

9/94

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

~~ELECTRONIQUE~~
المدسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Synthèse d'une commande par retour
d'état d'un système MIMO à partir
d'un modèle d'ordre réduit

Proposé par :

M^r = F. CHIGARA

Etudié par :

M^{lle} = M. Oucherif
M^{lle} = D. Yahiaoui

Dirigé par :

M^r = B. Derras
M^{lle} = N. Labchri

PROMOTION

Juin 1994

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Département : ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**SYNTHÈSE D'UNE COMMANDE PAR RETOUR
D'ÉTAT D'UN SYSTÈME MIMO À PARTIR D'UN
MODÈLE D'ORDRE RÉDUIT**

Proposé par :

Mr F. CHIGARA

Etudié par :

Melle M. S. OUCHERIF
Melle D. YAHIAOUI

Dirigé par :

Mr B. DERRAS
Melle N. LABCHRI

Promotion Juin 1994

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi -El-Harrach -ALGER

DEDICACES



Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents pour tous les efforts qu'ils ont consenti à mon égard et sans lesquels je n'aurais pu arriver à ce stade,

A mon petit amour "Narimène",

A mes soeurs et frères,

A ma très chère amie "Hadami",

A mes amis (es): Meriem, Nassima, Yesma, Wassila, Hamed, M'hamed, Taha.

A ma grand-mère paternelle.

A la mémoire de ma grand-mère maternelle.

Dalila

Je dédie ce travail

A ma très chère mère, pour tous ses sacrifices.

A mon cher père pour ses encouragements

A mes frères et soeurs en particulier "Linda"

A tous mes amis (es), en particulier: Dalila, Nassima, Yesma et Wassila

A ma chère Mikouche" et à toute sa famille.

A tous tous les miens.

Meriem Souad

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier :

Mr Derras B. pour l'intérêt qu'il a manifesté à notre égard. Qu'il trouve ici l'expression de notre sincère reconnaissance.

Melle Labchri N. de nous avoir aidé et orienté durant la rédaction de ce mémoire.

Mr Guenfaf L. qui n'a pas hésité à nous faire part de ses connaissances en automatique.

Nos amis (es) pour leurs encouragements

Messieurs, les membres du jury, d'avoir accepté de lire ce document et de le juger.

Nous tenons, en particulier, à exprimer notre gratitude à Mr Souami Hamed et Mr Mahiou Hakim pour leur aide précieuse.

ABSTRACT :

The object of this study is to synthesize a control law by state feedback for multi-input - multi-output linear time invariant discrete or continuous time systems.

This law is first computed for a reduced order obtained from the original system using either the balanced realization truncation method if the system under consideration is minimal or using the internal projection method when it is non-minimal. The law has to be reorganized so that it can be applied to the full-order or original system.

In order to evaluate the performance and the efficiency of the adopted model order reduction method and of the control law synthesized, we propose some numerical examples to illustrate both cases : continuous and discrete time systems.

RESUME :

L'objet de ce mémoire est la synthèse d'une commande par retour d'état pour un système multivariable, linéaire et invariant dans le temps pour le cas discret ou continu.

Cette synthèse se fera après réduction du modèle initial par la méthode de troncature des réalisations équilibrées dans le cas où ce système est minimal ou par la méthode de projection interne dans le cas où le système considéré est non-minimal.

Afin d'évaluer les performances des méthodes de réduction utilisées et de la commande appliquée au système initial, nous proposons des exemples numériques pour les deux cas : continu et discret.

Mots - Clés : systèmes multivariables, espace d'état, réduction de l'ordre de modèles, valeurs singulières, synthèse de la commande par retour d'état.

SOMMAIRE

Introduction générale

- 1 -

CHAPITRE I : Généralités sur les systèmes multivariables

I-1 Introduction

- 3 -

I-2 Cas continu:

- 3 -

I-2.1 Propriétés des systèmes continus

- 3 -

I-2.2 Représentation dans l'espace d'état

- 5 -

I-2.3 Commandabilité et Observabilité

- 5 -

I-3 Cas discret

- 7 -

I-3.1 Passage des systèmes continus aux systèmes discrets et vice versa

- 7 -

I-3.2 Propriétés des systèmes discrets

- 8 -

I-3.3 Représentation dans l'espace d'état

- 9 -

I-3.4 Commandabilité et observabilité

- 9 -

I-4 Conclusion

- 9 -

CHAPITRE II : Réduction de l'ordre des modèles

II.1 Introduction

- 10 -

II.2 Réduction par la méthode de troncature des réalisations équilibrées (M.T.R.E.)

- 10 -

II.2.1. Equilibre du système

- 10 -

a. Détermination des grammiens

- 10 -

b. Algorithme d'équilibre

- 12 -

II.2.2 Réduction par troncature de la réalisation équilibrée

- 14 -

a. Principe de la réduction

- 14 -

b. Algorithme de réduction

- 16 -

c. organigramme de la M.T.R.E.

- 17 -

II.2.3 Application et interprétation

- 19 -

II.2.4. Conclusion

- 37 -

II.3 Réduction par utilisation de "projection interne	-38-
II.3.1 Introduction	-38-
II-3-2 Procédure de réduction	-42-
II.3.3 Méthode de la "Racine - Carrée"	-44-
II.3.4 Méthode de Schur	-47-
a. Algorithme	-47-
b. Organigramme	-50-
II.3.5 Application	-53-
a - cas continu	-53-
b Cas discret	-61-
II.4 Conclusion	-76-
CHAPITRE III : Synthèse d'une commande par retour d'état pour les systèmes multivariables	
III.1 Introduction	-77-
III.2. Structure de commande optimale par retour d'état	-77-
III.2.1 Equations en boucle - ouverte	-77-
III.2.2: Equations en boucle fermée	-78-
III.2.3 Transformation sous forme canonique et décomposition en sous système	-81-
III.2.4 Détermination de la matrice de contre réaction d'état K_r	-81-
III-3 Structure de réglage d'état pour le modèle initial	-89-
III-4 Algorithme	-89-
III.5 Organigramme	-91-
III.6 Application et interprétation	-93-
III.7 Conclusion	-101-
Conclusion générale	-102-
Références bibliographiques	-102-
Annexes	

INTRODUCTION GENERALE

Le principe de la contre réaction est à la base de la théorie de la commande depuis son avènement en tant que science. Ainsi son utilisation entre dans le cadre de la stabilisation de processus en boucle ouverte et aussi la mise au point de dispositifs capables d'améliorer les performances du système considéré [20].

De nombreux travaux ont été effectués pour établir des méthodes de synthèse de contrôleurs ou de commandes. Les premières techniques ont été développées en termes d'équations différentielles pour des modèles linéaires invariants dans le temps. Par la suite des résultats assez significatifs ont été obtenus par transposition du problème de commande dans le domaine fréquentiel grâce à des techniques de transformations intégrales. Néanmoins, les résultats les plus satisfaisants ont été obtenus par la mise au point d'une stratégie de commande optimale et ceci dès l'avènement de la représentation d'état en tant qu'outil mathématique très puissant et approprié à la description de l'évolution des processus dynamiques existants en pratique [13].

En général cette synthèse de commande (par retour d'état) peut s'avérer compliquée et fastidieuse en particulier pour les systèmes multivariables d'un ordre élevé.

Une solution qui peut être apportée à ce problème est la simplification de ces systèmes par la réduction de l'ordre des modèles qui leurs sont adoptés. D'où l'intérêt de la méthode que nous avons élaboré et qui consiste en premier lieu à réduire l'ordre du modèle multivariable supposé linéaire et invariant dans le temps correspondant au système considéré par une méthode d'approximation utilisant la représentation d'état et dont le choix se fera selon que ce système est minimal ou non-minimal, puis de synthétiser à partir du modèle simplifié un contrôleur correspondant d'ordre réduit, qui sera utilisé pour commander par retour d'état le système original (supposé d'ordre élevé).

Nous évaluerons ensuite les performances et ceci par comparaison des réponses indicelles en boucle - ouverte et en boucle - fermée du système initial.

L'étude présentée dans ce mémoire s'étalera sur trois chapitres :

Le premier chapitre sera consacré à l'introduction de la notion de systèmes, ses principales propriétés et sa représentation dans l'espace d'état.

Le second chapitre portera sur l'étude des deux procédures de réduction de l'ordre des modèles utilisées à savoir la méthode de troncature des réalisations équilibrées et la méthode des projections internes (méthode de la racine carrée et méthode de Schur), qui

sera suivie par des exemples numériques qui mettront en évidence la qualité du modèle d'ordre réduit par rapport au modèle initial.

C'est dans le troisième chapitre que se fera la synthèse de la commande par retour d'état à partir du modèle d'ordre réduit par l'une des méthodes de réduction développées dans le second chapitre. Cette synthèse se fera pour le cas discret vu que les contrôleurs digitaux sont utilisés aussi bien dans le cas continu que dans le cas discret.

Pour mettre en valeur les performances de cette commande nous tracerons les réponses indicielles du système initial en boucle - ouverte et en boucle - fermée.

Une interprétation des résultats sera donnée à la fin de ce chapitre.

Afin de mettre en relief les résultats de notre travail, une conclusion générale sera présentée à la fin de ce projet.

En annexes seront donnés les différents algorithmes et outils mathématiques utilisés au cours de notre étude.

Il est à noter que notre programme a été élaboré en utilisant le logiciel Matlab [19] et que les graphes seront tracés par le logiciel grapher [12].

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES SYSTEMES MULTIVARIABLES

I-1 INTRODUCTION:

Par définition un système est un ensemble fonctionnel qui a pour objet d'atteindre un fonctionnement spécifié, il subit les actions du milieu extérieur et réagit en conséquence. Il peut représenter soit un modèle purement mathématique ou un processus physique réel qui fait l'objet d'une analyse ou d'une synthèse.

Dans ce chapitre nous nous proposons d'introduire la notion de "système - multivariable". Les propriétés de ce système ainsi que sa représentation dans l'espace d'état.

Il est à noter que nous considérons deux classes de systèmes à savoir : continus et discrets.

I-2 CAS CONTINU:

I-2.1 PROPRIETES DES SYSTEMES CONTINUS:

- **Linéarité : [10]**

C'est l'un des principaux concepts de la théorie des systèmes. Elle est définie par le principe de superposition.

Soient $U_1(t)$, $U_2(t)$ les entrées du système et $y_1(t)$, $y_2(t)$ leurs réponses correspondantes. Et soit 'T' l'opérateur caractérisant le système, ce dernier est dit linéaire si :

$$\begin{aligned} T[\alpha \cdot U_1(t) + \beta \cdot U_2(t)] &= \alpha \cdot T[U_1(t)] + \beta \cdot T[U_2(t)] \\ &= \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t) \end{aligned} \quad (I.1)$$

avec α , β deux constantes.

- **Invariance temporelle** [4] :

Un système est dit invariant dans le temps si un retard ou un décalage à son entrée n'introduit pas de distorsion à la sortie, ie:

$$T[U(t-\tau)] = y(t-\tau) \quad (1.2)$$

τ : le décalage temporel.

- **Stabilité** [10], [17]

La stabilité d'un système est la propriété selon laquelle un système écarté de sa position d'équilibre par une sollicitation extérieure tend à y revenir une fois que cette sollicitation a cessé.

Cette propriété est explicitée par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0 \quad (1.3)$$

$h(t)$: la réponse impulsionnelle du système.

I-2.2 REPRESENTATION DANS L'ESPACE D'ETAT [8]:

Dans le cas continu, la représentation d'état d'un système d'équations différentielles explicite son fonctionnement dynamique.

Pour un système linéaire et invariant dans le temps, cette représentation est donnée par :

$$\begin{aligned} dX(t)/dt &= A \cdot X(t) + B \cdot U(t) \\ Y(t) &= C \cdot X(t) + D \cdot U(t) \end{aligned} \quad (I.4)$$

avec $X(t)$: le vecteur d'état du système

$Y(t)$: la sortie du système

$U(t)$: la commande du système

et A : matrice d'évolution de dimension $n \times n$.

B : matrice de commande de dimension $n \times m$.

C : matrice d'observation de dimension $p \times n$.

D : matrice de couplage entrée - sortie de dimension $p \times m$.

Les propriétés de la représentation d'état sont :

- 1 L'apparition des conditions initiales explicitement.
- 2 Les matrices utilisées sont des matrices à coefficients constants pour le cas d'un système invariant dans le temps.
- 3 La représentation est la même pour des systèmes SISO et des systèmes MIMO.
- 4 L'adaptation des calculs aux calculateurs numériques.

I-2.3 COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE :

- **Définition de la commandabilité :** [25]

Un système est dit commandable, si nous pouvons sur une durée finie modifier toutes les composantes du vecteur d'état par un signal de commande $u(t)$ en vue d'obtenir un état final $x(t_f)$ à partir d'un état initial $x(t_i)$.

- **Définition de l'observabilité** : [22]

Un système est dit observable si tout état peut être déterminé à partir de l'observation des variables de sorties sur un intervalle de temps fini, donc si toutes les variables d'état influencent les variables de sortie.

- **Critères de commandabilité et d'Observabilité de Kalman** : [9]

Soit un système de dimension n dont la représentation dans l'espace d'état est :

$$\begin{aligned}dX(t)/dt &= A \cdot X(t) + B \cdot U(t) \\ Y(t) &= C \cdot X(t) + D \cdot U(t)\end{aligned}$$

Les matrices de commandabilité et d'observabilité sont données respectivement par les expressions suivantes :

$$\beta = [B \quad A \cdot B \quad \dots \quad A^{(n-1)} \cdot B] \quad (I.5)$$

$$\phi = [C^T \quad A^T \cdot C^T \quad \dots \quad (A^{(n-1)})^T \cdot C^T] \quad (I.6)$$

avec n l'ordre du système initial considéré

- Ce système est complètement commandable si et seulement si:

$$\text{rang } \beta = n \quad (I.7)$$

- Ce système est complètement observable si et seulement si:

$$\text{rang } \phi = n \quad (I.8)$$

• **Matrice de Hankel : [5]**

La matrice de Hankel est définie comme étant le produit des deux matrices de commandabilité et d'observabilité infinies.

Nous écrivons :

$$H = \varphi \cdot \beta \quad (I.9)$$

I-3 CAS DISCRET :

I-3.1 PASSAGE DES SYSTEMES CONTINUS AUX SYSTEMES DISCRETS ET VICE VERSA : [11]

Soit le système continu défini par sa représentation d'état:

$$\begin{aligned} dX(t)/dt &= A \cdot X(t) + B \cdot U(t) \\ Y(t) &= C \cdot X(t) + D \cdot U(t) \end{aligned}$$

Sa fonction de transfert aura pour expression :

$$G(S) = D + C \cdot (sJ - A)^{-1} \cdot B \quad (I.10)$$

La transformation bilinéaire reliant la variable complexe du domaine fréquentiel continu à celle du domaine fréquentiel discret est donnée par :

$$S = \beta \cdot \frac{Z-1}{Z+1} \longrightarrow Z = \frac{\beta+S}{\beta-S} \quad (I.11)$$

avec $\beta = \frac{2}{T_0}$ et T_0 la période d'échantillonnage.

En général $T_0 = 2$ unités de temps, d'où $\beta = 1$.

La fonction de transfert du système discret correspondant est donnée par :

$$\begin{aligned}\tilde{G}(Z) &= G\left(s = \frac{Z-1}{Z+1}\right) \\ &= \tilde{D} + \tilde{C}(ZI - \tilde{A})^{-1} \cdot \tilde{\beta}\end{aligned}\quad (1.12)$$

avec $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ la représentation d'état du système discret :

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= (I + A) \cdot (I - A)^{-1} \\ \tilde{B} &= \sqrt{2} \cdot (I - A)^{-1} \cdot B \\ \tilde{C} &= \sqrt{2} \cdot C \cdot (I - A)^{-1} \\ \tilde{D} &= D + C(I - A)^{-1} \cdot B\end{aligned}\quad (1.13)$$

Réciproquement:

$$\begin{aligned}A &= (I + \tilde{A})^{-1} \cdot (\tilde{A} - I) \\ B &= \sqrt{2} \cdot (I + \tilde{A})^{-1} \cdot \tilde{B} \\ C &= \sqrt{2} \cdot C \cdot (I + \tilde{A})^{-1} \\ D &= \tilde{D} - \tilde{C}(I + \tilde{A})^{-1} \cdot \tilde{B}\end{aligned}\quad (1.14)$$

I-3.2 PROPRIETES DES SYSTEMES DISCRETS : [4], [10]

Les propriétés de linéarité et d'invariance dans le temps sont valables aussi bien dans le cas continu que dans le cas discret. La seule différence réside dans la condition que doit satisfaire le système pour qu'il soit stable, cette condition est :

- Les valeurs propres $[A1]$ de la matrice d'évolution (\tilde{A}) appartiennent au cercle unité.

I-3.3 REPRESENTATION DANS L'ESPACE D'ETAT : [7]

La représentation d'état d'un système discret est donnée par les équations d'état et d'observation :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= \tilde{A} \cdot X(k) + \tilde{B} \cdot U(k) \\ Y(k) &= \tilde{C} \cdot X(k) + \tilde{D} \cdot U(k) \end{aligned} \tag{I.15}$$

- avec \tilde{A} : matrice d'évolution de dimension $n \times n$.
 \tilde{B} : matrice de commande de dimension $n \times m$.
 \tilde{C} : matrice d'observation de dimension $p \times n$.
 \tilde{D} : matrice de couplage entrée - sortie de dimension $p \times m$.

I-3.4 COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE : [9]

Un système discret de dimension (n) est dit complètement commandable si et seulement si :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A} \cdot \tilde{B} & \dots & \tilde{A}^{(n-1)} \cdot \tilde{B} \end{bmatrix} = n \tag{I.16}$$

De même, un système de dimension (n) est dit complètement observable si et seulement si :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \tilde{C}^T & \tilde{A}^T \cdot \tilde{C}^T & \dots & (\tilde{A}^{(n-1)})^T \cdot \tilde{C}^T \end{bmatrix} = n \tag{I.17}$$

I-4 CONCLUSION :

Comme nous l'avons mentionné précédemment, ce chapitre introduit la notion de système et les principales propriétés qui lui sont liées et qui seront utilisées pour la mise au point de la structure de réglage par retour d'état, dans les deux cas : continu et discret.

Néanmoins, dans l'étape de réduction, qui fera l'objet du chapitre suivant, nous avons considéré le cas de systèmes "non minimaux" i.e. présentant une certaine redondance des variables d'état et aussi le cas des systèmes "minimaux" dont les variables d'état sont linéairement indépendantes.

CHAPITRE II

**REDUCTION DE L'ORDRE DES
MODELES**

II.1 INTRODUCTION :

Dans l'industrie, la plupart des processus sont représentés par un système complexe. Cette complexité, qui provient généralement de l'ordre élevé des systèmes, limite les approches d'analyse et de synthèse de commande pour de telles structures. D'où la nécessité d'utiliser un modèle d'ordre réduit qui suit le comportement du système initial avec une certaine tolérance afin de faciliter la synthèse d'un contrôleur d'ordre réduit qui sera utilisé ensuite pour commander le système original.

En effet, l'importance de la technique de réduction de l'ordre du modèle s'est accrue considérablement durant ces deux dernières décennies, puisque des techniques assez variées ont été mises au point. Les plus récentes se basent essentiellement sur l'utilisation de la description interne des systèmes à approximer.

Parmi ces méthodes nous nous sommes intéressées à la procédure simple de troncature de la réalisation équilibrée utilisée particulièrement dans le cas des **systèmes minimaux** et à l'approche de projection interne pour les systèmes **non minimaux**.

II.2 REDUCTION PAR LA METHODE DE TRONCATURE DES REALISATIONS EQUILIBREES (M.T.R.E.)

La M.T.R.E. est l'une des premières méthodes de réduction (1981) qui ont été établies pour la réduction de l'ordre des systèmes. Elle est basée sur la troncature des états qui sont faiblement commandables et faiblement observables, elle nécessite a priori une étape dite "**d'équilibre**".

- **Cas continu**

II.2.1. EQUILIBRE DU SYSTEME

La question qui se pose immédiatement est : comment et pourquoi s'effectue l'équilibre d'un système ?

Le principe général de l'équilibre consiste à rendre symétrique une certaine propriété d'entrée, qui est la commandabilité, avec une certaine propriété de sortie, qui est l'observabilité, par le biais d'une transformation régulière de similarité qui effectue un changement de base des coordonnées dans laquelle les deux grammiens, définis ultérieurement, sont diagonaux et égaux [2].

a. Détermination des grammiens

Considérons la représentation d'état d'un système MIMO, linéaire et invariant dans le temps :

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= A \cdot X(t) + B \cdot u(t) \\ Y(t) &= C \cdot X(t) \end{aligned} \tag{II.1}$$

avec $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times r}$, $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$

Ce système est supposé strictement propre, asymptotiquement stable, commandable et observable.

Le grammien de commandabilité [15], qui donne une idée sur l'énergie qu'il faut fournir au système en vue de sa commande, est défini par :

$$G_c = \int_0^{\infty} \exp(At) \cdot B \cdot B^T \cdot \exp(A^T t) dt \tag{II.2}$$

Le grammien d'observabilité [15], qui concrétise l'énergie nécessaire au système afin de pouvoir l'observer, est défini par :

$$G_o = \int_0^{\infty} \exp(A^T t) \cdot C^T \cdot C \cdot \exp(At) dt \tag{II.3}$$

Il est à noter que ces matrices (G_c, G_o) définies positives sont des solutions uniques des équations de Lyapunov, données ci dessous :

$$\begin{cases} A \cdot G_c + G_c \cdot A^T + B \cdot B^T = 0 \\ A^T \cdot G_o + G_o \cdot A + C^T \cdot C = 0 \end{cases} \tag{II.4}$$

La détermination de ces grammiens s'effectue par résolution de ces équations [A4]: Les valeurs propres [A1] du produit des grammiens ($G_c \cdot G_0$), qui concrétisent les énergies de commande et d'observation, donnent une mesure quantitative de ces énergies indépendamment de toute transformation introduite [2].

b. Algorithme d'équilibre [15]

L'algorithme le plus communément utilisé pour l'équilibre de la réalisation dans l'espace d'état est celui de Laub (1980).

Cette procédure d'équilibre est donnée par les étapes suivantes :

Etape 1 : Calcul des grammiens de commandabilité et d'observabilité (G_c, G_0) solutions des équations de Lyapunov [A4] :

$$\begin{cases} A \cdot G_c + G_c \cdot A^T + B \cdot B^T = 0 \\ A^T \cdot G_0 + G_0 \cdot A + C^T \cdot C = 0 \end{cases}$$

Etape 2 : Calcul des facteurs de Cholesky des grammiens [A2] :

$$\begin{cases} G_c = L_c \cdot L_c^T \\ G_0 = L_0 \cdot L_0^T \end{cases}$$

avec L_c, L_0 : matrices triangulaires inférieures.

