

*République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Ecole Nationale Polytechnique El-Harrach, Alger
Département de Génie Mécanique*

*Post Graduation Commune (UMBB, ENP, USTHB, EMP).
Mémoire de Magister en Génie Mécanique.
Option : Systèmes Mécaniques.*

THEME



***Géométrie des engrenages coniques
hélicoïdaux,
analyse des erreurs géométriques en
coefficients de correction des paramètres
de réglage de la machine de taillage.***

Présenté par Rachid IFRAH

Soutenu publiquement le : 20 / 10 / 2003 devant le jury d'examen :

- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| <i>- Pr. A. SERIDI</i> | <i>Pr, UMBB. Président.</i> |
| <i>- Dr. M. BOUAZIZ</i> | <i>M.C, ENP. Rapporteur.</i> |
| <i>- Dr. H. BELHANECHÉ</i> | <i>M.A.C.C, ENP. Examineur.</i> |
| <i>- Dr. B. BEZZAZI</i> | <i>M.C, UMBB. Examineur.</i> |
| <i>- Dr. A. BELAIDI</i> | <i>M.C, UMBB. Examineur.</i> |

ملخص:

هذه المذكرة تحتوي على ثلاثة أجزاء :

1- دراسة حول هندسة سطوح الأسنان الحلزونية للمسننات المخروطية ذات منحنى بياني كروي المنشأ (أي أسنان نظرية)، كما تحتوي على مبدأ طريقة توليد شكل السن، إحداثيات نقطة و ناظمها من سطح السن، مختلف سموك السن، زاوية المخروط الداخلي و زاوية ميل الحلزون الداخلي.

2- دراسة حول هندسة سطوح الأسنان الحلزونية للمسننات المخروطية ذات منحنى بياني «أكتوييدي» المنشأ من الصنف الأول (أي أسنان تطبيقية) ، و تحتوي أيضا على مبدأ طريقة توليد شكل السن و إحداثيات نقطة و ناظمها من سطح السن، سمك السن، المد يول و زاوية الضغط الظاهريين.

3- تحليل الأخطاء الهندسية للسن باستعمال معاملات التصحيح لعوامل الضبط على آلة التشغيل . وهذا الجزء يتطلب :

- وصف طريقة تشغيل المسننات المخروطية ذات الأسنان الحلزونية لتحديد عوامل ضبط آلة التشغيل.
- إيجاد أشعة تحليل أخطاء القياسات بطريقة « تمثيلية » بواسطة نموذج رياضي يعرف شكل السن، ثم بطريقة « تحليلية » باستعمال العلاقة الرابطة بين عوامل الضبط و المأخوذة من عبارة تحديد سمك السن.
- تقييم تصحيحات عوامل التشغيل باستعمال طريقة « أقل تربيع » .

الكلمات المفتاحية : المسننات المخروطية الحلزونية، هندسة المسننات، منحنى بياني كروي المنشأ، منحنى بياني أكتوييدي المنشأ للصنف الأول، تشغيل المسننات، تحسين العوامل، أشعة تحليل الأخطاء، عوامل الضبط .

RESUME :

Le travail de recherche se présente en trois parties :

1. Une étude sur la géométrie des surfaces de dentures des engrenages coniques hélicoïdaux à développante sphérique (ou denture théorique), comprenant notamment, le principe de génération, le calcul des coordonnées et de la normale d'un point de la surface de denture, des différentes épaisseurs de denture, des angles du cône de base et d'inclinaison de l'hélice de base.
2. Une étude sur la géométrie des surfaces de dentures des engrenages coniques hélicoïdaux en octoïde de 1^{ère} espèce (ou denture pratique), comprenant aussi, le principe de génération, le calcul des coordonnées et de la normale d'un point de la surface de denture, de l'épaisseur de denture, du module et de l'angle de pression apparents.
3. une analyse des erreurs géométriques de denture en coefficients de correction des paramètres de réglage de la machine de taillage. Cette partie a nécessité :
 - une description des procédés de taillage des engrenages coniques hélicoïdaux afin de déterminer les paramètres de réglage de la machine de taillage.
 - une construction des vecteurs d'analyse des erreurs de mesure par la « méthode par simulation » à partir du modèle mathématique définissant le profil de la denture, et par la « méthode analytique » en utilisant la relation liant les paramètres de réglage pris en compte dans l'expression de l'épaisseur de la denture.
 - une évaluation des corrections des paramètres de réglage en utilisant la technique d'optimisation aux moindres carrés.

Mots-clés : Engrenages coniques hélicoïdaux, géométrie des engrenages, développante sphérique, octoïde de 1^{ère} espèce, taillage des engrenages, optimisation des paramètres, vecteurs d'analyse des erreurs, paramètres de réglage.

SUMMARY:

The present work is divided into three parts which are as follow:

1. A study on the geometry of teeth surfaces of helicoidally bevel gear with spherical involutes (or theoretical teeth), including particularly, the principle of generation, the coordinates and the normal to teeth surface point, various teeth thicknesses, and the basic propeller inclination angle.
2. A study on the geometry of teeth surfaces of the helicoidally bevel gear in octoïde of 1^{rst} specie (or practical teeth). It also includes the principle of generation, the coordinates and the normal of teeth surface point, the teeth thickness, the basic taper angle, the apparent module and the apparent pressure angle.
3. An analysis of the geometrical teeth errors in correction coefficients of the cutting machine adjustment parameters. This part required :
 - The description of the helicoidally bevel gear cutting processes in order to determine the cutting machine adjustment parameters.
 - The construction of the measurement errors analysis vectors with the « simulation method » starting from the mathematical model defining the teeth profile and with the « analytical method », by using the relation between the adjustment parameters taken into account in the teeth thickness expression.
 - An evaluation of the cutting parameters correction by using least squares optimization method.

Keywords : Helicoidally bevel gear, gear geometry, spherical involutes, octoïde of 1^{rst} specie, gear cutting processes, optimisation of parameters, errors analysis vectors, parameters adjustment.

CITATION

Puisqu'on ne peut être universel et savoir tout ce qu'on peut savoir sur tout, il faut savoir un peu de tout. Car il est bien plus beau de savoir quelque chose de tout que de savoir tout d'une chose.

PASCAL

DEDICACES

A mes chers parents,

à ma femme et mes enfants, qui m'ont aidé et soutenu chacun à sa manière dans l'élaboration de ce travail et leur patience envers un époux et un père qui ne leur était pas tout le temps disponible.

A la mémoire de mes collègues et amis, Mrs T. KERATI, A. OUAMEUR et S. M. GHERBI, décédés lors du séisme qui a frappé notre pays le 21 Mai 2003, mais qui resteront gravés à jamais dans nos cœurs.



REMERCIEMENTS

C'est avec un grand plaisir que j'exprime ma gratitude et ma sincère reconnaissance à Monsieur M. BOUAZIZ, Maître de Conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique d'El-Harrach (ALGER), d'abord pour l'avoir eu comme enseignant au cours de l'année théorique, ensuite pour m'avoir encadré et aidé à élaborer ce travail, et enfin d'avoir gagné son amitié.

Je tiens aussi à remercier vivement :

- Monsieur M. BELHANNACHE, Maître-Assistant Chargé de Cours à l'Ecole Nationale Polytechnique d'El-Harrach (ALGER), pour l'avoir eu aussi comme enseignant en 1^{ère} année de magister et pour avoir accepté de participer au jury.
- Monsieur B. BEZZAZI, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université M' HAMED BOUGARA de BOUMERDES, pour son encouragement et son soutien et pour avoir eu l'amabilité d'accepter de participer au jury.
- Monsieur A. SERIDI, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université M'HAMED BOUGARA de BOUMERDES, pour avoir mené à bien la gestion de la 1^{ère} Post-Graduation Commune et pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.
- Monsieur A. BELAIDI, Maître de Conférences, et chef du département de Génie Mécanique à la Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université M'HAMED BOUGARA de BOUMERDES, pour l'avoir eu également comme enseignant et pour avoir accepté ma demande d'invitation de participer au jury.
- Monsieur feu T. KERATI, Maître-Assistant Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université M' HAMED BOUGARA de BOUMERDES, pour l'avoir eu aussi comme enseignant et surtout pour avoir été l'un des initiateurs de la Post-Graduation Commune.
- Toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce travail, en particulier mes collègues et amis T. BOUSHAKI, N. CHIKH et M. CHALALI, pour leur aide et leur précieux soutien dans les moments difficiles, sans oublier H. BOUTOUTAOU, A. X. HOUAS et O. DJEBILL, pour leur encouragement et leur amitié.

NOTATIONS ET ABBREVIATIONS

- K** : Sphère de rayon R et de centre S .
R : Rayon de la sphère ou longueur de la génératrice du cône (mm).
R_c : Roue conique génératrice.
R_f : Longueur de la génératrice du cône de pied (mm).
r_p : Rayon primitif de la base circulaire du cône (mm).
G : Génératrice moyenne du cône de pied du pignon.
P : Plan d'action de rayon R et appartenant à la sphère (K).
C_p : Cône primitif du pignon.
P_b : Plan de base appartenant à la roue plate génératrice.
N : Plan de génération \perp à (P_b).
S : Sommet du cône et centre de la sphère (K).
 β : Angle d'inclinaison de l'hélice (degré).
 β_b : Angle d'inclinaison de l'hélice de base (degré).
 β_p : Angle d'inclinaison de l'hélice primitive (degré).
 Δ : Angle formé par les traces sur le plan (P_b) des génératrices de base et primitive d'une denture conique droite (radian).
 θ : Angle de rotation du plan (N) autour de l'axe Sx_0 (degré).
 θ_1 : Angle de rotation du cercle de la base du cône de base autour de l'axe Sz_1 (degré).
 θ'_1 : Angle de rotation du cercle de la base du cône primitif autour de l'axe Sz_1 (degré).
 δ_b : Demi-angle au sommet du cône de base (degrés).
M : Point du profil considéré.
 X_0, Y_0, Z_0 : Coordonnées du point M dans le référentiel (O, x_0, y_0, z_0).
 X_1, Y_1, Z_1 : Coordonnées du point M dans le référentiel (O, x_1, y_1, z_1).
 \vec{U} : Vecteur unitaire porté par la droite AB et appartenant au plan (N).
 \vec{V} : Vecteur unitaire normal à \vec{U} et appartenant au plan (N).
 \vec{N} : Vecteur normal en un point M de la surface de denture.
 $\vec{N}_{x_0}, \vec{N}_{y_0}, \vec{N}_{z_0}$: Composantes de la normale \vec{N} dans le référentiel (O, x_0, y_0, z_0).
 $\vec{N}_{x_1}, \vec{N}_{y_1}, \vec{N}_{z_1}$: Composantes de la normale \vec{N} dans le référentiel (O, x_1, y_1, z_1).
Q : Point de rebroussement du profil de la denture.
O : Centre du cercle intersection de la sphère de rayon R avec le cône de base.
S_i : Epaisseur apparente de la denture du pignon (mm).
S_n : Epaisseur réelle de la denture du pignon (mm).
S_{pt} : Epaisseur primitive apparente de (à développante sphérique) du pignon (mm).
S_{bt} : Epaisseur apparente de base de la denture (à développante sphérique) du pignon (mm).
S'_{pt} : Epaisseur primitive apparente de denture (en octoïde de 1^{ère} espèce) (mm).
r'_p : Rayon primitif de la base circulaire du cône du pignon (mm).
 δ : Angle formé par l'axe du cône et la génératrice d'une dent passant par M (degré).
 δ_b : Demi-angle au sommet du cône de base (degré).
 δ_p : Demi-angle au sommet du cône primitif (degré).

Notations et abréviations

- θ_1 : Angle de rotation du cône de base au point M quelconque du profil (degré).
 θ_{1p} : Angle de rotation du cône de base au point P (primitif) du profil (degré).
 α_n : Angle de pression réel de la denture (degré).
 α_t : Angle de pression apparent de la denture (degré).
 h_a : Hauteur de saillie de la dent (mm).
 h_f : Hauteur du creux de la dent (mm).
 v_f : Angle du creux de la denture (mm).
 $\vec{\Omega}$: Vitesse instantanée de rotation autour de la génératrice AI.
MMT : Machine à mesurer tridimensionnelle
DAO : Dessin assisté par ordinateur.
CAO : Conception assistée par ordinateur.
CFAO: Conception et fabrication assistées par ordinateur.
 V_1, V_2, V_3, V_4 : Engrenages à vis sans fin.
T : Train de roues interchangeableables.
B : Berceau porte-outil pivotant.
 C_1, C_2 : Coulisseaux porte-outils animés d'un mouvement alternatif.
 O_1, O_2 : Outils à tranchant rectiligne.
 γ : Angle d'ouverture des glissières ou d'écartement des fraises (degré).
 C_f : Coefficient du creux de la dent.
V : Déplacement du profil (ou déport) (mm).
 E_f : Ecartement des fraises (mm).
 T_1, T_2 : Tourteaux comportant une succession de lames tranchantes à la périphérie.
 P_1, P_2, P_3, P_j : Paramètres définissant la surface S de la denture.
 $P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{0j}$: Paramètres nominaux respectifs définissant une surface S_0 de la denture.
 ΔP_k : Variation d'un paramètre P_k .
 E_{nk} : Erreur au point M suivant la normale à la surface S_0 .
 W_k : Champ d'analyse correspondant au paramètre P_k .
 λ_k : Coefficient donné par l'optimisation aux moindres carrés.
 $\Delta V, \Delta \alpha_n, \Delta \beta_p, \Delta \delta_p$: Variation unitaire du paramètre de réglage considéré.
Ec : Ecart simulé ou fictif.
 φ : Angle de rotation du repère $[O, x_1, y_1, z_1]$ tel que x_1 passe par le milieu du creux de la dent (radian).
 ψ : Angle de rotation de la dent d'un plan apparent à un autre (radian).
 P_t : Pas apparent de la denture (mm).
 S_n : Epaisseur réelle de denture (mm).
 S_t : Epaisseur apparente de denture (mm).
 S_{pt} : Epaisseur primitive apparente de denture (mm).
 dS_t : Vecteur de la variation de l'épaisseur apparente.

NOMENCLATURE DES FIGURES

Fig. I-1 : Types de dentures [KAL98].....	4
Fig. I-2 : Génération de la denture à développante sphérique.....	5
Fig. I-3 : Génération de la denture octoïde de 1 ^{ère} espèce.....	5
Fig. I-4 : Génération de la denture hélicoïdale à développante sphérique.....	6
Fig. I-5 : Vue dans le plan (Pb)	7
Fig. I-6 : Vue dans le plan (N).....	7
Fig. I-7 : Rotations d'axes	10
Fig. I-8 : Epaisseur apparente de denture à développante sphérique	12
Fig. I-9 : Géométrie sphérique [SPI85]	13
Fig. I-10 : Triangle sphérique O'MT	13
Fig. I-11 : Triangle sphérique ITO'	14
Fig. I-12 : Epaisseur réelle de denture.....	16
Fig. I-13 : Tracés géométriques pour le calcul de l'angle β_b	18
Fig. II-1 : Génération de la denture octoïde de 1 ^{ère} espèce avec vue dans le plan (P)	20
Fig. II-2 : Détail au voisinage du point I.....	21
Fig. II-3 : Rotations d'axes.....	25
Fig. II-4 : Epaisseur de denture octoïde de 1 ^{ère} espèce.....	26
Fig. II-5 : Triangles rectangles sphériques IMB et ITO'	28
Fig. II-6 : Tracé pour le calcul du module apparent en fonction du module réel.....	30
Fig. II-7 : Tracé de l'angle α_t en fonction de l'angle α_n	31
Fig. II-8 : Tracé pour le calcul de δ_a	32

Nomenclature des figures

<i>Fig. III-1 : Types de dentures coniques.....</i>	<i>36</i>
<i>Fig. III-2 : Génération d'une denture octoïde de 2^{ème} espèce.....</i>	<i>36</i>
<i>Fig. III-3 : Schéma cinématique d'une machine type Gleason [KAL98].....</i>	<i>37</i>
<i>Fig. III-4 : Angle γ [HEN99].....</i>	<i>38</i>
<i>Fig. III-5 : Génération d'une denture octoïde de 1^{ère} espèce.....</i>	<i>38</i>
<i>Fig. III-6 : Taillage par deux fraises-disques [KAL98].....</i>	<i>39</i>
<i>Fig. III-7 : Réglages de la pièce (taillage par fraise-disque).....</i>	<i>42</i>
<i>Fig. III-8 : Distance G et écartement E_f pour une denture conique droite [HEN99].....</i>	<i>43</i>
<i>Fig. III-9 : Tracé de l'angle φ.....</i>	<i>44</i>
<i>Fig. III-10 : Tracés de l'angle ψ.....</i>	<i>47</i>
<i>Fig. III-11: Tracé des profils théoriques de denture en développant sphérique (04 dents).....</i>	<i>48</i>
<i>Fig. III-12 : Organigramme (Fortran) d'obtention des fichiers pour simulation (méthode par simulation).....</i>	<i>50</i>
<i>Fig. III-13 : Optimisation en position et en forme de la denture (méthode par simulation)...</i>	<i>51</i>
<i>Fig. III-14 : Optimisation en position des écarts réels.....</i>	<i>52</i>
<i>Fig. III-15 : Ecartement des fraises 2γ.....</i>	<i>54</i>
<i>Fig.III-16 : Construction du vecteur représentant la variation de l'épaisseur de denture.....</i>	<i>60</i>
<i>Fig.III-17 : Organigramme (Fortran) d'obtention des fichiers pour simulation (méthode analytique).....</i>	<i>62</i>
<i>Fig.III-18 : Optimisation en position et en forme de la denture (méthode analytique).....</i>	<i>63</i>
<i>Fig. A-1 : Tracé pour le calcul de SA.....</i>	<i>69</i>
<i>Fig. A-2 : Tracés des fonctions $f(\gamma)$ et $h(\gamma) = 0$.....</i>	<i>79</i>

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE (I) : GEOMETRIE DES SURFACES DE DENTURE DES ENGRENAGES CONIQUES HELICOIDaux <i>(denture en développante sphérique)</i>	
I) INTRODUCTION.....	4
II) DEFINITION DES ENGRENAGES CONIQUES HELICOIDaux.....	4
III) DENTURE CONIQUE HELICOIDALE A DEVELOPPANTE SPHERIQUE (DENTURE THEORIQUE)	4
III-1) Principe de génération.....	6
III-2) Composantes de la normale \vec{N} en un point (M) de la surface de denture dans le référentiel (S, x_0, y_0, z_0).....	7
III-3) Coordonnées d'un point (M) générateur du profil de la denture	8
III-3-1) Coordonnées du point (M) dans le référentiel (S, x_0, y_0, z_0)	8
III-3-1-1) Calcul de la constante « d ».....	8
III-3-1-2) Résolution du système d'équations	9
III-3-2) Coordonnées du point (M) dans le référentiel (O, x_1, y_1, z_1)	10
III-3-2-1) Rotation de (S, x_0, y_0, z_0) de l'angle δ_b autour de y_0	10
III-3-2-2) Rotation de (S, x'_1, y'_1, z'_1) de l'angle θ_1 autour de z'_1	10
III-3-3) Coordonnées de la normale \vec{N} dans le repère (O, x_1, y_1, z_1)	11
III-4) Epaisseur apparente S_t de la denture du pignon.....	11
III-4-1) Relations fondamentales de trigonométrie sphérique pour un triangle rectangle.....	13
III-4-2) Calcul du demi-angle au sommet du cône de base δ_b	14
III-4-3) Calcul de l'angle θ_{1p} et θ_1	15
III-5) Epaisseur réelle S_n de la denture	15
III-6) Epaisseur de base S_{bt} de la denture.....	17
III-7) Calcul de l'angle β_b en fonction de l'angle β_p	17
III-7-1) Calcul de l'angle Δ	18
III-7-2) Calcul de l'angle d'inclinaison de base de l'hélice β_b	19
IV) CONCLUSION	19

CHAPITRE (II) : GEOMETRIE DES SURFACES DE DENTURE DES ENGRENAGES CONIQUES HELICOIDaux (denture en octoïde de 1^{ère} espèce)

I) INTRODUCTION	20
II) PRINCIPE DE GENERATION	20
III) COMPOSANTES DE LA NORMALE \vec{N} EN UN POINT DE LA SURFACE DE LA DENTURE DANS LE REFERENTIEL (S, x_0, y_0, z_0)	22
IV) COORDONNEES D'UN POINT « M » GENERATEUR DU PROFIL DE LA DENTURE.....	22
IV-1) Equation de la ligne de génération AM dans le référentiel (S, x_0, y_0, z_0)	22
IV-2) Equation du plan de génération (N) dans le référentiel (S, x_0, y_0, z_0)	23
IV-2-1) Calcul de la constante « d »	24
IV-2-2) Equation de la sphère de rayon R dans le référentiel (S, x_0, y_0, z_0)	24
IV-2-3) Coordonnées du point M dans le référentiel (S, x_0, y_0, z_0)	24
IV-2-4) Coordonnées du point M dans le référentiel (S, x_1, y_1, z_1)	25
IV-2-4-1) Rotation de (S, x_0, y_0, z_0) de l'angle δ_p autour de y_0	25
IV-2-4-2) Rotation de (S, x'_1, y'_1, z'_1) de l'angle θ'_1 autour de z'_1	25
IV-3) Coordonnées de la normale \vec{N} dans le référentiel (O, x_1, y_1, z_1)	26
IV-4) Epaisseur apparente S_t de la denture	26
IV-5) Calcul de l'angle θ'_1 en fonction de l'angle θ	28
IV-5-1) Calcul de l'angle θ	28
IV-5-2) Calcul de l'angle θ'_1	29
IV-6) Epaisseur réelle S_n de la denture	29
V) CALCUL DU MODULE APPARENT M_t	30
VI) CALCUL DE L'ANGLE DE PRESSION APPARENT α_t	31
VII) CALCUL DU DEMI-ANGLE AU SOMMET DU CONE DE TETE δ_A	32
VIII) CONCLUSION	33

CHAPITRE (III) : ANALYSE DES ERREURS GEOMETRIQUES EN COEFFICIENTS DE CORRECTION DES PARAMETRES DE REGLAGE DE LA MACHINE DE TAILLAGE

I) INTRODUCTION	34
I-1) Définitions	34
I-1-1) La modélisation	34
I-1-2) La simulation.....	34
I-1-3) L'optimisation	35

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE65

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES67

ANNEXES

ANNEXE -I-69

ANNEXE -II-70

ANNEXE -III-71

ANNEXE -IV-73

ANNEXE -V-75

ANNEXE -VI-77

ANNEXE -VII-79

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

PREAMBULE

Les *engrenages*, connus en Chine dès le III^e millénaire av. J.-C., sont couramment réalisés en métal depuis le XII^e siècle. Un engrenage de qualité doit assurer un bon rendement et une transmission exempte d'à-coups et de vibrations; ce qui se traduit par trois exigences fondamentales:

- rapport de transmission constant,
- contact continu entre deux dents (profils conjugués),
- absence de glissement.

Ces impératifs, difficilement conciliables et étudiés scientifiquement depuis le XVI^e siècle, ont reçu vers le milieu du XIX^e siècle, des solutions mathématiques satisfaisantes (arcs d'épicycloïde, arcs de cercle, à développante de cercle, pour les engrenages cylindriques et à développante sphérique pour les engrenages coniques). Toutefois, en raison de la forme spéciale du profil des dents, les problèmes de fabrication sont ardu.

Lorsqu'une haute précision n'est pas requise, on peut se contenter d'engrenages moulés (en fontes et aciers, aluminium, bronze, matières plastiques). Dans les autres cas, les engrenages sont taillés au moyen d'outils (outil-crémaillère, outil-pignon, vis-fraise, fraise-module) animés de mouvements de coupe, puis rectifiés à la meule, et éventuellement rodés. Souvent les dents sont l'objet de traitements de surface qui leur confèrent une grande dureté superficielle. Les meilleurs engrenages peuvent atteindre un rendement de 99 %. Le bruit de fonctionnement est atténué par :

- la précision de l'usinage,
- l'emploi de matières plastiques,
- l'obliquité de la denture (qui produit cependant une réaction axiale et par là, une perte de rendement).

L'évolution des machines-outils a permis de concevoir des engrenages de forme extrêmement complexe, répondant à des impératifs très particuliers, tels que les ponts arrière de voitures ou les transmissions reliant des axes de direction des véhicules routiers.

Les engrenages les plus couramment utilisés sont :

- les engrenages cylindriques à denture droite,
- les engrenages cylindriques à denture hélicoïdale,
- les engrenages coniques à denture droite,
- **les engrenages coniques à denture hélicoïdale,**
- les engrenages spiro-coniques et hypoïdes,
- les engrenages gauches (roue et vis sans fin, cylindriques à axes croisés).

PROBLEMATIQUE

L'étude et la modélisation mathématique de la géométrie de denture des engrenages permettent de :

- **Modéliser la surface de denture afin de pouvoir l'exploiter en CAO et CFAO :**
Simulations d'usinage pour une bonne précision dans la conception.
- **Optimiser les corrections des paramètres de réglage de la machine – outil :**
Corriger les erreurs géométriques de denture pour une meilleure précision dans l'usinage.
- **Etablir des cartographies de surfaces de dentures :**
Faciliter les mesures et le contrôle des pièces en métrologie.

Notre objectif est de modéliser la surface de denture d'un engrenage conique hélicoïdal et d'analyser les erreurs géométriques de denture en coefficients de correction des paramètres de réglage

Le domaine des engrenages étant très vaste, notre étude est limitée aux engrenages coniques hélicoïdaux. Bien que ces derniers, pour des raisons d'usinage, soient pratiquement remplacés par les spiro-coniques, nous avons voulu, par notre modeste contribution, développer un axe de recherche qui reste encore à investiguer.

Dans [HEN99], G. HENRIOT (France), fournit une étude très riche sur les engrenages, mais en ce qui concerne la géométrie des dentures, que ce soit pour les engrenages en général ou les engrenages coniques hélicoïdaux en particulier, l'auteur ne mentionne que les principes de génération sans développer de calculs.

Dans [KAL98], J. KALETA (France), présente une description assez détaillée sur les différents procédés de taillage et de rectification des engrenages en expliquant les différents réglages, mais ne donne que peu d'informations sur le taillage des engrenages coniques hélicoïdaux et ne fait mention d'aucun calcul des paramètres de réglage.

Dans [BOU96], M. BOUAZIZ (Algérie), traite avec détails la géométrie des engrenages cylindriques (droits et hélicoïdaux), et des engrenages coniques droits (à développante sphérique et en octoïde de 1^{ère} et 2^{ème} espèce) tout en complétant son étude par l'optimisation des paramètres de réglage de la machine de taillage pour ces types de dentures. L'auteur présente une étude très intéressante qui nous a inspiré dans l'élaboration de nos travaux de recherche, cependant, on n'y trouve aucune étude sur les engrenages coniques hélicoïdaux.

Dans [DUF98], J. DUFAILY (France), présente dans son ouvrage une étude sur la géométrie des engrenages cylindriques droits et hélicoïdaux en utilisant la méthode tensorielle, mais ne traite pas les engrenages coniques en général, et hélicoïdaux en particulier.

Dans [TSA-CHI87], Y.C. TSAI et P.C. CHIN (USA), établissent le modèle mathématique d'une denture conique droite en considérant le roulement sans glissement d'une

droite sur le cercle de base du cône de base (cas similaire à la développante de cercle). Les auteurs considèrent que le profil ainsi obtenu est une développante sphérique. Il nous semble que cette définition n'est pas celle prise communément et ne correspond pas au procédé de taillage pratiqué pour les engrenages coniques en général et hélicoïdaux en particulier.

Enfin, à notre connaissance, peu ou rares, sont les publications scientifiques ou ouvrages publiés qui expliquent la géométrie des engrenages coniques à denture hélicoïdale et la méthode d'optimisation des paramètres de réglage de la machine de taillage de ces mêmes engrenages. Dans ce domaine, nous trouvons des difficultés d'obtenir une documentation du fait que les travaux s'y rapportant sont tenus confidentiels.

OBJECTIF RECHERCHE

Notre travail qui est axé sur l'étude des engrenages coniques hélicoïdaux a pour objectif :

1. L'étude de la géométrie des surfaces de denture, donc la modélisation mathématique de ces surfaces suivant leur génération théorique et pratique.
2. L'analyse des erreurs géométriques des paramètres de réglage en coefficients de correction de la machine de taillage.

Dans notre étude, nous nous intéressons au chapitre I, au principe de génération de la surface de denture théorique (profil à développante sphérique) et au chapitre II, à celui de la denture pratique (profil en octoïde de 1^{ère} espèce), des pignons coniques à denture hélicoïdale. La génération de ces dentures introduit quelques relations de trigonométrie sphérique que nous jugeons utiles de rappeler.

Au chapitre III, nous cherchons à déterminer les corrections qu'il faut apporter aux paramètres de réglages de ou des machines de taillage afin d'améliorer la géométrie de la surface de denture du pignon et de la roue taillés, pour le profil en développante sphérique. Nous appliquerons deux méthodes d'optimisation qui nous permettront de comparer les résultats. Cela nécessitera une construction de vecteurs d'analyse que nous exposerons dans ce chapitre.

INTRODUCTION SUR LES ENGRENAGES CONIQUES

Si les engrenages cylindriques sont utilisés pour la transmission du mouvement sur un plan, les engrenages coniques sont des organes qui permettent le changement de direction du mouvement. On les appelle également les renvois d'angles.

De même qu'une crémaillère est la limite d'une roue cylindrique dont le cylindre primitif est devenu un plan primitif, on appelle **roue plate**, une roue conique dont le cône primitif est devenu un plan. Une roue plate tourne autour d'un axe qui est normal à son plan primitif.

Dans le chapitre I, nous commençons par étudier la génération de la denture d'un pignon conique à partir d'une roue plate génératrice, pour développer ensuite les calculs sur la géométrie d'une denture en développante sphérique.

Chapitre I

**GEOMETRIE DES SURFACES DE
DENTURE DES ENGRENAGES
CONIQUES HELICOIDaux
(denture en développante sphérique)**

GEOMETRIE DES SURFACES DE DENTURE DES ENGRENAGES CONIQUES HELICOIDAUX (denture en développante sphérique)

D) INTRODUCTION :

Nous représentons dans la figure I-1 le cône primitif C_P d'un pignon conique taillé, d'axe X_1 , tangent suivant SI au plan primitif P de la roue plate génératrice, tournant autour de l'axe X_0 .

