

14/99

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

D.E.R de Génie Electrique et Informatique
Filière : Electronique



PROJET DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état
en Electronique

Thème

***Application des méthodes Géostatistiques
dans le codage de la parole.***

Proposé et Dirigé par :
M^{lle}. MERAZKA
M^r. BERKANI

Etudié par :
AREZKI KAMEL
SAADI YUCEF

Promotion : septembre 1999

E.N.P. 10. AVENUE HASSEN BADI - EL-HARRACH - ALGER

يعرض هذا العمل تطبيق طرق مستعملة في الـ Geostatistiques (طريقة Kriging lpc) في تحليل اشارة الكلام. في هذا الاطار، قمنا بتقييم هذه الطريقة و اضهار مزاياها و اذلك بالنسبة الي طريقة L' autocorrelation ، و هذا بحساب معاملات التوقع الخطي $a(i)$ لاشارة الكلام لكلا الطريقتين و مقارنة النتائج المحصل عليها بالنسبة للاشارات الصوتية الدورية والغير الدورية

Résumé :

Ce travail expose l'application des géostatistiques (la méthode d'estimation kriging LPC) dans l'analyse par Prédiction Linéaire de la parole. Dans ce cadre, nous avons évalué les avantages de cette nouvelle méthode par rapport à la méthode d'autocorrelation en calculant les paramètres $\{a_i\}$ de la parole pour les deux méthodes, et la comparaison des résultats obtenus (schémas) des deux méthodes pour les signaux voisés et non voisés.

Mots-clés : codage prédictive linéaire, kriging, semivariance, semivariogramme théorique, semivariogramme expérimental, valeur biaisée δ , rang a, coefficients de prédiction.

Abstract:

This work expose the application of geostatistics (kriging method) in the linear predictive coding of speech. In this context, we have evaluate the advantages of this new method behind the autocorrelation method by computing the parameters $\{a_i\}$ of the speech analysis for the two methods, and comparing the obtained results of the two methods for the voiced and unvoiced speech signal.

Keys words: linear predictive coding, geostatistics, kriging , semivariance, theoretical semivariogram, experimental semivariogram, biased values δ , rang a , prediction coefficients

Je dédie ce modeste travail :

الدرسة الوطنية المتعددة الفنون
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

- à mes très chers parents pour leur soutien durant toutes mes études .
- à mes frères.
- à mes sœurs .
- à toute ma famille.
- à tous mes amis

Kamel

Je dédie ce modeste travail :

- à mes très chers parents pour leur soutien durant toutes mes études .
- à mes frères.
- à mes sœurs .
- à toute ma famille.
- à tous mes amis

Youcef

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

REMERCIEMENT

Remerciement

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Ce travail à été effectué au sein du laboratoire de théorie d'information du Département de Génie Electronique et Informatique sous la direction de Mademoiselle **F.Merazka** et Monsieur **Berkani** (chargés de cour)à **L'ENP**

Nous tenons à leur exprimé notre profonde gratitude et nos sincères remerciements pour leur soutien et leur aide sans réserve, qu'ils nous ont apporté par leurs précieux conseils .

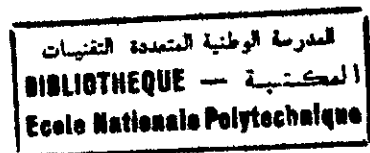
Nos remerciements s'adressent à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

Nous finissons en saluant la promotion d'électronique de 1999.

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

SOMMAIRE

SOMMAIRE



Introduction générale	1
CHAPITRE I LE SIGNAL VOCAL	
INTRODUCTION	3
I.1 production du signal vocal	4
I.1.1 Aspect anatomo-physiologique	4
I.1.2 Fonctionnement général	6
I.1.2.1 Excitation pseudo-périodique	6
I.1.2.2 Excitation par un bruit-blanc	7
I.1.2.3 Excitation par une impulsion acoustique	7
I.2 Modélisation de système de production de la parole	10
I.2.1 Modélisation de la source d'excitation	10
I.2.2 Modélisation de conduit vocal	11
I.2.3 Modélisation de la radiation	12
I.2.4 Modèle complet du système de production de la parole	12
CHAPITRE II LA PREDICTION LINEAIRE	
INTRODUCTION	16
II.3 La Prédiction Linéaire (LP)	19
II.3.1 La Méthode d'Autocorrélation	22
II.3.2 La Méthode de covariance	25
II.3.2 Choix des Conditions d'Analyse LP	26
II.3.3 La Préaccentuation (Premphasis)	29
II.4 Conclusion	30
CHAPITRE III LES GEOSTATISTIQUES	
INTRODUCTION	32
III.1 La variable régionalisée (V.R)	33
III.2 LE SEMIVARIANCE	33
III.2.1 Autre formule du semivariance	35
III.2.2 Caractéristique du semivariance	36
III.2.3 Différentes Formes du semivariogramme	38
III.2.4 Modélisation du semivariogramme	40
III.3 KRIGING	43
III.3.1 Introduction	43
III.3.2 Formulation de la procédure KRIGING	44
Conclusion:	50

CHAPITRE IV APPLICATION DES GEOSTATISTIQUES DANS L'ANALYSE LPC

INTRODUCTION.....	...53
IV.1 Model Géostatistique de la parole.....	...54
IV.2 APPLICATION.....	...56
VI.2.1 choix du nombre de pole dans la methde kriging.....	...56
VI.2.2 comparaison entre la methode d'autocorrelation et la methode krigin58
VI.2.3 influence de la valeur biésé δ61
IV.3 Conclusion.....	...62
Conclusion générale.....	
Bibliographie.....	
Annexe.....	

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE :

L'application des géostatistiques dans le codage par prédiction linéaire de la parole est l'une des techniques les plus récentes dans le traitement de la parole. Elaborée essentiellement par le chercheur TUAN PHAMET de la faculté des sciences informatiques et engineering (Australie).[1]

Cette nouvelle technique est basée sur une procédure utilisée dans le domaine des géostatistiques appelée « Kriging » .

Dans notre projet de fin d'étude (PFE), la méthode d'autocorrelation du modèle autoregressif [AR] est prise comme un modèle de comparaison avec cette nouvelle technique.

La nouvelle méthode KRIGING; permet d'obtenir une meilleure approximation du spectre de la parole que la méthode d'autocorrelation.

Dans notre travail, on donnera plus d'informations et de détails afin d'avoir une idée plus claire concernant ce sujet. Pour cela , on met en œuvre le plan de travail suivant :

Le premier chapitre présente des généralités sur le signal vocal ou nous évoquons ses différentes parties, son fonctionnement général ainsi que la modulation de l'ensemble du système de production de la parole.

INTRODUCTION GENERALE

Le deuxième chapitre traite la méthode de la prédiction linéaire. Nous évoquons les deux méthodes les plus connues : l'autocorrelation et l'autocovariance .

Le troisième chapitre traite le domaine des géostatistiques. nous évoquons ses principes les plus importants. Une partie est réservée à l'étude de la procédure kriging d'une manière détaillée.

Le dernier chapitre est consacré à l'évaluation des performances de la nouvelle méthode kriging, en fonction des paramètres suivants: semivariogramme, variation de la valeur biaisé, influence du nombre de pôles P.

Nous avons utilisé le logiciel MATLAB pour faire nos simulations.

Une annexe contenant la quantification les théories de base du traitement du signal est donnée.

CHAPITRE I

LE SIGNAL VOCAL

Le signal vocal

INTRODUCTION

L'information d'un message parlé (la parole) , réside dans les fluctuations de la pression de l'air. Les fluctuations constituent le signal vocal. Ce dernier est engendré, puis émis par l'appareil phonatoire humain.

Dans ce chapitre, on aborde l'ensemble du système vocal humain (appareil phonatoire) et ses différentes parties ainsi que son fonctionnement.

I.1 Production du signal vocal

I.1.1 Aspect anatomo-physiologique

L'ensemble du système vocal (fig I.1) humain peut être décomposé essentiellement en trois parties.

a) les poumons et le conduit trachéo-bronchique

La trachée-artère est un conduit cylindrique qui réalise la liaison entre le larynx et les branches qui se ramifient à l'intérieur des poumons, au cours de la phonation. La diminution du volume thoracique tend à chasser l'air des poumons. Le larynx est alimenté par l'air à une pression légèrement supérieure à la pression atmosphérique (la pression subglottique) qui met en vibration les cordes vocales.

b) le larynx et les cordes vocales

Le larynx est une boîte formée de cartilâges articulés, ligaments, muscles et muqueuses, qui surmontent la trachée-artère. A la base du larynx sont attachées les cordes vocales, placées symétriquement à gauche et à droite de la ligne médiane du larynx.

c) le conduit vocal

le conduit vocal est une cavité acoustique de longueur de 17 cm. Il est le siège de phénomène de résonance. Il peut être divisé en 3 cavités : le pharynx, compris entre la glotte et l'ouverture entre le vélum et l'arrière de la langue. La cavité buccale et la cavité nasale.

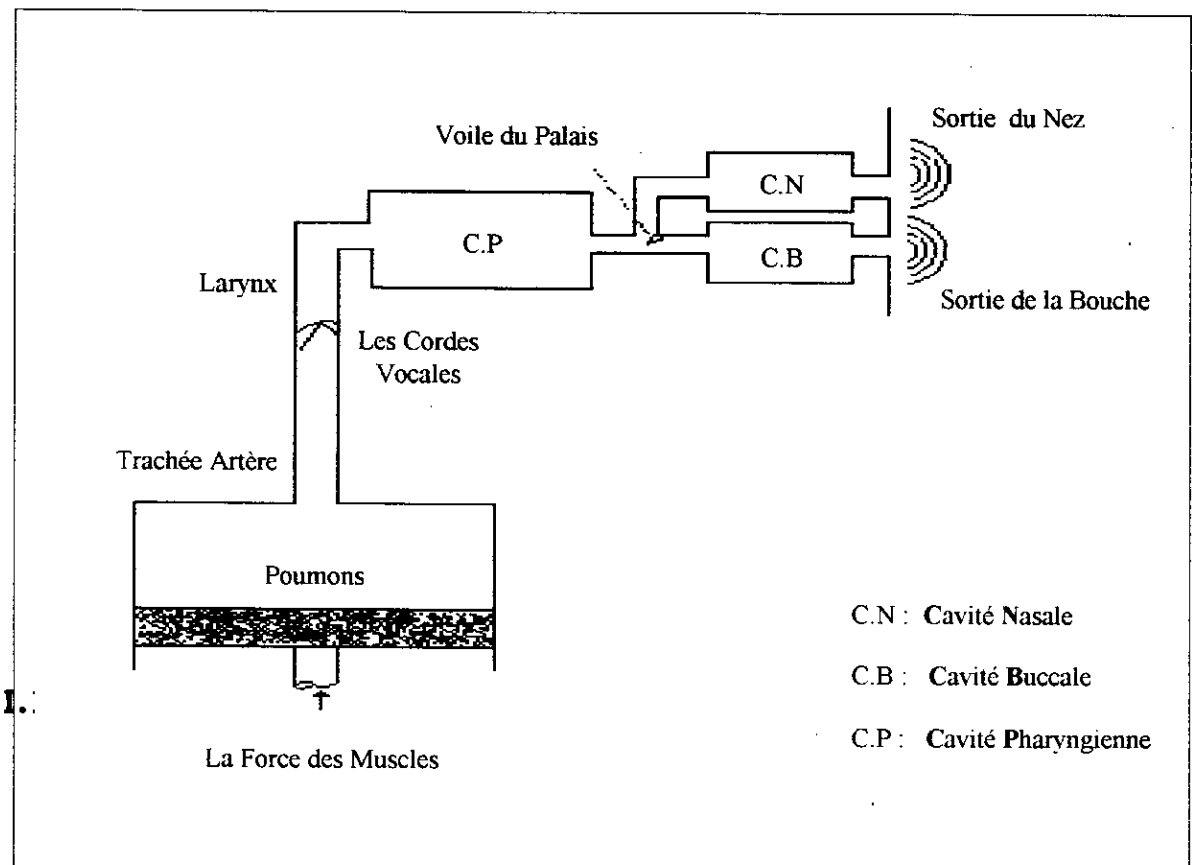


Fig. I.1 L'appareil phonatoire et la formation du signal vocal

Les sons de la parole résultent de la rencontre du flux d'air pulmonaire avec un obstacle au niveau du conduit vocal. En pratique, on distingue trois sources d'excitations de celui-ci

- **La source sonore** : Est constituée par les cordes vocales. La présence ou l'absence de ces dernières permet de distinguer entre les sons voisés ou non voisés.
- **La friction** : La construction étroite en un point du conduit vocal constitue une source d'excitation des cavités en aval de cette zone.
- **L'occlusion** : Elle est constituée par l'élévation de la pression dans la zone précédant une occlusion du conduit vocal.

I.1.2.1 Excitation pseudo-périodique

Dans ce cas, les cordes vocales oscillent suivant un phénomène de relaxation, des impulsions périodiques de pression sont ainsi appliquées au conduit vocal.

Le conduit vocal peut être considéré comme une succession de tubes ou cavités acoustiques de sections diverses.

Les sons voisés résultent donc de l'excitation du conduit vocal par des impulsions périodiques de pression liées aux oscillations des cordes vocales

Un son voisé est un signal quasi-périodique (Fig I-2), on y observe les raies qui correspondent aux harmoniques du fondamental F_0 (structure de PITCH), l'enveloppe de ces raies présente des maximums appelés formants et correspondant aux fréquences propres F_i , ($i=1,2,\dots$) du conduit vocal (structure formante), les trois premiers formants sont essentiels pour

caractériser le spectre vocal, les formants d'ordre supérieur ont une influence plus limitée.

I.1.2.2 Excitation par un bruit-blanc

Lorsque la section devient trop faible en un point du conduit oral, l'écoulement aérien crée des turbulences qui donnent naissance à une source de bruit, le conduit oral est alors excité par une source localisée dans la zone de constriction, les sons ainsi émis sont de type non voisé.

Un son non voisé (Fig I.3) ne présente pas de structure périodique, il peut être considéré comme un bruit blanc filtré par les transmittances de la partie du conduit vocal située entre la constriction et les lèvres, son spectre ne présente donc pas de structure de pitch.

I.1.2.3 Excitation par une impulsion acoustique

Lorsque la section du conduit oral devient nulle, et qu'une différence de pression assez grande s'établit de part et d'autre de cette occlusion, une brusque ouverture de cette dernière produit une impulsion acoustique qui excite le conduit vocal sur le plan spectral, cette excitation se manifeste sous la forme de bruit relativement intense, de très courte durée.