Etape 3 : Calcul de la décomposition en valeurs singulières [A3] du produit des facteurs de Cholesky :

$$L_0^T \cdot L_c = U \cdot \Sigma^2 \cdot V^T$$

ou $L_c^T \cdot L_0 = V \cdot \Sigma^2 \cdot U^T$

avec U, V : matrices orthogonales [A1].

Σ^2 : matrice diagonale des modes du second ordre ie $\Sigma^2 = \text{diag}\{\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2\}$

et $\sigma_1^2 > \sigma_{i+1}^2 \quad i = \overline{1, n}$.

Etape 4 : Formation de la transformation d'équilibre et de son inverse :

$$T = L_C \cdot V \cdot \Sigma^{-\frac{1}{2}}$$

$$T^{-1} = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot U^T \cdot L_0^T$$

Etape 5 : Formation des matrices équilibrées :

$$A_e = T^{-1} \cdot A \cdot T = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot U^T \cdot L_0^T \cdot A \cdot L_C \cdot V \cdot \Sigma^{-\frac{1}{2}}$$

$$B_e = T^{-1} \cdot B = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot U^T \cdot L_0^T \cdot B$$

$$C_e = C \cdot T = C \cdot L_C \cdot V \cdot \Sigma^{-\frac{1}{2}}$$

- Test de vérification :

Nous pouvons vérifier que T est effectivement une transformation d'équilibre pour les deux grammiens :

$$G_e = T^{-1} \cdot G_C \cdot T = \Sigma$$

$$G_{0_e} = T^T \cdot G_0 \cdot T = \Sigma$$

Cet algorithme a pour but de faciliter par la suite l'étape de réduction.

En effet, lorsque nous équilibrons les grammiens G_C et G_0 , par le biais d'une transformation d'équilibre 'T', ie $G_e = G_{0_e} = \Sigma$, ce qui revient à faire l'étude d'une seule matrice (Σ) donnant à la fois une idée sur l'énergie de commandabilité et celle d'observabilité [2].

Le système que nous obtenons est à présent "intérieurement équilibré". [18]

II.2.2 REDUCTION PAR TRONCATURE DE LA REALISATION EQUILIBREE :

L'idée de base de cette méthode de réduction est l'élimination par simple troncature des états qui sont faiblement commandables et faiblement observables, suivant le critère de la norme de Hankel [21].

Ceci revient à éliminer, du point de vue énergétique, les valeurs singulières les plus faibles du système [2].

a. principe de la réduction

La matrice diagonale des valeurs singulières peut être partitionnée comme suit :

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_1 & 0 \\ \hline 0 & \Sigma_2 \end{array} \right] \quad (\text{II.5})$$

où $\Sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$
 $\Sigma_2 = \text{diag}\{\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n\}$ et $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_k > \sigma_{k+1} > \dots > \sigma_n > 0$

Cette partition permettra d'éliminer les valeurs singulières les plus faibles en imposant une certaine erreur qui permettra d'établir l'ordre de troncature (k) [21], donnant un sous-système sous-optimal pour cette erreur.

Le critère de réduction utilisé est celui de la "norme de Hankel" [21] défini par :

$$\left[\sum_{i=1}^k \sigma_i^4 \right]^{\frac{1}{2}} \gg \left[\sum_{i=k+1}^n \sigma_i^4 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.6})$$

où σ_i^2 sont les modes du second ordre ($k \neq 0, k \neq n$).

L'erreur relative de Hankel sera alors définie par le rapport suivant :

$$\varepsilon_k = \left[\sum_{i=k+1}^k \sigma_i^4 \right]^{1/2} / \left[\sum_{i=1}^k \sigma_i^4 \right]^{1/2} \quad (\text{II.7})$$

avec $k = \overline{1, n-1}$

Par souci d'efficacité, une deuxième erreur est introduite telle que :

$$\xi_i = |\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}| \leq \xi \quad (\text{II.8})$$

avec $i = \overline{1, n-2}$

ξ : l'erreur choisie.

A partir de ce critère, le système est réorganisé en deux sous-systèmes donnés par la représentation suivante [21] :

$$\begin{bmatrix} dX_1(t)/dt \\ dX_2(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{e_{11}} & A_{e_{12}} \\ A_{e_{21}} & A_{e_{22}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{e_1} \\ B_{e_2} \end{bmatrix} \cdot U(t) \quad (\text{II.9})$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} C_{e_1} & C_{e_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}$$

En effet, la partition de Σ introduit la notion de sous-système dominant donné par sa représentation d'état (A_r, B_r, C_r) avec :

$$\begin{cases} A_r = A_{e_{11}} \\ B_r = B_{e_1} \\ C_r = C_{e_1} \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

(A_r, B_r, C_r) est la partie la plus commandable et la plus observable du système initial.

b. Algorithme de réduction : [21]

Considérons la représentation équilibrée du système d'ordre (n) : (A_e, B_e, C_e) . La procédure de réduction par troncature simple dans la base équilibrée est donnée par les étapes suivantes :

Étape 1 : Choix de la valeur de l'erreur ξ

Étape 2 : Formation du vecteur d'erreur relative de Hankel ε tel que :

$$\varepsilon_k = \left[\sum_{i=k+1}^n \sigma_i^4 \right]^{1/2} / \left[\sum_{i=1}^k \sigma_i^4 \right]^{1/2}$$

avec $k = \overline{1, n-1}$

Étape 3 : Calcul du vecteur d'erreur ξ_i :

$$\xi_i = |\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}|$$

avec $i = \overline{1, n-2}$

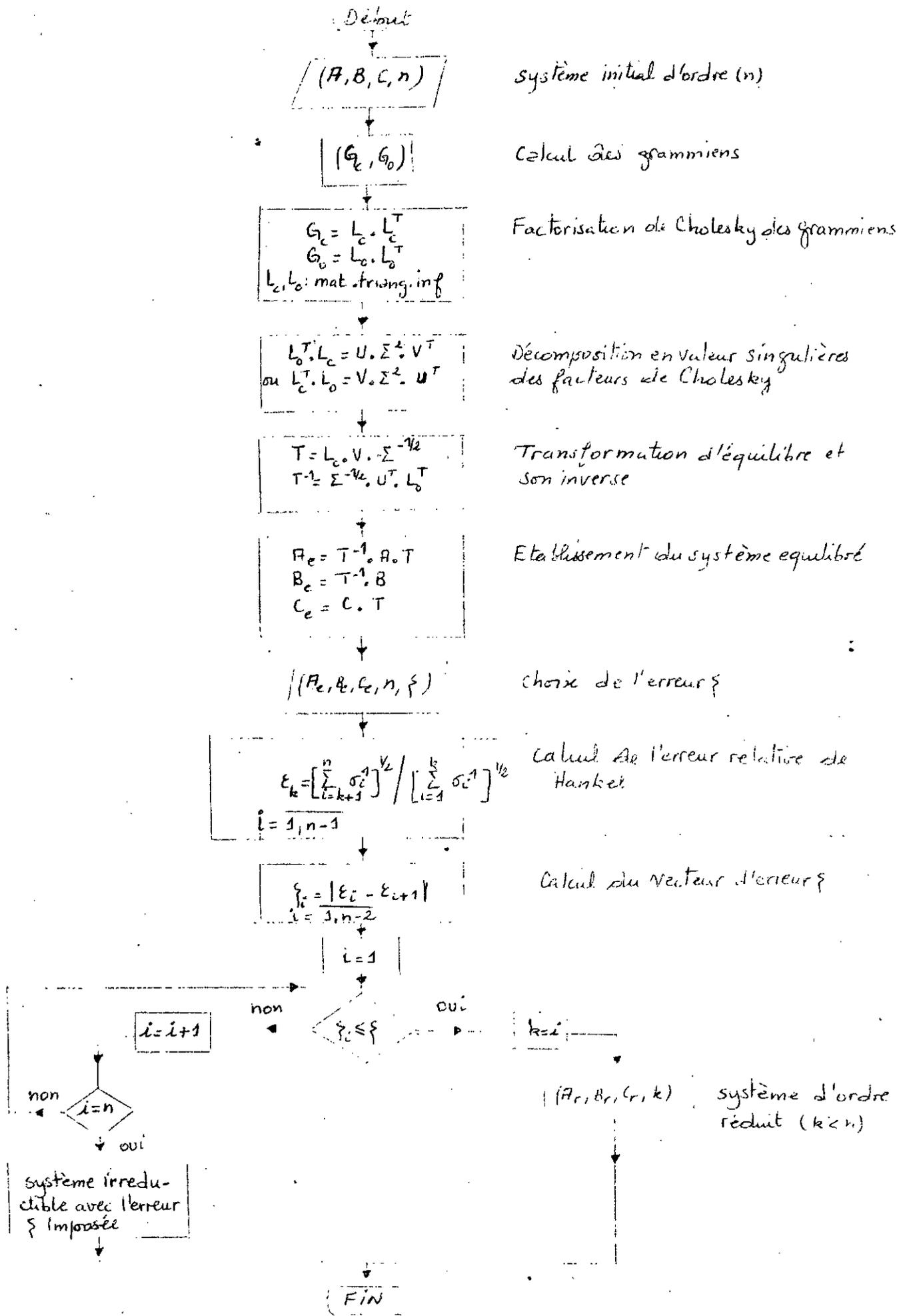
Étape 4 : boucle de test :

Si $\xi_i \leq \xi$ aller à l'étape 5

Sinon aller à l'étape 2

Étape 5 : Etablissement du système d'ordre réduit (A_r, B_r, C_r) .

c. organigramme de la M.T.R.E.



Organigramme. 1. Réduction par la F.T.R.E.

• Cas discret :

La procédure de réduction qui vient d'être explicitée est valable aussi bien dans le cas continu que dans le cas discret.

Considérons la représentation d'état d'un système discret linéaire et invariant dans le temps :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= \tilde{A} \cdot X(k) + \tilde{B} \cdot U(k) \\ Y(k) &= \tilde{C} \cdot X(k) + \tilde{D} \cdot U(k) \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Le système est supposé strictement propre, asymptotiquement stable, commandable et observable. Les grammians de commandabilité et d'observabilité [15] sont donnés par les expressions suivantes :

$$G_c = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{A}^k \cdot \tilde{B} \cdot \tilde{B}^T \cdot (\tilde{A}^T)^k \quad (\text{II.12})$$

$$G_o = \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{A}^T)^k \cdot \tilde{C}^T \cdot \tilde{C} \cdot \tilde{A}^k \quad (\text{II.13})$$

Le calcul de ces matrices (G_c, G_o) , définies positives, est donné par la résolution des équations de Lyapunov [A4] données ci dessous :

$$\begin{cases} \tilde{A} \cdot G_c \cdot \tilde{A}^T - G_c + \tilde{B} \cdot \tilde{B}^T = 0 \\ \tilde{A}^T \cdot G_o \cdot \tilde{A} - G_o + \tilde{C}^T \cdot \tilde{C} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

La représentation d'état du système équilibré sera alors donnée par :

$$\tilde{A}_e = T^{-1} \cdot \tilde{A} \cdot T$$

$$\tilde{B}_e = T^{-1} \cdot \tilde{B}$$

$$\tilde{C}_e = \tilde{C} \cdot T$$

Le principe de réduction explicité précédemment étant le même pour le cas discret, la réorganisation du système en deux sous système sera de la forme suivante : [21]

$$\begin{bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{e_{11}} & \tilde{A}_{e_{12}} \\ \tilde{A}_{e_{21}} & \tilde{A}_{e_{22}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_{e_1} \\ \tilde{B}_{e_2} \end{bmatrix} \cdot U(k) \quad (\text{II.15})$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{e_1} & \tilde{C}_{e_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{bmatrix}$$

Cette réorganisation nous permet d'établir la représentation d'état du sous système dominant donnée par :

$$\begin{cases} \tilde{A}_r = \tilde{A}_{e_{11}} \\ \tilde{B}_r = \tilde{B}_{e_1} \\ \tilde{C}_r = \tilde{C}_{e_1} \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

Remarque :

Une excellente propriété de la technique de réduction de modèle par troncature montrée par Pernebo et Silverman [24], est la préservation des propriétés du système initial à savoir : la stabilité asymptotique, la commandabilité et l'observabilité.

II.2.3 APPLICATION ET INTERPRETATION :

L'objet de cette section est l'évaluation des performances de la M.T.R.E.

Nous proposons trois exemples de modèles linéaires et invariants dans le temps : (deux en continu et un en discret). Pour chaque cas nous tracerons les fonctions essentielles telles que : réponses impulsionnelle et indicielle, spectres de phase et d'amplitude et ceci pour les deux modèles : initial et réduit.

Exemple 1 : Cas continu [28]

Soit le modèle MIMO d'ordre 4 - représentant les dynamiques longitudinales d'un avion type F-8.

La représentation d'état de ce système est :

- La matrice d'évolution :

$$A = \begin{bmatrix} -6.560E-03 & -7.577E-02 & 7.390E-04 & 3.564E-03 \\ 7.577E-02 & -8.383E-03 & 9.204E-04 & 4.445E-03 \\ -9.171E-04 & 1.142E-03 & -9.219E-02 & -3.086 \\ 3.597E-03 & -4.486E-03 & 3.136 & -1.816 \end{bmatrix}$$

- Le vecteur de commande :

$$B^T = [-4.173 \quad 4.831 \quad -3.293E-01 \quad 1.292]$$

- La matrice d'observation :

$$C = \begin{bmatrix} 5.530E-04 & 1.241E-03 & -1.951E-01 & -1.743E-01 \\ 4.713 & 4.831 & -2.653E-01 & -1.281 \end{bmatrix}$$

- La matrice des valeurs singulières de ce modèle est :

$$\Sigma = \text{diag} \{1629.74; 1392.24; 0.59; 0.46\}$$

- La représentation du modèle d'ordre réduit :

- La matrice d'évolution réduite :

$$A_r = \begin{bmatrix} -6.561E-3 & -7.577E-2 \\ 7.577E-2 & -8.382E-3 \end{bmatrix}$$

- le vecteur de commande réduit

$$B_r = \begin{bmatrix} 4.713 \\ -4.831 \end{bmatrix}$$

- la matrice d'observation réduite :

$$C_r = \begin{bmatrix} -5.530 E - 4 & -1.241 E - 3 \\ -4.713 & -4.831 \end{bmatrix}$$

M.T.R.E (cas continu)

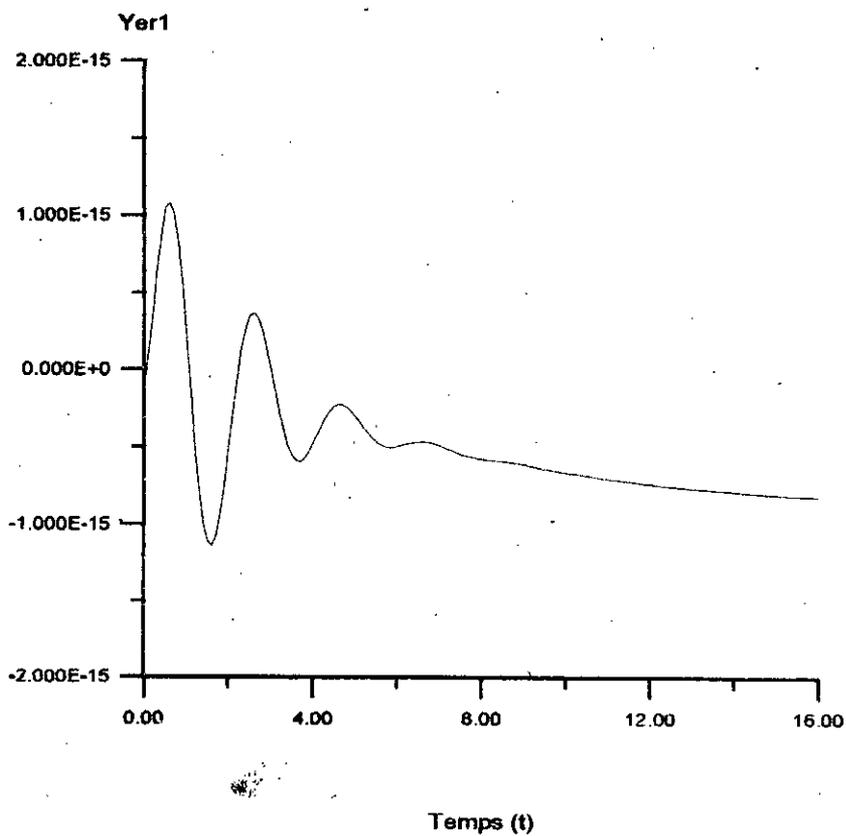
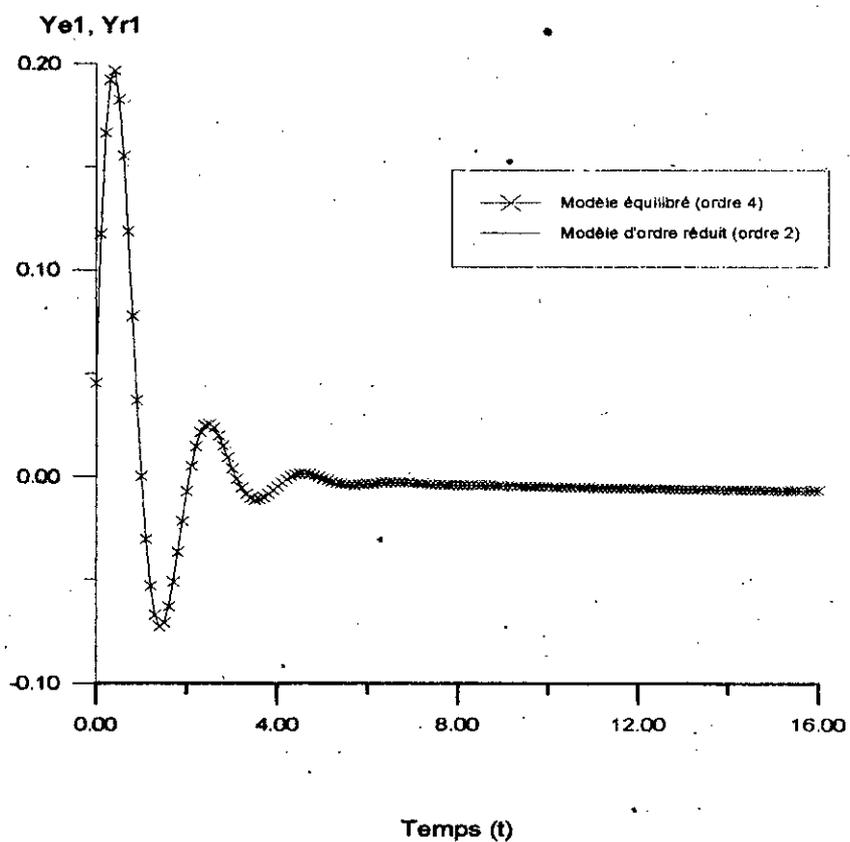


Figure 2-a-1: Réponses impulsionnelles Y_e, Y_r et leur écart (sortie 1)

M.T.R.E (cas continu)

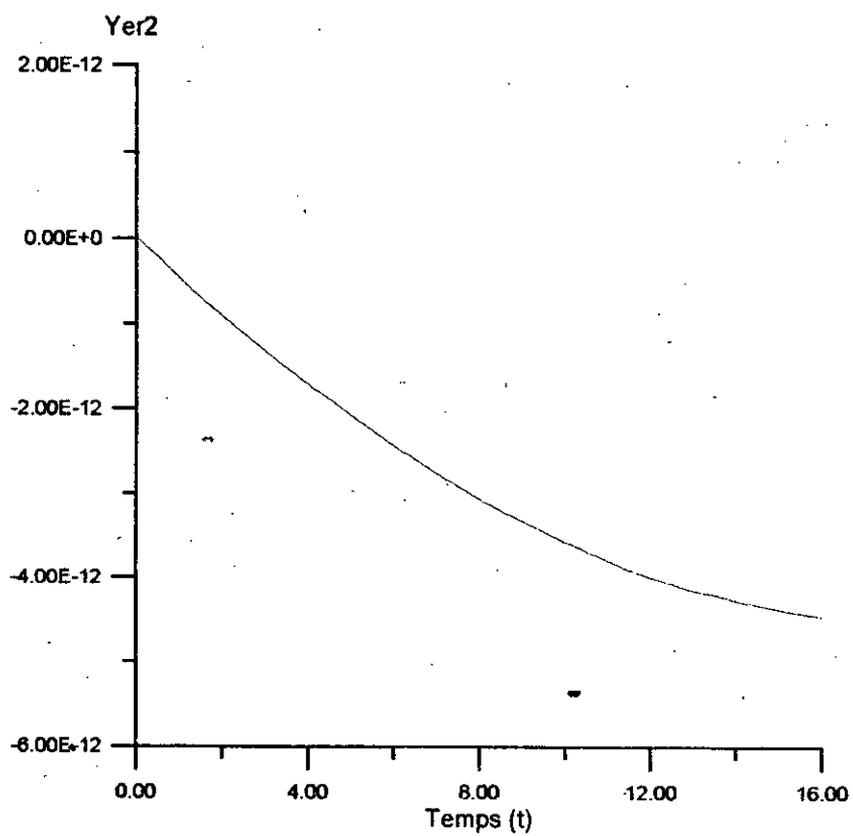
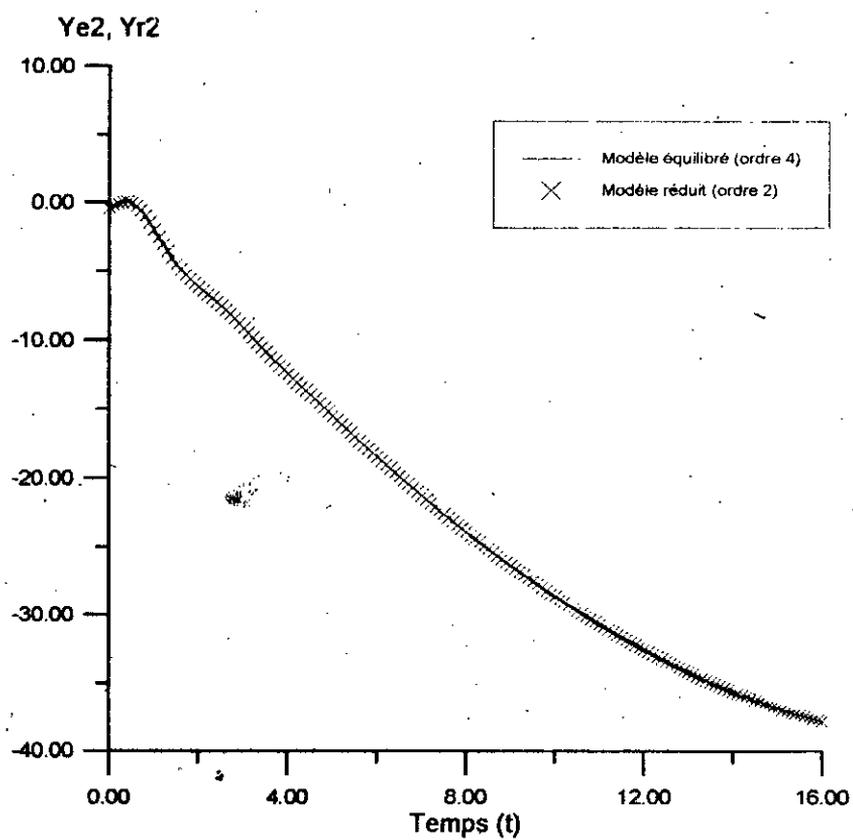