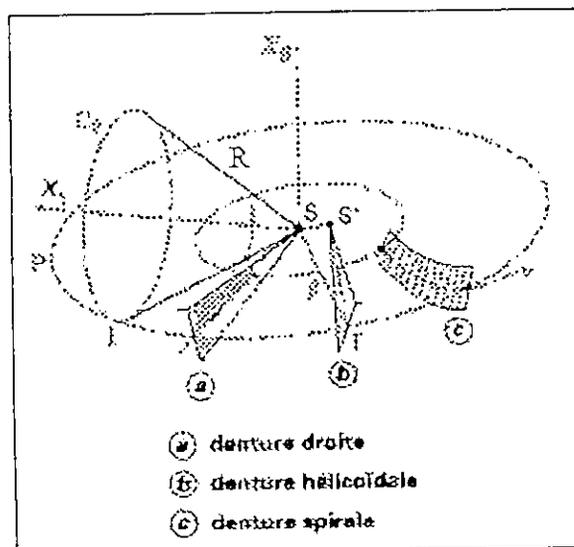


Fig. I-1 : Types de dentures [KAL98].

La forme de la denture de la roue plate génératrice permet de définir trois principaux types de dentures :

- denture droite (Fig.I-1a),
- denture hélicoïdale (Fig.I-1b),
- denture spirale (Fig.I-1c), surface d'égale pente, formée par les segments également inclinés par rapport à P, s'appuyant sur une courbe directrice \mathcal{V} caractérisant le type de la denture :

1.) si \mathcal{V} est un cercle, c'est une denture Gleason ;

2.) si \mathcal{V} est une épicycloïde allongée, c'est une denture Oerlikon ou Klingelberg.

II) DEFINITION DES ENGRENAGES CONIQUES HELICOIDAUX :

Les engrenages coniques à denture hélicoïdale présentent les particularités suivantes

- les génératrices du profil de leur denture sont inclinées d'un angle β (Fig.I-1b) et concourantes en un point S' situé sur un cercle de rayon SS' égal à $R \sin \beta$ (β étant l'angle d'inclinaison primitive de l'hélice et R , la longueur de la génératrice du cône primitif); contrairement à celles des engrenages coniques à denture droite, qui sont concourantes en un point S qui est le sommet du cône primitif (Fig.I-1a).
- Il existe trois définitions pour la génération de la surface de leur denture : la développante sphérique (denture assurant la conjugaison exacte des profils en contact ou denture théorique), et les octoïdes de 1^{ère} et de 2^{ème} espèce (dentures pratiques). Pour ces trois types de figures, le profil de la denture est tracé sur une sphère (K) de rayon R (Fig.I-2 et I-3). Le lecteur trouvera plus de détails à la suite de ce chapitre et dans le chapitre II.

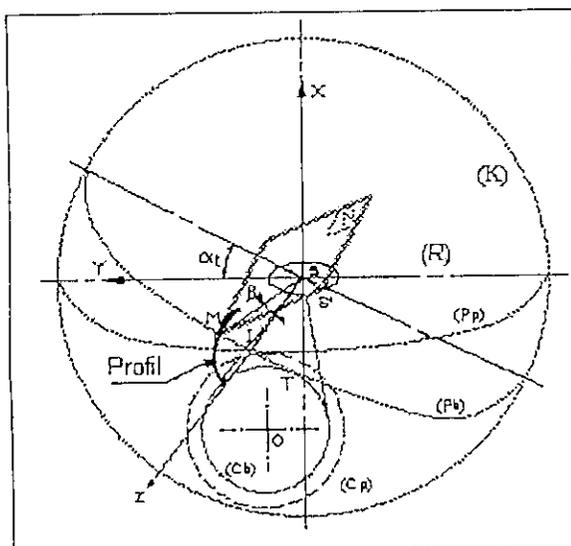


Fig. I-2 : Génération de la denture à développante sphérique.

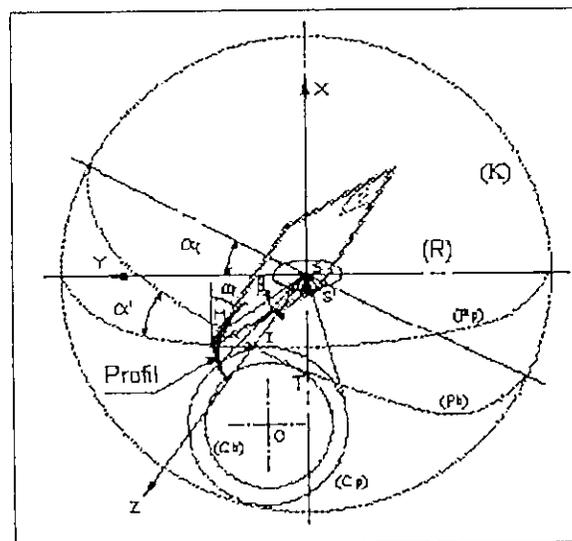


Fig. I-3 : Génération de la denture octoïde de 1^{ère} espèce.

III) DENTURE CONIQUE HELICOÏDALE A DEVELOPPANTE SPHERIQUE (denture théorique)

III-1) Principe de génération :

La figure I-4 illustre la génération d'une denture conique hélicoïdale à développante sphérique. Le plan (P_b) , appelé plan d'action, passe par le centre S de la sphère de rayon R et roule sans glisser sur le cône de base de demi-angle au sommet δ_b . La génératrice du profil au point M passe par un point S' tel que SM' et SM forment un angle β . Le plan (N) qui passe par S' est normal à (P_b) et lui est invariablement lié. La trace de (P_b) sur la sphère est un grand cercle de rayon R appelé « ligne d'action ».

Le profil de la denture étant décrit par le point M , intersection de cette ligne d'action avec le plan de génération (N) , par conséquent, il suffit de déterminer les coordonnées X_1, Y_1, Z_1 de ce point et les composantes de sa normale \vec{N} dans le repère-pièce, pour connaître l'expression du profil.

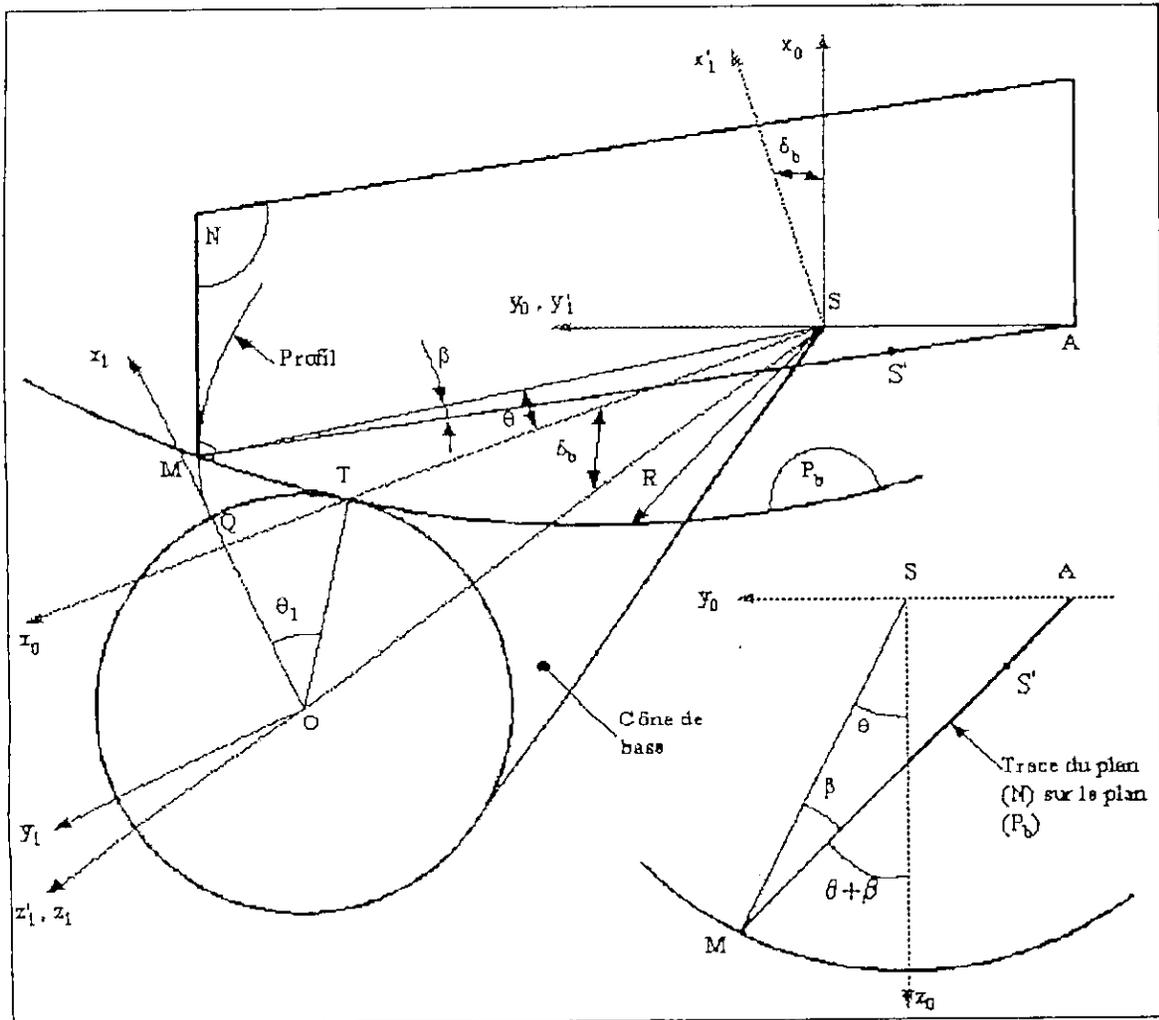


Fig. I-4 : Génération de la denture hélicoïdale à développante sphérique.

Légende :

- (P_b) : Plan de base.
- (N) : Plan de génération \perp à (P_b) .
- S : Sommet du cône.
- β : Angle d'inclinaison du plan (N) par rapport à SM (angle d'hélice de base).
- θ : Angle de rotation du plan (N) autour de l'axe Sx_0 .
- δ_b : Demi-angle au sommet du cône de base.
- ST : Intersection du plan (P_b) avec le cône de base.
- M : Point du profil en développante.
- Q : Point de rebroussement du profil.
- O : Centre du cercle intersection de la sphère de rayon $R = ST = SM$ avec le cône de base.

III-2) Composantes de la normale \vec{N} en un point M de la surface de denture dans le référentiel (S, x_0, y_0, z_0) :

Soient le vecteur unitaire \vec{V} porté par AM (intersection du plan (N) avec le plan (P_b)) et le vecteur \vec{U} porté par le plan (N) , passant par M et parallèle à l'axe x_0 . Ces deux vecteurs appartiennent au plan (N) et sont perpendiculaires au point (M) ; donc leur produit vectoriel est un vecteur normal au plan (N) en ce point (Fig.I-5 et I-6).

Nous pouvons déduire que la normale \vec{N} est :

$$\vec{N} = \vec{U} \wedge \vec{V} \tag{I-1}$$

Avec :
$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sin(\theta + \beta) \\ -\cos(\theta + \beta) \end{Bmatrix} \quad \text{et :} \quad \vec{U} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où :
$$\vec{N} = \begin{Bmatrix} N_{x_0} = 0 \\ N_{y_0} = \cos(\theta + \beta) \\ N_{z_0} = -\sin(\theta + \beta) \end{Bmatrix} \tag{I-2}$$

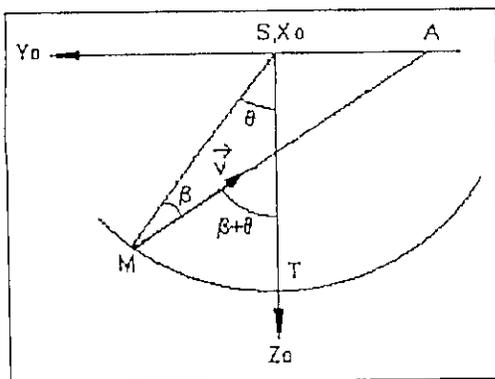


Fig. I-5 : Vue dans le plan (P_b) .

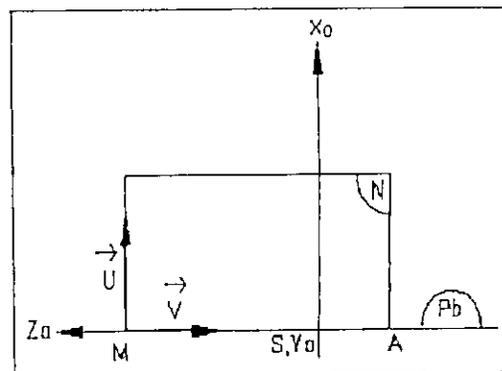


Fig. I-6 : Vue dans le plan (N) .

III-3) Coordonnées d'un point M générateur du profil de la denture :

III-3-1) Dans le référentiel (S, x_0, y_0, z_0) :

Le point M de coordonnées (X_0, Y_0, Z_0) se situe sur le cercle (P_b) à l'intersection de ce même cercle avec le plan de génération (N) à une distance $SM = R$, par conséquent ses coordonnées sur l'axe x_0 sont nulles, d'où : $X_0 = 0$

Il nous reste par contre à déterminer les coordonnées Y_0 et Z_0 . Le point M appartient à la sphère (K) et au plan (N), il vérifie donc l'équation de chacune de ces deux figures. Nous pouvons alors écrire :

$$X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 = R^2 \quad (\text{équation de la sphère (K)}) \quad (\text{I-3})$$

$$aX_0 + bY_0 + cZ_0 + d = 0 \quad (\text{équation générale du plan N}) \quad (\text{I-4})$$

Comme : $X_0 = 0$, l'équation (I-3) et (I-4) deviennent :

$$Y_0^2 + Z_0^2 = R^2 \quad (\text{équation du cercle } P_b) \quad (\text{I-5})$$

$$bY_0 + cZ_0 + d = 0 \quad (\text{équation particulière du plan N}) \quad (\text{I-6})$$

Les coordonnées de la normale \vec{N} au point (M) étant connues, nous pouvons dire que :

$$b = \cos(\theta + \beta)$$

et :

$$c = -\sin(\theta + \beta)$$

L'équation du plan (N) s'écrit alors:

$$Y_0 \cos(\theta + \beta) - Z_0 \sin(\theta + \beta) + d = 0 \quad (\text{avec « d » constante à déterminer}) \quad (\text{I-7})$$

III-3-1-1) Calcul de la constante « d » :

Le point A appartient au plan (N), donc il vérifie l'équation du plan.

$$\text{Les coordonnées du point A dans le repère (S, } X_0, Y_0, Z_0) \text{ sont : } A \begin{cases} X_0 = 0 \\ Y_0 = -SA \\ Z_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{I-8})$$

Calcul du segment SA (voir annexe I) :

L'expression de la valeur du segment SA s'écrit :

$$SA = R \frac{\sin \beta}{\cos(\theta + \beta)} \quad (\text{I-9})$$

D'où :

$$Y_0 = -SA = -R \frac{\sin \beta}{\cos(\theta + \beta)} \quad (\text{I-10})$$

Remplaçons Y_0 dans l'équation (I-7) sachant que : $X_0 = Z_0 = 0$:

$$-\left[R \frac{\sin \beta}{\cos(\theta + \beta)} \right] \cos(\theta + \beta) + d = 0 \quad (\text{I-11})$$

La valeur de la constante «d» est:

$$d = \left[R \frac{\sin \beta}{\cos(\theta + \beta)} \right] \cos(\theta + \beta) = R \sin \beta \quad (\text{I-12})$$

L'équation du plan (N) s'écrit alors :

$$Y_0 \cos(\theta + \beta) - Z_0 \sin(\theta + \beta) + R \sin \beta = 0 \quad (\text{I-13})$$

III-3-1-2) Résolution du système d'équations (voir annexe II) :

$$\begin{cases} X_0^2 + Y_0^2 - R^2 = 0 & (1) \\ Y_0 \cos(\theta + \beta) - Z_0 \sin(\theta + \beta) + R \sin \beta = 0 & (2) \end{cases}$$

Tous calculs faits, l'expression de Y_0 s'écrit :

$$Y_0 = \frac{Z_0 \sin(\theta + \beta) - R \sin \beta}{\cos(\theta + \beta)} \quad (\text{I-14})$$

L'expression de Z_0 est une équation du 2^{ème} degré qui admet deux racines :

$$Z_{01,2} = R [\sin(\theta + \beta) \sin \beta \pm \cos(\theta + \beta) \cos \beta] \quad (\text{I-15})$$

Après simplification :

$$\begin{cases} Z_{01} = R [\sin(\theta + \beta) \sin \beta + \cos(\theta + \beta) \cos \beta] = R \cos \theta \\ Z_{02} = R [\sin(\theta + \beta) \sin \beta - \cos(\theta + \beta) \cos \beta] = -R \cos(\theta + 2\beta) \end{cases}$$

Application numérique :

Pour :

$$\begin{cases} \beta = 15^\circ = \pi/12 \\ \theta = 30^\circ = \pi/6 \\ \theta + 2\beta = 60^\circ = \pi/3 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} Z_{01} &= +0,86603 R \\ Z_{02} &= -0,50000 R \end{aligned}$$

Z ne peut être négatif car le point (M) est porté par l'axe z positif; donc on retiendra la racine positive, d'où :

$$Z_0 = R \cos \theta \tag{I-16}$$

On peut déduire la valeur de Y_0 :

$$Y_0 = R \left[\frac{\cos \theta \sin(\theta + \beta) - \sin \beta}{\cos(\theta + \beta)} \right] \tag{I-17}$$

Après simplifications, l'équation (I-17) devient :

$$Y_0 = R \sin \theta \tag{I-18}$$

III-3-2) Coordonnées du point (M) dans le référentiel (O, x_1, y_1, z_1) :

On exprime les coordonnées du point M et les composantes de la normale \vec{N} dans le référentiel (O, x_1, y_1, z_1) en procédant à des changements de repères :

III-3-2-1) Rotation de (S, x_0, y_0, z_0) de l'angle δ_b autour de y_0 (Fig. I-7a) :

Comme :

$$X_0 = 0$$

$$M \begin{cases} X'_1 = Z_0 \sin \delta_b + X_0 \cos \delta_b = Z_0 \sin \delta_b \\ Y'_1 = Y_0 \\ Z'_1 = Z_0 \cos \delta_b - X_0 \sin \delta_b = Z_0 \cos \delta_b \end{cases} \tag{I-19}$$

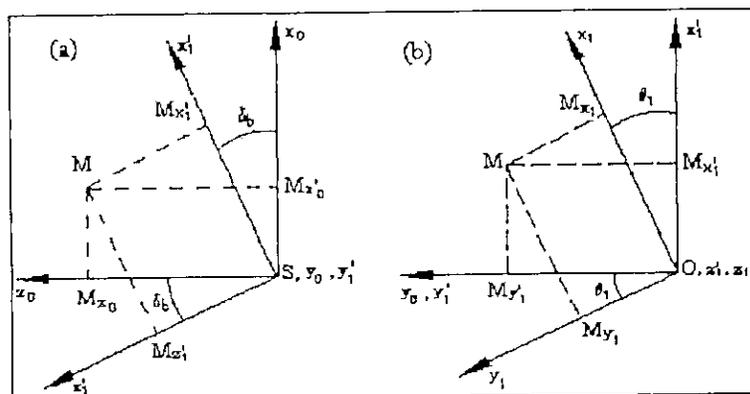


Fig. I-7: Rotations d'axes.

III-3-2-2) Rotation de (S, x'_1, y'_1, z'_1) de l'angle θ_1 autour de z'_1 (Fig. I-7b) :

$$Z_1 = Z'_1$$

$$Y_1 = Y'_1 \cos \theta_1 - X'_1 \sin \theta_1$$

$$Y_1 = Y_0 \cos \theta_1 - Z_0 \sin \delta_b \sin \theta_1$$

$$X_1 = Y'_1 \sin \theta_1 + X'_1 \cos \theta_1$$

$$X_1 = Y_0 \sin \theta_1 + Z_0 \sin \delta_b \cos \theta_1$$

D'où les coordonnées du point M dans le référentiel (O, x₁, y₁, z₁) :

$$M \begin{cases} X_1 = Y_0 \sin \theta_1 + Z_0 \sin \delta_b \cos \theta_1 \\ Y_1 = Y_0 \cos \theta_1 - Z_0 \sin \delta_b \sin \theta_1 \\ Z_1 = Z_0 \cos \delta_b \end{cases} \quad (\text{I-20})$$

En remplaçant Y₀ et Z₀ par leurs valeurs, l'expression (I-19) s'écrit alors :

$$M \begin{cases} X_1 = R(\sin \theta \sin \theta_1 + \cos \theta \sin \delta_b \cos \theta_1) \\ Y_1 = R(\sin \theta \cos \theta_1 - \cos \theta \sin \delta_b \sin \theta_1) \\ Z_1 = R \cos \theta \cos \delta_b \end{cases} \quad (\text{I-21})$$

III-3-3) Composantes de la normale \vec{N} dans le repère (O, x₁, y₁, z₁) :

$$\vec{N} \begin{cases} N_{x_1} = N_{y_0} \sin \theta_1 + N_{z_0} \sin \delta_b \cos \theta_1 \\ N_{y_1} = N_{y_0} \cos \theta_1 - N_{z_0} \sin \delta_b \sin \theta_1 \\ N_{z_1} = N_{z_0} \cos \delta_b \end{cases} \quad (\text{I-22})$$

En remplaçant : N_{x0}, N_{y0} et N_{z0}, on obtient finalement :

$$\vec{N} \begin{cases} N_{x_1} = \cos(\theta + \beta) \sin \theta_1 - \sin(\theta + \beta) \sin \delta_b \cos \theta_1 \\ N_{y_1} = \cos(\theta + \beta) \cos \theta_1 + \sin(\theta + \beta) \sin \delta_b \sin \theta_1 \\ N_{z_1} = -\sin(\theta + \beta) \cos \delta_b \end{cases} \quad (\text{I-23})$$

III-4) : Epaisseur de la denture apparente S_t du pignon :

Considérons une sphère de rayon R et un profil en développante sphérique tracé sur cette sphère (Fig. I-8). Soit M un point du profil dont le vecteur SM fait un angle δ avec l'axe Sz. De la figure (a) on peut exprimer l'épaisseur S_t de la denture en un point (M) quelconque du profil :

$$S_t = \left[\frac{S'_t}{r'_p} - 2(\phi - \phi_p) \right] r \quad (\text{I-24})$$

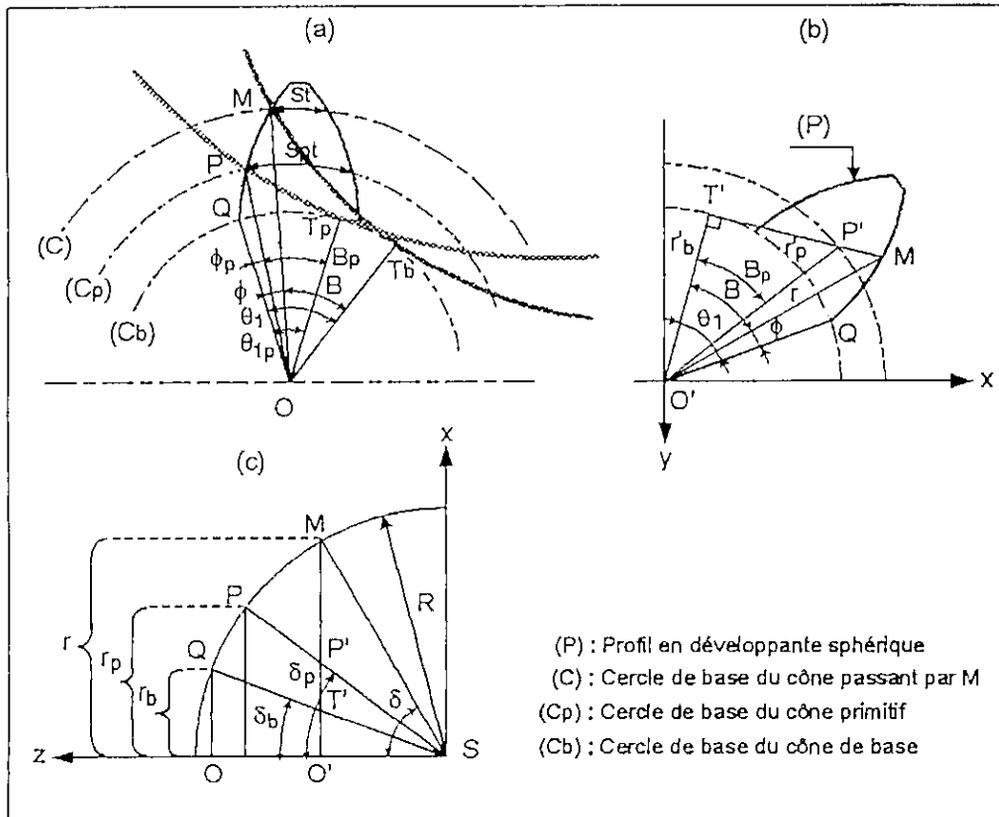


Fig. I-8 : Epaisseur apparente de denture à développante sphérique.

De la figure (c) on déduit :

$$r = O'M = R \sin \delta$$

$$r'_b = O'T' = R \cos \delta \operatorname{tg} \delta_b$$

$$r'_p = O'P' = R \cos \delta \operatorname{tg} \delta_p$$

De la figure (b) on déduit :

$$r'_b = r \cos B$$

En remplaçant (r) et (r'_b), on déduit :

$$\cos B = \frac{\operatorname{tg} \delta_b}{\operatorname{tg} \delta}$$

Calcul de l'angle ϕ pour un point M quelconque sur le profil :

$$\phi = \theta_1 - B = \theta_1 - \arccos \left(\frac{\operatorname{tg} \delta_b}{\operatorname{tg} \delta} \right)$$

Calcul de ϕ_p au point P (pour M confondu avec P) :

$$\phi_p = \theta_{1p} - B_p = \theta_{1p} - \arccos \left(\frac{\operatorname{tg} \delta_b}{\operatorname{tg} \delta_p} \right) \quad \text{avec :} \quad \cos B_p = \frac{\operatorname{tg} \delta_b}{\operatorname{tg} \delta_p}$$

Calcul de $(\phi - \phi_p)$:

$$\phi - \phi_p = \theta_1 - \theta_{1p} - \left[\arccos \left(\frac{\text{tg } \delta_b}{\text{tg } \delta} \right) - \arccos \left(\frac{\text{tg } \delta_b}{\text{tg } \delta_p} \right) \right] \quad (\text{I-25})$$

Calcul de S_i :

$$\frac{S'_{pt}}{r'_p} = \frac{S_{pt}}{r_p} \quad (\text{I-26})$$

En remplaçant (I-25), (I-26) et (r) dans (I-24) l'expression de S_i devient :

$$S_i = R \sin \delta \left\{ \frac{S_{pt}}{r_p} + 2(\theta_{1p} - \theta_1) - 2 \left[\arccos \left(\frac{\text{tg } \delta_b}{\text{tg } \delta_p} \right) - \arccos \left(\frac{\text{tg } \delta_b}{\text{tg } \delta} \right) \right] \right\} \quad (\text{I-27})$$

Avec :

- R : Rayon de la sphère ou longueur de la génératrice du cône.
- r_p : Rayon primitif de la base circulaire du cône.
- S_{pt} : Epaisseur primitive apparente de denture.
- δ : Angle formé par l'axe du cône et la génératrice d'une dent passant par M.
- δ_b : Demi-angle au sommet du cône de base.
- δ_p : Demi-angle au sommet du cône primitif.
- θ_1 : Angle de rotation du cône de base au point M quelconque du profil.
- θ_{1p} : Angle de rotation du cône de base au point P (primitif) du profil.

III-4-1) Relations fondamentales de trigonométrie sphérique pour un triangle rectangle :

Dans la figure (I-9) on a représenté le triangle ABC rectangle en C . Les cotés a , b et c (qui sont des arcs de grands cercles de la sphère) sont opposés respectivement aux angles A , B et C . Ce triangle est lié au centre O de la sphère formant ainsi un triangle rectangle sphérique.

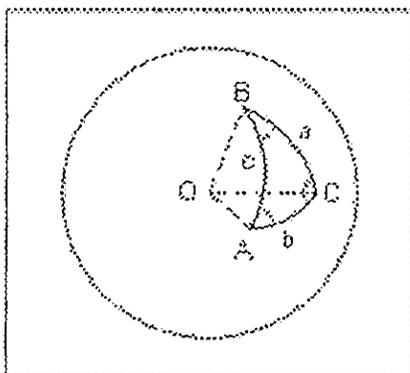


Fig. I-9 : Géométrie sphérique [SPI85].

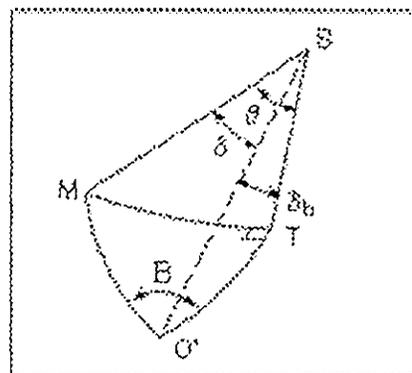


Fig. I-10 : Triangle sphérique O'MT.

D'après les références [SPI85] nous citons les relations de trigonométrie sphérique relatives au triangle rectangle sphérique suscit.

- 1) $\sin a = \sin c \sin A$
- 2) $\sin b = \sin c \sin B$
- 3) $\cos A = \cos a \sin B$
- 4) $\cos B = \cos b \sin A$
- 5) $\cos c = \cos a \cos b$
- 6) $\cos c = \cotg A \cotg B$
- 7) $\tg b = \sin a \tg B$
- 8) $\tg a = \sin b \tg A$
- 9) $\tg a = \tg c \cos B$
- 10) $\tg b = \tg c \cos A$

III-4-2) Calcul du demi-angle au sommet du cône de base δ_b :

En appliquant la relation N°3 au triangle sphérique ITO' de centre S et rectangle en T, (Fig. I-11), on obtient :

$$\sin \delta_b = \sin \delta_p \cos \alpha_t \quad (\text{I-28})$$

Avec δ_p le demi-angle au sommet du cône primitif et α_t l'angle de pression apparent de la denture.

