

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

Département d'Electronique

**Projet de Fin d'Etudes**  
pour l'obtention du diplôme  
**d'Ingénieur d'Etat en Electronique**

Présenté par :

BENYOUCEF Mohamed Ali

Thème :

**METHODES DE LOCALISATION DE SOURCES DU SECOND  
ORDRE : METHODES HAUTE RESOLUTION ET METHODES  
AVEUGLE**

Proposé et dirigé par :

M BELOUHRANI Adel

Professeur

ENP

M BOURENNANE Salah

Professeur

Institut Fresnel/ EGIM

Septembre 2006

## ملخص

هذه الدراسة تخص طرق التعيين الفضائي للينابيع. نهتم بدراسة الطرق الكلاسيكية عالية التدقيق القائمة علي المعرفة الهندسية للشبكة و الطرق القائمة علي التعريف الاعمي بدون معارف لازمة للهندسة. تتطرق في الاخير الي دراسة نوعي الرق تبعاً لمؤشرات متعددة.

**كلمات مفتاحية :** الطرق العالية التدقيق, التعريف الأعمى, تعيين الينابيع, زوايا السقوط.

## Résumé

Cette étude concerne les méthodes de localisation spatiale de sources. Nous y étudions les méthodes classiques à Haute Résolution (HR) basées sur la connaissance de la géométrie du réseau et les méthodes basées sur une étape d'identification aveugle sans connaissances de la géométrie nécessaire. Nous confrontons à la fin de l'études les performances des deux types de méthodes suivant plusieurs paramètres.

Mots clés : Méthodes HR, identification aveugle, localisation de sources, DOA.

## Abstract :

This paper concerns the source localization problem. We will expose two kinds of methods: the High Resolution methods, based on the knowledge of the array geometry, and Blind Identification Localization methods without necessary array geometry knowledge. We will compare their results versus different parameters.

Keywords : High Resolution methods, blind identification, source localization, DOA

# Remerciements

Je tiens à remercier d'abord et avant tout mes chers parents sans qui je n'aurais jamais pu arriver jusque là. Merci pour votre amour, votre présence et pour votre soutien continue. J'espère que je vous rendrai de plus en plus fiers, je vous suis extrêmement reconnaissant. Je suis fier de vous. Je remercie ma soeur et mes frères que j'aime plus que tout. Je vous souhaite tout le bonheur que vous méritez.

Je remercie tous mes amis proches et moins proches. Merci pour votre aide précieuse et pour les moments bon et moins bons qu'on a traversé ENSEMBLE.

Je remercie chaleureusement tous les enseignant de l'ENP qui ont accompli leur noble devoir avec passion et conviction, malgré les conditions difficiles, et qui nous ont transmis (à moi et à beaucoup d'autres) leurs passion et volonté à faire évoluer les choses.

Je remercie Pr. Belouchrani pour m'avoir offert l'opportunité de faire mon stage à l'étranger et à Pr. Bourennane de m'avoir si bien accueilli et dirigé.

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>v</b>
<b>Abréviations</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités</b>	<b>3</b>
1.1 Modèle paramétrique et règle d'estimation . . . . .	3
1.1.1 Modèle paramétrique certain ou statistique . . . . .	3
1.1.2 Performances des règles d'estimation à paramètre $\theta =$ $\Theta$ donné . . . . .	5
1.1.3 Approche bayésienne : valeurs possibles du paramètre à observation donnée . . . . .	5
1.1.4 Règles d'estimation optimales dans l'approche bayésienne	6
1.2 Modèle d'observation . . . . .	7
1.2.1 Expression explicite de $\mathbf{a}(\theta_i)$ . . . . .	10
1.2.2 Cas particuliers : Capteurs omnidirectionnels et réseau linéaire uniforme . . . . .	11
1.3 Variété d'antenne ou <i>Array Manifold</i> . . . . .	11
1.4 Schémas de principe des deux groupes de méthodes de locali- sation . . . . .	14
<b>2 Méthodes à Haute Résolution</b>	<b>16</b>
2.1 Introduction aux méthodes HR . . . . .	16

2.1.1	Terminologie des méthodes HR . . . . .	17
2.1.2	Traitement classique : formation de voie . . . . .	18
2.2	MULTIPLE SIGNAL CLASSIFICATION (MUSIC) . . . . .	19
2.2.1	Modèle d'observation . . . . .	19
2.2.2	Principe de la méthode . . . . .	20
2.3	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique (ESPRIT) . . . . .	25
2.3.1	Géométrie du réseau . . . . .	26
2.3.2	Modèle d'observation . . . . .	27
2.3.3	Principe d'ESPRIT - l'approche de l'invariance . . . . .	28
2.4	Méthode du Weighted Subspace Fitting (WSF) . . . . .	32
2.4.1	Problème d'ajustement de sous-espaces (subspace fitting) . . . . .	32
2.4.2	Méthode de localisation WSF . . . . .	34
	Conclusion . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Localisation après identification aveugle</b>	<b>38</b>
3.1	Identification aveugle : Principes . . . . .	39
3.1.1	Mélange instantané . . . . .	39
3.1.2	Indéterminations . . . . .	39
3.2	Second Order Blind Identification : SOBI . . . . .	40
3.2.1	Statistiques utilisées . . . . .	40
3.2.2	Principe du Blanchiment . . . . .	41
3.2.3	Principe d'identification aveugle par SOBI . . . . .	42
3.2.4	Diagonalisation conjointe approchée . . . . .	44
3.2.5	Résumé de la méthode SOBI . . . . .	45
3.3	Méthodes d'estimations des DOAs à partir de l'identification aveugle . . . . .	46
3.3.1	Technique de balayage (scanning technique) . . . . .	46
3.3.2	Méthode de l'ajustement aveugle d'espaces (blind sub- space fitting method) . . . . .	46
3.4	Avantages des méthodes de localisation après identification aveugle . . . . .	48

Conclusion . . . . .	49
<b>4 Étude de performances</b>	<b>50</b>
4.1 Conditions des simulations effectuées . . . . .	50
4.1.1 Critère d'évaluation des performances . . . . .	50
4.1.2 Signaux utilisés . . . . .	51
4.1.3 Géométrie du réseau de capteurs . . . . .	52
4.2 Résultats des simulations . . . . .	53
4.2.1 Précision . . . . .	53
4.2.2 Résolution . . . . .	60
4.3 Discussion . . . . .	65
Conclusion . . . . .	67
<b>Conclusion générale</b>	<b>68</b>
<b>Tables des figures</b>	<b>70</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>73</b>

# Notations

Dans ce document on utilise les notations suivantes :

$a$	Les scalaires sont notés par des minuscules.
$\mathbf{a}$	Les vecteurs sont notés par des minuscules en gras.
$a_i$	$i$ -ième composante du vecteur $\mathbf{a}$ .
$\mathbf{a}^T$	Transposé du vecteur $\mathbf{a}$ .
$\mathbf{a}^*$	Transposé conjugué du vecteur $\mathbf{a}$ .
$\mathbf{A}$	Les matrices sont notées par des majuscules en gras.
$\mathbf{A}_{ij}$	$(ij)$ -ième élément de la matrice $\mathbf{A}$ .
$\mathbf{A}^T$	Transposée de la matrice $\mathbf{A}$ .
$\mathbf{A}^H$	Transposée conjuguée de la matrice $\mathbf{A}$ .
$\mathbf{A}^\dagger$	Pseudo-inverse de la matrice $\mathbf{A}$ .
$tr(\mathbf{A})$	Trace de la matrice $\mathbf{A}$ .
$\mathbf{I}_n$	Matrice identité de dimension $n \times n$ .
$\text{diag}\{\mathbf{a}\}$	Matrice diagonale dont la diagonale est le vecteur $\mathbf{a}$ .
$E[.]$	Espérance mathématique.
$\mathfrak{R}\{\mathbf{A}\}$	Espace engendré par les colonnes de la matrice $\mathbf{A}$ .
$\text{Re}[.]$	Partie réelle.

# Abréviations

SNR	Signal-to-Noise Ration.
DOA	Direction-Of-Arrival.
HR	Haute Résolution.
MUSIC	MUltiple SIgnal Classification.
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique.
WSF	Weighted Subspace Fitting.
SOBI	Second Order Blind Identification.
BSF	Blind Subspace Fitting.
BST	Blind Scanning Technique.
MSE	Mean Square Error.
PSK	Phase Shift Keying.
FSK	Frequency Shift Keying.



# Introduction

Le traitement d'antenne (array signal processing en anglais) concerne le problème d'extraction d'informations à partir d'une série de mesures faites par un réseau de capteurs distribués dans l'espace. L'intérêt du traitement d'antenne réside dans le nombre important d'applications où des signaux sont mesurés en plusieurs points de l'espace et du temps. Le problème d'estimation de paramètres à partir de ces mesures se rencontre dans des domaines tels que le radar, la communication radio et micro-onde, l'acoustique sous-marine, la géophysique...etc, [10].

Nous traitons dans ce travail le problème de la localisation de sources. Il pourrait être formulé de la manière suivante : disposant d'un réseau de  $m$  capteurs et observant  $d$  sources statistiquement indépendantes entre elles, l'objectif est l'estimation de leurs angles d'arrivée (Direction-Of-Arrival ou DOA en anglais), c'est-à-dire les angles avec lesquels les sources attaquent le réseau.

Nous étudierons deux familles de méthodes pour la localisation de sources : les méthodes dites à haute résolution (high resolution methods) et les méthodes de localisation après identification aveugle.

La première famille est basée sur la décomposition en sous-espace bruit et signal de l'espace des observations. Toutes ces méthodes supposent une parfaite connaissance de la géométrie du réseau de capteurs. Nous traiterons que certaines méthodes de cette catégorie : MUSIC (méthode référence), ESPRIT (meilleur rapport performance/coût d'implémentation et de calcul) et WSF (meilleures performances). Car le but n'est pas l'étude proprement

dite de ces méthodes devenues déjà classiques mais la confrontation de leurs performances à celles des méthodes de la seconde famille.

Le deuxième groupe de méthode repose sur l'estimation des angles d'arrivée après une identification aveugle des vecteurs direction du réseau de capteurs. Les méthodes d'identification aveugle ont pour intérêt majeur l'identification de la signature spatiale de l'antenne en ne se basant sur aucune information *a priori*. L'estimation des DOAs se base sur la signature spatiale estimée en premier temps afin de fournir la localisation des sources en deuxième temps. Il est évident que les performances de ces méthodes dépendent aussi bien de celles des méthodes d'identification aveugle que de celles des méthodes d'estimation des DOAs après identification.

Durant le reste de ce chapitre, nous introduisons les hypothèses communes à la plupart des méthodes ainsi que la formulation du problème et les outils mathématiques indispensables à sa résolution. Le chapitre II abordera les méthodes de traitement d'antennes dites à Haute Résolution. Nous y étudierons leurs différents principes, hypothèses et algorithmes. De même nous étudierons la seconde famille de méthodes dans le chapitre III. Enfin, le long du chapitre IV nous discuterons les performances des différentes méthodes en se basant sur les résultats des simulations obtenus.

# Chapitre 1

## Généralités

Avant de nous approfondir dans le sujet attardons nous un peu sur les modèles et les règles d'estimation en général, puisque le coeur de notre problème est avant tout l'estimation. Nous rappelons, dans ce qui suit, quelques propriétés des estimateurs.

### 1.1 Modèle paramétrique et règle d'estimation

#### 1.1.1 Modèle paramétrique certain ou statistique

Dans le cas certain, un modèle est une application de l'espace des paramètres ( $\theta$ ), de dimension  $K$ , dans l'espace des observations ( $\mathbf{x}$ ) de dimension  $M$ .

Cette relation pourra être inversée exactement si l'application est injective, donc, en particulier, si la matrice  $\frac{\partial x}{\partial \theta}$  est de rang  $K$  pour tout  $\theta$ . On peut donner comme exemple le cas d'un signal formé d'une somme d'exponentielles, en l'absence de bruit.

En pratique, ne serait-ce que par la présence de bruit d'observation, la

relation est toujours de type stochastique. Il y a une infinité de valeurs possibles pour  $\mathbf{x}$  à  $\theta$  donné, caractérisé par la densité de probabilité  $p_{\mathbf{x}/\theta}(\mathbf{x}, \theta)$ . Le *modèle de l'observation* n'est autre qu'une façon de spécifier cette densité de probabilité, [9]. On peut donner comme exemple la représentation d'un signal stationnaire comme la sortie d'un filtre autorégressif excité par un bruit blanc gaussien : la densité de probabilité d'un enregistrement  $\mathbf{x}$  de  $M$  points consécutifs du processus peut être entièrement spécifiée à partir des coefficients du filtre, qui constituent le vecteur  $\theta$ .

Une telle relation stochastique n'est bien évidemment pas inversible exactement. Connaissant  $\mathbf{x}$ , l'observateur devra choisir, selon une règle précise, une valeur estimée  $\hat{\theta}$  qu'il souhaite le plus proche possible de  $\theta$ . Cette *règle d'estimation* est une application  $\hat{\theta} = r(\mathbf{x})$  de l'espace d'observation dans l'espace des paramètres, dont on souhaite optimiser les performances. Cf. figure (1.1).

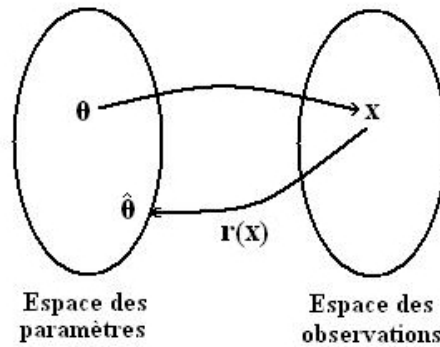


FIG. 1.1: Estimation paramétrique

Le choix de la règle d'estimation repose sur la connaissance du modèle de l'observation. Si le modèle utilisé est imparfait, il en résulte une *erreur de modèle* supplémentaire qu'il faut savoir évaluer. Une telle erreur s'introduit en particulier quand on utilise un développement paramétrique avec un ordre (dimension de vecteur de paramètre  $\theta$ ) trop faible.

### 1.1.2 Performances des règles d'estimation à paramètre $\theta = \Theta$ donné

Pour  $\theta = \Theta$  donné, l'observation  $\mathbf{x}$  est aléatoire avec la densité  $p_{\mathbf{x}/\Theta}$ . Pour une règle  $\hat{\theta} = r(\mathbf{x})$  donnée,  $\hat{\theta}$  devient lui même aléatoire avec une densité  $p_{\hat{\theta}/\Theta}(\hat{\theta}, \Theta)$ , se déduisant de  $p_{\hat{\theta}/\Theta}(\cdot)$  et de  $r(\cdot)$ .

La règle d'estimation sera d'autant meilleure que la densité de  $\hat{\theta}$  sera concentrée autour de la vraie valeur  $\Theta$ . On caractérise cette dispersion par le biais,  $\delta_\theta$ , et la variance,  $D_\theta$ , moments du premier et du second ordre de  $\hat{\theta} - \Theta$  :

$$\delta_\theta = \bar{\theta} - \Theta, \quad \bar{\theta} = E_x\{\hat{\theta}\} \quad (1.1)$$

$$D_\theta = E_x\{(\hat{\theta} - \bar{\theta})(\hat{\theta} - \bar{\theta})^T\} \quad (1.2)$$

Comme nous le verrons plus loin, l'estimation est en général faite à partir de  $N$  observations élémentaires  $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(N)$  indépendantes. Parmi les propriétés souhaitables pour un estimateur, on peut citer<sup>1</sup>, [9] :

- Estimateur sans biais : si  $\delta_\theta = 0 \forall \Theta$
- Estimateur consistant : si  $\delta_\theta$  et  $D_\theta$  tendent vers 0 quand  $N \rightarrow \infty, \forall \Theta$

### 1.1.3 Approche bayésienne : valeurs possibles du paramètre à observation donnée

Au paragraphe précédent, nous avons introduit les notions de biais et variance en raisonnant à  $\theta = \Theta$  donné, sans hypothèse sur la distribution à *priori* des paramètres. Dans l'approche bayésienne, on suppose que les paramètres  $\theta$  sont aléatoires, distribués avec une densité de probabilité  $p_\theta(\theta)$

---

<sup>1</sup>Nous avons omis délibérément la propriété d'efficacité, propriété qui implique que la variance est minimale, i.e. égale à une borne inférieure théorique appelée Borne de Cramer-Rao. L'étude de performances ultérieure ne se fera pas dans ce sens.

(*probabilité a priori*). On peut alors introduire la probabilité conjointe de  $\mathbf{x}$  et de  $\theta$ , soit  $p_\theta(\mathbf{x}, \theta)$ .

A partir de là on peut déterminer la probabilité *a posteriori*  $p_{\theta/x}(\mathbf{x}, \theta)$ , traduisant la distribution des valeurs possibles de  $\theta$ , correspondant à une observation donnée  $\mathbf{x}$ . En effet, la probabilité conjointe se factorise de la façon suivante :

$$p(x, \theta) = p_{x/\theta}(\mathbf{x}, \theta) \cdot p_\theta(\theta) = p_{\theta/x}(\mathbf{x}, \theta) \cdot p_x(\mathbf{x}) \quad (1.3)$$

d'où l'expression suivante de la densité de probabilité du paramètre, sachant l'observation  $\mathbf{x}$  :

$$p_{\theta/x}(\mathbf{x}, \theta) = p_{x/\theta}(\mathbf{x}, \theta) \cdot \frac{p_\theta(\theta)}{p_x(\mathbf{x})} \quad (1.4)$$

Notons que pour  $\mathbf{x}$  donné  $p_x(\mathbf{x})$  est une constante.  $p_{x/\theta}(\mathbf{x}, \theta)$ , considérée comme une fonction de  $\theta$ , est appelée *vraisemblance* de  $\theta$ . Notons également qu'en l'absence d'information sur  $p_\theta(\theta)$  il est possible de déterminer l'équation (1.4).

### 1.1.4 Règles d'estimation optimales dans l'approche bayésienne

La connaissance, par (1.4), de la densité de probabilité du paramètre  $\theta$ , sachant l'observation  $\mathbf{x}$ , est à la base de la détermination de règles d'estimation  $\hat{\theta} = r(\mathbf{x})$  'optimales'. On peut citer les règles suivantes, par degré de sophistication croissant :

- maximum de vraisemblance :

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \{p_{x/\theta}(\mathbf{x}, \theta)\} \quad (1.5)$$

- maximum de probabilité *a posteriori* :

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \{p_{\theta/x}(\mathbf{x}, \theta)\} \quad (1.6)$$

Très souvent ces méthodes sont lourdes à mettre en oeuvre, [9]. De plus, elles nécessitent la connaissance des différentes densité de probabilité des paramètres et observations. Les méthodes traitées utiliseront des règles approchées, réalisant un compromis entre précision et complexité, et n'auront aucunement besoin de la connaissance des densités de probabilité.

Après avoir présenté les différentes propriétés de l'estimation en générale et quelques règles d'estimation optimales, passons à la modélisation du problème en traitement d'antenne en général.

## 1.2 Modèle d'observation

Les données sont collectées à partir d'un réseau de capteur. L'objectif est de localiser des sources, supposées ponctuelles et émettant de l'énergie détectable par les capteurs (Fig. 1.2).

Mathématiquement, un tel problème est assez simple à modéliser sous certaines hypothèses, [10] :

- Le milieu de transmission est supposé *isotrope et non dispersif* impliquant une propagation *en ligne droite* du rayonnement ;
- Les sources sont dans la région du *champ lointain* du réseau. Par conséquent, le rayonnement appliqué à celui-ci est la somme d'*ondes planes* ;
- On supposera que le problème est *plan* ce qui réduira l'espace de paramètres de localisation à un sous-ensemble monodimensionnel de  $\mathbf{R}$  ;
- Les signaux sont des réalisations d'un processus à *bande étroite* ayant la même fréquence centrale.
- Les signaux sont indépendants. Les bruits sont indépendants des si-

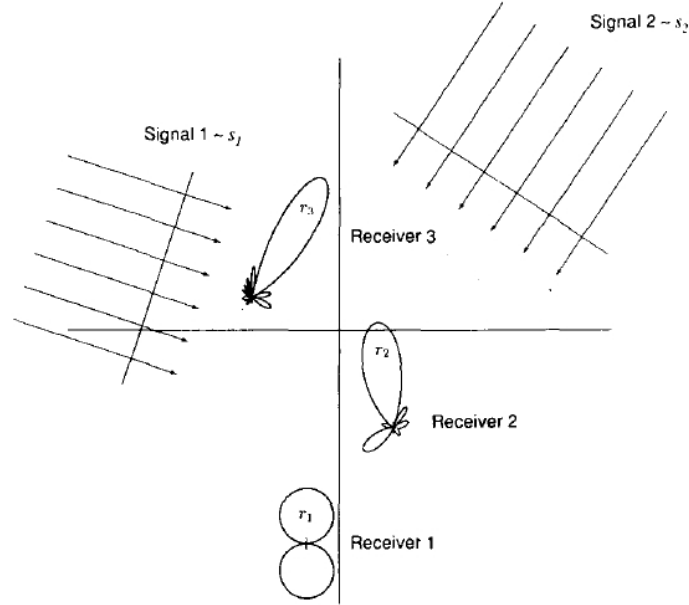


FIG. 1.2: Schéma général d'un réseau de capteurs passifs. Capteurs de directivités différentes et réseau de géométrie spatiale arbitraire.

gnaux et sont équidistribués gaussiens.