Figure 2-a-2: Réponses impulsionnelles Y_e, Y_r et leur écart (sortie 2)

M.T.R.E (cas continu)

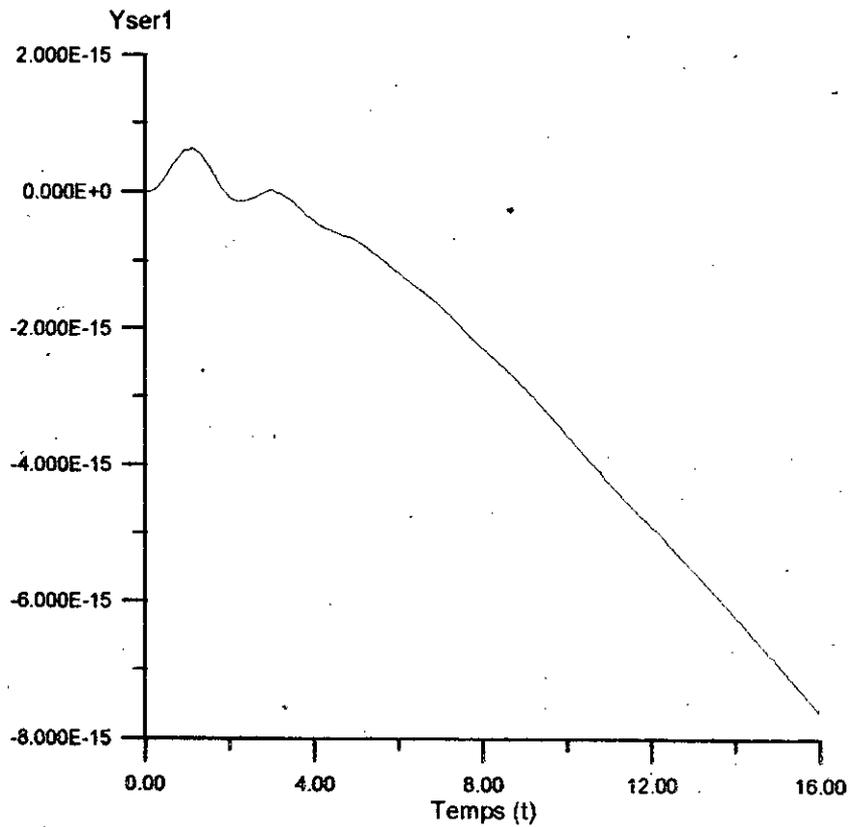
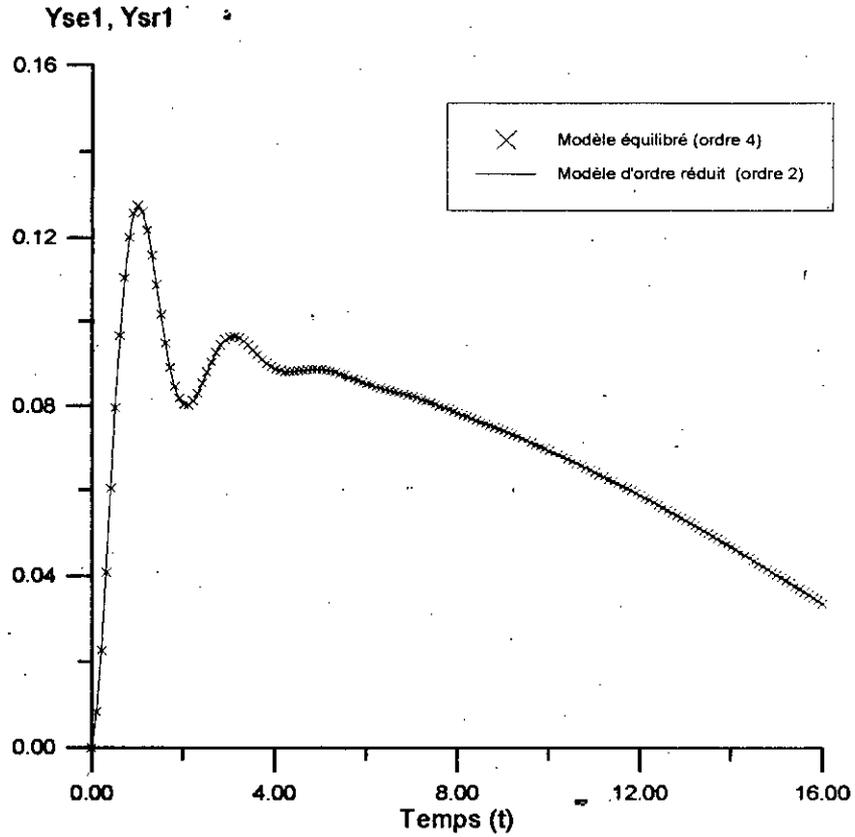


Figure 2-a-3: Réponses indicielles Yse, Ysr et leur écart (sortie 1)

M.T.R.E (cas continu)

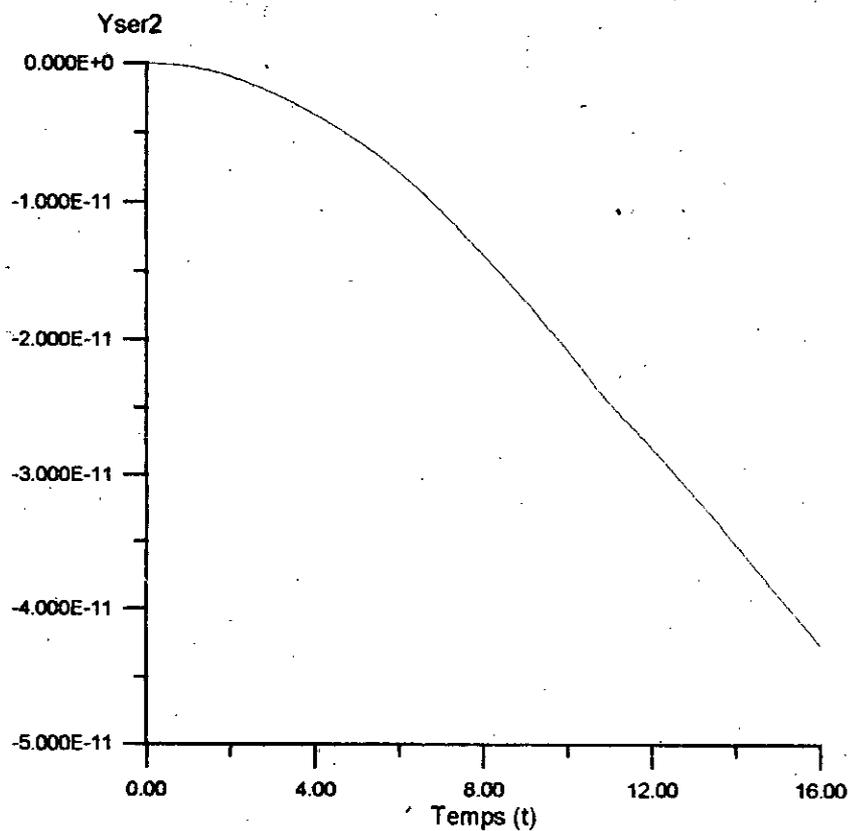
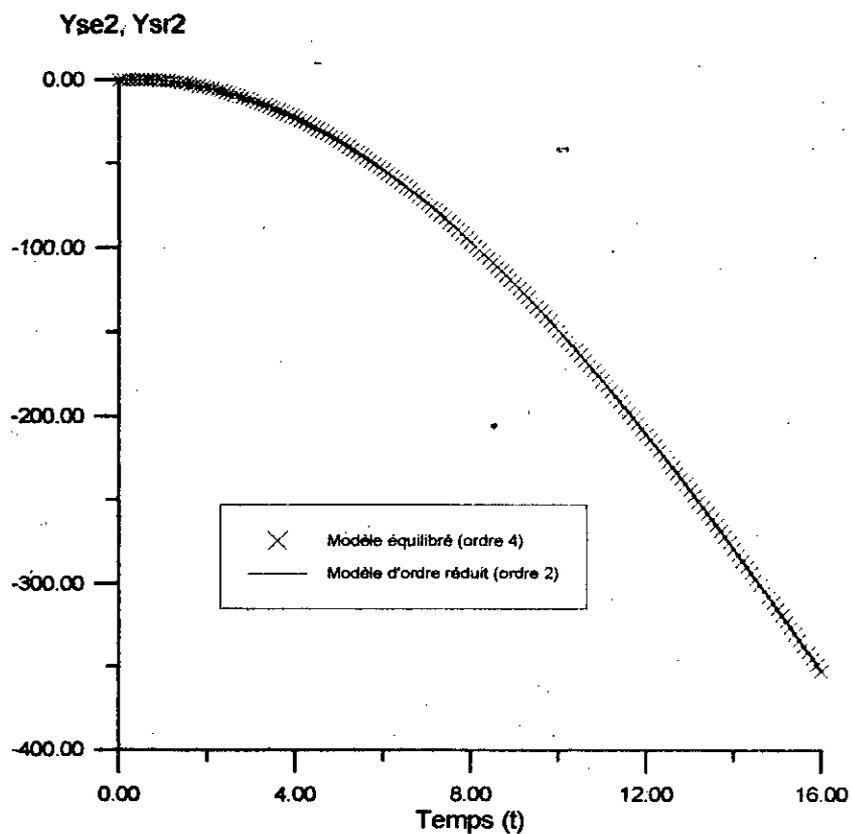


Figure 2-a-4: Réponses indicielles Y_{se}, Y_{sr} et leur écart (sortie 2)

M.T.R.E (cas continu)

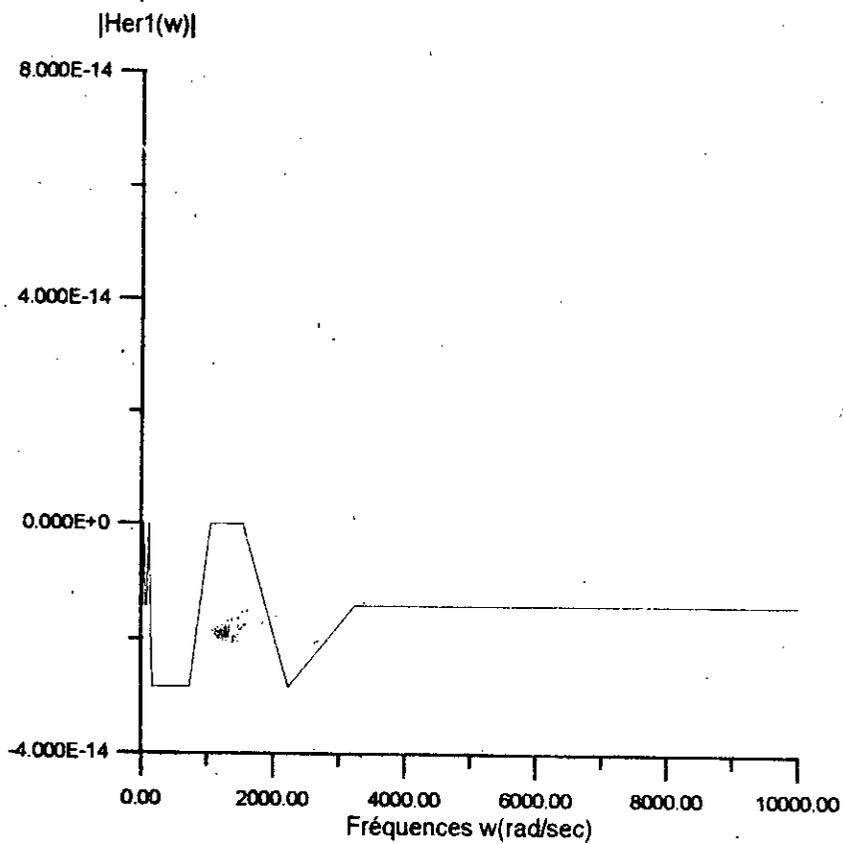
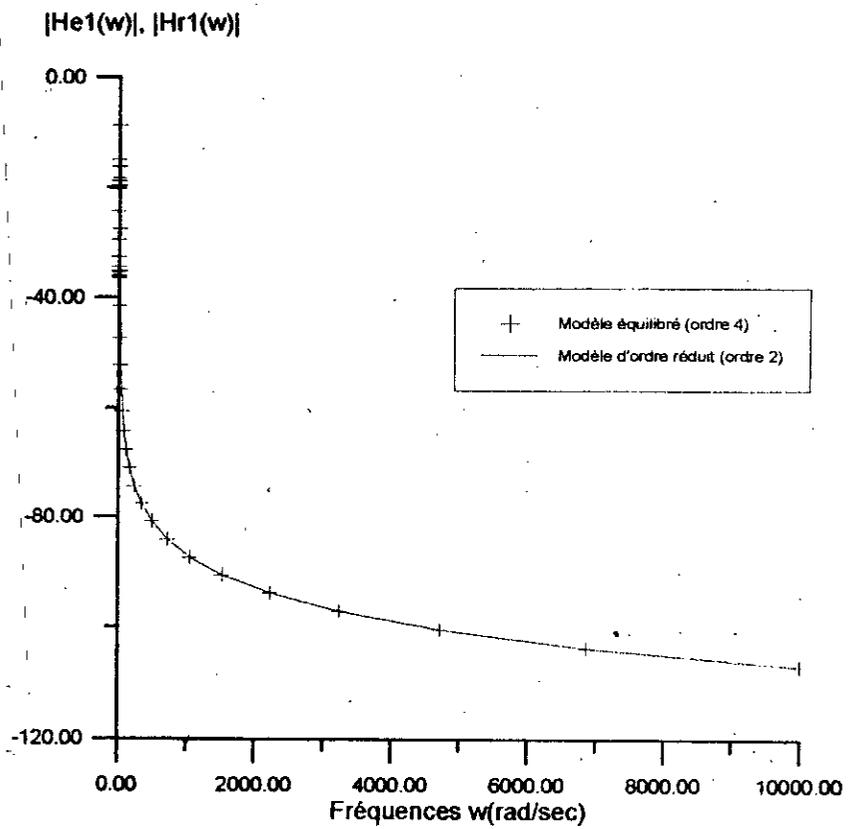


Figure 2-a-5: Spectres d'amplitude $|He(w)|$, $|Hr(w)|$ et leur écart (sortie 1)

M.T.R.E (cas continu)

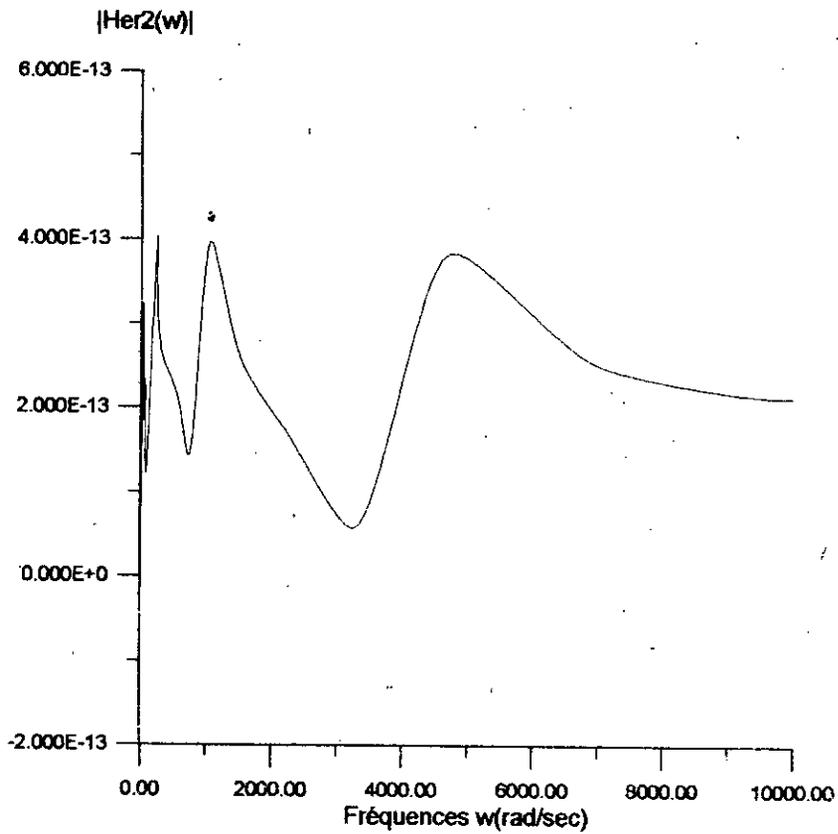
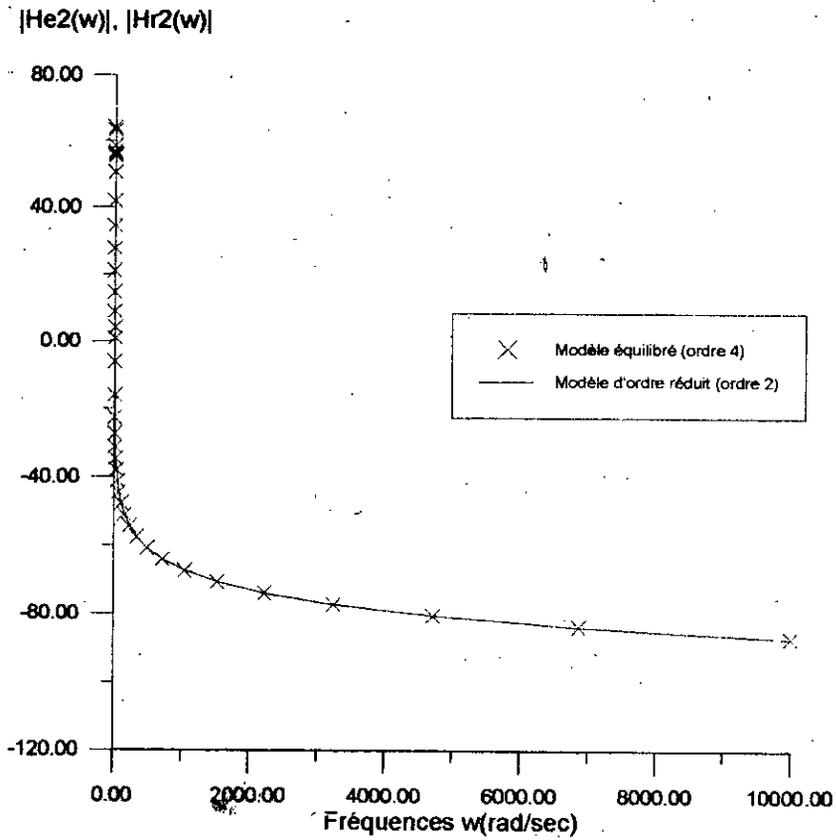


Figure 2-a-6: Spectres d'amplitude $|He(\omega)|$, $|Hr(\omega)|$ et leur écart (sortie 2)

M.T.R.E (cas continu)

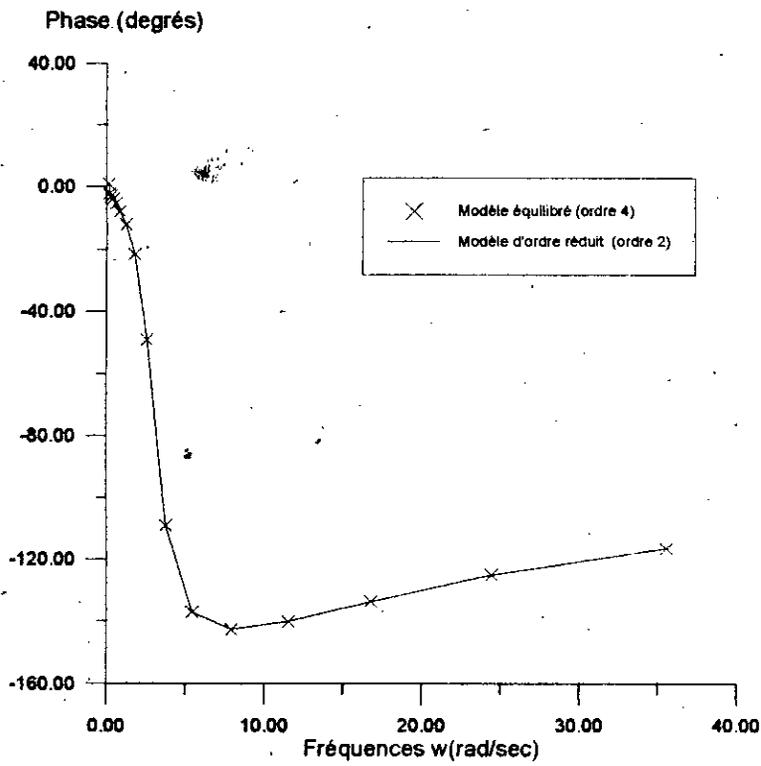


Figure 2-a-7: Spectres de phase (sortie 1)

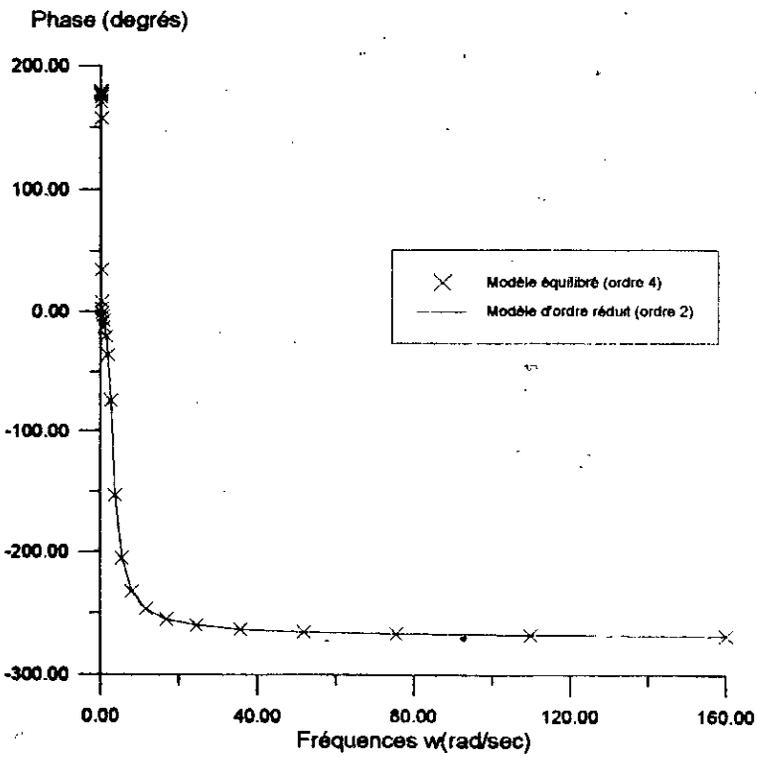


Figure 2-a-8: Spectres de phase (sortie 2)

