

11/94

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التربية الوطنية  
MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Electronique

## *Projet de Fin d'Etudes*

### *SUJET*

---

*Identification des Systèmes complexes  
par modèles réduits.*

---

Proposé par :  
Mr F. CHIGARA

Etudié par :  
Mr Z.RAMMAL

Dirigé par :  
Mr F. CHIGARA  
Melle N.LABCHRIN

Promotion  
Juin 1994

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التربية الوطنية  
MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Electronique

# *Projet de Fin d'Etudes*

## *SUJET*

---

*Identification des Systèmes complexes  
par modèles réduits.*

---

Proposé par :  
Mr F. CHIGARA

Etudié par :  
Mr Z.RAMMAL

Dirigé par :  
Mr F. CHIGARA  
Melle N.LABCHRIN

Promotion  
Juin 1994

بسم الله الرحمن الرحيم

الى المهدين للظهور، جنود الحجّة المهدي

الى والدي العزيزين، اخوتي و اخواتي الكرام

اهدي هذا الجهد المتواضع، راجيا المولى عز مجده ان يتقبل

اعمالي وان يحشرني مع امتي محمد واله الطاهرين

## Remerciements

Je tiens à remercier M. Chigara pour son aide et ses conseils durant les premiers pas débutants cette thèse. Que Mlle Labchrin N. trouve ici l'expression de mon respect pour sa prise en charge ainsi que M. Mitiche pour son aide.

Durant ma résidence en l'Algérie j'ai rencontré beaucoup des gens qui m'ont rendu la vie plus laboureuse et significative. C' est aux familles Abou Abdo, Chigara, Zenina et Bouziane, à Mohamed, Ali, Fayçal, Hossam, Hassan et Salim de Blida, Ghania d'Alger, les deux Mahmoud et Ali, Khalil, Chemseddine, Karim, Fatmé, Ihsan, Nada et Samar du Liban que je dis merci.

A eux et à tous ce qui m'ont aidé de près ou de loin, je dédie ces mots :

*When life seems to be so hard  
And every one gets his ways.  
People who beleive in GOD  
are always waiting for Holy rays.  
You were all very special  
And this warm wishes come to say :  
Hope you have always truly happy days.*

Liste des symboles

$n, r, e$	Ordre du système initial, modèle réduit et identificateur réduit.
$(A, B, C)$	Représentation d'état du système initial
$(A_r, B_r, C_r)$	Représentation d'état du modèle réduit
$(A_e, B_e, C_e)$	Représentation d'état de l'estimateur réduit.
$u, y$	Vecteurs d'entrée et de sortie de dimension $p$ et $n$ resp.
$\hat{G}(s), \hat{G}(z)$	Fonction de transfert pour cas continu, discret.
$h(t), h(k)$	Réponse impulsionnelle pour cas continu, discret.
$W_g, W_o$	Gramiens de gouvernabilité et d'observabilité
$W_{g^*}, W_{o^*}$	Pseudogramiens de gouvernabilité et d'observabilité
$T$	Transformation d'équilibre
$\Sigma$	Matrice des valeurs singulières
$\lambda_i, \nu_i, \sigma_i$	valeurs propres, valeurs singulières et gains équilibrés du système
$N, Q$	Matrice d'intensité de bruit définie positive, Matrice semi-définie positive.

## SOMMAIRE

- Introduction.....	1
- Chapitre I. Généralités sur les systèmes .....	2
I.1. Représentations d'un système .....	2
I.2. Propriétés d'un système .....	3
I.3. Représentation d'état .....	4
- Chapitre II . Réduction par la méthode des gains équilibrés.....	8
II.1. Normes .....	8
II.2. Gains équilibrés .....	10
II.3. L'équilibre .....	11
II.4. La réduction .....	12
II.5. Exemples .....	13
- Chapitre III. La méthode $L^2$ optimale .....	24
III.1. Position du problème .....	24
III.2. La solution optimale .....	26
III.3. La réduction .....	28
III.4. Exemple d'application .....	30
III.5. Conclusion.....	31
- Chapitre IV. L'identification par modèles réduits .....	34
IV.1. L'identificateur dans l'espace d'état .....	34
IV.2. Identification par modèle réduit .....	35
IV.3. Interprétations .....	36
IV.4. Conclusion .....	37
- Conclusion .....	38
- Référence bibliographique .....	39
- Annexe 1.	
- Annexe 2.	
- Annexe 3.	

## Introduction

L'identification d'un système d'ordre élevé par des modèles réduits est en quelque sorte un problème de réduction. Ce dernier a eu un grand intérêt durant ces dernières années et les recherches se poursuivent pour appliquer les résultats obtenus à l'analyse du comportement d'E/S d'un système et/ou à la synthèse d'un contrôleur pour ce système.

Cette étude a pour but la recherche d'une solution optimale qui minimise l'écart quadratique entre la sortie du système initial et celle du modèle réduit.

Dans le premier chapitre, des généralités sur les systèmes ont été résumées. En particulier, on définit quelques notions qui jouent un rôle important dans la réduction telles que la contrôlabilité, l'observabilité, les valeurs singulières etc..

Le second chapitre traite la méthode des gains équilibrés. On aborde le rôle de ces gains et leurs contributions à la norme  $\mathcal{L}^2$  (qui est utile à l'interprétation du procédé de l'identification). Un algorithme de réduction a été développé et des exemples d'illustration pour les cas continu et discret sont présentés.

La recherche d'une solution optimale fera l'objet du chapitre trois. L'introduction d'une projection va simplifier les calculs qui sont assez lourds. Ensuite, un algorithme de réduction est établi et illustré par un exemple d'application pour un système continu.

Le dernier chapitre est une introduction à la recherche d'un estimateur d'ordre réduit. En particulier, la même forme d'équations figurant au chapitre trois est conservée et sera appliquée au procédé de l'identification.

A la fin, une conclusion générale mettant en relief l'aboutissement de ce travail est présentée.



## Chapitre 1

### Généralités sur les systèmes

#### I. Représentation d'un système.

Le comportement d'un système réel est représenté par un ensemble de relations constituant le modèle mathématique de ce système.

La construction d'un tel modèle est appelée identification, dont la précision peut être mesurée par la différence entre la sortie du modèle et celle du système réel.

En général, l'identification peut être divisée en deux phases[9]:

- Détermination de la structure du modèle.
- Estimation des paramètres du modèle.

On cite quelques représentations pour le cas continu puis pour le cas discret.

#### I.1. Cas continu

\* Système d'équations différentielles[8]

Si on note  $\mathbf{D} = \partial/\partial t$  opérateur de différentiation, le système peut être mis sous la forme matricielle

$$\mathbf{L}(\mathbf{D}) \mathbf{y} = \mathbf{M}(\mathbf{D}) \mathbf{u} \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{L}(\mathbf{D})$  et  $\mathbf{M}(\mathbf{D})$  deux matrices de dimensions  $(p,p)$  et  $(p,m)$  respectivement

\* Réponse impulsionnelle

C'est la réponse du système à une impulsion de Dirac. La matrices des réponses impulsionnelles  $\mathbf{h}(t)$  est telle que

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^{\infty} \mathbf{h}(t') \mathbf{h}(t-t') dt' \quad (1.2)$$

\* Matrice de transfert

Elle met le système sous la forme

$$\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{s}) = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{s}) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{s})$$

où

$\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{s})$ :  $\mathbf{L}(\mathbf{y}(t))$ : Laplacien du vecteur sortie  $\mathbf{y}(t)$  de dimension  $m$

$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{s})$ :  $\mathbf{L}(\mathbf{u}(t))$ : Laplacien du vecteur entrée  $\mathbf{u}(t)$  de dimension  $p$

$\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{s})$ : Matrice de transfert de dimension  $(p,m)$ .

Dans le cas où la matrice de transfert est évaluée sur l'axe imaginaire ( $\mathbf{s}=j\omega$ ), on obtient la matrice de la réponse fréquentielle.

## I.2. Cas discret

### \* Equation récurrente

Le système sera décrit par l'équation (1.4) :

$$\sum_{l=0}^n a_l(k) y_i(k-l) = \sum_{m=0}^M b_m(k) u_j(k-m) \quad (1.4)$$

$a_l(k)$  et  $b_m(k)$  sont des constantes indépendantes de  $k$  (pour les systèmes linéaires stationnaires).

### \* Matrice de la réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système discret  $h_{ij}(k)$  est la  $j^{\text{ème}}$  réponse du système lorsque la  $i^{\text{ème}}$  entrée est excitée par l'impulsion de Kronecker. La matrice  $h(k)$  sera alors la matrice de la réponse impulsionnelle.

### \* Matrice de transfert

Le système aura la forme

$$Y(Z) = H(Z).U(Z) \quad (1.5)$$

où  $Y(Z)$ ,  $H(Z)$ ,  $U(Z)$  sont les transformés en  $Z$  respectivement de  $y(k)$ ,  $h(k)$  et  $u(k)$ .

Dans le cas où la matrice de transfert est évaluée sur le cercle unité ( $Z = e^{j\omega}$ ) ( $Z = e^{j\omega}$ ), on aura la matrice de la réponse fréquentielle.

## II. Propriétés d'un système

Un système est une transformation ( $T$ ) reliant les signaux d'entrée  $u(t)$  [ $u(k)$ ] à ceux de sorties  $y(t)$  [ $y(k)$ ].

Un tel système est représenté par  $y = \Gamma(u)$ .

Du fait que cette étude ne concerne que les systèmes linéaires stables, causals et invariants dans le temps, il est utile de définir ces notions.

**Linéarité :** Un système est dit linéaire si pour tout

$u_1(t)$  [ $u_1(k)$ ],  $u_2(t)$  [ $u_2(k)$ ] et  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  on a :

$$\begin{aligned} T(\alpha u_1 + \beta u_2) &= \alpha T(u_1) + \beta T(u_2) \\ &= \alpha y_1 + \beta y_2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

On dira qu'un tel système vérifie le théorème de la superposition.

**Invariance temporelle :** Un système est dit invariant dans le temps si et seulement si :

$$\begin{aligned} \Gamma(u(t+\tau)) &= y(t+\tau) & \forall \tau \in \mathbb{R} \\ \text{ou} & & (1.7) \\ \Gamma(u(k+m)) &= y(k+m) & \forall m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

**Causalité :** Un système est dit causal si sa réponse ne précède jamais l'excitation :

$$\begin{aligned} h(t) &= 0 & \text{pour } t < 0 \\ h(k) &= 0 & \text{pour } k < 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

**Stabilité :** Un système est stable si ces modes appartiennent au demi-plan gauche du plan (s) [disque unité pour cas discret], ou si :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) &= 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \|h(k)\| &< \infty \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ce système est stable au sens de Lyapunov si pour toute matrice symétrique définie positive Q, on peut trouver une matrice symétrique définie P vérifiant l'équation de Lyapunov

$$A^T P + P A + Q = 0 \quad (1.10)$$

### III. Représentation d'état

#### III.1. Représentation d'un système dans l'espace d'état

Soit un système linéaire invariant d'ordre n. Sa représentation d'état est :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

$x(t)$  : vecteur d'état de dimension n

Il en découle de cette représentation plusieurs avantages dont on cite :

- Les conditions initiales apparaissent explicitement (comme dans le cas de l'équation différentielle).
- Le calcul s'adapte bien aux calculateurs numériques. Pour les systèmes linéaires invariants dans le temps, les matrices sont à coefficients constants (Donc application des théorèmes de l'algèbre linéaire).
- La même forme d'équation est gardée pour les systèmes MIMO et SISO.

- Cette représentation n'est pas unique ce qui permet de choisir une base appropriée à l'application.

Dans le cas discret, l'équation 1.7 devient [8]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \Phi \cdot \mathbf{x}(k) + \Gamma \cdot \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (1.12)$$

### III.2 Passage des systèmes continus aux systèmes discrets

On adopte la transformation bilinéaire [8] reliant la variable complexe ( $s$ ) du plan fréquentiel continu, à celle du plan fréquentiel discret ( $z$ ).

$$s = \beta \cdot \frac{z-1}{z+1} \rightarrow z = \frac{\beta+s}{\beta-s} \quad (1.13)$$

$$\text{où } \beta = \frac{2}{T_0} \quad (1.14)$$

$T_0$  : période d'échantillonnage (en général  $\beta$  est prise égale à 1).

En adoptant les notations des équations (1.11) et (1.12), On a [7] :

$$\begin{aligned} \Phi &= (\mathbf{I}_n + \mathbf{A})(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \\ \Gamma &= \sqrt{2} \cdot (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{H} &= \sqrt{2} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \\ \mathbf{G} &= \mathbf{D} + \mathbf{C}(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (1.14)$$

qui donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -(\mathbf{I}_n + \Phi)^{-1}(\mathbf{I} - \Phi) \\ \mathbf{B} &= \sqrt{2} \cdot (\mathbf{I}_n + \Phi)^{-1} \\ \mathbf{C} &= \sqrt{2} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{I}_n + \Phi)^{-1} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{G} - \mathbf{H}(\mathbf{I}_n + \Phi)^{-1} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Il implique la proposition suivante :

#### Proposition 1.1 [7]

Si  $\mathbf{P}$  est solution de l'équation matricielle :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{0} \quad (1.16)$$

alors  $\mathbf{P}$  est aussi solution de l'équation :

$$\Phi \cdot \mathbf{P} \cdot \Phi^T - \mathbf{P} + \Gamma \cdot \Gamma^T = \mathbf{0} \quad (1.17)$$

### III.3. Gouvernabilité et Observabilité

#### III.3.1. Définitions

Les notions de controllabilité et d'observabilité introduits par Kalman jouent un rôle très important en Automatique.

Un état  $x_1$  est dit gouvernable si  $\forall$  la condition initial  $x_1(0)$  qu'on se donne, il existe une commande  $u$  permettant de transférer cet état  $x_1(0)$  à un état  $x_1$  arbitraire en un temps fini.

Un état  $x_1$  est dit observable si de l'observation des sorties sur un horizon fini  $\{t_0, t_1\}$ , il est possible de déterminer quel était l'état  $x(0)$  du système à l'instant  $t_0$ .

Un système est dit gouvernable [observable] si tous ces états sont gouvernables [observables]. Il est dit minimal s'il est gouvernable et observable simultanément.

#### III.3.2. Critère de kalman [8]

Un système linéaire, invariant dans le temps est gouvernable [observable] ssi :

$$\text{Rang}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (1.18)$$

$$[\text{Rang}[C^T, A^T C^T, A^{(n-1)T} C^T] = n] \quad (1.19)$$

De plus, la gouvernabilité et l'observabilité sont duales.

#### III.3.3. Gramiens de gouvernabilité et d'observabilité

##### III.3.3.1. Cas continu

Le gramien de gouvernabilité est défini par

$$W_g = \int_0^t e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (1.20)$$

et le gramien d'observabilité

$$W_o = \int_0^t e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (1.21)$$

Quant  $t_f \rightarrow \infty$ , les quantités  $W_g$  et  $W_o$  sont des solutions uniques définies positives des équations de Lyapunov

$$\begin{aligned} A W_g + W_g A^T + B B^T &= 0 \\ A^T W_o + W_o A + C^T C &= 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

### III.3.3.2. Cas discret

Pour un système discret, linéaire et stable, les gramiens de gouvernabilité [observabilité] du système sont définis par :

$$\mathbb{W}_g = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B B^T (A^T)^k \quad (1.23)$$

$$\mathbb{W}_o = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k C^T C A^k \quad (1.24)$$

$\mathbb{W}_g$  et  $\mathbb{W}_o$  sont solutions uniques des équations de Lyapunov

$$\begin{aligned} A \mathbb{W}_g A^T - \mathbb{W}_g + B B^T &= 0 \\ A^T \mathbb{W}_o A - \mathbb{W}_o + C^T C &= 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

#### Proposition 1.2. [13]

Soient  $\mathbb{W}_o$  et  $\mathbb{W}_g$  les gramiens d'observabilité et de gouvernabilité. Les valeurs propres du produit  $\mathbb{W}_o \mathbb{W}_g$  sont dites les valeurs singulières du système. Elles sont invariantes sous n'importe quelle transformation similaire

#### Proposition 1.3. [13]

La vérification de deux propriétés quelconques citées ci-dessous implique la troisième :

1. A est stable .
2.  $\mathbb{W}_g$  et  $\mathbb{W}_o$  sont uniques et définis positifs.
3. Le triple (A, B, C) est minimal.