Dans ce cadre, le  $i$ -ième signal peut être écrit comme suit :  $\tilde{s}_i(t) = u_i(t) \cos(\omega_0 t + v_i(t))$ , où  $u_i(t)$  et  $v_i(t)$  sont des fonctions qui varient *lente-ment*<sup>2</sup> en fonction du temps, définissant l'amplitude et la phase de  $\tilde{s}_i(t)$ , respectivement. Pour de tels signaux, il est plus aisé d'utiliser la représentation en *enveloppe complexe* où

$$\tilde{s}_i(t) = \text{Re}\{s(t)\}, s(t) = u_i(t)e^{(\omega_0 t + v_i(t))} \quad (1.7)$$

Notons que l'hypothèse de sources à bandes étroites implique que  $u(t) \approx u(t - \tau)$  et  $v(t) \approx v(t - \tau)$  pour tout retard de propagation  $\tau$ , ayant pour effet de rendre n'importe quel retard temporel, sur la réception des signaux,

<sup>2</sup>Cette définition sous-entend que l'approximation  $\tilde{s}_i(t - \tau_k) \approx u_i(t) \cos(\omega_0 t + v_i(t))$  est valide. Et donc que les variations des amplitude et phase du signal en fonction de la position de la source dans l'espace, à un instant  $t$  fixé, sont *négligeables* le long de tout le réseau de capteurs.



simplement un décalage de phase, i.e., [10] :

$$s(t - \tau) \approx s(t)e^{-j\omega_0\tau} \quad (1.8)$$

L'observation résultante  $x_k(t)$ , le signal complexe de sortie du  $k$ -ième capteur à l'instant  $t$ , en absence de bruit, peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \sum_{i=1}^d a_k(\theta_i) s_i(t - \tau_k(\theta_i)) \\ &= \sum_{i=1}^d a_k(\theta_i) s_i(t) e^{-j\omega_0\tau_k(\theta_i)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

où  $\tau_k(\theta_i)$  est le retard de propagation, entre un point de référence et le  $k$ -ième capteur, du  $i$ -ième front d'onde attaquant le réseau à partir de la direction  $\theta_i$ ;  $a_k(\theta_i)$  correspond à la réponse complexe (gain et phase) du capteur  $k$  aux fréquence  $f_0$  et angle d'arrivée  $\theta_i$ . Le nombre de signaux, et donc d'angles d'arrivée, est supposé être  $d$  et *connu*.

Toujours en absence de bruit, en notation vectorielle, la sortie des  $m$  capteurs peut s'écrire de la façon suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^d \mathbf{a}(\theta_i) s_i(t), \quad (1.10)$$

où

$$\mathbf{a}(\theta_i) = [a_1(\theta_i)e^{-j\omega_0\tau_1(\theta_i)}, \dots, a_m(\theta_i)e^{-j\omega_0\tau_m(\theta_i)}]^T, \quad (1.11)$$

est appelé vecteur directionnel ou vecteur de base. Il est la réponse du réseau à la direction  $\theta_i$ . Posons  $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_d)]$  et  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_d(t)]^T$ . En considérant du bruit additif, *le modèle d'observation* pour le problème de traitement d'antenne de signaux à bande étroite est :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (1.12)$$

Il est à noter que  $\mathbf{x}(t), \mathbf{b}(t) \in \mathbf{C}^m$

### 1.2.1 Expression explicite de $\mathbf{a}(\theta_i)$

Nous avons vu plus haut que  $\mathbf{a}(\theta_i)$  représente la réponse du réseau de capteurs à une fréquence et angle d'arrivée donnés, (voir l'équation 1.11). Dans ce qui suit, nous essaierons de mettre en évidence l'expression du retard  $\tau_j(\theta)$  et de  $a_k(\theta)$ . Ce qui nous permettra par la suite de mettre en évidence quelques cas particuliers.

Comme nous l'avons compris les  $a_k(\theta)$  sont les réponses individuelles des capteurs, elles dépendent de leurs formes, excitations, natures,...etc. C'est ce qu'on pourrait assimiler à un terme multiplicatif près à la *directivité* du capteur  $k$ ; elle dépend naturellement (comme le montre son expression) de la position de la source. Des capteurs omnidirectionnels, par exemple, réduirait les  $a_k(\theta)$  à l'unité.

Quant au retard  $\tau_j(\theta)$  son expression est donnée par la théorie des réseaux d'antennes [1]. En effet, résultant de l'hypothèse d'ondes planes, le retard  $\tau_j(\theta)$  est dû à la disposition spatiale des antennes (capteurs), et donc à la géométrie du réseau en entier. Il ne dépend nullement des capteurs individuellement mais plutôt de l'ensemble qu'ils forment. Il s'écrit en fonction du vecteur d'onde  $\vec{k}$  contenant des informations sur la fréquence de la porteuse ainsi que sur la position de la source. Il s'écrit, également, en fonction du vecteur position du capteur  $j$ ,  $\vec{r}_j$ , par rapport à une référence :

$$e^{-j\vec{k}(\theta_i) \cdot \vec{r}_j} = e^{-j\omega_0 \tau_j(\theta_i)}, \quad (1.13)$$

où  $i = 1, d$  représente l'indice de la source et  $j = 1, m$  l'indice du capteur. L'expression du retard de propagation est donnée donc par :

$$\tau_j(\theta_i) = \frac{1}{\omega_0} \vec{k}(\theta_i) \cdot \vec{r}_j(\theta_i) \quad (1.14)$$

Connaissant les expressions générales de  $\tau_j(\theta)$  et de  $a_k(\theta)$  à présent, attardons-nous sur un cas particulier fort intéressant qui nous sera utile tous le long de notre étude, c'est le cas où les capteurs sont omnidirectionnels et le réseau linéaire uniforme.

### 1.2.2 Cas particuliers : Capteurs omnidirectionnels et réseau linéaire uniforme

L'étude théorique que nous exposerons par la suite ne se restreindra pas à des cas particulier, au contraire nous y essaierons d'être le plus général possible. Néanmoins, pour des soucis de simplicité l'étude expérimentale sera basée essentiellement sur ce cas particulier.

Dans le cas où tous les capteurs sont omnidirectionnels, nous avons noté que les termes  $a_k(\theta)$  seraient tous égaux à l'unité. Et donc la réponse du réseau (son vecteur directionnel) dépendra seulement de la position des sources et de la disposition des capteurs (géométrie du réseau), et non plus de la nature intrinsèque des capteurs.

D'autre part, si en plus le réseau est constitué de capteurs disposés linéairement à intervalle régulier (voir figure (1.3), [6]) on aurait un réseau linéaire uniforme (*Uniform Linear Array* ou ULA en anglais) le retard  $\tau_j(\theta)$  aura une expression simple, résultat du développement suivant<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} \vec{k}(\theta_i) \cdot \vec{r}_j(\theta_i) &= k \cdot (1 - j) \mathbf{d} \cdot \sin(\theta) \\ \frac{2\pi}{\lambda} (1 - j) \mathbf{d} \sin(\theta) &= 2\pi f \tau_j(\theta) \\ \tau_j(\theta) &= (1 - j) \frac{\mathbf{d}}{c} \sin(\theta) \end{aligned} \quad (1.15)$$

où  $\mathbf{d}$  est la distance entre deux capteurs consécutifs. Le vecteur directionnel  $\mathbf{a}(\theta_i)$  d'un tel réseau a pour expression :

$$\mathbf{a}(\theta_i) = [1, \dots, e^{j2\pi(m-1) \frac{\mathbf{d}}{\lambda} \sin(\theta_i)}]^T, \quad (1.16)$$

## 1.3 Variété d'antenne ou *Array Manifold*

Pour introduire ce concept, rappelons le modèle d'observation en absence de bruit  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)s(t)$ . Les vecteurs  $\mathbf{a}(\theta_i) \in \mathbf{C}^m$ , colonnes de  $\mathbf{A}$ , font

---

<sup>3</sup>Il est à préciser que si le réseau est linéaire la source sera localisée grâce à un seul angle

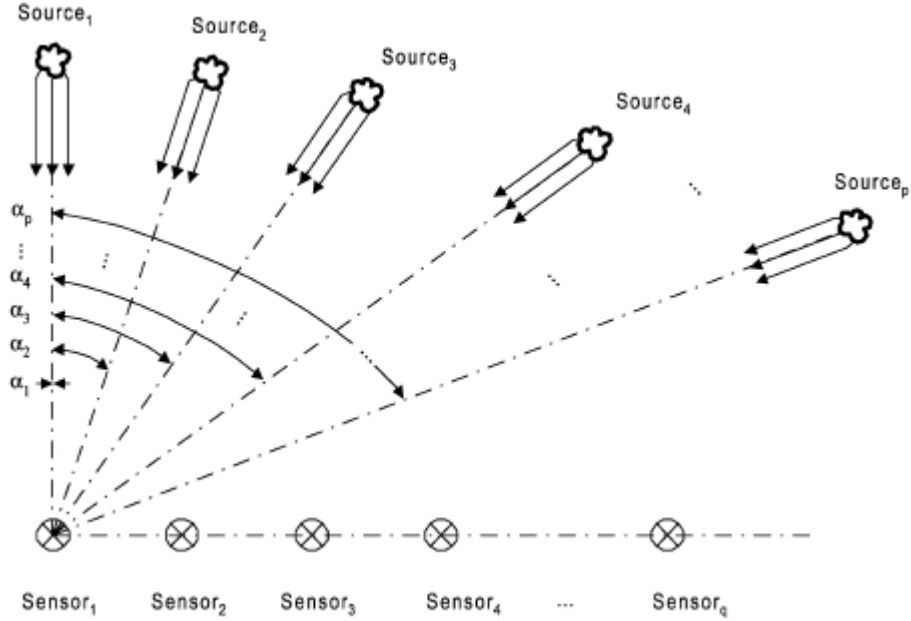


FIG. 1.3: Exemple d'un réseau linéaire uniforme. Noter que le capteur le plus à gauche a été pris comme référence.

tous partie d'un même ensemble, appelé *variété d'antenne*, composé de tous les vecteurs réponses (de direction) du réseau, obtenus en faisant varier le vecteur  $\theta$  sur l'espace des paramètres tout entier. La variété d'antenne est complètement déterminée par les directivités des capteurs et la géométrie du réseau, et peut parfois être calculée analytiquement. Cependant, pour des réseaux complexes qui défient la description analytique, elle peut être obtenue par calibrage (i.e. étalonnage, mesures physiques), [10].

Dans le cas d'une localisation monodimensionnelle (le cas de l'azimut par exemple) la variété d'antenne est une sorte de courbe variant dans  $\mathbf{C}^m$ . Pour l'estimation de l'azimut et du gisement, elle est une surface variant dans  $\mathbf{C}^m$ . Afin d'éviter toute ambiguïté nous supposons que la correspondance entre  $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_d\}$  et  $\Re\{\mathbf{A}(\theta)\}$ , sous-espace engendré par les colonnes de  $\mathbf{A}(\theta)$ , est bijective. Cette propriété doit être assurée lors de la conception du réseau.

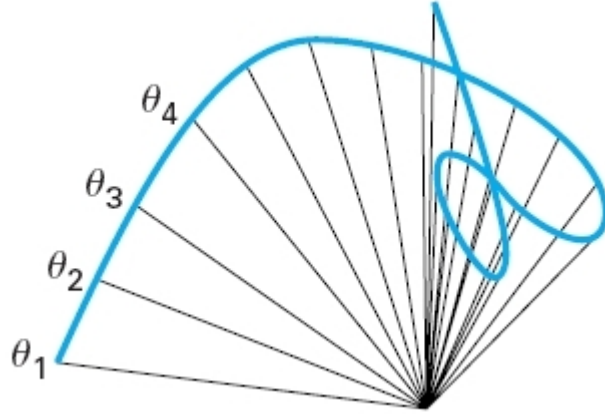


FIG. 1.4: La variété d'antenne décrit la famille des vecteurs sources indexés par leur position

L'observation que l'on pourrait faire est qu'en l'absence de bruit, pour un seul signal, les observations  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}(\theta_1)s_1(t)$  sont confinées dans un sous-espace monodimensionnel, sous-espace de  $\mathbf{C}^m$ , engendré par  $\mathbf{a}(\theta_1)$ . Dans le cas de  $d$  signaux, le vecteur d'observation est contraint à être dans un sous-espace de dimensions  $d$ , appelé *sous-espace signal*, engendré par les vecteurs  $\mathbf{a}(\theta_i)$ , colonnes de  $\mathbf{A}(\theta)$ , voir figure (1.4).

Ces notions sont essentielles à la compréhension de la différence fondamentale entre les deux familles de méthodes étudiée dans ce travail. Les méthodes de traitement d'antennes à haute résolution se basent principalement sur la connaissance de la variété d'antenne et donc de la géométrie du réseau et les directivités des capteurs. Après avoir estimé le sous-espace signal on estime le vecteur qui assure l'intersection entre ce sous-espace là et la variété d'antenne. Ce principe sera développé en détail dans le prochain chapitre. Ces méthodes possèdent de bonnes performances et sont assez simples à implémenter. Cependant, elles sont conditionnées par la connaissance *a priori* des caractéristiques du réseau sous peine de dégradation sérieuse des performances. Cette condition peut être très handicapante dans certains cas, notamment dans le cas de géométries complexes ou dans le cas d'in-

certitudes dans le modèle. Les méthodes d'estimation du vecteur  $\theta$  après identification aveugles de  $A(\theta)$  permettent d'estimer la matrice de transfert sans connaissances *a priori* de la structure du réseau. Leurs principes sont basés uniquement sur les statistiques des observations recueillies à la sortie des capteurs. Les performances de localisation de sources basée sur les méthodes d'identification aveugles dépendent aussi bien de l'identification que de la méthode d'estimation des DOAs utilisée. Ces différents aspects seront détaillés également dans les chapitres suivants.

Maintenant que les principales notions ont été présentées, nous proposons d'exposer les schémas de principe des deux groupes de méthodes.

## 1.4 Schémas de principe des deux groupes de méthodes de localisation

Nous venons de voir plus haut la différence entre les deux approches de localisation. Cependant, les illustrations suivantes permettront de cerner mieux ceci.

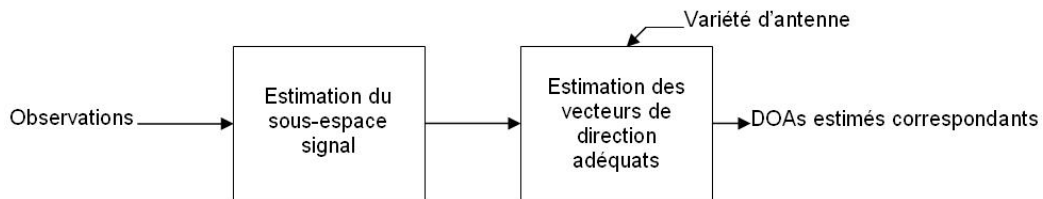


FIG. 1.5: Schéma de principe des méthodes à haute résolution

Comme le montre les figures (1.5) et (1.6), les deux approches se décomposent en deux étapes principales. Les deux étapes diffèrent d'une approche à l'autre. Comme les performances de l'estimation finale (la localisation de source) dépend de tous les calculs dont elle découle, nous les détaillerons dans

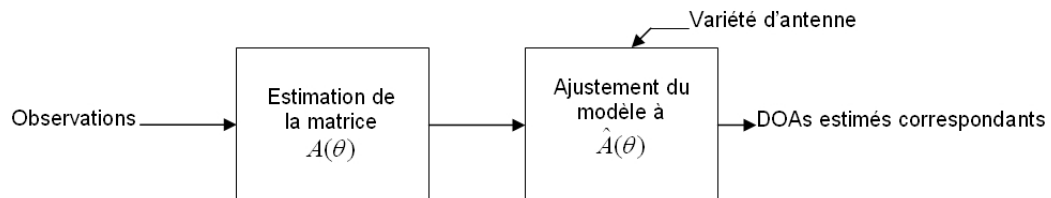


FIG. 1.6: Schéma de principe des méthodes de localisation après identification aveugle

les chapitres correspondants à chaque approche. Il est à noter que chaque étape peut être abordée de différentes façons donnant lieu à différentes variantes de méthodes de localisation.

Nous débutons dans ce qui suit, l'étude des différentes famille de méthode de localisation.

# Chapitre 2

## Méthodes à Haute Résolution

### 2.1 Introduction aux méthodes HR

Avant de débiter l'exposé des principes des quelques méthodes sélectionnées, nous décrirons dans cette introduction quelques unes des étapes significatives de la naissance des méthodes à haute résolution (HR).

Contrairement à certaines découvertes, les méthodes HR ne proviennent pas d'une démarche providentielle, les sources sont nombreuses et correspondent aux préoccupations de plusieurs équipes dans plusieurs disciplines. Si l'on cherche à identifier dans la littérature les frémissements qui ont permis la construction de l'outil technique connu aujourd'hui sous le nom de "méthodes HR", on ne peut que constater le caractère inévitable de leur découverte. La naissance des méthodes HR résulte de la conjonction de quatre éléments principaux, [9] :

- La demande des utilisateurs (surtout marines militaires) pour l'amélioration des performances dans le contexte de la guerre froide finissante (donc avec des contraintes économiques fortes : comment tirer le meilleur parti du matériel existant en améliorant le traitement ?) ;



- Les progrès technologiques divers qui vont permettre à la fois la manipulation en temps réel et l’enregistrement des signaux numérisés ;
- Les progrès de l’informatique embarquée peuvent s’appliquer sans réticences à des traitements beaucoup plus complexes que ceux utilisés par le passé ;
- Le développement généralisé des techniques statistiques en traitement du signal, conduisant à une analyse de plus en plus fine des modélisations et des algorithmes d’estimation et de détection.

### 2.1.1 Terminologie des méthodes HR

L’expression ”méthodes HR” fait référence à un ensemble de techniques dont les performances sont asymptotiquement ”illimitées”. Plus précisément, une méthode HR est une méthode qui permet de mesurer des directions ou même des positions, avec une erreur qui n’est limitée, idéalement, que par la durée d’observation. Par ”idéalement” il faut ici entendre que cette performance asymptotique ne sera atteinte que si la modélisation reste indéfiniment valable, ce qui, bien sûr, n’est pas réaliste d’un point de vue pratique. A ce sujet, on peut déjà remarquer que l’analyse des performances sur des durées finies et en présence d’erreurs de modélisation (biais et variance des estimations en particulier) sera un point indispensable à préciser pour être capable de juger de l’intérêt opérationnel de ces procédés. A l’origine, c’est-à-dire dans les années 1970-80, lorsqu’il était question des méthodes HR, il n’y avait aucune ambiguïté, cette dénomination étant acceptée pour toute méthode permettant d’obtenir une résolution angulaire meilleure que celle du traitement classique (formation de voie). Pourtant cette dénomination s’est révélée rapidement floue et insuffisante avec l’arrivée d’un très grand nombre de techniques permettant d’améliorer la résolution : antenne adaptative (formulation de Widrow ou de Capon), prédiction linéaire (maximum d’entropie), goniomètre (MUSIC), ESPRIT, méthode du propagateur, etc.