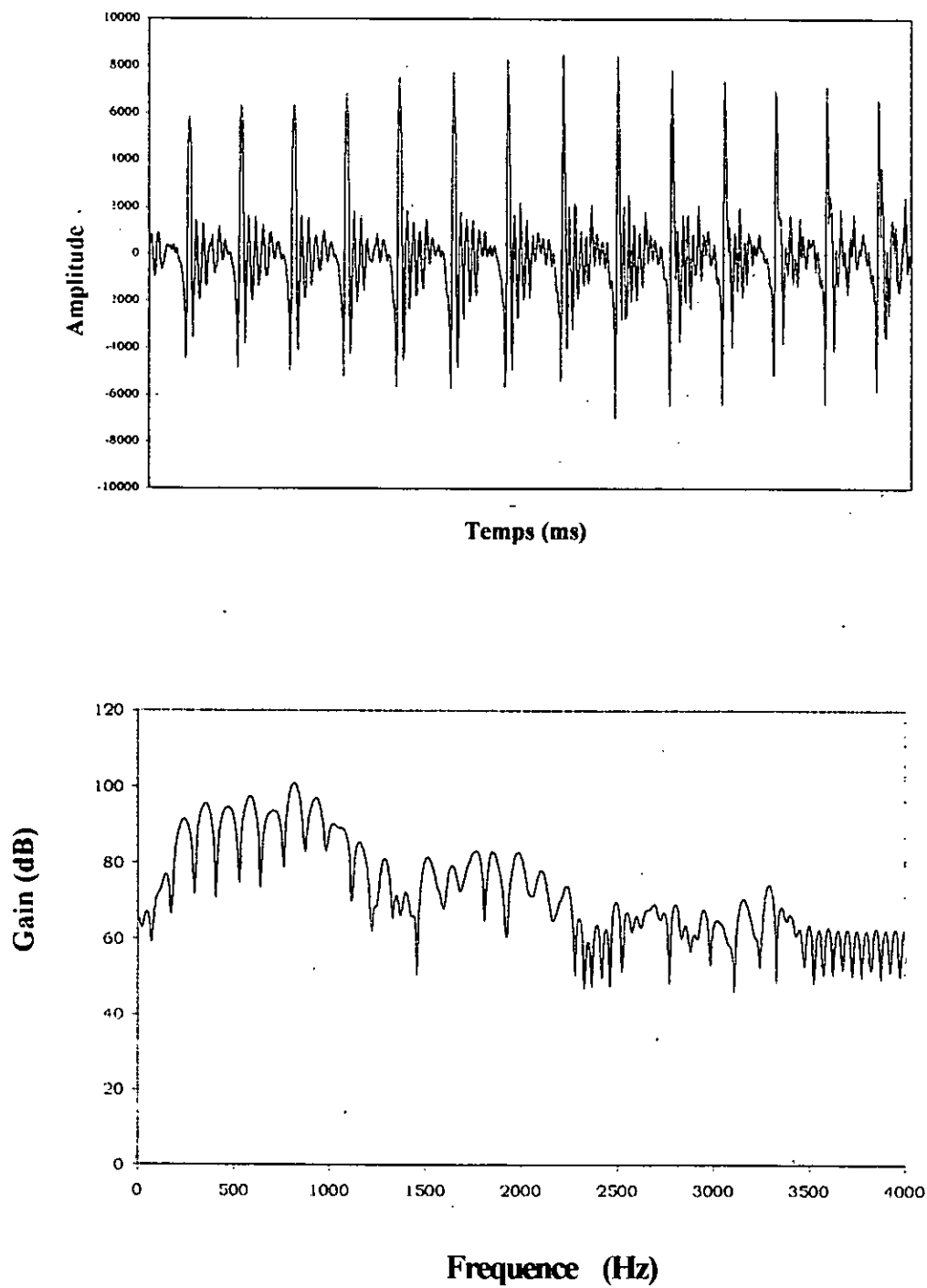


Fig. I.2 la forme d'onde et le spectre d'un son voisé

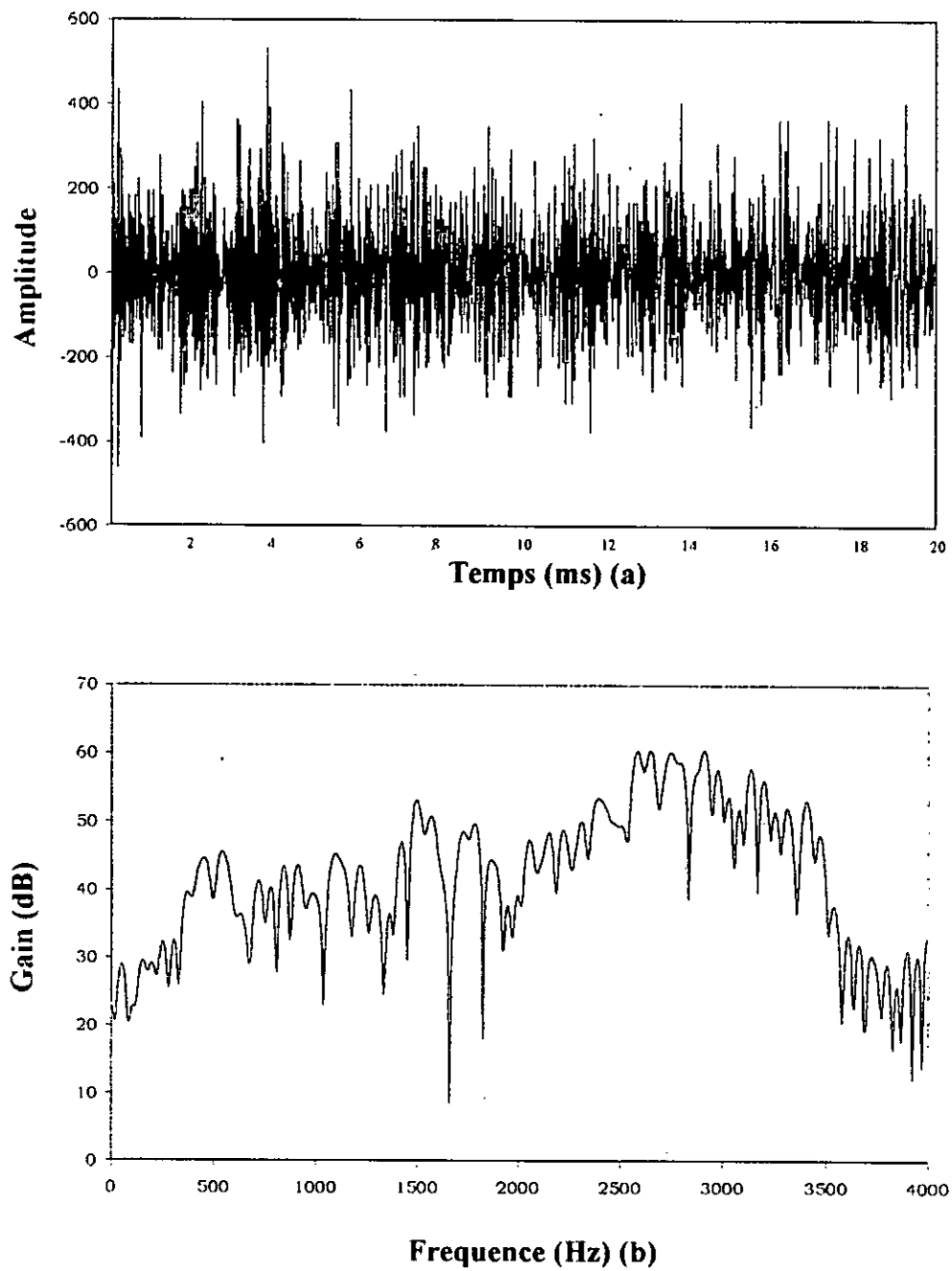


Fig I.3 La forme d'onde (a) et le spectre (b) d'un son non voisé

I.2 La modélisation du système de production de la parole

L'analyse d'un système complexe (naturel ou non) exige l'établissement préalable d'un "modèle mathématique" approprié permettant une mise en équation aussi aisée que possible.

Dans le cas du système de production de la parole, cette "modélisation" est basée sur l'étude de la propagation d'une onde acoustique, le long de l'axe du conduit vocal.

De nombreuses recherches effectuées dans ce domaine, ont montré que l'appareil phonatoire humain pouvait être modélisé en première approximation, par un système linéaire, dont la fonction de transfert est composée de trois étages successifs, ceux-ci correspondent à la modélisation de la source d'excitation, des conduits oral et nasal et de la radiation des lèvres.

L'absence de couplage entre la glotte et le conduit vocal permet de modéliser séparément la source et le système de production.

I.2.1 Modélisation de la source d'excitation

Les différentes sources d'excitation du conduit vocal peuvent être modélisées par des générateurs d'impulsions.

Pour les sons voisés, la source d'excitation d'un signal quasi-périodique (Figure I.4) est entièrement caractérisée par sa fréquence.

Pour les sons non voisés, la source d'excitation du conduit vocal est dite "bruitée" et peut être modélisée par un générateur d'impulsions aléatoires produisant un bruit blanc.

Impulsion périodique

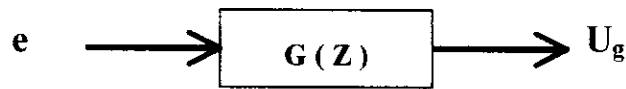


Fig. I.4: Modélisation de la source d'excitation pour les sons voisés

Ce train d'impulsions périodiques (sons voisés) est modélisé par la réponse d'un filtré passe-bas d'ordre 2 à pôles réels et dont la fréquence de coupure est de l'ordre de 100 HZ et de la forme :

$$G(Z) = A / (1 + \alpha Z^{-1})(1 + \beta Z^{-1}) \quad (I.1)$$

Où A est une constante.

α, β : sont des pôles réels situés à l'intérieur du cercle unité.

I.2.2 Modélisation de conduit vocal

Nous avons vu que, le conduit vocal est assimilé à une succession de tubes acoustiques élémentaires de sections diverses, l'étude de la propagation d'une onde acoustique plane le long d'un tel ensemble permet de dégager un modèle linéaire du conduit vocal.

La fonction de transfert obtenue est celle d'un filtre tous pôles, le système tous pôles qui en résulte permet de modéliser le conduit vocal d'une manière satisfaisante, il est représenté par la Figure (I.5) sa fonction de transfert à la forme :

$$V(Z) = U_v(Z) / U_g(Z) = \beta / 1 + \sum_{i=1 \dots r} U_i Z^{-i} \quad (I.2)$$

Où β est une constante, r est le nombre total des pôles réels limités à l'intérieur du cercle unité.

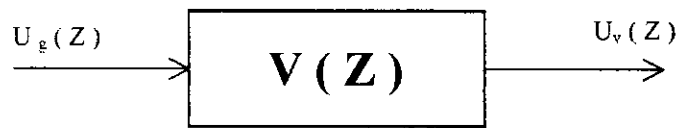


Fig. I.5 : Modélisation du conduit vocal

I.2.3 Modélisation de la radiation

Le son est finalement émis à travers l'ouverture des lèvres, celle-ci représente une charge acoustique, le rayonnement des lèvres peut être modélisé par la transmittance.

$R(Z)=C(1-Z^{-1})$, où C est une constante, cette relation exprime que la pression de l'onde recueillie à une certaine distance des lèvres est proportionnelle à la dérivée du débit volumique aux lèvres.

I.2.4 Modèle complet du système de production de la parole

Il est défini par la juxtaposition des trois modèles (Fig I.6.), la fonction de transfert qui lui est associée et obtenue en regroupant les fonctions de transfert de la glotte, du conduit vocal et du rayonnement des lèvres :

$$H(z)=\sigma (z)V(z)R(z)=ABC(1-z)/(1+\alpha z^{-1})(1+\beta z^{-1})(1+\sum_{I=1}^r U_i z^{-1})\dots\dots(II-4)$$

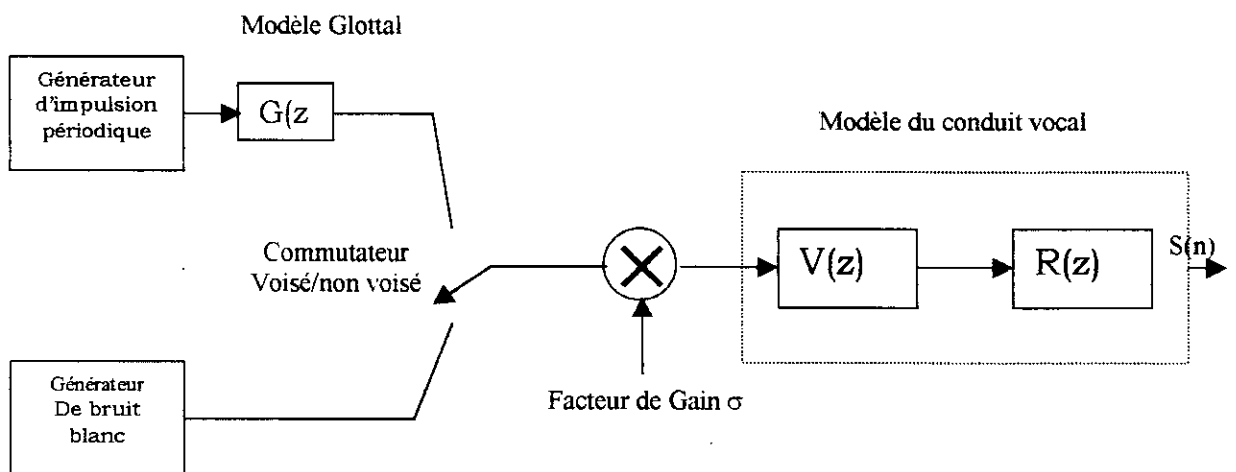


Fig. I.6 Modèle général de production de la parole

Si l'on considère que l'un des pôles de $\sigma(Z)$ est très voisin de l'unité, il vient :

$$H(Z) = \frac{\sigma}{(1 + \alpha z^{-1})(1 + \sum_{i=1}^r U_i z^{-i})} \quad (\text{II-5})$$

En posant :

$$A(Z) = (1 + \alpha z^{-1})(1 + \sum_{i=1}^r U_i z^{-i}) = 1 + \sum_{I=1}^P a_i z^{-i} \quad (\text{II-6})$$

Avec $p=r+1$

On obtient finalement :

$$H(Z) = \sigma / A(Z) = \sigma / 1 + \sum_{I=1}^P a_i z^{-i} \quad (\text{II-7})$$

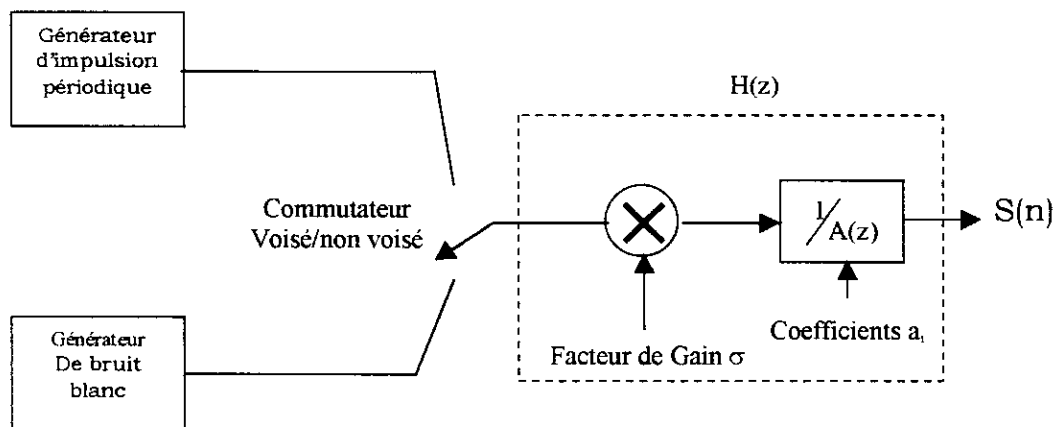


Fig. I.7 Modèle simplifié de production de la parole

Il faut noter que ce modèle présente quelques limitations.

En premier lieu, lors de la production des voyelles des fricatives, la configuration du conduit vocal varie suffisamment pour que les coefficients de $H(z)$ puissent être maintenus constants pendant des intervalles de temps de l'ordre de 20 ms, et le modèle fonctionne parfaitement. Par contre, lors de la production des sons plosifs, le conduit vocal se déforme très rapidement et le modèle est moins adapté.

En second lieu, la production des sons fricatifs voisés n'est pas possible car ils nécessitent l'intervention conjointe des sources voisées et non voisée.

Conclusion: Le modèle linéaire "TOUT POLES " reste d'un intérêt majeur car ses paramètres peuvent être estimés d'une façon relativement simple et efficace grâce à la méthode d'analyse par prédiction linéaire(LPC).

Le modèle de simulation considéré par la suite et qui est largement connu, modélise la source glottale par un signal aléatoire pour les sons non voisés et par un train d'impulsions pour les sons voisés.

Le conduit vocal est modélisé par un filtre dont les paramètres varient dans le temps (modèle AR) ce qui correspond à sa géométrie et aux conditions d'analyse.

CHAPITRE II

LA PREDICTION LINEAIRE

La Prédiction Linéaire

INTRODUCTION :

La prédiction linéaire est une des méthodes les plus puissantes du traitement de la parole. Cette méthode est considérée comme une technique prédominante pour l'estimation des paramètres essentiels de la parole. Son succès est dû au fait qu'elle représente une solution linéaire au problème de l'estimation des paramètres du modèle de la production de la parole .

Ainsi, on présente dans ce chapitre, deux méthodes, les plus utilisées dans l'analyse par prédiction linéaire.

II.2 la Modélisation du conduit vocal :

Le conduit vocal est modélisé par un filtre tout pôle dont les paramètres varient dans le temps, et sa fonction de transfert est :

$$H(z) = \frac{G}{A(z)} = \frac{G}{1 + \sum_{k=1}^p a_k \cdot z^{-k}} \quad (\text{II.1})$$

Ce modèle de production du signal vocal est appelé autoregressif (AR). Il est clair que le modèle AR est une approximation plus au moins approchée de la production du signal vocal ; en particulier, pour les sons nasalisés où la transmittance du conduit vocal est plutôt modélisée par un modèle Auto Régressif à Moyenne Ajustée (ARMA) ; il est dit d'ordre (p, q). Néanmoins, l'estimation d'un modèle ARMA est beaucoup plus délicate que

celle d'un modèle AR; on préfère souvent utiliser un modèle AR dont l'ordre p est un peu surestimé.

En effet, l'expression (II.1) correspond dans le domaine temporel à l'équation suivante :

$$s(n) = - \sum_{k=1}^p a_k s(n-k) + GU(n) \quad (\text{II.2})$$

qui exprime qu'un échantillon $s(n)$ est une combinaison linéaire des p échantillons qui le précèdent, avec un terme d'excitation. Où p est l'ordre du modèle et les coefficients a_k sont appelés paramètres du modèle, G représente le facteur de gain. La fonction $H(Z)$ est appelée filtre de synthèse et $A(Z)$ le filtre inverse ou filtre d'analyse. Les figures (II.1) et (II.2) montrent le modèle de production de la parole dans le domaine fréquentiel et temporel.

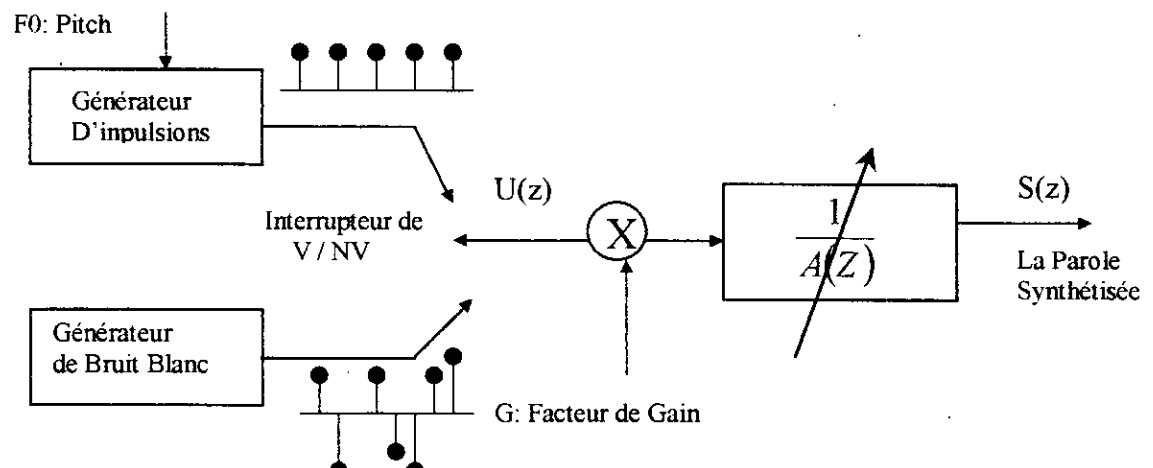


Fig. II.1 Modèle de production de la parole dans le domaine spectral

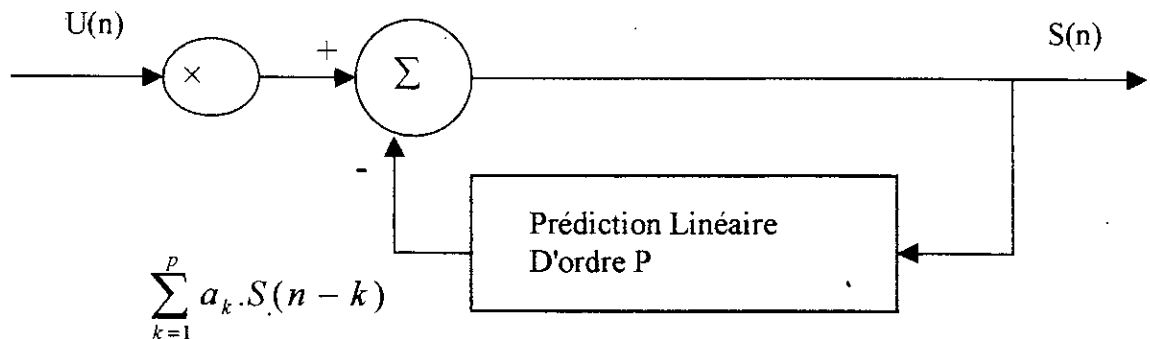


Fig. II.2 Modèle de production de la parole dans le domaine temporel

II.3 La Prédiction Linéaire

La prédiction linéaire est l'une des méthodes les plus puissantes du traitement de la parole, utilisée pour l'estimation des paramètres essentiels du signal de la parole. Son succès est dû au fait qu'elle représente une solution linéaire au problème de l'estimation des paramètres du modèle de la production de la parole.

La technique de prédiction linéaire est basée sur le modèle de la production de la parole, décrit dans le domaine fréquentiel par l'équation II.1) et dans le domaine temporel par l'équation (II.2).