#### Conclusion

Les différentes propriétés et représentations d'un système ont été exposées. En particulier, une partie a été consacrée à la représentation d'état. On a défini aussi les notions de gouvernabilité et d'observabilité ainsi que leurs gramiens associés et dont le rôle et l'importance seront étudiés et discutés ultérieurement.

## Chapitre 2

### Réduction par la méthode des Gains équilibrés

La description d'un système par un modèle mathématique constitue une base pour analyser et synthétiser un tel système, qui est dans la plupart des cas à ordre élevé. Une analyse exacte de tel système sera coûteuse et difficile. Il convient alors de trouver un modèle réduit qui approxime le mieux le système original.

Ce problème a fait l'objet de plusieurs sujets de recherches [24]-[23], qui se sont basés sur la méthode de l'agrégation introduite par Aoki [5]. Le modèle réduit ainsi obtenu conserve alors les modes dominants ou lents.

Une autre approche a été proposée par Moore [19]. Cette technique connue sous le nom des réalisations équilibrées (MRE) se base sur la troncature des valeurs singulières les plus faibles du système initial. Plusieurs variétés ont été proposées afin de l'améliorer [22], [7]. Étant donnée que cette approche est complètement indépendante des considérations d'optimisation, il n'y a pas de garantie à ce que le modèle obtenu soit optimal au sens de la minimisation de la fonction d'erreur de sortie entre le modèle initial et réduit.

Kabamba a proposé une variété de cette méthode en se basant sur la troncature des gains équilibrés [14]. Il a prouvé l'importance de ces gains vue leur contribution à la réponse fréquentielle au sens  $L^2$ , ce qui a motivé notre choix pour cette méthode et fera par suite l'objet de ce chapitre.

On présente au premier lieu les définitions et les propriétés des normes. Ensuite, on définit la méthode des gains équilibrés et son importance dans le sens  $L^2$ . Vue que l'équilibre est une étape importante qui précède la réduction, une section lui a été consacrée. La quatrième partie traite la réduction et on termine par des exemples suivis d'une conclusion.

#### 1. normes $L^2$ , $L^\infty$

##### 1.1. Définitions

Considérons l'espace des matrices  $m \times n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Étant donné le produit scalaire

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}^*(t)] dt \quad (2.1)$$

On définit

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m \times n}) = \{f; \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n} / \langle f, f \rangle < \infty\}$$

Cet espace est appelé aussi espace de Hilbert.

D'autre part, considérons l'application  $\hat{g}: j\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n}$

$$\text{et} \quad \|\hat{g}\|_{\mathcal{L}^\infty} = \text{ess sup } \sigma(\hat{g}(j\omega)) \quad (2.2)$$

alors

$$\mathcal{L}^\infty(j\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m \times n}) = \{\hat{g}; j\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n} / \|\hat{g}\|_{\mathcal{L}^\infty} < \infty\}$$

## II.2. Propriétés

$$* \quad \|\hat{h}\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \|h\|_{\mathcal{L}^2}^2 \quad (2.3)$$

Pour un système stable, la norme  $\mathcal{L}^2$  dans le domaine temporel et celle dans le domaine fréquentiel sont équivalentes.

\* Si  $\hat{h}$  est un opérateur multiplicatif, tel que :  $\hat{u} \rightarrow \hat{h} \cdot \hat{u}$

$$\text{alors} \quad \|\hat{h}\|_{\mathcal{L}^\infty} = \sup \|h * u\|_{\mathcal{L}^2} \quad (2.4)$$

Signifiant que la norme  $\mathcal{L}^\infty$ ,  $\|\hat{h}\|_{\mathcal{L}^\infty}$  est le gain maximal de  $h$  pour des entrées-sorties au sens  $\mathcal{L}^2$

\* Si  $\hat{h}$  est un opérateur multiplicatif  $\hat{u} \rightarrow \hat{h} \cdot \hat{u}$  et

$$\hat{y} = \hat{h} \cdot \hat{u} \quad (2.5)$$

et si  $u$  est bruit blanc alors

$$\|\hat{h}\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \text{tr} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) \cdot y(\tau)^T d\tau \right] \quad (2.6)$$

Cette propriété illustre l'utilité de la norme  $\mathcal{L}^2$  pour l'identification d'un système. Elle est appropriée quand on veut obtenir des modèles dont l'erreur est faible sur toute la gamme de fréquence. [18]



Ceci montre que l'évaluation de la fonction de transfert au sens  $\mathcal{L}^2$  est due essentiellement à la contribution des termes  $\sigma_i, v_i^2$ . Dans ce cas, la réduction exige la troncature des états associés aux termes  $\sigma_i, v_i^2$  les plus faibles.

### III.1. L'équilibre

Equilibrer une réalisation revient à rendre symétrique deux propriétés, l'une de l'entrée (gouvernabilité) et l'autre de sortie (Contrôlabilité) en choisissant une base appropriée.

On cherche à avoir les deux gramiens de gouvernabilité et d'observabilité égaux et diagonaux.

$$\begin{aligned} (A, B, C, D) &\rightarrow (A_v, B_v, C_v, D_v) \\ (\mathbb{W}_g, \mathbb{W}_o) &\rightarrow (\Sigma, \Sigma) \end{aligned}$$

La transformation d'équilibre  $T$  est établie par deux algorithmes; Laub[17] ou Glover[10]. On a adopté l'algorithme de Laub et on note que les deux algorithmes sont équivalents.

#### III.1. Algorithme d'équilibre

étape 1 : Calculer les gramiens de gouvernabilité et d'observabilité  $(\mathbb{W}_g, \mathbb{W}_o)$  du système initial

étape 2 : Factoriser  $\mathbb{W}_g$  et  $\mathbb{W}_o$  en deux matrices supérieures

$$\mathbb{W}_g = L_g^T L_g$$

$$\mathbb{W}_o = L_o^T L_o$$

étape 3 : Former le produit  $L = L_o L_g^T$

étape 4 : Décomposer en valeurs singulières la matrice

$$L = U \Sigma V^T$$

étape 5 : Former la matrice de transformation et son inverse

$$T = U^T V \Sigma^{-1/2}$$

$$T^{-1} = \Sigma^{-1/2} U^T L_o$$

étape 6 : Former le système équilibré

$$A_v = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

$$B_v = T^{-1} \cdot B$$

$$C_v = C \cdot T$$

$$D_v = D$$

"calcul des gramiens équilibrés"

$$\begin{aligned} W_{v0} &= T^{-1} \cdot W_0 \cdot T^{-1} \\ &= \Sigma^{-1/2} \cdot U^T \cdot L_o \cdot L_c^T \cdot L_c \cdot L_o^T \cdot U \cdot \Sigma^{-1/2} \\ &= \Sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{0v} &= T^T \cdot W \cdot T \\ &= \Sigma^{-1/2} \cdot V^T \cdot L_c \cdot L_o^T \cdot L_o \cdot L_c^T \cdot V \cdot \Sigma^{-1/2} \\ &= \Sigma \end{aligned}$$

### III.2. Remarque

La matrice  $\Sigma$  est dite matrice des valeurs singulières. Elle est diagonale et elle contient les valeurs singulières du système, ordonnées par ordre croissant

### IV. La réduction

La méthode des gains équilibrés fait la troncature des états associés aux termes  $\sigma_i v_i^2$  les plus faibles. Ceci est semblable à la méthode de réalisations équilibrées MRE à la seule différence qu'avec la dernière, les états associés aux valeurs  $\sigma_i^4$  les plus faibles sont éliminés. La procédure de réduction élimine les lignes et les colonnes [lignes] {colonnes} de  $A_v [B_v] \{C_v\}$  correspondant à l'indice  $i$  de  $\sigma_i v_i^2$  les plus faibles. Une fois le modèle réduit est obtenu, on peut toujours calculer l'erreur entre les fonctions de transfert du système initial et réduit. Cette erreur est donnée par la proposition suivante :

#### I.V. Proposition [14]

Soit  $(A_v, B_v, C_v)$  une réalisation équilibrée du système (2.7), alors :

$$\|\hat{G}(j\omega) - \hat{G}_r(j\omega)\|_{\mathcal{L}_2}^2 = 2\pi \left[ \sum_{i=1}^n \sigma_i v_i^2 + \sum_{i=1}^n \sigma_i v_i^2 - 2\text{tr}(C_v V C_v^T) \right] \quad (2.12)$$

où  $V$  satisfait :

$$A_r V + V A^T + B_r B = 0 \quad (2.13)$$

L'erreur relative de réduction est :

$$\varepsilon_k = \frac{\|\hat{G}(j\omega) - \hat{G}_r(j\omega)\|_{L^2}^2}{\|\hat{G}(j\omega)\|_{L^2}^2} \quad (2.14)$$

Où  $k = 0, \dots, n-1$

$$\text{introduisons } \xi_i = |\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}| \leq \xi \quad (2.15)$$

$\xi$  erreur fixée, et  $i = 0, \dots, n-1$

#### IV.2. Algorithme de réduction

étape 1: Calculer les gains équilibrés et former le produit  $\sigma_i v_i^2$

étape 2: Calculer la norme  $\|\hat{G}(j\omega)\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i v_i^2$

étape 3: Former le vecteur d'erreur relative  $\varepsilon_k \quad k = 0, \dots, n-1$

étape 4: Former le vecteur d'erreur  $\xi_i \quad i = 1, \dots, n$

étape 5: si  $\xi_i < \xi$  alors le système réduit obtenu est d'ordre  $n-i$ , sinon diminuer  $i$  et revenir de nouveau à l'étape 5

#### IV.3. Stabilité du système réduit

La stabilité du système équilibré  $(A_v, B_v, C_v)$  a été assurée par la proposition (1.3). Toutefois, le système réduit vérifie lui aussi les deux équations de Lyapunov (1.25),(1.26) [19], ce qui conserve sa stabilité. Cette importante propriété sera illustrée par les exemples qui suivent.

#### V. Exemples

Trois exemples sont donnés. Le premier montre la différence au sens  $L^2$  qui se trouve entre les deux approches MRE et MGE. Le deuxième est un système continu et le dernier est un cas discret.

### V.1.Exemple.1 [14]

Considérons le système continu suivant :

$$A = \begin{bmatrix} -0.005 & -0.99 \\ -0.99 & -5000 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 100 \end{bmatrix} ; C = B^T$$

Les valeurs singulières sont  $(\sigma_1, \sigma_2) = (100, 1)$

Les gains équilibrés  $(u_1, u_2) = (1, 100)$

En utilisant la MRE, et se basant sur le fait que  $\sigma_2 \ll \sigma_1$ , on doit éliminer l'état 2. Cependant, en utilisant la MGE, sachant que  $\sigma_1 u_1^2 \ll \sigma_2 u_2^2$  alors le premier état doit être éliminé. La fig.II.1 montre les spectres d'amplitude obtenu par les deux méthodes. On remarque qu'avec la MRE, la réponse fréquentielle du modèle réduit suit celle du système initial sur une étroite bande de fréquence tandis qu'avec la MGE elle la suit sur une large bande tout en tolérant une déviation importante aux basses fréquences.

En calculant les erreurs de réduction, on trouve que  $\varepsilon_{MRE} = 0.99$ ,  $\varepsilon_{MGE} = 0.098$

### V.2. Exemple 2

C'est un variateur de vitesse d'ordre 6 [5]. Les matrices d'évolution, de commande et d'observation sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} -1.25E+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.07E+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.75E+2 & 7.14E+1 & 0 & 0 & -4.7E+0 & -1.4E+1 \\ 1.74E+2 & 7.11E+1 & 7.11E+1 & 1.00E+2 & -4.7E+0 & -1.4E+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1.04E+3 & -7.1E+0 & -8.85E+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.06E+0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.87E+2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2.0E+2 \end{bmatrix} ; C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.00 \end{bmatrix} ; \sigma_i u_i^2 = \begin{bmatrix} 1.611E+5 \\ 1.34E+5 \\ 8.15E+3 \\ 2.43E+2 \\ 2.46E+0 \\ 1.82E-2 \end{bmatrix}$$

Le système simplifiant est d'ordre 2. Les matrices d'état sont

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3.33E+0 & -1.63E+1 \\ 1.63E+0 & -1.49E+1 \end{bmatrix} ; B_1 = \begin{bmatrix} 3.21E+1 \\ -4.47E+1 \end{bmatrix} ; C = B^T$$

l'erreur est évaluée à 3.00E-3

Les pôles du modèle réduit sont  $\lambda_{r,1} = -9.6 - 1602E + 0 \pm i*1.5222AE + 1$

Ils sont à partie réelle négative, ce qui prouve que système simplifiant est stable.

Les fig II.2, II.4 et II.6. montrent les spectres d'amplitude, de phase et la réponse impulsionnelle respectivement pour le système initial et le modèle réduit. Le modèle réduit suit bien le comportement du système initial. Les écarts de ses réponses sont montrés aux fig II.3, II.5. et II.7.

### V.3. Exemple 3

Le système choisi est d'ordre huit [1]. Les matrices (A, B, C) du système initial sont

$$A = \begin{bmatrix} -3.00E-2 & -3.99E-1 & 1.16E-2 & 3.75E-3 & 1.26E-2 & 2.94E-1 & 1.12E-1 & 1.76E-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.00E+0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.00E+0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00E+0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00E+0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00E+0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00E+0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.00E+0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.00E-3 \\ -2.5E-3 \\ 3.75E-3 \\ -3.6E-3 \\ 2.59E-3 \\ -8.2E-4 \\ -3.1E-4 \end{bmatrix} ;$$

Les pôles, les  $\alpha_i v_i^2$ , et le vecteur diagonal de la matrice  $\Sigma$  sont respectivement :

$$\text{pôles} = \begin{bmatrix} -8.00E-1 \\ -4.20E-1 & +1*6.40E-1 \\ -4.20E-1 & -1*6.40E-1 \\ -9.99E-2 & +1*1.50E-1 \\ -9.99E-2 & -1*1.50E-1 \\ 4.70E-1 & +1*1.30E-1 \\ 4.70E-1 & -1*1.30E-1 \\ 8.70E-1 \end{bmatrix} ; \alpha_i v_i^2 = \begin{bmatrix} 1.434E-3 \\ 2.982E-6 \\ 3.410E-5 \\ 1.181E-7 \\ 5.118E-7 \\ 1.030E-9 \\ 5.605E-7 \\ 3.488E-9 \end{bmatrix} ; \Sigma = \begin{bmatrix} 9.560E-3 \\ 6.065E-3 \\ 5.569E-3 \\ 1.176E-3 \\ 8.841E-4 \\ 5.455E-4 \\ 4.670E-4 \\ 1.299E-4 \end{bmatrix}$$

$$A_s = \begin{bmatrix} -8.6076 \text{ E} - 1 & 3.6148 \text{ E} - 1 & -3.6039 \text{ E} - 2 & -2.7327 \text{ E} - 2 \\ -3.6148 \text{ E} - 1 & -4.6165 \text{ E} - 1 & 6.27140 \text{ E} - 1 & 8.3511 \text{ E} - 3 \\ -3.6039 \text{ E} - 2 & -6.2714 \text{ E} - 1 & -3.3768 \text{ E} - 1 & -1.4855 \text{ E} - 1 \\ -2.7327 \text{ E} - 2 & -8.3511 \text{ E} - 3 & -1.4855 \text{ E} - 1 & -1.1639 \text{ E} - 1 \end{bmatrix}$$

$$B_s = \begin{bmatrix} 4.0935 \text{ E} - 2 \\ -4.6008 \text{ E} - 2 \\ 2.4669 \text{ E} - 2 \\ -5.1740 \text{ E} - 2 \end{bmatrix} ; C_s = \begin{bmatrix} -4.0935 \text{ E} - 2 \\ -4.6008 \text{ E} - 2 \\ -2.4669 \text{ E} - 2 \\ 5.174 \text{ E} - 2 \end{bmatrix}$$

Les pôles sont :

$$\lambda_{s_1} = -4.47 \text{ E} - 1 + i * 6.92 \text{ E} - 1$$

$$\lambda_{s_2} = \lambda_{s_1}^*$$

$$\lambda_{s_3} = -7.95 \text{ E} - 1$$

$$\lambda_{s_4} = -8.69 \text{ E} - 2$$

qui appartiennent tous au cercle unité, ce qui prouve que la stabilité du système initial a été conservée.