On aurait tendance aujourd'hui à réserver le caractère HR aux méthodes dont la résolution asymptotique idéale est infinie, ce qui exclut certains traitements de la liste précédente, comme l'antenne adaptative ou la prédiction linéaire, [9]. On s'intéressera ici qu'aux méthodes qui exploitent directement les signaux reçus par des capteurs et non aux post-traitements exploitant des signaux préalablement traités de manière non réversible (comme les méthodes de déconvolution).

### 2.1.2 Traitement classique : formation de voie

Il existe un traitement éprouvé qui est, encore aujourd'hui, utilisé sur le terrain en dépit de ses limitations, [9].

Ce traitement est généralement nommée "formation de voie classique" (*beamforming* en anglais). Il consiste, pour une direction d'intérêt, à remettre les signaux en phase pour cette direction de consigne puis de les sommer. Cette façon de faire est fondée sur l'espoir que la sommation des signaux remis en phase multipliera l'amplitude du signal utile d'un facteur bien plus important que le facteur d'amplification du bruit, [9]. En fait, il se trouve que, si le signal se trouve bien dans la direction de pointage, et si les bruits sont indépendants et équidistribués gaussiens, la formation de voie classique est justement le traitement optimal d'antenne (pour le critère de maximum de probabilité de détection à probabilité de fausse alarme fixée).

Néanmoins, le traitement classique est un traitement adapté à la détection d'une source ponctuelle *unique* dans un bruit spatialement blanc. Dans toutes autres conditions, on peut dire qu'il est utilisé abusivement. Malgré ces limitations apparentes ce traitement fonctionne de manière satisfaisante dans la pratique en raison de sa très grande robustesse aux erreurs.

Maintenant que nous avons défini les méthodes HR et décrit leur évolution. Nous proposons d'étudier concrètement et en détail quelques méthodes HR.

## 2.2 Multiple Signal Classification (MUSIC)

En 1977, Schmidt [11] a développé l'algorithme MUSIC en abordant le problème d'estimation de paramètre de signaux avec une approche géométrique. Une des révolutions de cet algorithme était son applicabilité à n'importe quelle géométrie de réseau d'antennes. En effet, jusqu'au milieu des années 1970, les techniques de localisation de sources nécessitaient la connaissance de la directivité du réseau sous forme analytique, et la tâche du concepteur d'antenne était de faire la synthèse de réseau possédant des propriétés données. Le travail de Schmidt a soulagé en grande partie les concepteurs de telles contraintes en exploitant la réduction de la complexité obtenue par le calibrage du réseau. En effet, le problème hautement non linéaire du calcul analytique de la réponse du réseau a été réduit à une série de mesure et stockage de réponses. Bien que MUSIC n'ait pas atténué la complexité de calcul des estimées des DOAs, il a étendu l'applicabilité des méthodes de localisation à haute résolution aux réseaux de capteurs à géométries arbitraires, [10].

D'après l'auteur de la méthode [11], le terme MUSIC est " utilisé pour décrire les techniques théoriques et expérimentales concernées dans la détermination des paramètres de multiples fronts d'ondes incidents sur une antenne à partir de mesures prise au niveau de capteurs, éléments de l'antenne. "

### 2.2.1 Modèle d'observation

Rappelons le modèle d'observation de l'équation (1.12) :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t)$$

Les signaux  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{s}(t)$ , observé et émis respectivement, sont des vecteurs colonnes dont les composantes  $s_i(t)$  et  $x_j(t)$  décrivent respectivement le  $i$ -ième signal émis et le  $j$ -ième signal observé. En pratique, ces signaux sont discrétisés et observés sur  $N$  échantillons. Les signaux  $\mathbf{x}_j$  et  $\mathbf{s}_i$  deviennent donc un vecteur ligne contenant  $N$  valeurs chacun décrivant leurs variations

pendant la durée d'observation. Le modèle précédent, pour un échantillon  $n$ , devient donc :

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}\mathbf{s}(n) + \mathbf{b}(n) \quad (2.1)$$

$$\text{avec} \begin{cases} \mathbf{x}(n) &= [x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)]^T \\ \mathbf{s}(n) &= [s_1(n), s_2(n), \dots, s_d(n)]^T \\ \mathbf{b}(n) &= [b_1(n), b_2(n), \dots, b_m(n)]^T \end{cases} \quad (2.2)$$

En regroupant l'ensemble des  $N$  échantillons, nous obtenons le modèle d'observation *matriciel* suivant :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{B} \quad (2.3)$$

$$\text{avec} \begin{cases} \mathbf{X} &= [\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(N)] \\ \mathbf{S} &= [\mathbf{s}(1), \mathbf{s}(2), \dots, \mathbf{s}(N)] \\ \mathbf{B} &= [\mathbf{b}(1), \mathbf{b}(2), \dots, \mathbf{b}(N)] \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{B} \in \mathbf{C}^{m \times N}$ ,  $\mathbf{S} \in \mathbf{C}^{d \times N}$ , et  $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{m \times d}$ .

Nous avons rappelé le modèle d'observation. Nous l'avons réarrangé afin de mieux appréhender le développement mathématique qui découle du principe sur lequel MUSIC est fondée. Le principe de la méthode est exposé dans la section qui suit.

### 2.2.2 Principe de la méthode

Se basant sur les notions introduites à la section (1.3), nous allons détailler dans ce qui suit l'approche de MUSIC pour résoudre le problème de localisation.

Les concepts de sous-espace signal et variété d'antenne permettent une visualisation immédiate de la solution du problème. En absence de bruit, les sorties du réseau de capteurs appartient à un sous-espace de  $\mathbf{C}^m$  de dimension  $d$ , engendré par les colonnes de  $\mathbf{A}$ . Une fois  $d$  vecteurs indépendants observés, le sous-espace signal est complètement connu, et son intersection avec la variété d'antenne donne l'ensemble de vecteurs de celle-ci qui engendrent le sous-espace signal observé. Un exemple est illustré graphiquement à la

figure (2.1), [10]. En supposant que le réseau ait été conçu de façon à ce que l'application reliant les paramètres à la variété d'antenne soit bijective, les paramètres (les angles de localisation) sont alors déterminés immédiatement.

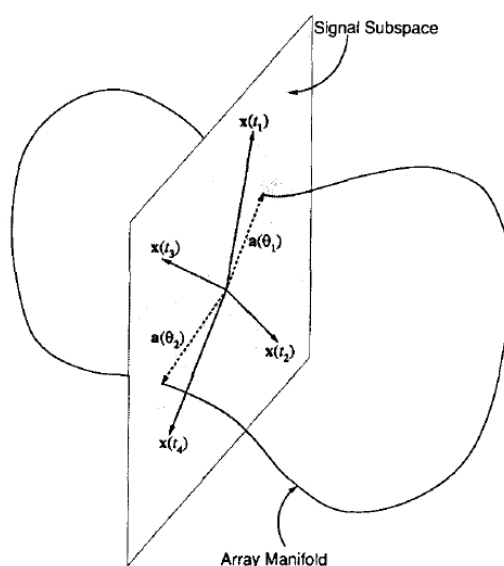


FIG. 2.1: Approche géométrique de MUSIC en absence de bruit, dans le cas d'un réseau à 3 capteurs localisant 2 sources.

Le problème se complique dès que les observations se bruitent. En effet dans ce cas, non seulement l'estimation du sous-espace signal est corrompue et ne peut se faire aussi directement, mais en plus, avec une probabilité unitaire, il n'y a *aucune* intersections. La figure (2.1) pourrait tromper et faire sembler que des intersections existent presque toujours. Les éléments de la variété d'antenne les plus *proches* du sous-espace signal pourrait être considérés comme solutions potentielles ; cependant la définition d'une règle d'évaluation de cette *distance* subsiste.

La solution de Schmidt peut être donc divisée en deux étapes : estimation du sous-espace signal et détermination des  $d$  vecteurs de la variété d'antenne (vecteurs de direction) correspondants.

### Estimation du sous-espace signal

Afin d'obtenir une estimation du sous-espace signal, le critère de moindres carrés (*least-squares* ou *LS*) est le plus souvent utilisé. L'idée est de trouver un ensemble de  $d$  vecteurs qui engendre un sous-espace de  $\mathbf{C}^m$  qui s'ajuste au mieux, au sens des moindres carrés, aux observations. Supposant des signaux et un bruit de moyennes nulles, une méthode découle de l'étude de la matrice de covariance des observations. Si les signaux sont issus d'un processus stochastique stationnaire, décorrélés avec le bruit et de matrice de covariance  $\mathbf{R}_{SS} > 0$ , ou déterministes avec excitation permanente comme hypothèse telle que :

$$\mathbf{R}_{SS} \stackrel{def}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{s}(n)\mathbf{s}^*(n)$$

est supposée définie positive.

Sous ces conditions, la matrice de covariance des observations est donnée par :

$$\mathbf{R}_{XX} \stackrel{def}{=} E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^H\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2.5)$$

L'objectif est de trouver une famille libre de  $d$  vecteurs contenus dans le sous-espace signal, espace généré par les colonnes de  $\mathbf{A}$ . Un tel ensemble de vecteurs est donné par [11] :

$$\mathbf{E}_S = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d]$$

où  $\{\mathbf{e}_i, i = \overline{1, d}\}$  est l'ensemble des *vecteurs propres* de  $\mathbf{R}_{XX}$  correspondant aux  $d$  plus grandes *valeurs propres*. En effet, cela découle directement de la définition. Soit  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$  la matrice diagonale contenant toutes les valeurs propres de  $\mathbf{R}_{XX}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{XX} &= \mathbf{E}\Lambda\mathbf{E}^H \\ \mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} &= \mathbf{E}\Lambda\mathbf{E}^H \\ \mathbf{E}^H\mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}^H\mathbf{E} &= \Lambda - \sigma^2\mathbf{I} \\ \mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}^H &= \mathbf{E}[\Lambda - \sigma^2\mathbf{I}]\mathbf{E}^H \end{aligned} \quad (2.6)$$

Puisque  $\mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}^H$  est une matrice positive et semidéfinie de rang  $d$ , les  $d$  plus importantes valeurs propres de  $\mathbf{R}_{XX}$  sont simplement les  $d$  valeurs propres non nulles de  $\mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}^H$  augmentées de  $\sigma^2$ , et  $\mathfrak{R}\{\mathbf{E}_S\} = \mathfrak{R}\{\mathbf{A}\}$  le sous espace signal. De la même manière, on peut définir

$$\mathbf{E}_N = [\mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_m], \quad (2.7)$$

comme étant l'ensemble des vecteurs propres associés aux  $(m-d)$  plus petites valeurs propres de  $\mathbf{R}_{XX}$ . Elles sont toutes égales à  $\sigma^2$ . Notons que :

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}^H \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(\lambda_i - \sigma^2) \quad (2.8)$$

Si  $\mathbf{e}_i \in \mathbf{E}_N$  il est clair que  $\mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}^H \mathbf{e}_i = 0$  et donc on peut dire que  $\mathfrak{R}\{\mathbf{E}_N\}$  est un sous-espace orthogonal au sous-espace signal. On l'appelle *sous-espace bruit*.

Dans la plupart des cas la covariance exacte requise plus haut est inconnue et doit être estimée à partir des mesures.  $\mathbf{R}_{XX}$  est estimée d'une façon standard par :

$$\hat{\mathbf{R}}_{XX} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^*(n) = 1/N\mathbf{X}\mathbf{X}^H \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{X}$  est la matrice des observations  $m \times N$ . Quand la covariance est estimée à partir de mesures finies, les  $m - d$  plus petite valeurs propres ne sont plus égale à  $\sigma^2$  mais de valeurs éparpillées autour.  $\mathfrak{R}\{\hat{\mathbf{E}}_S\}$  ainsi que  $\mathfrak{R}\{\hat{\mathbf{E}}_N\}$  sont les estimées des sous-espaces signal et bruit respectivement.

### Estimation des paramètres du signal

Comme nous avons expliqué plus haut, en présence de bruit, nous ne pouvons avoir d'intersections entre la variété d'antenne et le sous-espace signal. Il reste donc à définir une règle d'évaluation de distance entre les deux ensembles.

Schmidt [11] a proposé la fonction suivante comme une mesure possible de *proximité* entre un élément de la variété d'antenne et le sous-espace signal estimé :

$$P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^*(\theta)\mathbf{E}_N\mathbf{E}_N^H\mathbf{a}(\theta)} \quad (2.10)$$

En absence de bruit, cette mesure, appelée pseudo-spectre de MUSIC, est infinie aux élément de la variété d'antenne appartenant au sous-espace signal. En présence de bruit, elle présente des pics autour des points les plus proche de ce dernier, point où la variété d'antenne est presque orthogonal au sous-espace signal. Cette propriété est utilisé pour estimé les paramètre des signaux émis.

Malgré sa simplicité et son ingéniosité, cette approche présente plusieurs inconvénients. Premièrement, puisque  $d$  sources sont à localiser il est plus pratique d'estimer  $\{\theta_1, \dots, \theta_d\}$  *simultanément* en maximisant une fonction appropriée plutôt que d'obtenir des estimées une à la fois comme c'est le cas dans la recherche sur tout l'ensemble des paramètre. Une recherche multidimensionnelle<sup>1</sup> augmenterait considérablement la complexité des calculs. Cependant, la recherche monodimensionnelle rend la méthode biaisée en absence de plusieurs sources, dans le cas de temps d'observation fini. De plus, si le SNR est faible et des erreurs de modélisation du réseau de capteurs existent, aussi faibles soient-ils, la capacité du *spectre* de MUSIC à localiser de sources proches (i.e., à observer plusieurs pics dans la mesure) est sérieusement dégradée.

Au final, il est à préciser, que MUSIC est un estimateur asymptotiquement non biaisé [11] puisque à mesure que le nombre d'échantillons devient important, les erreurs d'estimation du sous-espace signal s'évanouissent. Si le bruit est spatialement Gaussien et temporellement indépendant, les distributions des vecteurs propres de la covariance estimée  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$  est asymptotiquement Gaussienne, de moyennes égales aux vrais vecteurs propres et d'écart types tendant vers zéro. C'est pourquoi, le sous-espace signal estimé converge vers le vrai sous-espace signal dans le sens des moindres carrés, de même que les DOAs estimées vers les vrais valeurs [10].

---

<sup>1</sup>La méthode MUSIC présentée ici est appelée *monodimensionnelle* bien que la recherche de vecteur de la variété d'antenne soit multidimensionnelle (dimension 2 pour l'azimut et le site par exemple). La dimension prise en compte ici étant le nombre de sources localisée à la fois.



### Résumé de l'algorithme MUSIC

Ceci est le résumé de l'algorithme MUSIC, décrit plus haut, étape par étape :

1. Collecte des donnée et estimation de  $\mathbf{R}_{XX} \stackrel{def}{=} E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^H\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}$  par  $\hat{\mathbf{R}}_{XX} = 1/N\mathbf{X}\mathbf{X}^H$
2. Décomposition de  $\hat{\mathbf{R}}_{XX}$  en valeurs propres :  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ , et  $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m]$
3. Evaluation de

$$P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^*(\theta)\mathbf{E}_N\mathbf{E}_N^H\mathbf{a}(\theta)}$$

où  $\mathbf{E}_N = [\mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_m]$

4. Détermination des  $d$  plus importants pics de  $P(\theta)$ , estimation des paramètres correspondants (Localisation).

## 2.3 Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique (ESPRIT)

ESPRIT est une méthode de localisation de sources à bandes étroite s'appliquant dans le cas particulier d'un réseau de capteurs constitué de sous-antennes *identiques*, et déduites l'une de l'autre par une *translation* dont le vecteur caractéristique est connu. ESPRIT réalise, à l'inverse de MUSIC, une estimation directe des directions d'arrivée à partir des propriétés de l'espace signal. Cette méthode, lorsqu'elle est applicable, permet d'éviter la recherche numériquement plus lourde des maxima d'une puissance de sortie ou d'une fonction coût, recherche implicitement liée à des algorithmes comme MUSIC. Initialement, c'est vis-à-vis de ce gain de calcul, et de la simplicité d'implémentation qui en résulte, que l'intérêt d'ESPRIT a été formulé. Le succès ultérieur de la méthode et son développement sont toutefois également liés à sa capacité à réaliser la localisation dans des contextes de géométrie

mal connues ou partiellement inconnues, avec de bonnes caractéristiques de robustesse et de performances.

### 2.3.1 Géométrie du réseau

ESPRIT retient les caractéristique les plus importantes des réseaux de capteurs arbitraires, mais réduit considérablement la complexité des calculs en imposant une contrainte concernant la géométrie du réseau. Cette contrainte est facilement décrite par une illustration, voir figure (2.2), [10]. Considérons une réseau plan, de géométrie quelconque, composé de  $m$  capteurs *double*, appelés *doublés*. Les éléments de chaque doublet possèdent des réponses et des directivités identiques, et sont spatialement séparés par le même vecteur de translation  $\Delta$ . Les doublets en eux-même sont arbitraires.

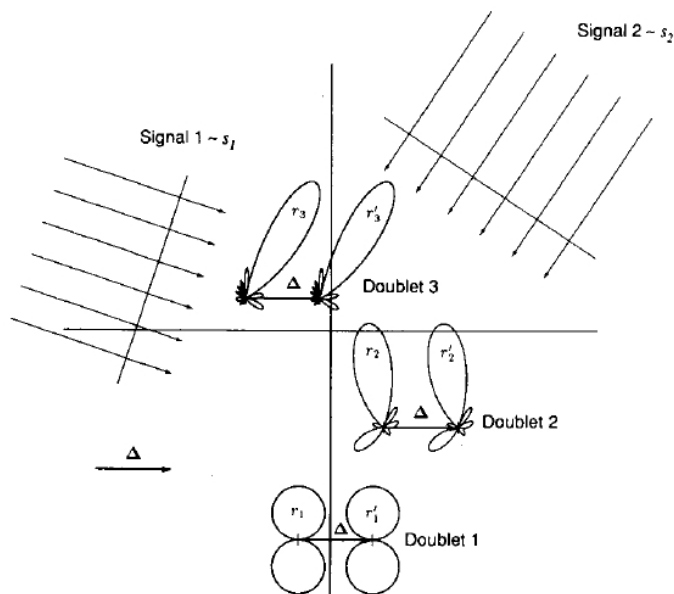


FIG. 2.2: Géométrie générale d'un réseau de capteurs de localisation de sources avec ESPRIT.

### 2.3.2 Modèle d'observation

Toutes les hypothèses faites plus haut sont maintenues. Supposons, en outre, qu'il y ait  $d \leq m$  sources à bandes étroites centrées autour de la fréquence  $\omega_0$ . Afin de décrire mathématiquement l'effet de l'invariance translationnelle du réseau de capteurs, il est plus aisé de décrire le réseau comme étant l'adjonction de deux sous-réseaux,  $Z_x$  et  $Z_y$ , physiquement identiques et décalés l'un de l'autre d'un vecteur  $\Delta$ . Les signaux reçus au  $i$ -ième doublet peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{j=1}^d s_j(t) a_i(\theta_j) + n_{x_i}(t), \\ y_i(t) &= \sum_{j=1}^d s_j(t) e^{j\omega_0 \sin \theta_j / c} a_i(\theta_j) + n_{y_i}(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

où  $\theta_j$  est la direction d'arrivée de la  $j$ -ième source, par rapport à la *direction du vecteur*  $\Delta$ .  $x_i(t)$  et  $y_i(t)$  sont les signaux reçus par les  $i$ -ièmes capteurs de chaque sous-réseau.

En combinant les sorties de tous les capteurs des deux sous-réseaux, les observations peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_x(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{A}\Phi\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_y(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

où  $\Phi$  est une matrice diagonale  $d \times d$ , contenant les décalage de phase entre les éléments des doublets pour les  $d$  fronts d'ondes, et est donnée par :

$$\Phi = \text{diag}\{e^{j\gamma_1}, \dots, e^{j\gamma_d}\} \quad (2.13)$$

où  $\gamma_i = \omega_0 \Delta \sin \theta_i / c$ .

Afin de définir le vecteur de sortie totale du réseau  $\mathbf{z}(t)$ , les sorties des sous-réseaux peuvent être combinées :

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_z(t) \quad (2.14)$$

où :

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}\Phi \end{bmatrix}, \mathbf{n}_z(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_x(t) \\ \mathbf{n}_y(t) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

C'est la structure de  $\bar{\mathbf{A}}$  qui est exploitée afin d'estimer les éléments diagonaux de  $\Phi$  sans pour autant *connaître*  $\mathbf{A}$ .