L'idée principale de la prédiction linéaire est qu'un échantillon $s(n)$ de parole peut être prédit par une combinaison linéaire d'un nombre fini des échantillons qui le précèdent. Ainsi, un échantillon $s(n)$ peut être approximé par une combinaison linéaire des P échantillons précédents ($p=8, \dots, 16$ échantillons) :

$$\tilde{s}(n) = - \sum_{k=1}^p \tilde{a}_k \cdot s(n-k) \quad (\text{II.3})$$

Les coefficients \tilde{a}_k , ($k = 1, 2, \dots, p$) sont appelés paramètres LP ou coefficients de prédiction, et le nombre p des coefficients s'appelle ordre de prédiction. De plus $s(n)$ est l'échantillon de la parole et $\tilde{s}(n)$ est la sortie du prédicteur linéaire à l'instant d'échantillonnage n , qui a la fonction de transfert suivante :

$$P(z) = - \sum_{k=1}^p \tilde{a}_k \cdot z^{-k} \quad (\text{II.4})$$

Cette prédiction induit une erreur de prédiction $e(n)$ entre l'échantillon original $s(n)$ et l'échantillon prédit $\tilde{s}(n)$ et elle est définie par :

$$e(n) = s(n) - \tilde{s}(n) = s(n) + \sum_{k=1}^p \tilde{a}_k \cdot s(n-k) \quad (\text{II.5})$$

Si on compare (II.2) et (II.5), on constate que lorsqu'on trouve un ensemble de coefficients \tilde{a}_k plus proche de l'ensemble a_k en minimisant l'erreur de prédiction ($\tilde{a}_k = a_k$), ($k = 1, 2, \dots, p$). On obtient alors l'égalité $e(n) = G.U(n)$. Ceci montre que l'erreur de prédiction $e(n)$ contient beaucoup d'informations sur l'excitation du signal de parole. La transformée en Z de l'équation (II.5) donne :

$$E(z) = S(z) \cdot (1 + \sum_{k=1}^p \tilde{a}_k \cdot z^{-k}) = S(z) \cdot (1 + \sum_{k=1}^p a_k \cdot z^{-k}) = S(z) \cdot A(z) \quad (\text{II.6})$$

$A(z)$ est l'inverse de $H(z)$ dans (II.1), $A(z)$ est appelé filtre inverse ou filtre d'analyse, car on peut obtenir $e(n)$ à partir du signal parole en utilisant le filtre $A(z)$, suivant l'équation (II.6).

Le problème de l'analyse par prédiction linéaire se réduit donc à trouver un ensemble de coefficients \tilde{a}_k de façon à minimiser l'erreur de prédiction $e(n)$ dans un intervalle donné. L'approche de base est de calculer l'ensemble des coefficients a_k qui minimisent l'erreur quadratique moyenne de prédiction sur un court segment de la parole, cette erreur est définie par :

$$E = \sum_n e^2(n) = \sum_n \left[s(n) + \sum_{k=1}^p a_k \cdot s(n-k) \right]^2 \quad (\text{II.7})$$

Les valeurs de a_k qui minimisent E sont obtenues en annulant les dérivées partielles, par rapport à chaque coefficient prédicteur $a(i)$:

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, p \quad \text{donc :}$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = +2 \cdot \sum_n \left\{ \left[s(n) + \sum_{k=1}^p a_k \cdot s(n-k) \right] \cdot s(n-i) \right\} = 0 \quad (\text{II.8})$$

Ce qui conduit au système :

$$-\sum_n s(n) \cdot s(n-i) = \sum_n \sum_{k=1}^p a_k \cdot s(n-k) \cdot s(n-i) \quad (\text{II.9})$$

Où :

$$-\sum_n s(n) \cdot s(n-i) = \sum_{k=1}^p a_k \cdot \sum_n s(n-k) \cdot s(n-i) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, p \quad (\text{II.10})$$

Soit :

$$\phi(i, k) = \sum_n s(n-k) \cdot s(n-i) \quad \text{pour } i, k = 1, 2, \dots, p \quad (\text{II.11})$$

Par conséquent l'équation (II.10) devient :

$$\sum_{k=1}^p a_k \cdot \phi(i, k) = -\phi(i, 0) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, p \quad (\text{II.12})$$

Le problème de la technique LP se réduit donc à la résolution d'un ensemble de P équations avec P inconnus, afin d'obtenir les coefficients a_k : $k = 1, 2, \dots, p$. Premièrement, on commence par le calcul des valeurs $\phi(i, k)$ pour $i = 1, 2, \dots, p$ et $k = 0, 1, \dots, p$ en utilisant l'équation (II.11) dont la limite de sommation doit être spécifiée.

Deux méthodes généralement utilisées dans l'analyse LP, la méthode d'autocorrélation et la méthode de covariance. En plus, d'une troisième méthode qui est basée sur le calcul des coefficients de réflexion; appelée aussi la méthode de covariance en treillis ou l'algorithme de Burg. Bien qu'elle ait plusieurs applications, comme la détection du signal sinusoïdal dans un bruit additif, Gray et al ont montré que l'algorithme de Burg ne présente aucun avantage par rapport aux autres techniques dans les applications d'analyse de la parole. On se limitera, dans le cadre de ce travail à l'étude de la méthode d'autocorrélation pour la stabilité qu'elle offre et l'espace mémoire réduit qu'elle nécessite.

II.3.1 La Méthode d'Autocorrélation

L'énergie de l'erreur de prédiction (II.7) est calculée sur un intervalle infini, cependant pour respecter les considérations pratiques on suppose que $s(n) = 0$ en dehors de l'intervalle: $0 \leq n \leq N-1$, où N est la durée de la fenêtre d'analyse LP. Cette hypothèse sur la nature de $s(n)$ simplifie le calcul du signal $\tilde{s}(n)$

donc :

$$\phi(i, k) = \sum_{n=0}^{N+p-1} s(n-i).s(n-k) \quad \text{pour } i = 1, \dots, p ; k = 0, \dots, p \quad (\text{II.13})$$

On voit que seuls les valeurs définies pour $0 \leq n \leq N + p - 1$, devront être calculée. Par un changement de variable $m = n - i$, l'équation (II.13) devient :

$$\phi(i, k) = \sum_{m=0}^{N-1-(i-k)} s(m).s(m+i-k) \quad (\text{II.14})$$

Donc, $\phi(i, k)$ est l'autocorrelations à court terme de $s(m)$ évaluée à $(i - k)$.

Par conséquent :

$$\phi(i, k) = R(i - k) \quad (\text{II.15})$$

Où :

$$R(j) = \sum_{n=0}^{N-1-j} s(n).s(n+j) = \sum_{n=j}^{N-1} s(n).s(n-j) \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, p \quad (\text{II.16})$$

L'ensemble de p équations dans (II.12) devient :

$$\sum_{k=1}^p a_k \cdot R(|i - k|) = -R(i). \quad i = 1, 2 \dots, p \quad (\text{II.17})$$

L'équation (II.17) est utilisée pour évaluer les coefficients a_k du modèle ; elle peut être représentée sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(1) & R(2) & \dots & R(p-1) \\ R(1) & R(0) & R(1) & \dots & R(p-2) \\ R(2) & R(1) & R(0) & \dots & R(p-3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R(p-1) & R(p-2) & R(p-3) & \dots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \\ R(3) \\ \dots \\ R(p) \end{pmatrix} \quad (\text{II.18})$$

On constate que la matrice des valeurs de l'autocorrélation est symétrique et que les éléments situés sur la diagonale sont identiques, cette forme matricielle est appelée forme de TOEPLITZ, cette propriété peut être exploitée pour obtenir un Algorithme efficace pour résoudre cette équation.

La procédure récursive de Wiener - Levinson - Durbin (WLD) développée dans ce qui suit représente la solution la plus efficace.

La procédure WLD

$$E(0) = R(0)$$

for $i = 1$ to p do

$$K_i = - \frac{R(i) - \sum_{j=1}^{i-1} a_j^{(i-1)} R(i-j)}{E(i-1)} \quad \text{(II.19)}$$

$$a_i^{(i)} = K_i$$

for $j = 1$ to $i-1$ do

$$a_j^{(i)} = a_j^{(i-1)} - K_i a_{i-j}^{(i-1)} \quad \text{(II.20)}$$

$$E(i) = (1 - K_i^2) \cdot E(i-1) \quad \text{(II.21)}$$

La solution finale est : $a_j = a_j^{(p)} \quad j = 1, 2, \dots, p \quad \text{(II.22)}$

La quantité $E(i)$ dans l'équation (II.21) est l'erreur de prédiction d'ordre i . Les quantités intermédiaires K_i sont appelées coefficients de réflexion, qui sont les mêmes coefficients qui apparaissent dans le modèle du tube sans pertes du conduit vocal.

La valeur de K_i jouit de la propriété : $-1 \leq K \leq 1$ (II.23)

La relation (II.23) est une condition nécessaire et suffisante pour que le filtre soit stable. La méthode d'autocorrélation garantit la stabilité, de plus le calcul de $R(i)$ nécessite un fenêtrage de $s(n)$ par une fenêtre de Hamming (Fig II.3) :

$$\omega(n) = 0.54 - 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{(N-1)}\right) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{II.24})$$

Ainsi, l'analyse est faite sur le signal : $x(n) = s(n) \cdot \omega(n)$.

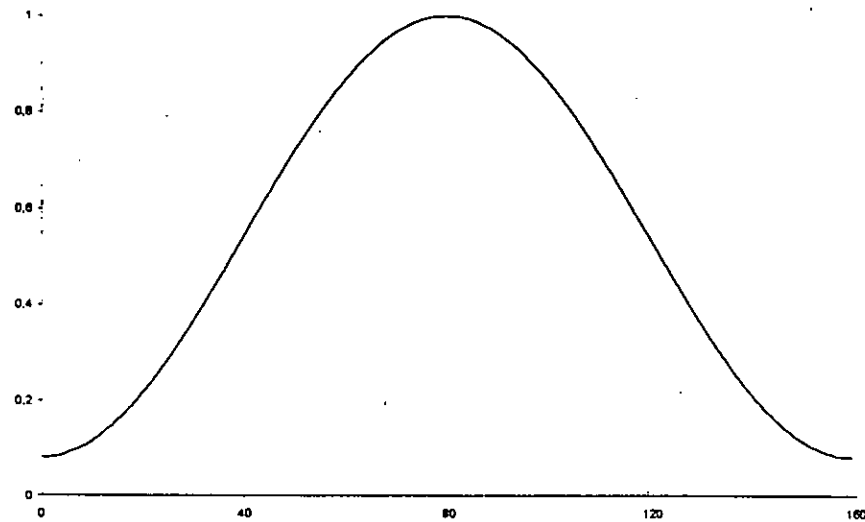


Figure II.3 La fenêtre de Hamming

II.3.2 La Méthode de covariance

Contrairement à la méthode d'autocorrélation, on suppose que l'erreur dans l'équation (II.7) est minimisée sur un interval fini $0 \leq n \leq N-1$ et les effets d'extrémité évoqués précédemment pour la méthode d'autocorrélation sont inexistantes, la méthode n'exige donc aucune pondération préalable des échantillons.

Ainsi, $\phi(i,k)$ de l'équation (II.11) sera donnée par :

$$\phi(i,k) = \sum_{n=0}^{N-1} S(n-i)S(n-k) \quad \begin{cases} i = 0, \dots, P \\ j = 0, \dots, P \end{cases}$$

l'ensemble des équations dans (II.12) peut être écrit sous une forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} \phi(1.1) & \phi(1.2) & \dots & \phi(1.P) \\ \phi(2.1) & \phi(2.2) & \dots & \phi(2.P) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi(P.1) & \phi(P.2) & \dots & \phi(P.P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(1.0) \\ \phi(2.0) \\ \dots \\ \phi(P.0) \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

puisque $\phi(i,k) = \phi(k,i)$ la matrice du système reste symétrique et définie positive, mais elle n'est plus une matrice de TOEPLITZ.

Pour la résolution, on peut utiliser la méthode de décomposition de CHOLESKY ou la procédure d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT.

II.3.2 Choix des Conditions d'Analyse

Les éléments principaux dans l'analyse par prédiction linéaire sont :

- **La méthode d'analyse :**

Les deux méthodes d'autocorrélation et de covariance donnent presque les mêmes résultats. La méthode de covariance ne stipule aucune hypothèse sur la morphologie du signal $s(n)$, en dehors des N points disponibles. Ainsi, la minimisation de l'erreur quadratique présentée à l'équation (II.7) ne s'effectue que sur les N points de $s(n)$. Il faut noter que cette approche, contrairement à la technique d'autocorrélation, peut induire une solution instable du modèle. Par ailleurs, la méthode la plus utilisée est celle de l'autocorrélation, malgré l'existence d'une méthode de covariance stabilisée proposée par Atal .

Le nombre des coefficients de prédiction P:

Comme dans le cas du codage des paramètres LP, on doit utiliser un nombre minimal de paramètres nécessaires à une modélisation exacte de l'enveloppe spectrale court - terme de la parole. Rabiner et Shafer ont démontré que pour une représentation adéquate du conduit vocal, la durée de mémorisation $p.T$ nécessaire au calcul de $\tilde{s}(n)$ { l'estimé de $s(n)$ dans (II.3) } doit être égale à deux fois le temps mis par l'onde de parole pour se propager depuis la glotte jusqu'aux lèvres, c'est à dire $(2.L) / C$, où L est la longueur du conduit vocal et C la célérité du son dans les conditions normales. Ainsi pour les valeurs de $C = 34$ (cm / ms) et $L = 17$ cm, on obtient un temps de 1 ms.

Si la fréquence d'échantillonnage $F_s = 8$ Khz, la valeur correspondante de p est alors: $8000/1000 = 8$ au moins. Par ailleurs, on ajoute généralement un nombre N_a de pôles (4 à 5) qui sont nécessaires pour représenter l'influence de la source et du rayonnement, donc :

$$p = F_s (\text{Khz}) + N \quad (\text{II.26})$$

Dans notre cas p est choisi entre 16 et 20.

- **La durée de la trame d'analyse:**

pour assurer une bonne résolution spectrale, la durée N doit être l'intervalle où le mouvement du conduit vocal est négligeable. Généralement, cet intervalle est d'environ 15-20 ms pour la majorité des voyelles, et plus réduit dans le cas des sons non voisés. On peut dire que cet intervalle est suffisant pour maintenir une bonne qualité de la parole, bien qu'il peut introduire une faible dégradation, surtout pour les sons transitoires, qui ont des changements rapides des caractéristiques spectrales.

La figure (II.3) donne une représentation complète de la prédiction linéaire sous forme d'organigramme.

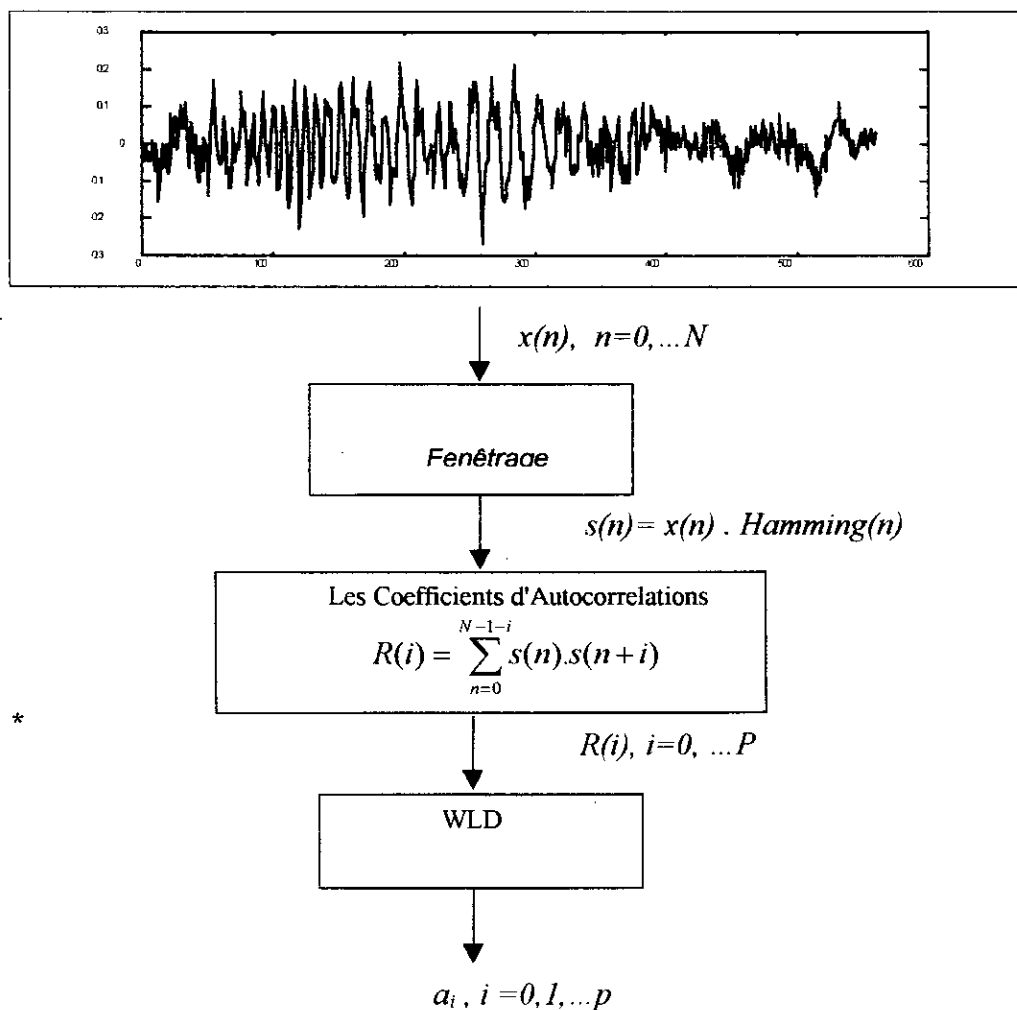


Fig. II. 3 Organigramme de la prédiction linéaire (LP)

II.3.3 La Préaccentuation

Le spectre de la parole présente une pente globale négative. Par ailleurs, l'oreille humaine est plus sensible à la région du spectre située au-delà de 1 KHz.

La préaccentuation consiste à faire passer, avant l'analyse spectrale par prédiction linéaire, le signal de parole dans un filtre de transmittance :

$$H_p(z) = 1 - \mu Z^{-1} \text{ avec } 0.9 < \mu < 1. \quad (\text{II.27})$$

Et dans le domaine temporel par la relation de récurrence suivante :

$$y(n) = x(n) - \mu x(n-1) \text{ pour } n = 0, 1, \dots, N \quad (\text{II.28})$$

Ce filtre a pour effet d'accentuer la partie haute fréquence du spectre. Par conséquent, la préaccentuation contribue à compenser la pente globale négative spectrale. Elle assiste donc, l'algorithme d'analyse spectrale dans la modélisation des aspects du spectre, qui sont plus importants du point de vue de la perception auditive.

Conclusion

On peut tirer comme conclusion que :

- _ la méthode de prédiction linéaire propose une solution élégante pour la modélisation du filtre présent dans le modèle de production de la parole.

- _ la LP suppose que le filtre H est un filtre tout-pôle : un nombre de pôles suffisants permet néanmoins d'analyser correctement les segments qui exigeraient un modèle pôles_zéros (nasales_occulsive).

- _ qu'on peut estimer les coefficients de prédiction en choisissant les limites de la fenêtre d'analyse. Différentes méthodes pour cela ont été proposées.

Les 2 méthodes de bases sont la méthode de covariance, et la méthode d'autocorrélation qui est la plus intéressante pour la stabilité qu'elle offre et l'espace mémoire réduit qu'elle nécessite.