Les spectres d'amplitude et de phase ainsi que la réponse impulsionnelle du système initial et les modèles réduits par les MGE et MRE sont montrés. Notons que les résultats obtenus par les deux approches sont différents car  $\sigma_3 v_3^2 > \sigma_4 v_4^2$ .

## VI. Conclusion

La technique de troncature basée sur les gains équilibrés a montré une bonne approximation des réponses fréquentielle et impulsionnelle. En particulier, la réponse fréquentielle suit celle du modèle initial sur une large bande de fréquence. Il a été montré que, au sens  $L^2$ , cette méthode donne des résultats meilleurs que celle des réalisations équilibrées. Quoique la MGE n'est pas nécessairement optimale en ce sens mais son aptitude à montrer la contribution de quelques états à la norme  $L^2$  l'a justifiée comme un choix pour démarrer un algorithme d'optimalité. Ce qui fait l'objet du chapitre suivant.

Un autre avantage réside dans la conservation du sens physique, s'il existe, des états. Le passage du système initial au modèle réduit se fait directement par le biais d'une matrice de transformation.

La restriction de cette méthode aux systèmes stables et minimaux limite de son efficacité. De plus, le choix des états à éliminer ne sera pas évident quand les termes à comparer sont égaux ou proches l'un de l'autre[10].