### 2.3.3 Principe d'ESPRIT - l'approche de l'invariance

ESPRIT est basé sur l'estimation sous-espace signal également. Dans ce cas le sous-espace signal  $\mathbf{E}_S$  pris en compte et celui qui contient les sorties des deux sous-réseau,  $Z_x$  et  $Z_y$ . Les sorties de ces derniers sont confinées dans deux sous-espaces  $\mathbf{E}_X$  et  $\mathbf{E}_Y$  qui sont idéalement les mêmes.

Considérons le résultat suivant : En absence de bruit, le sous-espace signal peut être obtenu, comme on a vu plus haut, en collectant un nombre suffisant de mesure afin de trouver un ensemble *de  $d$  vecteurs observés linéairement indépendants*. Ces vecteurs engendrent le sous-espace de dimension  $d$  engendré par  $\bar{\mathbf{A}}$ . Il peut être déterminé également à partir de la connaissance exacte de la matrice de covariance des observations  $\mathbf{R}_{ZZ} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{SS}\bar{\mathbf{A}}^H + \sigma^2\mathbf{I}$ , dont les  $2m - d$  plus petites valeurs propres sont égales à  $\sigma^2$ . Les vecteurs propres correspondants aux  $d$  plus grandes valeurs propres forment  $\mathbf{E}_S = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d]$  le sous-espace signal. Où  $\Re\{\mathbf{E}_S\} = \Re\{\bar{\mathbf{A}}\}$ .

Puisque  $\Re\{\mathbf{E}_S\} = \Re\{\bar{\mathbf{A}}\}$ , il existe une transformation unique non singulière [10] telle que :

$$\mathbf{E}_S = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{T} \quad (2.16)$$

De plus, la structure du réseau implique que  $\mathbf{E}_S$  est décomposable en  $\mathbf{E}_X \in \mathbf{C}^{m \times d}$  et  $\mathbf{E}_Y \in \mathbf{C}^{m \times d}$  tel que :

$$\mathbf{E}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{T} \\ \mathbf{A}\Phi\mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

ce qui nous permet de voir :

$$\Re\{\mathbf{E}_X\} = \Re\{\mathbf{E}_Y\} = \Re\{\mathbf{A}\} \quad (2.18)$$

Puisque  $\mathbf{E}_X$  et  $\mathbf{E}_Y$  partagent le même espace colonne, le rang de

$$\mathbf{E}_{XY} \stackrel{def}{=} [\mathbf{E}_X | \mathbf{E}_Y] \quad (2.19)$$

est égal à  $d$ , il existe donc une matrice unique ( $d \leq m$ ) de rang  $d$   $\mathbf{F} \in \mathbf{C}^{2d \times d}$  telle que

$$\mathbf{0} = [\mathbf{E}_X | \mathbf{E}_Y] \mathbf{F} = \mathbf{E}_X \mathbf{F}_X + \mathbf{E}_Y \mathbf{F}_Y \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_X (-\mathbf{F}_X [\mathbf{F}_Y]^{-1}) &= \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{E}_X \Psi &= \mathbf{E}_Y \end{aligned} \quad (2.21)$$

où  $\Psi = -\mathbf{F}_X [\mathbf{F}_Y]^{-1}$ . L'équation (2.21) est la base de cette méthode, nous verrons plus loin son importance. En remplaçant  $\mathbf{E}_X$  et  $\mathbf{E}_Y$  par leurs expressions dans l'équation (2.20)

$$\mathbf{0} = \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{F}_X + \mathbf{A} \Phi \mathbf{T} \mathbf{F}_Y \quad (2.22)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{T} \Psi = \mathbf{A} \Phi \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{T} \Psi \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{A} \Phi \quad (2.23)$$

Puisque  $\mathbf{A}$  est de rang  $d$  (réseau correctement conçu, i.e., absence d'ambiguïtés; et sources d'angles d'arrivée différents), on a

$$\mathbf{T} \Psi \mathbf{T}^{-1} = \Phi \quad (2.24)$$

Par conséquent, les valeurs propres de  $\Psi$  doivent être égales aux éléments diagonaux de  $\Phi$ , et les colonnes de  $\mathbf{T}$  représentent ses vecteurs propres. Les DOAs sont estimés par une fonction non linéaire des valeurs propres de l'opérateur  $\Psi$ , opérateurs qui lie (par une rotation) les deux ensembles  $\mathbf{E}_X$  et  $\mathbf{E}_Y$  qui engendrent le même sous-espace signal.

Nous rappelons que le développement qui précédait a été fait *en absence de bruit*. Dès que les mesures sont bruitées le sous-espace signal doit être estimé par  $\hat{\mathbf{E}}_S$  à partir de la matrice de covariance estimée  $\hat{\mathbf{E}}_{ZZ} = 1/N \mathbf{Z} \mathbf{Z}^H$  de la même manière que MUSIC.  $\hat{\mathbf{E}}_S$  en sera donc bruité et l'existence d'une matrice qui vérifiera l'équation (2.20) sera compromise.

Revenons à présent à l'équation (2.21). Elle est de la forme usuelle  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$  où l'on doit estimer  $\mathbf{X}$  qui est dans notre cas  $\Psi$  ( $\mathbf{A}$  serait  $\hat{\mathbf{E}}_X$  et  $\mathbf{B}$  équivalent à  $\hat{\mathbf{E}}_Y$ ). Si on considère que les erreurs de modèle dues au bruit sont toutes contenues dans la matrice  $\mathbf{B}$ , alors la méthode d'estimation optimale est celle suivant le critère des moindres carrés donnée par

$$\hat{\mathbf{X}} = [\mathbf{A}^H \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{B} \quad (2.25)$$

Il est aisé de vérifier que cette estimateur est non biaisé et de variance minimale (efficace). Dans le cas d'ESPRIT, le critère LS (least-squares) peut être formulé comme suit

$$\hat{\Psi}_{LS} = \hat{\mathbf{E}}_X^\dagger \hat{\mathbf{E}}_Y \quad (2.26)$$

Cependant, il est clair que les estimées  $\hat{\mathbf{E}}_X$  et  $\hat{\mathbf{E}}_Y$  sont toutes deux aussi bruitées l'une que l'autre, et donc le critère LS n'est pas tout à fait approprié pour l'estimation de  $\Psi$ . Un autre critère prend en compte le bruit contenu dans chacune des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ . C'est le critère des moindres carrés totales (*total least squares* ou *TLS* en anglais). Ce critère dans notre cas est équivalent à remplacer la matrice nulle dans l'équation (2.20) par une matrice erreur dans la norme de Forbénus, et la minimiser par rapport à  $\Psi$ . La solution s'obtient à partir de la décomposition en valeurs singulières (SVD) de  $[\hat{\mathbf{E}}_X, \hat{\mathbf{E}}_Y]$ , soit :

$$[\hat{\mathbf{E}}_X, \hat{\mathbf{E}}_Y] = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H \quad (2.27)$$

où  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont les matrices  $m \times d$  et  $2d \times d$  des  $d$  vecteurs singuliers gauches et droits correspondant.  $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_d\}$  où  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_d$  sont les  $d$  plus grandes valeurs singulières de la matrice  $[\hat{\mathbf{E}}_X, \hat{\mathbf{E}}_Y]$ . Si on partitionne

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

où  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$  sont des matrices  $d \times d$ , alors la solution suivant le critère TLS est donnée par

$$\hat{\Psi}_{TLS} = \mathbf{V}_1^{-1H} \mathbf{V}_2^H \quad (2.28)$$

Une fois  $\Psi$  estimée (par  $\hat{\Psi}_{LS}$  ou  $\hat{\Psi}_{TLS}$ ), sa diagonalisation donne les éléments diagonaux de  $\Phi$  et les DOAs sont obtenus par :

$$\hat{\theta}_j = \arcsin\left(\frac{c \arg(\hat{\lambda})_j}{\omega_0 \Delta}\right) \quad (2.29)$$

où  $\hat{\lambda}_i$  est la  $i$ -ième valeur propre de  $\hat{\Psi}$ .

Nous venons d'exposer la méthode de localisation ESPRIT ainsi que deux de ses variantes : LS et TLS. Comme nous l'avons vu, cette méthode pallie aux principaux inconvénients de MUSIC. Principalement celui de localiser les sources en une fois de façon numérique et directe. De plus, les calculs sont simplifiés et ceux quelque soit la nature des capteurs constituant le réseau. Cependant, tant qu'il y a une contrainte, aussi minime qu'elle puisse être, l'applicabilité de la méthode restera restreinte. De plus, ESPRIT utilise deux fois plus de capteurs qu'une méthode classique.

### Résumé de l'algorithme

Ceci est le résumé de l'algorithme ESPRIT, décrit plus haut, étape par étape :

1. Collecte des données et estimation de  $\mathbf{R}_{ZZ} \stackrel{def}{=} E\{\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H\} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{R}_{SS}\bar{\mathbf{A}}^H + \sigma^2\mathbf{I}$  par  $\hat{\mathbf{R}}_{ZZ} = 1/N\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H$  ;
2. Décomposition de  $\hat{\mathbf{R}}_{ZZ}$  en valeurs propres ;  $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2m}]$  est l'ensemble de ses vecteurs propres. Évaluation de  $\mathbf{E}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \end{bmatrix}$  ensemble des vecteurs propres correspondants aux plus grandes valeurs propres de  $\hat{\mathbf{R}}_{ZZ}$ , engendrant le sous-espace signal ;
3. Évaluation de  $\hat{\Psi}$  de l'une des façons suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{LS} &= \hat{\mathbf{E}}_X^\dagger \hat{\mathbf{E}}_Y \\ \hat{\Psi}_{TLS} &= \mathbf{V}_1^{-1H} \mathbf{V}_2^H \end{aligned}$$

où  $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$  est la matrice de vecteurs singuliers droits de  $[\hat{\mathbf{E}}_X, \hat{\mathbf{E}}_Y]$  ;

4. Localisation des  $d$  sources par

$$\hat{\theta}_j = \arcsin\left(\frac{c \arg(\hat{\lambda})_j}{\omega_0 \Delta}\right)$$

avec  $j = \overline{1, d}$  et  $\theta_j$  est l'angle d'arrivée de la source par rapport au *vecteur de déplacement*  $\Delta$ .

## 2.4 Méthode du Weighted Subspace Fitting (WSF)

La méthode du WSF est basée, comme la méthode MUSIC, sur les propriétés géométriques de la décomposition spectrale de la matrice de covariance d'observation. Cette méthode consiste à rechercher de manière globale les vecteurs directionnels engendrant *au mieux* un sous-espace proche du sous-espace signal, dans un sens que nous verrons plus loin. Cette recherche globale permet de traiter les signaux cohérents, chose non réalisable avec les méthodes vues précédemment.

### 2.4.1 Problème d'ajustement de sous-espaces (subspace fitting)

**Méthode d'ajustement de sous-espaces de base**

Le problème d'ajustement de sous-espaces est formulé comme suit [15] :

$$\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{T}} = \arg \min_{\mathbf{A}, \mathbf{T}} \|\mathbf{M} - \mathbf{A}\mathbf{T}\|_F^2 \quad (2.30)$$

dans l'équation ci-dessus, la matrice  $m \times q$   $\mathbf{M}$  représente les données et  $\mathbf{T}$  est une matrice  $p \times q$  quelconque. Pour  $\mathbf{A}$  fixée, le minimum par rapport à  $\mathbf{T}$  mesure à quel point les espaces engendrés par  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{M}$  sont en adéquation. L'approche du subspace fitting, estime la matrice  $\mathbf{A}$  telle que ces sous-espaces soient les plus proches possible.



L'optimisation de l'équation (2.30) est linéaire en  $\mathbf{T}$  :

$$\hat{\mathbf{T}} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{M} \quad (2.31)$$

en remplaçant  $\hat{\mathbf{T}}$  par son expression dans l'équation (2.30) nous obtenons l'expression de  $\hat{\mathbf{A}}$  suivante :

$$\hat{\mathbf{A}} = \arg \max_A \text{tr}\{\mathbf{P}_A \mathbf{M} \mathbf{M}^H\} \quad (2.32)$$

où  $\mathbf{P}_A = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$  est la matrice de projection qui projette sur l'espace engendré par les colonnes de  $\mathbf{A}$ .

### Méthode d'ajustement de sous-espaces pondéré (weighted subspace fitting)

Le même problème précédent peut être formulé en remplaçant la norme  $\|\cdot\|_F$  par  $\|\cdot\|_W$  telle que  $\|\mathbf{M}\|_W^2 = \text{tr}\{\mathbf{M} \mathbf{W} \mathbf{M}^H\}$ , ceci explique le terme *pondéré*. Ce qui revient à

$$\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{T}} = \arg \min_{A, T} \|\mathbf{M} - \mathbf{A} \mathbf{T}\|_W^2 \quad (2.33)$$

ceci permet d'obtenir

$$\hat{\mathbf{A}} = \arg \max_A \text{tr}\{\mathbf{P}_A \mathbf{M} \mathbf{W} \mathbf{M}^H\} \quad (2.34)$$

qui est équivalent à

$$\hat{\mathbf{A}} = \arg \min_A \text{tr}\{(1 - \mathbf{P}_A) \mathbf{M} \mathbf{W} \mathbf{M}^H\} \quad (2.35)$$

Il est à noter que les propriétés de l'estimateur  $\hat{\mathbf{A}}$  sont conditionnées par le choix  $\mathbf{W}$ . C'est-à-dire que le choix de  $\mathbf{W}$  rend l'estimateur plus ou moins bon (point de vue biais et variance). Notons également que le choix de  $\mathbf{M}$  permet de choisir l'approche par laquelle on va estimer  $\mathbf{A}$  et donc  $\theta$ . N'oublions pas que le but ultime est de localiser les sources.

### 2.4.2 Méthode de localisation WSF

Nous allons exposer le développement qui mène à la formulation de la localisation de sources utilisant l'ajustement de sous-espace pondéré.

Notons  $q$  le rang de la matrice de corrélation des signaux sources. Dans le cas général où les sources peuvent être corrélés, nous avons  $q \leq d$ . La décomposition spectrale de  $\mathbf{R}_{XX}$  a alors la forme suivante :

$$\mathbf{R}_{XX} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^* = \mathbf{E}_S \Lambda_S \mathbf{E}_S^H + \mathbf{E}_B \Lambda_B \mathbf{E}_B^H \quad (2.36)$$

où :

$$\begin{aligned} \Lambda_S &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q) \\ \mathbf{E}_S &= [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q] \\ \mathbf{E}_B &= [\mathbf{e}_{q+1}, \dots, \mathbf{e}_m] \end{aligned} \quad (2.37)$$

$\Lambda_S$  contient les  $q$  plus grandes valeurs propres distinctes de  $\mathbf{R}_{XX}$ . Il apparaît alors que  $\mathbf{E}_B$  est orthogonal à  $\mathbf{A} \mathbf{R}_S \mathbf{A}^H$ , ce qui revient à dire que  $\mathbf{E}_S$  est contenu dans l'image de  $\mathbf{A}$  :

$$\Re\{\mathbf{E}_S\} \subseteq \Re\{\mathbf{A}(\theta)\} \quad (2.38)$$

Si la matrice de covariance  $\mathbf{R}_S$  est de rang plein (i.e. pas de signaux cohérents) alors  $q = d$ .

La relation précédente montre qu'il existe une matrice  $\mathbf{T}$  de rang plein telle que :

$$\hat{\mathbf{E}}_S = \mathbf{A} \mathbf{T} \quad (2.39)$$

Compte tenu du fait que les observations sont bruitées, il est généralement impossible de trouver un jeu de paramètre  $\theta$  qui vérifie la relation précédente. Il est alors naturel de définir un critère au sens des moindres carrés pondérés tel que :

$$[\hat{\theta}, \hat{\mathbf{T}}] = \arg \min_{A, T} \|\hat{\mathbf{E}}_S - \mathbf{A} \mathbf{T}\|_W^2 \quad (2.40)$$

ceci est de la même forme que la relation (2.33), avec  $\mathbf{M} = \hat{\mathbf{E}}_S$ . Et donc :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} tr\{\mathbf{P}_A^\perp \mathbf{M} \mathbf{W} \mathbf{M}^H\} \quad (2.41)$$

$$= \arg \min_{\theta} V(\theta) \quad (2.42)$$

où  $\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_A$ .

Le choix de la matrice de pondération  $\mathbf{W}$  définit différentes classes d'estimateurs. En particulier, en choisissant  $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ , on retrouve l'estimateur de MUSIC.

La méthode WSF est définie par la matrice de pondération optimale suivante au sens de la variance de l'estimée :

$$\mathbf{W}_{opt} = (\Lambda_S - \sigma^2 \mathbf{I})^2 \Lambda_S^{-1} \quad (2.43)$$

### Résolution numérique

Afin d'estimer  $\hat{\theta}$  la solution de WSF, la fonction (2.42) doit être minimisée sur les  $d$  dimensions du vecteur paramètre  $\theta$ . C'est un problème de moindres carrés non-linéaires. Pour ce genre de problème la solution de Gauss-Newton est adéquate.

Considérons le problème de moindres carrés non-linéaires (2.42) où la fonction à minimiser s'écrit :

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \|\mathbf{P}_A^\perp(\theta) \mathbf{M}\|_F^2 \\ &= tr\{\mathbf{P}_A^\perp(\theta) \mathbf{M} \mathbf{M}^H\} \end{aligned} \quad (2.44)$$

La matrice  $\mathbf{M}$  ci-dessus représente les données. Pour la méthode WSF,  $\mathbf{M} = \hat{\mathbf{E}}_S \mathbf{W}^{1/2}$ . L'estimée est calculée itérativement de la manière suivante :

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \mu_k \mathbf{H}^{-1} V', \quad (2.45)$$

où  $\mu_k$  est le pas,  $\mathbf{H}$  représente le Hessien de la fonction à minimiser  $V$ , et  $V'$  est son gradient. Le Hessien et le gradient sont évalué à chaque itération en

$\theta_k$ . Il est bien connu que la méthode de Newton converge d'autant mieux que la valeur initiale est proche de la valeur réelle.

Un développement mathématique (voir [14]) a abouti aux résultats suivants :

$$V'(\theta) = -2\mathbf{Re}\{\mathit{diag}(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{M}^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D})\}, \quad (2.46)$$

où

$$\mathbf{D}(\theta) = \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_1} \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_d} \mathbf{a}(\theta_d) \right]. \quad (2.47)$$

Le Hessien est donné par :

$$\mathbf{H} = 2\mathbf{Re}\{(\mathbf{D}^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}) \odot (\mathbf{A}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{M}^H \mathbf{A}^{\dagger H})^T\}, \quad (2.48)$$

où  $\odot$  représente la multiplication élément par élément (multiplication D'Adamard).

Le pas  $\mu_k$  doit être choisi de façon à garantir la convergence vers un minimum local. Il doit assurer également une diminution significative de la fonction à minimiser à chaque itération.

Il est à noter que cette solution s'adapte à n'importe quel problème de moindres carrés non-linéaires de cette forme. Nous y reviendrons notamment à la section (3.3) à la méthode d'ajustement aveugle de sous-espaces.

## Conclusion

Nous avons traité dans ce chapitre quelques méthodes de localisation à haute résolution (HR). Nous avons vu comment ces méthodes se basent sur l'estimation du sous-espace signal à partir de la matrice de covariance des observations. En premier nous avons exposé MUSIC. Cette méthode est la pionnière dans sa catégorie. Elle a permis, non seulement, d'obtenir une résolution meilleure le traitement classique (formation de voie) mais surtout de localiser plusieurs sources grâce à un réseau de capteurs de géométrie arbitraire. On a vu par la suite la méthode ESPRIT. Cette méthode a le privilège de simplifier les calculs impliqués dans la localisation mais aussi de donner les estimées des DOAs directement, chose qui n'est pas possible avec

MUSIC. D'ailleurs, elle présente de meilleures performances, comme nous le verrons plus loin. Cependant, elle repose sur une restriction (mineure certes) sur la géométrie du réseau de capteurs. Elle nécessite, de plus, un nombre plus élevé (le double) de capteurs. Enfin, la méthode WSF a été exposée. Cette dernière, comme nous l'avons plus haut, présente les meilleures performances, point de vue biais et variance des estimées. De plus ses performances ne se dégradent pas en présence de signaux corrélés (présence de multitrajets par exemple). Ce qui n'est pas du tout le cas des deux autres méthodes. En effet leurs performances se dégradent sérieusement dès qu'il y a présence de signaux corrélés. Il est très important de noter que toutes ces méthodes nécessitent une connaissance parfaite de la variété d'antenne, et donc de la géométrie du réseau.