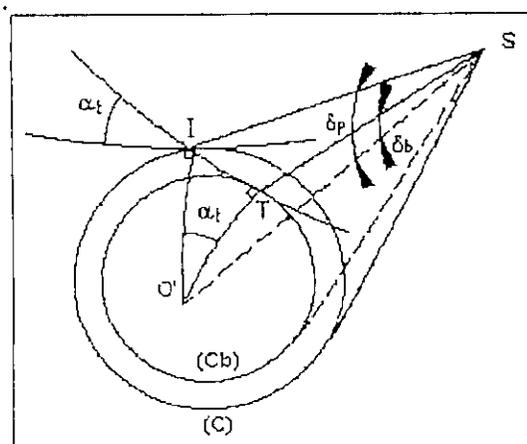


Fig. I-11 : Triangle sphérique ITO'.

III-4-3) Calcul des angles θ_{1p} et θ_1 :

En appliquant la relation N°5 au triangle sphérique O'MT (Fig. I-10), nous aurons :

$$\cos \delta = \cos \theta \cos \delta_b \quad (\text{I-29})$$

pour : $\delta = \delta_p$ on a : $\theta = \theta_p$ et : $\theta_1 = \theta_{1p}$

d'où : $\cos \delta_p = \cos \theta_p \cos \delta_b$

donc : $\cos \theta_p = \frac{\cos \delta_p}{\cos \delta_b}$ (I-30)

Le roulement sans glissement du cercle de rayon R dans le plan (Pb) sur le cercle de rayon (r_b) du cône de base nous permet d'écrire :

$$r_b \theta_{1p} = R \theta_p \quad \Rightarrow \quad \theta_{1p} = \left(\frac{R}{r_b} \right) \theta_p$$

En remplaçant (r_b) on obtient :

$$\theta_{1p} = \frac{\theta_p}{\sin \delta_b} \quad (\text{I-31})$$

Pour un point quelconque sur le profil nous aurons :

$$\cos \theta = \frac{\cos \delta}{\cos \delta_b} \quad \text{et : } \theta_1 = \frac{\theta}{\sin \delta_b} \quad (\text{I-32})$$

III-5) Epaisseur réelle S_n de la denture :

Traçons les génératrices AS et BS d'une denture conique droite tels que AB et S, représentent respectivement l'épaisseur primitive de la dent et le point de convergence de ces génératrices. Les points A et B appartenant aux deux flancs de la dent et au plan circulaire (P) de rayon R, la section de la dent obtenue est un triangle isocèle ABS tel que : AS = BS = R.

Traçons aussi les génératrices AS' et BS' d'une denture conique hélicoïdale tel que AB et S' représentent respectivement l'épaisseur primitive apparente de la dent et le point de convergence de ces génératrices. La génératrice AS' est inclinée par rapport à AS d'un angle β_p tel que : $SS' = R \sin \beta_p$ (Fig.I-12a). L'épaisseur réelle S_n est représentée par un segment BC perpendiculaire à l'axe de la denture hélicoïdale, formant ainsi un autre triangle isocèle BCS' tel que : $BS' = CS'$ (Fig.I-12b). Nous devons donc déterminer l'expression de l'épaisseur S_n en fonction de l'épaisseur apparente S_t calculée précédemment, de l'angle d'inclinaison de l'hélice primitive β_p et du rayon R du plan (P) appartenant à la sphère (K). Nous devons aussi vérifier la condition que pour un angle β_p nul, la valeur de S_n doit être égale à S_t (cas des engrenages coniques hélicoïdaux).

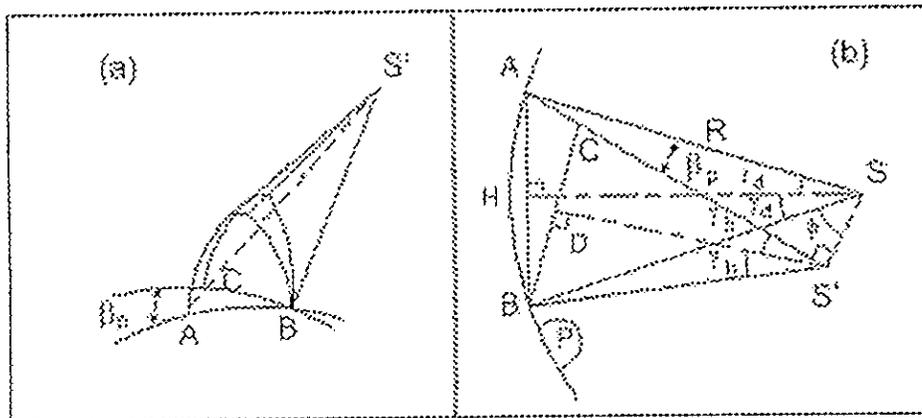


Fig. I-12 : Epaisseur réelle de denture.

Nous avons :

- $AS = BS = R$
- $SS' = R \sin \beta_p$
- $AS' = R \cos \beta_p$
- $AB = S_t$
- $BS' = CS'$
- $BC = S_n$: Quantité à rechercher en fonction de S_t , R et β_p (Voir calcul en annexe III)

Tous calculs faits l'expression de l'épaisseur réelle de la denture en fonction de son épaisseur apparente s'écrit :

$$S_n = 2R \sin \left[\frac{\arcsin \left(\frac{\cos \phi - \sin \beta_p}{\sqrt{1 + \sin^2 \beta_p - 2 \sin \beta_p \cdot \cos \phi}} \right)}{2} \right] \sqrt{1 + \sin^2 \beta_p - 2 \sin \beta_p \cdot \cos \phi} \quad (I-33)$$

Avec :

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \beta_p - 2 \arcsin \left(\frac{S_t}{2R} \right) \quad (I-34)$$

Où :

- β_p est l'angle d'inclinaison de l'hélice primitive (exprimé en radians),
- S_t est l'épaisseur apparente de la dent,
- R est la longueur de la génératrice du cône primitif.

Application numérique :

Posons : $R = 90 \text{ mm}$ et $S_t = 10 \text{ mm}$

- Pour $\beta = \pi / 6 = 30^\circ \Rightarrow S_n = 8,3829 \text{ mm}$
- Pour $\beta = \pi / 7,2 = 25^\circ \Rightarrow S_n = 8,8287 \text{ mm}$
- Pour $\beta = \pi / 9 = 20^\circ \Rightarrow S_n = 9,2072 \text{ mm}$
- Pour $\beta = \pi / 12 = 15^\circ \Rightarrow S_n = 9,5179 \text{ mm}$
- Pour $\beta = 0 \Rightarrow S_n = S_t = 10 \text{ mm}$

Remarques :

Nous remarquons que plus la valeur de β_p diminue, plus l'épaisseur réelle augmente et se rapproche de l'épaisseur apparente. Pour un angle β_p nul, la valeur de S_n est égale à celle de S_t : résultats qui confirment la condition posée.

III-6) Epaisseur apparente de base S_{bt} de la denture :

Comme : $\theta_l = 0$ et : $\delta = \delta_b$ avec : $\cos \delta_b = \frac{\cos \delta_p}{\cos \theta_p}$

L'expression de l'épaisseur de base apparente S_{bt} peut s'écrire :

$$S_{bt} = R \sin \delta_b \left\{ \frac{S_{Pt}}{r_p} + 2 \left[\theta_p - \arccos \left(\frac{\operatorname{tg} \delta_b}{\operatorname{tg} \delta_p} \right) \right] \right\} \quad (\text{I-35})$$

Nous pouvons déduire l'expression de l'épaisseur de base réelle S_{bn} de la même manière :

$$S_{bn} = 2R \sin \left[\frac{\arcsin \left(\frac{\cos \phi - \sin \beta_b}{\sqrt{1 + \sin^2 \beta_b - 2 \sin \beta_b \cdot \cos \phi}} \right)}{2} \right] \sqrt{1 + \sin^2 \beta_b - 2 \sin \beta_b \cdot \cos \phi} \quad (\text{I-36})$$

Avec : $\phi = \frac{\pi}{2} - \beta_b - 2 \arcsin \left(\frac{S_{bt}}{2R} \right)$

III-7) Calcul de l'angle β_b en fonction de l'angle β_p :

L'angle d'inclinaison primitive de l'hélice β_p est une donnée (donc connu) , la génératrice du profil d'une dent au cône primitif est toujours tangente à un cercle de rayon r en un point S' tel que : $r = SS' = R \sin \beta_p$.

Comme toutes les génératrices sont concourantes au point S' , l'angle β est variable en tout point du profil. Cet angle β est fonction de β_p et d'un autre angle que nous appellerons Δ , dépendant de l'épaisseur de la denture, donc variable (Fig.I-13a).

Prenons le point Q comme point d'intersection du plan (P_b) et du cône de base et projetons sur ce même plan le point P . Le point P' est la trace de P sur (P_b) et par conséquent les droites $P'S'$ et QS' représentent les traces des génératrices du profil, respectivement au cercle primitif et au cercle de base, sur ce même plan.

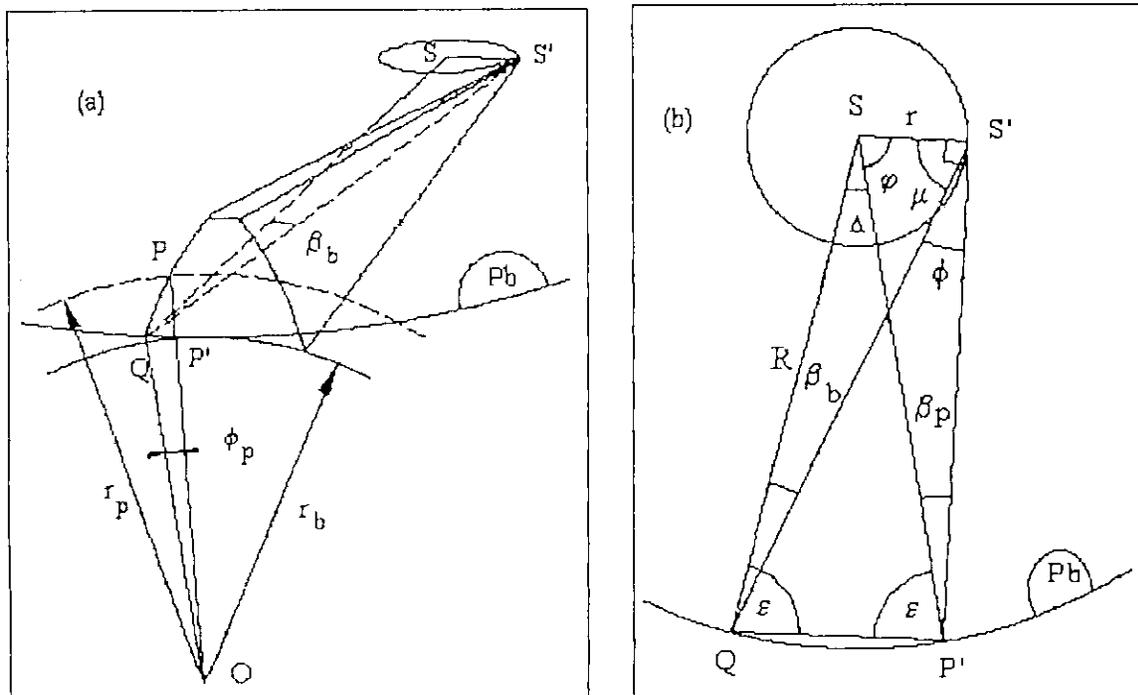


Fig. I-13 : Tracés géométriques pour le calcul de l'angle β_b .

Joignons les points Q et P' au sommet S du cône tel que QS et P'S forment un angle Δ et traçons la corde QP' et le rayon $r = SS'$

Dans le tracé de la figure I-13b, nous remarquons que si l'on fait pivoter autour de S la génératrice QS vers P'S, l'angle Δ diminue. L'angle β_b , qui est toujours plus petit que β_p , tend vers ce dernier. Pour un angle Δ nul (Q confondu avec P'), β_b est égal à β_p et le profil devient un méridien perpendiculaire au plan (P_b). Nous devons aussi vérifier la condition suivante : pour $r = 0 \Rightarrow \beta_p = \beta_b = 0$ (cas des engrenages coniques droits).

III-7-1) Calcul de l'angle Δ :

Le roulement sans glissement du plan (P_b) sur le cône de base (C_b) nous permet d'écrire :

$$\phi_p r_b = \Delta R \quad \Rightarrow \quad \Delta = \left(\frac{\phi_p r_b}{R} \right) \quad (I-37)$$

En remplaçant : r_b , ϕ_p dans (I-37), l'expression de Δ sera :

$$\Delta = \arccos \left(\frac{\cos \delta_p}{\cos \delta_b} \right) - \arccos \left(\frac{\operatorname{tg} \delta_b}{\operatorname{tg} \delta_p} \right) \sin \delta_b \quad (I-38)$$

III-7-2) Calcul de l'angle de l'inclinaison de l'hélice de base β_b (voir annexe IV) :

Tous calculs faits l'expression générale de l'angle de l'inclinaison de l'hélice de base β_b s'écrit :

$$\beta_b = \frac{\pi}{2} + \beta_p - \left\{ \Delta + \arccos \left[\frac{\sin \beta_p - \sin(\beta_p - \Delta)}{\sqrt{1 + \sin^2 \beta_p - 2 \sin \beta_p \sin(\beta_p - \Delta)}} \right] \right\} \quad (I-39)$$

avec :

- Δ : Angle formé par les traces sur le plan (P_b) des génératrices de base et primitive d'une denture droite.
- β_p : Angle d'inclinaison primitive de l'hélice.

Application numérique :

$$\text{Posons : } \begin{cases} \beta_p = 15^\circ = \pi/12 \\ \delta_p = 30^\circ = \pi/6 \\ \delta_b = 25^\circ = 5\pi/36 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 1,877^\circ = \pi/95,898$$

$$\text{Et : } \beta_b = 14,992^\circ < \beta_p$$

$$\text{Pour : } \Delta = 0, \quad \beta_b = \beta_p = 15^\circ$$

$$\text{Et pour : } \beta_p = 0, \quad \beta_b = 0$$

Remarques :

1. L'angle β_b est toujours inférieur à β_p quelque soit sa valeur.
2. Pour un angle Δ nul, la valeur de β_b est identique à celle de β_p .
3. Pour β_p nul, l'angle β_b s'annule aussi (cas des engrenages coniques à denture droite).

Ces résultats confirment la remarque faite précédemment et vérifient la condition posée.

IV- CONCLUSION :

Nous avons présenté dans ce chapitre les modèles mathématiques pour une denture conique hélicoïdale à développante sphérique. Ces modèles mathématiques peuvent être utilisés à profit pour le contrôle sur une machine à mesurer tridimensionnelle assistée par ordinateur.

On sait que les dentures hélicoïdales font intervenir des paramètres géométriques apparents (par exemple, le module et l'angle de pression apparents). Leur détermination sera établie dans le prochain chapitre qui traitera la géométrie des engrenages coniques à denture hélicoïdale en octoïde de 1^{ère} espèce (ou denture pratique).

Chapitre II

**GEOMETRIE DES SURFACES DE
DENTURE DES ENGRENAGES
CONIQUES HELICOIDAUX
(denture en octoïde de 1^{ère} espèce)**

GEOMETRIE DES SURFACES DE DENTURES DES ENGRENAGES CONIQUES HELICOIDAUX (denture en octoïde de 1^{ère} espèce)

D) INTRODUCTION :

Dans ce qui suit, nous allons définir la denture conique hélicoïdale en octoïde de 1^{ère} espèce, en utilisant le concept de la roue génératrice. Nous appliquerons la même procédure de calcul qui a été utilisée pour la denture en développante sphérique.

Le profil de cette denture est généré par une roue plate dont le **plan primitif** roule sans glisser sur le **cône primitif** du pignon à tailler. Quant à la denture octoïde de 2^{ème} espèce, son profil est généré par une roue conique dont le **cône primitif** d'angle $(\pi/2 - \nu_f)$ roule sans glisser sur celui du pignon à tailler (ν_f étant l'angle du creux de la denture).

II) PRINCIPE DE GENERATION :

La figure II-1 schématise le principe de génération d'une denture conique hélicoïdale en octoïde de 1^{ère} espèce. Le plan (P), appelé plan d'action, passe par le centre S de la sphère de rayon R et roule sans glisser sur le cône primitif C_p de demi-angle au sommet δ_p . La trace de (P) sur la sphère est un grand cercle de rayon R appelée «ligne d'action».

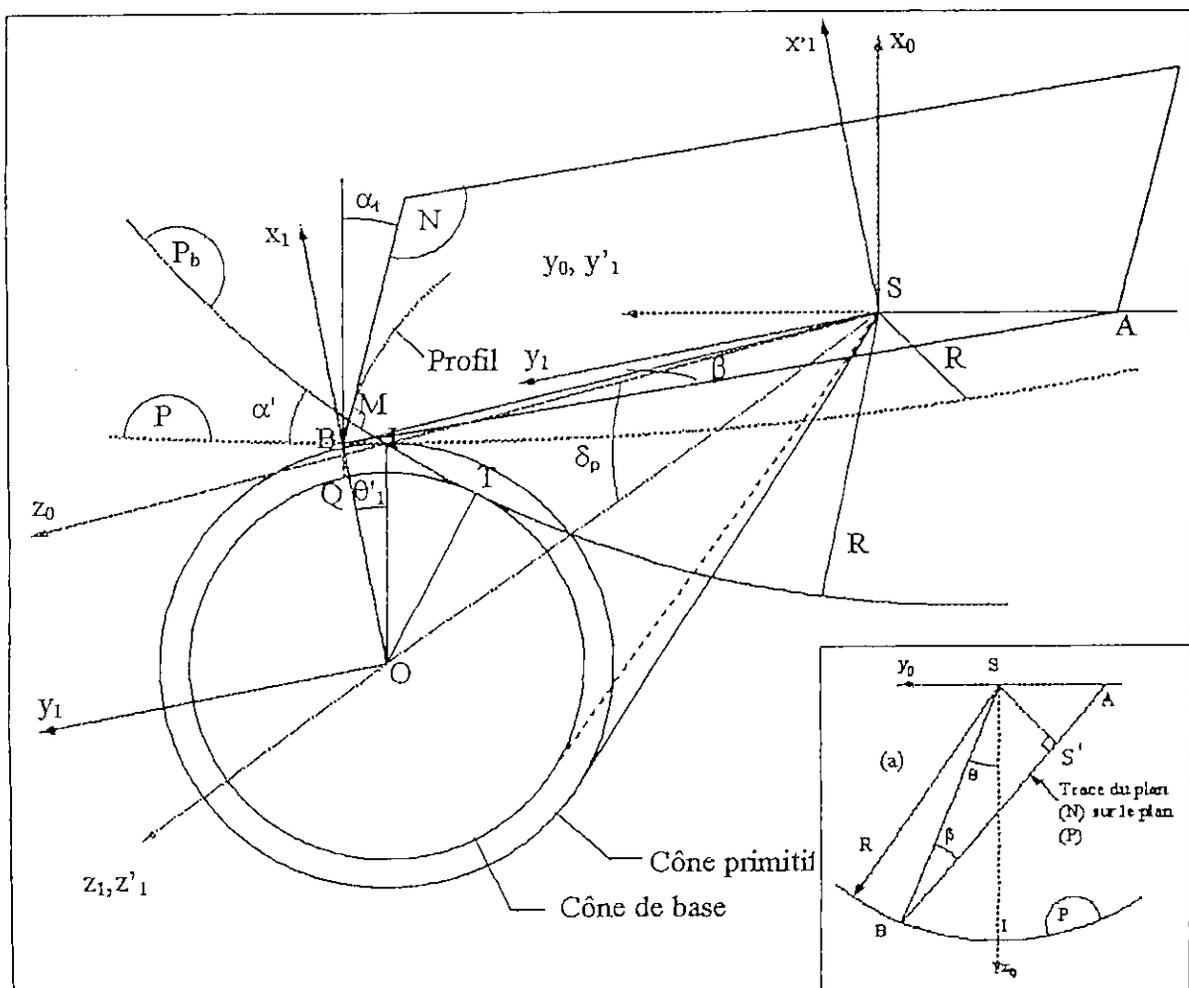


Fig. II-1 : Génération de la denture octoïde de 1^{ère} espèce avec vue dans le plan (P).

Le plan (N) qui passe par S'est normal à (P_b) et lui est invariablement lié, forme avec la normale au plan (P) un angle α_t ou angle de pression apparent et le profil de la denture est donc décrit par le point M, intersection de cette ligne d'action avec le plan de génération (N). La génératrice du profil au point M passe par un point S' tel que SM' et SM forment un angle β (angle de l'inclinaison de l'hélice primitive). Pour déterminer le profil, il suffit donc de déterminer les coordonnées X_1, Y_1, Z_1 du point M et les composantes de sa normale N dans le repère-pièce.

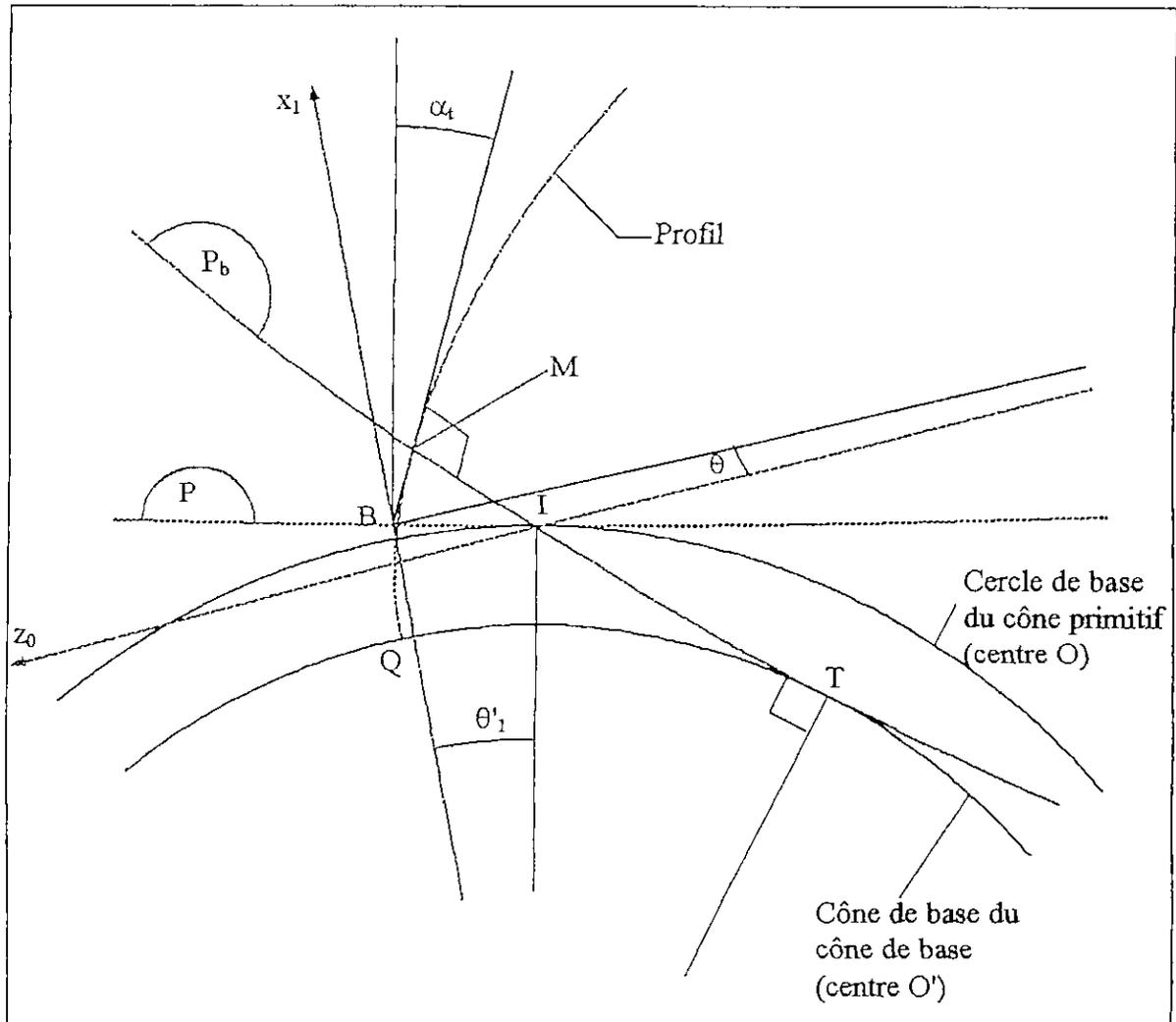


Fig. II-2 : Détail au voisinage du point I.

Légende :

- S : Sommet du cône de la pièce et centre de la sphère.
- α_t : Angle de pression apparent.
- β : Inclinaison de l'hélice primitive.
- M : Point quelconque du profil.
- (P_b): Plan de base.
- (N) : Plan de génération incliné de α_t par rapport à la perpendiculaire au plan (P) et de β par rapport à SB.
- θ : Angle de rotation du plan (N) autour de l'axe Sx_0 .
- θ'_1 : Angle de rotation du cercle de base du cône primitif autour de l'axe Sz_1 .
- δ_p : 1/2 angle au sommet du cône primitif.
- δ_b : 1/2 angle au sommet du cône de base.

III) COMPOSANTES DE LA NORMALE \vec{N} EN UN POINT DE LA SURFACE DE DENTURE DANS LE REFERENTIEL (S, x_0, y_0, z_0) :

Soit \vec{U} , un vecteur unitaire porté par la droite AB (Fig.II-1), et \vec{V} , le vecteur qu'on obtient en dérivant \vec{U} , soit : $\vec{V} \perp \vec{U}$.

Exprimés dans le référentiel (S, x_0, y_0, z_0), ces deux vecteurs ont pour composantes :

$$\vec{U} \begin{cases} 0 \\ \sin(\theta + \beta) \\ \cos(\theta + \beta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{V} \begin{cases} 0 \\ \cos(\theta + \beta) \\ -\sin(\theta + \beta) \end{cases}$$

Soit \vec{N} ($N_{x_0}, N_{y_0}, N_{z_0}$), la normale unitaire au plan de génération (N). Elle fait un angle α_t avec le vecteur \vec{V} . Le produit vectoriel $\vec{N} \wedge \vec{V}$ est un vecteur colinéaire avec \vec{U} . On a alors :

$$\vec{N} \wedge \vec{V} = \lambda \vec{U}$$

Cette relation permet d'écrire : $|\lambda| = \sin \alpha_t$

En prenant $\lambda = \sin \alpha_t$ et en développant les produits vectoriel et scalaire, on obtient :

$$\vec{N} \begin{cases} N_{x_0} = \sin \alpha_t \\ N_{y_0} = \cos \alpha_t \cos(\theta + \beta) \\ N_{z_0} = -\cos \alpha_t \sin(\theta + \beta) \end{cases} \quad (\text{II-1})$$

IV) COORDONNEES D'UN POINT « M » GENERATEUR DU PROFIL DE LA DENTURE :

Comme le point M (X_0, Y_0, Z_0) est porté par la droite AM, intersection du plan (Pb) (appartenant à la sphère (K) de rayon R) et du plan générateur (N) normal à (Pb), il vérifie donc les équations de la droite AM, du plan (N) et de la sphère (K) de rayon R. Il nous reste alors à déterminer les coordonnées X_0, Y_0 et Z_0 .