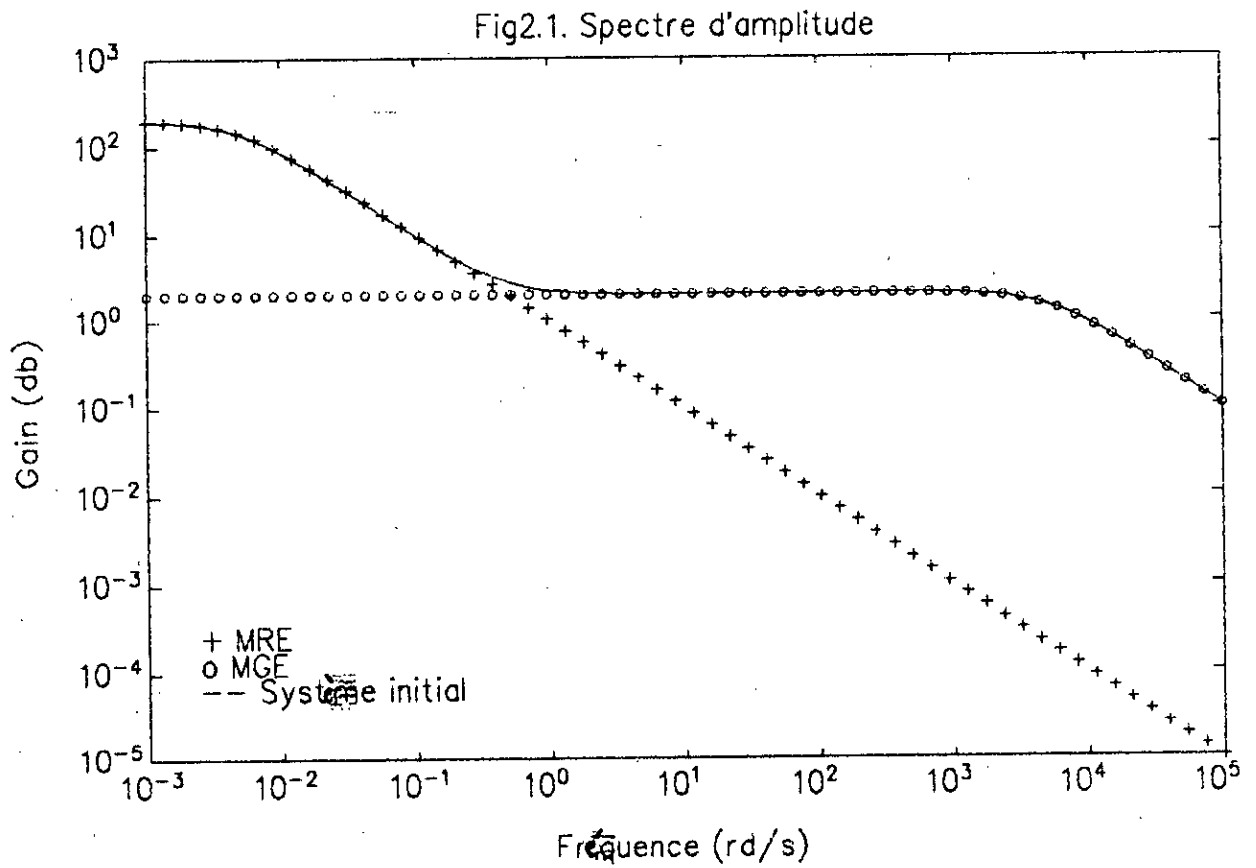


Fig2.2. Spectres d'amplitude de l'exemple.2

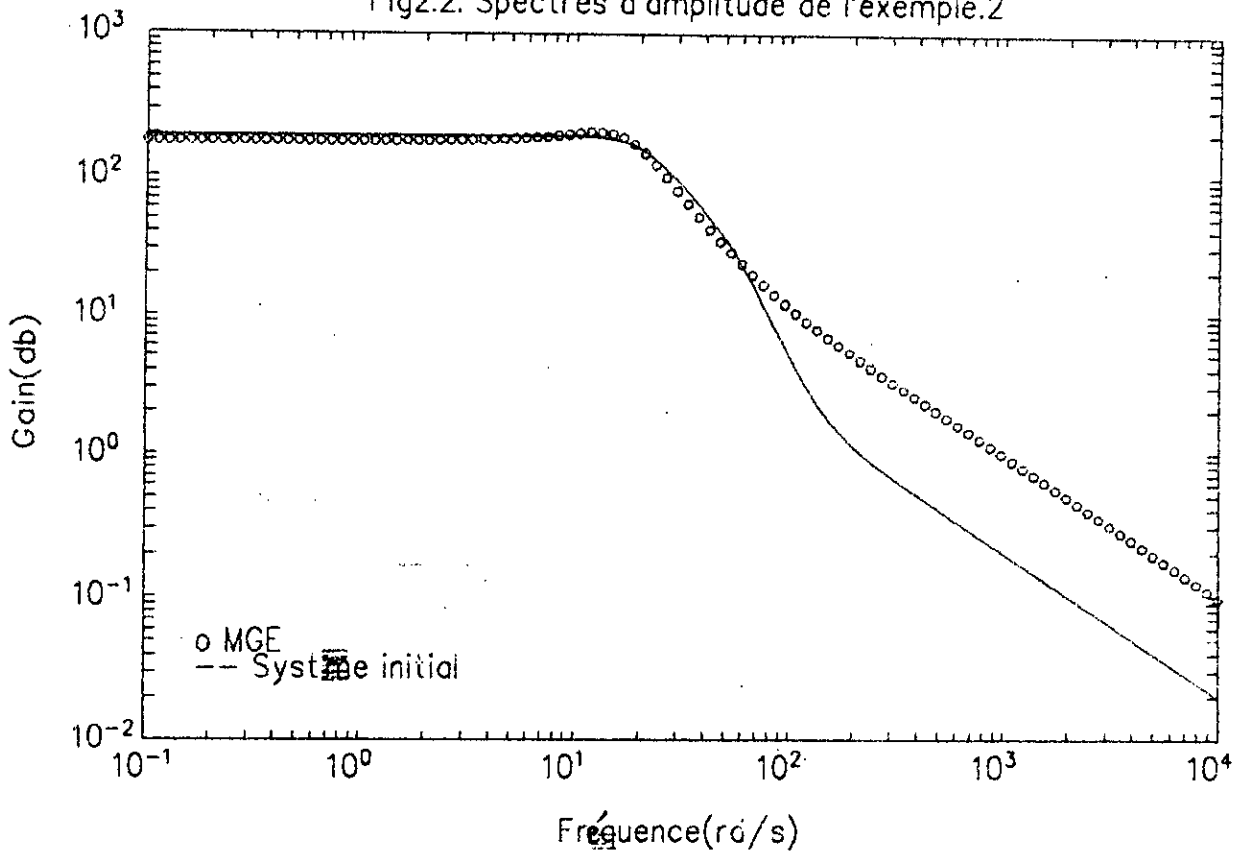


Fig2.3. Ecart des réponses fréquentielles pour exemple 2

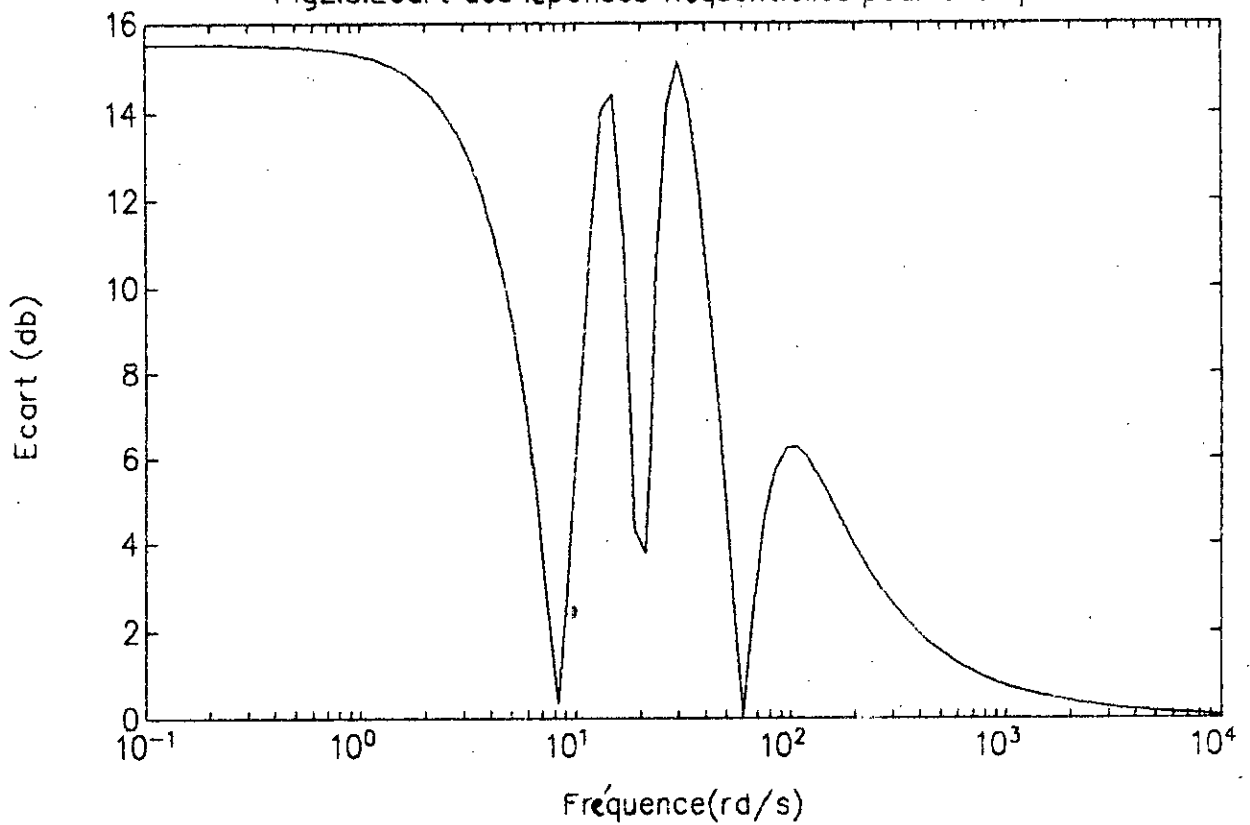




Fig2.4.Spectres de phase pour l'exemple.2

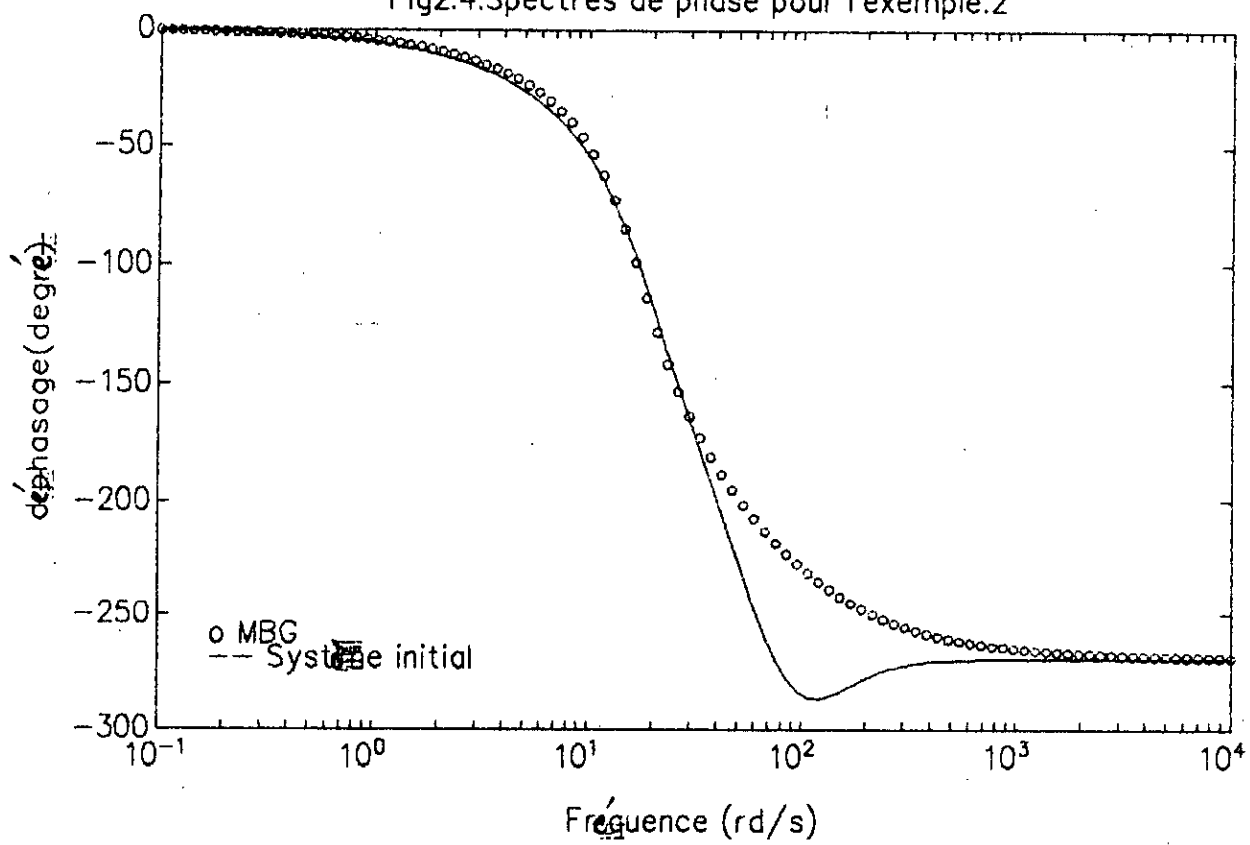


Fig2.5.Ecart de phase pour l'exemple.2

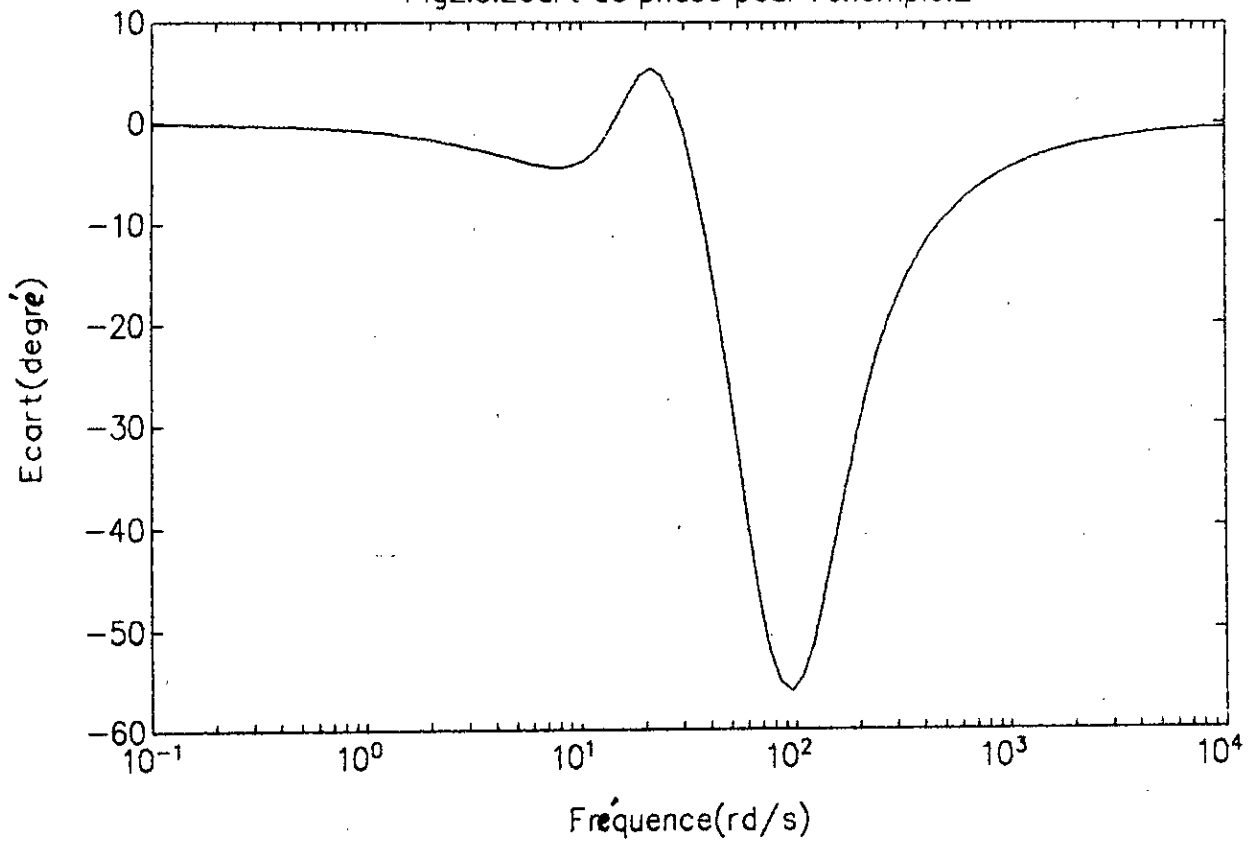


Fig2.6. Réponses impulsionnelles pour l'exemple.2

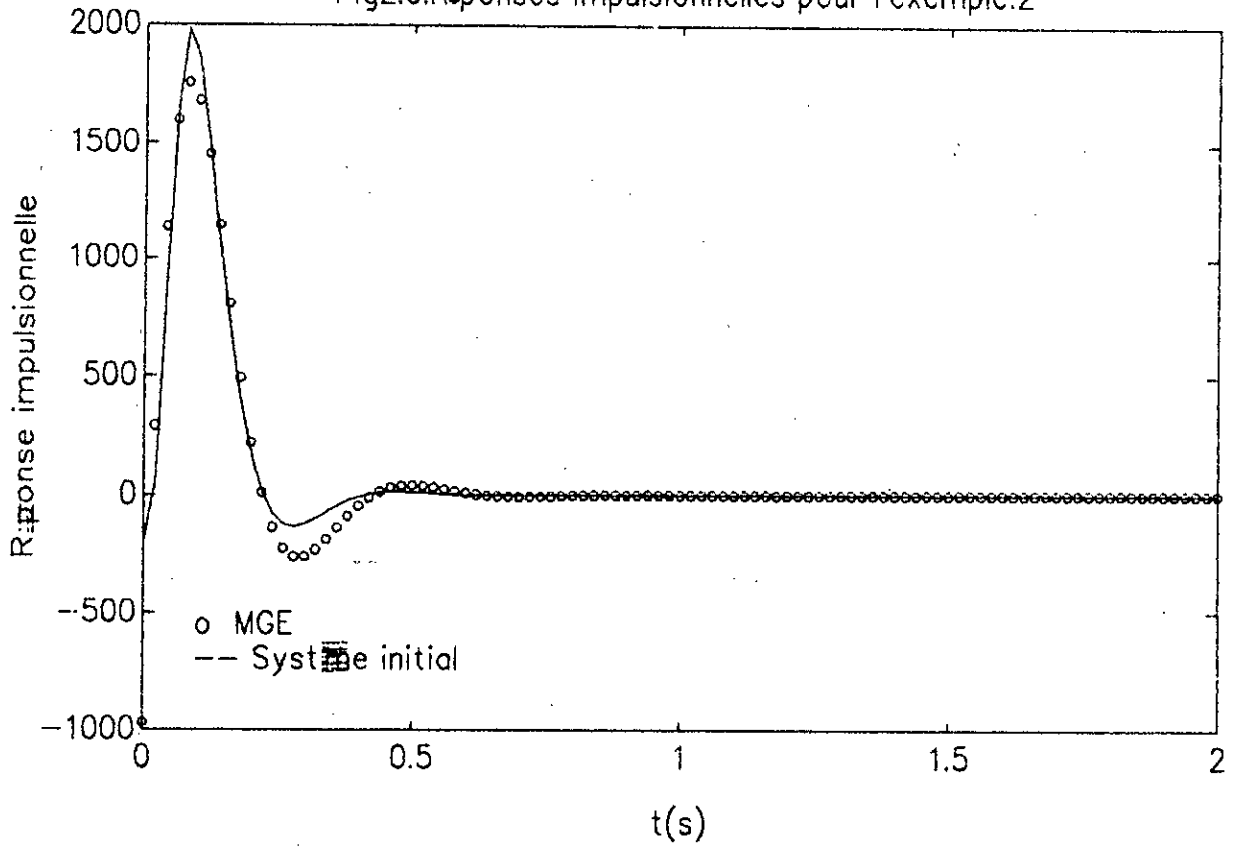


Fig2.7. Ecart de réponse impulsionnelle pour l'exemple.2

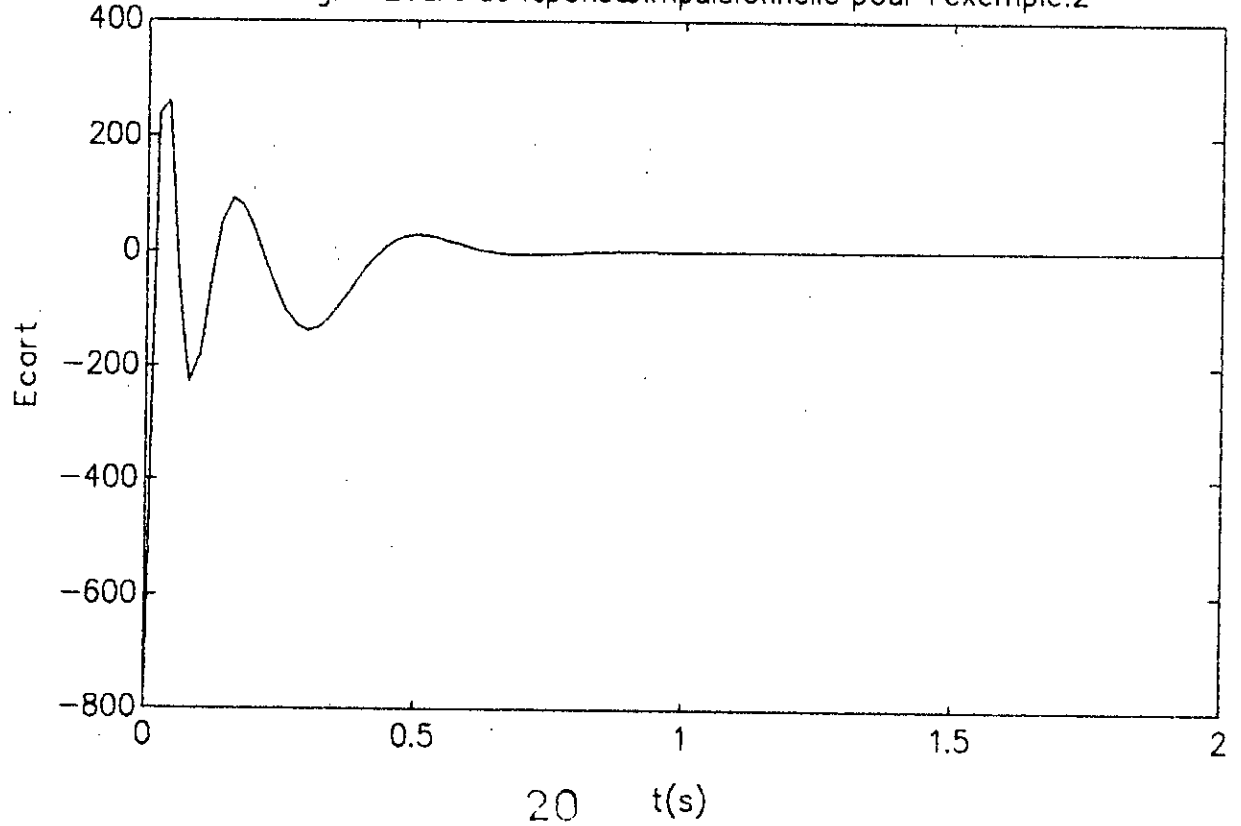


Fig2.8.Spectres d'amplitude de l'exemple.3

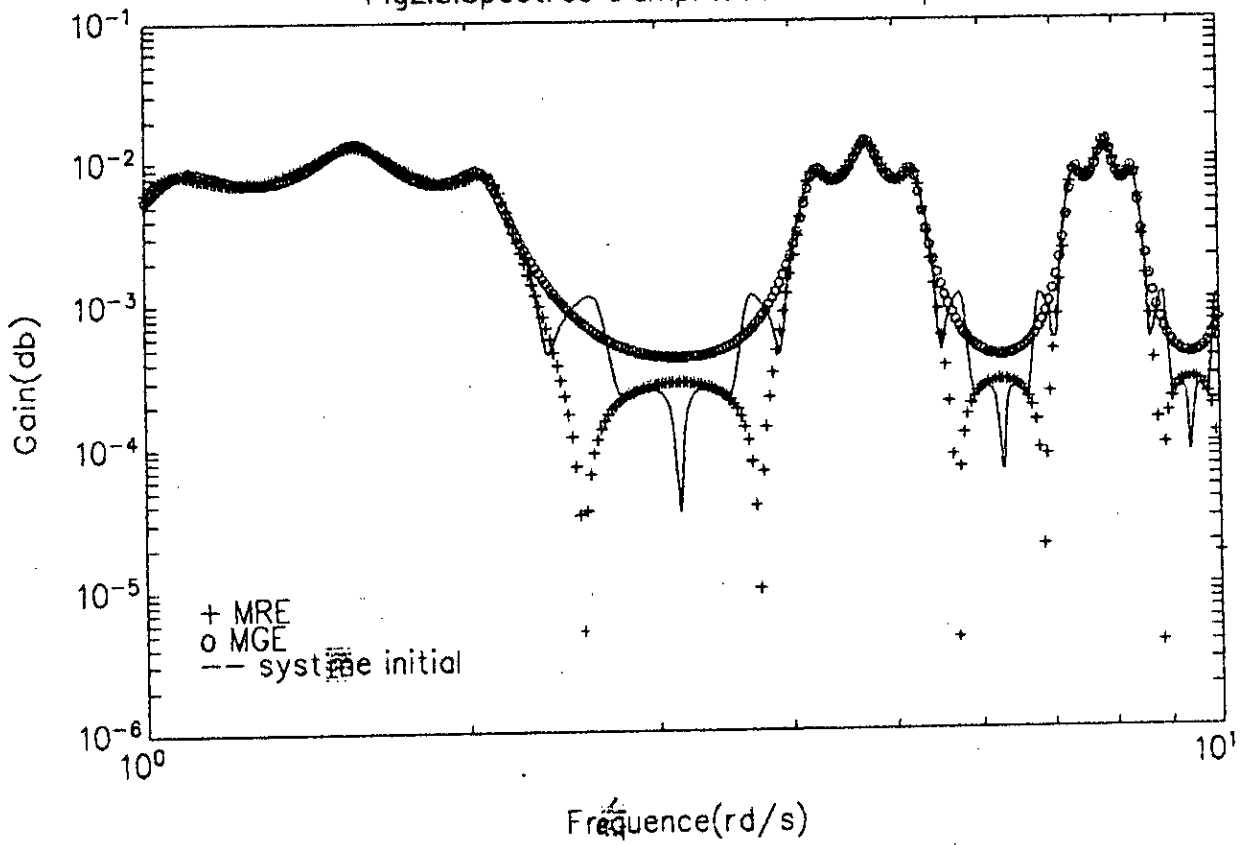


Fig2.9.Ecart absolu du spectre d'amplitude de l'exemple.3

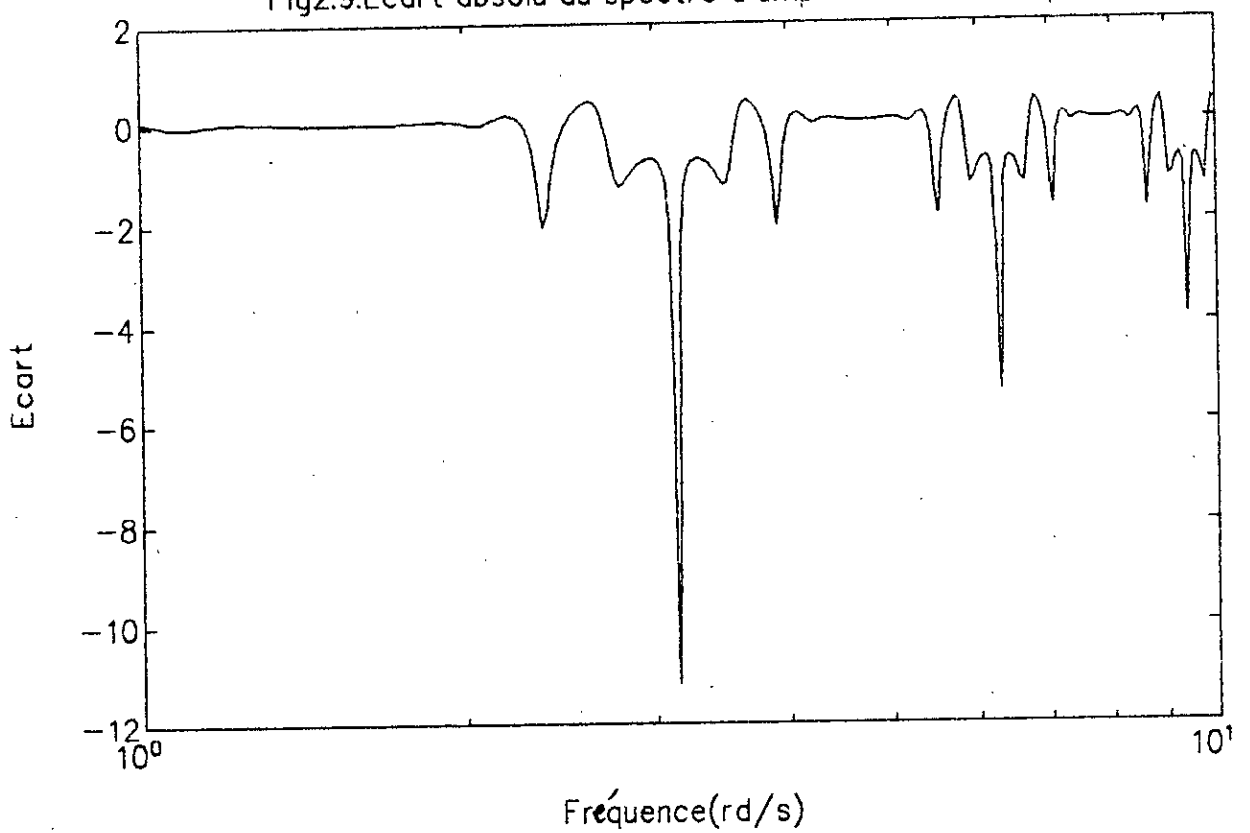
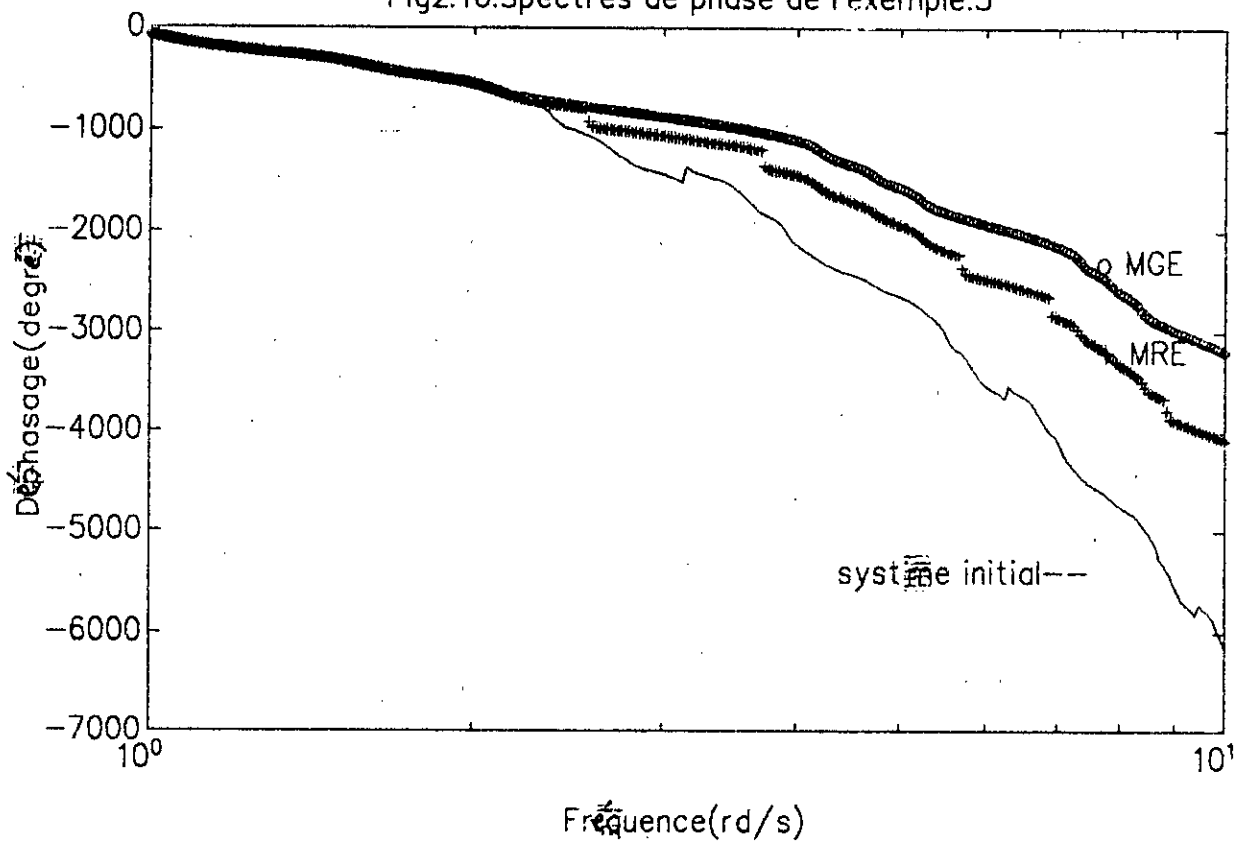
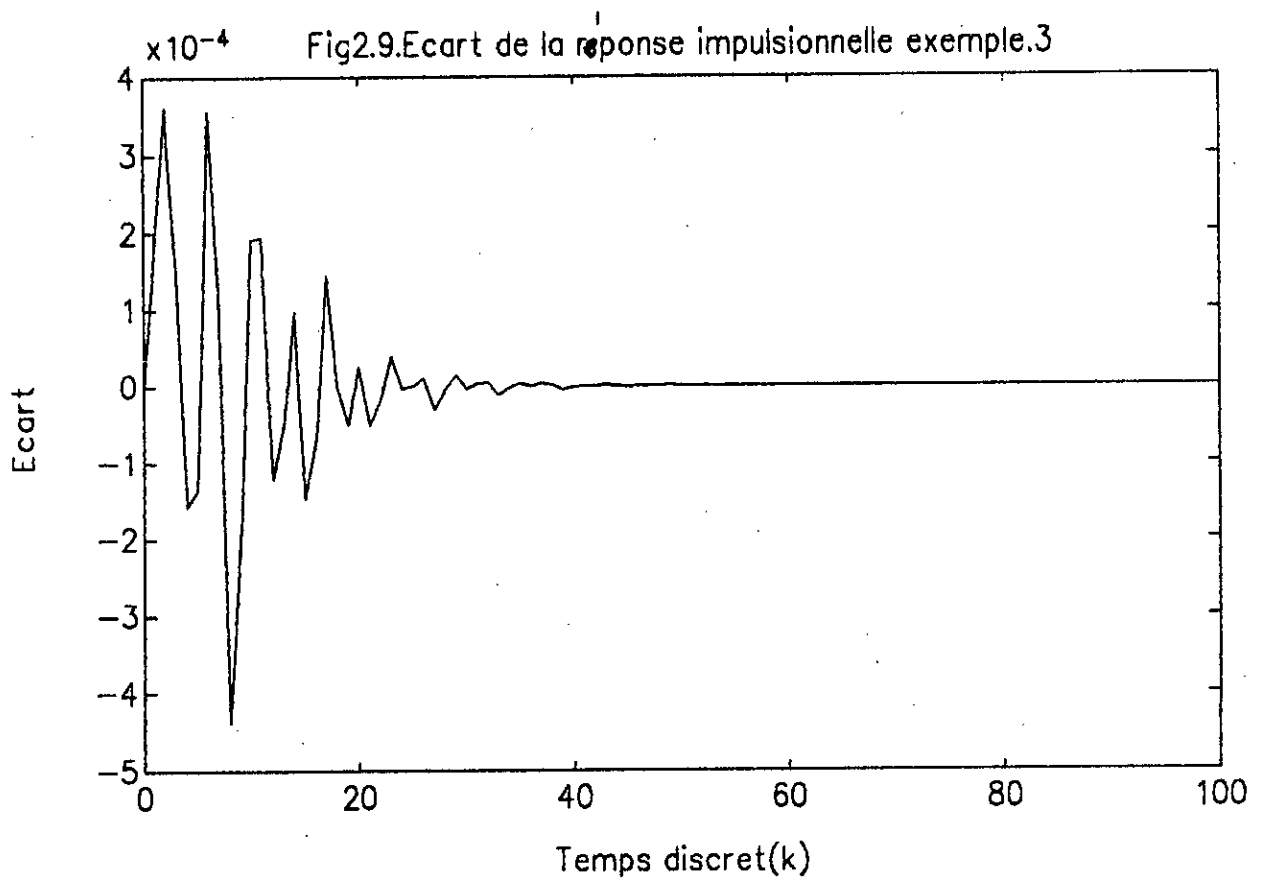
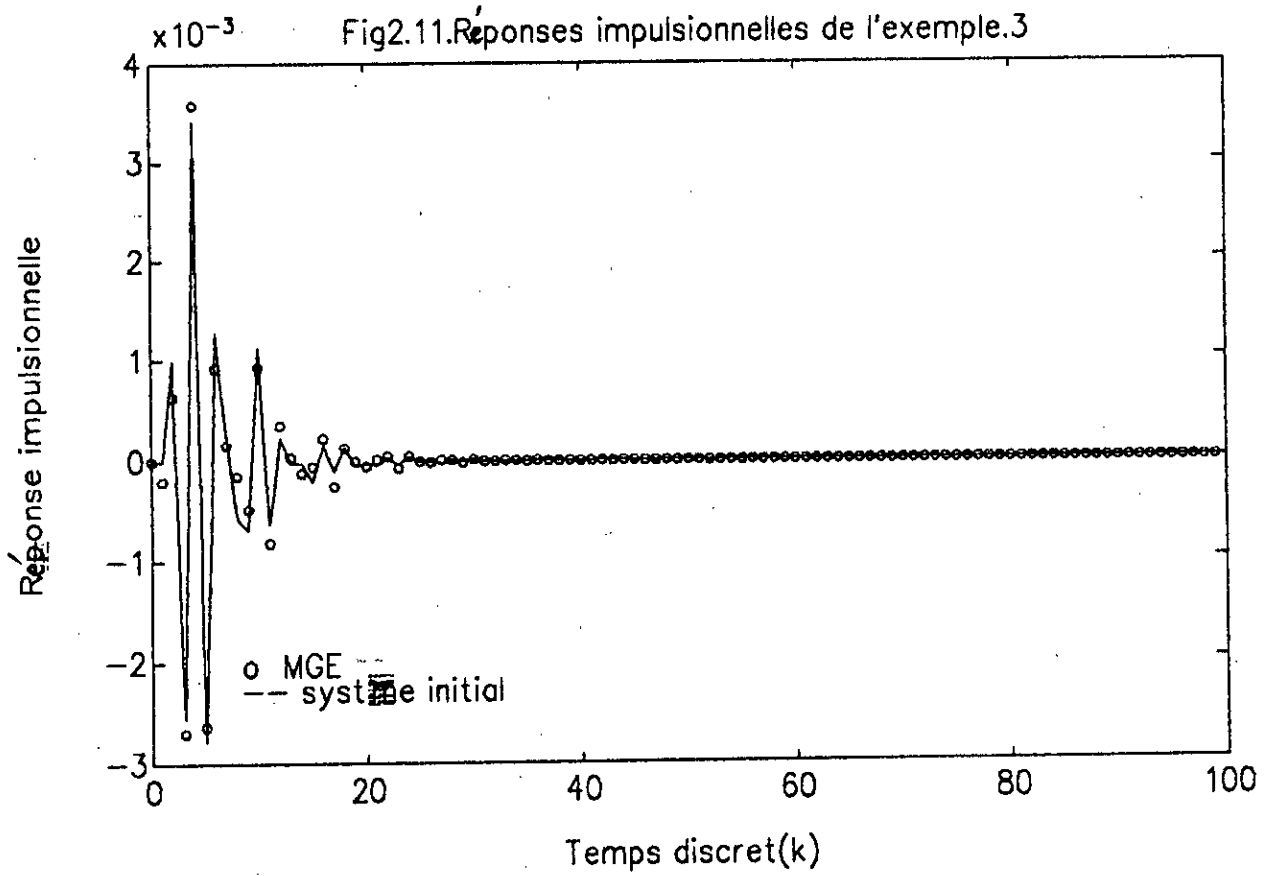


Fig2.10.Spectres de phase de l'exemple.3





## Chapitre 3

### La Méthode $\mathcal{L}^2$ Optimale

Dans le chapitre précédent, on a exploité la méthode des gains équilibrés MGE. Quoique cette méthode n'est pas nécessairement optimale au sens  $\mathcal{L}^2$ , son avantage réside dans le fait que les calculs sont directs et relativement simples.

Ce chapitre a pour but de trouver une solution optimale au sens  $\mathcal{L}^2$ , c.à.d. trouver un modèle réduit qui minimise la fonction d'erreur quadratique entre la sortie du système initial et celle du modèle réduit. Par la suite, on montrera que les équations obtenues auront une forme implicite dont la résolution exige des calculs itératifs et laborieux.

Pour remédier au problème de recherche de telle solution, plusieurs méthodes ont été proposées. On cite en particulier la contribution de Wilson et Mishra qui ont établi un système à deux équations de Lyapunov d'ordre  $n+r$  ( $n$  est l'ordre du système initial et  $r$  celui du modèle réduit). Pour des systèmes d'ordre élevé, les calculs seront très lourds. En utilisant une projection interne, Hyland et Bernstein ont démontré que l'ordre de ces équations peut être réduit à  $n$  et leur résolution, par conséquent, sera relativement plus simple.

Ce chapitre se divise en quatre parties. Dans la première, le problème d'optimisation est posé et les équations résultantes comme trouvées par [25] ont été établies. Au second lieu, la méthode de projection optimale est présentée et discutée. Un algorithme de réduction est proposé et on termine par un exemple illustratif.