## Chapitre 3

# Localisation après identification aveugle

Nous allons traiter un nouveau concept de localisation de sources, consistant à estimer les directions d'arrivée des sources après une étape d'identification en aveugle de leurs vecteurs directeurs. Un tel concept est maintenant envisageable grâce en particulier au développement, ces quinze dernières années, de méthodes de séparation aveugle de sources dont certaines, qualifiées d'indirectes, passent par une étape d'identification des vecteurs directeurs des sources.

La plupart des techniques de traitement d'antenne reposent sur la modélisation de  $\mathbf{A}$  : chaque colonne est supposée dépendre d'un certain nombre de paramètres. Cette information peut être fournie soit par une modélisation physique (par exemple quand la géométrie du réseau d'antennes est connue et les sources dans la région du champ lointain de celui-ci) ou par un calibrage direct. Cependant, souvent ces informations ne sont pas disponibles ou digne de foi.

L'identification aveugle consiste à identifier  $\mathbf{A}$  en ne se basant sur aucune information *a priori*, et ce en exploitant que les informations statistiques contenues dans les signaux reçus, d'où le terme aveugle (ou parfois autodidacte), [3]. Les performances de l'identification aveugle ne sont affectées ni

par les erreurs de modélisation ni par les erreurs de calibrage, ceci est leur avantage principal (ce n'est évidemment pas le cas du traitement d'antenne paramétrique).

Une fois la matrice de mélange identifiée l'estimation des DOAs est possible [5]. Bien que de nombreuses méthodes basées sur ce concept d'identification *a priori* puissent être envisagées, nous nous limiterons, dans ce chapitre, à la présentation et à l'illustration de deux de ces méthodes appelées respectivement *scanning method* et *subspace fitting method*, après identification aveugle. Nous traiterons de l'identification aveugle proprement dite à travers la méthode SOBI (Second Order Blind Identification).

## 3.1 Identification aveugle : Principes

### 3.1.1 Mélange instantané

Dans beaucoup de situations nous devons traiter des observations multidimensionnelles de la forme

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (3.1)$$

Où  $\mathbf{x}(t)$  est un mélange linéaire instantané bruité de plusieurs signaux sources. Ce modèle est pertinent notamment, comme nous l'avons vu plus haut, dans le domaine du traitement d'antenne à bande étroite. En identification aveugle, ceci est le cas du *mélange instantané* ; la matrice  $\mathbf{A}$  (matrice de transfert entre les sources et les capteurs) est appelée matrice de mélange. Elle contient les coefficients de mélanges des signaux  $s_i(t)$ , composantes du vecteur  $\mathbf{s}(t)$ . Le mélange se fait en présence de bruit additif  $\mathbf{b}(t)$ .

### 3.1.2 Indéterminations

Dans un contexte aveugle où l'on n'a aucune information *a priori* sur le mélange, une identification complète de la matrice de mélange  $\mathbf{A}$  est impossible. En effet, l'échange d'un facteur complexe quelconque entre un signal

source et le vecteur colonne de la matrice de mélange  $\mathbf{A}$  correspondant n'affecte en rien les observations [3]. Ceci est montré par la relation suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t) = \sum_{i=1}^d \frac{\mathbf{a}_i}{\alpha_i} \alpha_i s_i(t) + \mathbf{b}(t) \quad (3.2)$$

où  $\alpha_i \in \mathbf{C}$ . En profitant de cette indétermination fondamentale, on convient sans perte de généralité de normaliser le problème en supposant que chaque signal source est de *puissance unité*. L'autocovariance des signaux sources est alors la matrice identité. Cependant, cette convention laisse indéterminée la phase de chacune des colonnes de la matrice de mélange  $\mathbf{A}$ . Par ailleurs, l'indice  $i$  associé à une certaine source est arbitraire. Les sources seront donc connues à une permutation près [4].

## 3.2 Second Ordre Blind Identification : SOBI

### 3.2.1 Statistiques utilisées

Les signaux sources sont supposés stationnaires au second ordre, de moyenne nulle, de puissance finies et mutuellement décorrelés. On note  $\rho_i(\tau)$  la suite des coefficients de covariance du processus  $s_i(t)$  :

$$E[s_i(t)s_j^*(t')] = \rho_i(t-t')\delta_{ij} \quad \forall t, t' \quad (3.3)$$

où  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker.

Le bruit additif  $\mathbf{b}(t)$  est modélisé par un processus aléatoire complexe stationnaire, temporellement blanc, de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{R}_B$  :

$$E[\mathbf{b}(t+\tau)\mathbf{b}^*(t)] = \delta_\tau \mathbf{R}_B \quad (3.4)$$

ce bruit additif est supposé décorrelé des signaux sources.

Sous ces hypothèses, la matrice d'intercovariance des observations a la structure suivante :

$$\mathbf{R}(0) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^*(t)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_S(0)\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_B \quad (3.5)$$



$$\mathbf{R}(\tau) = E[\mathbf{x}(t + \tau)\mathbf{x}^*(t)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_S(\tau)\mathbf{A}^H \quad \tau \neq 0 \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{R}_S(\tau) \stackrel{def}{=} E[\mathbf{s}(t + \tau)\mathbf{s}^*(t)]$  est la matrice d'intercovariance des signaux sources, diagonale grâce à la relation (3.3), ayant pour éléments diagonaux les  $\rho_i(\tau)$  pour  $1 \leq i \leq d$ . Dans ce qui suit, nous exposerons le principe de SOBI, méthode de résolution du problème de l'identification aveugle (3.1), utilisant uniquement les matrices d'intercovariance  $\mathbf{R}(\tau)$  des observations [3].

### 3.2.2 Principe du Blanchiment

Pour résoudre le problème d'identification aveugle SOBI recourt à une étape de blanchiment qui permet de normaliser le problème. Cette étape consiste à blanchir la partie signal  $\mathbf{y}(t)$  des observations. Ceci est réalisé en appliquant une matrice  $\mathbf{W}$  de dimension  $d \times m$  au processus  $\mathbf{y}(t)$  tel que le nouveau processus obtenu  $\mathbf{W}\mathbf{y}(t)$  soit spatialement décorrélé, i.e. d'intercovariance unité. Une telle matrice  $\mathbf{W}$  est appelée matrice de blanchiment. La condition de blanchiment est alors :

$$\mathbf{I}_d = E[(\mathbf{W}\mathbf{y}(t))(\mathbf{W}\mathbf{y}(t))^*] = \mathbf{W}\mathbf{R}_Y\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{A}^H\mathbf{W}^H \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) montre que si  $\mathbf{W}$  est une matrice de blanchiment alors  $\mathbf{W}\mathbf{A}$  est une matrice unitaire de dimension  $d \times d$ . Il résulte que pour toute matrice de blanchiment  $\mathbf{W}$ , il existe une matrice  $\mathbf{U}$  de dimension  $d \times d$  telle que :

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{U} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A} = \mathbf{W}^\dagger\mathbf{U} \quad (3.8)$$

L'intérêt majeur de la procédure de blanchiment consiste à réduire la détermination de la matrice de mélange  $\mathbf{A}$  qui est de dimension  $m \times d$  à celle d'une matrice  $\mathbf{U}$  unitaire de dimension  $d \times d$ . le processus blanchi spatialement noté  $\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{x}(t)$  obéit encore au modèle linéaire précédent :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) \stackrel{def}{=} \mathbf{W}\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}\mathbf{s}(t) + \mathbf{W}\mathbf{b}(t) \quad (3.9)$$

La partie signal du processus blanchi est maintenant un mélange unitaire des signaux sources. Il est à noter qu'en plus du blanchiment de la partie signal des observations, la multiplication par la matrice  $\mathbf{W}$  réduit la dimension du vecteur capteur à  $d$ .

D'après l'équation (3.7), la détermination de la matrice de blanchiment  $\mathbf{W}$  nécessite la connaissance de la matrice d'autocovariance  $\mathbf{R}_Y$  : la matrice  $\mathbf{W}$  sera déterminée à partir d'une décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{R}_Y$ . Cependant,  $\mathbf{R}_Y$  peut être estimée à partir de l'autocovariance des observation  $\mathbf{R}_X = \mathbf{R}_Y + \mathbf{R}_B$  que si l'on connaît *a priori* le bruit. Dans notre cas la covariance du bruit est considérée de la forme  $\mathbf{R}_B = \sigma^2 \mathbf{I}_m$ . D'abord, on estime  $\mathbf{R}(0)$  à partir de  $N$  échantillons de la même manière qu'en (2.9) :

$$\hat{\mathbf{R}}(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^*(n) = 1/N \mathbf{X} \mathbf{X}^H \quad (3.10)$$

ensuite celle-ci est diagonalisée :

$$\hat{\mathbf{R}}(0) = \mathbf{E} \Lambda \mathbf{E}^H \quad (3.11)$$

où  $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m]$  et  $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$  avec  $\lambda_i \geq \lambda_j$  pour  $i < j$ .

Si l'on suppose que le nombre de sources  $d$  est connu ainsi que la puissance  $\sigma^2$ . Une matrice de blanchiment est alors estimée par [3] :

$$\hat{\mathbf{W}} = \text{diag}[(\lambda_1 - \sigma^2)^{-\frac{1}{2}}, \dots, (\lambda_d - \sigma^2)^{-\frac{1}{2}}] [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d]^H \quad (3.12)$$

### 3.2.3 Principe d'identification aveugle par SOBI

Soit les matrices d'intercovariance blanchies  $\underline{\mathbf{R}}(\tau)$  définies par :

$$\forall \tau \neq 0 \quad \underline{\mathbf{R}}(\tau) = \mathbf{W} \mathbf{R}(\tau) \mathbf{W}^H. \quad (3.13)$$

Ces matrices complexes de dimension  $d \times d$  ne sont que les matrice d'intercovariance du processus blanchi spatialement  $\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{W} \mathbf{x}(t)$ . A partir des équations (3.6) et (3.8), on obtient la relation suivante :

$$\forall \tau \neq 0 \quad \underline{\mathbf{R}}(\tau) = \mathbf{U} \mathbf{R}_S(\tau) \mathbf{U}^H. \quad (3.14)$$

Comme  $\mathbf{U}$  est unitaire et  $\mathbf{R}_S(\tau)$  diagonale, la relation (3.14) signifie que les matrices d'intercovariance blanchies se diagonalisent sous la même transformation unitaire.

Un principe simple d'identification aveugle consiste alors en une diagonalisation conjointe des matrices d'intercovariance blanchies.

Rappelons que si les valeurs propres d'une matrice sont uniques, il n'en est pas de même pour ses vecteurs propres. Pour des valeurs propres distinctes, les vecteurs propres normés sont déterminés à une phase et une permutation près. Comme les vecteurs propres des matrices d'intercovariance blanchies sont les colonnes de la matrice  $\mathbf{U}$ , on retrouve les mêmes indéterminations que le problème d'identification aveugle énoncé plus haut.

La diagonalisation d'une seule matrice  $\mathbf{R}(\tau)$  résout le problème si ses valeurs propres sont distinctes : les vraies indéterminations apparaissent dans le cas de valeurs propres multiples. *A priori*, il n'est pas possible de déterminer un retard  $\tau$  pour lequel les valeurs propres de  $\mathbf{R}(\tau)$  soient distinctes. Même si la dégénérescence est peu probable dans le cas de sources de spectres de formes différentes, la robustesse de la méthode est sérieusement affectée quand les valeurs propres se rapprochent de la dégénérescence [4].

En considérant la diagonalisation *simultanée* d'un ensemble  $\{\mathbf{R}(\tau_i) | i = 1, \dots, K\}$  de  $K$  matrices d'intercovariance blanchies, la situation devient plus intéressante.

Ces matrices, sont simultanément diagonalisées par  $\mathbf{U}$  comme il est montré par la relation (3.14). La rotation manquante est déterminée en diagonalisant conjointement un ensemble de matrices d'intercovariance blanchies dans une même base  $\mathbf{U}$ . La condition sur la détermination de la matrice  $\mathbf{U}$  est donnée par le lemme :

*Pour que la matrice  $U$  qui diagonalise simultanément  $K$  matrices  $M_k$ , i.e.  $U^H M_k U = \text{diag}[c_1(k), \dots, c_d(k)]$ , soit unique à une phase et une permutation près ssi :*

$$\forall i \neq j \quad \exists k \quad c_i(k) \neq c_j(k). \quad (3.15)$$

Cela veut dire que la matrice  $\mathbf{U}$  est unique à une permutation et une phase près de ses colonnes si et seulement si pour toute paire  $(i, j)$  de sources, il existe au moins un retard  $\tau_l$  dans  $(\tau_1, \dots, \tau_K)$  tel que  $\rho_i(\tau_l) \neq \rho_j(\tau_l)$ . Il est clair que des sources, ayant des spectres normalisés identiques, ne peuvent

être séparée.

### 3.2.4 Diagonalisation conjointe approchée

En pratique, on ne dispose que de statistiques empiriques aussi bien pour l'estimation du blanchisseur que pour l'estimation des matrices d'intercovariance. Une diagonalisation conjointe exacte n'est en général pas possible à cause des erreurs d'estimation. Il faut donc utiliser une diagonalisation conjointe approchée. Pour cela, remarquons que diagonaliser une matrice normale<sup>1</sup>  $\mathbf{M}$   $d \times d$  est équivalent à trouver une base orthonormée  $V = \{v_i | i = 1, d\}$  telle que, dans cette base, la somme de modules carrés des termes non-diagonaux soit minimale. La norme d'une matrice étant constante sous transformation unitaire, ceci revient à trouver la base  $V$  minimisant le critère :

$$C(\mathbf{M}, \mathbf{V}) \stackrel{def}{=} - \sum_i |\mathbf{v}_i^* \mathbf{M} \mathbf{v}_i|^2 \quad (3.16)$$

sur l'ensemble des matrices unitaires  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d]$ .

Pour un ensemble de matrices, on étend naturellement ce critère en définissant la diagonalisation conjointe approchée d'une famille  $\mathbf{M} = \{\mathbf{M}_k | k = 1, \dots, K\}$  de  $K$  matrices normales comme la minimisation du critère :

$$C(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \sum_k C(\mathbf{M}_k, \mathbf{V}) = - \sum_{k,i} |\mathbf{v}_i^* \mathbf{M}_k \mathbf{v}_i|^2, \quad (3.17)$$

sous les mêmes contraintes unitaires.

Par cette définition de la diagonalisation conjointe, on n'exige pas que les matrices  $\mathbf{M}_k$  soient exactement diagonalisables par une même matrice unitaire, ni que ces matrices soient individuellement diagonalisables sous transformation unitaire. En effet, on ne cherche pas à annuler les termes

---

<sup>1</sup>On appelle matrice normale toute matrice telle que  $\mathbf{M}\mathbf{M}^H = \mathbf{M}^H\mathbf{M}$ . Une telle matrice est diagonalisable dans une base orthonormale

non-diagonaux des matrices  $\mathbf{M}_k$  sous transformation unitaire mais seulement à minimiser la somme de leurs modules carrés. Lorsque les matrices  $\mathbf{M}_k$  ne sont pas diagonalisables sous la même transformation unitaire, elles ne sont alors qu'approximativement diagonalisées conjointement. Ainsi, une telle diagonalisation conjointe approchée définit une sorte de "décomposition propre moyenne" [3]. Ceci est particulièrement commode lorsqu'on minimise le critère (3.17) appliqué aux estimées des matrices de covariance qui, à cause des erreurs d'estimation, ne sont pas exactement diagonalisables.

Ainsi, on peut dire que, plutôt que de diagonaliser exactement une seule matrice de covariance, la diagonalisation conjointe approchée permet d'intégrer l'information contenue dans un ensemble de matrice d'intercovariance dans une seule matrice unitaire.

### 3.2.5 Résumé de la méthode SOBI

Ceci est le résumé de l'algorithme SOBI, décrit plus haut, étape par étape :

1. Estimation du blanchisseur par :

$$\hat{\mathbf{W}} = \text{diag}[(\lambda_1 - \sigma^2)^{-\frac{1}{2}}, \dots, (\lambda_d - \sigma^2)^{-\frac{1}{2}}][\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d]^H$$

Où  $\lambda_i$  est la valeur propre  $i$  de  $\hat{\mathbf{R}}(0)$ ,  $\mathbf{e}_i$  son vecteur propre associé avec  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d$  et  $\sigma^2$  la puissance du bruit  $\mathbf{b}(t)$ .

2. Blanchiment des données

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \hat{\mathbf{W}}\mathbf{x}(n) \quad n = 1, \dots, N$$

3. Estimation de  $K$  matrices d'intercovariance  $\hat{\mathbf{R}}(\tau_k)$  de  $\hat{\mathbf{x}}(n)$  à différents retards  $\tau_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ .
4. Diagonalisation conjointe approchée des matrices d'intercovariance dans une base  $\hat{\mathbf{U}}$
5. Estimation de la matrice de mélange par

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{W}}^\dagger \hat{\mathbf{U}}$$

### 3.3 Méthodes d'estimations des DOAs à partir de l'identification aveugle

Dans cette section, nous exposerons quelques méthodes de détermination des angles d'arrivée à partir de  $\hat{\mathbf{A}}(\theta)$  la matrice de transfert contenant les vecteurs directions des sources, fournit par l'algorithme d'identification aveugle [5].

#### 3.3.1 Technique de balayage (scanning technique)

L'angle d'arrivée est estimé en balayant l'espace des paramètre avec un vecteur direction  $\mathbf{a}(\theta)$ , donnée par la variété d'antenne ou les données collectées lors du calibrage, et en choisissant celui qui possède une projection minimale sur le sous-espace orthogonal au sous-espace de  $\hat{\mathbf{A}}(\theta)$ , i.e. qui maximise le pseudo-spectre du type MUSIC (équation (2.10)) suivant :

$$P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{P}_A^\perp\mathbf{a}(\theta)}, \quad (3.18)$$

où  $\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}}^\dagger$ . Cette méthode présente les mêmes inconvénients que les méthodes telles que MUSIC. A savoir, la nécessité de balayer tout l'espace des paramètres et de localiser le minimum. Cependant, elle présente les mêmes avantages opérationnelles des méthodes se basant sur l'identification aveugle. Elle présente des performances moins bonnes que la méthode présentée ci-après.

#### 3.3.2 Méthode de l'ajustement aveugle d'espaces (blind subspace fitting method)

Une approche adaptative pour l'estimation des DOAs à partir de  $\hat{\mathbf{A}}(\theta)$ , en utilisant l'ajustement d'espace (subspace fitting) peut être formulée [5]. Le critère à minimiser est exprimé comme suit :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \|\hat{\mathbf{A}}(\theta) - \mathbf{A}(\theta)\alpha\|_F^2 \quad (3.19)$$

où  $\hat{\mathbf{A}}$  est la signature spatiale estimée par l'algorithme d'identification aveugle et  $\mathbf{A}(\theta)$  est une matrice de  $d$  vecteurs direction pour un  $\theta$  donné.  $\alpha$  est le scalaire assurant l'ajustement d'un sous-espace à autre. La norme  $\|\cdot\|_F$  correspond à la norme de Forbénius, telle que  $\|R\|_F^2 = \text{tr}\{R^H R\}$ . Pour une correspondance optimale entre  $\hat{\mathbf{A}}$  et  $\mathbf{A}(\theta)$ , nous devons avoir  $\alpha = \mathbf{A}^H(\theta)\hat{\mathbf{A}}$ . Le critère de minimisation s'écrit donc comme suit :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \|\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A}(\theta)\mathbf{A}^H(\theta)\hat{\mathbf{A}}\|_F^2 \quad (3.20)$$

Ce qui donne :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \text{tr}\{(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\theta)\mathbf{A}^H(\theta))\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}}^H\} \quad (3.21)$$

### Résolution numérique

L'équation ci-dessus (3.21) est similaire à la forme du problème des moindres carrés non-linéaires, vue à travers (2.42) et (2.44), en posant  $\mathbf{P}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\theta)\mathbf{A}^H(\theta)$  et  $\mathbf{M} = \hat{\mathbf{A}}$ . La résolution numérique peut se faire donc par la même solution itérative vue précédemment [5] [14] :

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k - \mu_k \mathbf{H}^{-1} V', \quad (3.22)$$

Le gradient s'écrira alors :

$$V'(\theta) = -2\text{Re}\{\text{diag}(\mathbf{A}(\theta_k)^\dagger \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}}^H (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\theta)\mathbf{A}^H(\theta))\mathbf{D})\}, \quad (3.23)$$

où

$$\mathbf{D}(\theta_k) = \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_1} \mathbf{a}(\theta_{1k}), \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_d} \mathbf{a}(\theta_{dk}) \right]. \quad (3.24)$$

Le Hessien est donné par :

$$\mathbf{H}(\theta_k) = 2\text{Re}\{(\mathbf{D}(\theta_k)^H (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\theta_k)\mathbf{A}^H(\theta_k))\mathbf{D}(\theta_k)) \odot (\mathbf{A}(\theta_k)^\dagger \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}}^H \mathbf{A}(\theta_k)^\dagger)^T\}, \quad (3.25)$$

Il est à noter également que la convergence de la méthode est conditionnée par la valeur initiale  $\theta_0$ . Plus elle est proche plus la convergence est probable.