Exemple 2 : Cas discret [23]

Soit le système discret d'ordre 8 donné par la représentation d'état suivante :

- La matrice d'évolution :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -3.0000E-02 & -3.9970E-01 & 1.1647E-02 & 3.7524E-03 \\ 1.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 1.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 1.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 1.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.2690E-02 & 2.9473E-01 & -1.1200E-01 & 1.7601E-01 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 1.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 1.0000E+00 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 1.0000E+00 & 0.0000E+00 \end{bmatrix}$$

- Les vecteurs de commande et d'observation :

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1.0000E+00 \\ 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}^T = \begin{bmatrix} 0.0000E+00 \\ 1.0000E-03 \\ -2.52000E-03 \\ 3.750E-03 \\ -3.6972E-03 \\ 2.5932E-03 \\ -8.2177E-04 \\ -3.0453E-04 \end{bmatrix}$$

- La matrice des valeurs singulières de ce modèle est :

$$\Sigma = \text{diag} \left\{ \begin{array}{l} 9.5606E-03; 6.0656E-3; 3.5693E-03; 1.1758E-03 \ 8.8400E-04 \\ 5.4660E-04; 4.6707E-04; 1.2981E-04 \end{array} \right\}$$

- La représentation d'état du modèle d'ordre réduit est :

- La matrice d'évolution réduite :

$$\tilde{A}_r = \begin{bmatrix} -8.6076 E - 01 & -3.3500 E - 01 & -3.8138 E - 02 & -4.4580 E - 02 \\ 3.9007 E - 01 & -4.6164 E - 01 & -7.1606 E - 01 & 2.4303 E - 02 \\ -3.4064 E - 02 & 5.4927 E - 01 & -3.3768 E - 01 & -2.6470 E - 01 \\ 6.6531 E - 02 & 3.1149 E - 02 & 4.4227 E - 01 & 7.1062 E - 02 \end{bmatrix}$$

- Les vecteurs de commande et d'observation réduits sont :

$$\tilde{B}_r = \begin{bmatrix} -4.3157 E - 02 \\ -5.2341 E - 02 \\ -2.4580 E - 02 \\ -1.7317 E - 02 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_r = [-3.8827 E - 02 \quad -4.0442 E - 02 \quad 2.4759 E - 02 \quad -1.0439 E - 02]$$

M.T.R.E (cas discret)

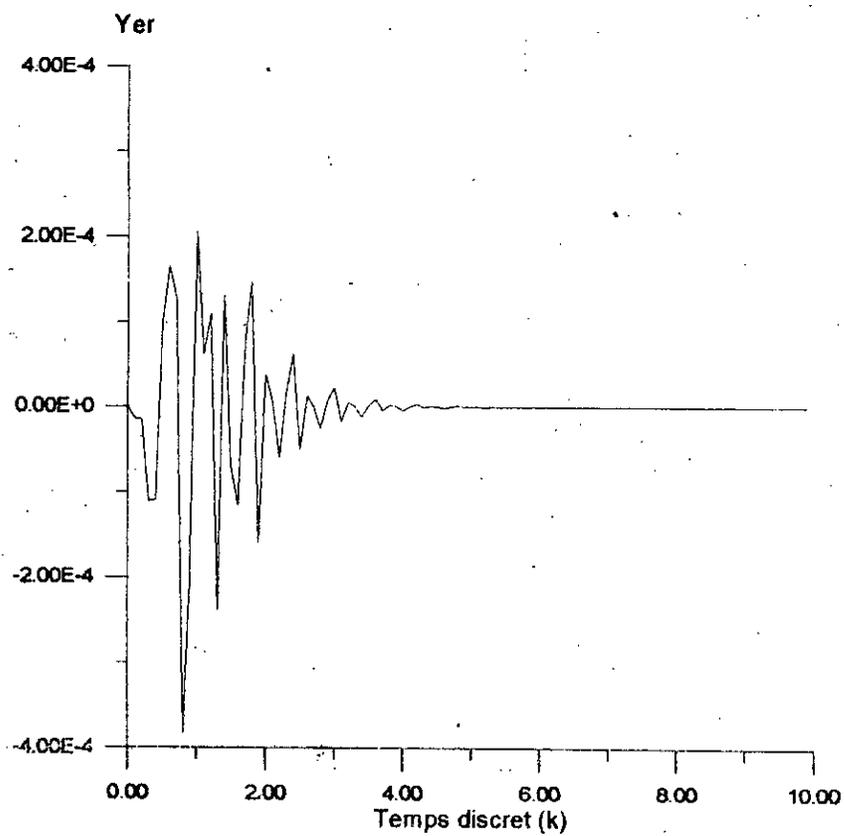
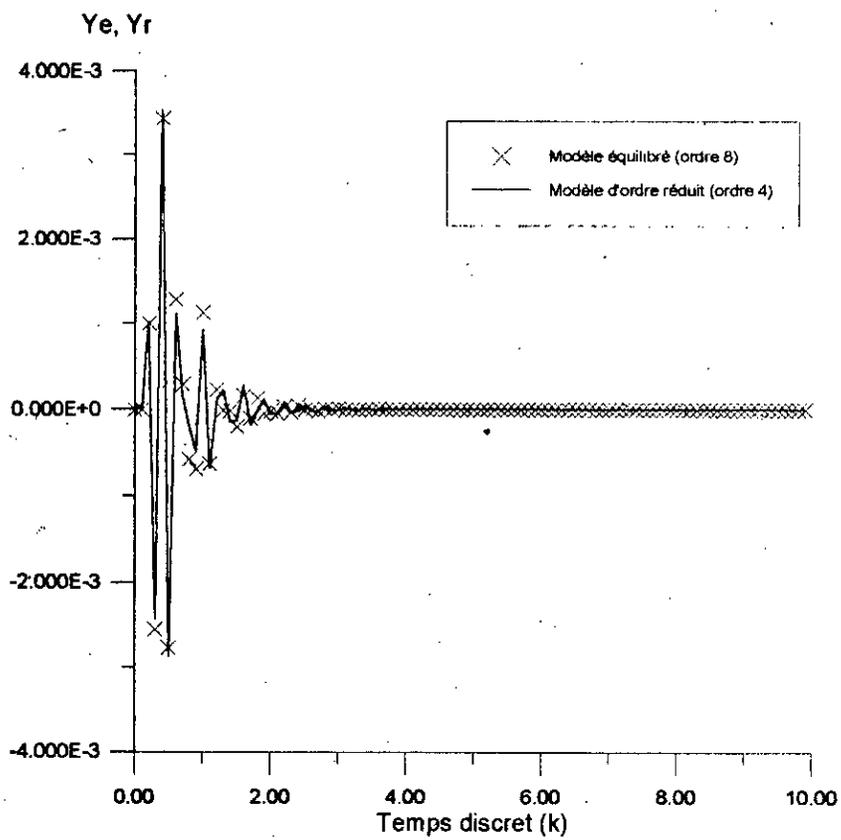


Figure 2-b-1: Réponses impulsionnelles Y_e, Y_r et leur écart Y_{er}

M.T.R.E (cas discret)

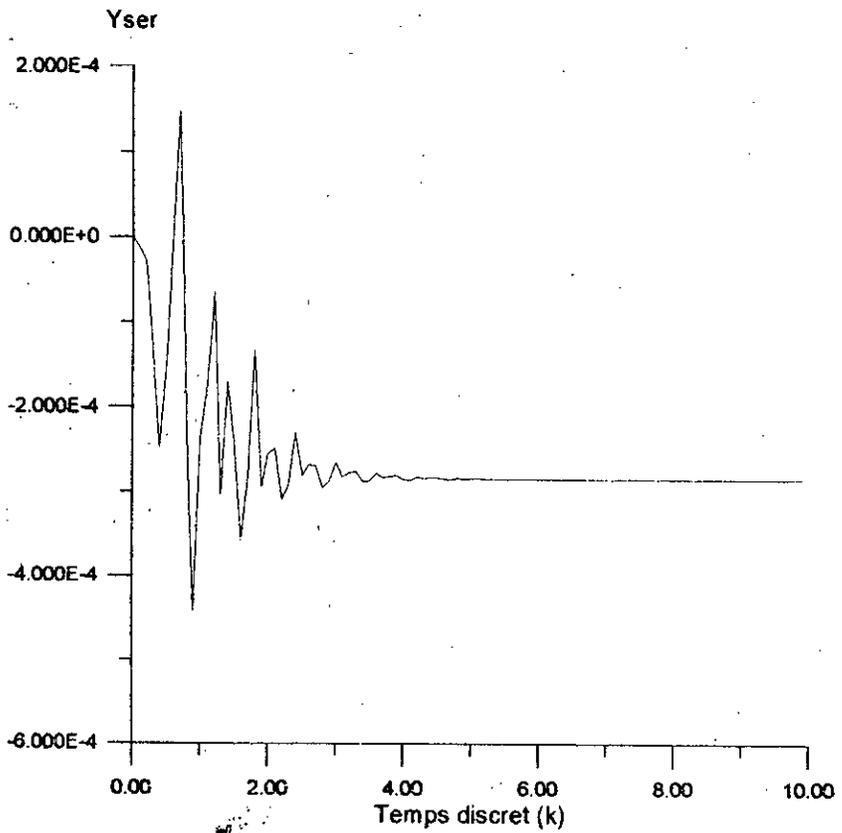
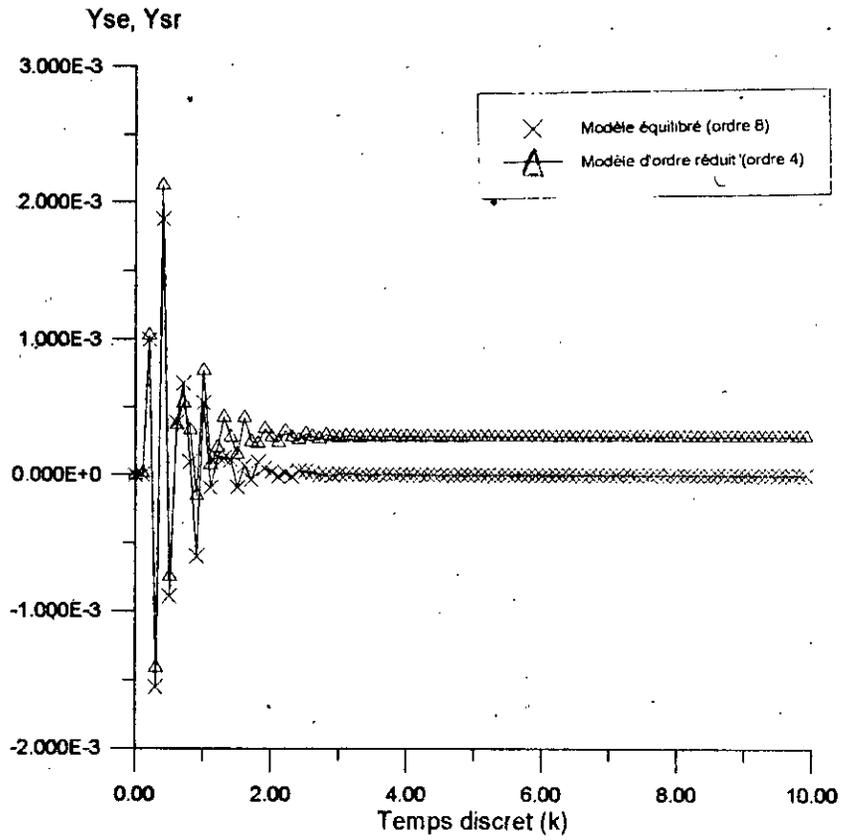


Figure 2-b-2: Réponses indicielles Y_{se} , Y_{sr} et leur écart Y_{ser}

M.T.R.E (cas discret)

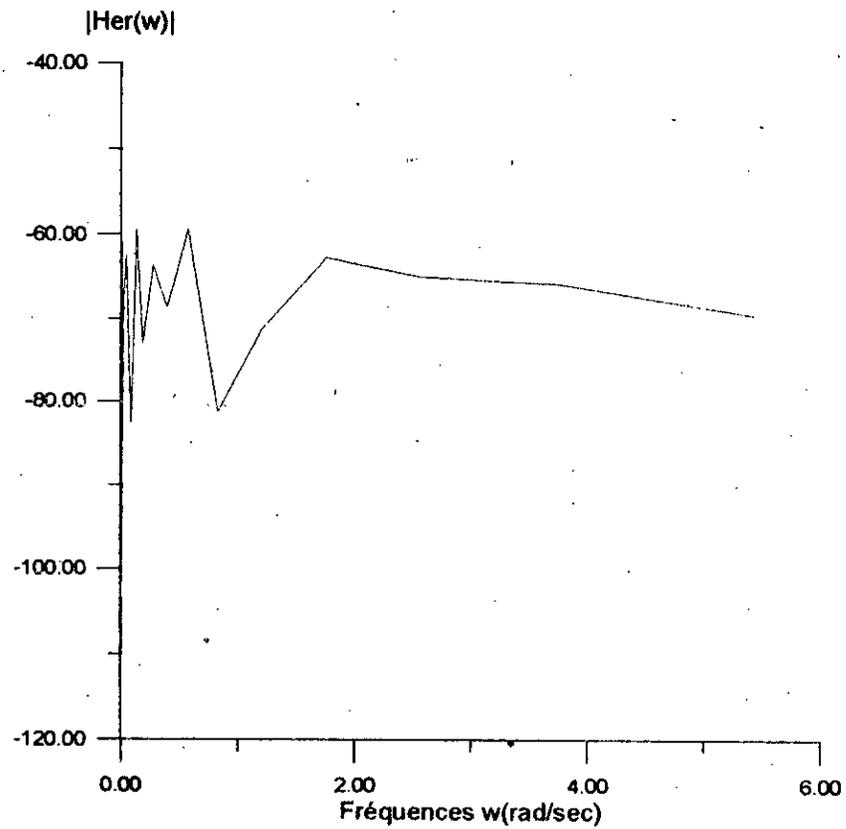
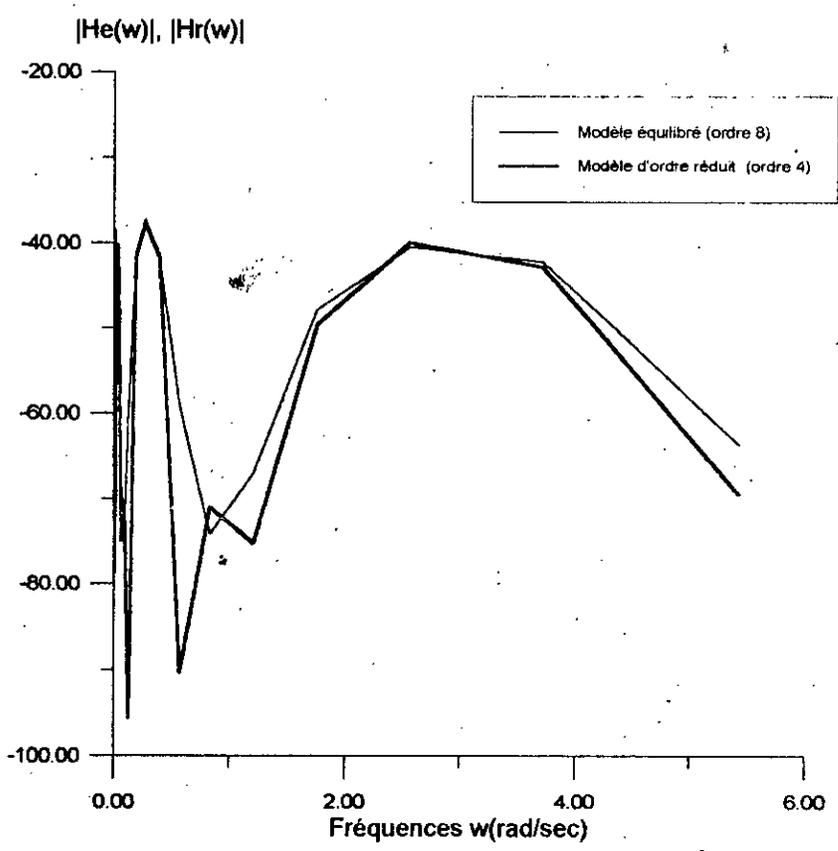


Figure 2-b-3: Spectres d'amplitude $|H_e(w)|$, $|H_r(w)|$ et leur écart $|H_e(w)|$

M.T.R.E (cas discret)

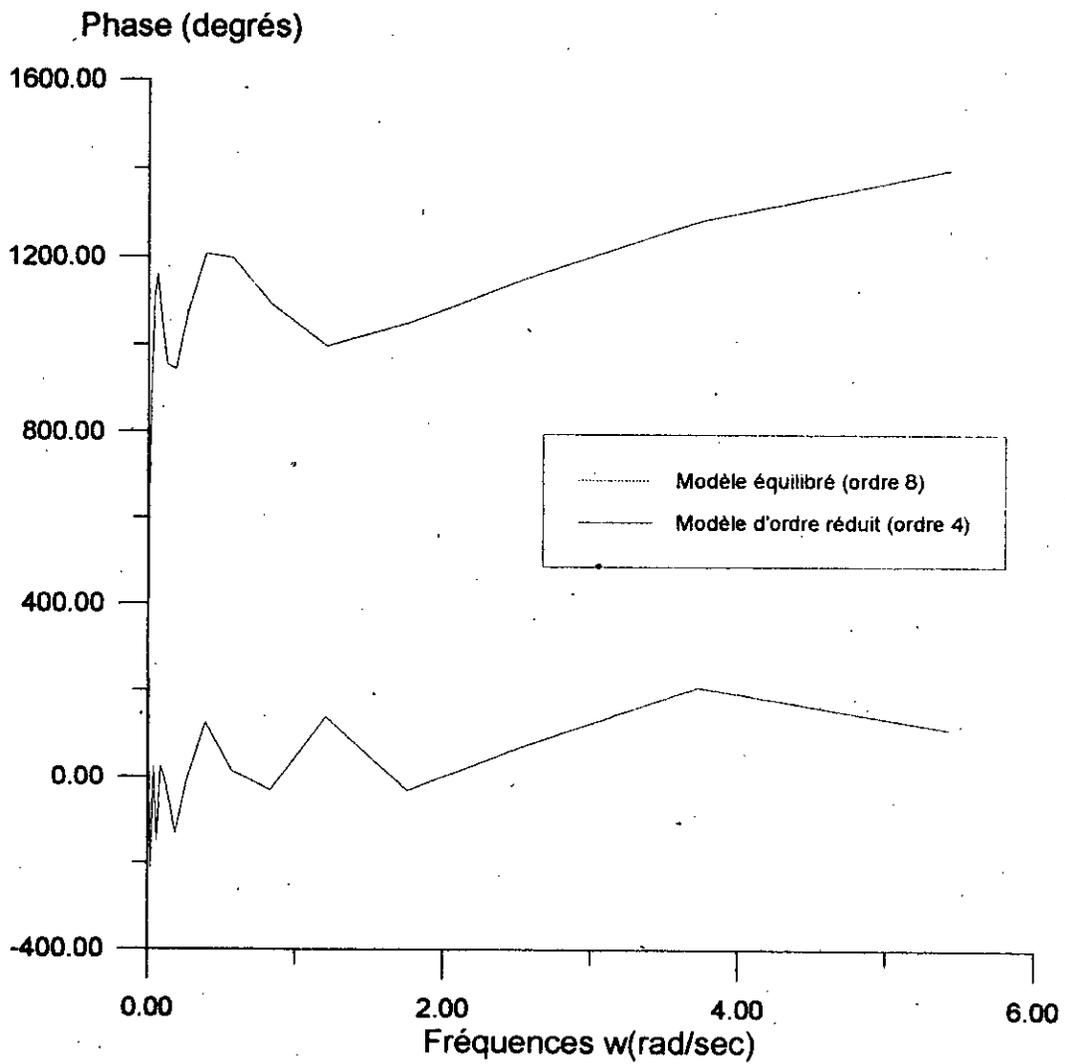


Figure 2-b-4: Spectre de phase du modèle équilibré et du modèle d'ordre réduit.

A partir des résultats obtenus, nous pouvons voir qu'effectivement la M.T.R.E., qui consiste à calculer la matrice T afin de se ramener à une représentation équilibrée du point de vue énergétique et à réduire par troncature simple, présente une bonne approximation du modèle initial. Etant donné que l'écart entre les réponses du modèle initial et celles du modèle d'ordre réduit est faible, et tend à s'annuler aux hautes fréquences.

La performance de cette méthode de réduction a été illustrée par les différents graphes représentant les réponses indicielles et fréquentielles et les spectres d'amplitudes et de phase.

De plus, nous remarquons que le modèle d'ordre réduit préserve les propriétés du modèle initial telle que : stabilité, commandabilité, observabilité, et causalité, donc à fortiori il est physiquement réalisable.

Exemple 3 : Cas continu [27]

Considérons le système MIMO d'ordre 10 donné par sa représentation d'état :

- La matrice d'évolution

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & -3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- La matrice de commande

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1E-03 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1E-03 \end{bmatrix}$$

- La matrice d'observation

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5E+05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & -2 & 5E+05 \end{bmatrix}$$

- La matrice des valeurs singulières de ce modèle est :

$$\Sigma = \text{diag} \left\{ \begin{array}{l} 2.5001E+02; 2.5168E-02; 5.5781E-03; 2.4142E-03; 9.2182E-04 \\ 1.3086E-05; 1.1386E-07; 0; 0; 0 \end{array} \right\}$$

Pour cet exemple, la calcul des grammiens s'avère très "mal conditionné" à cause de la grandeur de leur nombre condition :

$$M_{G_c} = 6.25E+17$$

$$M_{G_o} = 2.22E+28$$

Puisque certains états sont très faiblement commandables et / ou très faiblement observables. De plus le nombre condition de la transformation d'équilibre est infini.