#### I. Position du problème

##### I.1 Problème d'optimisation

Etant donné un système minimal et propre ( $D=0$ ), d'ordre  $n$  :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

trouver un système minimal d'ordre  $r < n$  :

$$\begin{aligned}\dot{x}_r(t) &= A_r \cdot x_r(t) + B_r \cdot u(t) \\ y_r(t) &= C_r \cdot x_r(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

qui minimise l'erreur quadratique :

$$J(A_r, B_r, C_r) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left( \int_0^t (y(\tau) - y_r(\tau))^T \cdot Q \cdot (y(\tau) - y_r(\tau)) d\tau \right) \quad (3.3)$$

quand l'entrée est un bruit blanc d'intensité  $N$  une matrice symétrique définie positive  
 $Q$  est une matrice symétrique semi-définie positive.

## I.2. Méthode de Wilson et Mishra

La solution qui minimise l'erreur quadratique définie ci-dessus sera donnée par deux équations de Lyapunov d'ordre  $n+r$ .

Supposons  $(A, B, C)$  le système initial, et  $(A_r, B_r, C_r)$  le modèle réduit. Si on pose:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}; \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ B_r \end{bmatrix}; \tilde{C} = [C \quad -C_r] \quad (3.4)$$

$$\text{avec :} \quad S = \tilde{B} \cdot N \cdot \tilde{B}^T \quad (3.5)$$

$$\text{et} \quad F = \tilde{C}^T \cdot Q \cdot \tilde{C} \quad (3.6)$$

alors les deux matrices  $R$  et  $P$  sont solutions de:

$$\begin{aligned} \tilde{A} \cdot R + R \cdot \tilde{A}^T + S &= 0 \\ \tilde{A}^T \cdot P + P \cdot \tilde{A} + F &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Le système réduit est déduit par :

$$A_r = \Gamma A G^T \quad (3.8)$$

$$B_r = \Gamma B \quad (3.9)$$

$$C_r = C G^T \quad (3.10)$$

$$\Gamma G^T = I_r \quad (3.11)$$

$$\Gamma = -P_2^{-1} P_{12}^T \quad (3.12)$$

$$G = R_{12} R_2^{-1} \quad (3.13)$$

Il est clair que la solution cherchée n'aura pas une forme explicite. En effet, obtenir le système réduit dépend essentiellement de  $\Gamma$  et  $G$  qui, elles mêmes sont fonctions du modèle réduit. Par conséquent, deux difficultés résident dans la résolution :

- l'ordre relativement élevé de l'équation (3.7), ce qui exige des calculs plus laborieux et lourds.

- du fait que cette équation est obtenue par les dérivées du premier ordre du Lagrangien (voir annexe3), le choix des conditions initiales  $(A_r, B_r)$  ou  $(A_r, C_r)$  est d'une grande importance. Il a été remarqué que des conditions initiales non appropriées causent la divergence de l'algorithme.



dans ce qui se suit, on montrera que l'introduction d'une projection simplifie largement les calculs. La même forme des équations sera gardée mais leur ordre sera réduit à  $n$ .