### 3.4 Avantages des méthodes de localisation après identification aveugle

Nous avons exposé des méthodes de localisation de sources après identification aveugle de leurs vecteurs direction. Si on se réfère aux schéma de principe, cf. figure (1.6), ainsi qu'aux expressions des estimateurs après identification aveugle, on notera facilement que même ces méthodes nécessitent la connaissance de la variété d'antenne du réseau de capteurs, bien que la première étape se passe de toute information *a priori* dessus. Quand on sait que le principal inconvénient des méthodes HR est la connaissance *a priori* de la variété d'antenne, une question se pose à nous alors : Quel est le réel avantage de ces méthodes si après identification aveugle la variété d'antenne est nécessaire ?

Les méthodes HR reposent sur l'estimation du sous-espace signal en premier lieu, sous-espace rappelons-le qu'engendre les vecteurs sources. Un ensemble de vecteurs sources appartenant à la variété d'antenne est estimé tels qu'ils engendrent cet sous-espace avant d'estimer les angles d'arrivée associés. En supposant que le sous-espace signal est bien estimé, une erreur aussi infime qu'elle puisse être dans la variété d'antenne générerait des estimées d'angles d'arrivée complètement erronées, c'est la raison pour laquelle une connaissance assez précise de la variété d'antenne est requise. C'est le cas aussi des méthodes de localisation se basant sur l'identification aveugle. Cependant, de part des propriétés des algorithmes d'identification aveugle, elles ont la possibilité de se passer d'une connaissance pointue de la variété d'antenne si le réseau de capteur est calibré, lors de son déploiement par exemple, par la même méthode d'identification aveugle que l'on utilisera pour la localisation lors de son exploitation. En effet, si la variété d'antenne est mesurée à l'avance dans des conditions idéales, par exemple, à l'aide de l'algorithme SOBI lors de son déploiement sur le terrain et on estime les vecteurs sources, lors de la localisation, à l'aide du même algorithme la localisation se ferait d'autant mieux. Il est à noter qu'un tel calibrage n'améliorait en rien les performances



des méthodes HR car elles ont besoin avant tout d'un calibrage précis afin de s'assurer que les vecteurs sources engendrent le sous-espace signal.

## Conclusion

Nous avons exposé dans ce chapitre le principe des méthodes de localisation de sources après identification aveugle des vecteurs direction. Elles reposent toutes sur deux étapes : identification aveugle des vecteurs direction des sources et estimation des angles d'arrivées en fonction de la variété d'antenne. La technique SOBI, est une méthode d'identification aveugle de la matrice de mélange linéaire d'un ensemble de signaux. Elle estime cette matrice sans aucune information *a priori* dessus et elle se basent uniquement sur les statistiques d'ordre deux ce qui la rend extrêmement intéressante point de vue calcul numérique. SOBI sert dans ces méthodes de localisation à identifier la matrice de transfert  $\mathbf{A}$  contenant les vecteurs direction des différentes sources. Une fois ces vecteurs identifiés nous disposant de différentes techniques permettant d'en extraire les angles d'arrivées. Nous en avons introduit deux : la méthode de balayage consistant à balayer toutes les valeurs des paramètres possibles et d'extraire les valeurs qui minimise dans le sens des moindres carrés une fonction données ; une seconde méthode, itérative cette fois, consiste à exprimer le problème en tant que problème des moindres carrés non-linéaires et de le résoudre grâce à la méthode de Newton. Cette méthode est plus lourde mais présente de meilleures performances.

Nous avons vu également les avantages opérationnels que présentent ces méthode par rapport aux méthode HR. Néanmoins, il reste à vérifier un point aussi essentiel que les avantages opérationnels : les performances numériques. Il nous faut nous assurer que les méthodes de localisation aveugle présente les mêmes performances que les méthodes HR, méthodes références.

# Chapitre 4

## Étude de performances

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux performances des méthodes étudiées jusque-là à travers des simulations numériques effectuées sur MATLAB. Le but de ces simulations est de comparer les performances des méthodes de localisation aveugles à celles des méthodes HR en général, et les performances des méthodes dans un même groupe en particulier. Pour cela définissons d'abord les critères de comparaison, les signaux utilisés et les conditions des simulations effectuées.

### 4.1 Conditions des simulations effectuées

#### 4.1.1 Critère d'évaluation des performances

La localisation, comme nous l'avons vu, est un estimateur qui à partir des observations  $\mathbf{X}$  détermine les angles d'arrivée ou DOAs. Chaque méthode que l'on a exposée possède une règle d'estimation  $r(\mathbf{X})$  qui fait cette correspondance, cf. section (1.1). On mesure les performances d'un estimateur à travers les propriétés de sa règle d'estimation. Comme on a vu le résultat de cette règle est aléatoire et en fonction de ses propriétés statistiques (notamment son biais et sa variance) on juge un estimateur. Le critère sur lequel on va se baser pour évaluer les performances des méthodes de localisation est l'erreur quadratique moyenne (*mean square error* ou MSE en anglais), il est défini

comme suit [2] :

$$\mathbf{MSE} = E[(\hat{\theta} - \theta_0)^2] \quad (4.1)$$

$$\mathbf{MSE} = E\{[(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}]) + (E[\hat{\theta}] - \theta_0)]^2\} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{MSE} = \text{var}(\hat{\theta}) + b^2(\theta_0), \quad (4.3)$$

où  $\text{var}(\hat{\theta})$  et  $b(\theta_0)$  sont respectivement la variance et le biais de l'estimateur en  $\theta_0$ .

Ceci montre que l'erreur quadratique moyenne (MSE) est composée de erreurs dues à la variance de l'estimateur et de son biais. Elle est donc la mesure idéale des performances de n'importe quel estimateur [2]. On se basera dessus pour l'étude de performance des méthode de localisation.

### Calcul de l'erreur quadratique moyenne

L'équation (4.3) implique que le calcul de l'erreur quadratique moyenne nécessite la connaissance des distributions de probabilité des estimateurs dont on veut évaluer les performances. Ceci n'est pas possible dans la plupart des cas. Pour l'évaluation du MSE d'un estimateur on utilise une méthode de calcul empirique basée sur la moyenne des erreurs quadratiques obtenues lors de multiple réalisations. Il est à noter que plus le nombre de réalisations est important, plus le MSE évalué est proche de sa valeur réelle ; c'est la méthode de Monté Carlo [7]. Ceci est résumé dans l'équation suivante :

$$\mathbf{MSE} = \frac{1}{mc} \sum_{i=1}^{mc} (\hat{\theta}_i - \theta_0)^2. \quad (4.4)$$

La variable  $mc$  représente le nombre de réalisations effectuées,  $\hat{\theta}_i$  représente le résultat de l'estimateur à la réalisation  $i$ . Le nombre de réalisations de chaque simulation présentée est 500.

#### 4.1.2 Signaux utilisés

Le localisation de sources se retrouve principalement dans deux domaines : le radar (localisation de cible) et la communication mobile. Ces deux do-

maines utilisent des signaux différents, C'est pour cette raison que nous avons effectué les simulation pour deux types de signaux : les signaux *chirps* utilisés dans le domaine du radar et les signaux PSK/FSK utilisés dans le domaine de la communication numérique.

### signaux chirps

Les signaux chirps s'écrivent de façon général sous la forme suivante [16] :

$$s(t) = \alpha(t; \eta_\alpha) e^{\phi(t; \eta_\phi)} \quad (4.5)$$

où  $\alpha(t; \eta_\alpha)$  est l'amplitude réelle déterministe du signal et  $\phi(t; \eta_\phi)$  *saphase*.

Nous nous intéresserons au cas général où  $\alpha(t; \eta_\alpha) = 1$  et  $\phi(t; \eta_\phi)$  modélisée comme suit :

$$\phi(t; \eta_\phi) = w_1 t + \frac{w_2 - w_1}{N} t^2, \quad t = 1, \dots, N \quad (4.6)$$

où  $w_1$  et  $w_2$  sont des paramètres connus.

### signaux FSK/PSK

La communication numérique est un domaine tout aussi important qui nécessite les algorithmes de localisation de sources. Les signaux que l'on y utilise sont souvent modélisés comme signaux complexes ayant pour phase une variable aléatoire uniforme :

$$s(t) = e^{j\eta}, \quad (4.7)$$

où  $\eta$  est une variable uniforme de valeurs comprise dans  $[0, 2\pi]$ .

### 4.1.3 Géométrie du réseau de capteurs

Lors des simulations, le réseau de capteurs sera modélisé comme étant un réseau linéaire uniforme de  $m$  capteurs, séparé d'une demie longueur d'onde. Les vecteurs sources sont donnés donc par l'équation (1.16), ce qui revient à :

$$\mathbf{a}(\theta_i) = [1, \dots, e^{j\pi(1-m)\sin(\theta_i)}]^T. \quad (4.8)$$

Il est à noter que le but de ce chapitre est de faire ressortir les performances des méthodes en faisant abstraction du problème de la connaissance précise ou pas de la variété d'antenne. Puisque nous avons démontré plus haut les avantages des méthodes aveugles sur ce point, durant les simulations la variété d'antenne est connue à la perfection. Cela nous permettra en outre de mieux apprécier les performances ultimes de chaque méthode.

## 4.2 Résultats des simulations

Dans cette section les résultats des simulations effectuées. Elles portent, en premier lieu, sur la précision des estimations évaluées grâce à l'erreur quadratique moyenne en fonction du rapport signal sur bruit, du nombre d'échantillons et du nombre de capteurs pour les deux types de signaux présenté plus haut. En second lieu les simulations portent sur la résolution des différentes méthodes de localisation. Ceci est la capacité de la méthode à localiser des sources proches angulairement. En effet, les caractéristiques les plus critiques d'une méthode de localisation sont : la précision et la résolution.

### 4.2.1 Précision

Les simulations visant à évaluer la précision des méthodes de localisation ont été faites en présence de deux sources à  $\theta_1 = 20^\circ$  et  $\theta_2 = 40^\circ$ . Les sources ont délibérément été prises éloignées angulairement afin de ne pas handicaper les méthodes à faible pouvoir séparateur. Des sources proches seront prises en compte lors de l'évaluation de la résolution des différentes méthodes.

D'un autre côté, les signaux Chirps utilisés ont été paramétrés de façon à ce qu'ils n'aient pas le même spectre normalisé afin que l'algorithme SOBI puisse identifier correctement la matrice  $\mathbf{A}$ .

On trouvera dans ce qui suit les graphes traduisant la variation du MSE en fonction du rapport signal sur bruit SNR. Les simulations ont été effectuées avec la configuration suivante : nombre de capteurs  $m = 12$ , nombre

d'échantillons  $N = 256$  et le nombre de réalisations (Monté-Carlo)  $mc = 500$ , cf. figures (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4).

L'erreur quadratique moyenne a été tracée également en fonction du nombre de capteurs  $m$ . Le nombre de d'échantillons a été arrêté à  $N = 256$  et le rapport signal sur bruit a été fixé à  $\mathbf{SNR} = 10\text{dB}$ . Cf. figures (4.5), (4.6), (4.7) et (4.8).

Enfin, l'erreur quadratique moyenne a été tracée en fonction du nombre d'échantillons des signaux. Dans ce cas le rapport signal sur bruit a été fixé à  $\mathbf{SNR} = 10\text{dB}$  et le nombre de capteurs a été arrêté à  $m = 12$ . Cf. figures (4.9), (4.10), (4.11) et (4.12).

Le MSE a été évalué pour la localisation de la première source seulement ( $\theta_1 = 20^\circ$ ).

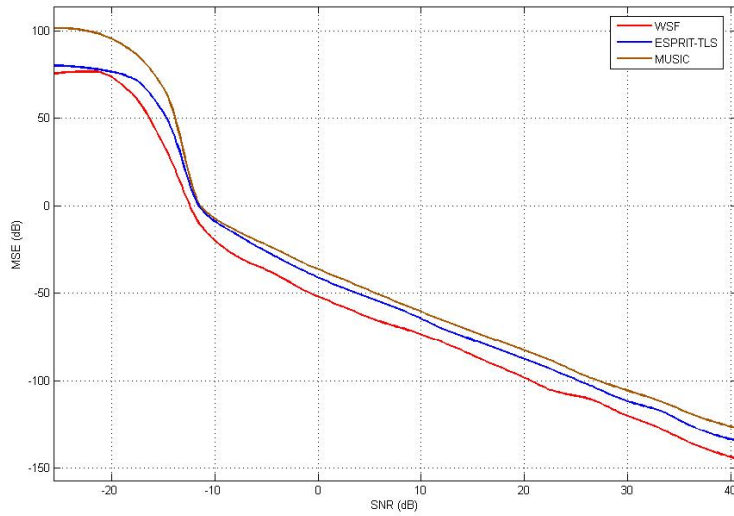


FIG. 4.1: Méthodes HR. Variations du MSE en fonction du SNR :  $m = 12$ ,  $N = 256$  et  $mc = 500$ . Cas de signaux Chirps. Signal 1 :  $w_1 = \pi/4$   $w_2 = \pi/3$ . Signal 2 :

$$w_1 = \pi/2 \quad w_2 = \pi.$$

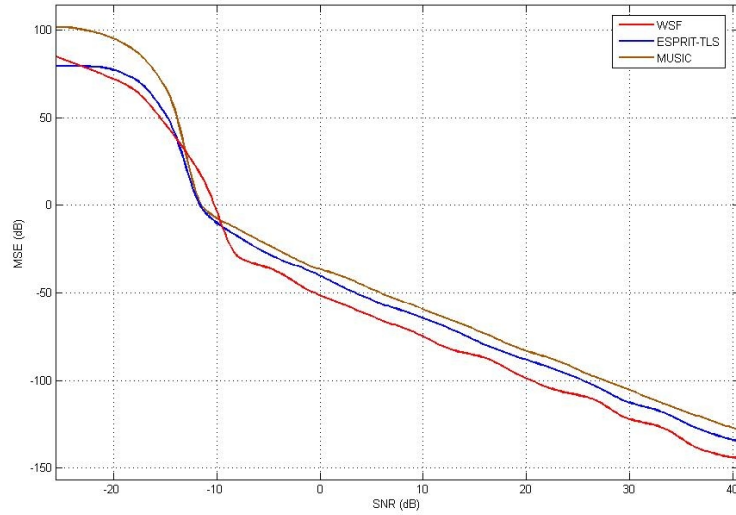


FIG. 4.2: Méthodes HR. Variations du MSE en fonction du SNR :  $m = 12$ ,  $N = 256$  et  $mc = 500$ . Cas de signaux PSK/FSK.

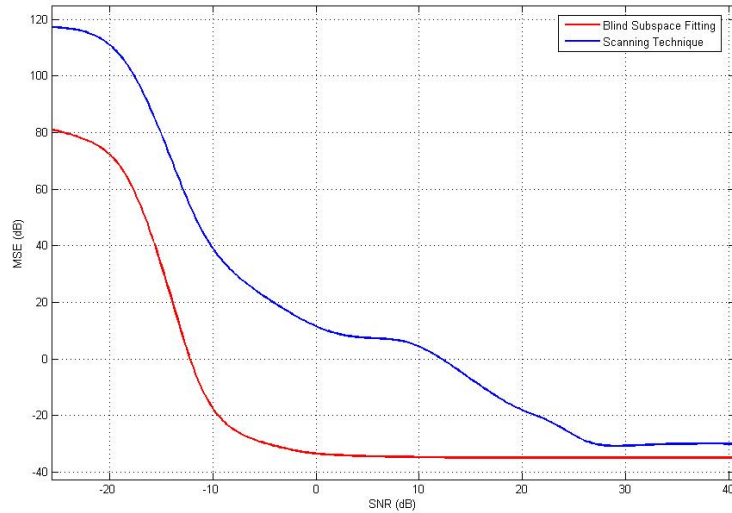


FIG. 4.3: Méthodes de localisation aveugle. Variations du MSE en fonction du SNR :  $m = 12$ ,  $N = 256$  et  $mc = 500$ . Cas de signaux Chirps. Signal 1 :  $w_1 = \pi/4$   $w_2 = \pi/3$ . Signal 2 :  $w_1 = \pi/2$   $w_2 = \pi$ .

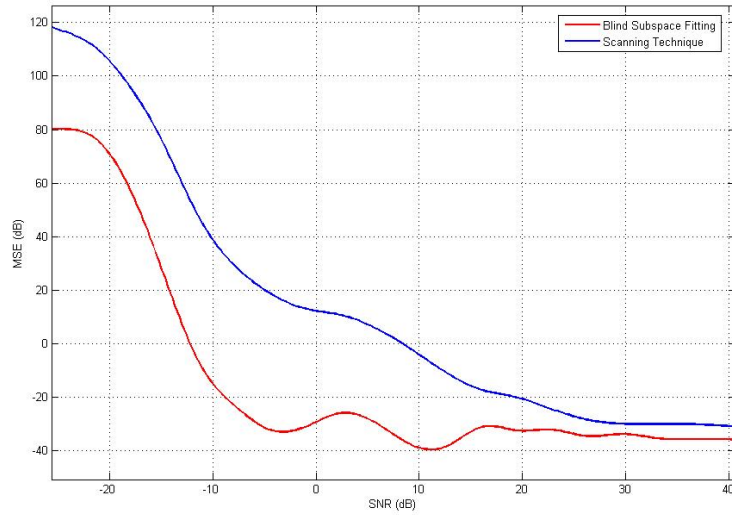


FIG. 4.4: Méthodes de localisation aveugle. Variations du MSE en fonction du SNR :  $m = 12$ ,  $N = 256$  et  $mc = 500$ . Cas de signaux PSK/FSK.

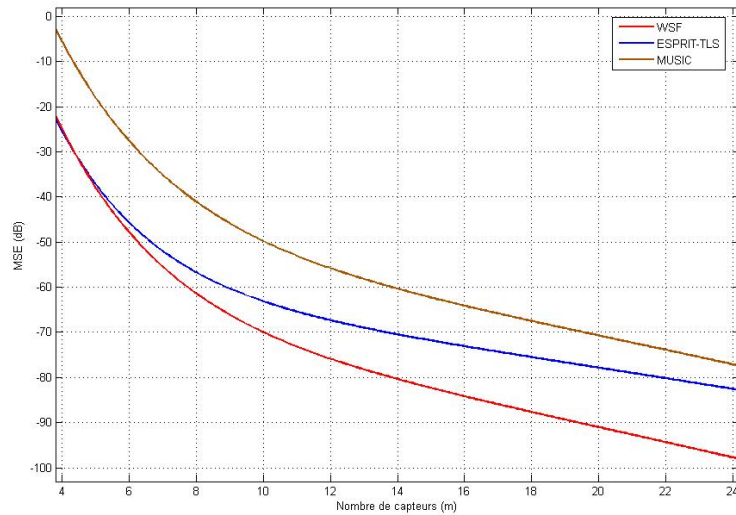


FIG. 4.5: Méthodes HR. Variations du MSE en fonction du nombre de capteurs  $m$  :  $\text{SNR} = 10\text{dB}$ ,  $N = 256$  et  $mc = 500$ . Cas de signaux Chirps. Signal 1 :  $w_1 = \pi/4$   $w_2 = \pi/3$ . Signal 2 :  $w_1 = \pi/2$   $w_2 = \pi$ .