II.2.4. Conclusion

Malgré les avantages de la procédure de réduction cités précédemment, il est à noter que cette méthode de simplification est malheureusement limitée dans son utilisation à cause du "mal-conditionnement" de la matrice d'équilibre (voir exemple 3).

En effet, cette méthode est sensible aux erreurs numériques (tels que les problèmes d'arrondi) et présente des difficultés notamment dans le calcul de la transformation d'équilibre et son inverse [27]. En particulier lorsque nous obtenons des valeurs singulières très faibles ou presque négligeables correspondants à des états presque non commandables et non observables auquel cas la dite transformation tend à être singulière.

En d'autres termes, la difficulté de calcul de la transformation d'équilibre apparait nettement pour les systèmes dits "non-minimaux" ayant des valeurs singulières quasi nulles.

Ainsi pour contourner ces inconvénients, il est préférable d'utiliser une des méthodes de réduction qui ne nécessitent pas l'étape d'équilibre du système.

Parmi les nouvelles techniques qui ont l'avantage d'être insensibles à ces inconvénients, et auxquelles nous nous sommes intéressées celles basées sur le principe des "projections internes" dans l'espace d'état [27].

II.3 REDUCTION PAR UTILISATION DE "PROJECTION INTERNE"

II.3.1 Introduction

L'outil de projection interne est très prometteur pour le problème d'approximation des systèmes, puisque la plupart des méthodes connues sont équivalentes à l'application d'une projection au vecteur d'état du système à approximer [5], [6]. Cette projection transforme ce vecteur d'état en un autre de dimension inférieure correspondant au vecteur d'état du modèle approximatif désiré. En d'autres termes, elle représente une application d'un sous espace de dimension (n) vers un autre sous-espace de dimension ($k < n$).

Souvent, nous avons recours à de telles projections, dans les problèmes d'analyse et de synthèse des systèmes linéaires, car elles présentent des propriétés assez intéressantes.

- **Cas continu :**
 - **Propriétés des projections [5], [6]**
1. Toute matrice carrée E vérifiant la relation suivante :

$$E^2 = E \quad (\text{II.17})$$

est dite une matrice de projection.

2. Si de plus E vérifie la relation

$$E^T = E \quad (\text{II.18})$$

elle est dite symétrique et est appelée "projection orthogonale". Elle caractérise l'orthogonalité qui existe entre le modèle d'ordre réduit et le modèle initial.

3. Si E peut être décomposée en un produit de deux matrices F et G, alors pour que $E = F \cdot G$ soit la représentation d'une matrice de projection $E(n \times n)$ de rang(k), il suffit que :

$$G \cdot F = I_k \quad (\text{II.19})$$

où J_k matrice identité ($k \times k$) [A1].

Ainsi lors de l'introduction de l'opérateur de projection dans la représentation d'état, le modèle d'ordre réduit (k) aura pour vecteur d'état $\hat{X}(t)$:

$$\hat{X}(t) = E \cdot X(t) \quad (\text{II.20})$$

où E est une matrice ($n \times n$) de rang(k)

Notons que $\hat{X}(t)$ est de dimension ($n \times 1$), mais équivaut à un vecteur de dimension ($k < n$). La représentation d'état correspondante est :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t) &= E \cdot [A \cdot \hat{X}(t) + B \cdot U(t)] \\ \hat{Y}(t) &= C \cdot \hat{X}(t) + D \cdot U(t) \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

La fonction de transfert du modèle d'ordre - réduit est:

$$\hat{H}(s) = C \cdot (sI_k - E \cdot A)^{-1} \cdot E \cdot B + D \quad (\text{II.22})$$

Si nous introduisons la décomposition de E en un produit de deux matrices F et G, nous aurons alors[5], [6] :

$$\hat{H}(s) = C \cdot F \cdot (sI_k - G \cdot A \cdot F)^{-1} \cdot G \cdot B + D \quad (\text{II.23})$$

Et si nous posons:

$$\begin{cases} \hat{A} = G \cdot A \cdot F \\ \hat{B} = G \cdot B \\ \hat{C} = C \cdot F \\ \hat{D} = D \end{cases}$$

La représentation d'état du nouveau modèle sera :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}}(t) &= \hat{A} \cdot V(t) + \hat{B} \cdot U(t) \\ \hat{Y}(t) &= \hat{C} \cdot V(t) + \hat{D} \cdot U(t) \end{aligned} \tag{II.25}$$

où : $V(t) = G \cdot \hat{X}(t)$

Ainsi, le choix de F et G donne un choix de modèle d'ordre - réduit de façon unique pour le système initial ayant une représentation d'état donnée.

Néanmoins, le problème qui se pose est de trouver la projection appropriée pour l'approximation désirée

- Choix de la projection:

Pour trouver E, donc F et G qui donnera un problème optimal, nous pouvons penser à minimiser par rapport à F et g, le critère de performance $J(E)$ donné ci-dessous [5], [6]

$$J(E) = T_r [G_c \cdot (I - E)^T \cdot G_0 \cdot (I - E)] \tag{II.26}$$

où E est une matrice ($n \times n$) de rang égal à l'ordre de modèle simplifié.

Ce critère $J(E)$ représente d'une certaine manière l'erreur quadratique entre le modèle initial et le modèle d'ordre - réduit.

Si E est choisie de manière à vérifier les relations suivantes :

$$\begin{aligned} E \cdot G_C &= G_C \cdot E^T \\ E^T \cdot G_0 &= G_0 \cdot E \end{aligned} \quad (II.27)$$

Alors $J(E)$ sera donné par:

$$J(E) = T_r(G_C \cdot G_0) - T_r(G_C \cdot G_0 \cdot E) \quad (II.26)$$

Puisque

$$T_r(G_C \cdot G_0) = T_r(H^2) \quad (II.27)$$

où H est la matrice de Hankel, en d'autres termes les valeurs singulières (G_i) de H correspondent aux valeurs propres du produit ($G_C \cdot G_0$), alors l'erreur minimale que nous pouvons atteindre, est obtenue quand les valeurs propres de ($G_C \cdot G_0 \cdot E$) ne sont pas seulement un sous-ensemble de celles de ($G_C \cdot G_0$), mais aussi les k plus grandes valeurs propres.

Ceci est vrai, quand les colonnes de la matrice F , sont calculées à partir des vecteurs propres du produit ($G_C \cdot G_0$) correspondants aux k plus grandes valeurs propres [5], [6].

L'erreur minimale est alors donnée par l'expression suivante:

$$J_{\min}(E) = \sum_{i=k+1}^n \sigma_i^2 \quad (II.30)$$

avec σ_i^2 ($i = \overline{k+1, n}$) : les modes du système à éliminer.

Remarques:

- 1 L'erreur minimale citée ci dessus est indépendante de toute transformation des coordonnées puisque les modes du second ordre sont invariants pour les transformations de similarité.

- 2 Le modèle résultant de l'approximation (II-23) s'avère stable pour le choix de la matrice F ($n \times k$) telles que ces colonnes soient calculées à partir des vecteurs propres de $(G_c \cdot G_0)$ correspondants aux k plus grandes valeurs du produit et le choix de G ($k \times n$) tel que : $G \cdot F = I_k$.

C'est pour ces raisons, que nous avons penser exploiter cette approche pour la réduction de l'ordre du système initial, afin d'obtenir un modèle d'ordre réduit par le biais d'une procédure dans laquelle nous évitons complètement l'équilibre du système et nous ne considérons par la proximité des états de la non observabilité et la non commandabilité.

II-3-2 Procédure de réduction : [23]

Le calcul des matrices de projection F et G , évoquées ci dessus, donc de la réalisation du modèle d'ordre réduit, se résume dans les étapes suivantes :

Etape 1 : Détermination de l'ordre de réduction (k) correspondant à une erreur minimale.

Etape 2 : Calcul des matrices V_{r-big} et V_{L-big} de dimension ($n \times k$) et dont les colonnes forment des bases pour les espaces propres droit et gauche respectivement du produit des deux grammians $(G_c \cdot G_0)$ associés aux k plus grandes valeurs propres de ce produit (ie $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$).

Etape 3 : Calcul de la matrice E_{big} :

$$E_{big} = V_{L-Big}^T \cdot V_{R-Big}$$

Etape 4 : Décomposition en valeurs singulières [A3] de la matrice E_{big}

$$E_{big} = U_{E-Big} \cdot \Sigma_{E-Big} \cdot V_{E-Big}^T$$

avec : U_{E-Big} , V_{E-Big} : Matrices orthogonales [A1].

Σ_{E-Big} : Matrice diagonale [A1] dont les éléments sont classés par ordre décroissant

Etape 5 : Calcul des matrices de projection:

$$E = S_{R\text{-}Big}, \quad G = S_{L\text{-}Big}^T$$

$$S_{L\text{-}Big} = V_{L\text{-}Big} \cdot U_{E\text{-}Big} \cdot \Sigma_{E\text{-}Big}^{-1/2}$$

$$S_{R\text{-}Big} = V_{R\text{-}Big} \cdot V_{E\text{-}Big} \cdot \Sigma_{E\text{-}Big}^{-1/2}$$

Etape 6 : Calcul de la réalisation d'état du modèle d'ordre - réduit:

$$\hat{A} = S_{L\text{-}Big}^T \cdot A \cdot S_{R\text{-}Big}$$

$$\hat{B} = S_{L\text{-}Big}^T \cdot B$$

$$\hat{C} = C \cdot S_{R\text{-}Big}$$

$$\hat{D} = D$$

Remarques :

- 1 La propriété de cette procédure est qu'elle donne un modèle d'ordre - réduit dont la fonction de transfert d'ordre (k) est la même que celle obtenue par application de la procédure de réduction de Moore de la réalisation équilibrée pour n'importe quel système minimal.
- 2 La robustesse numérique de cette procédure dépend précisément de la façon dont les matrices $V_{L\text{-}Big}$ et $V_{R\text{-}Big}$ sont calculées [27]

Par souci de simplicité et d'une meilleure stabilité numérique des calculs, nous avons, en premier lieu, implémenté la méthode dite de la "Racine-Carré" appropriée aux systèmes non-minimaux et se basant sur le principe de réduction que nous venons de souligner.

II.3.3 Méthode de la "Racine - Carrée":

Dans cette méthode, le calcul s'effectue avec les facteurs de Cholesky [A2] des grammaiens ($G_C \cdot G_0$), dont le calcul est mieux conditionné que celui des grammaiens eux-mêmes.

a. Algorithme :

Etape 1 : Etablissement de la factorisation de Cholesky [A2] des grammaiens ($G_C \cdot G_0$) :

$$\begin{aligned} L_C \cdot L_C^T &= G_C \\ L_0 \cdot L_0^T &= G_0 \end{aligned}$$

Avec L_C, L_0 : Matrices triangulaires inférieures.

Etape 2 : Décomposition en valeurs singulières [A3] du produit des facteurs de Cholesky :

$$L_0^T \cdot L_C = U \cdot \Sigma_1 \cdot V^T$$

avec U, V : Matrices orthogonales [A1]

$\Sigma_1 = \text{diag} \{ \sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2 \}$ et $\sigma_i^2 (i = \overline{1, m})$, les m -valeurs propres non-nulles du produit des grammaiens ($G_C \cdot G_0$).

Etape 3 : Calcul des bases $V_{R.Big}$ et $V_{L.Big}$:

$$\begin{aligned} V_{R.Big} &= L_C \cdot V \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} \\ V_{L.Big} &= L_0 \cdot U \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Où $I(k)$ matrice identité [A1] de dimension ($k \times k$).

Etape 4 : Calcul du produit des bases E_{Big} :

$$\begin{aligned} E_{big} &= V_{L\text{-}Big}^T \cdot V_{R\text{-}Big} \\ &= \text{diag} \{ \sigma_1, \dots, \sigma_k \} \\ &= \hat{\Sigma}_{bal} \end{aligned}$$

Etape 5 : Calcul des matrices de projection

$$\begin{aligned} S_{L\text{-}Big} &= L_0 \cdot U \cdot \begin{bmatrix} E_{big}^{-1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ S_{R\text{-}Big} &= L_C \cdot V \cdot \begin{bmatrix} E_{big}^{-1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Etape 6 : Etablissement de la représentation d'état du modèle d'ordre réduit :

$$\begin{aligned} \hat{A} &= S_{L\text{-}Big}^T \cdot A \cdot S_{R\text{-}Big} \\ \hat{B} &= S_{L\text{-}Big}^T \cdot B \\ \hat{C} &= C \cdot S_{R\text{-}Big} \\ \hat{D} &= D \end{aligned}$$

Lors de l'implémentation nous remarquons a priori que le modèle d'ordre - réduit obtenu par cette méthode est stable, observable commandable et présente l'avantage d'être équilibré.

Néanmoins, le calcul de la transformation d'équilibre introduite implicitement se trouve être "mal-conditionnée" notamment pour des systèmes ayant des états fortement observables mais faiblement commandables ou l'inverse. Les matrices F et G (i.e. $S_{R.Big}$ et $S_{L.Big}^T$) des projections présentent en effet des nombres de conditions assez élevés à savoir :

$$C_G = 2721.6 \quad \text{pour G et} \quad C_F = 4049.5 \quad \text{pour F}$$

du moins par rapport à ceux des mêmes matrices que nous avons calculé à partir d'une autre méthode dite de "Schur" pour laquelle :

$C_G = C_F = 6.1435$, et qui, bien qu'elle soit équivalente à la méthode de la "racine carrée", tend à assurer un meilleur conditionnement des calculs, car elle rend maximale l'utilisation des transformations orthogonales.

De plus, lorsque nous avons fixé la précision des matrices F et G pour arrondi de leurs éléments, avant leur utilisation pour le calcul de la réalisation d'ordre réduit, la méthode "Schur" nous a offert de meilleurs résultats que ceux de la "racine carrée" tel que :

- Pour la méthode de Schur : $C_G = 6.1439$ et $C_F = 6.1468$.
- Pour la méthode de la "racine carrée": $C_G = 2722.5$ et $C_F = 2615.8$

C'est pourquoi nous avons opté définitivement pour la méthode de "schur" qui permet l'obtention du modèle d'ordre réduit à partir duquel se fera la synthèse de la commande.

II.3.4 Méthode de Schur : [27]

Cette méthode est basée sur la mise du produit des grammiens sous la forme de Schur [14] :

a. Algorithme:

Etape 1 : Calcul des grammiens ($G_c \cdot G_0$) par résolution des équations de Lyapunov [A4].

$$\begin{aligned} A \cdot G_c + G_c \cdot A^T + B \cdot B^T &= 0 \\ A^T \cdot G_0 + G_0 \cdot A + C^T \cdot C &= 0 \end{aligned}$$

Etape 4 : Calcul de la matrice orthogonale V [A1] par la mise sous la forme de Schur [14] du produit des grammiens ($G_c \cdot G_0$) :

$$M = V_0^T (G_c \cdot G_0) \cdot V$$

Avec M matrice triangulaire supérieure.

Etape 3 : Calcul des transformations orthogonales V_A et V_D qui ordonnent les éléments diagonaux de la matrice de Schur (M) respectivement dans un ordre ascendant et descendant :

$$\begin{aligned} \text{diag}(V_A^T \cdot M \cdot V_A) &= \{\lambda_{A_n}, \dots, \lambda_{A_1}\} \\ \text{diag}(V_D^T \cdot M \cdot V_D) &= \{\lambda_{D_n}, \dots, \lambda_{D_1}\} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \{\lambda_{D_i} / i = \overline{1, k}\} &= \{\lambda_{A_i} / i = \overline{1, k}\} = \{\sigma_i^2 / i = \overline{1, k}\} \\ \{\lambda_{D_i} / i = \overline{k+1, n}\} &= \{\lambda_{A_i} / i = \overline{k+1, n}\} = \{\sigma_i^2 / i = \overline{k+1, n}\} \end{aligned}$$

et σ_i^2 sont les modes du second ordre.

Etape 4 : Partition de V_A et V_D tel que :

$$V_A = [V_{R-Small} / V_{L-Big}]$$

$$V_D = [V_{R-Big} / V_{L-Small}]$$

Où $V_{R-Small}$, $V_{L-Small}$: matrices de $(n-k)$ - colonnes.
 V_{L-Big} , V_{R-Big} : matrice de k colonnes.

Etape 5 : Calcul du produit des bases E_{Big}

$$E_{Big} = V_{L-Big}^T \cdot V_{R-Big}$$

Etape 6 : Décomposition de E_{Big} en valeurs singulières [A3] :

$$E_{Big} = U_{E-Big} \cdot \Sigma_{E-Big} \cdot V_{E-Big}^T$$

avec : U_{E-Big} , V_{E-Big} : matrices orthogonales [A1].

Σ_{E-Big} : matrice diagonale des valeurs singulières.

Etape 7 : Calcul des matrices de projection S_{L-Big}^T , S_{R-Big} :

$$S_{L-Big} = V_{L-Big} \cdot U_{E-Big} \cdot \Sigma_{E-Big}^{-1/2}$$

$$S_{R-Big} = V_{R-Big} \cdot V_{E-Big} \cdot \Sigma_{E-Big}^{-1/2}$$

Etape 8 : Calcul de la réalisation d'espace d'état du modèle d'ordre réduit:

$$\hat{A} = S_{L-Big}^T \cdot A \cdot S_{R-Big}$$

$$\hat{B} = S_{L-Big}^T \cdot B$$

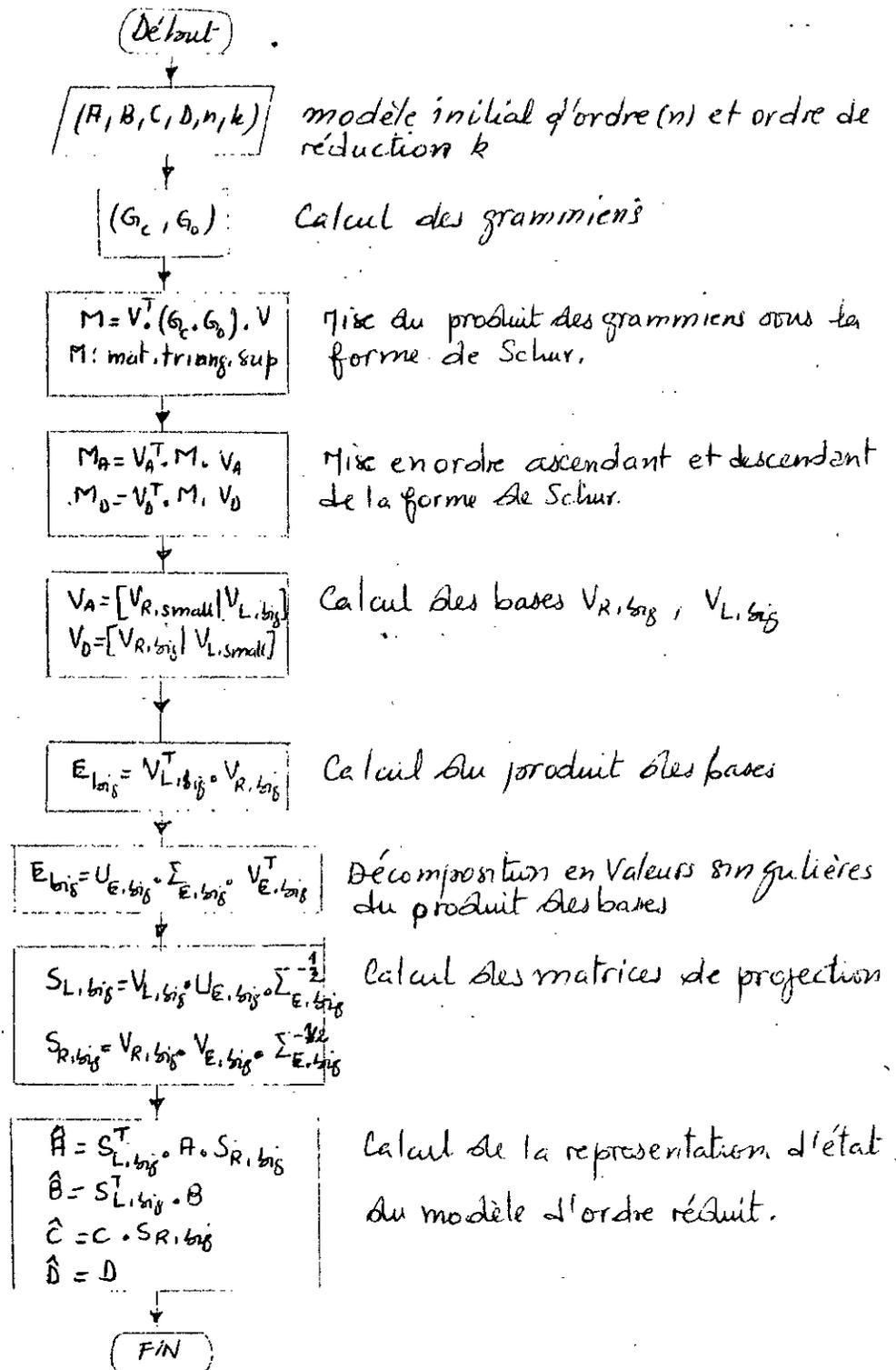
$$\hat{C} = C \cdot S_{R-Big}$$

$$\hat{D} = D$$

Remarque :

Les colonnes de $V_{R.Big}$ et $V_{L.Big}$ forment des bases pour les espaces propres respectivement droit et gauche du produit (G_c, G_o) associés aux k - plus grandes valeurs propres $\{\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2\}$ du produit des grammien.

b. Organigramme :



Organigramme 2. Réduction par la méthode de Schur.