## II. La Solution Optimale

### II.1. Théorème [18]

Supposons  $(A_r, B_r, C_r)$  la solution optimale du problème I.1, alors il existe deux matrices  $\Gamma, G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que :

$$A_r = \Gamma \cdot A \cdot G^T \quad (3.14)$$

$$B_r = \Gamma \cdot B \quad (3.15)$$

$$C_r = C \cdot G^T \quad (3.16)$$

$$\tau = G^T \cdot \Gamma \quad (3.17)$$

Les deux matrices  $\Gamma$  et  $G$  sont une factorisation de deux autres matrices définies positives  $W_{gs}, W_{os} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et vérifiant

$$\text{rang}(W_{gs}) = \text{rang}(W_{os}) = \text{rang}(W_{gs} \cdot W_{os}) = r \quad (3.18)$$

$$\tau \cdot (A \cdot W_{gs} + W_{gs} \cdot A^T + B \cdot N \cdot B^T) = 0 \quad (3.19)$$

$$(A^T \cdot W_{os} + W_{os} \cdot A + C^T \cdot Q \cdot C) \tau = 0 \quad (3.20)$$

$$\Gamma \cdot G^T = I_r \quad (3.21)$$

L'erreur de la fonction de transfert est :

$$J(A_r, B_r, C_r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \| G(j\omega) - G_r(j\omega) \|_{L_2}^2 = \text{tr}(C^T \cdot R \cdot C \cdot (W_g - W_{gs}))$$

Pour la démonstration voir l'annexe [A3].

### II.2. Remarque

La matrice  $\tau$  est une projection car elle satisfait :

$$\tau^2 = (G^T \cdot \Gamma)(G^T \cdot \Gamma) = G^T \cdot (\Gamma \cdot G^T) \cdot \Gamma = G^T \cdot \Gamma = \tau$$

C'est en générale une projection oblique car la matrice  $\tau$  n'est pas nécessairement symétrique.

### II.3. Définition

Les quantités  $\mathbb{W}_{\text{ex}}$ ,  $\mathbb{W}_{\text{os}}$  sont dites les pseudogramiens de gouvernabilité et d'observabilité respectivement du système (3.1). Elles sont appelées ainsi car leur rang n'est pas complet (éq.3.18), quoiqu'elles vérifient l'équation de Lyapunov.

Il semble évident que la matrice  $\tau$  joue un rôle important et essentiel dans la résolution des équations (3.19) et (3.20). Pour cela, il sera approprié de trouver une transformation  $\Phi$  qui diagonalise  $\tau$ , c.à.d :

$$\tau = \Phi^{-1} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi \quad (3.22)$$

Dans cette base, les pseudogramiens auront également une forme diagonale :

$$\mathbb{W}_{\text{ex}} = \Phi^{-1} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi^{-1} \quad (3.23)$$

$$\mathbb{W}_{\text{os}} = \Phi^T \begin{bmatrix} \Lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Phi$$

D'autre part, si on applique cette transformation à la réalisation initiale du système (3.1), soit  $\hat{\mathbf{x}} = \Phi \mathbf{x}$ , on obtient une nouvelle représentation exprimée par (3.24) :

$$\begin{aligned} d\hat{\mathbf{x}}(t)/dt &= \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Les matrices ( $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}$ ) sont calculées à partir des relations ci-dessous :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \Phi \cdot \mathbf{A} \cdot \Phi^{-1} \\ \hat{\mathbf{B}} &= \Phi \cdot \mathbf{B} \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} \cdot \Phi^{-1} \end{aligned} \quad (3.25)$$

et :

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma} &= \Gamma \cdot \Phi^{-1} \\ \hat{\mathbf{G}} &= \mathbf{G} \cdot \Phi^T \end{aligned} \quad (3.26)$$

En particulier, dans cette base ces deux dernières matrices auront la forme suivante[2] :

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma} &= \Phi [\mathbf{I}_1 \quad 0] \\ \hat{\mathbf{G}} &= [\mathbf{I}_1 \quad 0] \end{aligned} \quad (3.27)$$

De l'autre côté, faisons la décomposition des matrices :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_2 \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}; \hat{C}^T = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

et y appliquons les égalités (3.14)-(3.16), alors :

$$\begin{aligned} A_1 &= \Phi \cdot \hat{A}_1 \cdot \Phi^{-1} \\ B_1 &= \Phi \cdot \hat{B}_1 \\ C_1 &= \hat{C}_1 \cdot \Phi^{-1} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ce qui implique que si le système initial est transformé dans une base "appropriée", le modèle optimal s'obtient alors par la troncature de n-r lignes et colonnes[lignes]{colonnes} de A[B]{C}.

Les équations (3.19)-(3.20) seront satisfaites et auront la forme suivante :

$$\begin{aligned} A_1 \cdot \Lambda_1 + \Lambda_1 \cdot A_1 + B_1 \cdot N \cdot B_1^T &= 0 \\ A_1^T \cdot \Lambda_0 + \Lambda_0 \cdot A_1 + C_1^T \cdot Q \cdot C_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Avant de terminer ce paragraphe, notons que si on pose :

$$\tau_1 = I_n - \tau \quad (3.31)$$

alors les deux équations (3.19) et (3.20) se réécrivent comme suit :

$$\begin{aligned} (A - \tau \cdot A \cdot \tau_1) W_{11} + W_{11} (A - \tau \cdot A \cdot \tau_1)^T + B N B^T &= 0 \\ (A - \tau_1 \cdot A \cdot \tau)^T W_{00} + W_{00} (A - \tau_1 \cdot A \cdot \tau) + C^T Q C &= 0 \end{aligned} \quad (3.32)-(3.33)$$

qui est une forme utile pour la réduction dans la section prochaine .

#### II.4. Stabilité du modèle réduit :

La stabilité du système simplifié est assurée par l'équation (3.30). En effet, les deux pseudogramiens  $\Lambda_1, \Lambda_0$  sont définis positifs et ils vérifient l'équation de Lyapunov.

### III. La réduction

Il a été montré que la méthode  $L^2$  optimale se base sur la projection optimale  $\tau$  qui transforme le système initial dans une réalisation optimale. Il suit que la recherche de cette projection est suffisante pour résoudre le problème du fait que toutes les autres matrices sont des fonctions de  $\tau$ . Avant de procéder à la résolution des équations

(3.19) et (3.20), il faut choisir les états qui contribuent mieux à la réponse fréquentielle au sens  $\mathcal{L}^2$ . Ce qui a été fait au chapitre précédent.

L'algorithme proposé se divise en deux parties. Dans la première, on cherche d'abord les états ayant les termes  $\sigma_i, v_i^2$  les plus prépondérants. Une fois trouvés, un algorithme itératif est exécuté pour calculer  $\tau$ .

Les deux équations (3.32)-(3.33) permettent de mettre les équations (3.19) et (3.20) sous la forme "standard" des équations de Lyapunov, ce qui permet d'appliquer un algorithme de résolution tel que l'algorithme de Jameson [11].

Notons que l'erreur de réduction  $e_r$  peut être exprimée comme suit :

$$e_r = \left[ \frac{\text{tr}(C^T R C W_r) - \text{tr}(C^T R C \tau W_r \tau^T)}{\text{tr}(C^T R C W_r)} \right] \quad (3.34)$$

L'algorithme de réduction est :

**1<sup>ère</sup> partie :**

étape 1: appliquer la MGE. Soit  $T$  la transformation d'équilibre,  $\Sigma$  la matrice des valeurs singulières, et  $\mathcal{S}$  celle des gains équilibrés.

étape 2: Sélectionner les états ayant les  $\sigma_i, v_i^2$  les plus prépondérants. Ces états forment un vecteur appelé  $e = \{\delta_i\}$  où

$$\delta_i \in \{0, 1\}$$

et

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = \tau$$

**2<sup>ème</sup> partie :**

étape 1: Calculer  $e_r$ . Si  $|e_r - e_{r-1}| < \zeta$  aller à l'étape 6 sinon continuer.

étape 2: Calculer

$$\tau = \sum_{i=1}^n \Pi_i [W_{s_i}, W_{s_o}] \delta_i$$

avec

$$\Pi_i [W_{s_i}, W_{s_o}] = T^{-1} \cdot E_i \cdot T$$

$E_i = 1$  pour l'élément diagonal  $i$  et 0 ailleurs.

étape 3: trouver  $W_{s_i}$  et  $W_{s_o}$  en résolvant (3.32) et (3.33)

étape 4: Equilibrer de nouveau ( $W_{s_i}, W_{s_o}$ ) et retrouver  $T$

étape 5: Recalculer  $\tau$  et aller à l'étape 1.

étape 6: Trouver  $\Phi$  matrice des vecteurs propres de  $\tau$ .

étape 7: Calculer ( $\hat{F}, \hat{G}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ ) en utilisant les équations (3.27) et (3.25) respectivement.

étape 8 : Dédire  $(A_r, B_r, C_r)$  en se servant de l'équation (3.29).

#### IV. Exemple d'application

L'exemple choisi est un système d'ordre 11 qui représente un réacteur nucléaire et donné par [25]. Les matrices A et B sont respectivement :

$$A = \begin{bmatrix} -1.24E-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.12E-1 \\ 0 & -3.05E-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.41E+0 \\ 0 & 0 & -1.115E-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.26E+0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.012E-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.545E+0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.136E+0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.400E-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.013E+0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.700E-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7.063E-1 & 7.063E-1 & 0 & 2.663E-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.8735E+0 & -2.992E+0 & 2.319E-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.357E-4 & -3.159E-4 & 3.400E-4 & 0 \\ 1.24E-2 & 3.05E-2 & 1.115E-1 & 3.012E-1 & 1.136E+0 & 3.013E+0 & -4.77E-2 & 1.953E-3 & -8.760E-2 & 2.000E-2 & -6.440E+0 \\ 1.24E-2 & 3.05E-2 & 1.115E-1 & 3.012E-1 & 1.136E+0 & 3.013E+0 & -4.77E-2 & 1.953E-3 & -8.760E-2 & 0 & -6.442E+0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.66E-1 & 0 \\ -5.25176 & 0 & 0 & 3.17E-2 \\ -5.18658 & 0 & 3.40E-4 & 1.99E-4 \\ 2.7688112 & 3.00E+3 & 0 & 3.70E-3 \\ 2.7688112 & 3.00E+3 & 0 & 3.70E-3 \end{bmatrix}$$

Les matrices Q et N sont données par :

$$Q = \text{diag} \{ 1.868E^2, 21.661, 1.000 \}$$

$$N = \text{diag} \{ 7.7470, 1.000E^{-5}, 1.520E^4, 8.225E^4 \}$$

Les sorties du système sont les états  $x_{10}$ ,  $x_9$  et  $x_8$ .

Le modèle réduit optimal obtenu est d'ordre 3, avec une erreur de  $10^{-7}$  est :

$$A_r = \begin{bmatrix} 3.483E-3 & -6.408E-3 & -5.166E-3 \\ 6.431E-3 & -1.235E-3 & -2.459E-3 \\ 5.244E-3 & -0.631E-3 & -7.659E-3 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -2.533E+1 & 3.856E+4 & -3.782E-1 & 4.241E-1 \\ 1.142E+1 & 2.801E+3 & -3.139E-1 & -5.310E-2 \\ 9.61E+2 & 9.145E+4 & -1.420E+1 & -5.450E+0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -8.943E-1 & 1.567E+0 & 4.136E-1 \\ 4.304E-2 & 9.221E-3 & -2.48E-2 \\ 9.108E+0 & -4.91E+0 & -3.53E+0 \end{bmatrix}$$

Les pôles du modèle réduit sont :

$$\lambda_{11} = -4.86E^{-3} + 7.48E^{-3} * i$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{11}^*$$

$$\lambda_{13} = -2.04E^{-3}$$

Vue que la partie réelle des pôles est négative, le système réduit obtenu est donc stable.

La figure ( III.1) montre le spectre d'amplitude pour les trois sorties  $x_{10}$ ,  $x_9$  et  $x_8$ .

On compare le spectre d'amplitude du système initial, réduit optimal, et réduit par la MGE.

## V. Conclusion

La réduction optimale des systèmes complexes permettant de trouver un modèle d'ordre réduit qui minimise l'écart de réduction de la fonction quadratique est sur le plan théorique la plus satisfaisante. Toutefois, la mise en oeuvre de cette méthode fait intervenir des équations de forme implicite et itérative, dont la résolution est coûteuse.

Outre les problèmes numériques, un problème de convergence de l'algorithme de minimisation se pose. Nous avons remarqué que l'algorithme de Wilson et Mishra diverge si les conditions initiales ne sont pas appropriées. Il en est de même pour l'algorithme présenté si le vecteur  $\delta_1$  est mal choisi.

Malgré la complexité des calculs, la méthode  $L^2$  optimale reste la plus satisfaisante en donnant une "bonne" approximation du système initial, mais toujours pour des systèmes ayant relativement des faibles dimensions. De plus, il est à remarquer que les équations figurant dans ce chapitre seront utiles au problème de l'identification car elles gardent la même forme. Et c'est là un grand avantage puisque pour quelques modifications introduites, on établit un système d'équations permettant le calcul des paramètres d'un estimateur optimal d'ordre réduit.