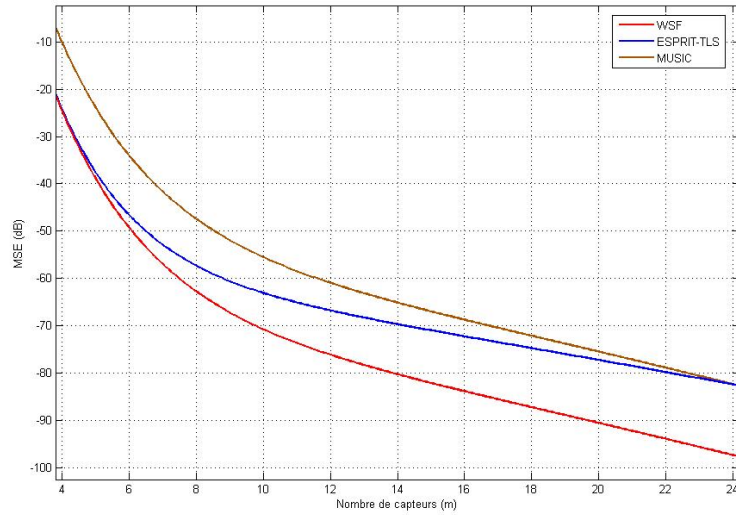


FIG. 4.6: Méthodes HR. Variations du MSE en fonction du nombre de capteurs  $m$  :  $\text{SNR} = 10\text{dB}$ ,  $N = 256$  et  $mc = 500$ . Cas de signaux PSK/FSK.

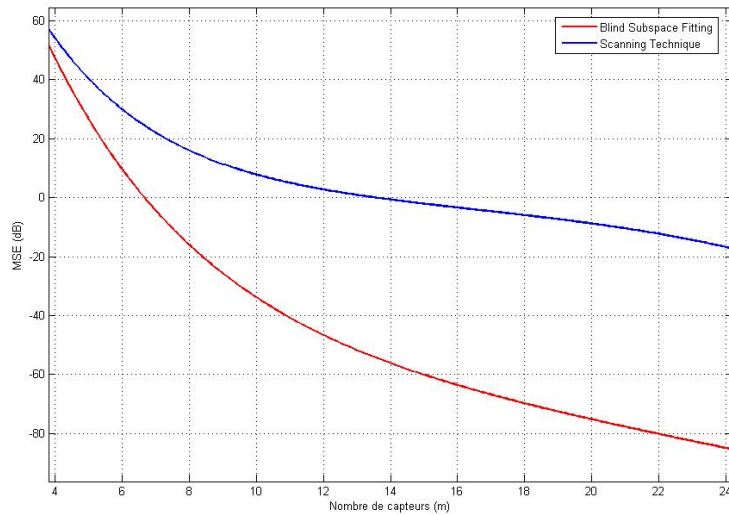


FIG. 4.7: Méthodes de localisation aveugle. Variations du MSE en fonction du nombre de capteurs  $m$  :  $\text{SNR} = 10\text{dB}$ ,  $N = 256$  et  $mc = 500$ . Cas de signaux Chirps. Signal 1 :  $w_1 = \pi/4$   $w_2 = \pi/3$ . Signal 2 :  $w_1 = \pi/2$   $w_2 = \pi$ .

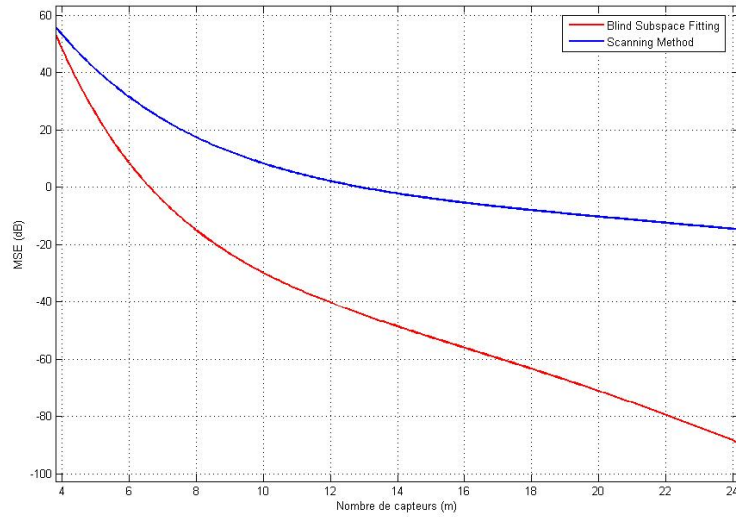


FIG. 4.8: Méthodes de localisation aveugle. Variations du MSE en fonction du nombre de capteurs  $m$  :  $\mathbf{SNR} = 10\text{dB}$ ,  $N = 256$  et  $mc = 500$ . Cas de signaux PSK/FSK.

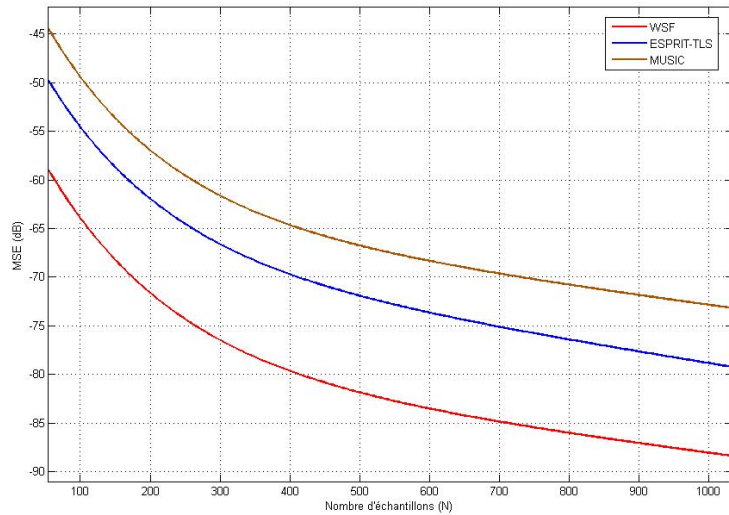


FIG. 4.9: Méthodes HR. Variations du MSE en fonction du nombre d'échantillons des signaux :  $\mathbf{SNR} = 10\text{dB}$ ,  $m = 12$  et  $mc = 500$ . Cas de signaux Chirps. Signal 1 :  $w_1 = \pi/4$   $w_2 = \pi/3$ . Signal 2 :  $w_1 = \pi/2$   $w_2 = \pi$ .

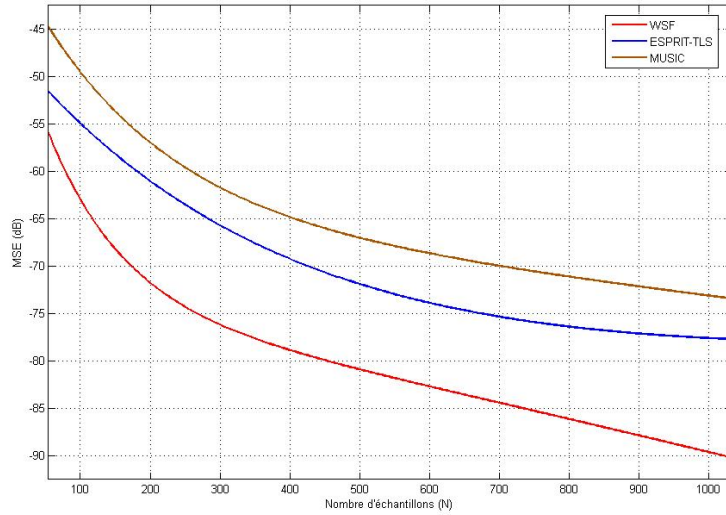


FIG. 4.10: Méthodes HR. Variations du MSE en fonction du nombre d'échantillons des signaux :  $\text{SNR} = 10\text{dB}$ ,  $m = 12$  et  $mc = 500$ . Cas de signaux PSK/FSK.

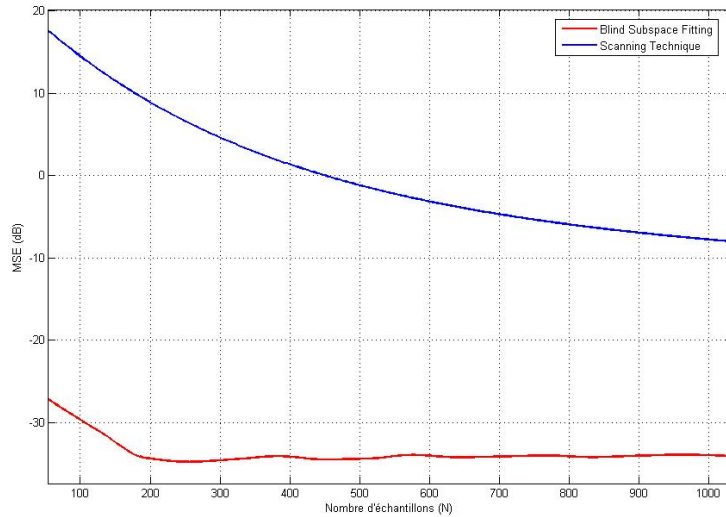


FIG. 4.11: Méthodes de localisation aveugle. Variations du MSE en fonction du nombre d'échantillons des signaux :  $\text{SNR} = 10\text{dB}$ ,  $m = 12$  et  $mc = 500$ . Cas de signaux Chirps. Signal 1 :  $w_1 = \pi/4$   $w_2 = \pi/3$ . Signal 2 :  $w_1 = \pi/2$   $w_2 = \pi$ .

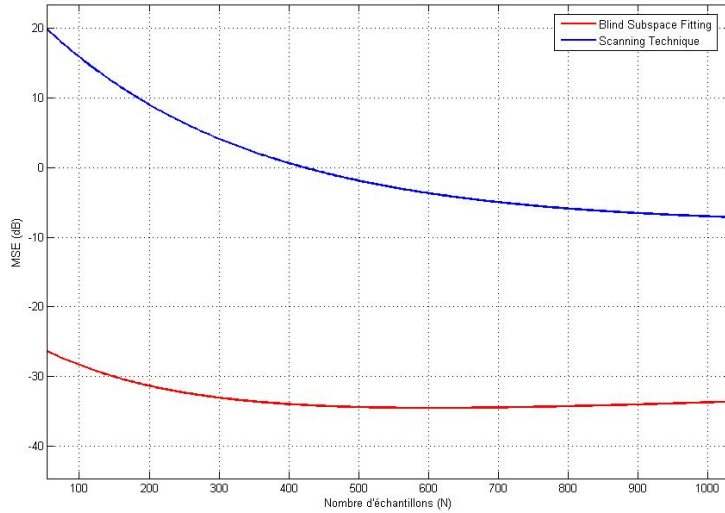


FIG. 4.12: Méthodes de localisation aveugle. Variations du MSE en fonction du nombre d'échantillons des signaux :  $\text{SNR} = 10\text{dB}$ ,  $m = 12$  et  $mc = 500$ . Cas de signaux PSK/FSK.

## 4.2.2 Résolution

Les résultats des simulations sur la précision de la localisation ont été présentés. Suit maintenant les résultats des simulations concernant leurs résolutions. La résolution sera évaluée de deux façons différentes, suivant que la méthode est à pseudo-spectre (MUSIC et Scanning Technique) ou à localisation "directe" (ESPRIT, WSF et BSF). Dans le premier cas les pseudo-spectres seront tracés dans l'intervalle contenant les directions des sources. Dans le second la précision sera réévaluée. Toutes ces simulations ont été faites dans le même cadre précédent à la différence que les sources sont à présent très proches :  $\theta_1 = 15^\circ$  et  $\theta_2 = 18^\circ$  et que les signaux sont exclusivement des signaux Chirps.

Nous commencerons par les méthodes à pseudo-spectres. Leur résolution a été évaluée à des SNRs de  $-15\text{dB}$ ,  $5\text{dB}$  et  $20\text{dB}$ . Le nombre de capteurs est fixé à 12 et le nombre d'échantillons à 256. Cf. figures (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) et (4.17).

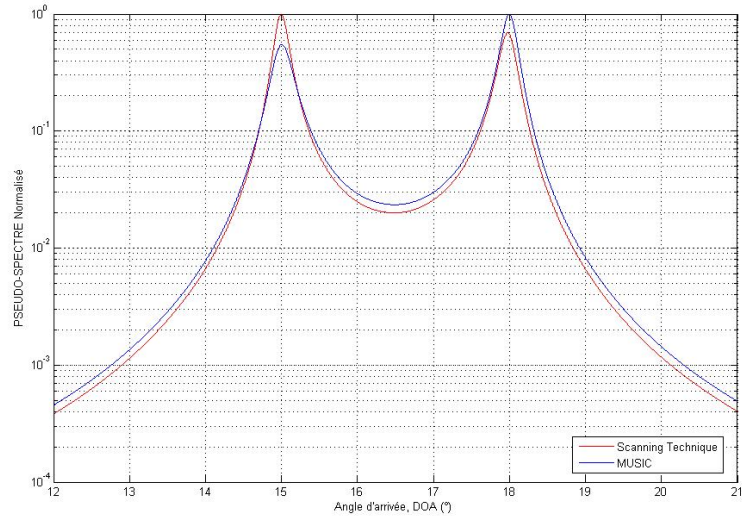


FIG. 4.13: PSEUDO-SPECTRES normalisés des méthodes MUSIC et Scanning Technique sur l'espace des angles d'arrivée.  $\text{SNR} = 20\text{dB}$ ,  $N = 256$  et  $m = 12$ . Signaux Chirps.

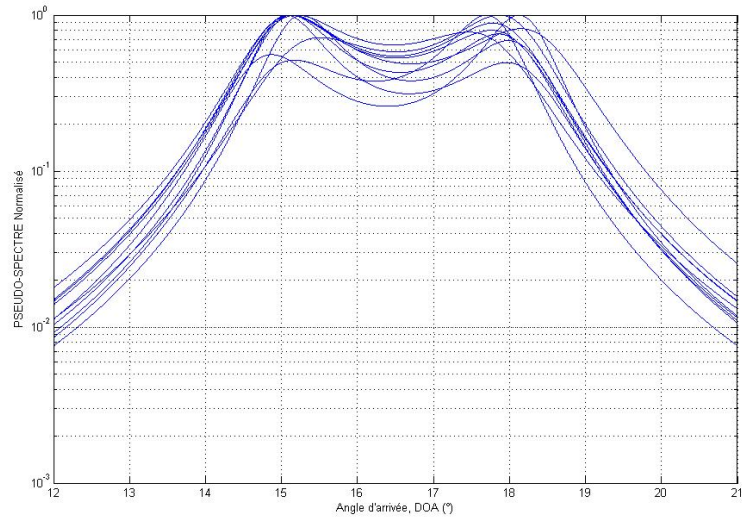


FIG. 4.14: PSEUDO-SPECTRES normalisés de la méthode MUSIC sur l'espace des angles d'arrivée sur 10 réalisations.  $\text{SNR} = 5\text{dB}$ ,  $N = 256$  et  $m = 12$ . Signaux Chirps.

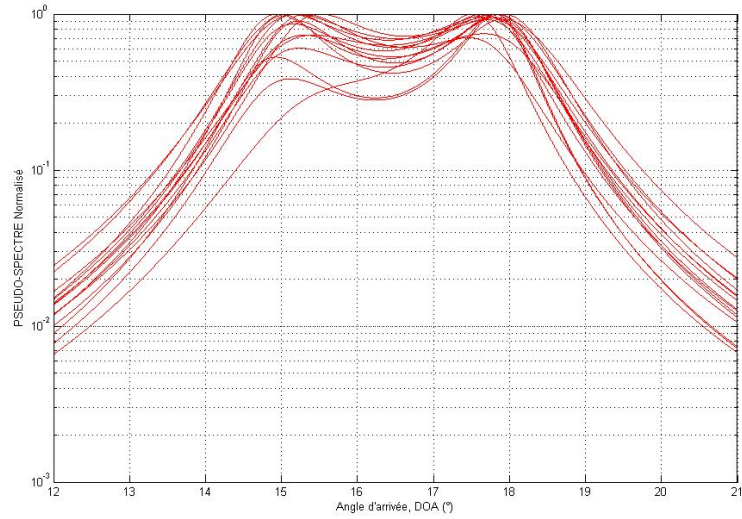


FIG. 4.15: PSEUDO-SPECTRES normalisés de la méthode de Scanning sur l'espace des angles d'arrivée sur 10 réalisations.  $\text{SNR} = 5\text{dB}$ ,  $N = 256$  et  $m = 12$ . Signaux Chirps.

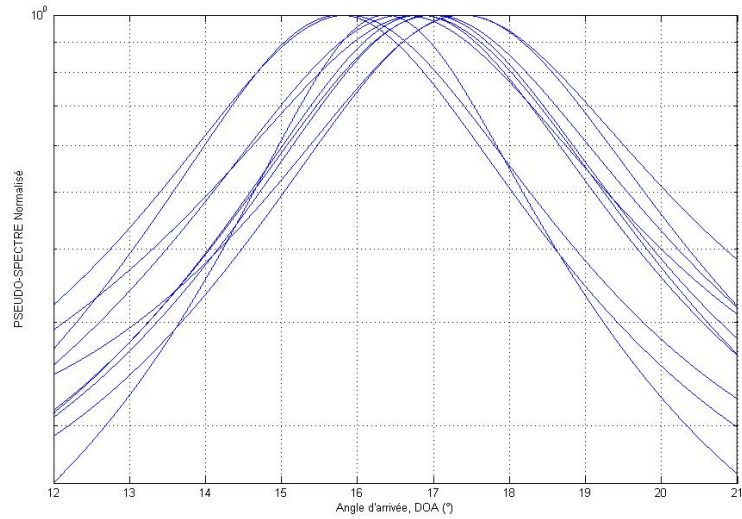


FIG. 4.16: PSEUDO-SPECTRES normalisés de la méthode MUSIC sur l'espace des angles d'arrivée sur 10 réalisations.  $\text{SNR} = -15\text{dB}$ ,  $N = 256$  et  $m = 12$ . Signaux Chirps.

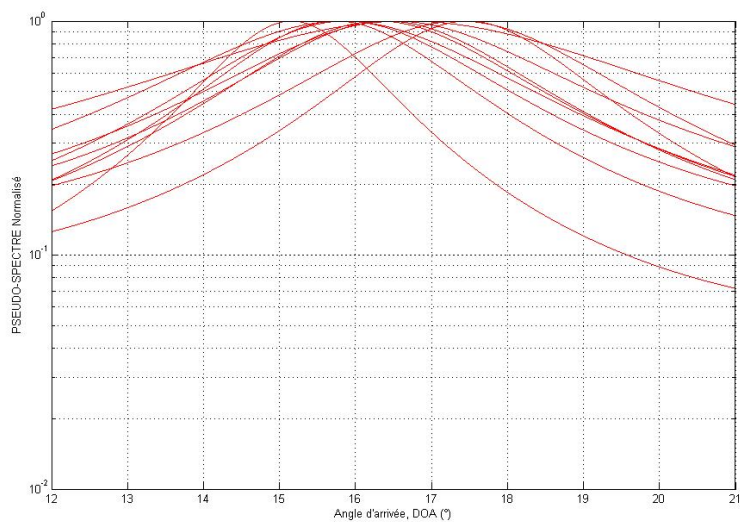


FIG. 4.17: PSEUDO-SPECTRES normalisés de la méthode de Scanning sur l'espace des angles d'arrivée sur 10 réalisations. **SNR** =  $-15\text{dB}$ ,  $N = 256$  et  $m = 12$ .  
Signaux Chirps.

