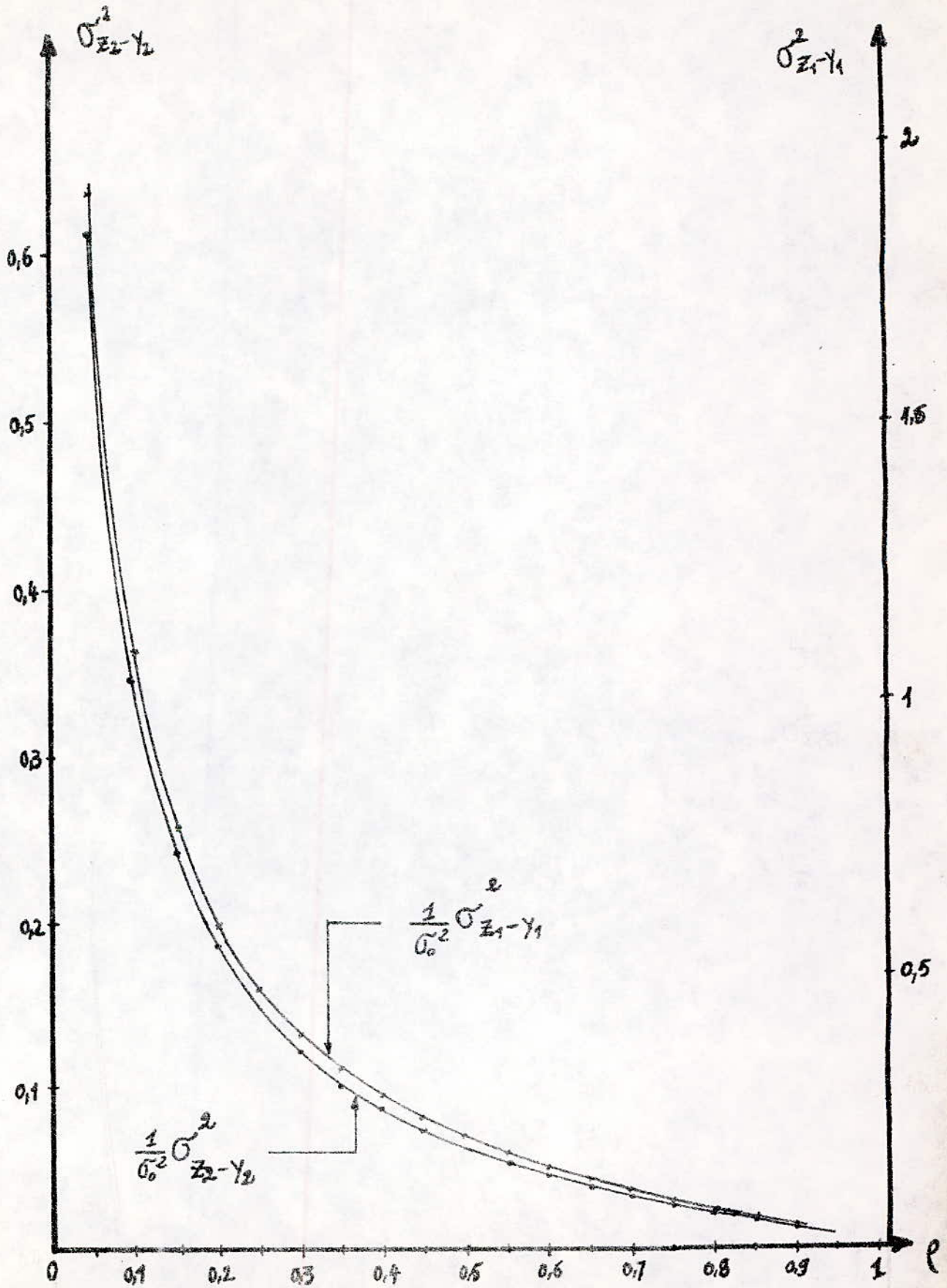
RESULTATS

$$R = \rho$$

$$I1 = \frac{\sigma_{z_1 - y_1}^2}{\sigma_0^2}$$

$$I4 = \frac{\sigma_{z_2 - y_2}^2}{\sigma_0^2}$$

| | | |
|--------------|--------------|--------------|
| .05 | 1.913145 | .5372665 |
| 9.999999E-02 | 1.092357 | .3124983 |
| .15 | .7721087 | .2236242 |
| .2 | .5946038 | .1738874 |
| .25 | .4792075 | .1412941 |
| .3 | .3968856 | .1178771 |
| .35 | .3344389 | 9.999694E-02 |
| .4 | .2849385 | 8.573491E-02 |
| .45 | .2443686 | 7.397443E-02 |
| .5 | .2102242 | .0640163 |
| .55 | .1808506 | 5.539653E-02 |
| .6 | .1551009 | 4.779121E-02 |
| .65 | .1321444 | 4.096618E-02 |
| .7000001 | .1113525 | 3.473902E-02 |
| .7500001 | 9.222351E-02 | 2.896352E-02 |
| .8000001 | 7.432545E-02 | 2.350959E-02 |
| .8500001 | .0572383 | 1.824488E-02 |
| .9000001 | 4.045763E-02 | 1.300078E-02 |



CONCLUSION

La théorie de Wiener-Hopf nous a permis de trouver deux systèmes de Vibro-isolation optimum d'un système solide à deux degrés de liberté représentant ainsi la carrosserie d'une automobile tout en se basant sur les hypothèses suivantes :

- Nos systèmes de Vibro-isolation sont linéaires
- les spectres de fréquence d'excitation sont connus

2) Dans cette étude on a tenu compte que des vibrations verticales mais en réalité, il y a des mouvements et oscillations de la carrosserie dans les trois directions de l'espace.

Ces mouvements et oscillations sont provoqués principalement par les irrégularités de la chaussée, l'excentricité des roues et d'autres forces (d'accélération, de freinage etc....)

3 Une fois on a trouvé le système d'équations donnant les deux fonctions de transferts $H_1(s)$ et $H_2(s)$ qui décrivent nos deux systèmes de Vibro-isolation, l'étude de la stabilité de ces deux fonctions nous a posé un peu de difficulté du fait qu'elle nécessite une théorie matricielle poussée