Fig3.2.Spectres d'amplitude de la sortie x10

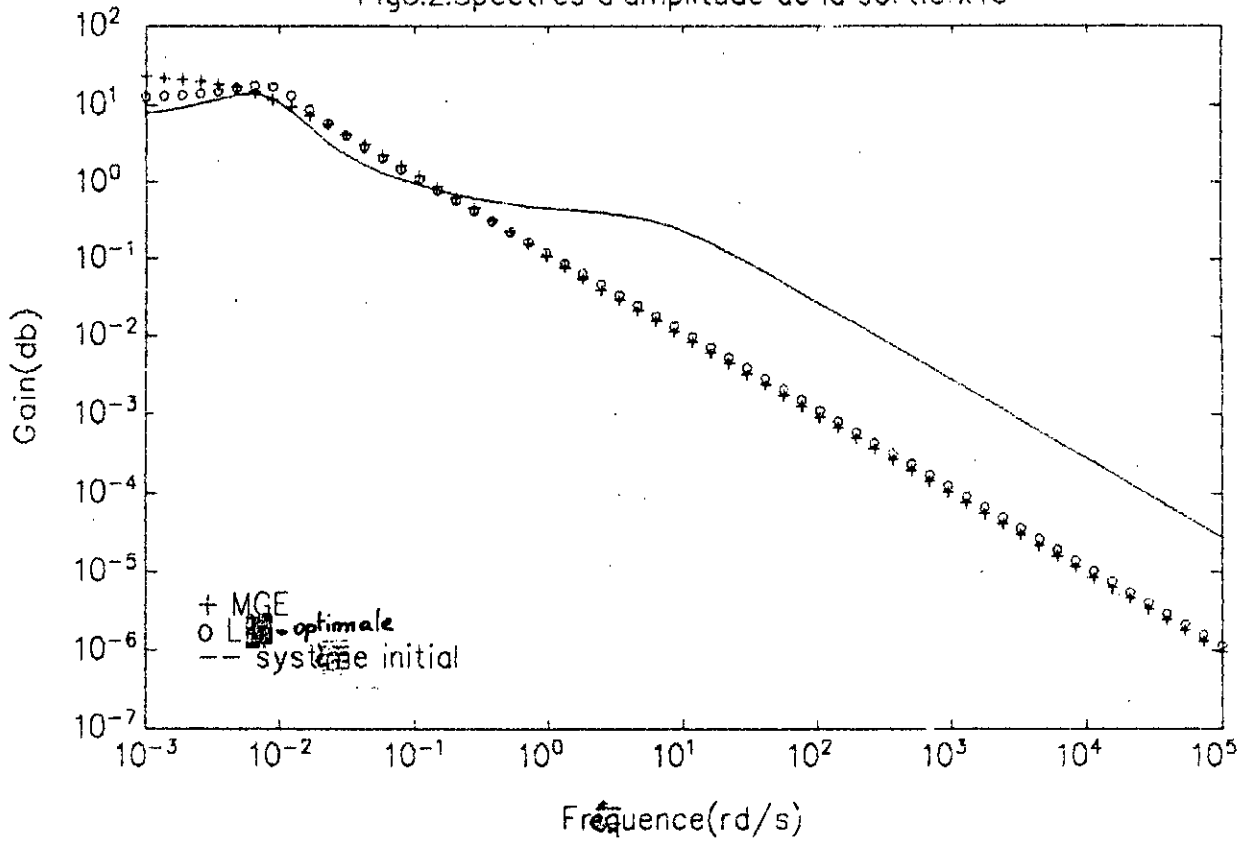


Fig3.3.Spectres d'amplitude de la sortie x9

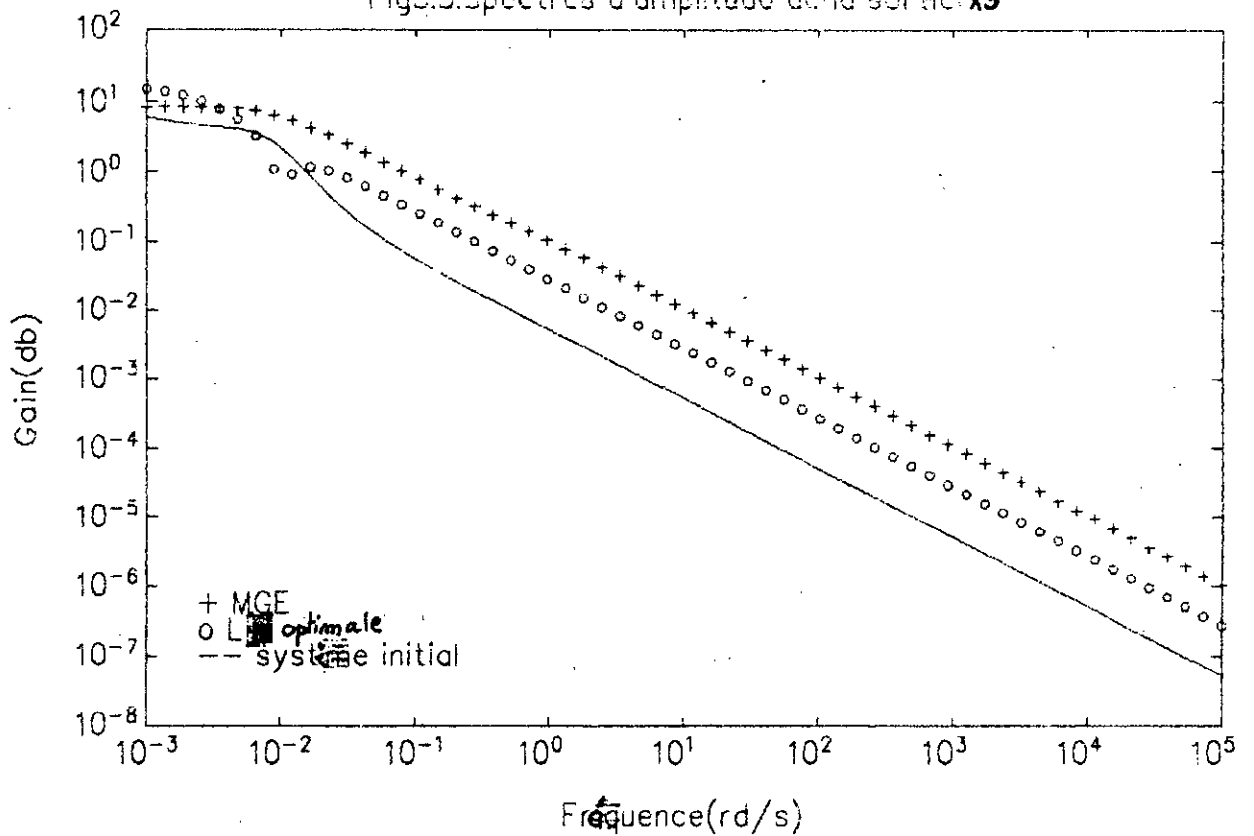
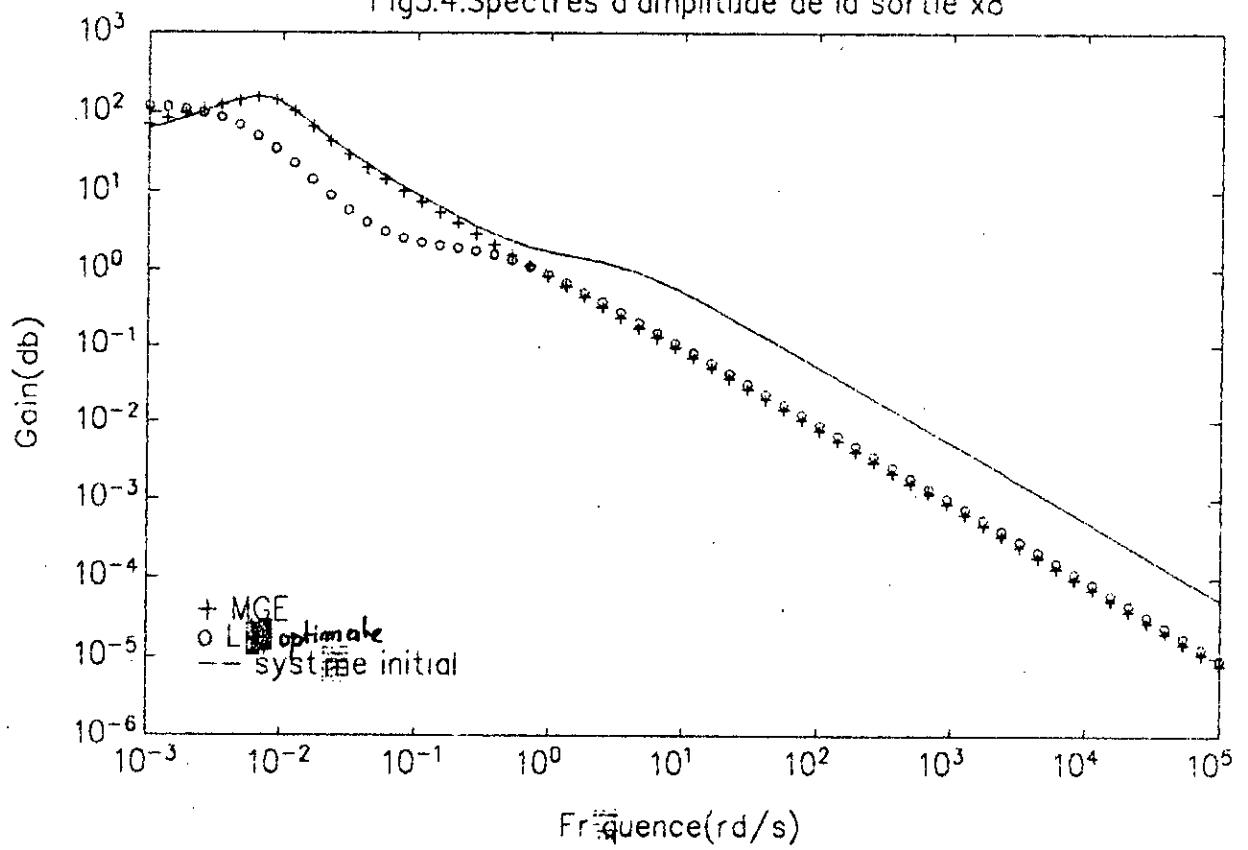


Fig3.4.Spectres d'amplitude de la sortie x8





## Chapitre IV

### Identification Par modèles réduits.

L'identification consiste à déterminer un modèle qui décrive le mieux possible un système inconnu. Le terme mieux reste relié à un critère choisi. Du fait qu'on s'intéresse de plus en plus aux systèmes complexes, on a intérêt à choisir le modèle représentatif aussi simple que possible[9].

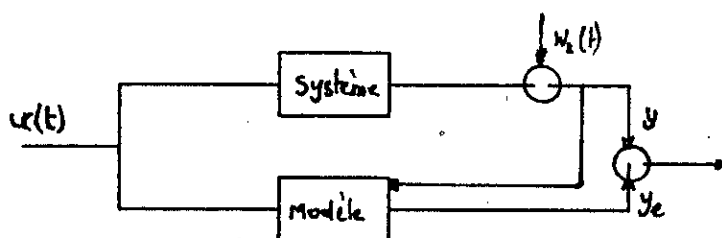
D'autre part, la norme  $L^2$  d'une fonction de transfert, comme a été montré précédemment représente la valeur moyenne de la sortie quand l'entrée est un bruit blanc. Une telle norme semble utile et applicable à l'interprétation du procédé de l'identification. A ce point et afin d'utiliser les techniques étudiées aux chapitres deux et trois, il fera mieux de définir l'identificateur dans l'espace d'état. Outre cette définition, on montrera que la même forme d'équations sera gardée.

Ces équations qui donnent un modèle réduit optimal au sens  $L^2$  seront appliquées à un estimateur optimal. Cependant, les paramètres obtenus ne seront pas les mêmes.

Dans ce chapitre, on définit l'identificateur dans l'espace d'état. Cette définition n'est pas unique et on se restreint à une entrée affectée de bruit blanc. Ensuite, les équations permettant d'avoir un estimateur optimal sont présentées et étudiées. On termine par une conclusion.

#### I. Identificateur dans l'espace d'état

Considérons la structure de l'identificateur suivante :



(fig4.1)

Le système à identifier est supposé stable. Considérons la réalisation minimale :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + w_1 \\ y(t) &= C \cdot x(t) + w_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $w_1$  et  $w_2$  sont deux vecteurs de bruit blanc ayant les variances  $V_1$  et  $V_2$  respectivement. La corrélation de ces deux vecteurs est exprimée par :

$$E\{w_1(t+t')w_2(t)^\top\} = V_{12}\delta(t') \quad (4.2)$$

De l'autre coté, considérons l'estimateur d'ordre réduit  $e < n$  :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= A_e \cdot x_e(t) + B_e \cdot y(t) \\ y_e(t) &= C_e \cdot x_e(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

où  $A_e \in \mathbb{R}^{e \times e}$ ,  $B_e \in \mathbb{R}^{e \times 1}$ ,  $C_e \in \mathbb{R}^{p \times e}$ .

Notons que l'ordre de cet estimateur est déterminé par les contraintes d'implémentation c.à.d par la capacité de calcul disponible en temps réel. Par conséquence,  $e$  est supposé fixe et connu. Le problème se réduit à déterminer les matrices  $A_e$ ,  $B_e$  et  $C_e$  qui minimisent l'erreur quadratique :

$$J(A_e, B_e, C_e) = \lim E\{(Lx - y_e)^\top Q(Lx - y_e)\} \quad (4.4)$$

avec  $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , une matrice qui identifie les états à estimer. Par la suite, on suppose que la réalisation  $(A_e, B_e, C_e)$  est minimale.

## II. Identification par modèles réduits

$$\text{Définissons la matrice idempotente } \tau : \tau = G^\top \Gamma \quad (4.5.a)$$

$$\text{avec } \Gamma \cdot G^\top = I_n \quad (4.5.b)$$

d'autre part, définissons :

$$\tau_1 = I_n - \tau \quad (4.6)$$

$$\mathfrak{R} = K \cdot C^\top + V_{12} \quad (4.7)$$

où  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Alors, il existe trois matrices  $K, \hat{Q}, \hat{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  qui vérifient les équations suivantes :

$$AK + KA^\top + V_1 - \mathfrak{R}V_2^{-1}\mathfrak{R}^\top + \tau_1 \mathfrak{R}V_2^{-1}\tau_1^\top = 0 \quad (4.8)$$

$$A\hat{Q} + \hat{Q}A^\top + \mathfrak{R}V_2^{-1}\mathfrak{R}^\top - \tau_1 \mathfrak{R}V_2^{-1}\mathfrak{R}^\top\tau_1^\top = 0 \quad (4.9)$$

$$(A - \mathfrak{R}V_2^{-1}C)^\top \hat{P} + \hat{P}(A - \mathfrak{R}V_2^{-1}C) + L^\top QL - \tau_1^\top L^\top QL\tau_1 = 0 \quad (4.10)$$

$$\text{rang}(\hat{Q}) = \text{rang}(\hat{P}) = \text{rang}(\hat{Q}\hat{P}) = e \quad (4.11)$$

L'estimateur optimal  $(A_e, B_e, C_e)$  est obtenu par :

$$A_e = \Gamma(A - \mathfrak{R}V_2^{-1}C)G^T \quad (4.12)$$

$$B_e = \Gamma\mathfrak{R}V_2^{-1} \quad (4.13)$$

$$C_e = LG^T \quad (4.14)$$

### III Interprétations

II.2.1. La matrice  $\tau$  est une projection car  $\tau^2 = \tau$ . cette projection est en générale oblique car  $\tau$  n'est pas nécessairement symétrique.

Cette matrice joue un rôle essentiel du fait qu'elle couple une équation de Ricatti (4.8) avec deux équations de Lyapunov (4.9) et (4.10). Comme il a été démontré au chapitre III, la connaissance de  $\tau$  aboutit à la résolution des équations (4.12), (4.13) et (4.14).

II.2.2 Pour avoir la forme standard du filtre de Kalman, il suffit de remplacer  $p = e = n$ , et  $L = I_n$ . Ce qui donne  $\Gamma = G^T = G = \tau = I_n$  et l'équation (4.8) aura la forme :

$$Ak + kA^T + v_1 - \mathfrak{R}v_2^{-1}\mathfrak{R}^T = 0 \quad (4.15)$$

De plus les équations (4.9) et (4.10) sont équivalentes à la supposition que  $(A_e, B_e, C_e)$  est minimal. (Remarquer que dans ce cas que  $C_e = I_n$ ,  $B_e = \mathfrak{R}v_2^{-1}$ ).

Il suit de ce qui précède qu'un estimateur optimal d'ordre réduit est caractérisé par trois équations couplées par une matrice de projection  $\tau$ . Il faut remarquer que le modèle optimal obtenu en résolvant ces équations diffère de celui d'un modèle obtenu par réduction d'un estimateur d'ordre complet ou par estimation d'un modèle réduit. Dans les deux derniers cas, le modèle obtenu ne sera pas optimal [4].

#### IV. Conclusion

Il a été montré que l'identification par modèles réduits d'un système d'ordre élevé met en relief la résolution d'une équation de Riccati et de deux équations de Lyapunov. Ces trois équations sont couplées (entre elles) par une matrice idempotente  $\tau$ . Vue la forme similaire de ces équations avec celles du chapitre III, on peut appliquer quelques techniques de résolution. En particulier, la recherche d'une base dans laquelle, la matrice  $\tau$  aura une forme diagonale peut simplifier les calculs, car dans cette base, les deux matrices  $\hat{Q}$ ,  $\hat{P}$  auront également une forme diagonale. ( voir chapitre III ).

Une remarque à signaler est que le modèle obtenu ne sera pas celui calculé par une réduction d'un estimateur complet pour la simple raison que la matrice  $K$  nécessaire pour trouver l'estimateur optimal est calculée dans notre cas en couplage avec deux autres matrices  $\hat{Q}$ ,  $\hat{P}$ , tandis que pour un estimateur suivi par une réduction, la matrice  $K$  est calculée indépendamment, et il en est de même pour  $\hat{Q}$  et  $\hat{P}$  (qui sont représentées par  $\mathbb{W}_{\text{vs}}$  et  $\mathbb{W}_{\text{os}}$  dans le chapitre précédent ).

## Conclusion

La norme  $\mathcal{L}^2$  de la fonction de transfert est la valeur moyenne de l'erreur entre la sortie du système initial et celle du modèle réduit quand l'entrée est un bruit blanc. Une telle norme est appropriée à l'identification car elle garde une faible erreur sur une large gamme de fréquence.

d'autre part, la recherche d'une solution optimale au sens  $\mathcal{L}^2$  qui minimise cette erreur exige la sélection des états qui contribuent mieux à cette norme. Pour trouver ces états, on a exploité la méthode des gains équilibrés. Cette méthode consiste à la troncature des états faibles à cet égard ayant les termes  $\sigma_i v_i^2$  négligeables. Les exemples donnés ont montrés une bonne approximation des réponses impulsionnelle et fréquentielle. L'écart du spectre d'amplitude n'est pas négligeable pour les faibles fréquences mais il tend à s'annuler quand  $\omega$  augmente. La stabilité supposée pour le système initial est conservée. L'avantage de la MRE réside surtout dans la simplicité des calculs qui sont directs et non itératifs mais elle est restreinte aux systèmes stables et minimaux.