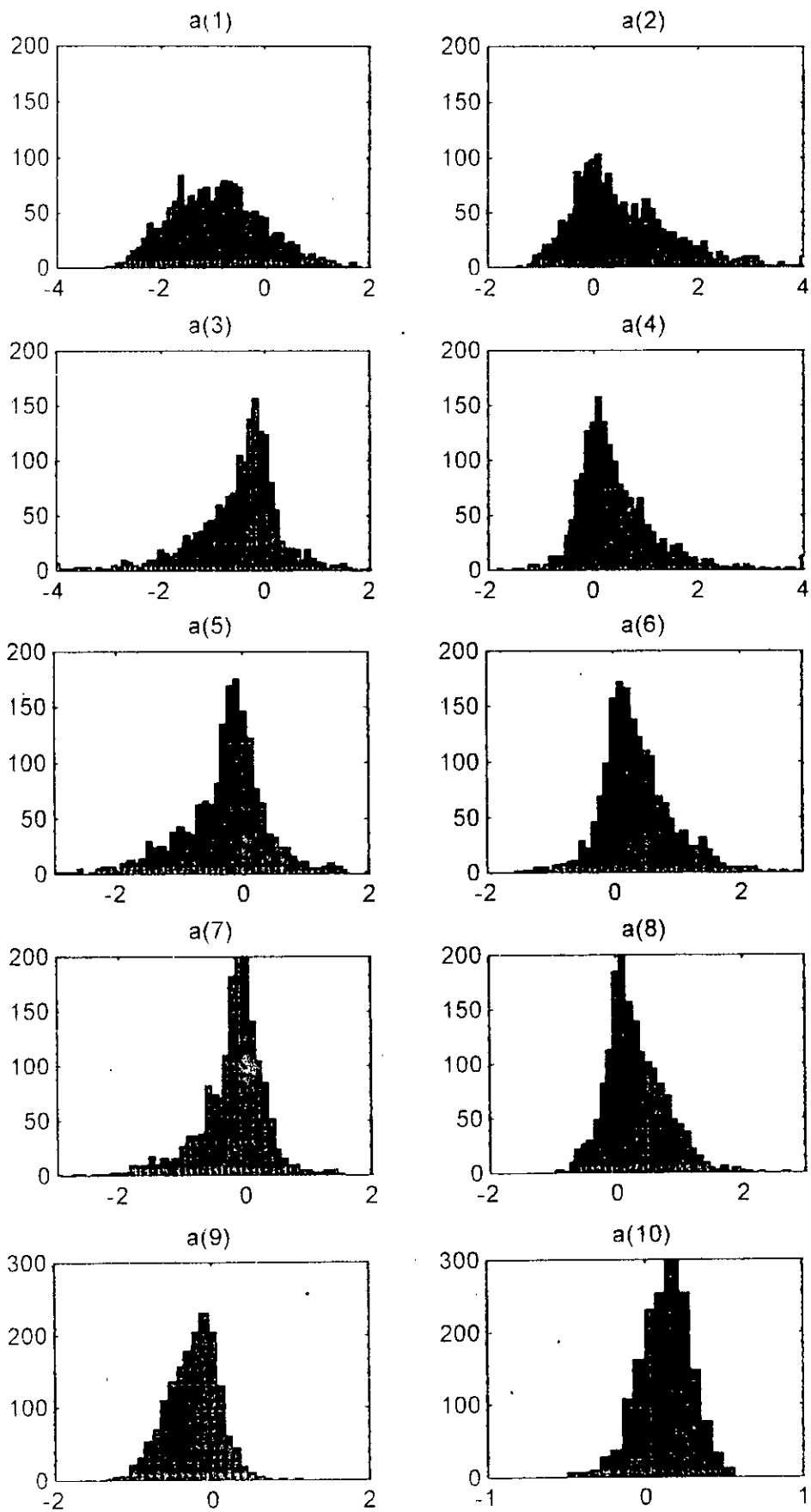


Figure 4.9 histogramma des parametres a(i) la méthode d'autocorrelation

CHAPITRE III

LES GEOSTATISTIQUES

Les géostatistiques

INTRODUCTION

Le terme géostatistique, de nos jours, s'adresse généralement à une branche spéciale de la statistique appliquée, développée originalement par GEORGE MATHERON du centre de morphologie Mathématique de Fontainebleau, France. La géostatistique est inventée pour traiter les problèmes rencontrés lorsque la théorie de statistique conventionnelle est utilisée dans l'estimation de changement de pureté d'un minerai à l'intérieur d'une mine.

Néanmoins, comme la géostatistique est une théorie abstraite de comportement statistique, elle est applicable dans beaucoup de circonstances dans des différents domaines de géologie et autres sciences naturelles.

Dans ce chapitre, une étude détaillée est présentée sur les géostatistiques, ainsi qu'un exemple d'application et de nombreuses figures et modèles associés sont proposés afin d'avoir une meilleure idée sur ce domaine.

III.1 LA VARIABLE REGIONALISEE (V.R)

La clé de la conception des géostatistiques est la variable régionalisée qui a des propriétés intermédiaires entre une variable aléatoire pure et une autre complètement déterministe. Les variables régionalisées typiques sont des fonctions décrivant des phénomènes naturels qui ont des distributions géographiques (tel que l'élévation de la surface de la terre, changement de pureté dans un minerai ...etc).

À la différence des variables aléatoires, les variables régionalisées ont une continuité d'un point à un autre, mais les changements dans les variables sont très compliqués qu'elles ne peuvent être décrites par aucune fonction analytique ou déterministe. Même si une variable régionalisée est spatialement continue, il n'est pas toujours évident de connaître ces valeurs partout. Par contre, ses valeurs sont connues seulement à partir des échantillons pris à des endroits spécifiques. La taille, la forme, l'orientation, et l'arrangement spatial de ces échantillons constituent le support de la variable régionalisée, La variable régionalisée aura des caractéristiques différentes si un d'entre eux est changé.

La géostatistique entraîne l'estimation de la forme de la variable régionalisée en 1^{ère}, 2^{ème}, et 3^{ème} dimension.

III.2 LA SEMIVARIANCE

C'est l'une des mesures statistiques de base dans la géostatistique. La semivariance exprime le taux de changement d'une variable régionalisée le long d'une orientation spécifique. L'estimation de semivariance entraîne des procédures similaires à celles d'analyse à série de temps.

La semivariance mesure le degré de dépendance spatiale entre les échantillons le long d'un support spécifique. Nous allons considérer dans notre cas que les échantillons sont des points de mesures de propriétés (expl : la profondeur d'un horizon d'une surface...etc.). Pour faciliter les calculs, on considère que le support est régulier, c'est le cas où les échantillons sont uniformément espacés le long des lignes droites.

Si l'espacement entre deux échantillons successifs le long d'une ligne est Δh . La semivariance peut être exprimée par :

$$\gamma_n(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{n(h)} (X_i - X_{i+h})^2 \quad (\text{III.1})$$

où :

h : multiple de Δh .

X_i : est le mesure d'une variable régionalisée prise à l'endroit i .

X_{i+h} : est le mesure d'une variable régionalisée prise à l'endroit $i+h$.

On va trouver la somme des différences carrées entre les paires de points séparées par la distance h , le nombre de points est n . et le nombre de comparaison $n(h)$ entre les paires de points est $(n-h)$.

On note que, quand la distance h entre échantillons est 0, la valeur à chaque point est comparée à elle-même. Donc, toutes les distances sont égales, et la semivariance γ_0 vaut 0. Si Δh est petit les points à comparer tendent à être très similaires et la semivariance aura une petite valeur. Quand Δh augmente les points à comparer sont de moins en moins proche, et la différence devient large résultant des valeurs plus grandes de $\gamma(h)$.

A une distance assez grande entre les points devant être comparés et qui ne peuvent être relatés entre eux, leur différences carrée devient égales en module à la variance autour des valeurs moyennes. La semivariance augmente doucement et elle développe une région large appelée «seuil». La distance ou la semivariance s'approche de la variance est appelée le «rang» de la V.R, est définie au voisinage ou tous les endroits sont relatés entre eux.

A quelques points arbitraires dans l'espace, on peut imaginer le voisinage comme un intervalle symétrique (ou zone, volume, dépendant du nombre de dimensions). Si la V.R. est stationnaire, c'est à dire, qu'elle a la même valeur moyenne partout, n'importe quel point en dehors de l'intervalle est complètement indépendant du point central, et elle ne peut produire aucune information sur la valeur de la V.R à cet endroit. Dans le voisinage, la V.R à chaque point d'observation est relatée à la V.R du point central. D'où, elle peut être utilisée pour estimer les valeurs de tous les

points voisins. Si on utilise un nombre de mesures fait à des endroits dans le voisinage pour estimer la valeur de la V.R du point central, le semivariogramme fourni les propres poids à assigner à chacune de ces mesures.

III.2.1 Autre formule du semivariance

La semivariance est non seulement égale à la moyenne des différences carrées entre les paires de points espacés de distance Δh , elle est aussi égale à la variance de ces différences.

Delà, la semivariance peut être définie comme :

$$\gamma_h = \frac{\sum \left\{ (X_i - X_{i+h}) - \frac{\sum (X_i - X_{i+h})}{n} \right\}^2}{2n} \quad (\text{III.2})$$

On note que la moyenne de la V.R X_i est aussi la moyenne de la V.R X_{i+h} , car ce sont les mêmes observations d'où :

$$\frac{\sum X_i}{n} = \frac{\sum X_{i+h}}{n}$$

d'où leur différence doit être zéro :

$$\frac{\sum X_i}{n} - \frac{\sum X_{i+h}}{n} = 0$$

on peut combiner les sommations

$$\frac{\sum X_i - \sum X_{i+h}}{n} = \frac{\sum (X_i - X_{i+h})}{n} = 0 \quad (\text{III.3})$$

En introduisant (III.3) dans l'équation (III.2), on voit que le second terme dans le numérateur est égal à 0, donc l'équation (III.2) est égale à (III.1). Notons que cette relation est strictement vraie pour V.R stationnaire, si l'information est non stationnaire, les changements de séquences avec h et l'équation (III.2) doit être modifiée.

III.2.2 Caractéristique de la semivariance

Il y a des relations mathématiques entre la semivariance et d'autres statistiques comme l'autocovariance et l'autocorrelation, si la V.R est stationnaire, la semivariance pour la distance Δh est égale à la différence entre la variance et l'autocovariance spatiale pour la même distance (figure III.1). Si la V.R est non seulement stationnaire mais aussi normalisée pour avoir la moyenne égale à 0, et la variance égale à 1, la semivariance est l'image miroir de la fonction d'autocorrelation (fig III.2).

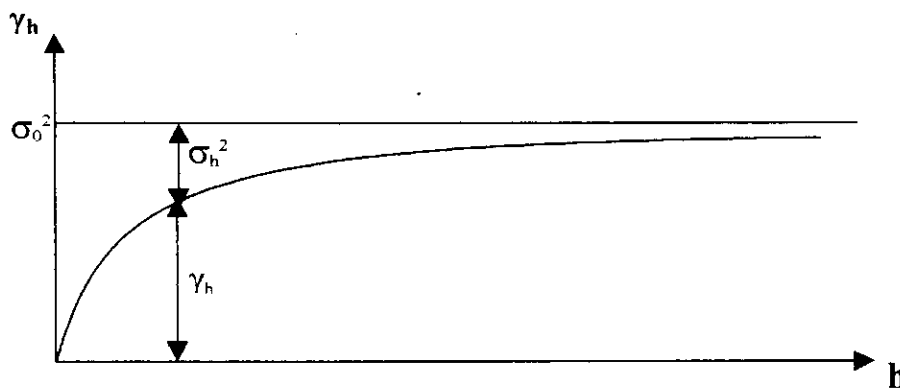


FIGURE III.1 La relation entre la semivariance γ et l'autocovariance σ^2 pour une V.R stationnaire. σ_0^2 est la variance des observations, ou l'autocovariance au rang 0, pour des valeurs de $h > a$, $\gamma_h = \sigma_0^2 - \sigma_h^2$

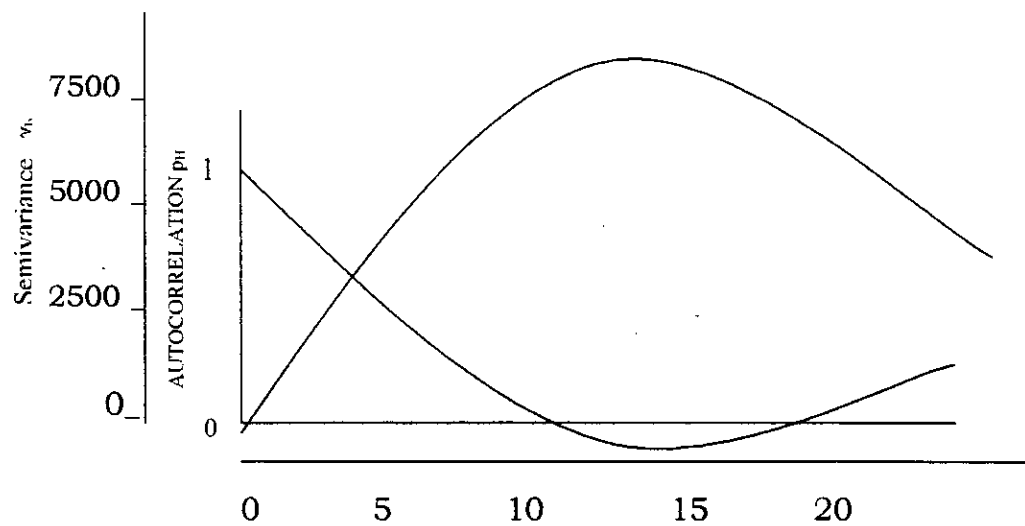


FIGURE III.2 relation entre la semivariance γ_h et l'autocorrelation σ_h pour une variable régionalisée stationnaire.

Dans la plupart des cas, la V.R est non stationnaire, mais exhibée des changements dans sa valeur moyenne d'un endroit à un autre.

La V.R comme définie dans l'équation (III.2) contient 2 parties :

- ✓ La 1^{re} est la différence entre paires de points appelée «le résidu».
- ✓ La 2^{me} est la moyenne des différences entre paires de points appelée «drift» ou le dilivium. Le drift est la moyenne des poids de tous les points dans le voisinage autour du point i , il aura la forme d'approximation de la V.R.

Si le drift est substitué de la V.R, le résidu $R_i = X_i - \bar{X}_i$ (ou \bar{X}_i est le drift) serait lui-même une V.R et aura des valeurs moyennes locales égales à 0, donc les résidus seront stationnaires et il sera possible de calculer leur semivariance.

III.2.3 Différentes Formes du semivariogramme [9]

Le semivariogramme exprime le comportement spatial de la V.R ou des résidus. Des formes idéalistes du semivariogramme sont montrées dans la figure III.3.

La figure (III.3.a) montre un semivariogramme parabolique tangent à l'axe x de l'origine, il indique que la V.R est exceptionnellement continue.

La figure (III.3.b) montre un semivariogramme linéaire, indique que la V.R à une continuité modérée.

La figure (III.3.c) montre un semivariogramme sous forme de ligne horizontale égale à la variance, il indique que la V.R est aléatoire (pas d'existence de continuité).

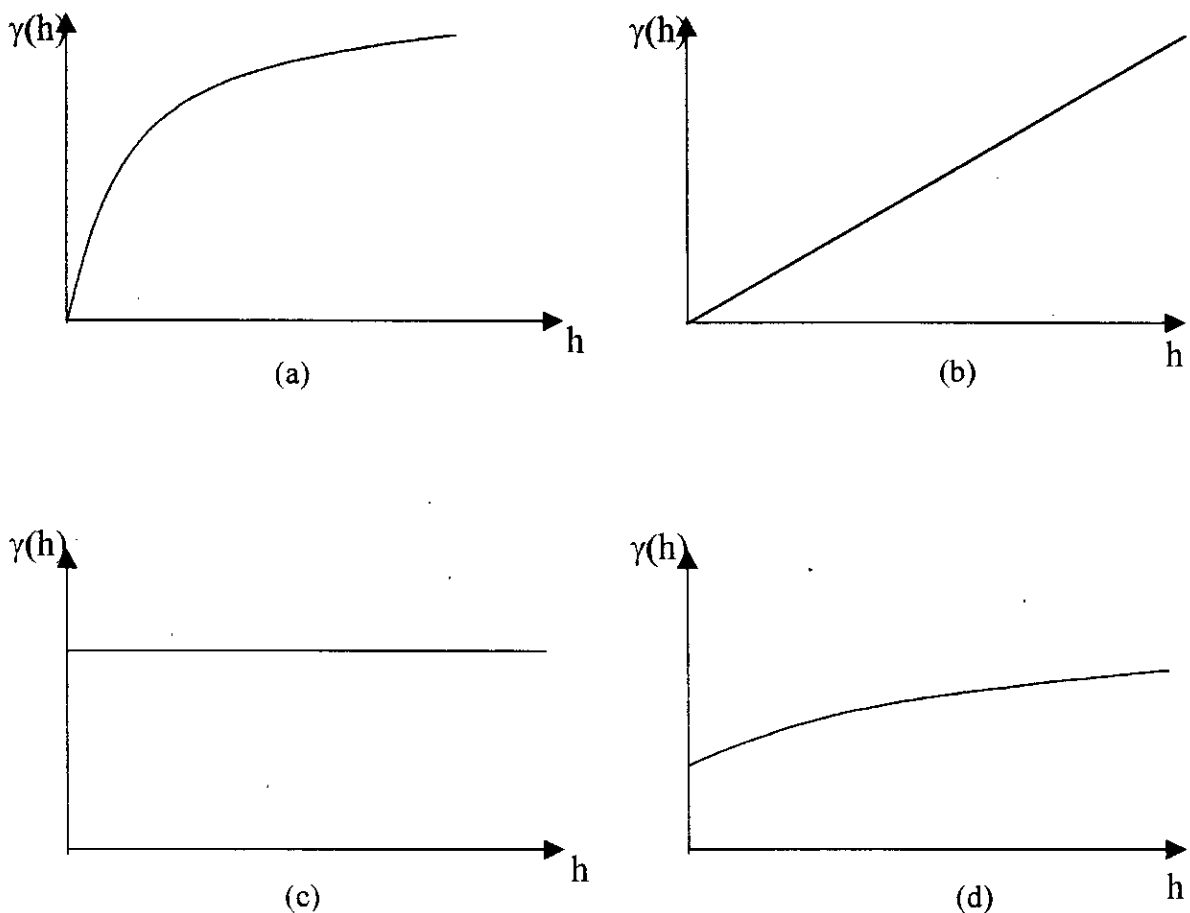


FIGURE III.3 Différentes Formes du semivariogramme

III.2.4 Modélisation du semivariogramme

En principe, le semivariogramme expérimental serait utilisé directement pour produire les valeurs pour les procédures d'estimations, néanmoins, le semivariogramme est connu seulement aux points discrets représentant les distances Δh . Pratiquement, les semivariogrammes peuvent être exigés pour n'importe quelle distance, multiple de Δh ou non. Pour cette raison, le semivariogramme expérimental peut être modélisé par une fonction continue qui peut être évaluée pour n'importe quelle distance.