• cas discret :

Pour le cas discret, l'étude explicitée précédemment reste valable telle que l'introduction de l'opérateur de projection "E" dans la représentation d'état, permet d'établir les équations d'état et d'observation du modèle d'ordre réduit (k) :

$$\begin{aligned} \hat{X}(k+1) &= E \cdot [\tilde{A} \cdot \hat{X}(k) + \tilde{B} \cdot U(k)] \\ \hat{Y}(k) &= \tilde{C} \cdot \hat{X}(k) + \tilde{D} \cdot U(k) \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

avec

$$\hat{X}(k) = E \cdot X(k) \quad (\text{II.32})$$

La fonction de transfert sera donnée par :

$$\hat{H}(z) = \tilde{C} \cdot (zI_k - E \cdot \tilde{A})^{-1} \cdot E \cdot \tilde{B} + \tilde{D} \quad (\text{II.33})$$

Par la décomposition de E en un produit de deux matrices F et G, nous obtenons [5], [6] :

$$\hat{H}(z) = \tilde{C} \cdot F \cdot (zI_k - G \cdot \tilde{A} \cdot F)^{-1} \cdot G \cdot \tilde{B} + \tilde{D} \quad (\text{II.34})$$

En posant

$$\begin{cases} \hat{A} = G \cdot \tilde{A} \cdot F \\ \hat{B} = G \cdot \tilde{B} \\ \hat{C} = \tilde{C} \cdot F \\ \hat{D} = \tilde{D} \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

La représentation d'état du nouveau modèle sera :

$$\begin{aligned} \hat{V}(k) &= \hat{A} \cdot V(k) + \hat{B} \cdot U(k) \\ \hat{Y}(k) &= \hat{C} \cdot V(k) + \hat{D} \cdot U(k) \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

où : $V(k) = G \cdot \hat{X}(k)$

La réalisation d'espace d'état du modèle d'ordre - réduit, obtenue à partir de la procédure de réduction par la méthode de projection interne, est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{A}} &= S_{L, \text{Big}}^T \cdot \tilde{A} \cdot S_{R, \text{Big}} \\ \hat{\tilde{B}} &= S_{L, \text{Big}}^T \cdot \tilde{B} \\ \hat{\tilde{C}} &= \tilde{C} \cdot S_{R, \text{Big}} \\ \hat{\tilde{D}} &= \tilde{D} \end{aligned}$$

A partir de cette représentation, nous pouvons déduire que les deux méthodes citées précédemment (racine - carrée, et Schur) peuvent être appliquées au modèle discret, mise à part une seule différence qui réside dans le cas des grammians, pour la méthode de Schur, qui s'effectue par la résolution des équations de Lyapunov [A4] données sous leur forme discrète :

$$\begin{aligned} \tilde{A} \cdot G_c \cdot \tilde{A}^T - G_c + \tilde{B}^T \cdot \tilde{B} &= 0 \\ \tilde{A}^T \cdot G_o \cdot \tilde{A} - G_o + \tilde{C}^T \cdot \tilde{C} &= 0 \end{aligned}$$

II.3.5 Application:

Dans cette section, nous allons appliquer la procédure de réduction de Schur à deux exemples de modèles linéaires, invariants dans le temps et non - minimaux ou l'un est le modèle d'un système continu et l'autre correspond à un système discret.

a - cas continu [27]:

Le modèle représente un système MIMO d'ordre 10, de représentation d'état suivante :

• **La matrice d'évolution**

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & -3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

• **La matrice de commande :**

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1E-03 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1E-03 \end{bmatrix}$$

• **La matrice d'observation :**

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5E+05 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & -2 & 5E+05 \end{bmatrix}$$

- La matrice des valeurs singulières de ce modèle est :

$$\Sigma = \text{diag} \left\{ \begin{array}{l} 2.5001 E + 02; \quad 2.5168 E - 02; \quad 5.5781 E - 03; \quad 2.4142 E - 03; \quad 9.2182 E - 04; \\ 1.3086 E - 05; \quad 1.11386 E - 07; \quad 0; \quad 0; \quad 0 \end{array} \right\} :$$

L'ordre du modèle réduit est choisi égal à 4, car il correspond à une erreur de réduction minimale,

La représentation du modèle d'ordre réduit est:

. la matrice d'évolution réduite:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1.07753E+01 & 1.14342E+00 & 6.52743E+00 & -3.81386E+00 \\ 6.7892E-01 & -6.92013E+00 & -4.71689E+00 & 3.43838E+00 \\ 2.81563E+00 & 1.15732E+00 & -1.17823E+01 & 3.65112E+00 \\ 1.38417E+00 & 8.71499E-01 & 1.32696E+00 & -2.62864E+00 \end{bmatrix}$$

. la matrice de commande réduite:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 4.22614E-01 & 7.57432E-01 \\ -1.28137E-01 & -4.36487E-01 \\ 2.65960E-01 & -2.69152E-01 \\ -1.12718E-01 & -2.15556E-02 \end{bmatrix}$$

. la matrice d'observation réduite:

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} -1.52385E+04 & -1.77849E+04 & -1.05919E+04 & -6.63433E+04 \\ -1.52367E+04 & -1.77831E+04 & -1.05937E+04 & -6.63431E+04 \end{bmatrix}$$

La représentation du modèle d'ordre réduit est :

. la matrice d'évolution réduite :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1.07753E+01 & 1.14342E+00 & 6.52743E+00 & -3.81386E+00 \\ 6.7892E-01 & -6.92013E+00 & -4.71689E+00 & 3.43838E+00 \\ 2.81563E+00 & 1.15732E+00 & -1.17823E+01 & 3.65112E+00 \\ 1.38417E+00 & 8.71499E-01 & 1.32696E+00 & -2.62864E+00 \end{bmatrix}$$

. la matrice de commande réduite :

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 4.22614E-01 & 7.57432E-01 \\ -1.28137E-01 & -4.36487E-01 \\ 2.65960E-01 & -2.69152E-01 \\ -1.12718E-01 & -2.15556E-02 \end{bmatrix}$$

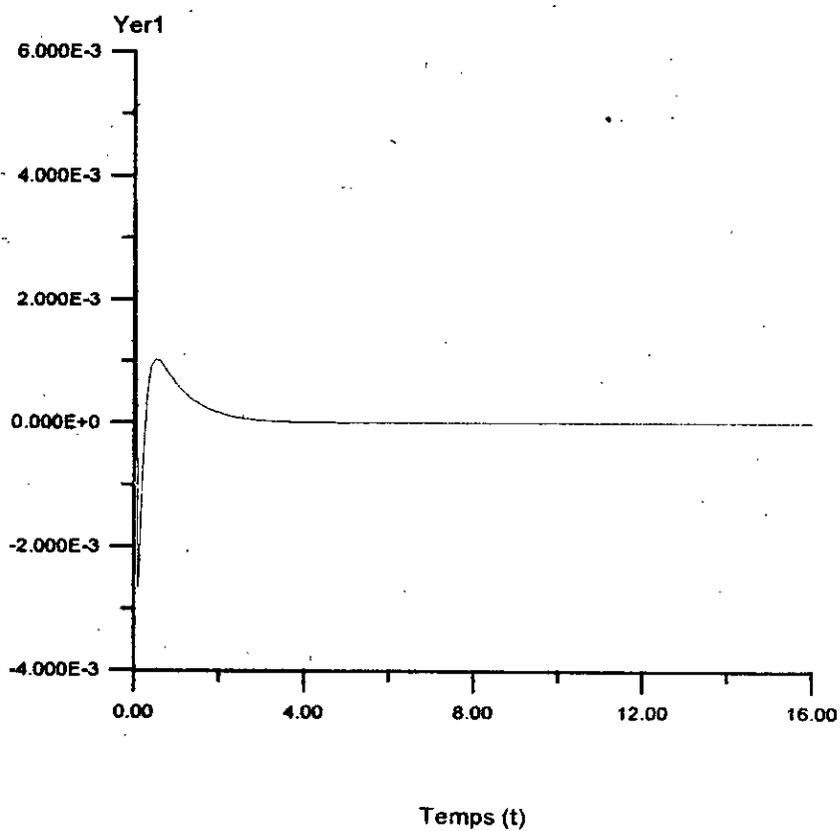
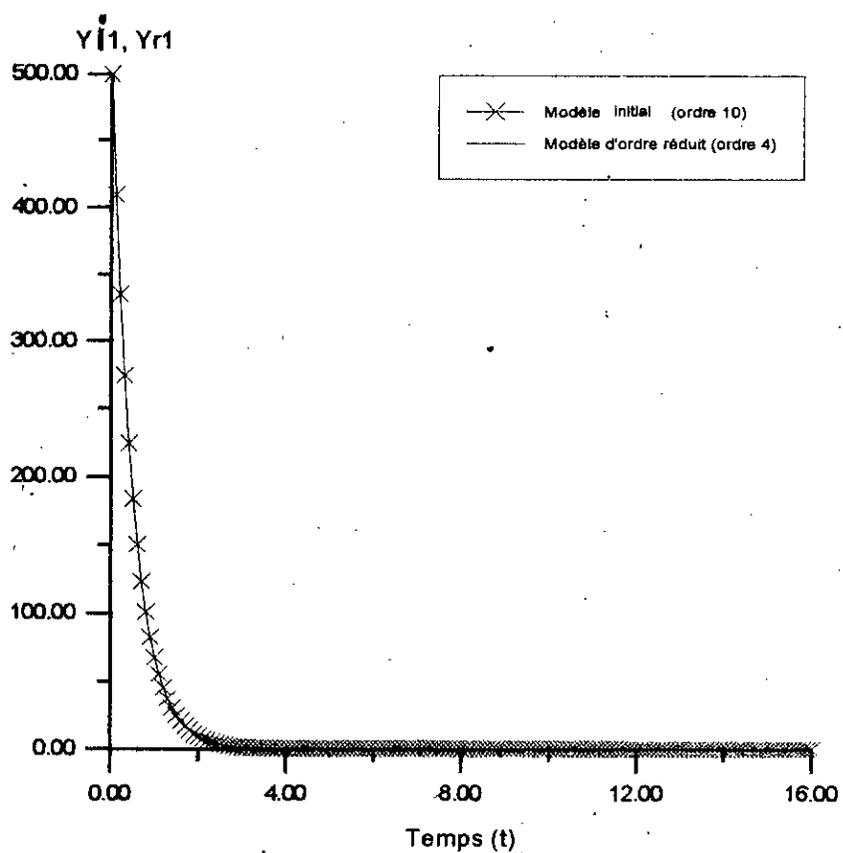
. la matrice d'observation réduite :

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} -1.52385E+04 & -1.77849E+04 & -1.05919E+04 & -6.63433E+04 \\ -1.52367E+04 & -1.77831E+04 & -1.05937E+04 & -6.63431E+04 \end{bmatrix}$$

Les réponses impulsionnelles, indicielles et fréquentielles par le modèle d'ordre réduit sont tracées avec celles du modèle initial respectivement sur les mêmes figures (3-2a, 3-3a, 3-4a, 3-4a).

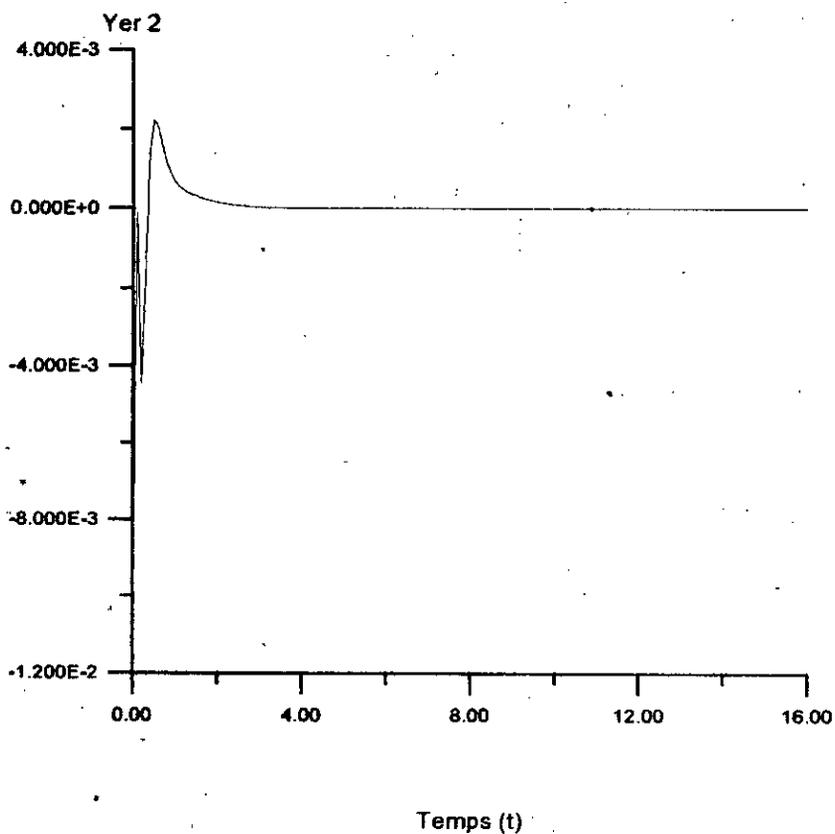
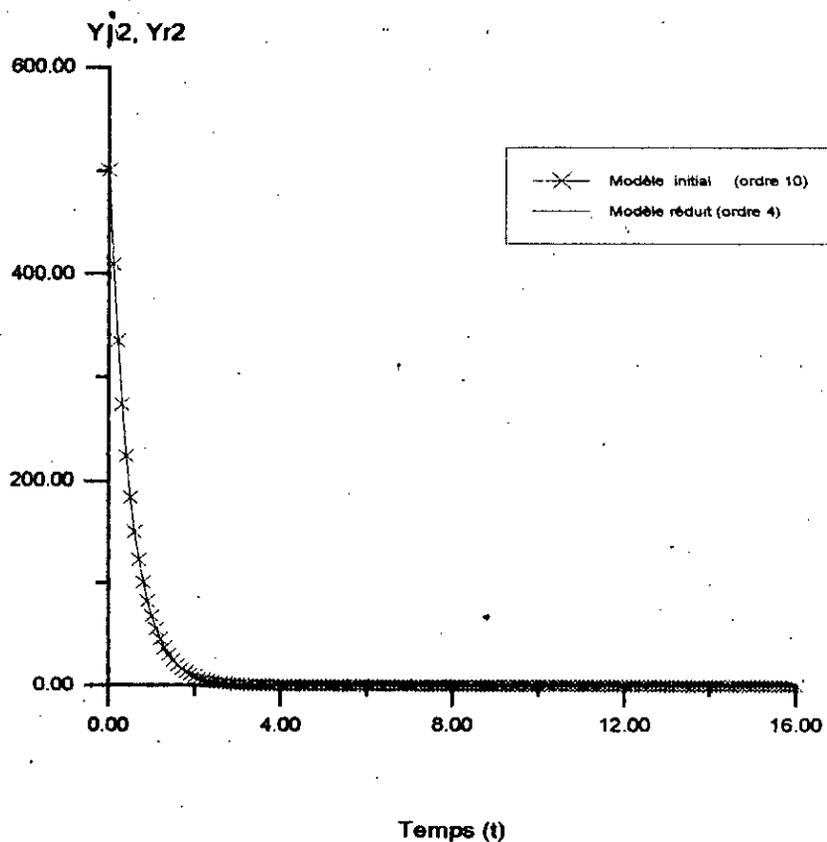
Les figures (3-2b, 3-3b, et 3-4b) représentent les écarts entre les réponses impulsionnelles, indicielles et les spectres d'amplitude du modèle initial et celles d'ordre réduit.

Méthode de SCHUR (CAS CONTINU)



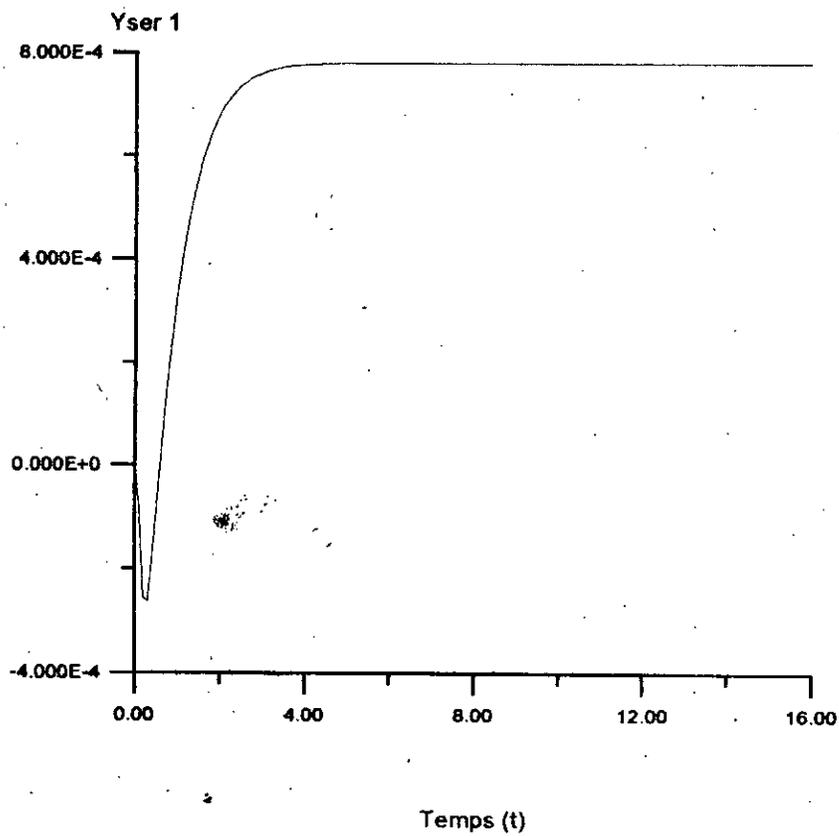
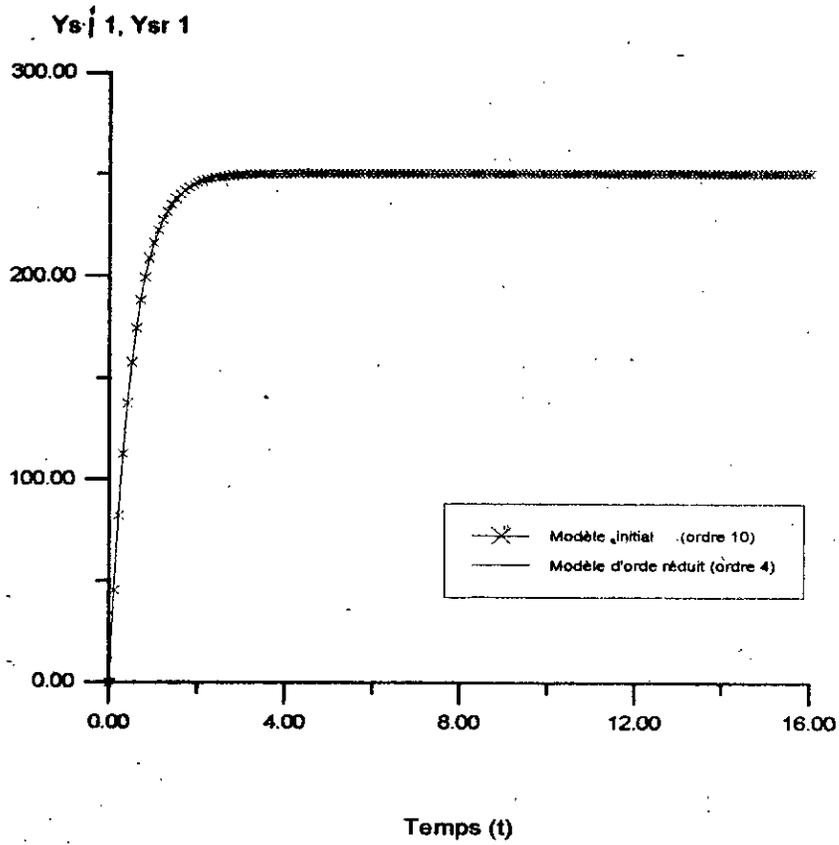
3-2a
Figure 3.26 Réponses impulsionnelles Y_i , Y_r et leur écart Y_{err} (sortie 1)

Méthode de SCHUR (CAS CONTINU)



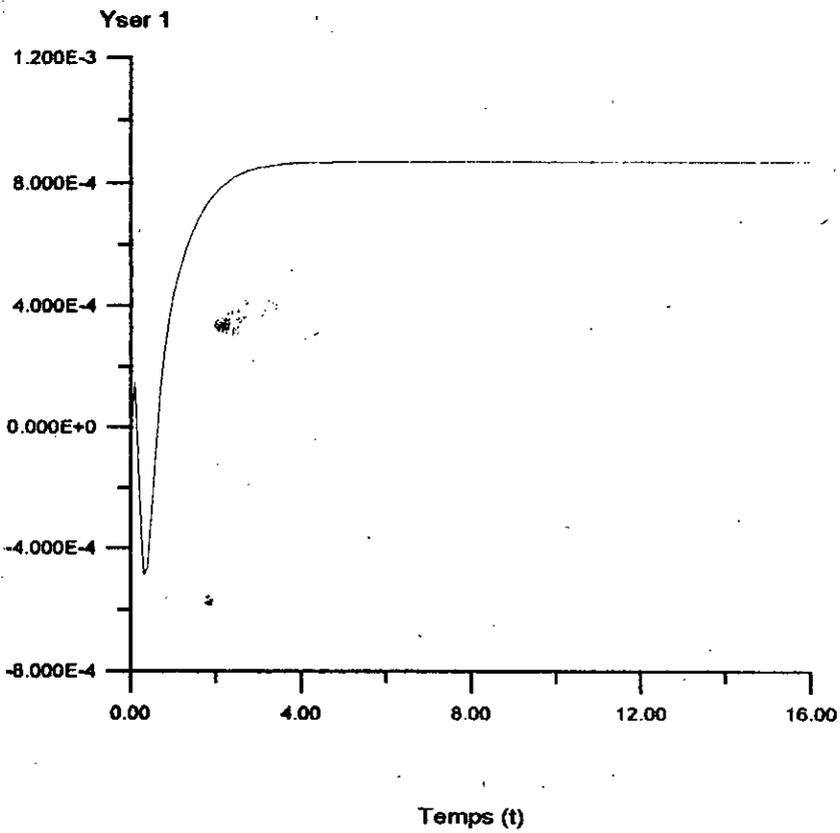
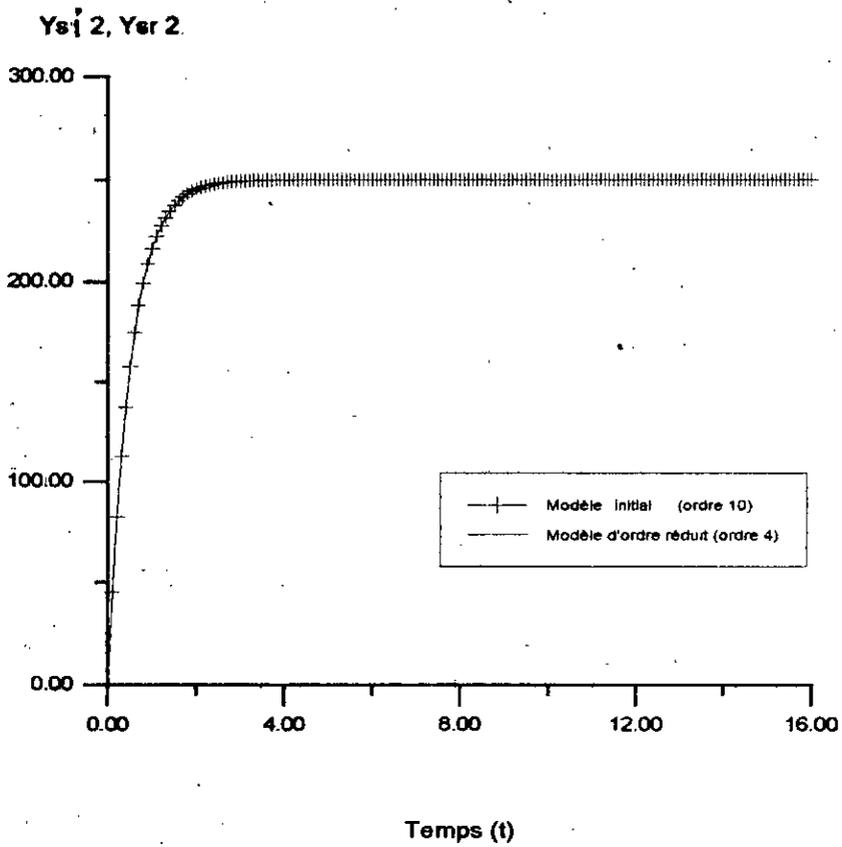
3-2a
Figure 3-2b. Réponses impulsionnelles Y_j , Y_r et leur écart Y_{er} (sortie 2)