IV-1) Equation de la ligne de génération AM dans le référentiel (S, x_0, y_0, z_0) :

Soit : $\vec{\Omega}$ (0, 0, ω), la vitesse instantanée de rotation autour de AI :

La vitesse du point M est :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_{S'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{AM}$$

Avec : $\vec{V}_{S'} = \vec{0}$ et $\vec{AM} \begin{cases} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{cases}$

Comme : $\vec{V}_M \perp \vec{N}$ et $\vec{V}_M \cdot \vec{N} = 0$

$$\vec{V}_M = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Y_0 \omega \\ X_0 \omega \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En sachant que : $\omega \neq 0$, en remplaçant \vec{N} par ses coordonnées et en développant le produit scalaire : $\vec{V}_M \cdot \vec{N} = \vec{0}$, nous obtenons l'équation de la droite de génération AM :

$$X_0 \cos \alpha_t \cdot \cos (\theta + \beta) - Y_0 \sin \alpha_t = 0 \quad (\text{II-2})$$

En divisant par : $\cos \alpha_t$, l'équation (II-2) devient :

$$X_0 \cos (\theta + \beta) - Y_0 \operatorname{tg} \alpha_t = 0 \quad (\text{II-3})$$

IV-2) Equation du plan de génération (N) dans le référentiel (S, x_0 , y_0 , z_0) :

L'équation du plan (N) est de la forme :

$$a X_0 + b Y_0 + c Z_0 + d = 0 \quad (\text{II-4})$$

Les coordonnées de la normale N au point M étant connues, nous pouvons dire que :

$$\begin{cases} a = \sin \alpha_t \\ b = \cos \alpha_t \cos (\theta + \beta) \\ c = -\cos \alpha_t \sin (\theta + \beta) \end{cases}$$

L'expression (II-4) s'écrit :

$$X_0 \sin \alpha_t + Y_0 \cos \alpha_t \cos (\theta + \beta) - Z_0 \cos \alpha_t \sin (\theta + \beta) + d = 0 \quad (\text{II-5})$$

IV-2-1) Calcul de la constante « d » :

La vue sur le plan (P) de la figure (II-2) étant identique à celle de la figure (I-4) dans le chapitre I, à la différence que le plan (Pb) est remplacé par le plan (P), par conséquent nous pouvons utiliser la figure (I-8) pour calculer la valeur du segment SA (voir annexe I).

$$Y_0 = -SA = -R \frac{\sin \beta}{\cos (\theta + \beta)}$$

En remplaçant Y_0 dans l'équation du plan (N) pour X_0 et Z_0 nuls, nous déduisons la valeur de la constante « d » :

$$d = R \cos \alpha_t \sin \beta \quad (\text{II-6})$$

Après simplification, l'équation du plan s'écrit alors :

$$X_0 \operatorname{tg} \alpha_t + Y_0 \cos (\theta + \beta) - Z_0 \sin (\theta + \beta) + R \sin \beta = 0 \quad (\text{II-7})$$

IV-2-2) Equation de la sphère de rayon R dans le référentiel (S, x_0, y_0, z_0) :

$$X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 = R^2 \quad (\text{II-8})$$

IV-2-3) Coordonnées du point M dans le référentiel (S, x_0, y_0, z_0) :

a) Résolution du système d'équations (voir annexe V):

$$\begin{cases} X_0 \cos(\theta + \beta) - Y_0 \operatorname{tg} \alpha_t = 0 & (1) \\ X_0 \operatorname{tg} \alpha_t + Y_0 \cos(\theta + \beta) - Z_0 \sin(\theta + \beta) + R \sin \beta = 0 & (2) \\ X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 = R^2 & (3) \end{cases}$$

Tous calculs faits, l'expression de X_0 s'écrit :

$$X_0 = \frac{[Z_0 \sin(\theta + \beta) - R \sin \beta] \operatorname{tg} \alpha_t}{\operatorname{tg}^2 \alpha_t + \cos^2(\theta + \beta)} \quad (\text{II-9})$$

Et l'expression de Y_0 s'écrit :

$$Y_0 = \frac{[Z_0 \sin(\theta + \beta) - R \sin \beta] \cos(\theta + \beta)}{\operatorname{tg}^2 \alpha_t + \cos^2(\theta + \beta)} \quad (\text{II-10})$$

L'équation en Z_0 est du 2^{ème} degré et s'écrit :

$$Z_0^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha_t + 1) - 2 R Z_0 [\sin(\theta + \beta) \sin \beta] - R^2 [\operatorname{tg}^2 \alpha_t + \cos^2(\theta + \beta) - \sin^2 \beta] = 0 \quad (\text{II-11})$$

La relation (II-11) admet 2 racines :

$$Z_{0,2} = R \{ \sin(\theta + \beta) \sin \beta \cos^2 \alpha_t \pm \sqrt{[\sin^2 \alpha_t + \cos^2 \alpha_t \cos^2(\theta + \beta)] [\sin^2 \alpha_t + \cos^2 \alpha_t \cos^2 \beta]} \} \quad (\text{II-12})$$

b) Application numérique :

$$\text{Pour : } \begin{cases} \alpha_t = 20^\circ = \pi / 9 \\ \beta = 15^\circ = \pi / 12 \\ \theta = 30^\circ = \pi / 6 \\ \theta + \beta = 45^\circ = \pi / 4 \end{cases}$$

On obtient :

- $Z_{01} = + 0,88649 R$
- $Z_{02} = - 0,56328 R$

Z ne peut être négatif car le point (M) est porté par l'axe z positif; on retiendra donc la racine positive, d'où :

$$Z_0 = R \{ \sin(\theta + \beta) \sin \beta \cos^2 \alpha_t + \sqrt{[\sin^2 \alpha_t + \cos^2 \alpha_t \cos^2(\theta + \beta)] [\sin^2 \alpha_t + \cos^2 \alpha_t \cos^2 \beta]} \} \quad (\text{II-13})$$

IV-2-4) Coordonnées du point M dans le référentiel (S, x₁, y₁, z₁) :

On exprime les coordonnées du point M et les composantes de la normale N dans le référentiel (O, x₁, y₁, z₁) en procédant à des changements de repères.

IV-2-4-1) Rotation de (S, x₀, y₀, z₀) de l'angle δ_p autour de y₀ (Fig. II-3a) :

$$M \begin{cases} X'_1 = Z_0 \sin \delta_p + X_0 \cos \delta_p \\ Y'_1 = Y_0 \\ Z'_1 = Z_0 \cos \delta_p - X_0 \sin \delta_p \end{cases} \quad (\text{II-14})$$

IV-2-4-2) Rotation de (S, x'₁, y'₁, z'₁) de l'angle θ'₁ autour de z'₁ (Fig. II-3b) :

$$M \begin{cases} X_1 = Y_0 \sin \theta'_1 + X'_1 \cos \theta'_1 \\ Y_1 = Y_0 \cos \theta'_1 - X'_1 \sin \theta'_1 \\ Z_1 = Z_0 \end{cases} \quad (\text{II-15})$$

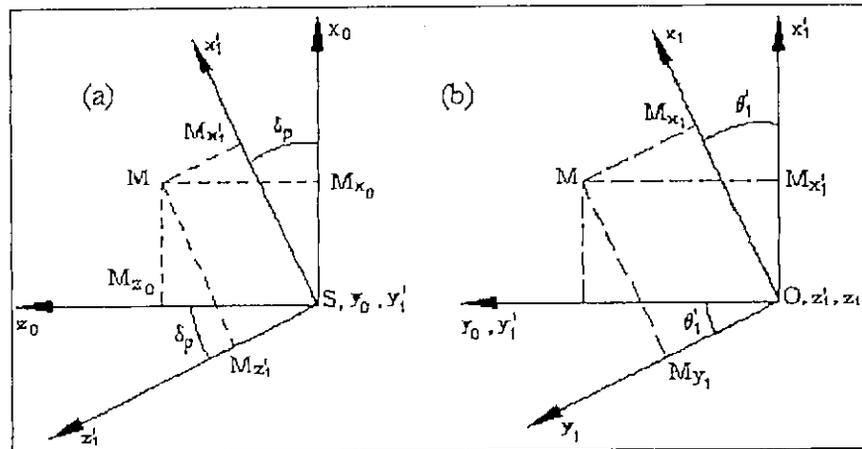


Fig. II-3 : Rotations d'axes.

D'où les coordonnées du point M dans le référentiel (O, x₁, y₁, z₁) :

$$M \begin{cases} X_1 = Y_0 \sin \theta'_1 + (Z_0 \sin \delta_p + X_0 \cos \delta_p) \cos \theta'_1 \\ Y_1 = Y_0 \cos \theta'_1 - (Z_0 \sin \delta_p + X_0 \cos \delta_p) \sin \theta'_1 \\ Z_1 = Z_0 \cos \delta_p - X_0 \sin \delta_p \end{cases} \quad (\text{II-16})$$

IV-3) Composantes de la normale \vec{N} dans le référentiel (O, x₁, y₁, z₁) :

$$\vec{N} \begin{cases} N_{x_1} = N_{y_0} \sin \theta'_1 + (N_{z_0} \sin \delta_p + N_{x_0} \cos \delta_p) \cos \theta'_1 \\ N_{y_1} = N_{y_0} \cos \theta'_1 - (N_{z_0} \sin \delta_p + N_{x_0} \cos \delta_p) \sin \theta'_1 \\ N_{z_1} = N_{z_0} \cos \delta_p - N_{x_0} \sin \delta_p \end{cases} \quad (\text{II-17})$$

En remplaçant : N_{x0}, N_{y0} et N_{z0}, on obtient finalement :

$$\vec{N} \begin{cases} N_{x_1} = \cos \alpha_t \cos(\theta + \beta) \sin \theta'_1 + [\sin \alpha_t \cos \delta_p - \cos \alpha_t \sin(\theta + \beta) \sin \delta_p] \cos \theta'_1 \\ N_{y_1} = \cos \alpha_t \cos(\theta + \beta) \cos \theta'_1 - [\sin \alpha_t \cos \delta_p - \cos \alpha_t \sin(\theta + \beta) \sin \delta_p] \sin \theta'_1 \\ N_{z_1} = -\cos \alpha_t \sin(\theta + \beta) \cos \delta_p - \sin \alpha_t \sin \delta_p \end{cases} \quad (\text{II-18})$$

Avec NZ₁ négative suivant l'axe de la pièce. Pour un angle β nul, la normale NZ₁ est constante sur une même génératrice.

IV-4) Epaisseur apparente S_t de la denture :

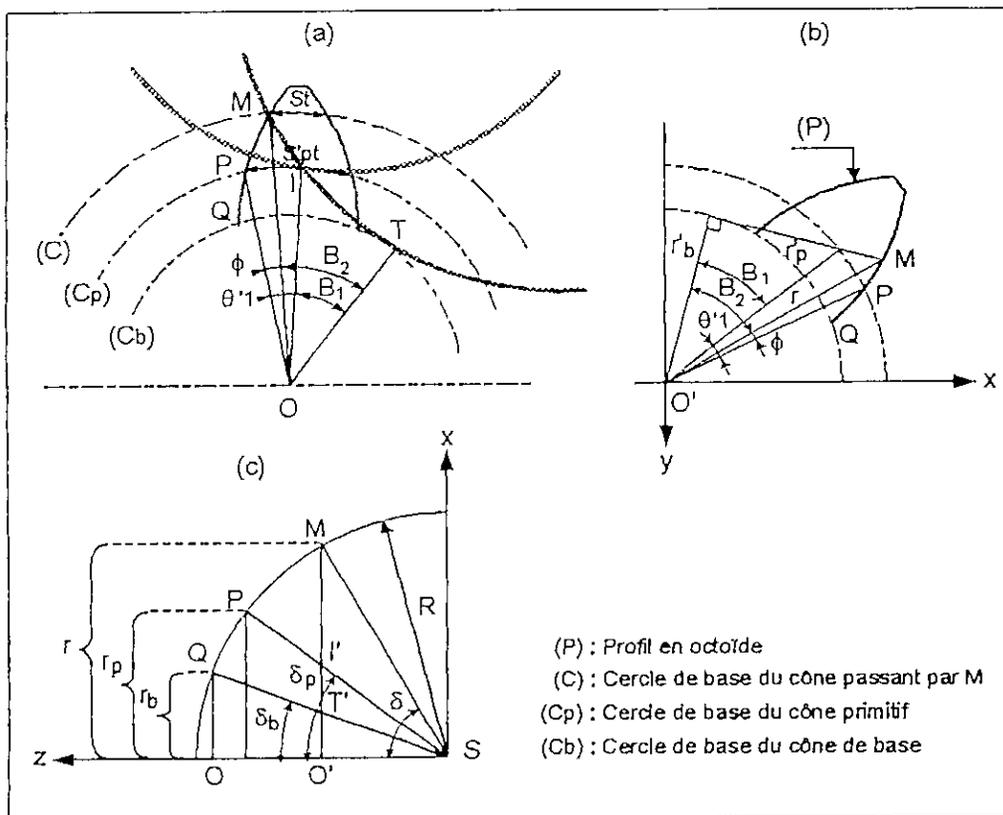


Fig. II-4 : Epaisseur de denture octoïde de 1^{ère} espèce.

La figure II-4a représente les cercles des bases des différents cônes du pignon coupés par la sphère de rayon R = SM

En désignant par S'_{pt} et r'_p l'épaisseur primitive apparente de denture et le rayon du cercle primitif définis dans le plan passant par le point M et normale à l'axe du pignon, l'épaisseur apparente S_t de denture sur le cercle de rayon r = R sin δ s'exprime par la relation :

$$S_t = r \left(\frac{S'_{pt}}{r'_p} - 2\phi \right) \quad (\text{II-19})$$

Comme : $\frac{S'_{pt}}{r'_p} = \frac{S_{pt}}{r_p}$, la relation (II-19) devient :

$$S_t = r \left(\frac{S_{pt}}{r_p} - 2\phi \right) \quad (\text{II-20})$$

De la figure II-4c on peut écrire que :

$$\begin{cases} r = O'M = R \sin \delta \\ r'_b = O'T' = R \cos \delta \cdot \text{tg} \delta_b \\ r'_p = O'I' = R \cos \delta \cdot \text{tg} \delta_p \end{cases}$$

De la figure II-4a ou II-4b on peut écrire que :

$$\phi = \theta'_1 - (B_2 - B_1)$$

De la figure II-4c on peut écrire que :

$$\cos B_1 = \frac{r'_b}{r'_p} = \frac{\text{tg} \delta_b}{\text{tg} \delta_p} \Rightarrow B_1 = \arccos \left(\frac{\text{tg} \delta_b}{\text{tg} \delta_p} \right) \quad (\text{II-21})$$

$$\text{et :} \quad \cos B_2 = \frac{r'_b}{r} = \frac{\text{tg} \delta_b}{\text{tg} \delta} \Rightarrow B_2 = \arccos \left(\frac{\text{tg} \delta_b}{\text{tg} \delta} \right) \quad (\text{II-22})$$

En remplaçant dans (II-20), l'expression de l'épaisseur apparente de la denture s'écrit :

$$S_t = R \sin \delta \left\{ \frac{S_{pt}}{r_p} - 2 \left[\theta'_1 + \arccos \left(\frac{\text{tg} \delta_b}{\text{tg} \delta_p} \right) - \arccos \left(\frac{\text{tg} \delta_b}{\text{tg} \delta} \right) \right] \right\} \quad (\text{II-23})$$

Avec :

- R : Rayon de la sphère ou longueur de la génératrice du cône.
- r_p : Rayon primitif de la base circulaire du cône.
- S_{pt} : Epaisseur primitive apparente de denture.
- δ : Angle formé par l'axe du cône et la génératrice d'une dent passant par M.
- δ_b : Demi-angle au sommet du cône de base.
- δ_p : Demi-angle au sommet du cône primitif.
- θ'_1 : Angle de rotation du cône primitif au point M du profil.

IV-5) Calcul de l'angle θ'_1 en fonction de l'angle θ :

IV-5-1) Calcul de l'angle θ :

Traçons les triangles sphériques IMB et ITO', rectangles respectivement en M et T (Fig.II-5).

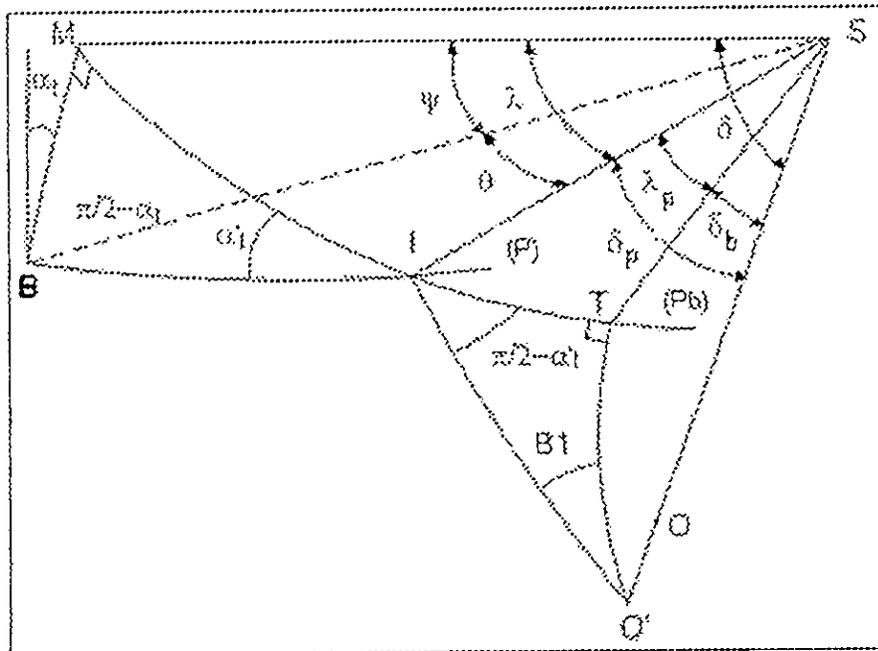


Fig. II-5 : Triangles rectangles sphériques IMB et ITO'.

Le calcul de θ se fait à partir des relations de trigonométrie sphérique suivantes :

$$\sin \lambda = \sin \theta \cos \alpha_t \tag{II-24}$$

$$\sin \alpha_t = \cos \lambda \sin \alpha'_t \tag{II-25}$$

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{tg} \alpha_t}{\operatorname{tg} \alpha'_t} \tag{II-26}$$

$$\sin \delta_b = \sin \delta_p \cos \alpha'_t \tag{II-27}$$

d'où :

$$\cos \theta = \operatorname{tg} \alpha_t \frac{\sin \delta_p}{\sin \delta_b \sin \left[\arccos \left(\frac{\sin \delta_b}{\sin \delta_p} \right) \right]} \tag{II-28}$$

ou bien :

$$\cos \theta = \operatorname{tg} \alpha_t \frac{\sin \delta_p}{\sin \delta_b \sqrt{1 - \frac{1 - \cos 2\delta_b}{2 \sin^2 \delta_p}}} \tag{II-29}$$

IV-5-2) Calcul de l'angle θ'_1 :

Le roulement sans glissement du plan (P) sur le cône primitif C_p nous permet d'écrire :

$$R\theta = OI \times \theta'_1 \quad \Rightarrow \quad R\theta = R \sin \delta_p \times \theta'_1$$

D'où :

$$\theta'_1 = \frac{\theta}{\sin \delta_p} \quad (\text{II-30})$$

IV-6) Epaisseur réelle S_n de la denture :

De même que pour la denture à développante sphérique l'épaisseur réelle S_n est calculée en fonction de l'épaisseur apparente S_t , du rayon R de la sphère K (ou longueur de génératrice du cône) et de β , angle d'inclinaison de l'hélice en tout point du profil. Bien qu'il y ait un changement du profil par rapport à celui de la denture à développante sphérique, l'allure de la denture reste similaire, ce qui nous permet d'utiliser les mêmes relations pour exprimer l'expression de l'épaisseur réelle S_n .

Nous avons alors :

$$S_n = 2R \sin \left[\frac{\arcsin \left(\frac{\cos \phi - \sin \beta_p}{\sqrt{1 + \sin^2 \beta_p - 2 \sin \beta_p \cdot \cos \phi}} \right)}{2} \right] \sqrt{1 + \sin^2 \beta_p - 2 \sin \beta_p \cdot \cos \phi} \quad (\text{II-31})$$

Avec :

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \beta_p - 2 \arcsin \left(\frac{S_t}{2R} \right) \quad (\text{II-32})$$

Où :

- S_t : Epaisseur apparente de denture.
- β_p : Angle d'inclinaison primitif de l'hélice.
- R : Longueur de la génératrice du cône.

V) CALCUL DU MODULE APPARENT M_t :

Considérons la figure II-6, similaire à la figure I-12 du chapitre I qui donne l'épaisseur réelle en fonction de l'épaisseur apparente où nous allons déterminer, cette fois-ci, l'épaisseur apparente en fonction de l'épaisseur réelle (voir calcul en annexe VI).

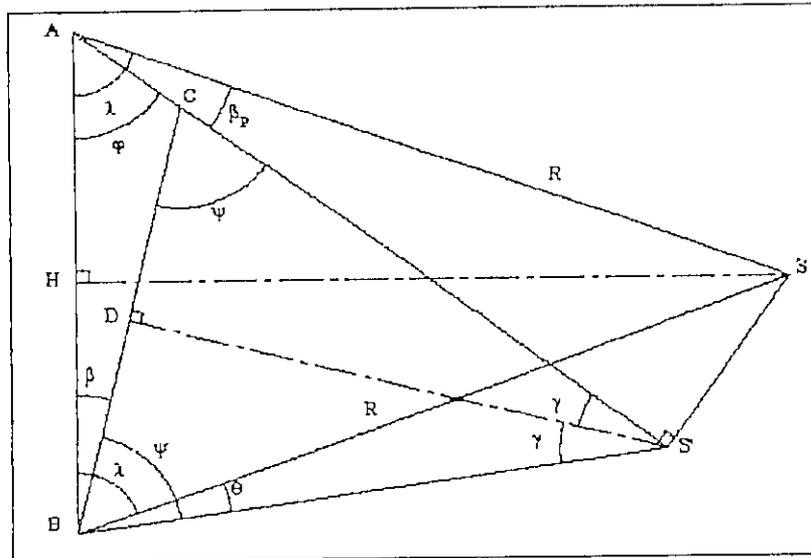


Fig. II-6 : Tracé pour le calcul du module apparent en fonction du module réel.

Sachant que l'épaisseur réelle est donnée par la relation :

$$S_n = \frac{\pi M n}{2} \quad (\text{II-33})$$

Le module apparent est donné par la relation :

$$M_t = \frac{2St}{\pi} \quad (\text{II-34})$$

Où :

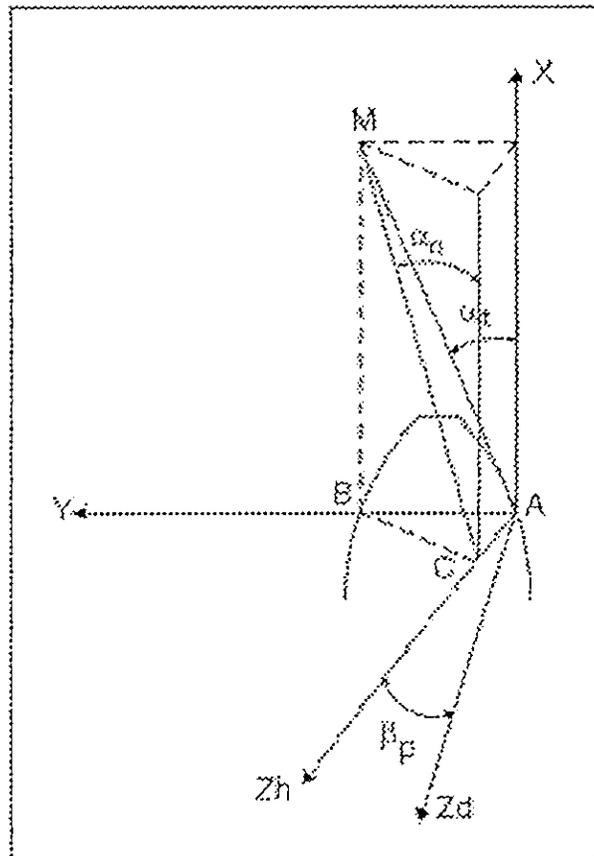
$$St^2 = \left(R \cos \beta_p - \frac{S_n}{2 \sin \gamma} \right)^2 + S_n^2 + 2 \left(R \cos \beta_p - \frac{S_n}{2 \sin \gamma} \right) \cdot S_n \cdot \sin \gamma \quad (\text{II-35})$$

et γ est déterminée à partir de l'équation suivante (voir annexe VII):

$$S_n^2 + 4R \cdot S_n \cdot \sin \beta_p \sin \gamma \sin(2\gamma) - 4R^2 \cos^2 \beta_p \sin^2 \gamma = 0 \quad (\text{II-36})$$

VI) CALCUL DE L'ANGLE DE PRESSION APPARENT α_t :

Soit une dent d'épaisseur apparente AB en une section quelconque du profil (Fig.II-7). Du point A traçons une tangente au profil, donc appartenant au plan de génération (N), et un référentiel (X, Y, Z_d) tel que l'axe Z_d soit une génératrice d'une denture conique droite.

Fig.II-7 : Tracé de l'angle α_t en fonction de l'angle α_n .

Considérons un point M appartenant à cette tangente tel que l'angle formé par cette dernière et l'axe X soit l'angle de pression apparent α_t . Sachant que pour une denture hélicoïdale, le plan (N) subit une rotation d'un angle β (angle d'inclinaison de l'hélice) par rapport à l'axe X, l'angle de pression réel α_n sera défini à partir d'une autre tangente passant par M, appartenant toujours au plan (N) mais perpendiculaire à l'axe Z_h (génératrice de la denture hélicoïdale) en C, tel que BC soit l'épaisseur réelle de la dent.

Des figures géométriques simples obtenues, nous déduisons :

- $tg\alpha_n = \frac{BC}{BM}$
- $tg\alpha_t = \frac{AB}{BM}$
- $tg\alpha_t = \frac{BC}{AB} tg\alpha_n$

Tous calculs faits, l'expression de l'angle de pression apparent α_t est :

$$\alpha_t = \arctg\left(\frac{S_n}{S_t} \operatorname{tg} \alpha_n\right) \quad (\text{II-37})$$

Ou encore :

$$\alpha_t = \arctg\left(\frac{M_n}{M_t} \operatorname{tg} \alpha_n\right) \quad (\text{II-38})$$

Donc l'expression de l'angle de pression apparent α_t est donnée en fonction de l'angle de pression réel α_n , du module réel M_n et du module apparent M_t . Comme l'angle de pression réel α_n et le module réel M_n sont invariables, et que le module apparent M_t dépend particulièrement de l'angle β , nous pouvons conclure que l'angle α_t est variable en tout point du profil et qu'en un point P situé sur la génératrice primitive, l'angle de pression apparent est fonction de l'angle de pression réel α_n et de l'angle d'inclinaison primitive β_p de l'hélice.

VII) CALCUL DU DEMI-ANGLE AU SOMMET DU CONE DE TETE δ_a :

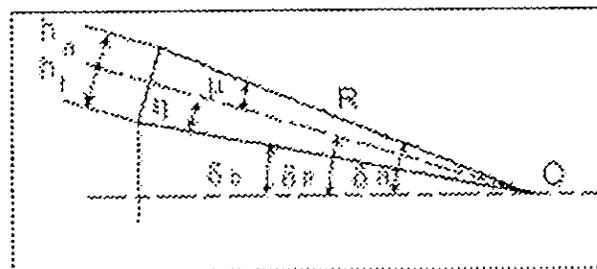


Fig.II-8 : Tracé pour le calcul de δ_a

On sait que : $h_a = M_t$ et $h_f = 1,25 M_t$

De la figure (II-7), nous déduisons que :

$$\delta_a = \delta_p + \mu$$

$$\sin \mu = \frac{h_a}{R} = \frac{M_t}{R}$$

D'où :

$$\delta_a = \delta_p + \arcsin \frac{M_t}{R} \quad (\text{I-39})$$

Avec :

- M_t : Module apparent de la denture.
- R : Longueur de la génératrice du cône ou rayon de la sphère (K).

VIII) CONCLUSION :

Dans ce chapitre, nous avons étudié la géométrie d'une denture «pratique» d'un pignon conique hélicoïdal (denture en octoïde de 1^{ère} espèce), ce qui nous a permis d'établir les équations paramétriques du profil, les expressions de l'épaisseur de la denture, du demi-angle au sommet du cône de tête, ainsi que celles du module et de l'angle de pression apparents. Cette modélisation mathématique pourra être utilisée à profit pour le contrôle de ce type de dentures sur une machine à mesurer tridimensionnelle.

La géométrie de denture étant maintenant connue, il reste à étudier l'influence de paramètres de taillage sur leurs défauts de forme. C'est l'objet du prochain chapitre qui traitera l'optimisation des erreurs géométriques en coefficients de correction des différents paramètres de réglage de la machine de taillage en considérant la denture à développante sphérique.

Chapitre III

**ANALYSE DES ERREURS
GEOMETRIQUES EN
COEFFICIENTS DE CORRECTION
DES PARAMETRES DE REGLAGE
DE LA MACHINE DE TAILLAGE**

ANALYSE DES ERREURS GEOMETRIQUES EN COEFFICIENTS DE CORRECTION DES PARAMETRES DE REGLAGE DE LA MACHINE DE TAILLAGE

D) INTRODUCTION :

L'introduction de micro-ordinateurs au niveau des ateliers de fabrication, dans les vingt dernières années, a permis le développement de logiciels informatiques (DAO, CAO, CFAO, etc...) dans différents domaines industriels, qui peuvent être directement utilisés par les fabricants. Pendant plusieurs années, ces derniers exigeaient des logiciels de fabrication de leur fournir le plus rapidement possible une solution réalisable. Mais à l'heure actuelle, les fabricants sont de plus en plus exigeants, et veulent «optimiser» la qualité de leur produit de façon à satisfaire certains objectifs, et par conséquent, accroître la compétitivité de leurs systèmes de production. Pour résoudre ce problème, des méthodes d'optimisation sont utilisées mais au moins deux difficultés restent à surmonter :

- l'utilisation de méthodes d'optimisation pose des contraintes de modélisation qui sont en général faiblement cohérentes avec le vaste ensemble de contraintes technologiques qui doivent être prises en compte, pour assurer la faisabilité du produit ,
- les logiciels doivent être, a priori, complètement redéveloppés, ce qui peut être aussi très onéreux.

I-1) Définitions :

I-1-1) La modélisation :

Première phase de l'optimisation, la modélisation mathématique de toute forme ou produit est nécessaire pour une optimisation correcte et satisfaisante. Dans les chapitres I et II, nous avons modélisé le profil et l'épaisseur de denture d'un pignon conique hélicoïdale, ainsi que certains paramètres géométriques.

I-1-2) La simulation :

Seconde phase après la modélisation, la simulation est une "expérience virtuelle", en général sur ordinateur, où l'on fait varier divers paramètres pour en mesurer l'influence. La simulation est beaucoup moins coûteuse que l'expérience réelle, et surtout «répétable», avec toutes les modifications possibles ou probables.

Pour qu'une simulation soit efficace, deux impératifs contradictoires apparaissent :

- La modélisation doit être suffisamment fine et précise : si on néglige trop d'éléments, ou que l'on simplifie à l'excès, la simulation sera sans intérêt pratique.
- La simulation ne doit pas requérir un temps de calcul excessif : s'il faut attendre des heures ou des jours pour connaître le résultat, on ne pourra pas faire varier autant de paramètres qu'on le voudrait.

En vérité, ces deux impératifs doivent être pris en compte à l'avance: il faut savoir quel est le degré de précision qu'on attend et quelle sera la durée d'exécution acceptable.

I-1-3) L'optimisation :

C'est la phase ultime de la résolution. Une fois la modélisation géométrique faite, on cherche à quantifier la variation du réglage ayant subi une déviation par rapport à sa valeur nominale. Il y a d'abord une approche théorique : c'est le raisonnement, en général, qui donne la forme de la solution optimale. Mais il y a aussi, l'optimisation qui consiste à étudier l'influence du paramètre de réglage considéré en utilisant le modèle mathématique.

Dans ce chapitre, nous traitons l'optimisation des paramètres de réglages de la machine de taillage des engrenages coniques à denture hélicoïdale par deux méthodes : la méthode par simulation et la méthode analytique, pour un profil en développante sphérique.

II) PROCÉDES DE TAILLAGE ET MODE DE GENERATION :

Nous ne pouvons étudier l'optimisation des paramètres de réglage de la machine de taillage que si nous avons connaissance du mode de génération pratique du profil de la denture à tailler et des procédés de taillage des machines-outils conçues à cet effet.

Dans la pratique on distingue deux modes de génération pour le taillage des engrenages coniques :

II-1) Taillage par reproduction :

Dans la référence [HEN99], il est expliqué clairement le mode d'obtention d'une denture conique droite par reproduction en utilisant un gabarit dont le profil est identique à celui de la denture de la roue cylindrique complémentaire du pignon (profil supposé à développante de cercle). Ce mode de taillage ne convient que pour des productions unitaires et pour des gros modules. L'état de surface est strié car le taillage s'effectue comme sur une raboteuse. Le profil obtenu n'est donc pas à développante sphérique.