Généralement, le modèle idéal qu'il faut choisir, pour représenter un semivariogramme, doit passer par l'origine et monte doucement vers une limite supérieure, puis continue à un niveau constant. Plusieurs modèles existent pour construire des semi-variogrammes théoriques comme le modèle linéaire, De Wijsian, exponentiel et le modèle sphérique.

a) Le Modèle sphérique

Généralement, le Modèle sphérique (figure III.4) est considéré comme la forme idéale d'un semi-variogramme. Il est défini par :

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma_0^2 \left(\frac{3h}{2a} - \frac{h^3}{2a^3} \right) & \text{pour } h \leq a \\ \sigma_0^2 & \text{pour } h \geq a \\ 0 & \text{pour } h = a \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

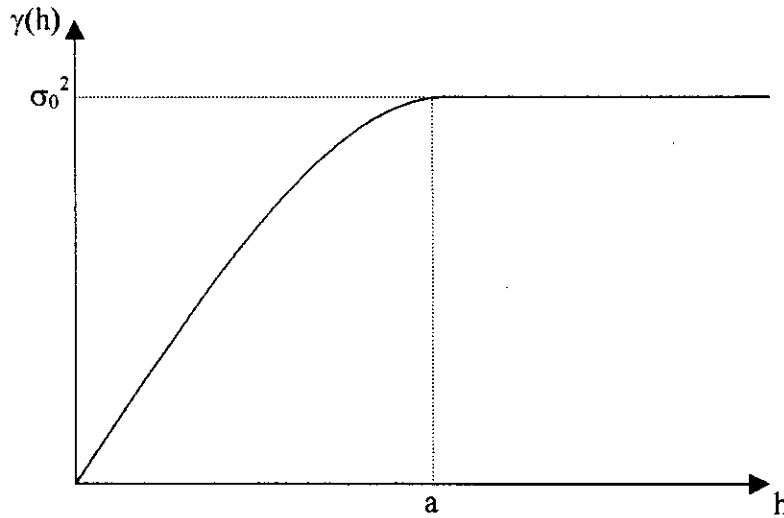


FIGURE III.4 le modèle sphérique d'un semi-variogramme.
Le rang a est la distance pour laquelle, la semivariance devient égale à σ_0^2

a) Le Modèle exponentiel

Un autre modèle qui peut être utilisé est le modèle exponentiel défini comme suit :

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma_0^2 \left(1 - e^{-\frac{h}{a}}\right) & \text{pour } h < a \\ \sigma_0^2 & \text{pour } h \geq a \end{cases} \quad \text{(III.5)}$$

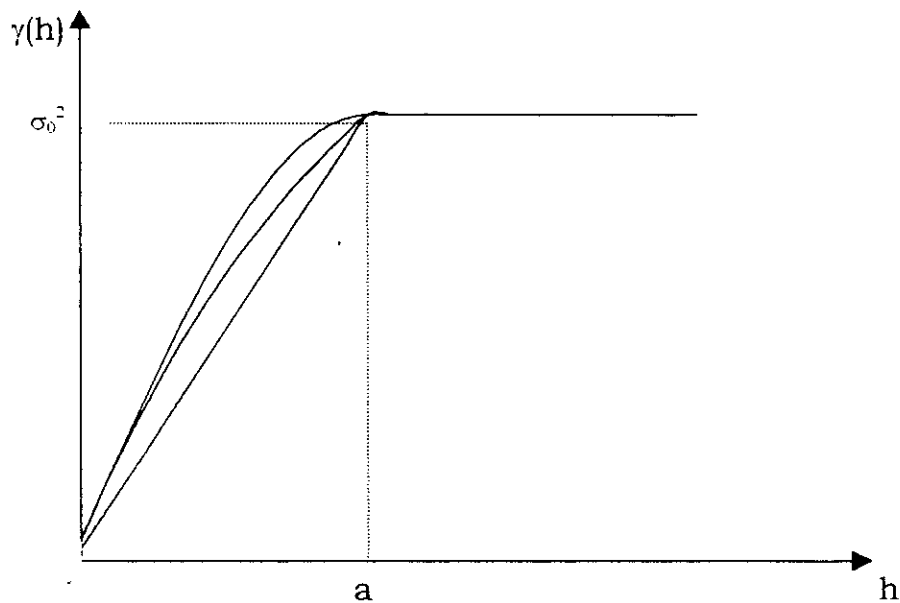


FIGURE III.5 le modèle sphérique et le modèle exponentiel et le modèle linéaire d'un semi-variogramme.

La figure III.5 compare les modèles sphérique et exponentiel, le modèle exponentiel n'atteint jamais la valeur limite du top, mais l'approche asymptotiquement. La semivariance du modèle exponentiel est inférieure à celle du sphérique pour toute valeur de h inférieure au rang.

a) *Le modèle linéaire*

Le modèle linéaire est le modèle le plus simple, puisqu'il a un seul paramètre, la pente. Il est défini par :

$$\gamma_h = \begin{cases} \alpha h & \text{pour } h < a \\ \sigma^2_0 & \text{pour } h \geq a \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Le modèle linéaire est un cas particulier des deux modèles précédents, car pour des distances h très inférieure au rang a , le modèle linéaire est une parfaite approximation (fig III.5) ou les modèles sphériques et exponentiel coïncident avec une ligne droite proche de l'origine.

III.3 KRIGING

III.3.1 Introduction

Le concept de la V.R est introduit comme étant une propriété naturelle apparente avec des caractéristiques intermédiaires entre une variable aléatoire et une autre complètement déterministe, plusieurs surfaces géologiques, réelles et conceptuelles, peuvent être définies comme une V.R, ces surfaces sont continues d'un endroit à un autre et donc peuvent être corrélées spatialement sur une petite distance.

Néanmoins, des endroits sur une surface largement séparés tendent à être indépendants statistiquement, le degré de la continuité spatiale d'une V.R peut être représenté par un semivariogramme.

Si des mesures sont prises dans des endroits échantillonnés séparés, et la forme du semivariogramme est connue, il est possible d'estimer la valeur de la surface à n'importe quel endroit non échantillonné grâce à une procédure appelée KRIGING.

Définition [7]

KRIGING est une procédure de calcul qui est capable d'exprimer la précision de la combinaison linéaire en fonction du semivariogramme et les poids déterminés en minimisant l'erreur de variance d'une série d'échantillons.

KRIGING utilise des informations à partir du semivariogramme pour trouver un seuil optimal de poids utilisés pour l'estimation de la surface à des endroits non échantillonnés, comme le semivariogramme est en fonction de la distance, les poids changent selon l'arrangement géologique des échantillons.

Formulation de la procédure KRIGING

On assume que la V.R est statistiquement stationnaire (ou non-existence du drift) La valeur d'un endroit non échantillonné peut être estimée comme la moyenne des poids des endroits échantillonnés connus :

$$\hat{\mu}(x_i) = \sum_{j=1}^n \omega_j \mu(x_j)$$

ou $\hat{\mu}(x_i)$ est la valeur estimée de $\mu(x_i)$, et $\mu(x_i)$ sont les valeurs connues de $\{x_i\}$.

la variance de l'erreur d'estimation, dénoté par ε_i est donné par :

$$\text{VAR}(\varepsilon_i) = \text{VAR}[\mu(x_i) - \hat{\mu}(x_i)]$$

Donnant :

$$\begin{aligned} \text{VAR}(\varepsilon_i) = & \text{VAR}[\mu(x_i)] - 2 \sum_j \omega_j \text{COV}[\mu(x_i), \mu(x_j)] \\ & + \sum_j \sum_k \omega_j \omega_k \text{COV}[\mu(x_j), \mu(x_k)] \quad (5) \end{aligned}$$

Remplaçons $\text{VAR}[\varepsilon_i]$, $\text{VAR}[\mu(x_i)]$, $\text{COV}[\mu(x_i), \mu(x_j)]$, et $\text{COV}[\mu(x_j), \mu(x_k)]$, respectivement par σ_e^2 , σ_i^2 , σ_{ij} , σ_{jk} , on peut réécrire l'équation précédente (III.5) comme suite :

$$\sigma_e^2 = \sigma_i^2 - 2 \sum_j \omega_j \sigma_{ij} + \sum_j \sum_k \omega_j \omega_k \sigma_{jk} \quad (\text{III.6})$$

la variance minimale de l'estimation linéaire est définie tel que la valeur estimée sera égale à une valeur réelle sur, plutôt qu'une valeur systématiquement avec une incertitude, la condition non biaisé est plutôt recommandée, ça signifie que pour :

$$E[\hat{\mu}(x_i)] = \Phi$$

on a :

$$E\left[\sum_j \omega_j \mu(x_j)\right] = \Phi$$

maintenant on a :

$$\sum_j \omega_j E[\mu(x_j)] = \Phi$$

et comme on a :

$$E[\mu(\mathbf{x}_i)] = \Phi$$

alors :

$$\sum_j \omega_j = 1$$

De cette façon on a défini le meilleur estimateur non biaisé. On utilisons la technique d'optimisation du multipliers de lagrange, l'équation (III.6) sera minimisée en tenant compte de la condition non biaisé si dessous :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & L = \sigma_e^2 - 2\lambda \\ \text{tel que} & \sum_{j=1}^n \omega_j - 1 = 0 \end{array}$$

Où λ est le multiplieur de lagrange,

avec l'arrangement on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n \omega_k \sigma_{jk} - \lambda = \sigma_{ij} \quad (j=1,2,\dots,n) \\ \sum_{j=1}^n \omega_j = 1 \end{array} \right\} \quad \text{(III.7)}$$

Soit $\sigma_{ij} = \gamma_{jk}$ et $\sigma_{ij} = \gamma_{ij}$ (car γ étant le symbole du semivariogramme) .

On peut écrire. l'équation (7) Sous forme matricielle :

$$[A]\{\omega\} = \{B\} \quad \text{(III.8)}$$

ou

$$[A] = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 1 \\ \gamma_{n1} & \gamma_{2n} & \dots & \gamma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\{\omega\} = \{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \dots \omega_n - \lambda\}^T$$

et

$$\{B\} = \{\gamma_{i1} \gamma_{i2} \gamma_{i3} \dots \dots \dots \gamma_{in} - 1\}^T$$

ou tout les γ termes peuvent être obtenus à partir du semivariogramme. Finalement, le site optimal non biaisé des poids est obtenu par :

$$\{\omega\} = [A]^{-1}\{B\} \quad (\text{III.9})$$

similairement, l'erreur de variance est la somme des poids du semivariance pour des distances à partir des endroits échantillonnés connus de $\{x_i\}$ jusqu'à l'endroit de l'estimation i . sous forme matricielle :

$$S^2_{\epsilon} = [\omega]^T [B]. \quad (\text{III.10})$$

Conclusion:

Dans le domaine de la géostatistique la variable régionalisée est d'une importance primordiale, le taux de changement d'une V.R peut être estimé par des modèles théoriques spécifiques (semi-variogramme) ou le modèles spherique est le plus utilisé.

L'estimation de la valeur d'une surface pour une V.R à n'importe quel endroit se fait grâce à une méthode dite "KRIGING"

La méthode kriging est une méthode de calcul qui utilise des informations à partir du semivariogramme pour trouver un seuil optimal de poids utilisés pour l'estimation de la surface à des endroits non échantillonnés. Néanmoins, l'utilisation d'un semivariogramme théorique conduit à des résultats erronés, pour une meilleure estimation des poids (donc de la surface) l'utilisation d'un semivariogramme expérimental est primordiale.

CHAPITRE IV

APPLICATION DES GEOSTATISTIQUES
DANS L'ANALYSE LPC

Application des géostatistiques dans l'analyse par Prediction Linéaire

INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, on donne quelques exemples expérimentaux ou les résultats obtenus par la méthode géostatistique (kriging) sont comparés aux résultats obtenus par la méthode d'autocorrelation afin d'éclaircir les avantages et les améliorations apportés par cette nouvelle technique, ainsi que les algorithmes de :

- _ (FFT) la transformée de fourier rapide .
- _ la méthode d'autocorrelation.
- _ la méthode géostatistique (kriging)

le modèle géostatistique (kriging LPC) proposé est testé sur deux types de signaux : signal voisé (périodique) , et signal non voisé (bruité) .

Le signal d'entrée est échantillonné sur la fréquence $f=8000$ HZ , est le nombre d'échantillons utilisés dans l'analyse (pour les deux type de signaux) est de 128 .

IV.1 MODELE GEOSTATISTIQUE DE LA PAROLE :

un nouveau modèle pour un ensemble de coefficients de prédiction (a_k) optimal, peut être obtenu en utilisant les principes des géostatistiques. Ainsi, dans le chapitre précédent, on a vu que l'estimée de $\mu(x_i)$ peut être obtenue en utilisant une combinaison linéaire de P valeur connue :

$$\hat{\mu}(x_i) = \sum_{j=1}^P \omega_j \mu(x_j) \quad (\text{IV.1})$$

ou l'ensemble $\{\omega_j\}$ est la solution du système d'équations (III.7) suivant :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1P} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2P} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{P1} & \gamma_{P2} & \dots & \gamma_{PP} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_P \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \dots \\ \gamma_{PP} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

avec :

$$\gamma_{kj} = \gamma(\mathbf{h}_{kj})$$

et :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2(n-h)} \sum_{i=1}^{n-h} [\mu(x_i) - \mu(x_{i+h})]^2$$

pour le signal (AR) on a :

$$\hat{S}(n) = \sum_{j=1}^P a_j S(n-j) \quad (\text{IV.3})$$

en identifiant (IV.3) avec (VI.1) :

$$\{\mu(x_j)\} = \{S(n-j)\}$$

on note $s(n)=r$ et $S(n-k)=r-k$

un ensemble optimal des coefficients de prédiction peut être exprimé sous la forme suivante :

avec :

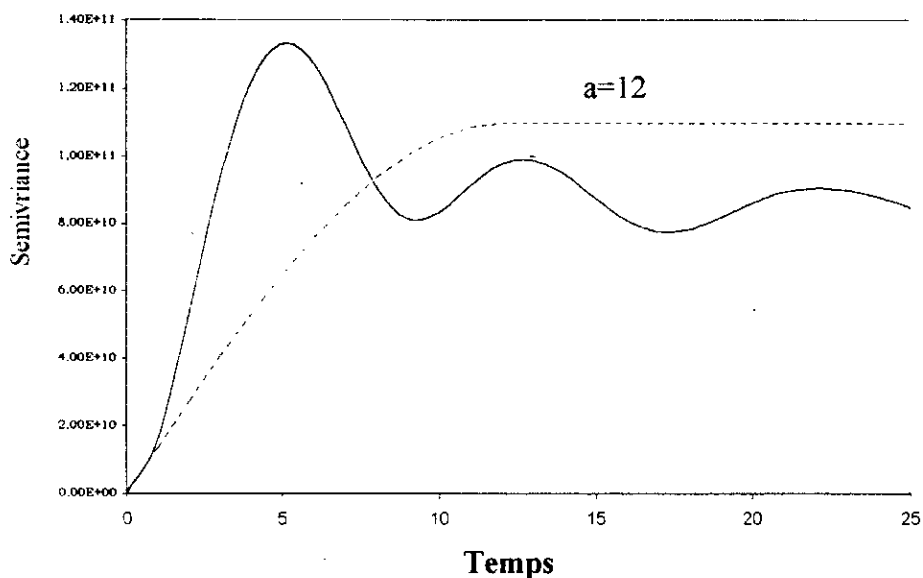
$$\gamma(h) = \frac{1}{2(n-h)} \sum_{i=0}^{n-h} [S(i) - S(i+h)]^2$$

(IV.2) APPLICATION

IV.2.1 choix du nombre de pole dans la méthode kriging :

la figure(IV.1) montre les semivariogrammes sphérique (a=12) et expérimental pour la méthode kriging LPC du signal voisé.

La figure (IV.2) montre les 2 semivariogrammes sphérique (a=12) et expérimental pour la méthode kriging LPC du signal non voisé.



FIGURE(IV.1) semivariogramme expérimental et théorique pour un signal voisé.

$$\begin{bmatrix} \gamma_{r-1,r-1} & \gamma_{r-1,r-2} & \dots & \gamma_{r-1,r-p} & 1 \\ \gamma_{r-2,r-1} & \gamma_{r-2,r-2} & \dots & \gamma_{r-2,r-p} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{r-p,r-1} & \gamma_{r-p,r-2} & \dots & \gamma_{r-p,r-p} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{r,r-1} \\ \gamma_{r,r-2} \\ \dots \\ \gamma_{r,r-p} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{IV.4}$$

néanmoins, les équations kriging ont été obtenues avec une condition non biaisée ($\sum_j a_j = 1$) qui est indésirable dans la prédiction linéaire car elle entraîne l'augmentation de la variance de l'erreur de prédiction. L'avantage de l'utilisation de la procédure d'estimation kriging est que la condition non biaisée ($\sum_j a_j = 1$), sera convertie en une condition biaisée en posant :

$$(\sum_j a_j = \delta)$$

et puisque les échantillons sont prélevés avec la même distance(un pas constant) :

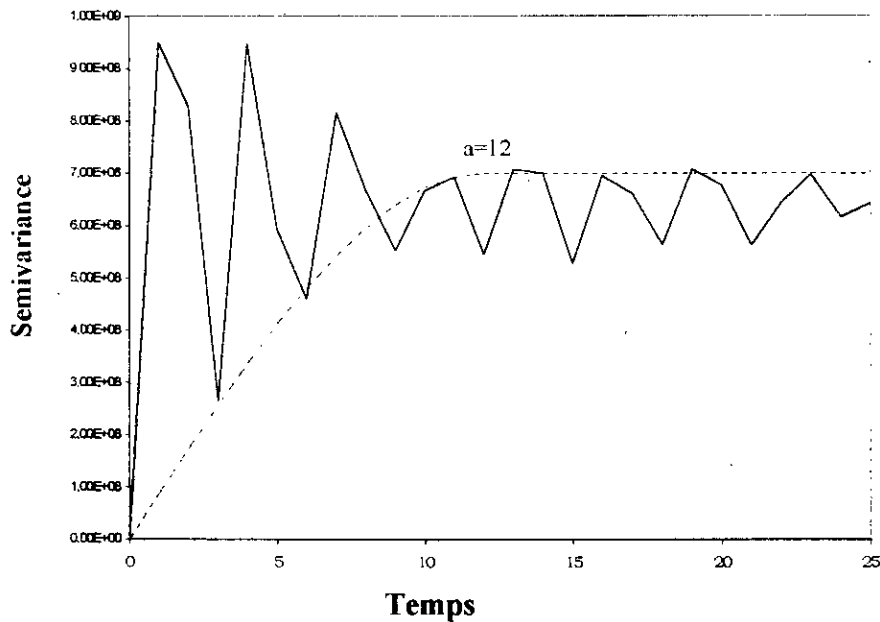
$$\gamma_{ij} = \gamma(|i-j|)$$

de cette façon ,on abouti au système d'équationsfinal (sous forme matricielle) suivant :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{(0)} & \gamma_{(1)} & \dots & \gamma_{(p-1)} & 1 \\ \gamma_{(1)} & \gamma_{(0)} & \dots & \gamma_{(p-2)} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{(p-1)} & \gamma_{(p-2)} & \dots & \gamma_{(0)} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{(1)} \\ \gamma_{(2)} \\ \dots \\ \gamma_{(p)} \\ \delta \end{bmatrix} \tag{IV5}$$

ou la variance de l'erreur est :

$$S_e^2 = a_1 \gamma(1) + a_2 \gamma(2) + a_3 \gamma(3) + \dots + a_p \gamma(p) \tag{IV.6}$$



FIGURE(IV.2) semivariogramme expérimental et théorique pour un signal non voisé.

Remarque :

L'utilisation d'un semivariogramme sphérique (théorique) ne donne pas des résultats satisfaisantes dans la modulation du spectre de la parole, il est donc indispensable d'utiliser un semivariogramme expérimental .

Néanmoins, le semivariogramme théorique donne la méthode pour la détermination du nombre de pôles P utilisés dans la méthode kriging LPC.