Outre la MRE, La solution optimale au sens  $\mathcal{L}^2$  a été étudiée et illustrée par un exemple. On note que la projection optimale introduite a simplifié relativement les calculs comparés par rapport à la méthode proposée par Wilson et Mishra [25]. Toute fois, l'aspect itératif de l'algorithme proposé et l'exigence de choix des états contribuant le plus au norme  $\mathcal{L}^2$  font que la méthode se restreint aux systèmes stables, minimaux et de dimension moyenne. Les résultats trouvés donnent une meilleure approximation que celle trouvée par la MGE.

Dans le souci d'exploiter cette méthode à un estimateur réduit, on a établi au dernier chapitre un système d'équations qui permettent de trouver un tel estimateur. L'algorithme de résolution peut se ressembler à celui étudié au chapitre précédent, tant que la forme des équations a été gardé. Une remarque importante est déduite de ces équations s'exprime par le fait que les paramètres de cet estimateur diffèrent de ceux d'un estimateur optimal suivi d'une réduction.

---

[15] J.P keller, D. Bonvin, " selection of Input and Output variables as a model reduction problem, " Automatica, Vol 28, N01, pp.171-177, 1992.

[16] B.C. Kuo, Automatic Control systems, Mc Graw Hill 1974.

- [17] A. Laub, M.T. Heath, C.C. Paige, S.R.C. Word, "Computation of systems balancing transformation and other applications of simultaneous diagonalization algorithms", IEEE trans. on Aut. Contr., Vol AC-32, No.2, Feb 1987.
- [18] J.E. Mason, "Identification using low order models", Ph.D. Dissertation University of California, Berkeley, 1988.
- [19] B.C. Moore, "Principal Component analysis in linear systems : Controllability, Observability and Model reduction", IEEE trans. on Aut. Contr. AC-26, pp 17-31, Feb 1981.
- [20] B. Najim, *Commande optimale des systèmes déterministes*, Masson 1982.
- [21] R.J. Ober, "Balanced realizations : Canonical form, parametrization" Int.J.C. Vol 46, No2, pp.663-670.
- [22] M.G. Safonov S.R.Y. Chiang, "A schur method for balanced model reduction", IEEE, transactions on Aut. Contr., Vol 34, No7, July 1989.
- [23] Y. Shamash, "Critical review of methods for deriving stable reduced-order models", TFAC Ident and sys. parametres estimation, pp 1519-1523, 1982.
- [24] S.J. Varoufakis, P.N. Paraskevopoulos, "A comparative study in model reduction of linear time-invariant systems", Automatica pp.38-47, 1980.
- [25] D.A. Wilson, R.N. Mishra, "A new algorithm for optimal reduction of multivariable systems", Int.J. control, Vol 31, No3, pp. 443-466, 1980.

## Annexe 1

### Rappel sur le calcul matriciel

#### 1. Jacobien et Hessien

soit  $f(x)$  un vecteur de fonctions tel que :  $f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}^T$   
le jacobien est :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (A1.1)$$

Le hessien d'une fonction d'un vecteur  $f(x)$  est définie par :

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (A1.2)$$

#### 2. Forme linéaire

Si  $f(x)$  est linéaire :  $f(x) = y^T \cdot x$   
alors :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = y \quad (A1.3)$$

#### 3. Forme quadratique

Si  $f(x)$  est quadratique :  $f(x) = x^T \cdot A \cdot x$   
alors :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = A^T \cdot x + A \cdot x \quad (A1.4)$$

En particulier, si  $A$  est symétrique alors

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 2A \cdot x \quad (A1.5)$$

#### 4. Trace d'une matrice

La trace d'une matrice est donnée par la somme des éléments diagonaux de cette matrice :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (\text{A1.6})$$

On note, en particulier, les formules suivantes :

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T) \quad (\text{A1.7})$$

$$\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A) \quad (\text{A1.8})$$

$$\text{tr}(A \cdot x \cdot x^T) = \text{tr}(x^T \cdot A \cdot x) \quad (\text{A1.9})$$

#### 5. Rang d'une matrice

Il indique le nombre de lignes ou de colonnes linéairement indépendants. La matrice  $A$  possède le rang  $n$ , s'il existe au moins un sous-déterminant non nul avec  $n_i$  lignes ou colonnes et tous les sous-déterminants avec les autres  $n_{i+1}$  sont nuls.

#### 6. Valeurs propres

Ce sont les racines de l'équation caractéristique suivante:

$$\text{Det}(\lambda I_n - A) = 0$$

où  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ .

On a 
$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (\text{A1.10})$$

Une matrice est diagonalisable si ses valeurs propres sont distinctes. On dit aussi qu'elle est similaire à une matrice diagonale.

#### 7. Matrice définie positive

Une matrice  $A$  est définie positive si

$$x^T \cdot A \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{A1.11})$$

Dans ce cas, les valeurs propres de  $A$  sont positives.

Une matrice  $A$  est dite semi-définie positive si

$$x^T \cdot A \cdot x \geq 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{A1.12})$$



### 8. Valeurs Singulières d'une matrice

Les valeurs singulières d'une matrice  $A$  définie positive sont les racines carrées des valeurs propres de  $A \cdot A^T$  qui sont aussi celles de  $A^T \cdot A$ .

On a :

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T \quad (A1.13)$$

avec  $U$  et  $V$  sont deux matrices orthogonales et  $\Sigma$  une matrice diagonale positive contenant les valeurs singulières de  $A$ .

## Annexe 2.

### Démonstration de la proposition I.3

La norme  $\mathcal{L}^2$  de la réponse impulsionnelle du système (2.7) est :

$$\|\mathbf{h}\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int_0^{\infty} \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^T dt \quad (\text{A2.1})$$

La réponse à une impulsion est  $\mathbf{y} = -\mathbf{C}e^{At}\mathbf{B}$  (A2.2)

d'où

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}\|_{\mathcal{L}^2}^2 &= \int_0^{\infty} \mathbf{C}e^{At}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{A^T t}\mathbf{C}^T dt \\ &= \mathbf{C} \left( \int_0^{\infty} e^{At}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{A^T t} dt \right) \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (\text{A2.3})$$

Par définition, on a  $\int_0^{\infty} e^{At}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{A^T t} dt = \mathbf{W}_g$

où  $\mathbf{W}_g$  est le gramien de gouvernabilité, alors :

$$\|\mathbf{h}\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \mathbf{C}\mathbf{W}_g\mathbf{C}^T \quad (\text{A2.4})$$

d'autre part, la norme  $\mathcal{L}^2$  de la fonction de transfert est égale à :

$$\|\hat{\mathbf{h}}\|_{\mathcal{L}^2}^2 = 2\pi \cdot \|\mathbf{h}\|_{\mathcal{L}^2}^2$$

ce qui donne :

$$\|\hat{\mathbf{h}}\|_{\mathcal{L}^2}^2 = 2\pi \cdot \mathbf{C}\mathbf{W}_g\mathbf{C}^T \quad (\text{A2.5})$$

De la même manière, on démontre que :

$$\|\hat{\mathbf{h}}\|_{\mathcal{L}^2}^2 = 2\pi \cdot \mathbf{B}^T\mathbf{W}_o\mathbf{B} \quad (\text{A2.6})$$

De l'autre côté, supposons que  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  est une réalisation équilibrée alors les matrices  $\mathbf{W}_g$  et  $\mathbf{W}_o$  seront égales à la matrice  $\Sigma$  :

$$\Sigma = \text{diag} \{ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \} \quad (\text{A2.7})$$

où  $\sigma_i$  sont les valeurs singulières de ce système.

Les deux équations de Lyapunov que vérifient les deux gramien s'écrivent alors

$$\mathbf{a}_{\bar{j}} \sigma_j + \sigma_j \mathbf{a}_{\bar{j}} + \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_j = 0 \quad (\text{A2.8})$$

$$\mathbf{a}_{\bar{j}} \sigma_j + \sigma_j \mathbf{a}_{\bar{j}} + \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j = 0 \quad (\text{A2.9})$$

où  $\mathbf{b}_i$ ,  $\mathbf{c}_i$  sont respectivement les  $i^{\text{ème}}$  vecteurs lignes et colonnes de B et C, et  $1 \leq i, j \leq n$

Pour  $i=j$ , on a

$$\mathbf{a}_{\bar{i}} = -\mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i / 2\sigma_i = -\mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i / 2\sigma_i \quad (\text{A2.10})$$

les gains équilibrés sont :

$$v_i^2 = \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i = \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i \quad (\text{A2.11})$$

ce qui donne :

$$\mathbf{a}_{\bar{i}} = -v_i^2 / 2\sigma_i \quad (\text{A2.12})$$

Remplaçons dans l'équation (A2.5) ou (A2.6) on obtient :

$$\|\hat{\mathbf{h}}(j\omega)\|_{\text{v}}^2 = 2\pi \sum_{i=1}^n \sigma_i v_i^2 \quad (\text{A2.13})$$

### Annexe 3

#### Démonstration du théorème II.1

Introduisons le système augmenté :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{y}} &= \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

avec  $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix}$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_i \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}_i \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{C}} = [\mathbf{C} \quad -\mathbf{C}_i]$$

comme définies dans l'équation (3.4).

La réponse à une impulsion  $\sqrt{n_i} \delta(t)$  quand l'entrée  $\mathbf{u}_i$  seulement est excitée s'écrit :

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}} e^{\tilde{\mathbf{A}} t} \tilde{\mathbf{b}}_i \sqrt{n_i}$$

( $\tilde{\mathbf{b}}_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $\tilde{\mathbf{B}}$ )

le critère de l'erreur quadratique devient (éq. 3.3)

$$\begin{aligned}J &= \text{tr} \left\{ \int_0^{\infty} (\tilde{\mathbf{C}} e^{\tilde{\mathbf{A}} t} \tilde{\mathbf{b}}_i \sqrt{n_i})^T \mathbf{Q} (\tilde{\mathbf{C}} e^{\tilde{\mathbf{A}} t} \tilde{\mathbf{b}}_i \sqrt{n_i}) dt \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \tilde{\mathbf{C}}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{C}} \int_0^{\infty} (e^{\tilde{\mathbf{A}} t} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{N} \tilde{\mathbf{B}}^T e^{\tilde{\mathbf{A}}^T t}) dt \right\} \\ &= \text{tr}(\mathbf{F} \mathbf{R})\end{aligned} \tag{A3.1}$$

où

$$\mathbf{R} = \int_0^{\infty} (e^{\tilde{\mathbf{A}} t} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{N} \tilde{\mathbf{B}}^T e^{\tilde{\mathbf{A}}^T t}) dt \text{ est la solution de l'équation de Lyapunov :}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{R} + \mathbf{R} \tilde{\mathbf{A}}^T + \mathbf{S} = \mathbf{0} \tag{A3.2}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{N} \tilde{\mathbf{B}}^T \\ \mathbf{F} &= \tilde{\mathbf{C}}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{C}}\end{aligned}$$

La minimisation de (A3.1) sous la contrainte (A3.2) est équivalente à celle de :

$$L(A_i, B_i, C_i) = \text{tr}[\lambda FR + (\tilde{A}R + R\tilde{A}^T + S)P]$$

où  $\lambda \geq 0$ ,  $P \in \mathbb{R}^{(n+i) \times (n+i)}$

Dérivons L par rapport à R, on obtient

$$L_R = \tilde{A}^T P + P\tilde{A} + \lambda F = 0$$

Puisque  $\lambda = 0$  implique  $P = 0$  (car  $\tilde{A}$  est stable), on prendra  $\lambda = 1$ , ce qui donne une solution unique définie positive P solution de :

$$\tilde{A}^T P + P\tilde{A} + F = 0 \quad (\text{A3.3})$$

d'où l'équation (3.5).

Rappelons que R et P sont des matrices symétriques, elles peuvent être partitionnées de la façon suivante :

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_{12} \\ R_{12}^T & R_2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{12}^T & P_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.4})$$

en annulant le gradient de J par rapport à  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$ , on obtient :

$$L_{A_i} = R_{12}^T P_{12} + R_2 P_2 \quad (\text{A3.5})$$

$$L_{B_i} = 2(P_{12}^T B + P_2 B_i) N \quad (\text{A3.6})$$

$$L_{C_i} = 2Q(C_i R_2 - C R_{12}) \quad (\text{A3.7})$$

qui peuvent être transformées, en exploitant (A3.2) et (A3.3)

$$A R_{12} + R_{12} A_i^T + B N B_i^T = 0 \quad (\text{A3.8})$$

$$A_i R_2 + R_2 A_i^T + B_i N B_i^T = 0 \quad (\text{A3.9})$$

$$A^T P_{12} + P_{12} A_i - C^T Q C_i = 0 \quad (\text{A3.10})$$

$$A_i^T P_2 + P_2 A_i + C_i^T Q C_i = 0 \quad (\text{A3.11})$$

Vue que  $A_1$  est stable et que  $(A_1, B_1)$  est contrôlable, (A3.9) implique que  $R_2$  est définie positive. Il en est de même pour  $P_2$  et l'équation (A3.11)

Ce résultat nous permet de définir :

$$G = R_{12} R_2^{-1} \quad (A3.12)$$

$$\Gamma = -P_2^{-1} P_{12}^T \quad (A3.13)$$

d'où les équations (3.12), (3.13), (3.15), et (3.16) tout en utilisant (A3.5)-(A3.7)

Ensuite, définissons les matrices :

$$\hat{R} = R_{12} R_2^{-1} R_{12}^T \quad (A3.14)$$

$$\hat{P} = P_{12} P_2^{-1} P_{12}^T$$

En remplaçant (3.9) et (3.10) et les égalités :

$$R_{12} = \hat{R} \Gamma^T \quad ; \quad P_{12} = -\hat{P} G^T \quad (A3.15)$$

$$R_2 = \Gamma \hat{R} \Gamma^T \quad ; \quad P_2 = G \hat{P} G^T \quad (A3.16)$$

dans (A3.8)-(A3.11) on aura :

$$A_1 \hat{R} \Gamma^T + R \Gamma^T A_1^T + B N B_1^T \Gamma^T = 0 \quad (A3.17)$$

$$A_1 \Gamma R \Gamma^T + \Gamma \hat{R} \Gamma^T A_1^T + \Gamma B N B_1^T \Gamma^T = 0 \quad (A3.18)$$

$$A_1^T \hat{P} G^T + \hat{P} G^T A_1 + C^T R C G^T = 0 \quad (A3.19)$$

$$A_1^T G \hat{P} G^T + G \hat{P} G^T A_1 + G C^T Q C G^T = 0 \quad (A3.20)$$

et en calculant (A3.18)- $\Gamma$ (A3.19), il résulte :

$$A_1 = \Gamma A_1 \Gamma^T (\Gamma \hat{Q} \Gamma^T)^{-1}$$

qui donne (3.14) puisque  $\Gamma \hat{R} \Gamma^T = R_2$ . L'équation (3.14) pourrait être déduite de

$$(A3.20)-G(A3.19)$$

Si on remplace, à ce point, l'équation (3.13) dans (A3.17)-(A3.20) et on utilise les relations :

$$\mathbb{W}_{gs} = \tau \cdot \mathbb{W}_{gs}$$

$$\mathbb{W}_{os} = \mathbb{W}_{os} \cdot \tau$$

qui peuvent être vérifiées aisément, on obtient :

$$(A3.18) = \Gamma(A3.17)$$

$$(A3.20) = G(A3.19)$$

D' où la redondance des équations (A3.18) et (A3.20).

D'autre part, on peut vérifier que

$G^T(A3.17)^T$  et  $(A3.19)\Gamma$  donnent (3.18) et (3.19) respectivement.

Finalement, une projection extrémale donnent  $\mathbb{W}_{gs}$  et  $\mathbb{W}_{os}$  comme (A3.4) et satisfaisant (A3.2), (A3.3), (A3.5)-(A3.7). Un calcul donne :

$$\begin{aligned} K(A, B, C) &= \text{tr}(R_1 C^T Q C - \tau R_{12} C^T R C) + \text{tr}(R_2 C^T Q C) \\ &= \text{tr}[C^T Q C (\mathbb{W}_s - \mathbb{W}_{gs})] \end{aligned}$$