Comme nous n'avons pas pu trouver de littérature expliquant avec détails la génération du profil de la denture conique hélicoïdale par ce procédé, nous pouvons dire, par analogie avec le taillage de la denture droite, que si le principe est le même, le résultat sera identique.

II-2) Taillage par génération :

Dans ce mode de taillage, l'outil théorique à développante est remplacé par un plan de génération incliné de l'angle de pression α par rapport à la normale du plan primitif. Nous pouvons, dire dans ce cas, que la roue plate génératrice est une roue conique à denture pyramidale (fig.III-1).

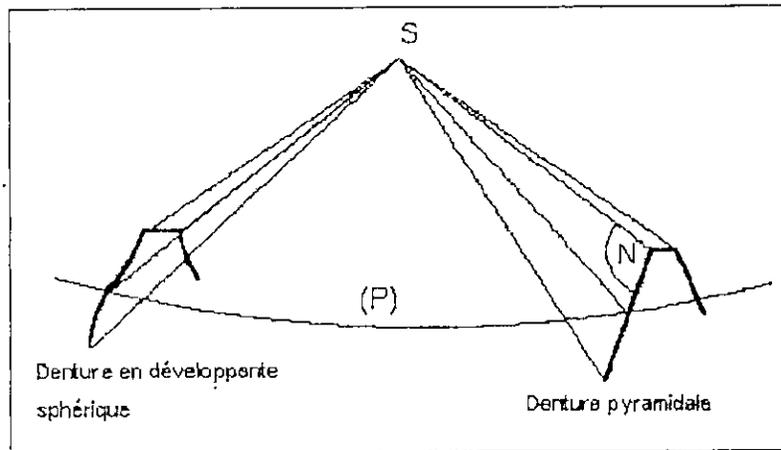


Fig. III-1 : Types de dentures coniques.

Il existe trois (3) procédés :

- Taillage par outils animés d'un mouvement alternatif (procédé du mortaisage), exemple d'une machine type Gleason :

L'ensemble (berceau-outils) matérialise la roue plate génératrice ou plutôt une «roue conique génératrice» (R_c) [KAL98]. En effet, le mortaisage est dirigé normalement à l'axe du berceau pour la denture conique droite et orienté d'un angle β par rapport à ce même axe pour la denture hélicoïdale (Fig.III-2) : cela signifie que le cône primitif de la roue taillée n'est pas tangent à un plan normal à l'axe du berceau, mais tangent à un cône de demi-angle au sommet $[(\pi/2)-v_f]$ avec v_f représentant l'angle de creux de la denture (denture octoïde de 2^{ème} espèce).

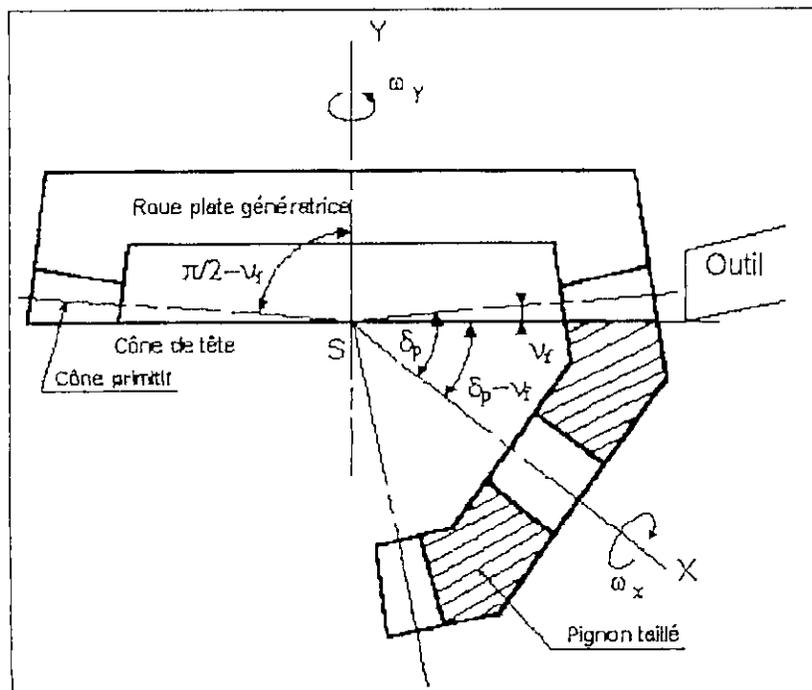


Fig. III-2 : Génération d'une denture octoïde de 2^{ème} espèce.

La roue taillée (Fig.III-3), R_t , d'axe SX , est inclinée par rapport à l'axe du berceau d'un angle $[\delta - \nu_f]$, δ étant le demi-angle du cône primitif de cette roue. Les engrenages à vis sans fin (V_1, V_2) et (V_3, V_4) commandent respectivement les rotations du berceau et de la roue taillée. Le train de roues interchangeables T permet la conjugaison des deux rotations de telle sorte que le cône primitif de la roue taillée roule sans glisser sur le cône primitif de la roue conique génératrice.

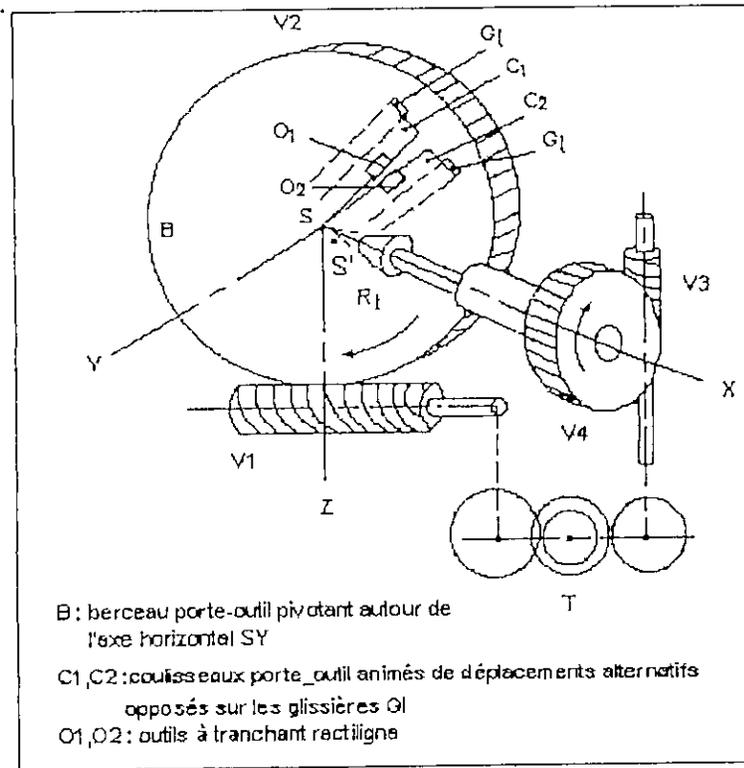


Fig. III-3 : Schéma cinématique d'une machine type Gleason [KAL98].

Le réglage des outils O_1 et O_2 doit assurer la convergence de la course de ceux-ci en S pour une denture droite ou S' pour une denture hélicoïdale tel que : $SS' = R \sin \beta$ (avec R , la longueur de la génératrice primitive du pignon conique à tailler, et β , l'angle d'inclinaison de l'hélice primitive). L'angle γ d'ouverture des glissières permet le réglage de l'épaisseur des dents (l'épaisseur réelle pour une denture hélicoïdale). L'opération de taillage est discontinue (Fig.III-4).

Selon [HEN99] la valeur de l'angle γ pour une denture conique droite est donnée par la formule approximative :

$$tg\gamma = \frac{\frac{S_p}{2} + h_f tg\alpha}{R_f} \quad (III-1)$$

avec :

- S_p : Epaisseur réelle primitive de denture.
- h_f : Hauteur de pied de denture.
- α : Angle de pression réel.
- R_f : Longueur de la génératrice du cône de pied.

La hauteur h_f du creux de la dent s'exprime par la relation :

$$h_f = C_f M - V \quad (III-2)$$

où C_f désigne le coefficient du creux (il est égal à 1,25 pour une denture normalisée) et V le déplacement du profil (déport).

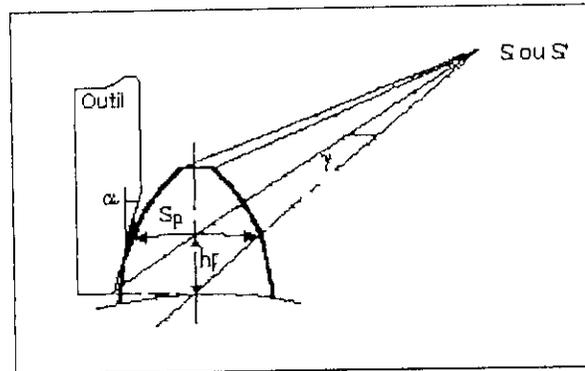


Fig. III-4 : Angle γ [HEN99].

- Utilisant le même procédé de taillage que Gleason, la machine Heidenreich et Harbeck est légèrement différente, en ce sens que le cône primitif de la roue taillée est tangent au plan normal à l'axe du berceau (denture octoïde de 1^{ère} espèce). La course de mortaisage n'est plus normale à cet axe, mais peut être réglée suivant la valeur de l'angle v_f : la génération s'effectue alors par roulement sans glissement du cône primitif de la roue taillée sur le plan primitif de la roue plate génératrice (Fig.III-5).

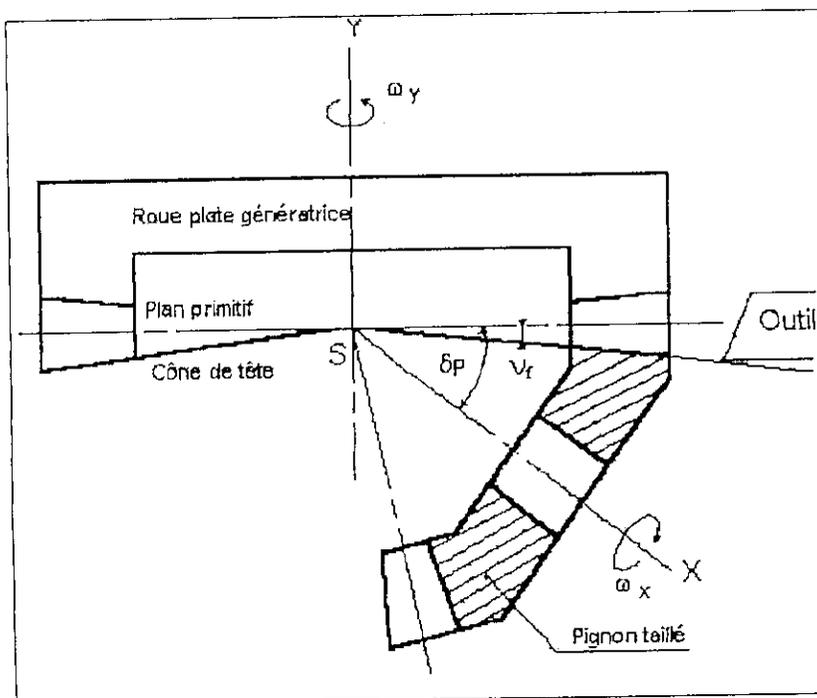


Fig. III-5 : Génération d'une denture octoïde de 1^{ère} espèce.

Remarque : Les deux procédés de taillage suscités conviennent parfaitement pour les engrenages coniques hélicoïdaux (roue et pignon) en production unitaire et petites séries.

- Pour le «taillage en grande série», et pour des pignons de largeur de denture réduite, la firme Gleason a conçu une machine plus rapide du type Coniflex, dans laquelle les deux outils à tranchant rectiligne animés de déplacement de mortaisage sont remplacés par deux fraises disques de grands diamètres couvrant toute la largeur de denture. Ces fraises sont deux tourteaux T_1 et T_2 comportant une succession de lames tranchantes à la périphérie (Fig.III-6).

On distingue deux types de denture :

- 1- Les lames sont situées dans le plan normal aux axes de fraises où l'angle θ d'inclinaison de ces axes est égal à l'angle de pression α : denture théorique (Fig.III-6a).
- 2- Les lames sont disposées sur une surface conique creuse définie par l'angle μ de sorte que : $\theta = \alpha + \mu$; les dentures taillées présentent alors un bombé longitudinal d'autant plus accentué que μ est important : denture pratique (Fig.III-6b).

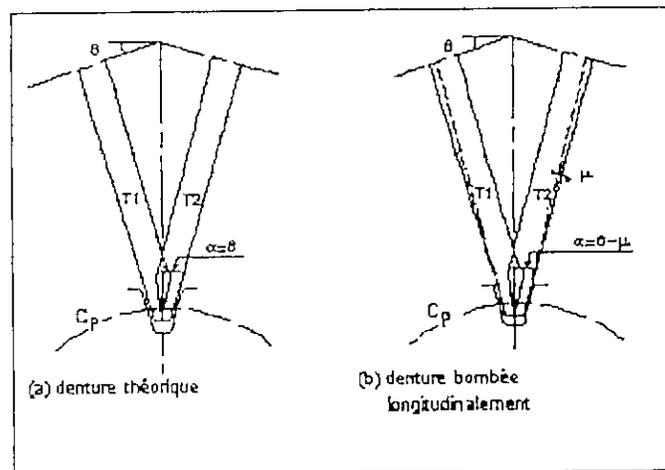


Fig. III-6 : Taillage par deux fraises-disques [KAL98].

- Pour le « taillage des petits pignons » en très grande série, la firme Gleason a prévu une machine Revacycle. La fraise est constituée d'un disque à axe horizontal, dont le diamètre dépasse 600mm, portant à sa périphérie une succession d'outils de forme déterminée; dont la première série servira d'ébauche, la seconde de demi-finition et la troisième de finition (principe du brochage).

Remarques :

- 1- Les deux procédés suscités sont valables pour le taillage des engrenages coniques droits (roues et pignons). Cependant, ces procédés peuvent être étendus aux engrenages coniques hélicoïdaux pour le taillage des « roues » uniquement, pour la simple raison que la génératrice de denture de la roue est rectiligne (facilité de taillage). En ce qui concerne le taillage des pignons, il y a risque de détérioration de la denture par les fraises lors de l'usinage, sachant que la génératrice de leur denture est une hélice conique.

- 2- Pour les besoins de notre recherche et pour mieux comprendre les différents paramètres de réglage, nous n'avons donné qu'une définition succincte des procédés et machines de taillage. Pour plus d'éclaircissements, le lecteur pourra consulter les références [HEN99] (pages 611 à 625), et [KAL98] (pages 3 à 16).

III) PROCEDURES D'ANALYSE :

On distingue principalement deux procédures d'analyse des effets des variations des paramètres de réglage des machines de taillage sur la géométrie de la surface de denture :

- analyse à partir des écarts relevés sur la surface de denture,
- analyse à partir des portées obtenues en engrenant sur la machine d'essai le pignon à contrôler avec le pignon master (ou pignon-étalon).

Notre étude relève de la première procédure en utilisant la méthode par simulation. L'ensemble des écarts relevés sur une surface peuvent être interprétés par des coefficients traduisant le défaut de position. Les erreurs restantes sont tout simplement des défauts de forme qui peuvent être générés par de nombreux facteurs comme la dilatation thermique de la pièce, l'usure des outils de coupe (ou mauvais affûtage), les dérèglages ou mauvais réglages des différents paramètres de réglage de la machine, etc. La méthode d'optimisation aux moindres carrés proposée par J.M. DAVID [DAV96] permet de chiffrer les défauts de forme à condition de savoir les modéliser.

L'obtention d'une topographie des écarts peut être exploitée à profit pour apprécier les paramètres ayant provoqué une déviation de la surface réelle par rapport à la surface théorique en se référant aux cartes-types. On obtient ces cartes en simulant l'effet des variations des paramètres définissant la surface mesurée (la pièce théorique étant représentée par un modèle mathématique) ou en agissant directement sur ces paramètres (la pièce est un master). Evidemment, la simulation permet d'étudier tous les paramètres intervenant dans le modèle mathématique. Les références [LEM85] et [MAD87] fournissent des exemples de cartes d'erreurs simulant l'influence des modifications des paramètres de réglage pour les engrenages spiro-coniques.

Dans le cas de notre contribution, nous utiliserons deux méthodes d'étude du défaut géométrique de la denture pour la construction des champs des vecteurs d'analyse correspondant aux paramètres de réglage des machines de taillage (méthodes proposées et utilisées par M. BOUAZIZ, dans la référence [BOU96], pour les engrenages cylindriques à denture droite et hélicoïdale et pour les engrenages coniques à denture droite). La première est basée sur la modélisation de la surface de denture établie suivant sa génération théorique, la seconde, plus générale, est basée sur l'influence des variations des paramètres de réglage sur l'épaisseur de denture puisque toute variation d'un réglage s'y manifeste. Les valeurs de corrections de ces réglages seront fournies en appliquant la méthode d'optimisation suscitée.

III-1) Construction des champs d'analyse de défaut de forme :

III-1-1) 1^{ère} Méthode : Construction des vecteurs d'analyse en utilisant le modèle mathématique et en donnant une variation élémentaire au paramètre de réglage considéré :

Cette méthode, qualifiée par M. BOUAZIZ de «*méthode par simulation*» permet d'étudier tous les paramètres qui interviennent dans la modélisation mathématique de la surface de denture.

La construction du vecteur d'analyse se fait de la manière suivante :

Soient : P_1, P_2, P_3, P_j les paramètres qui définissent la surface S de la denture. Ces paramètres prennent leurs valeurs nominales respectives $P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{0j}$ pour une surface S_0 décrite par les points $M_0(X_0, Y_0, Z_0)$ auxquels sont associées les normales $N_0(N_{x_0}, N_{y_0}, N_{z_0})$. En faisant varier un paramètre P_k ($k=1$ à j) quelconque d'une quantité ΔP_k et en maintenant les autres paramètres constants, on obtient une autre surface S définie par les points $M(X, Y, Z)$ et les normales $N(N_x, N_y, N_z)$. L'erreur au point M suivant la normale à la surface S_0 est donnée par le produit scalaire :

$$E_{nk} = \overline{M_0M} \cdot \overline{N_0} \tag{III-3}$$

ou encore :
$$E_{nk} = (X - X_0)N_{x_0} + (Y - Y_0)N_{y_0} + (Z - Z_0)N_{z_0} \tag{III-4}$$

Si n est le nombre de points mesurés, le champ d'analyse W_k correspondant au paramètre P_k a donc pour composantes :

$$W_k = (E_{nk1}, E_{nk2}, E_{nk3}, \dots, E_{nkn})$$

L'optimisation aux moindres carrés donne un coefficient λ_k sans dimension. La valeur de la correction s'écrit :

$$\Delta P_{k_{opt}} = \lambda_k \Delta P_k \tag{III-5}$$

ΔP_k étant la variation unitaire (ΔV ou $\Delta \alpha_n$ ou $\Delta \beta_p$ ou $\Delta \delta_p$) du paramètre de réglage considéré, soit P_k (V ou α_n ou β_p ou δ_p)

III-1-2) 2^{ème} Méthode : Construction du vecteur d'analyse en considérant l'effet des variations des paramètres de réglage sur l'épaisseur de denture :

Cette autre méthode, qualifiée par M. BOUAZIZ de «*méthode analytique*», trouve son application, tout particulièrement, aux mesures manuelles ou aux points relevés en commande numérique à l'aide de logiciel de mesure de profils inconnus.

On construit le vecteur d'analyse comme suit :

Si le réglage de la machine est régi par les paramètres P_1, P_2, P_3, P_j , et si l'on a une relation : $S = f(P_1, P_2, P_3, \dots, P_j)$, on pourra alors écrire :

$$dS = \frac{\partial f}{\partial P_1} dP_1 + \frac{\partial f}{\partial P_2} dP_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial P_j} dP_j \tag{III-6}$$

L'analyse d'un paramètre P_k s'effectue en affectant une valeur non nulle à dP_k et en annulant les autres quantités dP_i ($i=1$ à j avec $i \neq k$). En étudiant donc le paramètre P_k on aura :

$$dS = A_k dP_k \tag{III-7}$$

En associant à cette quantité un vecteur \overline{dS} , l'effet de la variation ΔP_k sur la surface de denture s'exprime par le produit scalaire : $\overline{dS} \cdot \overline{N}$. Ce produit représente, au point donné, la composante du vecteur d'analyse de défaut de forme considéré. Si l'on a relevé n points et en appelant ce vecteur W_k , on aura :

$$W_k = (dS_1 \cdot N_1, dS_2 \cdot N_2, \dots, dS_n \cdot N_n) \tag{III-8}$$

La construction du vecteur \overline{dS} dépend évidemment de la forme géométrique de la surface mesurée.

Bien que la denture à développante sphérique n'étant pas réalisable (difficulté de réaliser l'outil de génération), dans les sous-chapitres qui suivent, nous utiliserons les deux méthodes d'optimisation, tout en admettant les mêmes réglages que pour une denture octoïde de 1^{ère} espèce (denture pratique) et ce, dans le but de comparer les résultats d'optimisation et tirer une conclusion.

IV) ETUDE DES DIFFERENTS REGLAGES :

IV-D) Taillage des roues par fraises-disques (Coniflex) :

a) Positionnement de la pièce à tailler :

- 1) Réglage de la position du sommet S du cône de base de manière à avoir ce point sur l'axe de rotation du berceau (Fig.III-7a).
- 2) Réglage de l'inclinaison de l'axe de la pièce par rapport à celui du berceau de façon à ramener le plan normal en S à ce dernier axe tangent au cône de base de la pièce. Réglage suivant l'angle δ_b dans le plan SXZ' (Fig.III-7b).
- 3) Rotation de l'axe de la pièce de l'angle d'inclinaison de l'hélice de base β_b dans le plan X_1SY' (Fig.III-7c).

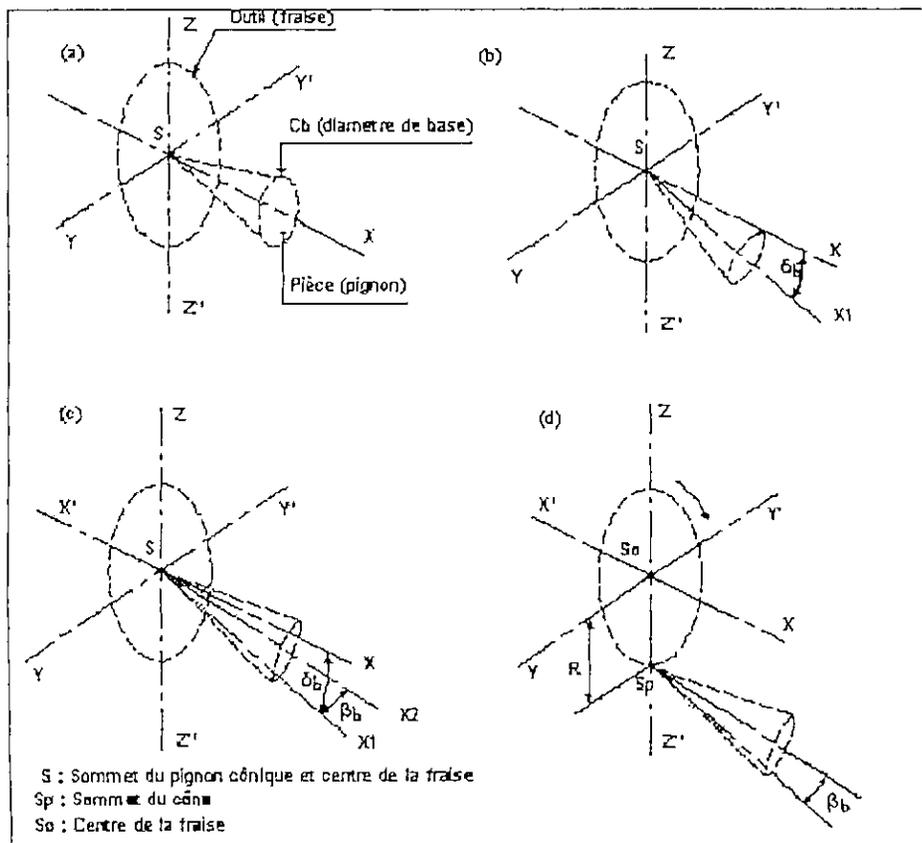


Fig. III-7 : Réglages de la pièce (taillage par fraise-disque).

b) Positionnement de l'outil de taillage :

- 1) Réglage définissant la distance G (génératrice moyenne du cône de pied du pignon, de telle sorte que les fraises soient en regard de la denture taillée. Réglage qui reste inchangé pour une denture hélicoïdale, étant donné que le berceau est déjà incliné par rapport à la pièce de l'angle d'inclinaison de l'hélice (Fig.III-8a).
- 2) Réglage de l'inclinaison γ de chacun des demi-berceaux des fraises (Fig.III-8b).
- 3) Réglage de l'écartement E_f des fraises de manière à ce que les plans qui les matérialisent passent par le sommet S du cône. Selon [HEN99], l'écartement E_f pour une denture conique droite est donné par la relation :

$$E_f = G \sin \gamma \quad (\text{III-9})$$

Pour le taillage d'une denture conique hélicoïdale, la distance G est obtenue à partir du point S' .

- 4) Inclinaison des fraises de manière à ce que leurs plans soient inclinés d'un angle égale à l'angle de pression α_n par rapport à la normale au plan primitif de la roue plate génératrice.
- 5) Translation de l'outil suivant l'axe SZ d'une distance R égale au rayon de la fraise, de façon à ramener le diamètre extérieur de la fraise tangent au cône de base du pignon à tailler. Réglage de la profondeur de pénétration des fraises et du déport V (Fig.III-7d).

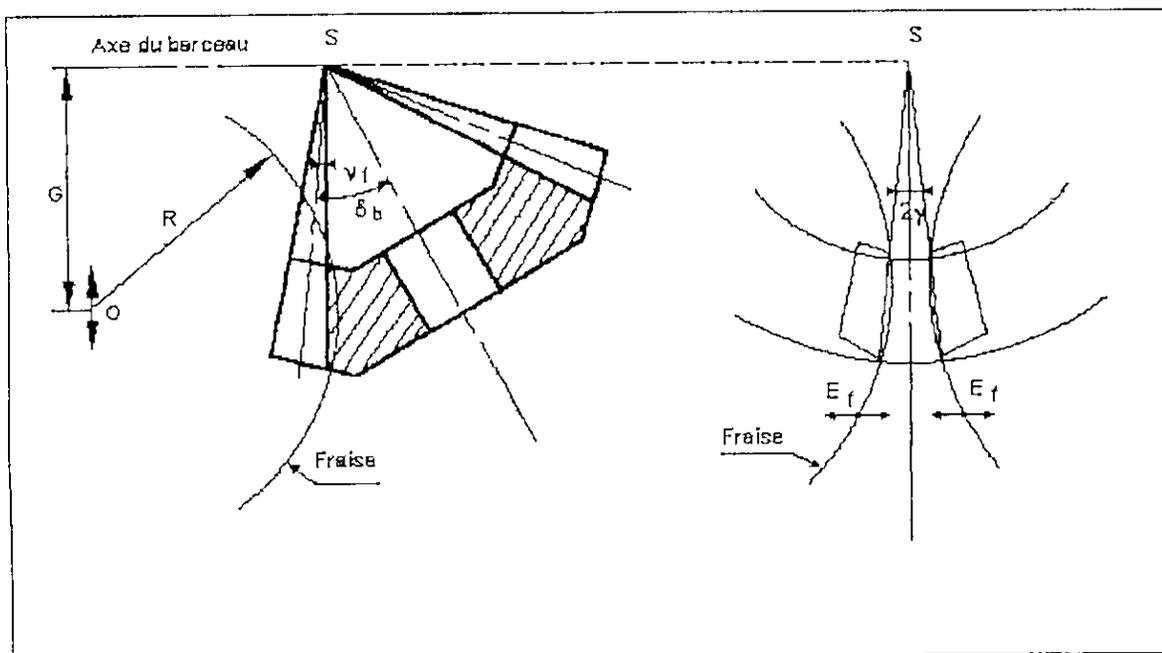


Fig. III-8 : Distance G et écartement E_f pour une denture conique droite [HEN99].

IV-2) Taillage par mortaisage (Gleason Coniflex) :

En plus des réglages de l'écartement des glissières de l'angle 2γ et de la course de mortaisage égale à la longueur R de la génératrice du cône primitif du pignon à tailler, l'angle d'inclinaison de l'hélice primitive β_p est réglé en ramenant le point de convergence S des glissières en un point S' tel que : $SS' = R \sin \beta_p$ (Fig.III-3).

A remarquer que :

- Sur ces machines de taillage, l'angle de pression α n'est pas un paramètre de réglage car il est fixe pour une machine donnée. Son optimisation peut témoigner de l'usure ou d'un mauvais affûtage de l'outil de taillage.
- La position du sommet S du cône primitif est donnée par l'optimisation de position.
- Les fraises sont de diamètre suffisamment grand pour permettre le taillage de toute la largeur de la denture ; par conséquent une petite variation de la distance G n'influe pratiquement pas sur la forme de la denture à tailler (taillage par fraises-disques).

V) METHODE PAR SIMULATION (denture à développante sphérique) :

V-1) Hypothèses :

Vu que nous ne disposons ni d'un pignon conique hélicoïdal usiné (donc réel), ni d'une machine à mesurer tridimensionnelle (MMT), nous étudierons pour les besoins de notre recherche, un modèle de pignon fictif, avec les données suivantes :

- Longueur de la génératrice du cône $R = 90$ mm
- Longueur utile ou longueur de la génératrice du pignon : $L = R/3 = 30$ mm
- Nombre de dents : $Z = 16$ dents
- Module réel : $M_n = 6,4$ mm
- Demi-angle au sommet du cône primitif : $\delta_p = 29,75^\circ$
- Angle de pression réel : $\alpha_n = 22,5^\circ$
- Angle d'inclinaison primitive de l'hélice : $\beta_p = 15^\circ$
- Coefficient de déport : $x = 0,2276$

V-2) Expérience simulée :

Nous allons considérer 04 dents du pignon, (plus précisément 04 entre-dents ou creux de denture) diamétralement opposés deux à deux et perpendiculaires entres eux, dans un référentiel (O, x, y, z) de telle sorte que l'axe Ox passe par le milieu du creux de la dent (Fig.III-9). Le calcul d'un angle φ compris entre l'axe initial Ox_1 et le nouvel axe Ox est nécessaire. Nous supposons aussi que des mesures seraient prises sur 05 plans apparents équidistants, en prenant comme plan de référence celui de la petite base du pignon (petit bout de la denture). Chaque profil sera «mesuré» sur 08 points équidistants angulairement (l'angle qui permet la génération du profil θ_1 sera subdivisé en 07 angles $d\theta_1$ constants), de sorte que le 1^{er} et le 8^{ème} point soient situés respectivement sur le diamètre de tête et le diamètre de pied du pignon, pour chaque profil considéré de la denture. Vu l'inclinaison de l'hélice, nous

savons que la dent subit d'un plan à un autre, une rotation d'un angle ψ à déterminer (voir Fig.III-10).