Ceci est montré dans la figure (IV.1) et (IV.2) où le modèle théorique peut être assimilé à un semivariogramme expérimental avec $a=12$.

De cette façon, un nombre de pôles favorables sera considéré égal au rang du semivariogramme sphérique , c'est à dire on prend $\{ P=a \}$.

IV.2 comparaison entre la méthode d'autocorrelation et la méthode kriging :

(2.1) pour un signal voisé :

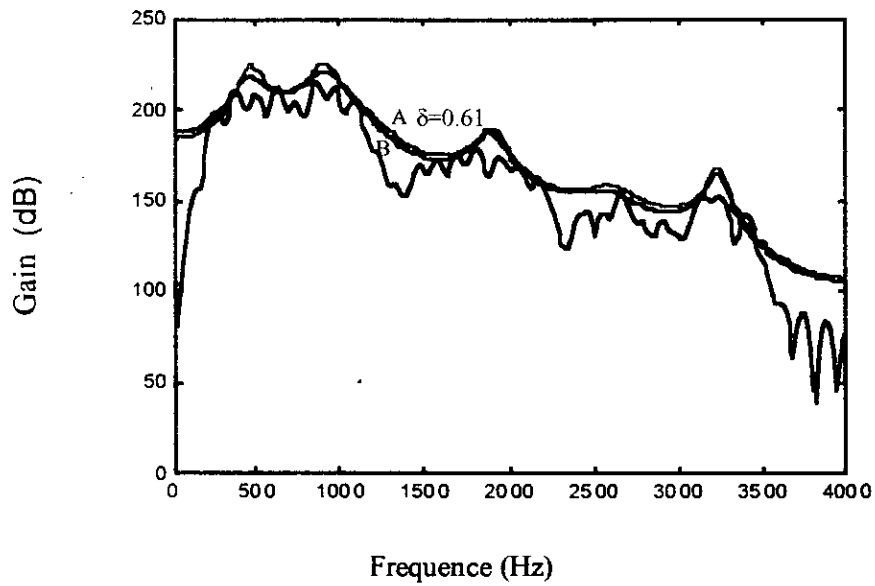
La figure (IV.3) montre le spectre original (ligne continue) obtenu par le calcul de la transformée de fourier rapide (FFT) à 512 points du signal original, la courbe (B) représente l'autocorrelation LPC(avec un nombre de pôle $p=12$) du spectre du signal, la courbe (A) est celle du spectre kriging ($p=12$ pôles) avec la valeur biaisé $\delta= 0.613$.

La figure (IV.4) montre le spectre original (ligne continue) obtenue par le calcul de la transformé de fournir rapide (FFT) à 512 points du signal original, la courbe (B) représente l'autocorrelation LPC(avec un nombre de pôle $p=10$) du spectre du signal, la courbe (A) est celle du spectre kriging ($p=10$ pôle) avec la valeur biaisé $\delta= 0.613$.

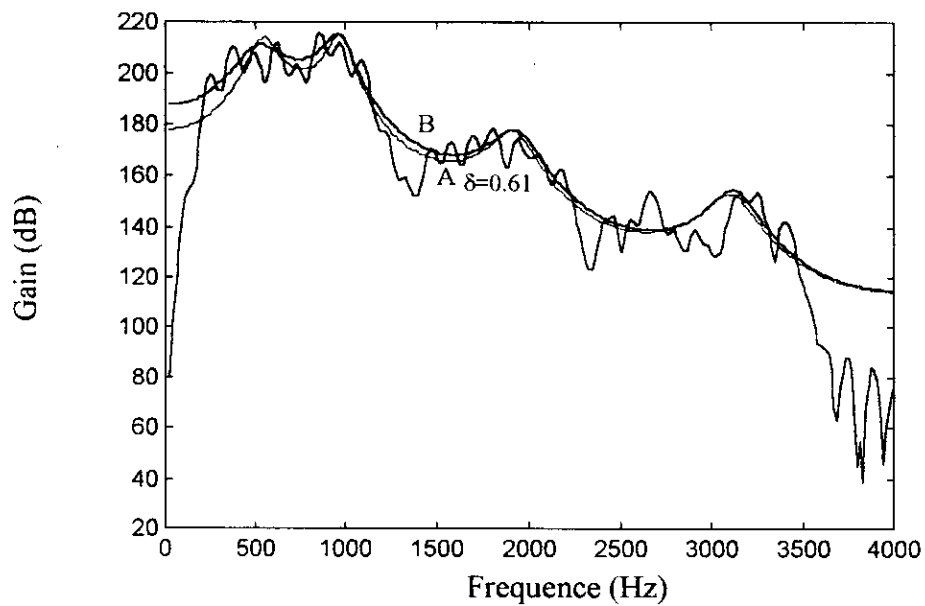
(2.2) pour un signal non voisé :

La figure (IV.5) montre le spectre original (ligne continue) obtenue par le calcul de la transformé de fournir rapide (FFT) à 512 points du signal original, la courbe (B) représente l'autocorrelation LPC(avec un nombre de pôle $p=12$) du spectre du signal, la courbe (A) est celle du spectre kriging ($p=12$ pôle) avec la valeur biaisé $\delta= 0.75$.

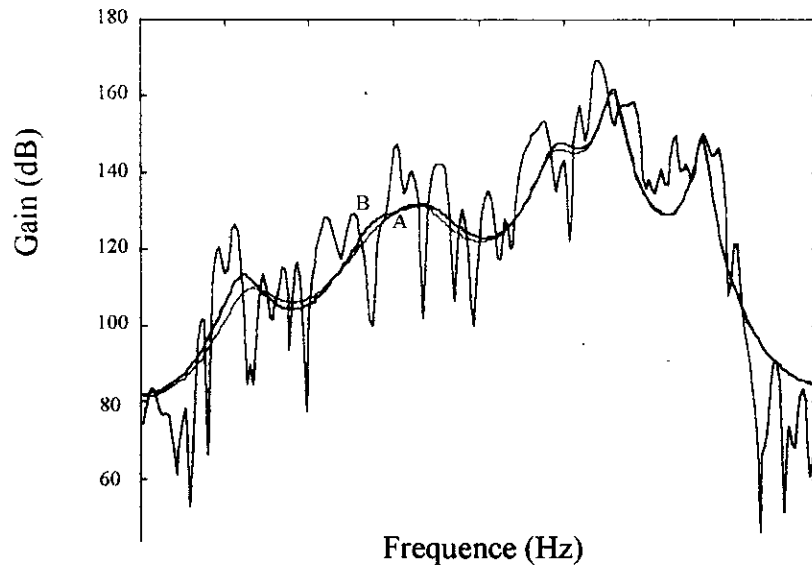
La figure (IV.6) montre le spectre original (ligne continue) obtenue par le calcul de la transformé de fournir rapide (FFT) à 512 points du signal original, la courbe (B) représente l'autocorrelation LPC(avec un nombre de pôle $p=10$) du spectre du signal, la courbe (A) est celle du spectre kriging ($p=10$ pôle) avec la valeur biaisé $\delta= 0.75$.



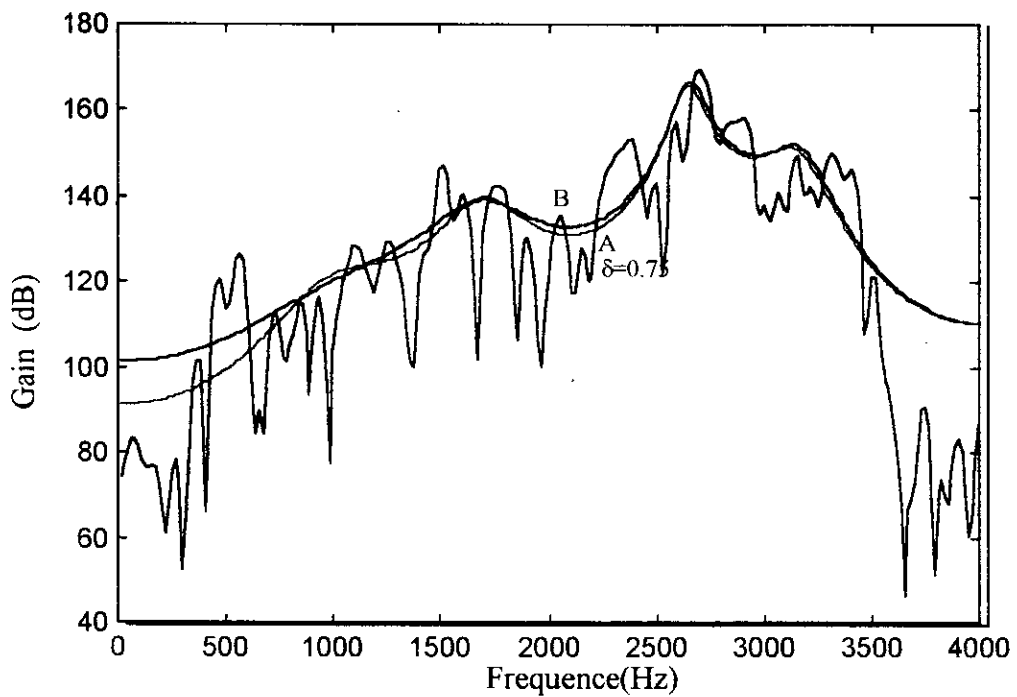
FIGURE(IV.3) (A) LPC kriging ($p=12$ pôles) , (B) spectre d'autocorrelation Ainsi que la (FFT) du signal voisé.



FIGURE(IV.4) (A) LPC kriging ($P=10$ pôles) , (B) spectre d'autocorrelation, Ainsi que la (FFT) du signal voisé.



FIGURE(IV.5) (A) LPC kriging (P=12 pôles) , (B) spectre d'autocorrelation . Ainsi que la (FFT) du signal non voisé.



FIGURE(IV.6) (A) LPC kriging (10 pôles) , (B) spectre d'autocorrelation, ainsi que la (FFT) du signal non voisé.

Remarque :

- 1- Les résultats obtenus à partir des figures (IV.3) et (IV.5) montrent que les courbes représentant les spectres du modèle kriging LPC avec le semivariogramme obtenu à partir d'un variogramme expérimental sont plus favorables que les courbes représentant les spectres de la méthode d'autocorrelation .
- 2- Les figures (IV.4) et (IV.6) montrent que les modèles des 12 pôles des méthodes d'autocorrelation et kriging sont meilleur que celle des deux modèles à $p=10$ pôles des 2 modèles respectivement.

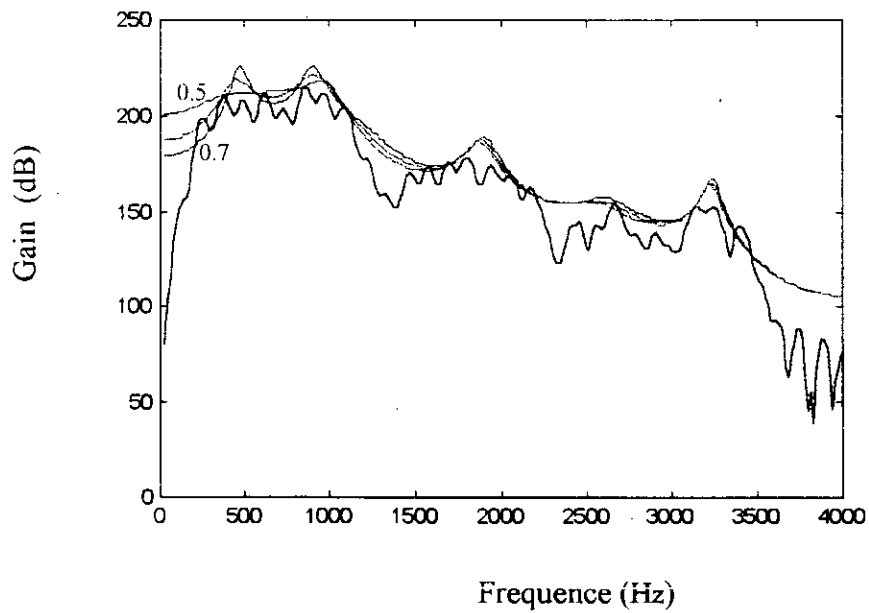
3- VI.II.3 influence de la valeur biaisée δ :

La figure(IV.7) montre 3 spectres kriging avec différentes valeurs de δ ($p=12$), la courbe au milieu (ligne continue) représente le spectre du signal original même que celui dans la figure (IV.3)

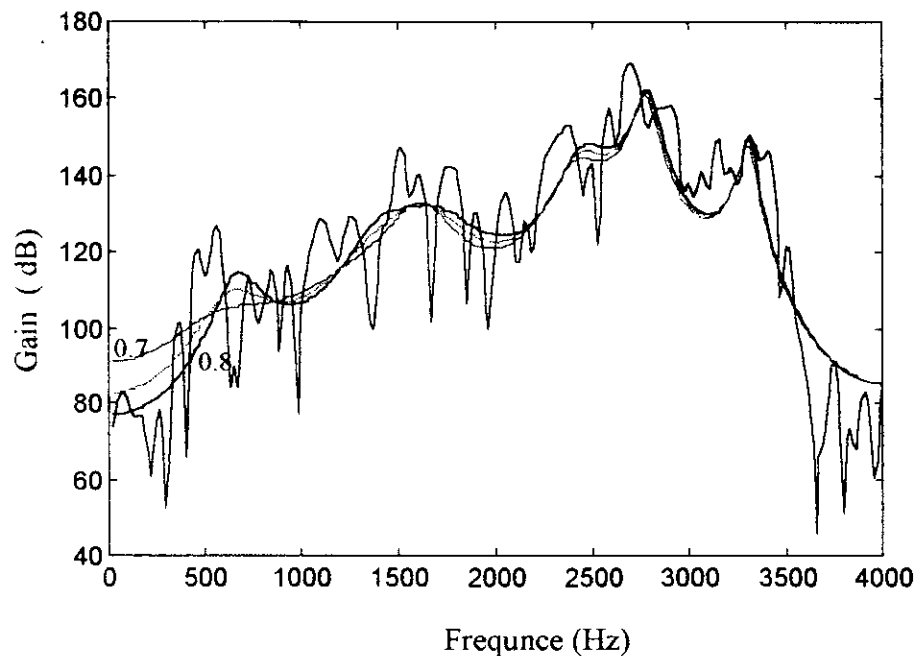
La figure(IV.8) montre 3 spectres kriging avec différentes valeurs de δ ($p=12$), la courbe au milieu (ligne continue) représente le spectre du signal original même que celui dans la figure (IV.5)

Remarque :

Les figures (IV.7) et (IV.8) montrent que la méthode kriging LPC peut offrir une bonne flexibilité en modulant le spectre de la méthode kriging par la variation des valeurs biaisé δ . De cette façon , on peut choisir le spectre le plus adjacent au spectre du signal original.



FIGURE(IV.7) spectre de PC kriging (P=12 pôles) avec différentes valeurs de δ , ainsi que la (FFT) du signal voisé.



FIGURE(IV.8) spectre de PC kriging (P=12 pôles) avec différentes valeurs de δ , ainsi que la (FFT) du signal non voisé.

Conclusion :

Dans l'analyse de la parole par la prédiction linéaire, La nouvelle méthode géostatistique (kriging) permet d'offrir les avantages suivantes :

1_ la méthode kriging LPC utilisant un semivariogramme expérimental, permet une bonne estimation des paramètres $\{a_i\}$ de la parole.

2_ la méthode kriging LPC peut offrir une bonne flexibilité en modulant le spectre kriging par la variation des valeurs biaisée δ .

3_ la méthode kriging LPC donne une bonne estimation du nombre de pôles P utilisé dans l'analyse LPC , ceci par la comparaison entre le semivariogramme théorique (sphérique de rang a) et le semivariogramme expérimental obtenu, tel que $P=a$.

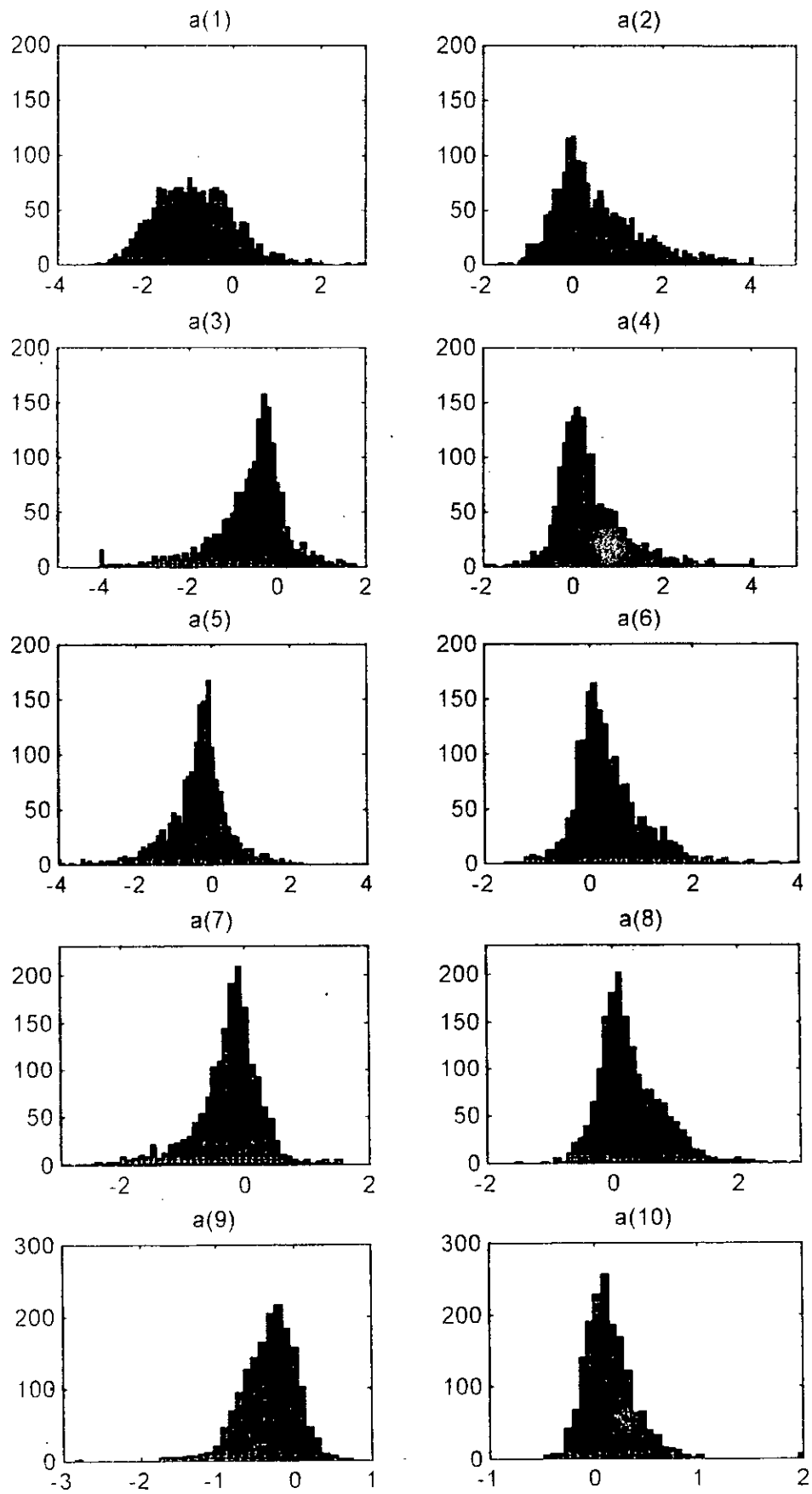


Figure 4.10 histogramme des paramètres $a(i)$ obtenue par la méthode Kriging

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE :

Le travail effectué dans cette mémoire concerne l'analyse de la parole par la méthode des géostatistiques (kriging LPC).