3) la structure du système à Vibro-isolation dépend de l'objet à Vibro-isoler. En général, la réalisation physique des systèmes de Vibro-isolation peut être obtenue par combinaison de systèmes

de systemes actifs et passifs.

Dans le cas ou l'excitation est du type bruit blanc c.a.d la densité spectrale est une constante et l'objet à Vibro-isoler est un corps rigide comme dans notre cas d'étude, le systeme optimum de Vibro-isolation est un systeme passif dont les parametres sont exprimé en fonction de $\rho(\lambda)$ multiplicateur de L

Pour le bruit couleur on obtient en principe des systemes de V.I actifs (c.a.d qui doivent être réalisés par les éléments actifs)

4) Vu que nous sommes limités par le temps et dans le but de simplification des Calculs et de possibilités d'interprétation; Nous avons Determiné H_1 et H_2 pour le cas particulier.

BIBLIOGRAPHIE

1. V.A SVETLICKIJ
Vibration Aléatoire des systemes mecaniques
traduit du russe par Albert Goubalt
2. V.V Solodovnikov
Dynamique statistique des systemes lineaires de
Commande automatique
Dunod: (Paris 1965)
3. J. STER. J. de BARBEYRAC. R. POGGI
Methodes pratiques D'étude des Fonctions Aleatoires
Dunod: 1967 (Paris)
4. G.C Newton. Jr. L.A. Gould. JF. Kaiser
ANALYTICAL DESIGN OF LINEAR FEEDBACK CONTROLS
5. P.B. ПОТЕНБЕРГ
МОДЕЛЬСКА АВТОМОБИЛНА МЕХАНИКА 1972
6. Marek Ksiazek et C. Ahrikenchci kh
Vibro-isolation optimum des excitation stochastiques
7. Marek Ksiazek et Z. Boutaghov
Vibro-isolation optimum d'une structure mecanique soumise
à des excitations stochastiques au voisinage d'un dispositif
de localisation
Promotion ENPA Juin 84