Nous obtenons un nombre de 320 points «mesurés». En calculant les coordonnées théoriques de ces points et en leur donnant «aléatoirement» des écarts, nous pouvons déduire les coordonnées des points «mesurés» et construire les vecteurs d'analyse pour la méthode par simulation.

Nous pouvons alors écrire la relation suivante :

$$\overline{OM} = \overline{OM}_0 + Ec.\bar{N} \tag{III-10}$$

Ou bien:

$$\begin{cases} X = X_0 + Ec.N_x \\ Y = Y_0 + Ec.N_y \\ Z = Z_0 + Ec.N_z \end{cases} \tag{III-11}$$

Avec :

- X, Y, Z : coordonnées du point M mesuré,
- X₀, Y₀, Z₀ : coordonnées du point M₀ théorique,
- N_x, N_y, N_z : coordonnées de la normale au point M,
- Ec : écart (fictif).

V-3) Calcul de l'angle φ de rotation du repère (O, x₁, y₁, z₁) :

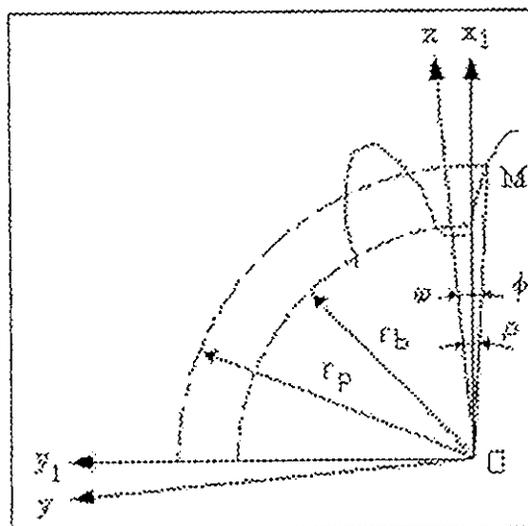


Fig.III-9 : Tracé de l'angle φ .

Dans la figure III-19 nous avons : $\varphi = \rho - \phi$ (III-12)

a) Calcul de l'angle ρ :

La valeur du pas apparent est donnée par la relation :

$$P_t = \frac{2\pi.r_p}{Z} \tag{III-13}$$

Comme la denture est caractérisée à son gros bout, son cercle primitif a pour rayon :

$$r_p = \frac{M_t Z}{2} \quad (\text{III-14})$$

La valeur de l'épaisseur primitive apparente est donnée par la relation :

$$S_{Pt} = M_t \left(\frac{\pi}{2} + 2x \cdot \text{tg} \alpha_t \right) \quad (\text{III-15})$$

Comme l'arc :

$$P_t - S_{Pt} = 2\rho r_p \quad (\text{III-16})$$

Nous déduisons l'expression de l'angle ρ :

$$\rho = \frac{P_t - S_{Pt}}{2r_p} \quad (\text{III-17})$$

Tous calculs faits, la valeur de l'angle ρ est :

$$\rho = \frac{1}{Z} \left(\frac{\pi}{2} - 2x \cdot \text{tg} \alpha_t \right) \quad (\text{III-18})$$

b) Calcul de l'angle ϕ :

La coordonnée du point M sur l'axe y_1 au diamètre primitif est :

$$Y_{1p} = r_p \cdot \sin \phi \quad (\text{III-19})$$

Comme :

$$r_p = R \cdot \sin \delta_p$$

Tous calculs faits, la valeur de l'angle ϕ est :

$$\phi = \arcsin \left(\frac{Y_{1p}}{R \cdot \sin \delta_p} \right) \quad (\text{III-20})$$

L'expression de l'angle φ s'écrit alors :

$$\varphi = \frac{1}{Z} \left(\frac{\pi}{2} - 2x \cdot \text{tg} \alpha_t \right) - \arcsin \left(\frac{Y_{1p}}{R \sin \delta_p} \right) \quad (\text{III-21})$$

Avec :

- Z : Nombre de dents.
- x : Coefficient de déport.
- α_t : Angle de pression apparent.
- Y_1 : Coordonnée du point M sur l'axe y_1 au diamètre primitif
- R : Longueur de la génératrice du cône.
- δ_p : Demi-angle au sommet du cône primitif.

V-4) Calcul de l'angle ψ de rotation de la dent d'un plan à un autre :

Dans la figure III-10-a, il est clair que le profil de la dent dans un plan apparent parallèle au plan de référence a subi une rotation d'un angle ψ par rapport à la génératrice AB du cône. Cette rotation est due à la l'inclinaison β_p de l'hélice. Avec la vue sur le plan primitif (P) (Fig.III-10-b), le roulement sans glissement de ce plan sur le cône primitif nous permet de dire que l'arc BC du cercle primitif de rayon r_{pn} est égale à l'arc BC du plan (P) de rayon R_n .

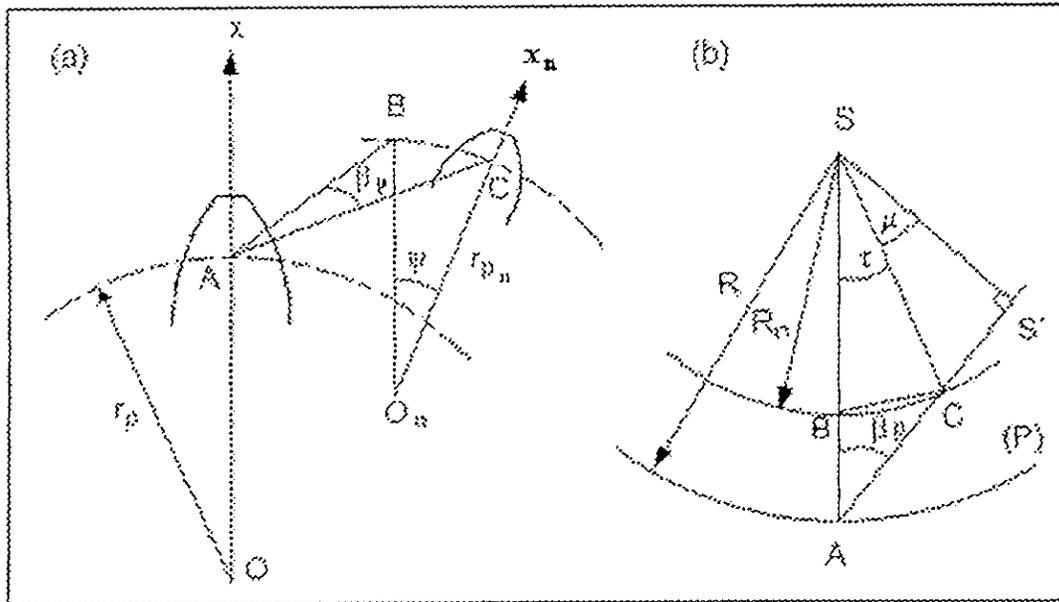


Fig.III-10 : Tracés de l'angle ψ .

Nous remarquons aussi que l'angle ψ est inversement proportionnel au rayon R_n ; c'est à dire que plus ce rayon augmente, plus l'angle diminue, et réciproquement. Nous déduisons que l'angle ψ est entièrement dépendant de l'angle d'inclinaison de l'hélice primitive β_p , du demi-angle au sommet du cône primitif et du rayon R_n correspondant à la position du plan apparent considéré.

Nous pouvons écrire :

$$R_n \cdot \tau = r_{pn} \cdot \psi \tag{III-22}$$

Avec :

$$r_{pn} = R_n \cdot \sin \delta_p$$

D'où :

$$\psi = \frac{\tau}{\sin \delta_p} \tag{III-23}$$

Calcul de l'angle τ :

Considérons le triangle rectangle CSS' :

$$\cos \mu = \frac{SS'}{CS} = \frac{R \cdot \sin \beta_p}{R_n} \tag{III-24}$$

D'où l'expression de l'angle τ :

$$\tau = \frac{\pi}{2} - \beta_p - \arccos \left(\frac{R \cdot \sin \beta_p}{R_n} \right) \tag{III-25}$$

La relation (III-23) peut s'écrire alors :

$$\psi = \frac{\frac{\pi}{2} - \beta_p - \arccos\left(\frac{R \cdot \sin \beta_p}{R_n}\right)}{\sin \delta_p} \quad \text{(III-26)}$$

Avec :

- β_p : Angle d'inclinaison primitive de l'hélice.
- R : Longueur de la génératrice du cône.
- R_n : Longueur de la génératrice du cône au plan apparent considéré.
- δ_p : Demi-angle au sommet du cône primitif

V-5) Tracé du profil théorique d'une denture en développante sphérique :

La figure III-11 représente les profils de 04 entre-dents (disposés sur les axes X et Y) d'un pignon conique hélicoïdal à 16 dents. Les points des profils sont projetés sur 05 plans normaux à l'axe du pignon (plans apparents équidistants).

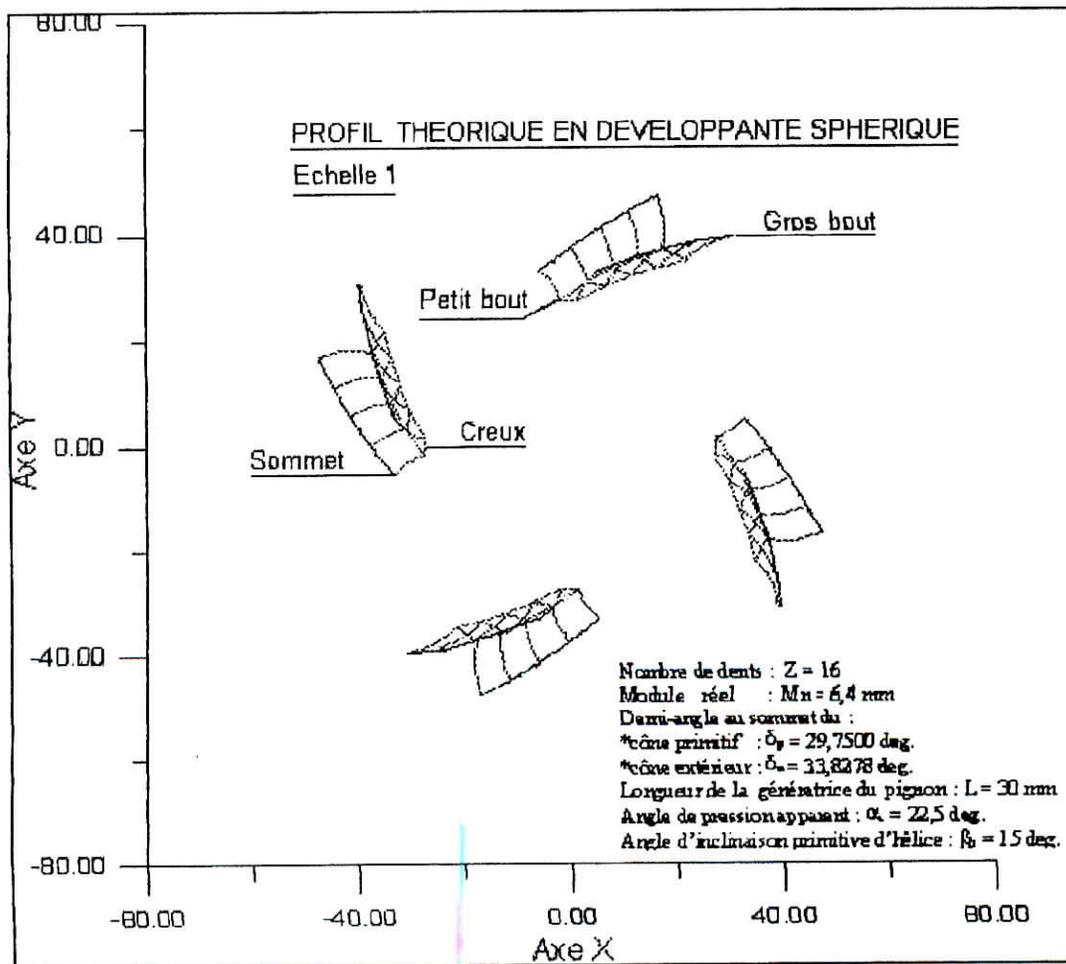


Fig. III-11 : Tracé des profils théoriques de denture en développant sphérique (04 dents).

V-6) Optimisation des vecteurs d'analyse :

On effectue l'optimisation des vecteurs d'analyse de défaut de forme construits suivant la méthode par simulation en considérant le fichier des points et normales théoriques et des écarts fictifs qu'on a imposés ou «simulés».

Les valeurs des corrections à effectuer sur les paramètres de réglage de la machine de taillage s'obtiennent en multipliant les coefficients donnés par l'optimisation par 0.01mm pour les réglages dimensionnels comme le déport V , par exemple, et par 0.001 rad pour les réglages angulaires comme les angles de pression α_n , d'inclinaison de l'hélice primitive β_p et le demi-angle au sommet du cône primitif δ_p .

A remarquer que l'angle de pression n'est pas un paramètre de réglage mais son optimisation peut témoigner de l'usure ou d'un mauvais affûtage de l'outil de taillage.

La figure III.12 représente l'organigramme du programme de calcul en Fortran qui nous a permis d'établir les différents fichiers nécessaires à l'optimisation des paramètres de réglage considérés.

En effet, le programme d'optimisation qui nous a été fourni par Mr BOUAZIZ nécessite un fichier comportant toutes les valeurs des coordonnées théoriques (X, Y, Z), celles des normales (N_x, N_y, N_z) des points M considérés et les écarts imposés aléatoirement ou «simulés», ainsi qu'un fichier des écarts dus à la variation de chaque paramètre de réglage considéré ($d\alpha_n, d\beta_p, d\delta_p$ et dV).

Remarque : En plus des défauts de forme dus aux variations des paramètres considérés, le programme d'optimisation permet aussi de quantifier les coefficients de correction des défauts de «position» que nous n'avons pas pris en considération dans ce travail et dont on ne commentera pas les résultats.

En effet, le déplacement d'un point d'une pièce ou d'un système solide est caractérisé par les défauts de position et de forme de cette pièce. Ces défauts sont caractérisés par un champ de vecteurs de position constitué de vecteurs de translation T_x, T_y et T_z et de vecteurs de rotation R_x, R_y et R_z qui peuvent être facilement quantifiés. Quant aux défauts de forme, ils sont influencés par les variations des paramètres caractérisant la surface mesurée. Leur modélisation est le plus souvent difficile à établir, il est donc évident que tous les éléments recensés ne peuvent être quantifiés. Toutefois, la part des défauts non identifiés est exprimée par les erreurs résiduelles en optimisant les défauts identifiés.

V-7) Interprétation des résultats :

La figure III-13 représente les résultats d'optimisation dus à la variation de l'angle de pression réel α_n , de l'angle de l'inclinaison de l'hélice primitive β_p , du l'angle demi-angle au sommet du cône primitif δ_p et du déport V . La valeur de correction de l'angle α_n vaut $-14'38''$, celle de l'angle de l'inclinaison de l'hélice primitive est de $1,64''$, celle du demi-angle au sommet du cône primitif est de $0,07''$ et celle du déport V est de $-0,00007\text{mm}$, quantités très négligeables pour ces 3 derniers résultats. On voit bien qu'il y a uniquement l'influence du vecteur d'analyse dû à la variation de l'angle de pression réel α_n et de ce fait il serait utile de procéder à la correction de cet angle. La valeur corrigée de l'angle de pression sera alors de $22^\circ 15' 22''$.

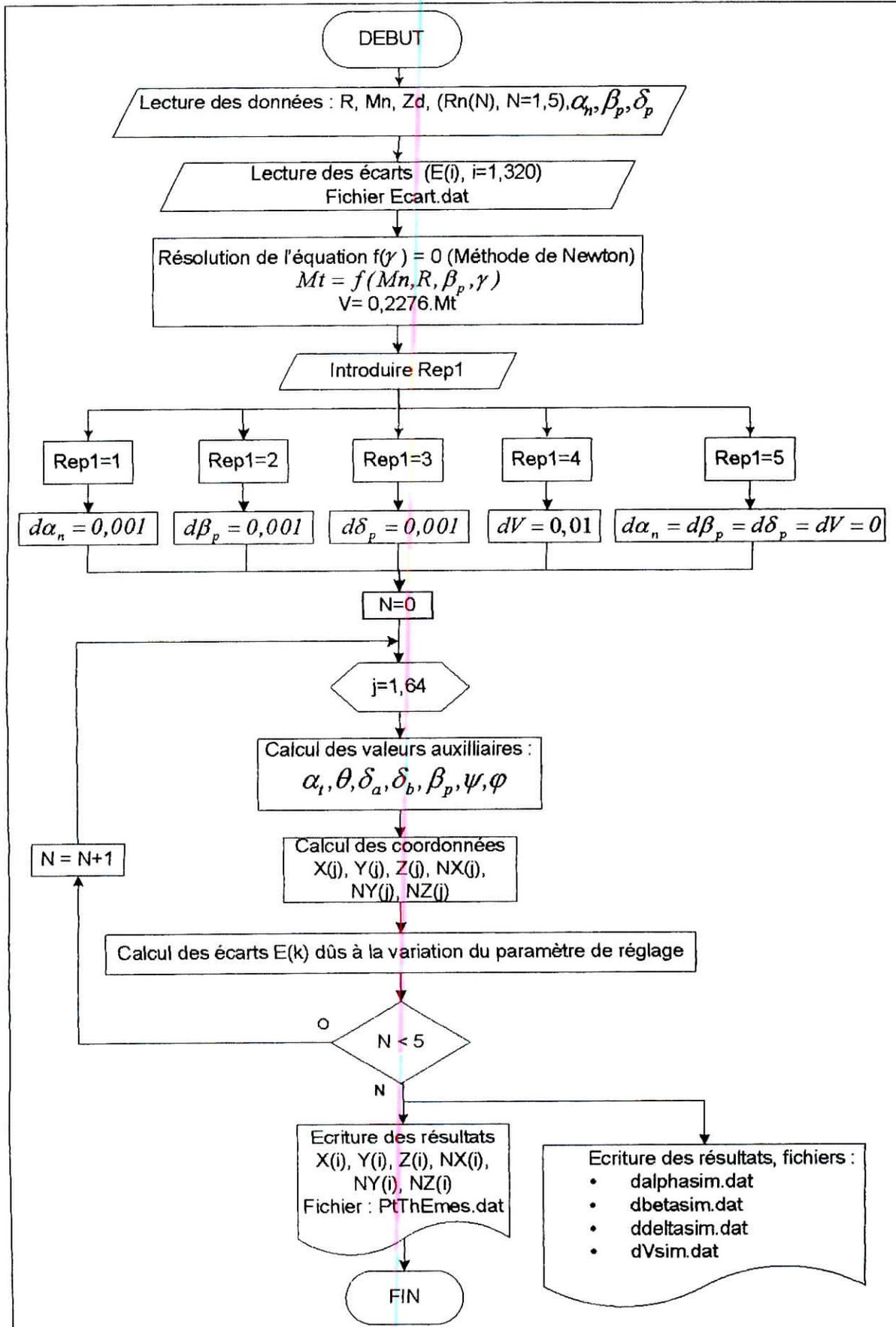


Fig.III-12 : Organigramme (Fortran) d'obtention des fichiers pour simulation (méthode par simulation).

(a)	(b)
DATE : 30/04/2003 NOM DU FICHIER LU : PtThEmes ECART QUADRATIQUE MOYEN : 0.0644073238 ECART QUADRATIQUE RESIDUEL MOYEN : 0.0557063300 ***** PROJECTIONS ***** TRANSLATION SUIVANT X en mm : -0.0292416172 TRANSLATION SUIVANT Y en mm : 0.0050141658 ROTATION AUTOUR DE X en mm/m : 0.0858395012 ROTATION AUTOUR DE Y en mm/m : 0.4030747890 ROTATION AUTOUR DE Z en mm/m : 0.5555605787 dalphasim : -4.2599725577	DATE : 30/04/2003 NOM DU FICHIER LU : PtThEmes ECART QUADRATIQUE MOYEN : 0.0644073238 ECART QUADRATIQUE RESIDUEL MOYEN : 0.0614764300 ***** PROJECTIONS ***** TRANSLATION SUIVANT X en mm : -0.0273784680 TRANSLATION SUIVANT Y en mm : 0.0061033610 ROTATION AUTOUR DE X en mm/m : 0.0863979143 ROTATION AUTOUR DE Y en mm/m : 0.3760289284 ROTATION AUTOUR DE Z en mm/m : 0.5582536475 dbetasim : 0.0079677254
(c)	(d)
DATE : 30/04/2003 NOM DU FICHIER LU : PtThEmes ECART QUADRATIQUE MOYEN : 0.0644073238 ECART QUADRATIQUE RESIDUEL MOYEN : 0.0611134890 ***** PROJECTIONS ***** TRANSLATION SUIVANT X en mm : -0.0283458435 TRANSLATION SUIVANT Y en mm : 0.0011071380 ROTATION AUTOUR DE X en mm/m : 0.0394096674 ROTATION AUTOUR DE Y en mm/m : 0.3847427539 ROTATION AUTOUR DE Z en mm/m : 0.5465210437 ddeltasim : 0.0003761981	DATE : 30/04/2003 NOM DU FICHIER LU : PtThEmes ECART QUADRATIQUE MOYEN : 0.0644073238 ECART QUADRATIQUE RESIDUEL MOYEN : 0.0614747072 ***** PROJECTIONS ***** TRANSLATION SUIVANT X en mm : -0.0258530533 TRANSLATION SUIVANT Y en mm : 0.0064975626 ROTATION AUTOUR DE X en mm/m : 0.0868079785 ROTATION AUTOUR DE Y en mm/m : 0.3538652431 ROTATION AUTOUR DE Z en mm/m : 0.5591390065 dVsim : -0.0067383919

Fig.III-13 : Optimisation en position et en forme de la denture (méthode par simulation).

V-6) Optimisation des écarts résiduels moyens « réels » ou cartographie d'une denture :

La figure suivante illustre un exemple de cartographie d'une denture où nous avons représenté la topographie des écarts résiduels (moyenne sur 04 dents) obtenue en optimisant en position les écarts « fictifs » imposés sur le pignon étudié (Fig.III-14). Les écarts y sont représentés sur les deux flancs ou creux de la dent par un nombre de 80 points (8 points par profil et sur 5 plans apparents équidistants). On remarque que le sommet de la dent est plus large et sa base plus mince que ceux du profil théorique (en couleur bleue), ce qui nous incite à conclure qu'il y a lieu de procéder à une correction de l'angle de pression α_n .

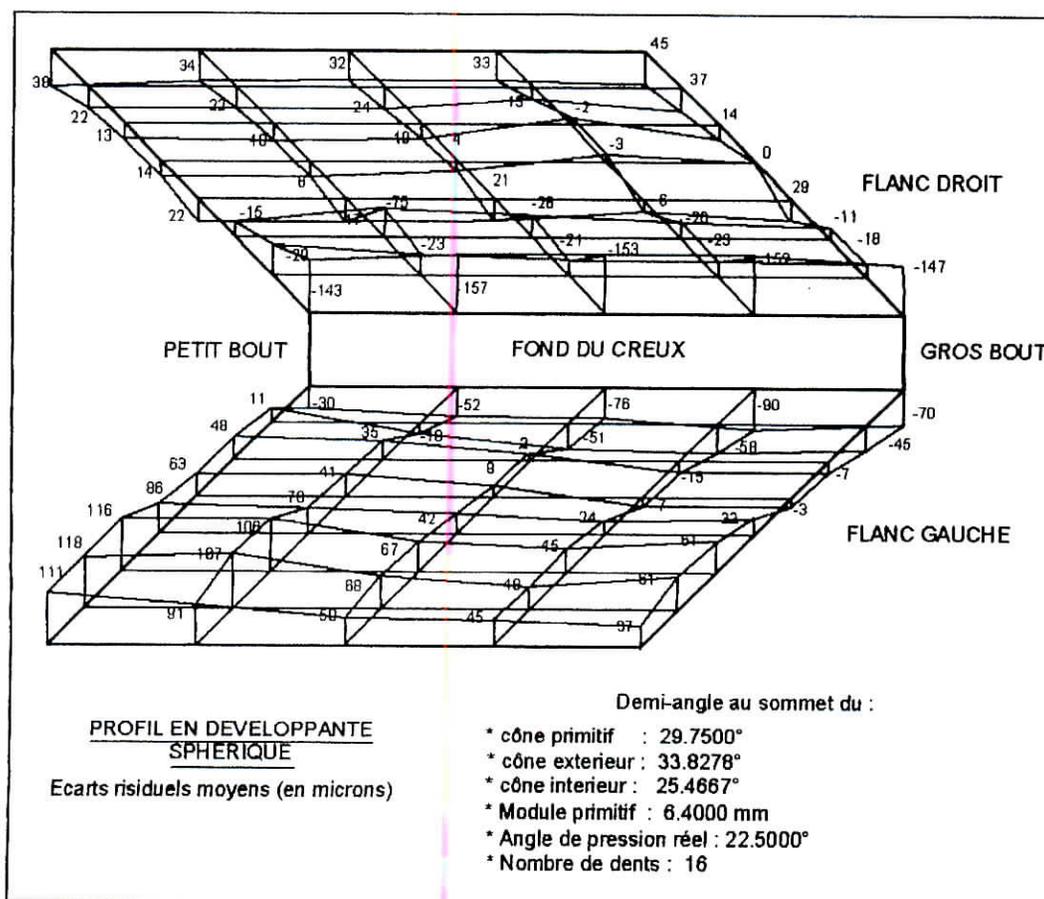


Fig.III-14 : Optimisation en position des écarts réels.

VI) METHODE ANALYTIQUE (denture à développante sphérique) :

Dans ce qui suit, on étudiera uniquement l'influence des paramètres suivants :

- l'angle δ_p du cône primitif du pignon,
- l'angle de pression réel α_n ,
- l'angle de l'inclinaison de l'hélice primitive β_p ,
- le déport V (profondeur de pénétration des fraises ou déplacement du profil de denture).

Les variations des paramètres de réglage se manifestent sur l'épaisseur réelle (I-33) ou apparente (I-27) de la denture. Celles-ci sont données par les relations :

$$S_n = 2R \sin \left[\frac{\arcsin \left(\frac{\cos \phi - \sin \beta_p}{\sqrt{1 + \sin^2 \beta_p - 2 \sin \beta_p \cdot \cos \phi}} \right)}{2} \right] \sqrt{1 + \sin^2 \beta_p - 2 \sin \beta_p \cdot \cos \phi} \quad (I-33)$$

Avec :
$$\phi = \frac{\pi}{2} - \beta_p - 2 \arcsin\left(\frac{S_t}{2R}\right)$$

et :
$$S_t = R \sin \delta \left\{ \frac{S_{pt}}{r_p} + 2(\theta_{1p} - \theta_1) - 2 \left[\arccos\left(\frac{tg \delta_b}{tg \delta_p}\right) - \arccos\left(\frac{tg \delta_b}{tg \delta}\right) \right] \right\} \quad (I-27)$$

La relation (I-27) peut s'écrire :

$$dS_t = \frac{\partial S_t}{\partial R} dR + \frac{\partial S_t}{\partial \delta} d\delta + \frac{\partial S_t}{\partial S_{pt}} dS_{pt} + \frac{\partial S_t}{\partial r_p} dr_p + \frac{\partial S_t}{\partial \theta_{1p}} d\theta_{1p} + \frac{\partial S_t}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial S_t}{\partial \delta_b} d\delta_b + \frac{\partial S_t}{\partial \delta_p} d\delta_p \quad (III-27)$$

et la relation (I-33) peut aussi s'écrire :

$$dS_n = \frac{\partial S_n}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial S_n}{\partial R} dR + \frac{\partial S_n}{\partial \beta} d\beta \quad (III-28)$$

Cherchons maintenant l'influence des variations des paramètres de réglage sur l'épaisseur de la denture.

De la relation (III-14) donnant la valeur du rayon primitif :

$$r_p = \frac{M_t Z}{2}$$

On remarque que le module apparent M_t et le nombre de dents Z sont des paramètres invariables, donc :

$$dr_p = 0$$

En admettant que $dR = d\delta = 0$ (point se situant sur le même cercle à l'intersection de la sphère et du cône passant par la point considéré) les relations (III-27) et (III-28) deviennent :

$$dS_t = \frac{\partial S_t}{\partial S_{pt}} dS_{pt} + \frac{\partial S_t}{\partial \theta_{1p}} d\theta_{1p} + \frac{\partial S_t}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial S_t}{\partial \delta_b} d\delta_b + \frac{\partial S_t}{\partial \delta_p} d\delta_p \quad (III-29)$$

$$dS_n = \frac{\partial S_n}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial S_n}{\partial \beta} d\beta \quad (III-30)$$

VI-1) Influence des paramètres, autres que ceux pris en compte dans l'expression de la denture :

VI-1-1) Calcul de l'angle γ pour une denture conique hélicoïdale :

La formule approximative (III-1) donnée par [HEN99] concerne la denture conique droite. Comme on devra régler d'abord l'angle de l'inclinaison primitive β_p en ramenant le point S, point d'intersection des glissières et aussi centre du berceau, en un point S' d'une

distance de valeur : $r = R \sin \beta_p$, le réglage de l'angle γ se fera alors à partir du point S' . Nous pouvons dire que seul R_f varie (longueur de la génératrice du cône de pied) (Fig.III-15).