La première partie présente des généralités sur le signal vocal , ainsi que des théories de base des différentes méthodes LPC (autocorrelation, autocovariance, kriging), avec un exemple d'application concernant la méthode des géostatistiques(kriging).

Nous avons réalisé, dans la partie calcul, des programmes permettant le calcul de :

La transformée de fourrier rapide (à 512 points) du signal original de la parole, les paramètres de la parole $\{ a_i \}$ de la méthode d'autocorrelation, les paramètres $\{ a_i \}$ de la méthode de kriging, du semivariogram expérimental de la méthode kriging pour différentes valeurs de la distance h .

Les résultats obtenus permettent de faire les constatations suivantes :

1_ l'utilisation d'un semivariogram théorique (sphérique) dans la méthode de kriging ne permet pas une bonne estimation des paramètres $\{ a_i \}$ de la parole .

2_ la méthode géostatistiques permet une bonne estimation du nombre de pôles P utiliser dans la méthode kriging LPC, et cela par une comparaison entre le semivariogram théorique et le semivariogram expérimental..

3_ la méthode géostatistique (kriging) utilisant un semivariogram expérimental permet une meilleure optimisation des paramètres $\{a_i\}$ de la parole.

4_ la méthode géostatistique offre plus de flexibilité en introduisant différentes valeurs biaisées δ . Donc permet une bonne approximation du spectre de la parole.

5_ la condition non biaisée $\sum a_i = 1$ engendre une grande erreur de variance, donc l'introduction de la condition biaisée $\sum a_i = \delta$ est nécessaire pour une meilleure estimation des paramètres $\{a_i\}$ de la parole.

6_ quand le nombre de pole P augmente on a une meilleure estimation des paramètres $\{a_i\}$ de la parole, de cette façon on a donc :

$$P \uparrow \rightarrow \hat{s}(n) \approx s(n).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. Pham , "Application of geostatistics to linear predictive coding of speech University of Canberra, 1998
- [2] J. Makhoul, « Linear prediction : a tutorial review », Proceeding of the IEEE, Vol. 63(4), 561-580, 1975.
- [3] L.R. Rabiner, L.R. and R.W. Schafer, Digital processing of speech Signals, Prentice Hall, New Jersey , 1978.
- [4] L.R. Rabiner and B.H. Juang, Fundamentals of Speech recognition. Prentice Hall, New Jersey, 1990.
- [5] J.G. Proakis and D.G. Mazoulakis, Digital Signal Processing. Prentice Hall, New Jersey, 1992.
- [6] G. Matheon, « Principal's of geostatistics », Economic Geology, Vol. 58, 1246-1266, 1963.
- [7] J.C. Davids, Statistics and data Analysis in geology. John Wiley & Sons, Singapore . 1986.
- [8] I. Clark, Practical geostatistics. Applied Science, London. 1979.
- [9] M. David, Geostatistical Ore Reserve Estimation. Elsevier, Amsterdam, 1977.
- [10] A.G. Journel and Ch.J. Huijbregts, Mining geostatistics. Academic Press, London . 1981.
- [11] H. Akaike, « Power spectrum estimation through autoregressive model fitting » Ann. Inst. Statist. Math, Vol. 21. 1970.
- [12] R. Boite et M. Kunt . " Traitement de la parole". Presses Polytechnique Romandes. 1987.
- [13] Calloipe. " Automatique de la parole". 1988.
- [14] Z. Siad et R. Hamdi. " Etude de programme pour la reconstitution de la parole par prédiction linéaire". PFE (ENP).

- [15] B.S. Atal and M. R Schroeder, « Adaptive predictive coding of speech signals » Bell Syst. Tech. J. Vol 49. 1970.
- [16] B.S. Atal and S. L. Hanauer, « Speech analysis and synthesis by linear prediction of speech wave », J. Acoust. Soc. Amer. 1971.
- [17] T.W. Anderson , The Statistical Analysis of Time series. New York. Wiley. 1971.

ANNEXE

ANNEXE

RAPPEL SUR LES THEORIES DU TRAITEMENT DE SIGNAL

1- Introduction

Les signaux primaires sont pratiquement toujours de type analogique (amplitude et temps continus).

Un ordinateur ou tout autre système électronique numérique, est un dispositif qui traite des données c'est à dire des suites de nombres, il y a appartement incompatibilité, si l'on veut traiter un signal par voie numérique, il faut le représenter au préalable par une suite de valeurs ponctuelles prélevées régulièrement.

Généralement, ces signaux doivent être traités soit pour en extraire de l'information, soit pour les rendre posteurs d'information, ces traitements sont effectués à l'aide de systèmes que l'on appelle systèmes de traitements de signaux, un tel système agit sur un signal d'entrée et produit, à sa sortie, un signal qui est sous forme plus appropriée pour l'utilisation envisagée.

On peut classer les systèmes de traitement de la même manière que les signaux, les systèmes analogiques sont des systèmes qui opèrent sur des signaux analogiques et produisent des signaux analogiques, les systèmes échantillonnés opèrent sur des signaux échantillonnées et produisent des signaux échantillonnés, les systèmes numériques sont des systèmes qui agissent sur des signaux numériques et produisent Des signaux numériques.

2- L'ECHANTILLONNAGE

2-1- Définition [F.COULON]

Si l'on veut traiter un signal par voie numérique, il faut le représenter au préalable par une suite de valeurs ponctuelles prélevées régulièrement (Fig I-1) ou irrégulièrement, un tel prélèvement est appelé échantillonnage.

On parle d'échantillonnage régulier ou périodique lorsque les prélèvements sont effectués selon un rythme régulier, l'intervalle entre deux échantillons successifs appelé pas d'échantillonnages (dans ce cas constant), l'échantillonnage irrégulier ou à pas variable est rarement utilisé.

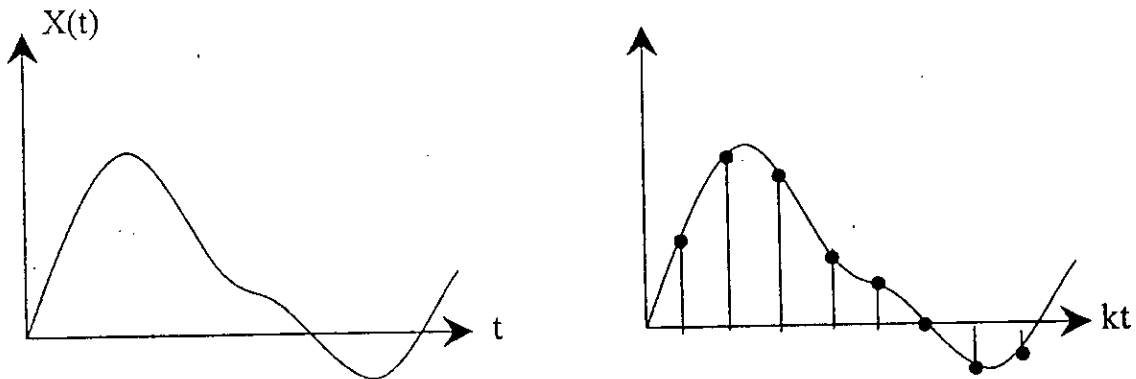


Fig (I-1) : échantillonnage d'un signal analogique

2-2- Opérateur général d'échantillonnage

Le modèle général (Fig I-2) d'un échantillonneur est celui d'un opérateur paramétrique comprenant un multiplicateur.

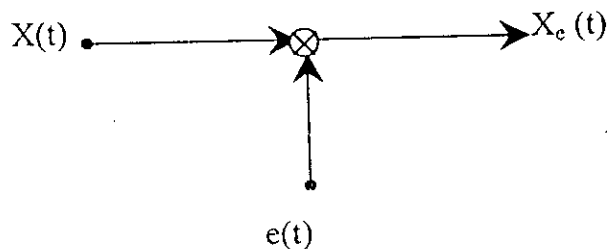


Fig (I-2) : opérateur général de l'échantillonnage

Le signal $x(t)$ est multiplié par la fonction d'échantillonnage $e(t)$.

Le signal échantillonné est dénoté $x_e(t)$, il est lié à $x(t)$ et $e(t)$ par l'équation :

$$x_e(t) = x(t)e(t) \dots \dots \dots (I-1)$$

Dans le cas de signaux déterministes, la forme générale de la transformation de Fourier du signal échantillonné devient :

$$X_e(W) = X(W) * E(W) \dots \dots \dots (I-2)$$

Avec $X(W) = TF[x(t)]$, $E(W) = TF[e(t)]$, et $X_e(W) = TF[x_e(t)]$

Si $x(t)$ est un signal aléatoire statistiquement indépendant du signal déterministe d'échantillonnage $e(t)$, on obtient

$$R_{x_e}(\epsilon) = [R_x(\epsilon) \cdot \xi_e(\epsilon)] \dots \dots \dots (I-3)$$

Avec $R_{x_e}(\epsilon)$: la fonction d'autocorrelation du signal $x(t)$

$$R_x(\epsilon) = E[X(t_1) X(t_2)] = \iint_{R^2} x_1 x_2 P_2(x_1, x_2, t_1, t_2) \dots \dots \dots (I-4)$$

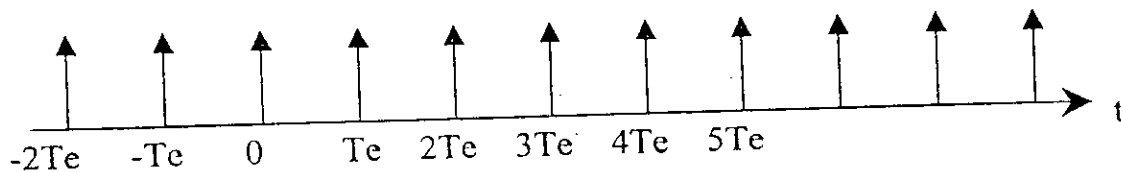
$R_{x_e}(\epsilon)$: la fonction d'autocorrelation du signal $x_e(t)$

$\xi_e(\epsilon)$: la fonction d'autocorrelation du signal $e(t)$

(2.3) L'ECHANTILLONNAGE IDEALISE

Dans le cas idéal la fonction d'échantillonnage est :

$$E(t) = \delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$



Fig(I-3) : la fonction d'échantillonnage idéal

$$\text{avec : } \delta(t - kT_e) = \begin{cases} \infty & \text{pour } t = kT_e \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Et T_e est la période d'échantillonnage.

On a :

$$\text{TF}[\delta_{T_e}(t)] = T_e^{-1} \delta_{1/T_e}(\omega_e/2\pi) = \omega_e \delta_{\omega_e}(\omega) \dots\dots\dots (I-7)$$

$$\varphi_{\delta_{T_e}}(\tau) = \frac{1}{T_e} \delta_{T_e}(\tau) = \frac{\omega}{2\pi} \delta_{T_e} \dots\dots\dots (I-8)$$

Calculant la transformation de fourrier de l'expression précédente :

$$\Phi_{x_e}(\omega) = \Phi_x(\omega) \omega_e^2 \delta_{\omega_e}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_e^2 \Phi_x(\omega - n\omega_e) \dots\dots\dots (I-9)$$

$$\Phi_{x_e}(\omega) = \omega_e^2 \text{rep}_{\omega_e} [\Phi_x(\omega)] \dots\dots\dots (I-10)$$

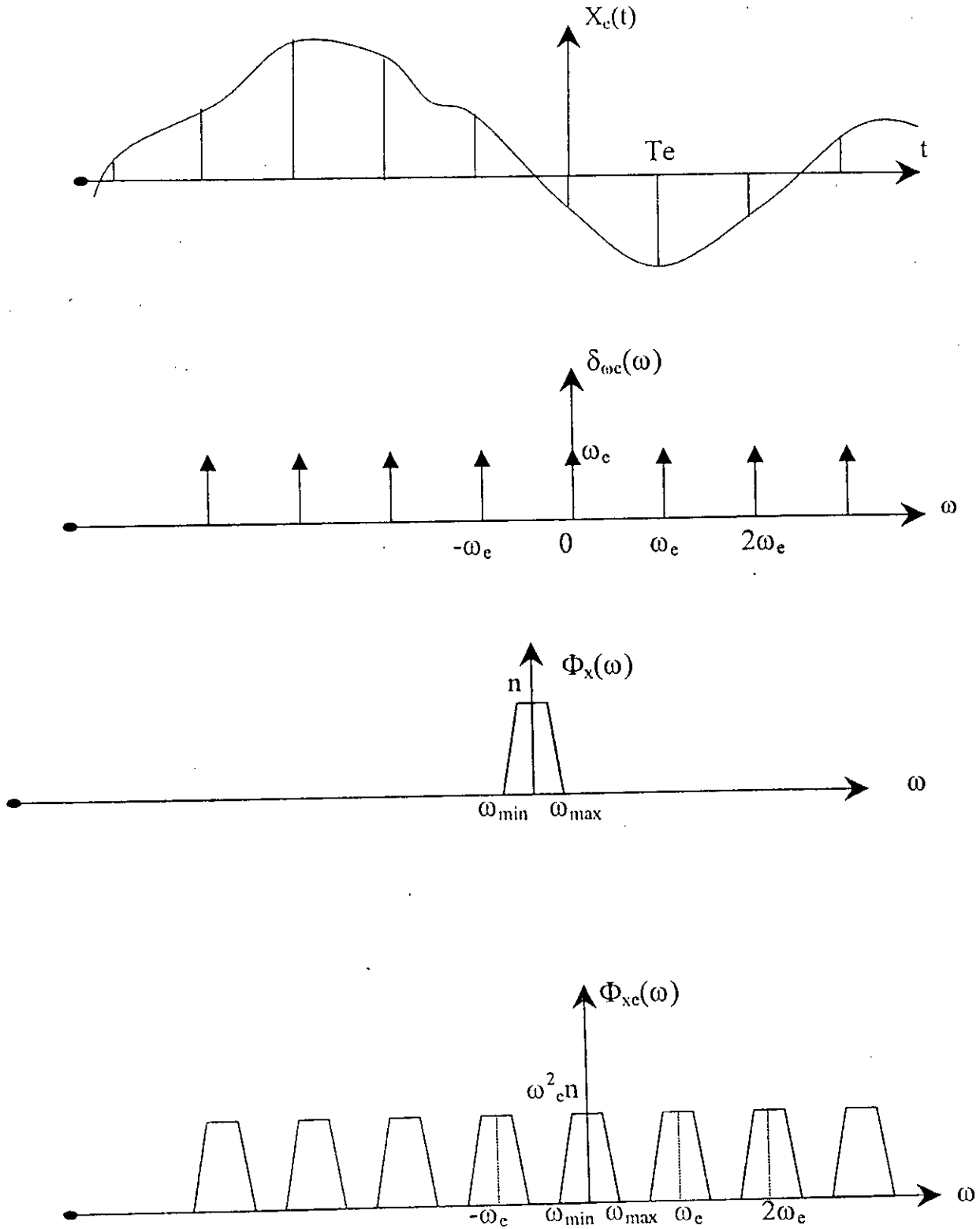
Cette fonction qui correspond à la densité spectrale du signal analogique (Fig I-4)

avec ω_e : la fréquence d'échantillonnage .

ω_{\max} : la fréquence maximale du spectre du signal analogique.

$\Phi_{x_e}(\omega)$, $\Phi_x(\omega)$, $\delta_{\omega_e}(\omega)$: les spectre respectives de signal échantillonné, analogique, la fonction d'échantillonnage.

Annexe : Rappel sur les théories du traitement de signal



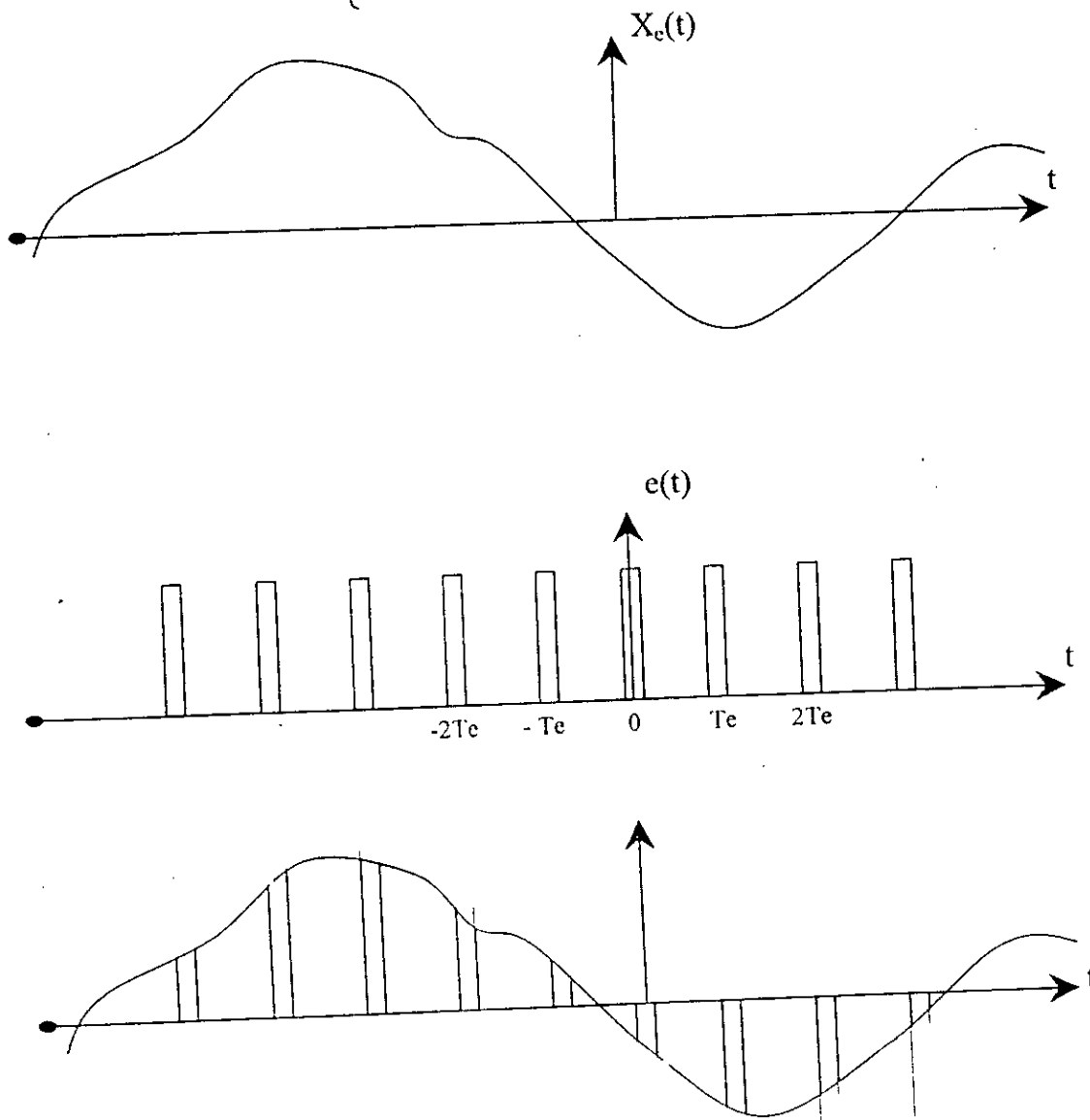
Fig(I-4) : Echantillonnage idéalisé

(2.4) Echantillonnage pratique

Dans la pratique la fonction d'échantillonnage est un train d'impulsion rectangulaire de largeur Φ

$$e(t) = \text{rep} \left\{ \text{rect} \left(\frac{t}{\theta} \right) \right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{t - kT_c}{\theta} \right) \dots \dots \dots (I-11)$$

$$\text{rect} \left(\frac{t}{\theta} \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{\theta}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (I-12)$$



Fig(I-5) : Echantillonnage pratique

(2.5) Théorème d'échantillonnage pour les signaux à spectre passe-bas

Chaque spectre de signal échantillonné est une fonction de la répétition périodique, de période égale à la cadence d'échantillonnage $\omega_e = 2\pi / T_e$ du spectre original du signal analogique, selon le support fréquentiel de celui-ci, la représentation spectrale est à support disjoint (Fig I-4), ou contraire, se recouvre partiellement (Fig I-6), la présence d'un tel recouvrement spectral (on dit aussi effet de repliement), entraîne la non réversibilité transformation.