Méthode de SCHUR (CAS CONTINU)



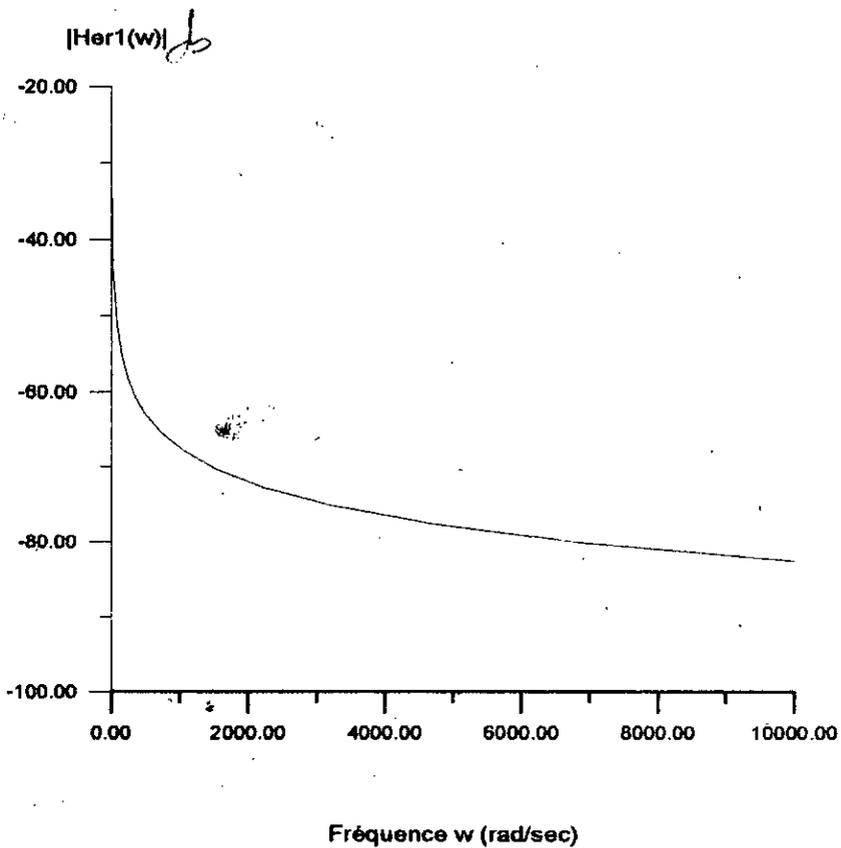
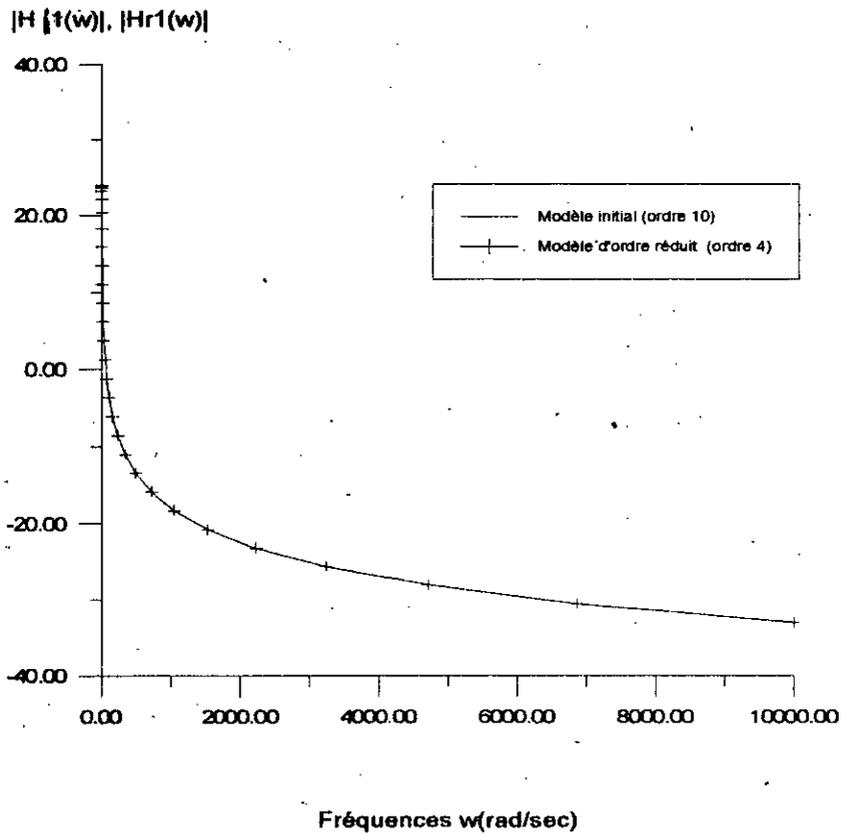
3-3a
Figure 3-3b Réponses indicielles $Y_s |$, Y_{sr} et leur écart Y_{ser} (sortie 1)

Méthode de SCHUR (CAS CONTINU)



3-3a
Figure 3-36 Réponses indicielles Ys_j Ysr et leur écart Yser (sortie 2)

Méthode de SCHUR (CAS CONTINU)



^{3-4a}
Figure 2 _{3-4b} Spectres d'amplitude $|H_i(w)|$, $|H_r(w)|$ et leur écart (sortie 1)

Méthode de SCHUR (CAS CONTINU)

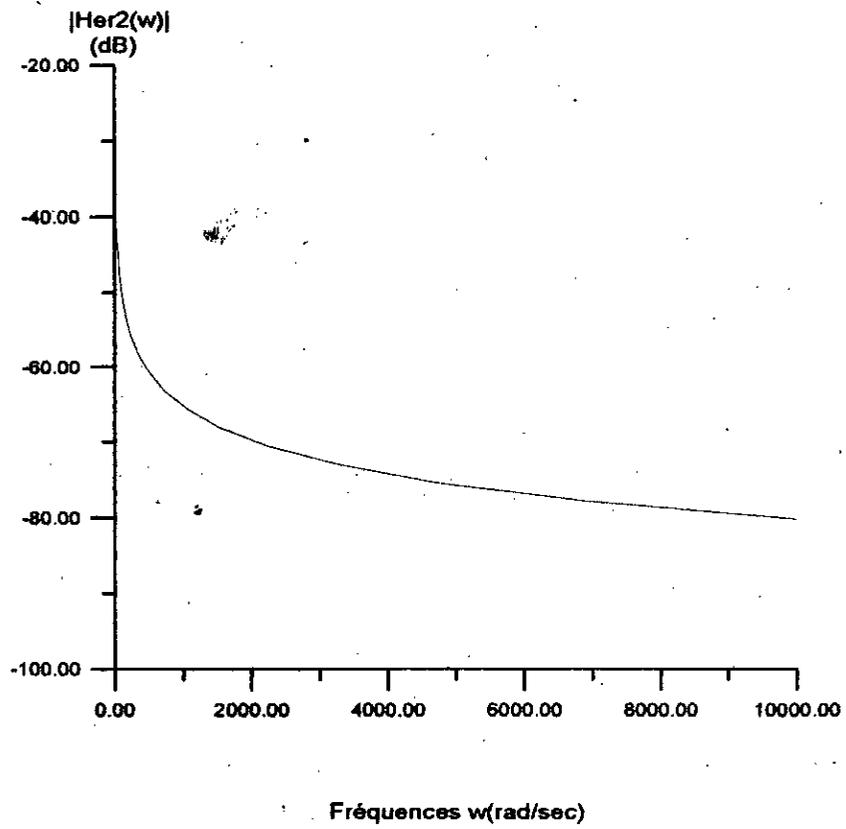
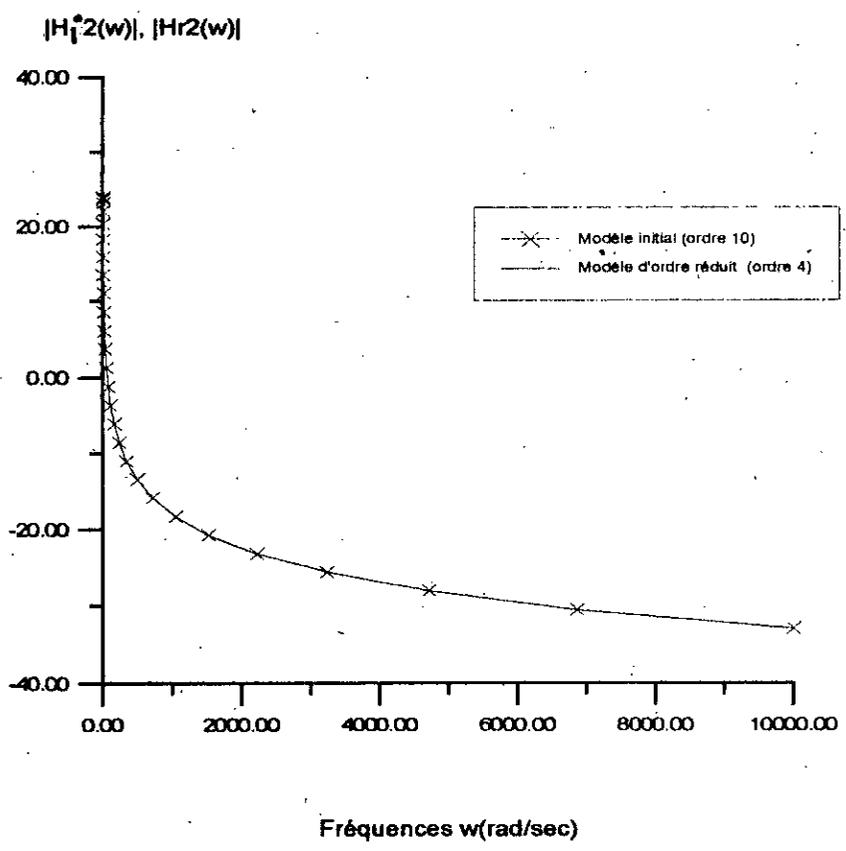


Figure 2-^{3-4a}_{3-4b} Spectres d'amplitude $|H_1^2(w)|$, $|Hr(w)|$ et leur écart (sortie2)

Méthode de SCHUR (CAS CONTINU)

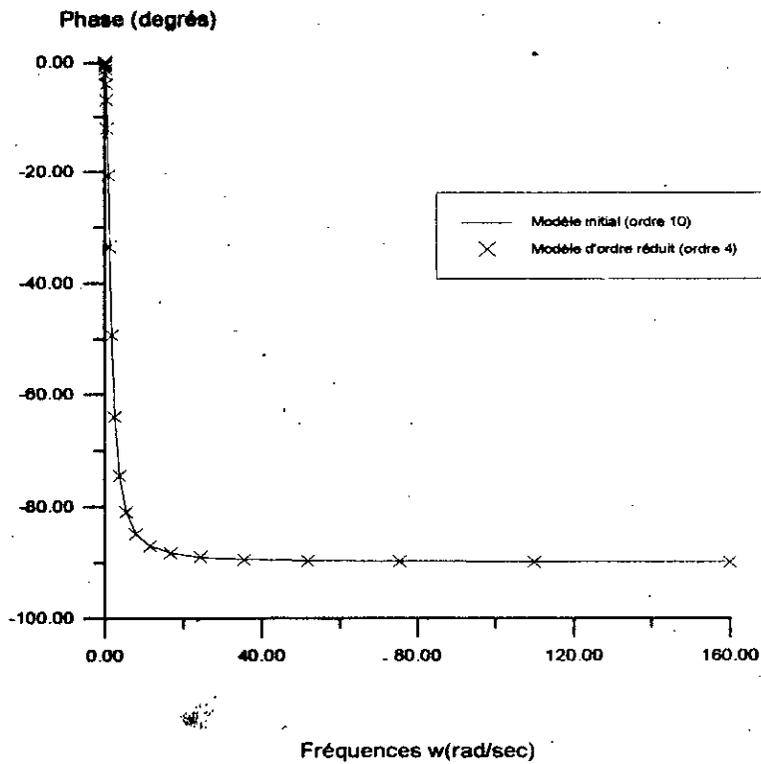


Figure 2- 3.4a Spectres de phase (sortie1)

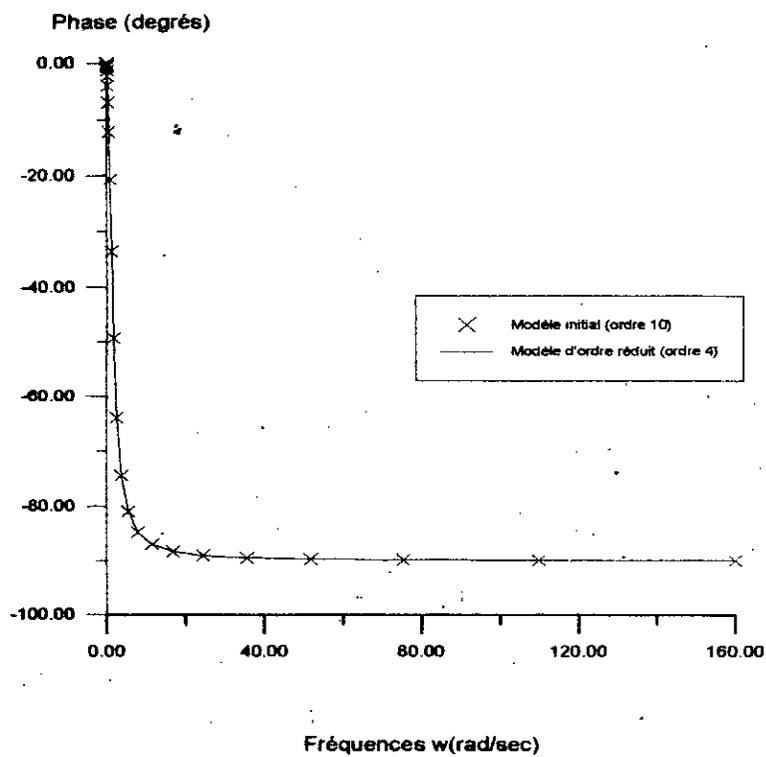


Figure 2- 3.4a Spectres de phase (sortie2)

. la matrice de commande:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 5.68889E-01 & 0 \\ 3.55556E-02 & 0 \\ 0 & 4.49123E-01 \\ 0 & 2.80702E-02 \\ 3.78209E-01 & 0 \\ 2.36380E-02 & 0 \\ 1.47737E-03 & 0 \\ 0 & 3.54571E-01 \\ 0 & 2.21606E-02 \\ 8.00000E-03 & 8.00000E-04 \end{bmatrix}$$

. la matrice d'obsevation:

$$\tilde{C}^T = \begin{bmatrix} 8.88889E-03 & 0 \\ 1.24444E-01 & 0 \\ 7.01754E-03 & 0 \\ 1.26316E-01 & 0 \\ 0 & -2.21607E-03 \\ 0 & -4.65374E-02 \\ 0 & -7.51246E-01 \\ 0 & 7.75623E-02 \\ 0 & -2.93621E-01 \\ 1.00000E+05 & 1.00000E+05 \end{bmatrix}$$

. la matrice des valeurs singulières:

$$\Sigma = \text{diag} \left\{ 2.5001E+02 ; 2.5168E-02 ; 5.5781E-03 ; 2.4142E-03 ; 9.2182E-04 \right. \\ \left. 1.3886E-05 ; 1.1386E-07 ; 0 ; 0 ; 0 \right\}$$

La représentation du modèle d'ordre réduit est:

• la matrice d'évolution réduite:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1.71252E-01 & -1.47666E-02 & 1.17774E-01 & -4.88834E-01 \\ -6.64994E-02 & 1.00255E-01 & -1.15933E-01 & 1.64355E-01 \\ 5.39501E-04 & 1.30820E-01 & 2.31426E-02 & 1.43156E-01 \\ -1.36700E-01 & 8.6656E-03 & 5.18064E-01 & 3.48996E-01 \end{bmatrix}$$

• la matrice de commande réduite:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} -2.13734E-01 & -3.40078E-01 \\ 2.62223E-02 & 7.06828E-02 \\ -1.17664E-01 & -2.31292E-02 \\ 9.38475E-02 & -6.01979E-02 \end{bmatrix}$$

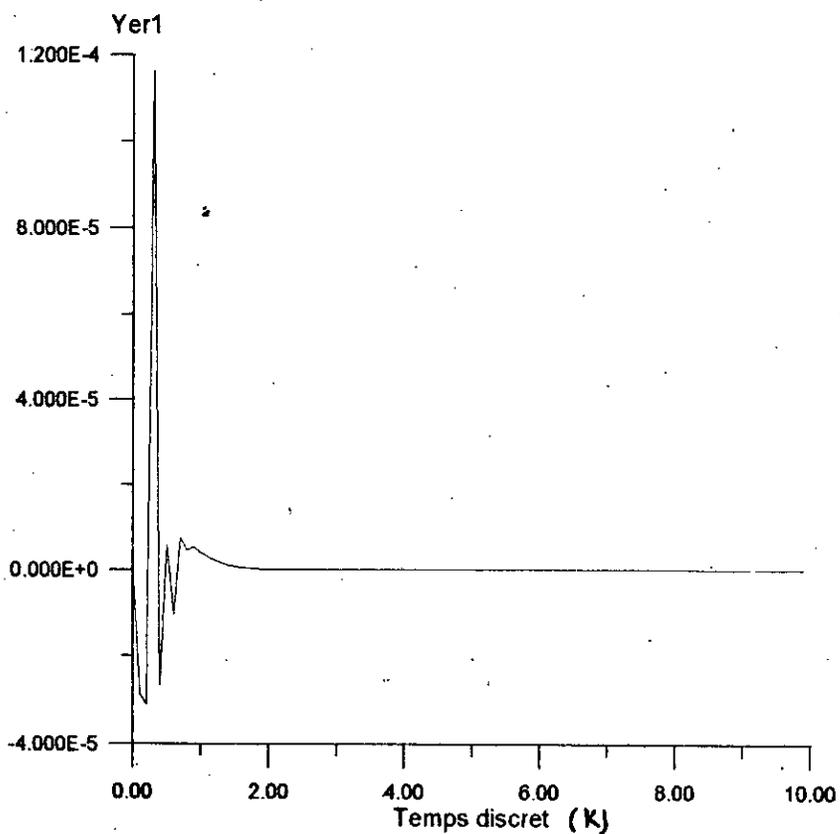
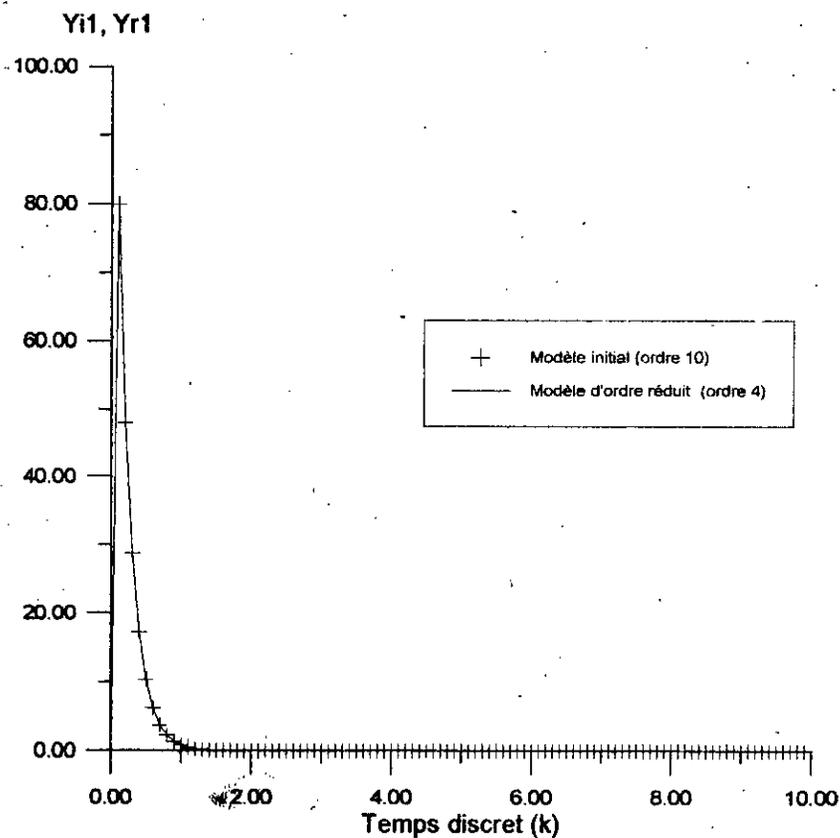
• la matrice d'observation réduite:

$$\hat{C}^T = \begin{bmatrix} -3.37112E+03 & -3.37123E+03 \\ 4.02801E+03 & 4.02773E+03 \\ 1.38728E+04 & 1.38730E+04 \\ 1.71149E+04 & 1.71148E+04 \end{bmatrix}$$

De même que pour l'exemple continu, les réponses indicielles, impulsionnelles et fréquentielles pour le modèle d'ordre réduit sont tracées avec celles du modèle initial respectivement sur les mêmes figures (3-6a, 3-7a, 3-8a, 3-8c).