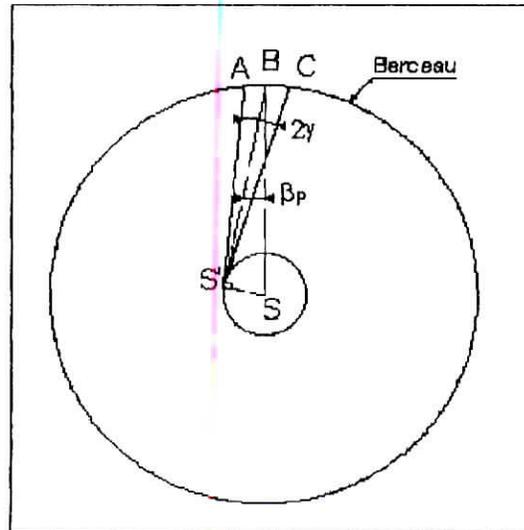


Fig. III-15 : Ecartement des fraises 2γ .

Nous savons aussi que : $R_f = R_p = R_a = BS = R$ (rayon de la sphère), nous concluons que :

$$BS' = BS \cos \beta_p = R \cos \beta_p$$

La formule approximative (III-1) pour une denture hélicoïdale peut s'écrire alors :

$$tg \gamma = \frac{\frac{S_{pn}}{2} + h_f tg \alpha}{R_f \cos \beta_p} \quad (III-31)$$

avec :

- S_{pn} : Epaisseur primitive réelle de denture,
- h_f : Hauteur de pied de denture,
- α_n : Angle de pression réel,
- R_f : Longueur de la génératrice du cône de pied,
- β_p : Angle d'inclinaison primitive de l'hélice.

Nous déduisons l'expression de l'épaisseur primitive réelle S_{pn} :

$$S_{pn} = 2(R_f \cos \beta_p tg \gamma - h_f tg \alpha_n) \quad (III-32)$$

Dérivant la relation (III-32) en considérant R_f constant :

$$dS_{pn} = 2 \left[R_f \left(\frac{\cos \beta_p}{\cos^2 \gamma} d\gamma - tg \gamma \cdot \sin \beta_p \cdot d\beta_p \right) + \frac{h_f}{\cos^2 \alpha} d\alpha_n - tg \alpha_n \cdot dh_f \right] \quad (III-33)$$

La quantité $d\gamma$ peut être fixée ou calculée par la relation (III-9). Dans ce dernier cas on aura :

$$d\gamma = \frac{dE_f}{G \cos \gamma} \quad \text{(III-34)}$$

La quantité dh_f peut être calculée à partir de la relation (III-2) :

$$dh_f = -dV \quad \text{(III-35)}$$

VI-1-2) Ecartement des fraises E_f :

L'écartement des fraises étant donné par la relation (III-9) :

$$E_f = G \sin \gamma$$

Les réglages E_f et γ ont des effets similaires. En effet, en dérivant la relation (III-9), on obtient :

$$dE_f = G \cos \gamma . d\gamma \quad \text{(III-36)}$$

G et γ étant constants pour tous les points de la surface de denture, cette relation montre que les vecteurs d'analyse correspondants à l'écartement E_f et à l'inclinaison γ des fraises sont colinéaires.

VI-2) Calcul des paramètres de réglage pris en compte dans l'expression de l'épaisseur apparente de la denture :

VI-2-1) Calcul de dS_{Pt} :

La valeur de dS_{Pt} est donnée par la relation :

$$S_{Pt} = \left(\frac{\pi}{2} + 2xtg \alpha_t \right) \quad \text{(III-37)}$$

Comme : $V = x M_t = \text{déport}$, la relation (III-38) s'écrit :

$$S_{Pt} = \frac{\pi M_t}{2} + 2Vtg \alpha_t \quad \text{(III-39)}$$

En dérivant (III-39), on obtient :

$$dS_{Pt} = 2 \left(tg \alpha_t dV + \frac{V d\alpha_t}{\cos^2 \alpha_t} \right) \quad \text{(III-40)}$$

VI-2-2) Calcul de $d\delta_b$:

Nous avons la relation (I-28) :

$$\sin \delta_b = \sin \delta_p \cos \alpha_t$$

En dérivant cette expression, on obtient :

$$\cos \delta_b d\delta_b = \cos \delta_p \cos \alpha_t d\delta_p - \sin \delta_p \sin \alpha_t d\alpha_t$$

d'où :

$$d\delta_b = \frac{\cos \delta_p \cos \alpha_t d\delta_p - \sin \delta_p \sin \alpha_t d\alpha_t}{\cos \delta_b} \quad (\text{III-41})$$

VI-2-3) Calcul de $d\alpha_t$:

Nous avons la relation (II-38) :

$$\text{tg} \alpha_t = \frac{M_n}{M_t} \text{tg} \alpha_n$$

Avec :

$$M_t = \sqrt{\left(R \cos \beta_p - \frac{M_n}{2 \sin \gamma}\right)^2 + M_n^2} + 2 \left(R \cos \beta_p - \frac{M_n}{2 \sin \gamma}\right) M_n \cdot \sin \gamma$$

En dérivant l'expression (II-38), on obtient une différentielle totale de la forme:

$$\frac{\partial \text{tg} \alpha_t}{\partial \alpha_t} d\alpha_t = \frac{\partial \left(\frac{1}{M_t}\right)}{\partial \beta_p} M_n \text{tg} \alpha_n d\beta_p + \frac{\partial \left(\frac{1}{M_t}\right)}{\partial \gamma} M_n \text{tg} \alpha_n d\gamma + \frac{M_n}{M_t} \frac{\partial \text{tg} \alpha_n}{\partial \alpha_n} d\alpha_n \quad (\text{III-42})$$

Calculons les dérivées partielles :

- $$\frac{\partial \text{tg} \alpha_t}{\partial \alpha_t} d\alpha_t = \frac{1}{\cos^2 \alpha_t} d\alpha_t \quad (\text{III-43})$$

- Posons : $M_t = \sqrt{F} \Rightarrow \frac{\partial \left(\frac{1}{M_t}\right)}{\partial \beta_p} = -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \beta_p} F^{-\frac{3}{2}}$ (III-44)

Tous calculs faits, l'expression (III-44) devient :

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{M_t}\right)}{\partial \beta_p} = -\frac{R \cos \beta_p \left[\left(R \cos \beta_p - \frac{M_n}{2 \sin \gamma}\right) + M_n \sin \gamma \right]}{\left[\left(R \cos \beta_p - \frac{M_n}{2 \sin \gamma}\right)^2 + M_n^2 + 2 \left(R \cos \beta_p - \frac{M_n}{2 \sin \gamma}\right) M_n \sin \gamma \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{III-45})$$

- $$\frac{\partial \left(\frac{1}{M_t}\right)}{\partial \gamma} = -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \gamma} F^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{III-46})$$

Tous calculs faits, l'expression (III-46) devient :

$$\frac{\partial \left(\frac{l}{M_t} \right)}{\partial \gamma} = \frac{\frac{M_n \cos \gamma}{2 \sin^2 \gamma} \left[M_n \sin \gamma - \left(R \cos \beta_p - \frac{M_n}{2 \sin \gamma} \right) \right]}{\left[\left(R \cos \beta_p - \frac{M_n}{2 \sin \gamma} \right)^2 + M_n^2 + 2 \left(R \cos \beta_p - \frac{M_n}{2 \sin \gamma} \right) M_n \sin \gamma \right]^{\frac{3}{2}}} \quad \text{(III-47)}$$

•
$$\frac{\partial \operatorname{tg} \alpha_n}{\partial \alpha_n} d\alpha_n = \frac{l}{\cos^2 \alpha_n} d\alpha_n \quad \text{(III-48)}$$

D'où l'expression de $d\alpha_t$:

$$d\alpha_t = \cos^2 \alpha_t \left[(M_n \operatorname{tg} \alpha_n) \left(\frac{\partial \left(\frac{l}{M_t} \right)}{\partial \beta_p} d\beta_p + \frac{\partial \left(\frac{l}{M_t} \right)}{\partial \gamma} d\gamma \right) + \frac{M_n}{M_t \cos^2 \alpha_n} d\alpha_n \right] \quad \text{(III-50)}$$

VI-2-4) Calcul de $d\theta_1$:

De la relation (I-32) :

$$\theta_1 = \frac{\theta}{\sin \delta_b}$$

Et de la relation (I-29) :

$$Z_l = R \cos \delta = R \cos \delta_b \cos \theta$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\cos \delta = \cos \delta_b \cos(\theta_1 \cdot \sin \delta_b) \quad \text{(III-51)}$$

En dérivant cette expression, tous calculs faits on obtient :

$$d\theta_1 = - \frac{[\cos^2 \delta_b \sin(\theta_1 \sin \delta_b) \theta_1 + \sin \delta_b \cos(\theta_1 \sin \delta_b)] d\delta_b}{\sin \delta_b \cos \delta_b \sin(\theta_1 \sin \delta_b)} \quad \text{(III-52)}$$

VI-2-5) Calcul de $d\theta_{1p}$:

De même, de la relation (I-31) :

$$\theta_{1p} = \frac{\theta_p}{\sin \delta_b}$$

Nous pouvons aussi écrire que :

$$\cos \delta_p = \cos \delta_b \cos(\theta_{1p} \cdot \sin \delta_b) \quad \text{(III-53)}$$

En dérivant cette expression, on obtient :

$$d\theta_{1p} = \frac{\sin \delta_p d\delta_p - [\cos^2 \delta_b \sin(\theta_{1p} \sin \delta_b) \theta_{1p} + \sin \delta_b \cos(\theta_{1p} \sin \delta_b)] d\delta_b}{\sin \delta_b \cos \delta_b \sin(\theta_{1p} \sin \delta_b)} \quad (\text{III-54})$$

Les dérivées partielles de la relation (III-29) s'écrivent :

$$\frac{\partial S_t}{\partial S_{pt}} = \frac{R \sin \delta}{r_p} = \frac{\sin \delta}{\sin \delta_p} \quad (\text{III-55})$$

$$\frac{\partial S_t}{\partial \theta_{1p}} = 2R \sin \delta \quad (\text{III-56})$$

$$\frac{\partial S_t}{\partial \theta_1} = -2R \sin \delta \quad (\text{III-57})$$

Calcul de $\frac{\partial S_t}{\partial \delta_b}$:

De l'expression (I-27) posons :

$$f_1 = \arccos\left(\frac{\text{tg } \delta_b}{\text{tg } \delta_p}\right) \Rightarrow \cos f_1 = \frac{\text{tg } \delta_b}{\text{tg } \delta_p}$$

$$f_2 = \arccos\left(\frac{\text{tg } \delta_b}{\text{tg } \delta}\right) \Rightarrow \cos f_2 = \frac{\text{tg } \delta_b}{\text{tg } \delta}$$

d'où :

$$\frac{\partial S_t}{\partial \delta_b} = -2R \sin \delta \left[\frac{\partial f_1}{\partial \delta_b} - \frac{\partial f_2}{\partial \delta_b} \right]$$

Calculons les dérivées partielles de f_1 et f_2 par rapport à δ_b :

$$\frac{\partial(\cos f_1)}{\partial \delta_b} = \frac{\partial}{\partial \delta_b} \left(\frac{\text{tg } \delta_b}{\text{tg } \delta_p} \right) \quad (\text{a})$$

$$\frac{\partial(\cos f_2)}{\partial \delta_b} = \frac{\partial}{\partial \delta_b} \left(\frac{\text{tg } \delta_b}{\text{tg } \delta} \right) \quad (\text{b})$$

$$(\text{a}) \Rightarrow -\frac{\partial f_1}{\partial \delta_b} \sin f_1 = \frac{1}{\cos^2 \delta_b \text{tg } \delta_p}$$

$$(\text{b}) \Rightarrow -\frac{\partial f_2}{\partial \delta_b} \sin f_2 = \frac{1}{\cos^2 \delta_b \text{tg } \delta}$$

d'où :
$$\frac{\partial f_1}{\partial \delta_b} = -\frac{1}{\cos^2 \delta_b \sin f_1 \operatorname{tg} \delta_p}$$

et :
$$\frac{\partial f_2}{\partial \delta_b} = -\frac{1}{\cos^2 \delta_b \sin f_2 \operatorname{tg} \delta}$$

En remplaçant $\frac{\partial f_1}{\partial \delta_b}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial \delta_b}$ par leurs valeurs respectives, l'expression $\frac{\partial S_t}{\partial \delta_b}$ peut s'écrire :

$$\frac{\partial S_t}{\partial \delta_b} = \frac{2R \sin \delta}{\cos^2 \delta_b} \left[\frac{1}{\sin f_1 \operatorname{tg} \delta_p} - \frac{1}{\sin f_2 \operatorname{tg} \delta} \right] \quad (\text{III-58})$$

avec : $\cos f_1 = \frac{\operatorname{tg} \delta_b}{\operatorname{tg} \delta_p}$ et : $\cos f_2 = \frac{\operatorname{tg} \delta_b}{\operatorname{tg} \delta}$

Calcul de $\frac{\partial S_t}{\partial \delta_p}$:

$$\frac{\partial S_t}{\partial \delta_p} = -R \sin \delta \left(\frac{f_1}{\partial \delta_p} \right)$$

comme : $\cos f_1 = \frac{\operatorname{tg} \delta_b}{\operatorname{tg} \delta_p}$

$$-\frac{\partial f_1}{\partial \delta_p} \sin f_1 = -\frac{\operatorname{tg} \delta_b}{\sin^2 \delta_p}$$

$$\frac{\partial S_t}{\partial \delta_p} = -2R \sin \delta \left[\frac{\operatorname{tg} \delta_b}{\sin^2 \delta_p \sin f_1} \right]$$

Après simplification, notre expression s'écrira :

$$\frac{\partial S_t}{\partial \delta_p} = -\left[\frac{2R \sin \delta}{\operatorname{tg} f_1 \sin \delta_p \cos \delta_p} \right] \quad (\text{III-59})$$

avec : $\cos f_1 = \frac{\operatorname{tg} \delta_b}{\operatorname{tg} \delta_p}$

VI-3) Construction du vecteur d'analyse :

Deux solutions se présentent pour la construction du vecteur d'analyse. Nous pouvons utiliser les relations intervenant dans l'expression de l'épaisseur réelle de la denture ou bien celles de l'expression de la denture apparente.

Notre choix s'est porté sur la 2^{ème} solution pour des raisons de simplicité de calcul. Comme, dans la méthode par simulation, nous avons supposé que les mesures se feront sur 05 plans apparents équidistants, donc normaux à l'axe Oz de la pièce. Nous étudierons bien sûr, l'effet de la variation de l'épaisseur apparente sur 08 points répartis sur la longueur du profil avec les mêmes hypothèses que pour la méthode par simulation; ce qui nous fera un total de 320 points (voir § V-2). Nous pouvons ainsi dire que notre choix est judicieux, vu que dans l'expression de l'épaisseur réelle de la denture, le seul paramètre de réglage pris en compte par rapport à l'épaisseur apparente est l'angle de l'inclinaison de l'hélice β , lequel angle intervient dans l'expression de l'angle de pression apparent α_4 et celle de la normale en tout point du profil.

En effet, si on construit le vecteur de la variation dS_t (épaisseur apparente) en admettant que son support est celui de la tangente unitaire t (Fig.III-16), au point M, au cercle de rayon R; on orientera le vecteur t à l'extérieur de la matière comme pour celui de la normale à la surface de denture. L'axe Sx est tel qu'il passe par le milieu du creux et l'axe Sz est celui du pignon.

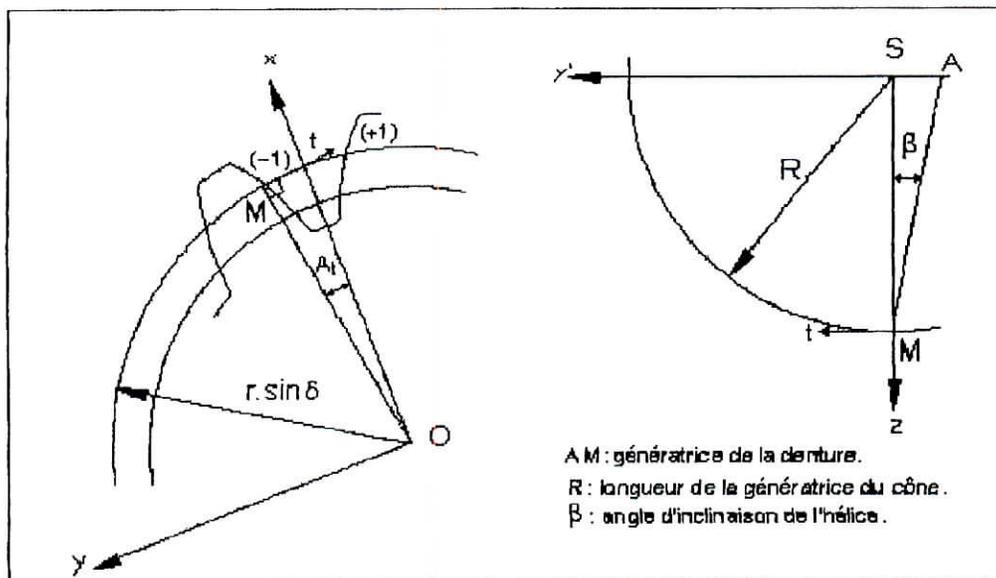


Fig. III- 16 : Construction du vecteur représentant la variation de l'épaisseur de denture.

Le vecteur dS_t aura donc pour composantes :

$$d\vec{S}_t \begin{cases} dS_t t_x \\ dS_t t_y \\ dS_t t_z \end{cases} \quad \text{(III-60)}$$

avec :

$$\vec{t} = \begin{cases} t_x = \varepsilon \cdot \sin A_t \\ t_y = -\varepsilon \cdot \cos A_t \\ t_z = 0 \end{cases} \quad \text{(III-61)}$$

Comme la composante de $d\vec{S}_t$ sur l'axe z est nulle, l'expression (III-60) s'écrit :

$$d\vec{S}_t \begin{cases} \varepsilon.dS_t \sin A_t \\ -\varepsilon.dS_t \cos A_t \\ 0 \end{cases} \quad \text{(III-62)}$$

Avec : [$\varepsilon = + 1$] pour le flanc droit, [$\varepsilon = -1$] pour le flanc gauche et un angle A_t facile à déterminer.

$$\sin A_t = \frac{Y}{r.\sin \delta} \quad \text{(III-63)}$$

Y est la coordonnée du point M exprimée dans le référentiel (S, x, y, z) lié à la dent considérée.

Au point M, l'effet de la variation $d\vec{S}_t$ s'exprime par le produit scalaire : $d\vec{S}_t.\vec{N}$

$$D'où : \quad d\vec{S}_t.\vec{N} = \varepsilon.dS_t (N_x \sin A_t - N_y \cos A_t) \quad \text{(III-64)}$$

Avec N_x et N_y coordonnées de la normale \vec{N} exprimées dans le repère (O, x, y, z).

VI-4) Optimisation des vecteurs d'analyse :

De même que pour la «méthode par simulation», on effectue l'optimisation des vecteurs d'analyse de défaut de forme construits suivant la «méthode analytique» en considérant le fichier des points et normales théoriques et des écarts fictifs qu'on a imposés ou «simulés» avec le fichier des écarts sur l'épaisseur de la denture dus à la variation de chaque paramètre de réglage, soit le vecteur $d\vec{S}_t$ pour tous les points «mesurés».

Nous avons établi aussi un programme de calcul en Fortran qui nous a permis d'établir les différents fichiers nécessaires à l'optimisation des paramètres de réglage considérés. La figure III-17 représente son organigramme.

Nous avons pris les mêmes variations pour les paramètres de réglage à savoir :

- 0,01mm pour le déport V,
- 0,001 rad pour les angles de pression α_t , d'inclinaison de l'hélice primitive β_p et le demi-angle au sommet du cône primitif δ_p .

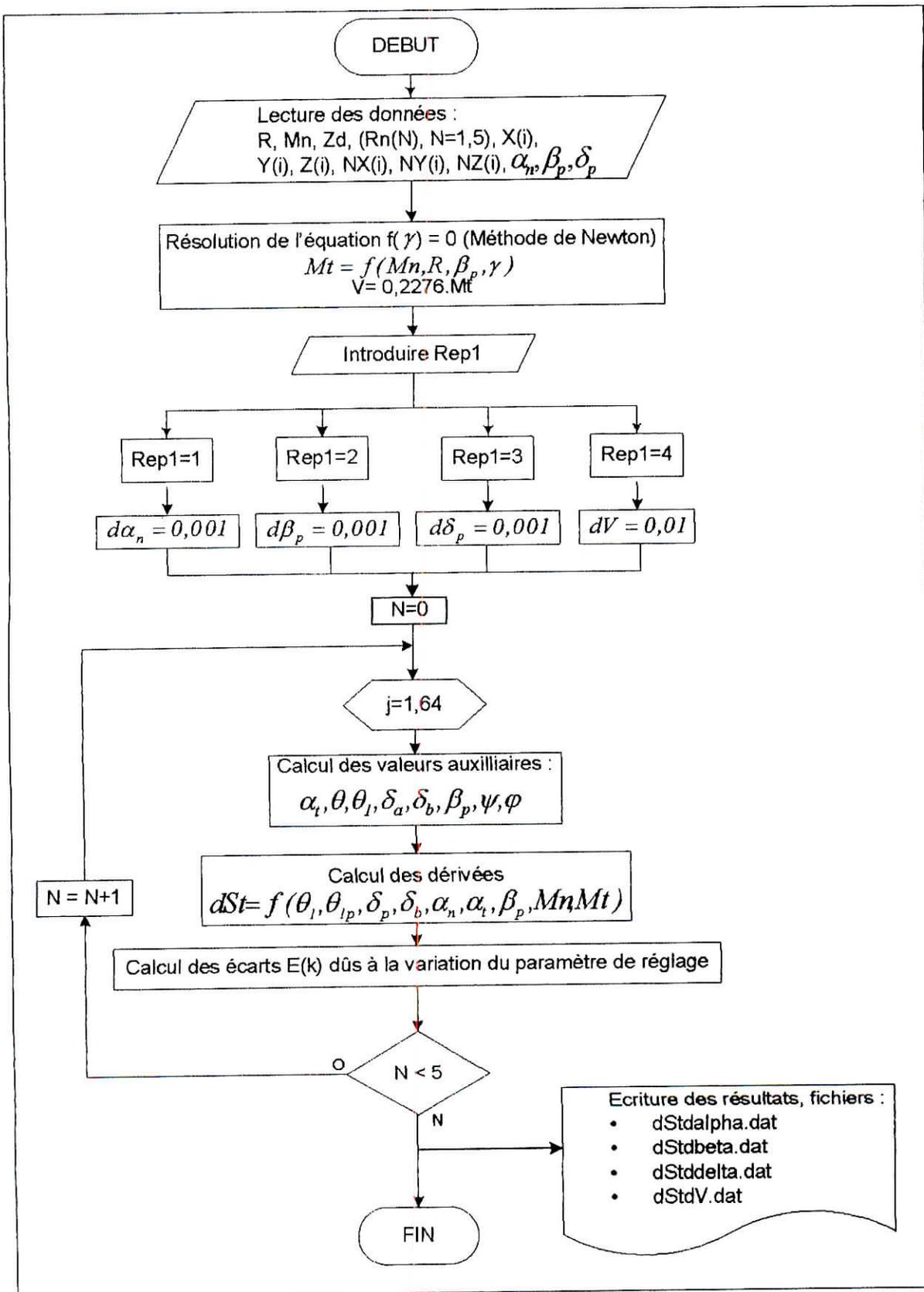


Fig.III-17 : Organigramme (Fortran) d'obtention des fichiers pour simulation (méthode analytique).

VI-5) Interprétation des résultats :

La figure III-18 représente les résultats d'optimisation dus à la variation de l'angle de pression réel α_n , de l'angle de l'inclinaison de l'hélice primitive β_p , du demi-angle au sommet du cône primitif δ_p et du déport V. La valeur de correction de l'angle α_n vaut $-22'28''$, celle de l'angle de l'inclinaison de l'hélice primitive est de $1,64''$, celle du demi-angle au sommet du cône primitif est de $0,08''$ et celle du déport V est de $-0,00007\text{mm}$, quantités très négligeables pour ces 3 derniers résultats. A partir de ces résultats on peut conclure que seule l'influence du vecteur d'analyse dû à la variation de l'angle de pression réel α_n est à prendre en compte et par conséquent il est impératif de procéder à la correction de cet angle. L'angle de pression corrigé sera de $22^\circ 7' 32''$.

(a)	(b)
DATE : 30/04/2003 NOM DU FICHIER LU : PThEmes	DATE : 30/04/2003 NOM DU FICHIER LU : PThEmes
ECART QUADRATIQUE MOYEN : 0.0644073238 ECART QUADRATIQUE RESIDUEL MOYEN : 0.0613507864	ECART QUADRATIQUE MOYEN : 0.0644073238 ECART QUADRATIQUE RESIDUEL MOYEN : 0.0614764335
***** PROJECTIONS *****	***** PROJECTIONS *****
TRANSLATION SUIVANT X en mm : -0.0214485943 TRANSLATION SUIVANT Y en mm : -0.0485752115 ROTATION AUTOUR DE X en mm/m : 0.0802199915 ROTATION AUTOUR DE Y en mm/m : 0.2882415082 ROTATION AUTOUR DE Z en mm/m : 0.4123369455 dStdalpha : -6.4814703084	TRANSLATION SUIVANT X en mm : -0.0273827772 TRANSLATION SUIVANT Y en mm : 0.0060999112 ROTATION AUTOUR DE X en mm/m : 0.0863831987 ROTATION AUTOUR DE Y en mm/m : 0.3760942874 ROTATION AUTOUR DE Z en mm/m : 0.5582464201 dStdbeta : 0.0079498936
(c)	(d)
DATE : 30/04/2003 NOM DU FICHIER LU : PThEmes	DATE : 30/04/2003 NOM DU FICHIER LU : PThEmes
ECART QUADRATIQUE MOYEN : 0.0644073238 ECART QUADRATIQUE RESIDUEL MOYEN : 0.0611106276	ECART QUADRATIQUE MOYEN : 0.0644073238 ECART QUADRATIQUE RESIDUEL MOYEN : 0.0614747606
***** PROJECTIONS *****	***** PROJECTIONS *****
TRANSLATION SUIVANT X en mm : -0.0281255821 TRANSLATION SUIVANT Y en mm : 0.0011647496 ROTATION AUTOUR DE X en mm/m : 0.0395561322 ROTATION AUTOUR DE Y en mm/m : 0.3815391961 ROTATION AUTOUR DE Z en mm/m : 0.5466101293 dStdelta : 0.0003776093	TRANSLATION SUIVANT X en mm : -0.0258887050 TRANSLATION SUIVANT Y en mm : 0.0064803985 ROTATION AUTOUR DE X en mm/m : 0.0867768480 ROTATION AUTOUR DE Y en mm/m : 0.3543887097 ROTATION AUTOUR DE Z en mm/m : 0.5590948110 dStdV : -0.0066668677

Fig.III-18 : Optimisation en position et en forme de la denture (méthode analytique).

VII) COMPARAISON DES RESULTATS :

Dans ce qui suit, nous représentons un tableau comparatif des résultats obtenues à partir des deux méthodes d'optimisation utilisées :

1. Méthode par simulation	2. Méthode analytique	Différence
➤ $\lambda \alpha_n = -14'38''$	$\lambda \alpha_n = -22'28''$	7'44''
➤ $\lambda \beta_p = +1,64''$	$\lambda \beta_p = +1,64''$	aucune
➤ $\lambda \delta_p = +0,07''$	$\lambda \delta_p = +0,08''$	0,01''(négligeable)
➤ $\lambda V = -0,00007 \text{ mm}$	$\lambda V = -0,00007 \text{ mm}$	aucune

Les résultats d'optimisation obtenus par les deux méthodes de construction des vecteurs d'analyse du défaut de forme de la denture sont pratiquement identiques. Ce qui nous permet de conclure que pour analyser le défaut de forme d'une denture octoïde de 1^{ère} ou de 2^{ème} espèce, il suffirait d'utiliser l'une des deux méthodes. D'ailleurs, dans la référence [BOU96], l'auteur montre que les deux méthodes donnent des résultats comparables.

VIII) CONCLUSION :

L'optimisation des champs d'analyse des variations des paramètres de réglage de la machine de taillage montre une concordance acceptable entre les deux méthodes de construction de ces champs, la méthode par simulation et la méthode analytique. Si la première méthode qui consiste à construire les champs d'analyse à partir du modèle mathématique définissant la surface de denture, la seconde par contre, ne fait appel qu'aux relations liant les paramètres de réglage et est d'une application générale ; les points pouvant être fournis par une MMT à commande numérique ou à commande manuelle.

Contrairement aux techniques couramment utilisées pour évaluer les corrections des paramètres de réglage et qui fait appel à l'expérience personnelle, la méthode d'optimisation aux moindres carrés permet de chiffrer la correction qu'il faut effectuer sur le paramètre de réglage de la base d'analyse retenue. La qualité et le coût de production peuvent être nettement améliorés (pièces plus précises et diminution des rébus).

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Nous présentons un travail qui définit la géométrie des surfaces de dentures des engrenages coniques hélicoïdaux à développante sphérique et en octoïde de 1^{ère} espèce ainsi qu'une analyse des erreurs géométriques en coefficients de correction des paramètres de réglage de la machine de taillage. Pour arriver à ces possibilités, nous avons développé les points suivants :

- 1) La modélisation mathématique correspondant à la génération théorique de la surface de denture pour les 2 types d'engrenages cités plus haut.

Nous avons considéré le profil en développante sphérique (denture assurant la conjugaison exacte des profils en contact ou denture théorique) et le profil en octoïde de première espèce (ou denture pratique).

Nous établissons aussi, les formules qui calculent, en un point quelconque de la hauteur de denture (à partir du cône de base), les épaisseurs curvilignes des dentures pour les deux types de profils. Ce résultat est une originalité de ce travail.

Nous définissons aussi les relations qui lient l'angle d'inclinaison de l'hélice de base avec celui de l'inclinaison de l'hélice primitive, l'épaisseur apparente avec l'épaisseur réelle, le module apparent avec le module réel ainsi que l'angle de pression apparent avec l'angle de pression réel. Nous déterminons également l'angle qui donne la position de la dent hélicoïdale par rapport à un référentiel fixe de la pièce (plan apparent du gros bout du pignon, par exemple), en tout point de la génératrice de cette dent. Ces résultats sont aussi une originalité.

- 2) L'optimisation des paramètres de réglage de la machine de taillage.