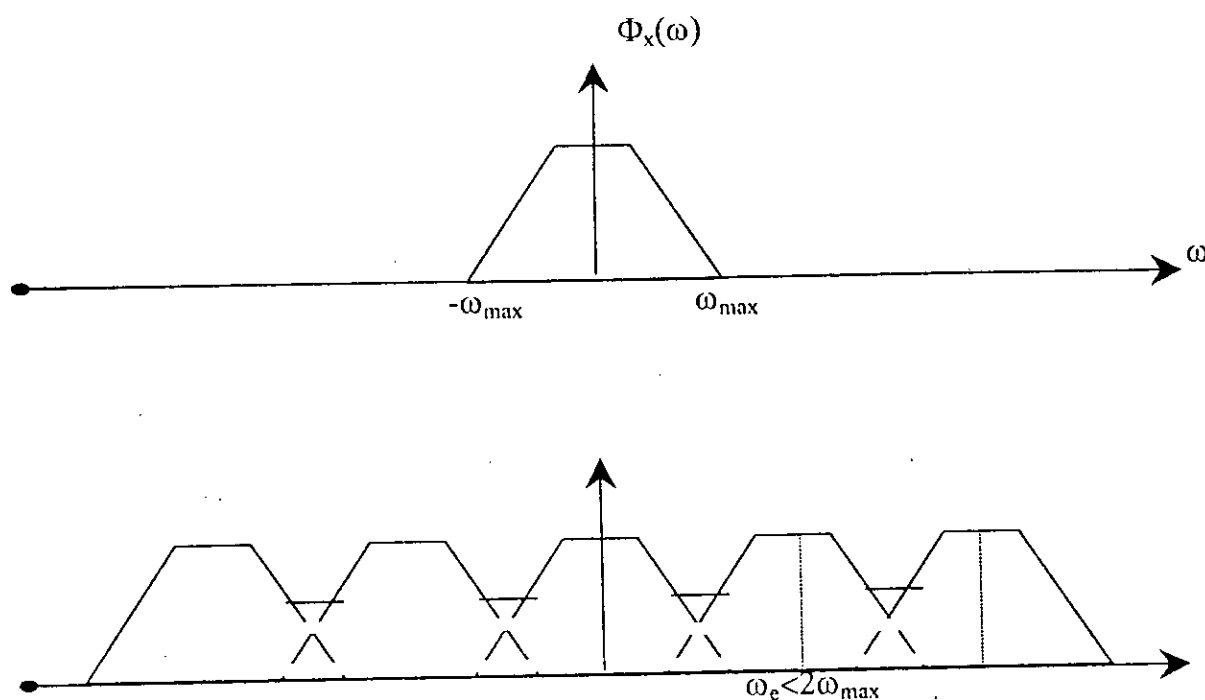


Fig (I-6) : recouvrement spectral

Pour palier à cet inconvénient Schannon proposa un théorème appelé le théorème d'échantillonnage.

(2.6) THEOREME DE SCHANNON : [F-Coulon]

Un signal analogique $x(t)$ ayant un spectre de type passe-bas s'étendant jusqu'à la fréquence limitée W_{\max} est entièrement décrit par la suite complète de ses valeurs instantanées $x(t_k)$ prélevées à l'intervalles réguliers de durée T_E inférieure ou égale à

$$1/2f_{\max}, \text{ avec } f_{\max} = W_{\max} / 2\pi \quad (W_e \geq 2 W_{\max}) \text{ Fig (I-13)}$$

Commentaire

Si $W_{\max} < W_E/2$ alors il n'y a pas de recouvrement spectral, des différentes transposées du spectre de signal $x(t_e)$, par conséquent, si on filtre le spectre du signal échantillonné par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure ($W_E/2$), on garde que la bande centrale qui représente le spectre du signal original $x(t)$, a un facteur multiplicatif.

Remarque

L'échantillonnage, même idéal de tout signal dont le spectre n'est pas strictement à bande limitée implique l'apparition du phénomène de recouvrement spectral et donc le non réversibilité pour réduire le risque de recouvrement spectral, on place en pratique un filtre adéquat en amont de l'échantillonneur Fig (I-7)

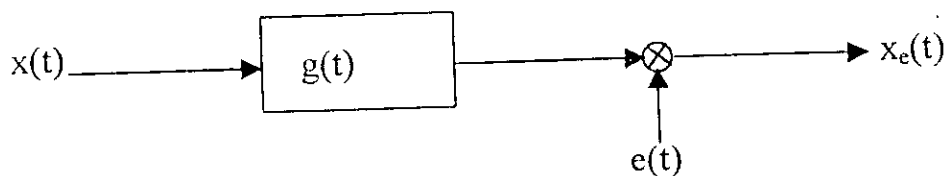


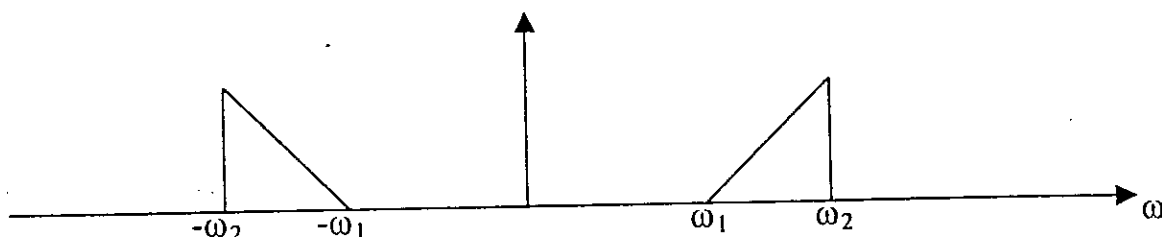
Fig (I-7) : Echantillonnage avec un filtre de garde

Le filtre de garde antirepliment (aussi appelé filtre de garde), parfait serait un filtre passe bas, idéal de bande passante $W_E/2$

$$\text{avec } g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{\omega}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1-14)$$

(2.7) THEOREME D'ECHANTILLONNAGE POUR SIGNAUX DE SPECTRE A BANDES TRANSPOSEES [SPATRU]

Soit un signal passe bande dans la bande $[W_1 , W_2]$, Fig (I-8)



Fig(I-8) : signal à bande transposé

On peut appliquer de théorème d'échantillonnage $W_E \geq 2W_{\max}$ d'où $W_E \geq 2W_2$ qui risque d'engendrer le phénomène de recouvrement spectral, cette condition est satisfaite pour une cadence minimale, donc pour reconstituer un signal $x(t)$ à partir du signal échantillonné, il faut qu'aucun des bandes périodiques apparaissent après l'échantillonnage à partir de la bande supérieure ne recouvre même partiellement un des deux bandes originales Fig (I-9)

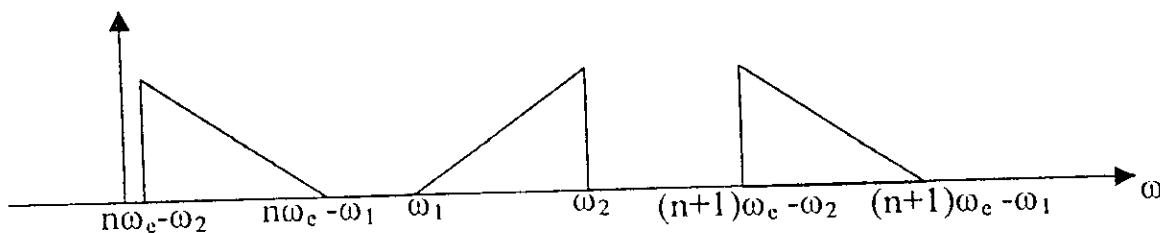


Fig (I-9) : bande superieure d'un spectre

D'où le système d'équation :

$$\begin{cases} nW_E - W_1 \leq W_1 \\ (n+1)W_E - W_2 \geq W_2 \end{cases} \quad (I-15)$$

à partir de ces équations on peut tirer :

$$W_E > 2(W_2 - W_1) \quad (I-16)$$

$$\text{et } 2W_E / (n+1) < W_2 < 2W_1 / n \quad (I-17)$$

pour que n vérifie la condition (I-17) il faut que :

$$n \leq W_1 / (W_2 - W_1) \quad (I-18)$$

Si on pose $m=n+1$ la cadence minimale d'échantillonnage est $W \geq 2W/m$ avec

$$m \leq W_2 / (W_2 - W_1) \quad (I-19)$$

3. RECONSTITUTION DU SIGNAL ECHANTILLONNE

Théoriquement, la plus simple méthode de reconstitution du signal échantillonné est le filtrage avec un filtre passe-bas ayant la fréquence de coupure

$$W_0 = 2 \pi f_{\max} = W_{\max}$$

En pratique, la construction du filtre pose des problèmes difficiles, sauf au cas où on réduirait considérablement la période d'échantillonnage T_e cependant cette solution n'est pas convenable.

(3.1) Interpolation d'ordre zéro [SPATARU]

C'est la plus simple méthode d'interpolation, le signal reconstitué est en forme d'escalier, la valeur d'un échantillon étant maintenue jusqu'à l'échantillon suivant (Fig I-10)

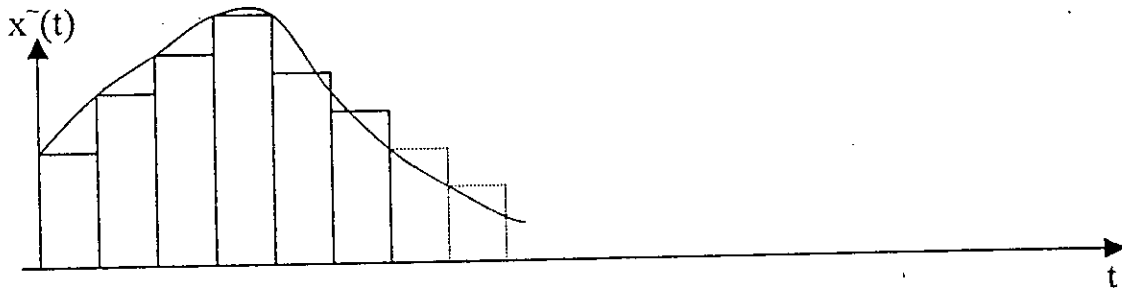


Fig (I-10) : Interpolateur d'ordre zéro

L'analyse des distorsions introduites par cette méthode simple de reconstitution est basée sur l'observation que l'opération de maintien de la valeur d'un échantillon peut être exprimée du point de vue mathématique comme le filtrage des échantillons (impulsions delta $\delta(k)$) par un filtre moyenneur.

La réponse impulsionnelle du filtre moyenneur est représentée dans la Fig (I-11), elle est donnée par

$$H(t) = 1/T_e \text{ si } 0 \leq t \leq T_e \text{ et } 0 \text{ en dehors de cet intervalle} \quad (I-20)$$

La fonction de transfert après la transformée de Fourier

$$H(w) = e^{-jW T_e / 2} \text{ sinc}(W T_e / 2) \quad (I-21)$$

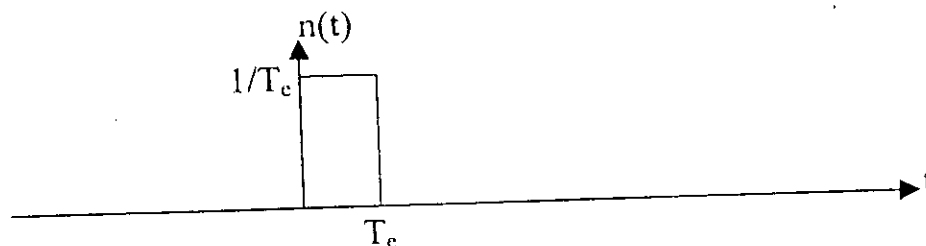


Fig (I-11) : Réponse impulsionnelle du filtre moyenneur

Après le filtrage du signal échantillonné $x_e(t)$ par un tel filtre, on obtient :

$$\phi_x'(w) = |H(w)|^2 \phi_{x_e}(w) \quad (I-22)$$

Dans le cas d'un échantillonnage idéal on obtient

$$\phi_x'(w) = \text{sinc}^2(W T_c / 2) \sum_{-\infty}^{+\infty} \phi_{x_e}(w - n\omega_c) \quad (I-23)$$

La densité spectrale de puissance $\phi_x'(w)$ approximant $\phi_x(w)$

Déduit à partir de la Fig (I-12)

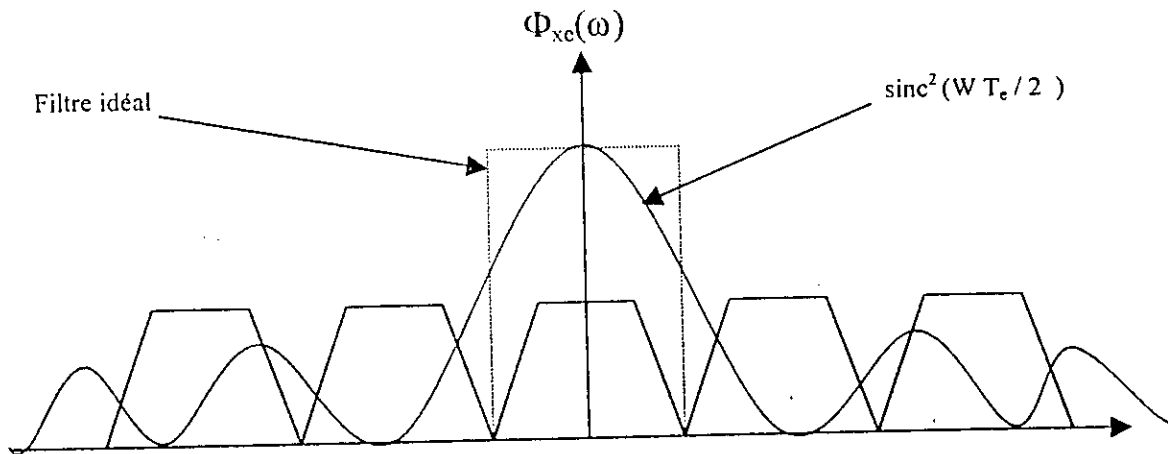


Fig (I-12) : Densité spectrale de puissance du signal interpolé

La relation (I-23) montre qu'il y a des distorsions introduites

(3.2) Interpolation polynomiale [SPATRU]

Méthode Matricielle : Soit $x(t)$ un signal aléatoire et $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n)$: $n-1$ échantillons de ce signal, un seul polynôme de degré n peut passer par ces points, afin de démontrer cette affirmation, on pose

$$a(t) = \sum_{k=0}^N a_k t^k \quad (I-24)$$

Et on choisit les coefficients tels que la relation :

$$a(t_m) = x(t_m) = \sum_{k=0}^N a_k t_m^k \quad (I-25)$$

Soit satisfaite sous forme Matricielle

$$\begin{bmatrix} x(t_0) \\ x(t_1) \\ x(t_2) \\ \vdots \\ x(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \dots & t_0^N \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & t_N & t_N^2 & \dots & t_N^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \dots\dots\dots(I-26)$$

ou

$$X = T_N A \quad (I-27)$$

La matrice T_N est la matrice de VANDERMONDE et on peut montrer que

$$\text{Det} T_N = \prod_{i>j} (t_i - t_j) \quad (I-28)$$

Les moments d'échantillonnage T_k étant distincts, $\text{det} T_N \neq 0$ et donc la matrice T_N est inversable, ce qui permet d'écrire

$$A = T_N^{-1} X \quad (I-29)$$

Si les moments d'échantillonnage sont suffisamment rapprochés, $a(t)$ est approximation satisfaisante du signal $x(t)$ dans l'intervalle $(t_0 - d, t_0 + d)$, où $d > 0$

L'approximation satisfaisante de $x(t)$ par $a(t)$ pour $t \in (t_0, t_N)$ s'appelle interpolation entre échantillons.

L'approximation de $x(t)$ par $a(t)$ pour $t \notin (t_0, t_N)$ s'appelle extrapolation, l'erreur d'extrapolation $x(t) - a(t)$ augmente au fur et à mesure que t s'éloigne de l'intervalle (t_0, t_N) , afin de réduire le temps de calcul, on traite successivement des blocs de $m+1 < N$ échantillons, le premier échantillon de chaque bloc est égal au dernier échantillon du bloc précédent, le retard de m échantillons qui apparaît ainsi n'est généralement pas gênant.

(3.3) Formule d'interpolation de lagrange [SPATRU]

Soit $a(t)$ un polynôme de degré m qui passe pour $m+1$ échantillons $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_m)$, les coefficients de $a(t)$ peuvent être calculés par la relation $N = m$, mais cela implique l'inversion de la matrice T_m le polynôme $a(t)$ peut être calculé sans l'inversion de matrice en utilisant la formule de l'interpolation de lagrange.

Soit l'ensemble de $m+1$ polynôme de degré m

$$q_i(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m (t - t_k) / (t_i - t_k) \dots\dots \dots \dots (I-30)$$

Appelés polynôme de lagrange, caractérisés par la propriété que pour quelque soit r entier $0 \leq r \leq m$,

$$q_i(t_r) = \delta_{ri} = \begin{cases} 0 & r \neq i \\ 1 & r = i \end{cases} \quad (I-31)$$

soit le polynôme $b(t)$ définit par la relation

$$b(t) = \sum_{i=0}^m x(t_i) q_i(t) \quad (I-32)$$

sa valeur au moment t_r ($r=0, 1, \dots, m$) est

$$b(t) = \sum_{i=0}^m \delta_{ri} x(t_i) = x(t_r) = a(t_r) \quad (I-33)$$

Les polynômes $b(t)$ et $a(t)$ ont le même degré m et ils passent par les mêmes $m+1$ points, donc ils sont égaux,

$$a(t) = \sum_{i=0}^m x(t_i) q_i(t) \quad (I-34)$$

C'est la formule d'interpolation de lagrange, qui est valable aussi pour l'échantillonnage non uniforme