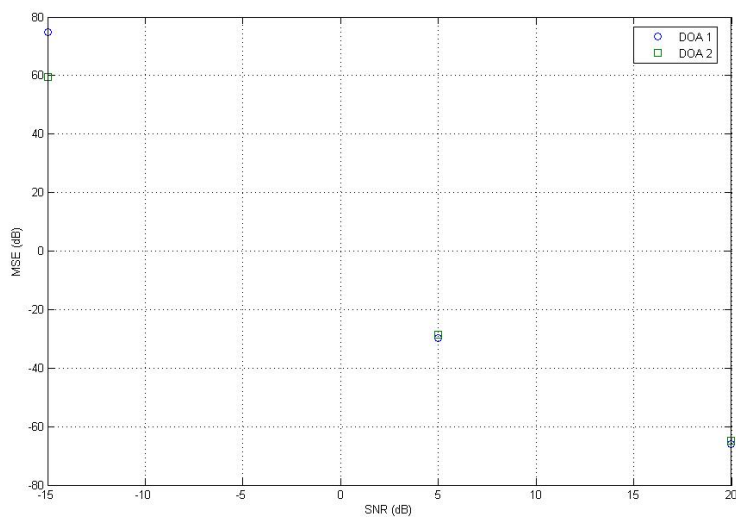


FIG. 4.18: MSE sur la localisation des deux sources en fonction du SNR :  $m = 12$ ,  
 $N = 256$  et  $mc = 300$

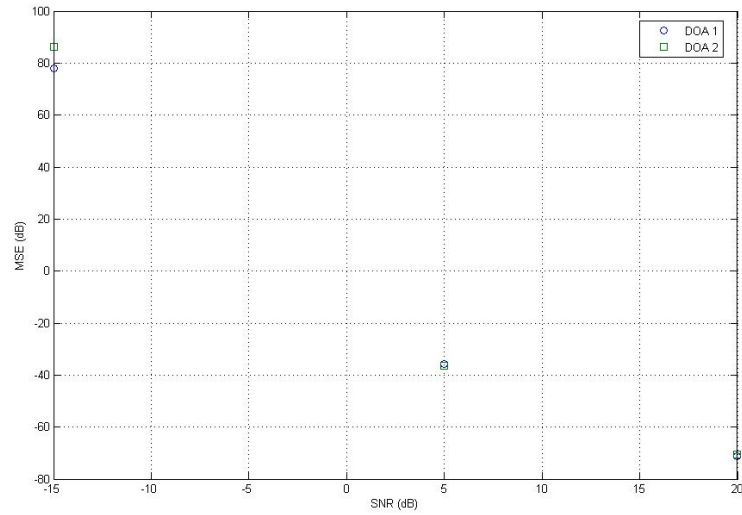


FIG. 4.19: MSE sur la localisation des deux sources en fonction du SNR :  $m = 12$ ,  $N = 256$  et  $mc = 300$

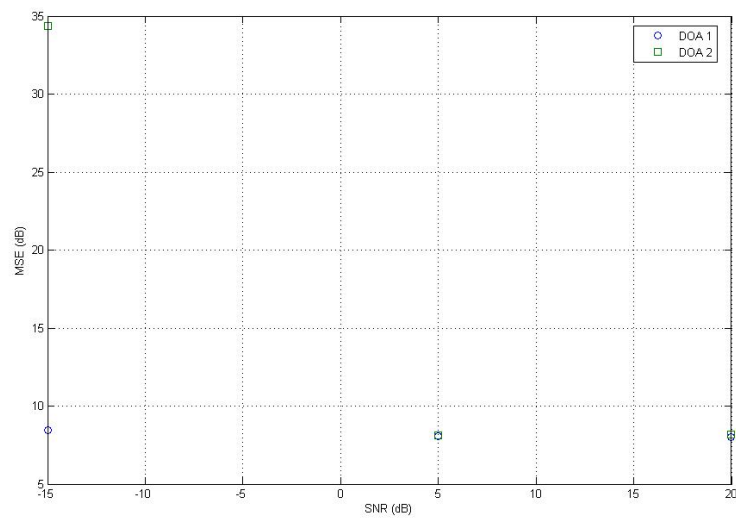


FIG. 4.20: MSE sur la localisation des deux sources en fonction du SNR :  $m = 12$ ,  $N = 256$  et  $mc = 300$



L'étude de la résolution des méthodes restantes s'est faite de la même manière que pour la précision. Cependant nous y avons étudié leurs comportements en présence de deux sources très proches angulairement. Le MSE a été évalué pour la localisation des deux sources ( $\theta_1 = 15^\circ$  et  $\theta_2 = 18^\circ$ ), cf. figures (4.18), (4.19) et (4.20).

### 4.3 Discussion

A la lumière des résultats obtenus lors des différentes simulations effectuées, nous tirons les conclusions suivantes :

- Le MSE des méthodes HR, en général, diminue avec la croissance du SNR. Cependant, WSF reste la plus précise. Elle garde son avantage quelque soit le rapport signal à bruit, et atteint des erreurs très faibles à des SNR importants. Elle est suivie par ESPRIT-TLS et MUSIC. Le MSE des méthodes de localisation aveugle a pratiquement le même comportement vis-à-vis du SNR. Cependant, les ordres de grandeurs diffèrent. La méthode Blind Subspace Fitting présente de meilleures performances que la méthode de balayage. Son MSE atteint la valeur très acceptable de  $-35\text{dB}$  environ, i.e. une précision de  $\pm 0.018^\circ$ , et ce à partir d'un SNR de  $-5\text{dB}$ . L'inconvénient majeur est que la précision reste constante après cela. Notons que les méthodes de localisation aveugle restent toutes deux moins performantes que les méthodes HR.
- Les performances de toutes les méthodes étudiées plus haut s'améliorent à mesure que le nombre de capteurs qui forment le réseau est important. Ceci est dû à l'amélioration de la de l'estimation du sous-espace bruit pour les méthodes HR et l'amélioration du choix des vecteurs de direction correspondant aux vecteurs identifiés en aveugle.
- Les résultats exposés plus haut montrent que les méthodes HR sont

consistantes (section 1.1.2) : leurs performances s'améliorent à mesure que le temps d'observation des signaux devient important. Ceci est dû au fait qu'elles font appel à la matrice estimée de covariance des observations, estimée qui de plus en plus exacte à mesure que  $N$  devient important. Par contre, les méthodes de localisation aveugles ne dépendent que très faiblement de  $N$ . Ceci est dû au fait que l'identification aveugle qui est basée sur la même matrice estimée de covariance est plus robuste vis-à-vis des erreurs concernant de son estimation. Cette quasi-indépendance des performances des méthodes de localisation aveugle du temps d'observation peut être considérée comme un avantage et inconvénient. En effet, le fait que les performances ne se détériorent pas en réduisant le nombre d'échantillons est intéressant notamment dans le cadre des application en temps réels cadre qui dans lequel sont la plupart des applications de la localisation. D'un autre coté, le fait que les performances ne s'améliorent pas en augmentant le nombre d'échantillons peut être handicapant car cela réduit un degré de liberté du contrôle des performances.

- Point de vue résolution, les résultats énoncés présentent le pouvoir de séparation de deux sources à  $3^\circ$  d'écart à travers le tracé des pseudo-spectres à divers SNR et le MSE aux mêmes SNR. Les méthodes HR sont réputées pour leurs très bonnes résolutions. C'est ce qui est illustré plus haut. Nous remarquons que la méthode de localisation aveugle Scanning Technique présente la résolution que MUSIC. La méthode WSF devance ESPRIT-TLS et MUSIC dans la résolution également. La méthode Blind Subspace Fitting par contre présente une résolution nettement plus faible, ceci présente un inconvénient majeur pour une méthode de localisation.
- Enfin comme dernier point, nous remarquons que les performances sont pratiquement les mêmes pour les deux types de signaux utilisés.

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le cadre et l'objectif des différentes simulations effectuées. Elles consistaient à évaluer la précision et le pouvoir séparateur des différentes méthodes de localisation. Et ce afin de confronter les performances des méthodes aveugles aux méthodes HR classiques. Il est à rappeler que le cadre des simulation est tel que la géométrie du réseau est parfaitement connue et que si ce n'était pas le cas (erreurs de modélisation ou calibrage imprécis) elles auraient vu leurs performances se dégrader sensiblement [13] [12] ce qui n'est pas le cas pour les méthodes aveugles, voir section (3.4). Ceci étant dit, dans le cas où le réseau est connu les méthodes HR sont plus performantes tant en terme de précision qu'en terme de résolution. Cependant, les méthodes de localisation aveugles possèdent de bonnes performances et un avantage opérationnel sur les méthodes HR. Nous avons vu, également, qu'elles permettaient de localiser des sources émettant les signaux les plus fréquemment rencontrés dans le domaine de la localisation.

# Conclusion générale

Dans ce travail nous avons considéré les méthodes de localisation de sources. Notre but était de confronter les méthodes à haute résolution devenues classiques aux méthodes émergentes basées sur l'identification aveugle de la signature spatiale du réseau de capteurs. Les algorithmes classiques nécessitent la connaissance précise de la géométrie du réseau sous peine de dégradation des performances. C'est ce qui présente un avantage des méthodes aveugles sur les méthodes classiques. En effet, vue leur nature elles sont robustes aux erreurs de modélisation du réseau.

Nous avons vu les principes de quelques méthodes HR phares : MUSIC, ESPRIT et WSF. MUSIC est une des méthodes HR pionnières, elle a été la première à exploiter correctement le modèle d'observation et élargir le spectre d'application aux réseaux de géométries arbitraires. ESPRIT est une méthode qui nécessite une géométrie particulière du réseau (antenne double). Elle exploite cette hypothèse pour réduire considérablement la complexité des calculs et accroître les performances. WSF est une méthode itérative basé sur le Subspace Fitting pondéré par une matrice qui le rendrait optimal. Elle possède les meilleures performances mais consomme, 'un autre côté le plus de temps de calcul.

Les méthodes de localisation aveugle sont basées sur une étape d'identification aveugle des vecteurs direction du réseau. Pour cette étude nous avons sélectionné la méthode d'identification basée sur les statistiques d'ordre deux SOBI. Elle est basée sur la diagonalisation approchée conjointe de diverses matrices de corrélation blanchies à différents instants dans une même base

unitaire. Les angles d'arrivées sont estimés en deuxième temps suivant deux méthodes : Scanning Technique et Blind Subspace Fitting. La première est une méthode comparable à MUSIC la seconde est une méthode itérative de même principe que le subspace fitting.

Les simulations ont été effectuées dans l'hypothèse d'une connaissance parfaite de la géométrie du réseau. Les résultats obtenus montrent que les méthodes HR sont plus performantes que les méthodes aveugles, bien qu'elles présentent de bonnes performances. Cependant, les méthodes HR sont très sensibles aux erreurs de modélisation.

Nous pouvons dire que dans le cas d'une modélisation précise de la géométrie du réseau l'utilisation des méthodes HR est plus appropriée. Cependant, dans le cas d'une géométrie mal connue ou n'importe quel cas nécessitant le calibrage du réseau (déviations des réponses due au vieillissement du matériel) les méthodes HR ne seront plus aussi efficaces à moins d'un calibrage précis. Les méthodes aveugles ont l'avantage de continuer d'être fiables dans ce cas particulièrement si le calibrage se fait par le même algorithme d'identification des vecteurs directionnels. Elles possèdent donc un avantage pratique indéniable et de bonnes performances. De nombreuses questions restent ouvertes :

- Comment améliorer la précision des méthodes de localisation aveugles ?
- Comment améliorer la résolution des méthodes de localisation aveugles ?
- Comment choisir la matrice de pondération  $\mathbf{W}$  afin d'appliquer la méthode WSF à la matrice  $\hat{\mathbf{A}}$  ?

Pour finir, les méthodes de localisation aveugles possèdent des avantages opérationnels certains mais des performances, certes pas mauvaises, mais à développer encore.

# Table des figures

1.1	Estimation paramétrique . . . . .	4
1.2	Schéma général d'un réseau de capteurs passifs. Capteurs de directivités différentes et réseau de géométrie spatiale arbitraire. . . . .	8
1.3	Exemple d'un réseau linéaire uniforme. Noter que le capteur le plus à gauche a été pris comme référence. . . . .	12
1.4	La variété d'antenne décrit la famille des vecteurs sources indexés par leur position . . . . .	13
1.5	Schéma de principe des méthodes à haute résolution . . . . .	14
1.6	Schéma de principe des méthodes de localisation après identification aveugle . . . . .	15
2.1	Approche géométrique de MUSIC en absence de bruit, dans le cas d'un réseau à 3 capteurs localisant 2 sources. . . . .	21
2.2	Géométrie générale d'un réseau de capteurs de localisation de sources avec ESPRIT. . . . .	26
4.1	Méthodes HR.Variations du MSE en fonction du SNR : $m = 12$ , $N = 256$ et $mc = 500$ . Cas de signaux Chirps. Signal 1 : $w_1 = \pi/4$ $w_2 = \pi/3$ . Signal 2 : $w_1 = \pi/2$ $w_2 = \pi$ . . . . .	54
4.2	Méthodes HR.Variations du MSE en fonction du SNR : $m = 12$ , $N = 256$ et $mc = 500$ . Cas de signaux PSK/FSK. . . . .	55

4.3	Méthodes de localisation aveugle. Variations du MSE en fonction du SNR : $m = 12$ , $N = 256$ et $mc = 500$ . Cas de signaux Chirps. Signal 1 : $w_1 = \pi/4$ $w_2 = \pi/3$ . Signal 2 : $w_1 = \pi/2$ $w_2 = \pi$ . . . . .	55
4.4	Méthodes de localisation aveugle. Variations du MSE en fonction du SNR : $m = 12$ , $N = 256$ et $mc = 500$ . Cas de signaux PSK/FSK. . . . .	56
4.5	Méthodes HR. Variations du MSE en fonction du nombre de capteurs $m$ : <b>SNR</b> = 10dB, $N = 256$ et $mc = 500$ . Cas de signaux Chirps. Signal 1 : $w_1 = \pi/4$ $w_2 = \pi/3$ . Signal 2 : $w_1 = \pi/2$ $w_2 = \pi$ . . . . .	56
4.6	Méthodes HR. Variations du MSE en fonction du nombre de capteurs $m$ : <b>SNR</b> = 10dB, $N = 256$ et $mc = 500$ . Cas de signaux PSK/FSK. . . . .	57
4.7	Méthodes de localisation aveugle. Variations du MSE en fonction du nombre de capteurs $m$ : <b>SNR</b> = 10dB, $N = 256$ et $mc = 500$ . Cas de signaux Chirps. Signal 1 : $w_1 = \pi/4$ $w_2 = \pi/3$ . Signal 2 : $w_1 = \pi/2$ $w_2 = \pi$ . . . . .	57
4.8	Méthodes de localisation aveugle. Variations du MSE en fonction du nombre de capteurs $m$ : <b>SNR</b> = 10dB, $N = 256$ et $mc = 500$ . Cas de signaux PSK/FSK. . . . .	58
4.9	Méthodes HR. Variations du MSE en fonction du nombre d'échantillons des signaux : <b>SNR</b> = 10dB, $m = 12$ et $mc = 500$ . Cas de signaux Chirps. Signal 1 : $w_1 = \pi/4$ $w_2 = \pi/3$ . Signal 2 : $w_1 = \pi/2$ $w_2 = \pi$ . . . . .	58
4.10	Méthodes HR. Variations du MSE en fonction du nombre d'échantillons des signaux : <b>SNR</b> = 10dB, $m = 12$ et $mc = 500$ . Cas de signaux PSK/FSK. . . . .	59

4.11 Méthodes de localisation aveugle..Variations du MSE en fonction du nombre d'échantillons des signaux : <b>SNR</b> = 10dB, $m = 12$ et $mc = 500$ . Cas de signaux Chirps. Signal 1 : $w_1 = \pi/4$ $w_2 = \pi/3$ . Signal 2 : $w_1 = \pi/2$ $w_2 = \pi$ . . . . .	59
4.12 Méthodes de localisation aveugle.Variations du MSE en fonction du nombre d'échantillons des signaux : <b>SNR</b> = 10dB, $m = 12$ et $mc = 500$ . Cas de signaux PSK/FSK. . . . .	60
4.13 PSEUDO-SPECTRES normalisés des méthodes MUSIC et Scanning Technique sur l'espace des angles d'arrivée. <b>SNR</b> = 20dB, $N = 256$ et $m = 12$ . Signaux Chirps. . . . .	61
4.14 PSEUDO-SPECTRES normalisés de la méthode MUSIC sur l'espace des angles d'arrivée sur 10 réalisations. <b>SNR</b> = 5dB, $N = 256$ et $m = 12$ . Signaux Chirps. . . . .	61
4.15 PSEUDO-SPECTRES normalisés de la méthode de Scanning sur l'espace des angles d'arrivée sur 10 réalisations. <b>SNR</b> = 5dB, $N = 256$ et $m = 12$ . Signaux Chirps. . . . .	62
4.16 PSEUDO-SPECTRES normalisés de la méthode MUSIC sur l'espace des angles d'arrivée sur 10 réalisations. <b>SNR</b> = -15dB, $N = 256$ et $m = 12$ . Signaux Chirps. . . . .	62
4.17 PSEUDO-SPECTRES normalisés de la méthode de Scanning sur l'espace des angles d'arrivée sur 10 réalisations. <b>SNR</b> = -15dB, $N = 256$ et $m = 12$ . Signaux Chirps. . . . .	63
4.18 MSE sur la localisation des deux sources en fonction du SNR : $m = 12$ , $N = 256$ et $mc = 300$ . . . . .	63
4.19 MSE sur la localisation des deux sources en fonction du SNR : $m = 12$ , $N = 256$ et $mc = 300$ . . . . .	64
4.20 MSE sur la localisation des deux sources en fonction du SNR : $m = 12$ , $N = 256$ et $mc = 300$ . . . . .	64



# Bibliographie

- [1] Pr. Rabia Aksas, "*Cours d'antennes et propagation des ondes, chapitre 7 : Réseaux d'antennes*", École Nationale Polytechnique, Alger, ALGÉRIE, 2005/2006.
- [2] Adel Belouchrani, "*Note de cours : Théorie de l'estimation*", École Nationale Polytechnique, Alger, ALGÉRIE, Avril 2000.
- [3] Adel Belouchrani, "*Séparation autodidacte de sources : Algorithme, Performance et application à des signaux expérimentaux*", École Nationale Supérieure des Télécommunications, France, 1995.
- [4] Adel Belouchrani, Karim Abed-Meraim, Jean-François Cardoso, Eric Moulines, "*A Blind Source Separation Technique Using Second-Order Statistics*", IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 45, NO. 2, FEBRUARY 1997.
- [5] Nitin Bhalla, Adel Belouchrani, Moeness G.Amin, "*Application of blind signal separation techniques to airborne antenna arrays*", Journal of The Franklin Institute 336B (1999) 3-18.
- [6] C. M. COVIELLO, L. H. SIBUL, "*Blind Source Separation and Beamforming : Algebraic Technique Analysis*" IEEE TRANSACTIONS ON AEROSPACE AND ELECTRONIC SYSTEMS VOL. 40, NO. 1 JANUARY 2004.
- [7] Arnaud Doucet, Xiaodong Wang, "*Monte Carlo Methods for Signal Processing*" IEEE SIGNAL PROCESSING MAGAZINE, pp. 152-170, November 2005.

- [8] Wejwen GD, "*Array Processing For Estimating Multiple Emitter Parameters*", Shanghai JiaoTong University, Shanghai, The People's Republic of China.
- [9] Sylvie Marcos, "*Les méthodes à hautes résolution, traitement d'antenne et analyse spectrale*", Hermès, 1998.
- [10] Richard Roy, Thomas Kailath, "*ESPRIT-Estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance Techniques*", IEEE TRANSACTIONS ON ACOUSTICS. SPEECH. AND SIGNAL PROCESSING. VOL 37. NO 7. JULY 1989.
- [11] Ralph O.S Schmidt, "*Multiple Emitter Location and Signal Parameter - Estimation*", IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. AP-34, NO. 3, MARCH 1986.
- [12] A. Lee Swindelhurst, Thomas Kailath, "*A Performance Analysis Of Subspace-Based Methods in The Presence of Model Errors, Part I : Multidimensionnel Algorithms*" IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING VOL. 41, NO. 9 SEPTEMBER 1993.
- [13] A. Lee Swindelhurst, Thomas Kailath, "*A Performance Analysis Of Subspace-Based Methods in The Presence of Model Errors, Part I : The MUSIC Algorithm*" IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING VOL. 40, NO. 7 JULY 1992.
- [14] Mats Viberg, Björn Ottersten, Thomas Kailath, "*Detection and Estimation in Sensor Array Using Weighted Subspace Fitting*", IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 39, NO. 11, NOVEMBER 1991.
- [15] Mats Viberg, Björn Ottersten, "*Sensor Array Processing Based on Subspace Fitting*", IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 39, NO. 5, MAY 1991.
- [16] François Vincent, Olivier Besson, "*Estimation de signaux chirp à amplitude variant dans le temps*" ENSICA, Département Avionique et Systèmes, 1 Place Émile Blouin, 31056 Toulouse.