Une étude des différents réglages de la machine de taillage nous a permis de mieux comprendre ces paramètres pour les optimiser. Notons que si pour le taillage des roues, l'usinage est possible, celui des pignons reste un problème délicat qui peut être traité dans une autre étude qui peut constituer un axe de recherche, car il n'est pas aisé de définir l'outil de taillage.

Un résultat de mesure exprimé par un grand nombre d'écart est difficilement interprétable, mais l'application de la méthode d'optimisation aux moindres carrés proposée par J.M. DAVID, permet de traduire l'ensemble de ces écarts en coefficients correspondant à l'influence des paramètres considérés.

Nous utilisons deux méthodes de construction des vecteurs d'analyse, la méthode par simulation et la méthode analytique. La première méthode utilise la modélisation mathématique où l'on fait varier d'une quantité élémentaire les paramètres correspondants aux différents réglages de la machine de taillage. Dans la seconde méthode on cherche

l'influence de ces réglages en dérivant l'expression de l'épaisseur de denture puisque toute variation d'un paramètre de réglage s'y manifeste. Si la méthode par simulation semble classique, la méthode analytique ne fait appel qu'aux relations liant les paramètres de réglage et est d'une application générale : les points peuvent être fournis par une MMT à commande numérique ou à commande manuelle. Enfin, les résultats d'optimisation montrent que les deux méthodes sont pratiquement équivalentes.

Contrairement au contrôle conventionnel de la géométrie de denture des engrenages qui fait appel surtout à la finesse, l'appréciation et à l'expérience personnelle du régleur, la mesure sur MMT permet de chiffrer, grâce à la méthode d'optimisation, la correction qu'il faut apporter au paramètre de réglage considéré. La qualité géométrique de la denture peut donc être nettement améliorée.

PERSPECTIVES

- Etant donné la complexité de la géométrie de denture en octoïde de 2^{ème} espèce, nous souhaitons que son étude soit reprise ultérieurement.
- Il serait intéressant d'étudier aussi l'outil de taillage de la denture en octoïde de 1^{ère} et de 2^{ème} espèce.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [AGM00] AGMA : «Terms, Définitions, Symbols and Abbreviations» norme : 112.05, «Référence Information - Basic Gear Geometry », norme : 115.01, et «Glossary – Term Used in Gearing» norme : 116.01. American Gear Manufacturers Assn, 1901, No. Ft. Myer Dr., 2000 Arlington, Va. 22209, USA.
- [BAR82] M. BARREAU : «Calculez vos engrenages» Technique et Documentation (Lavoisier), Janvier 1982, Paris, FRANCE.
- [BOU96] M. BOUAZIZ : «Contribution au contrôle des engrenages sur machine à mesurer tridimensionnelle (MMT)». Thèse de Doctorat d'Etat. Ecole Nationale Polytechnique. Janvier 1996. Alger, ALGERIE.
- [BOU93a'] M. BOUAZIZ et J.M. DAVID : «Contrôle des surfaces de dentures coniques droites pratiques sur machines à mesurer tridimensionnelle». 2^{ème} Conférence Internationale sur l'influence de la technologie sur l'état d'une couche de finition. Gorzow Wlkp, 20, 21 et 22 Octobre 1993. POLOGNE.
- [BOU93b'] M. BOUAZIZ et J.M. DAVID : «Techniques de contrôle sur machines à mesurer tridimensionnelles». 3^{ème} Séminaire National de Mécanique. Institut de Génie Mécanique de l'Université de Annaba, 5 et 6 Décembre 1993. ALGERIE.
- [BOU92'] M. BOUAZIZ, J.M. DAVID, R. LEBORZEC et T. COOREVITS : «Contrôle de dentures coniques droites sur machines à mesurer tridimensionnelle». 3^{ème} congrès mondial des engrenages et des transmissions. Paris 12, 13 et 14 Février 1992. FRANCE.
- [DAV96'] J.M. DAVID, M. BOUAZIZ , J.P. BARRAND et T.COOREVITS : «Géométrie des surfaces de dentures des engrenages coniques droits, optimisation des paramètres de réglages des machines de taillage». Bulletin N°110 de l'IET, Septembre 1995, Paris, FRANCE.
- [DUF97] J. DUFALLY : «Etude géométrique des engrenages cylindriques de transmission de puissance». Edition Ellipses. Août 1997. Paris, FRANCE.
- [ELK98'] ELKHOLY AH. ;EL-SHARKAWI AA. et YIGIT AS. : «Effect of meshing tooth stiffness and manufacturing error on the analysis of straight gears». Périodique. Kuwait University, Safat, 1998, KOWEIT.
- [HEN99] G. HENRIOT : «Engrenages : conception, fabrication et mise en œuvre ». 7^{ème} édition, Dunod 1999. Paris, FRANCE.

- [JIA98'] LI JIANFENG, WANG JUNXIAO, ZHANG GE. et WANG SL : «Static analysis of bevel gears using finite element method». Périodique. Shandong University of Technology, Jinan, 1998, CHINE.
- [KAL98] Jean KALETA : «Taillage et rectification des engrenages». Techniques de l'Ingénieur. Institut des Engrenages et des Transmissions (IET). 1998, FRANCE.
- [LEM85'] A.J. LEMANSKI, H.K. FRINT et W.D. GLASOW : «Manufacturing perspective in the design of bevel gearing». 1985, USA.
- [LIN98'] LIN CY, TSAY CB et FONG ZH : «Computer-aided manufacturing of spiral bevel and hypoïd gears with minimum surface deviation». Périodique National, Chiao Tung University et National Chung Cheng University, 1998, TAIWAN.
- [LIT98'] LITVIN FL, WANG AG. et HANDSCHUH RF. : «Computerized generation and simulation of meshing and contact of spiral bevel gears with improved geometry».Périodique. University of ILLINOIS , 1998 , Chicago, USA.
- [LIT87'] F.L. LITVIN, WEI-JIUNG TSUNG, J.J. COY et C. HEINE : «Method for generation of spiral bevel gear with conjugate gear tooth surfaces». Journal of mechanisms, transmissions and automation in design, vol.109, June 1987, USA.
- [MAD87] D. MADROSKI : «Conception des engrenages spiro-coniques, géométrie et simulation du comportement». Thèse de Doctorat, Juillet 1987, INSA de Lyon, FRANCE.
- [POU54'] H. POURET et M. HENRY: «Taillage, rasage et rectification des engrenages» Edition Eyrolles, 1954, Paris, FRANCE.
- [RAF67'] J. C. RAFY et M. GODET : «Le calcul des engrenages coniques droits à développante de cercle sphérique», revue S.E.I.E. N° 53, Septembre 1967, Paris , FRANCE.
- [RAM98'] RAMAMURTI V., VIJAYENDRA C. et SUJATHA C. : «Static and dynamic analysis of spur and bevel gears using FEM» .Périodique. Indian Institute of Technology, Madras, 1998, INDE.
- [SPI81] M. R. SPIEGEL : «Formules et tables de mathématiques» , Série Schaum, McGraw-Hill, Paris, 1981, FRANCE.
- [TSA87'] Y.C. TSAI et P.C. CHIN : «Surface geometry of straight and spiral bevel gears». Journal of mechanisms , transmissions and automation in design, vol.109, December 1987, USA.
- [WEK79'] M. WEK, T. PFEIFER et D. ERNST : «Messung der Flankengeometrie von kegelrädern auf einer Mehrkoordinaten-Meßmaschine». Industrie Anzeiger, 101 Jg N° 64 v 10.8, 1979. Aachen, RFA.

ANNEXES

ANNEXE - I -

CALCUL DU SEGMENT « SA »

Considérons la figure A-1 :

Du point S, menons une perpendiculaire au segment AM le coupant en S'. Nous obtenons 2 triangles rectangles, soient : MSS' et ASS', 2 figures simples pour le calcul du segment SA.

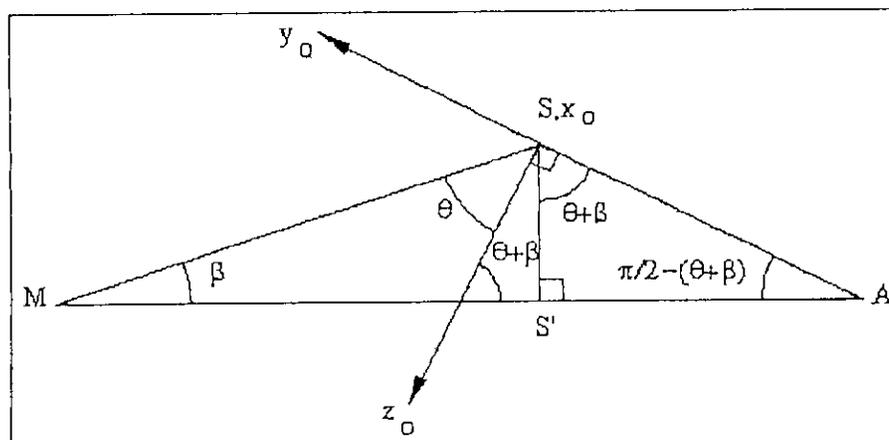


Fig. A-1 : Tracé pour le calcul de SA.

Soit le triangle MSS', rectangle en S :

Nous avons :
$$SS' = R \sin \beta \quad (A1-1)$$

Soit le triangle ASS', rectangle en S' :

Nous avons :
$$SS' = SA \sin [\pi/2 - (\theta + \beta)] \quad (A1-2)$$

D'où :
$$SA = R \frac{\sin \beta}{\sin \left[\frac{\pi}{2} - (\theta + \beta) \right]}$$

Et finalement :
$$SA = R \frac{\sin \beta}{\cos(\theta + \beta)} \quad (A1-3)$$

ANNEXE - II -

RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS

$$\begin{cases} X_0^2 + Y_0^2 - R^2 = 0 & (1) \\ Y_0 \cos(\theta + \beta) - Z_0 \sin(\theta + \beta) + R \sin \beta = 0 & (2) \end{cases}$$

De l'équation (2) on tire l'expression de Y_0 fonction de Z_0 :

$$Y_0 = \frac{Z_0 \sin(\theta + \beta) - R \sin \beta}{\cos(\theta + \beta)} \quad (A2-1)$$

En élevant au carré cette expression et en la remplaçant dans l'équation (1), on obtient après simplification:

$$Z_0^2 - 2R Z_0 \sin(\theta + \beta) \sin \beta + R^2 [\sin^2 \beta - \cos^2(\theta + \beta)] = 0 \quad (A2-2)$$

L'équation (A2-2) est de la forme :

$$a Z^2 + b Z + c = 0$$

et admet deux (2) racines : Z_{01} et Z_{02}

Posons : $Z = \frac{Z_0}{R}$ et simplifions par R^2

L'équation (A2-2) devient :

$$Z^2 - 2Z \sin(\theta + \beta) \sin \beta + [\sin^2 \beta - \cos^2(\theta + \beta)] = 0 \quad (A2-3)$$

$$Z_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{avec : } \begin{cases} a = 1 \\ b' = -2 \sin(\theta + \beta) \sin \beta \\ c = \sin^2 \beta - \cos^2(\theta + \beta) \end{cases}$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$Z_{1,2} = \sin(\theta + \beta) \sin \beta \pm \sqrt{\sin^2 \beta [\sin^2(\theta + \beta) - 1] + \cos^2(\theta + \beta)} \quad (A2-4)$$

Après simplifications, l'expression (A2-4) s'écrit :

$$Z_{1,2} = \sin(\theta + \beta) \sin \beta \pm \cos(\theta + \beta) \cos \beta \quad (A2-5)$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} Z_1 = \sin(\theta + \beta) \sin \beta + \cos(\theta + \beta) \cos \beta = \cos \theta \\ Z_2 = \sin(\theta + \beta) \sin \beta - \cos(\theta + \beta) \cos \beta = -\cos(\theta + 2\beta) \end{cases}$$

$$\text{Comme : } Z = \frac{Z_0}{R} \quad \Rightarrow \quad Z_0 = Z_{01,2} = ZR = Z_{1,2}R$$

ANNEXE - III -

CALCUL DE L'ÉPAISSEUR RÉELLE DE LA DENTURE EN FONCTION DE SON ÉPAISSEUR APPARENTE

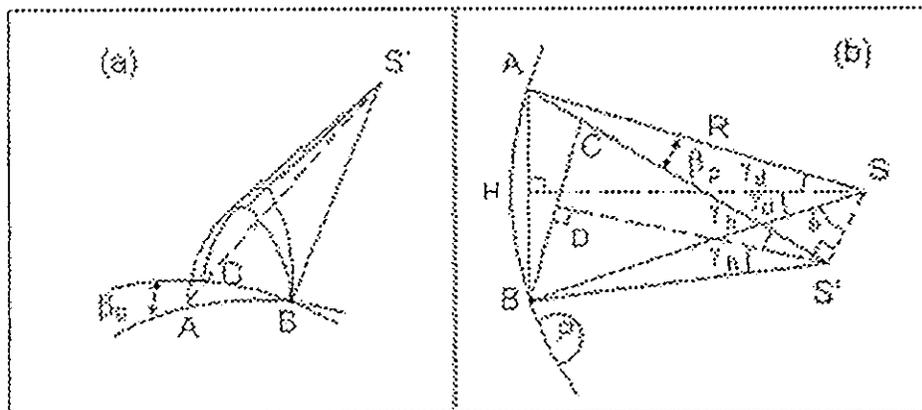


Fig. I-13 : Épaisseur réelle de denture.

Nous avons :

- $AS = BS = R$
- $SS' = R \sin \beta_p$
- $AS' = R \cos \beta_p$
- $AB = S_t$
- $BS' = CS'$
- $BC = S_n$ (Quantité à rechercher en fonction de S_t , R et β_p)

En considérant les triangles ABS et BCS' , nous pouvons écrire respectivement que :

$$\sin \gamma_d = \frac{S_t}{2R} \quad \text{d'où :} \quad \gamma_d = \arcsin \frac{S_t}{2R} \quad (\text{A3-1})$$

$$\text{et :} \quad \sin \gamma_h = \frac{S_n}{2BS'} \quad \text{d'où :} \quad S_n = 2BS' \cdot \sin \gamma_h \quad (\text{A3-2})$$

Calculons BS' et $\sin \gamma_h$:

A partir du triangle BSS' on peut écrire que :

$$BS'^2 = BS^2 + SS'^2 - 2BS \cdot SS' \cdot \cos \phi \quad (\text{A3-3})$$

$$\text{et} \quad BS^2 = BS'^2 + SS'^2 - 2BS' \cdot SS' \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2\gamma_h \right) \quad (\text{A3-4})$$

Tous calcul faits, les relations (A3-3) et (A3-4) s'écrivent respectivement :

$$BS' = R \sqrt{1 + \sin^2 \beta_p - 2 \sin \beta_p \cdot \cos \phi} \quad (\text{A3-5})$$

et :

$$\sin(2\gamma_h) = \frac{\cos \phi - \sin \beta_p}{\sqrt{1 + \sin^2 \beta_p - 2 \sin \beta_p \cdot \cos \phi}} \quad (\text{A3-6})$$

De l'expression (A3-6), nous pouvons tirer la valeur de γ_h et de là déduire $\sin \gamma_h$:

Soit :

$$\sin \gamma_h = \sin \left[\frac{\arcsin \left(\frac{\cos \phi - \sin \beta_p}{\sqrt{1 + \sin^2 \beta_p - 2 \sin \beta_p \cdot \cos \phi}} \right)}{2} \right] \quad (\text{A3-7})$$

Dans le triangle ASS' :

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \beta_p - 2\gamma_h = \frac{\pi}{2} - \beta_p - 2 \arcsin \left(\frac{S_t}{2R} \right) \quad (\text{A3-8})$$

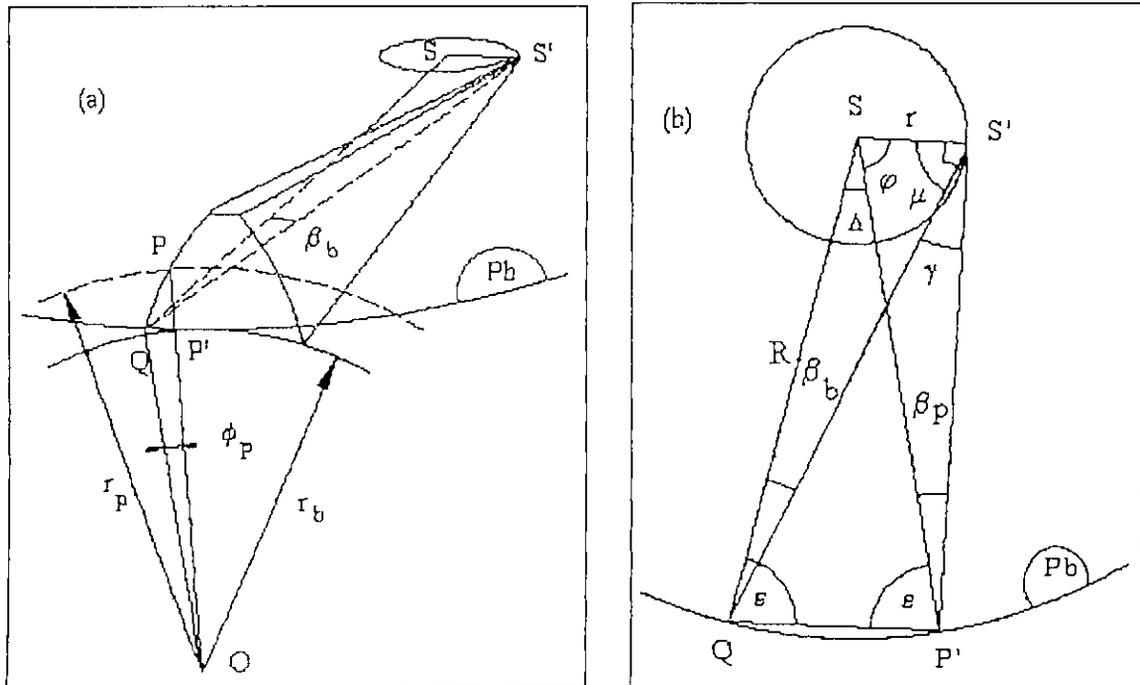
En remplaçant : BS' et $\sin \gamma_h$ dans l'expression (A3-4), la valeur de S_n dans sa forme la plus générale sera :

$$S_n = 2R \sin \left[\frac{\arcsin \left(\frac{\cos \phi - \sin \beta_p}{\sqrt{1 + \sin^2 \beta_p - 2 \sin \beta_p \cdot \cos \phi}} \right)}{2} \right] \sqrt{1 + \sin^2 \beta_p - 2 \sin \beta_p \cdot \cos \phi} \quad (\text{A3-9})$$

Avec :

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \beta_p - 2 \arcsin \left(\frac{S_t}{2R} \right) \quad (\text{A3-10})$$

ANNEXE - IV -

CALCUL DE L'ANGLE β_b EN FONCTION DE L'ANGLE β_p Fig. I-14 : Tracés géométriques pour le calcul de l'angle β_b .

L'expression de Δ étant égale à :

$$\Delta = \arccos\left(\frac{\cos \delta_p}{\cos \delta_b}\right) - \arccos\left(\frac{\operatorname{tg} \delta_b}{\operatorname{tg} \delta_p}\right) \sin \delta_b \quad (\text{A4-1})$$

Le calcul de l'angle de l'inclinaison de base de l'hélice β_b se fait de la manière suivante :

Considérons les $\Delta QP'S$ et $QP'S'$:

$$2\varepsilon + \Delta = 2\varepsilon - \beta_b + \beta_p + \gamma$$

d'où :

$$\beta_b = \gamma + \beta_p - \Delta \quad (\text{A4-2})$$

β_p et Δ étant connus, recherchons la valeur de γ :

Soit le triangle QSS' , on peut écrire :

$$QS'^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\Delta + \varphi)$$

$$R^2 = r^2 + QS'^2 - 2rQS' \cos \mu$$

D'où :

$$\cos \mu = \frac{r^2 + |QS'|^2 - R^2}{2r|QS'|} \quad (\text{A4-3})$$

On remplace : QS'^2 , QS' , r et après simplification la relation (A4-3) devient :

$$\cos \mu = \frac{\sin \beta_p - \cos(\Delta + \varphi)}{\sqrt{1 + \sin^2 \beta_p - 2 \sin \beta_p \cos(\Delta + \varphi)}} \quad (\text{A4-4})$$

Dans le triangle P'S'S nous avons :

$$\cos \varphi = \sin \beta_p$$

$$\sin \varphi = \cos \beta_p$$

$$\gamma = (\pi/2) - \mu$$

Des transformations trigonométriques nous permettent d'écrire :

$$\cos (\Delta + \varphi) = \cos \Delta \sin \beta_p - \sin \Delta \cos \beta_p = \sin (\beta_p - \Delta) \quad (\text{A4-5})$$

En remplaçant dans (A4-4), cette relation devient :

$$\cos \mu = \frac{\sin \beta_p - \sin(\beta_p - \Delta)}{\sqrt{1 + \sin^2 \beta_p - 2 \sin \beta_p \sin(\beta_p - \Delta)}} \quad (\text{A4-6})$$

L'expression générale de β_b s'écrira :

$$\beta_b = \frac{\pi}{2} + \beta_p - \left\{ \Delta + \arccos \left[\frac{\sin \beta_p - \sin(\beta_p - \Delta)}{\sqrt{1 + \sin^2 \beta_p - 2 \sin \beta_p \sin(\beta_p - \Delta)}} \right] \right\} \quad (\text{A4-7})$$

ANNEXE - V -

RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS

$$\begin{cases} X_0 \cos(\theta + \beta) - Y_0 \operatorname{tg} \alpha_t = 0 & (1) \\ X_0 \operatorname{tg} \alpha_t + Y_0 \cos(\theta + \beta) - Z_0 \sin(\theta + \beta) + R \sin \beta = 0 & (2) \\ X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 = R^2 & (3) \end{cases}$$

De l'équation (1) nous tirons la valeur de X_0 et de Y_0 :

$$X_0 = \frac{Y_0 \operatorname{tg} \alpha_t}{\cos(\theta + \beta)} \quad (A5-1)$$

$$Y_0 = \frac{X_0 \cos(\theta + \beta)}{\operatorname{tg} \alpha_t} \quad (A5-2)$$

En remplaçant Y_0 dans l'équation (2) et après simplification nous déduisons la valeur de X_0 :

$$X_0 = \frac{[Z_0 \sin(\theta + \beta) - R \sin \beta] \operatorname{tg} \alpha_t}{\operatorname{tg}^2 \alpha_t + \cos^2(\theta + \beta)} \quad (A5-3)$$

En remplaçant X_0 dans l'équation (2) et après simplification nous déduisons la valeur de Y_0 :

$$Y_0 = \frac{[Z_0 \sin(\theta + \beta) - R \sin \beta] \cos(\theta + \beta)}{\operatorname{tg}^2 \alpha_t + \cos^2(\theta + \beta)} \quad (A5-4)$$

En remplaçant (A5-3) et (A5-4) dans l'équation (3) et après simplification on obtient l'expression :

$$(R^2 - Z_0^2)[\operatorname{tg}^2 \alpha_t + \cos^2(\theta + \beta)] - [Z_0 \sin(\theta + \beta) - R \sin \beta]^2 = 0 \quad (A5-5)$$

Tous calculs faits l'expression (A5-5) peut s'écrire :

$$Z_0^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha_t + 1) - 2 R Z_0 [\sin(\theta + \beta) \sin \beta] - R^2 [\operatorname{tg}^2 \alpha_t + \cos^2(\theta + \beta) - \sin^2 \beta] = 0 \quad (A5-6)$$

Posons : $Z = \frac{Z_0}{R}$ et simplifions par R^2 :

$$Z^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha_t + 1) - 2 Z [\sin(\theta + \beta) \sin \beta] - [\operatorname{tg}^2 \alpha_t + \cos^2(\theta + \beta) - \sin^2 \beta] = 0 \quad (A5-7)$$

L'équation (A5-7) est du 2^{ème} degré de la forme : $a Z^2 + b Z + c = 0$

et admet deux racines : Z_1 et Z_2 .

tel que :

$$Z_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

Avec :

$$\begin{cases} a = (\operatorname{tg}^2 \alpha_t + 1) \\ b' = -\sin(\theta + \beta) \sin \beta \\ c = -[\operatorname{tg}^2 \alpha_t + \cos^2(\theta + \beta) - \sin^2 \beta] \end{cases}$$

L'expression de $Z_{1,2}$ s'écrit :

$$Z_{1,2} = \frac{\sin(\theta + \beta) \sin \beta \pm \sqrt{\sin^2(\theta + \beta) \sin^2 \beta + (\operatorname{tg}^2 \alpha_t + 1)[\operatorname{tg}^2 \alpha_t + \cos^2(\theta + \beta) - \sin^2 \beta]}}{\operatorname{tg}^2 \alpha_t + 1} \quad (\text{A5-8})$$

Après simplification avec un logiciel de mathématique (Scientific Work 2.5), on obtient :

$$Z_{1,2} = \sin(\theta + \beta) \sin \beta \cos^2 \alpha_t \pm \sqrt{[\sin^2 \alpha_t + \cos^2 \alpha_t \cos^2(\theta + \beta)] [\sin^2 \alpha_t + \cos^2 \alpha_t \cos^2 \beta]} \quad (\text{A5-9})$$

Comme : $Z = \frac{Z_0}{R} \Rightarrow Z_0 = ZR = Z_{1,2}R = Z_{0,2}R$

$$Z_{0,2} = R \{ \sin(\theta + \beta) \sin \beta \cos^2 \alpha_t \pm \sqrt{[\sin^2 \alpha_t + \cos^2 \alpha_t \cos^2(\theta + \beta)] [\sin^2 \alpha_t + \cos^2 \alpha_t \cos^2 \beta]} \} \quad (\text{A5-10})$$

il vient :
$$R^2 = (R \sin \beta_p)^2 + \left(\frac{Sn}{2 \sin \gamma}\right)^2 + 2(R \sin \beta_p) \left(\frac{Sn}{2 \sin \gamma}\right) \sin(2\gamma) \quad (\text{A6-3})$$

ou encore :
$$(R \sin \beta_p)^2 + \left(\frac{Sn}{2 \sin \gamma}\right)^2 + 2(R \sin \beta_p) \left(\frac{Sn}{2 \sin \gamma}\right) \sin(2\gamma) - R^2 = 0 \quad (\text{A6-4})$$

alors :
$$\left(\frac{Sn}{2 \sin \gamma}\right)^2 + 2(R \sin \beta_p) \left(\frac{Sn}{2 \sin \gamma}\right) \sin(2\gamma) - R^2(1 - \sin^2 \beta_p) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Sn}{2 \sin \gamma}\right)^2 + 2(R \sin \beta_p) \left(\frac{Sn}{2 \sin \gamma}\right) \sin(2\gamma) - R^2 \cos^2 \beta_p = 0 \quad (\text{A6-5})$$

En multipliant tous les termes par $4 \sin^2 \gamma$, on aura :

$$Sn^2 + 4R \cdot Sn \cdot \sin \beta_p \sin \gamma \sin(2\gamma) - 4R^2 \cos^2 \beta_p \sin^2 \gamma = 0 \quad (\text{A6-6})$$

Equation non linéaire en γ à résoudre par un programme informatique (Fortran) ou en utilisant un logiciel de calcul tel que Math-Cad.

Sachant que l'épaisseur réelle est donnée par la relation :

$$Sn = \frac{\pi Mn}{2} \quad (\text{A6-7})$$

et connaissant γ , on détermine :

- ψ :
$$\psi = \frac{\pi}{2} - \gamma$$
- AC :
$$AC = AS' - CS' = R \cos \beta_p - \frac{Sn}{2 \sin \gamma}$$
- et enfin dans le triangle ABC, $AB = St$:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(\pi - \psi)$$

il vient :
$$St^2 = AC^2 + Sn^2 - 2AC \cdot Sn \cdot \cos(\pi - \psi)$$

En remplaçant Ψ par sa valeur, on obtient :

$$St^2 = AC^2 + Sn^2 - 2AC \cdot Sn \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$$

et c'est aussi égal à :
$$St^2 = AC^2 + Sn^2 + 2AC \cdot Sn \cdot \sin \gamma$$

En remplaçant AC par sa valeur, on obtient :

$$St^2 = \left(R \cos \beta_p - \frac{Sn}{2 \sin \gamma}\right)^2 + Sn^2 + 2\left(R \cos \beta_p - \frac{Sn}{2 \sin \gamma}\right) \cdot Sn \cdot \sin \gamma \quad (\text{A6-8})$$

Le module apparent est donné par la relation :
$$Mt = \frac{2St}{\pi} \quad (\text{A6-9})$$

ANNEXE - VII -

Calcul numérique du module "Mt" en fonction de "Mn" (par le logiciel de mathématiques "MathCad")

Angle d'inclinaison de l'hélice primitive (°): $\beta := 15$

Rayon de la génératrice primitive (mm): $R := 90.000$

Module réel (mm): $M_n := 6.400$

Calcul :

Epaisseur réelle (mm): $S_n := \frac{\pi \cdot M_n}{2}$ $S_n = 10.053$

$x := 0.. 50$

$f(x) := S_n^2 + 4 \cdot R \cdot S_n \cdot \sin(\beta \cdot \text{deg}) \cdot \sin(x \cdot \text{deg}) \cdot \sin(2 \cdot x \cdot \text{deg}) - 4 \cdot R^2 \cdot \cos(\beta \cdot \text{deg})^2 \cdot \sin(x \cdot \text{deg})^2$

$h(x) := 0$

$\text{tol} := 10^{-10}$

$y := 10$

$\text{gammadeg} := \text{racine}(f(y), y)$ $\text{gammadeg} = 3.4224$

$\psi := \left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{gammadeg} \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right)$ $f(\text{gammadeg}) = -1.055 \cdot 10^{-4}$

$AC := R \cdot \cos(\beta \cdot \text{deg}) - \frac{S_n}{2 \cdot \sin(\text{gammadeg} \cdot \text{deg})}$ $AC = 2.732$

Epaisseur apparente (mm): $St := \sqrt{AC^2 + S_n^2 - 2 \cdot AC \cdot S_n \cdot \cos(\pi - \psi)}$ $St = 10.574$

Module apparent (mm): $M_t := \frac{2 \cdot St}{\pi}$ $M_t = 6.732$