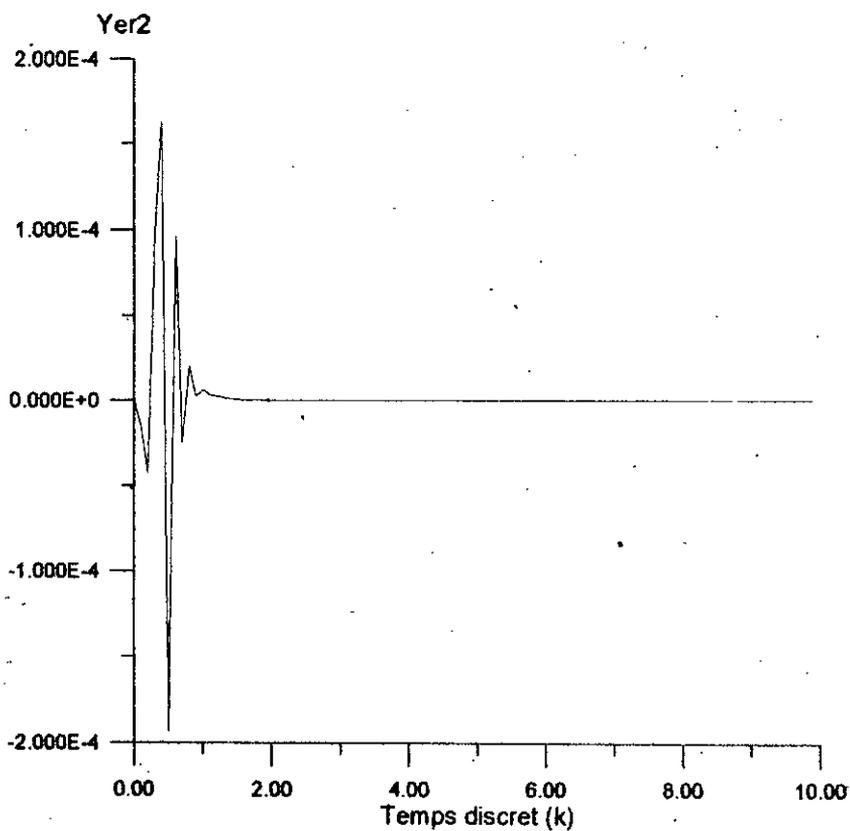
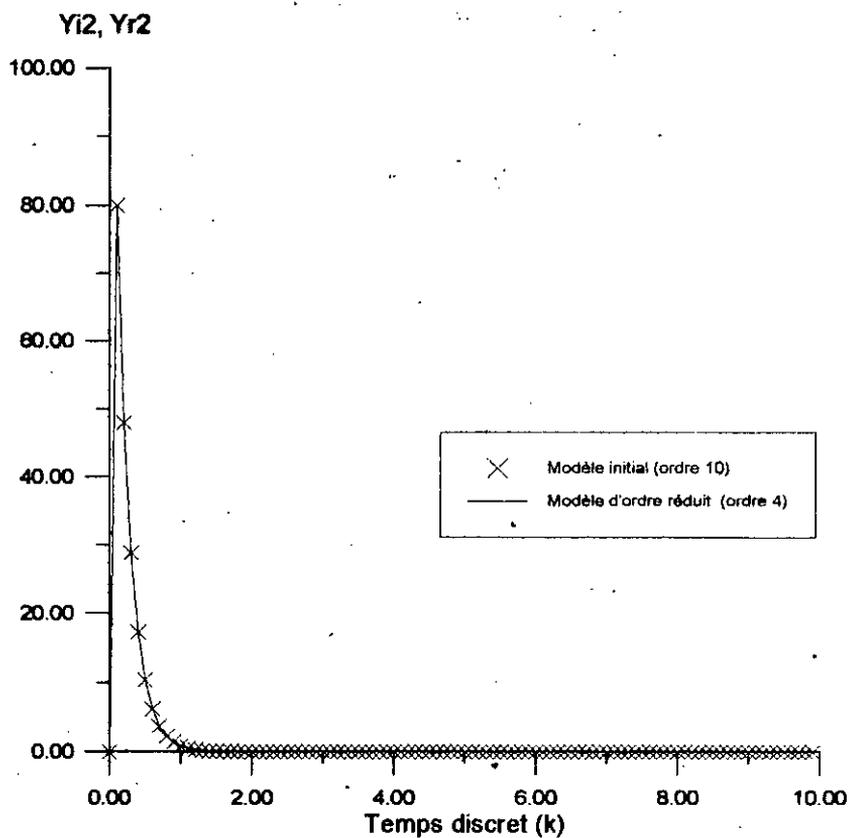
Les figures (3-6b, 3-7b et 3-8b) représentent les écarts entre les réponses impulsionnelles, indicielles et les spectres d'amplitude du modèle initial et celles d'ordre réduit.

Méthode de SCHUR (CAS DISCRET)



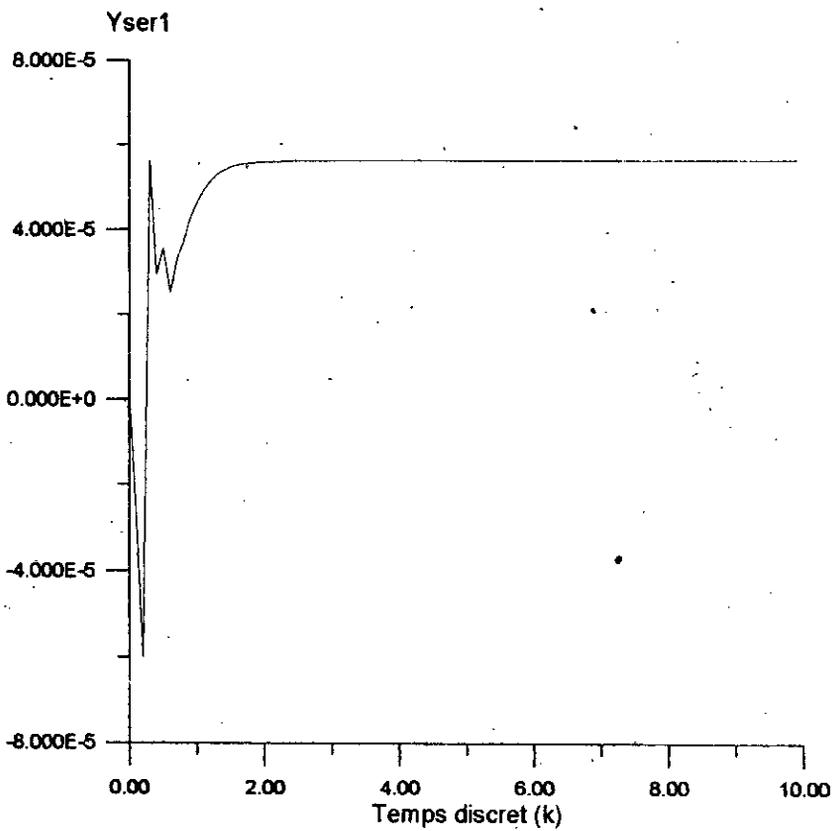
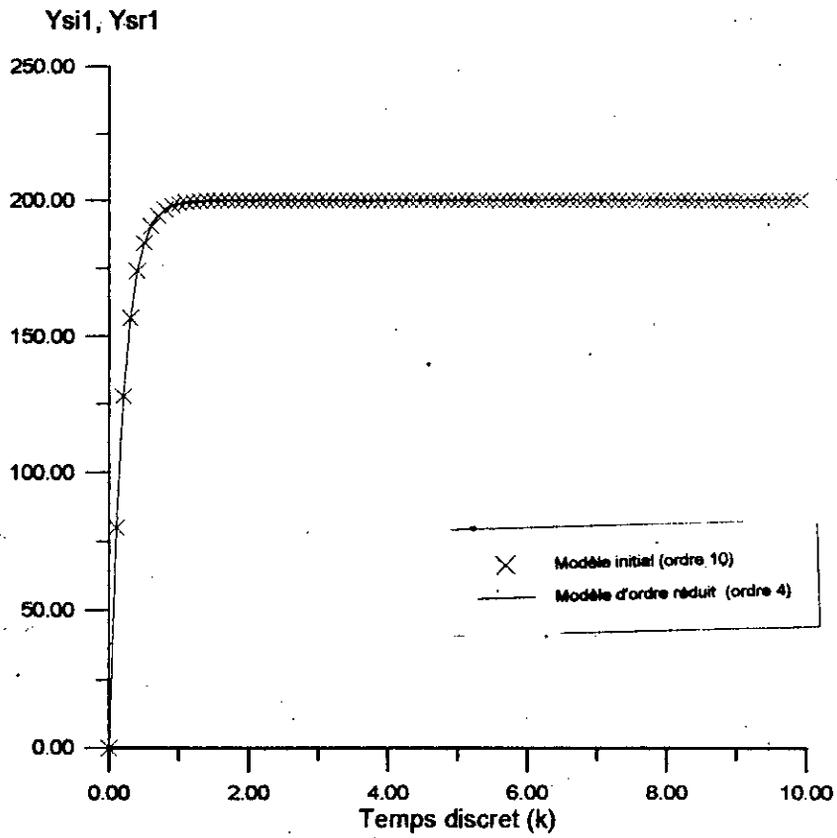
3-54
Figure 3-55 Réponses impulsionnelles Y_i, Y_r et leur écart Y_{er} (sortie 1)

Méthode de SCHUR (CAS DISCRET)



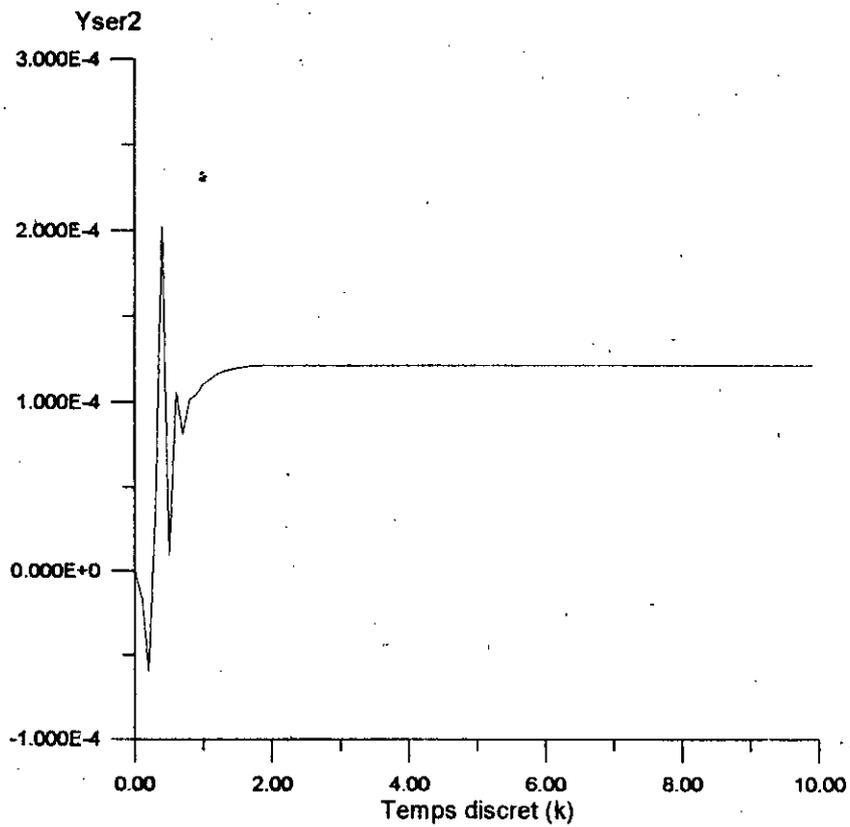
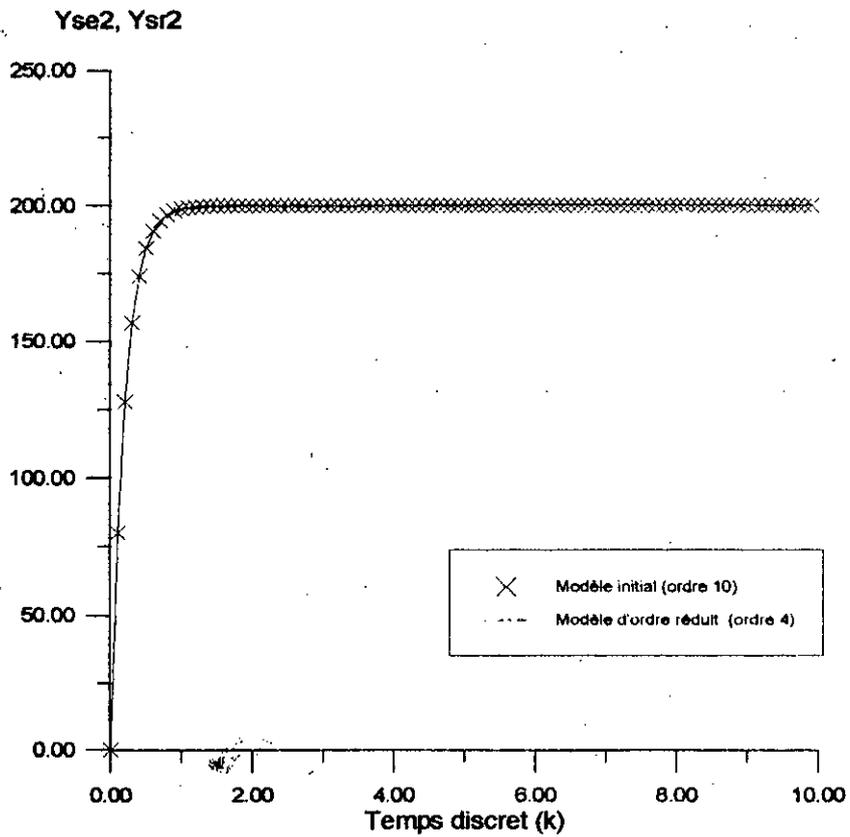
35
Figure 1-35. Réponses impulsionnelles Y_i , Y_r et leur écart Y_{er} (sortie 2)

Méthode de SCHUR (CAS DISCRET)



3-6a
Figure 3-36 Réponses indicielles Y_{si} , Y_{sr} et leur écart Y_{ser} (sortie 1)

Méthode de SCHUR (CAS DISCRET)



3-6a
3-6b
Figure 1- Réponses indicielles Y_{si} , Y_{sr} et leur écart Y_{ser} (sortie 2)

Méthode de SCHUR (CAS DISCRET)

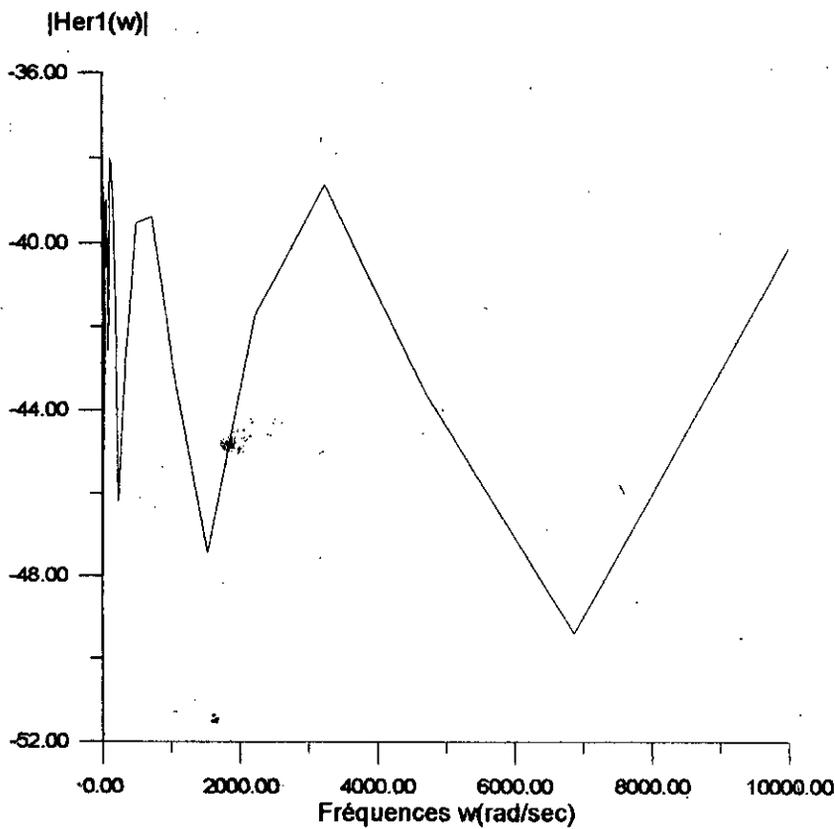
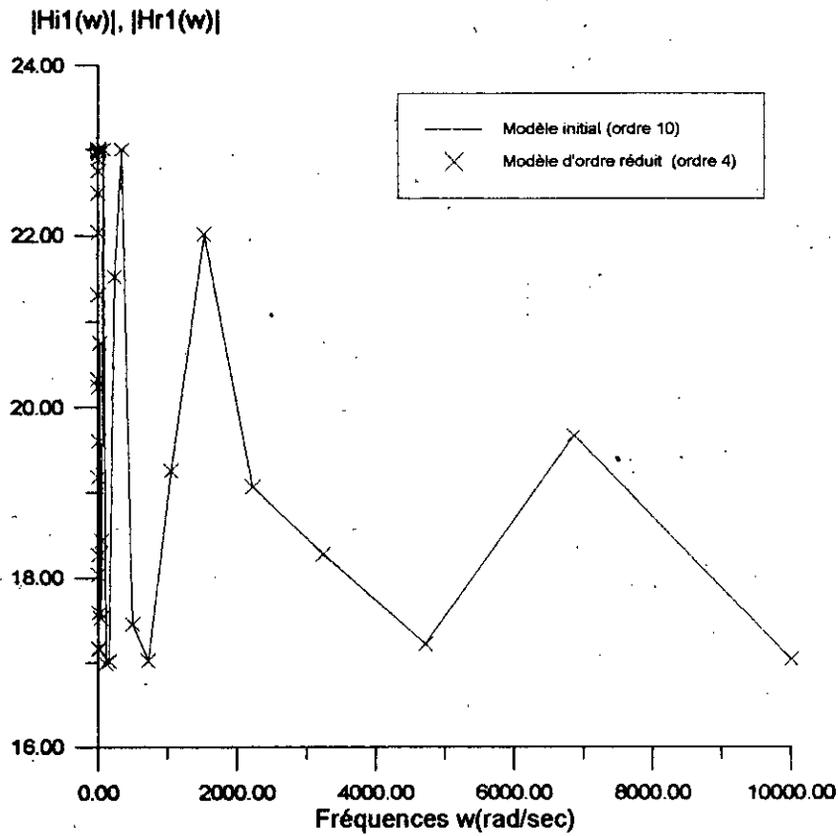
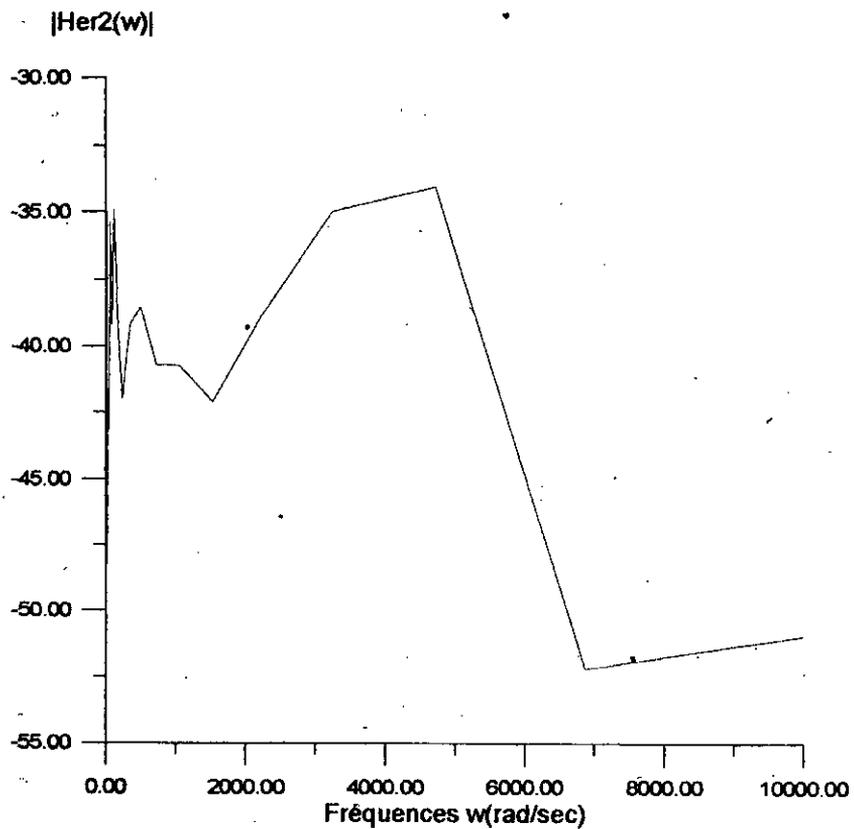
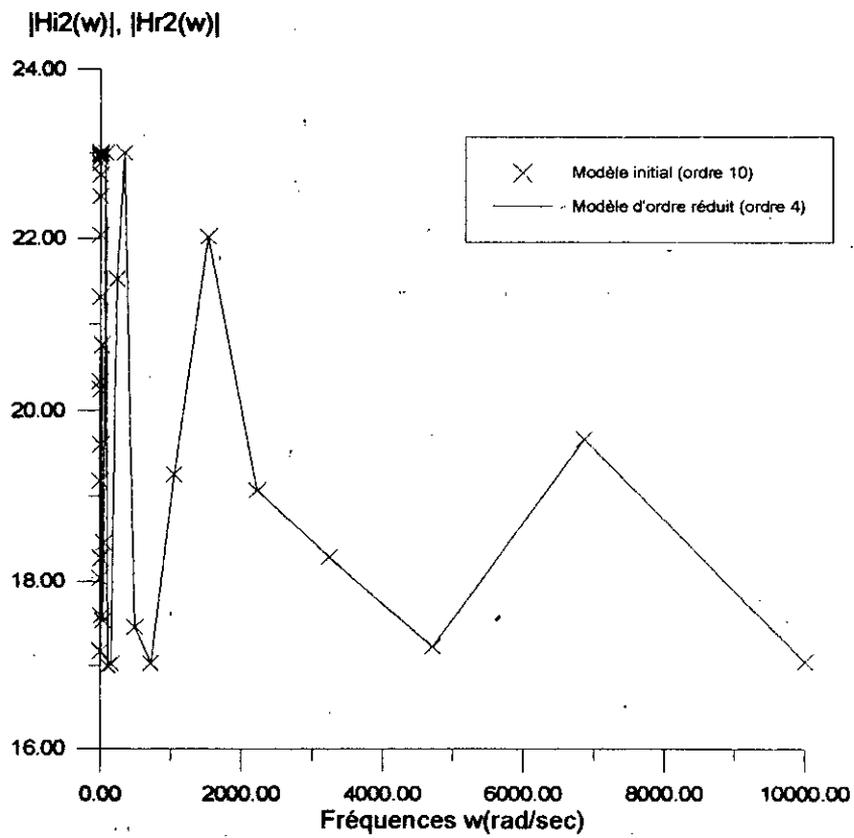


Figure 2-3-74 Spectre d'amplitude $|Hi(w)|$, $|Hr(w)|$ et leur écart $|Her(w)|$ (sortie 1)

Méthode de SCHUR (CAS DISCRET)



3-7a
Figure 3-7b Spectre d'amplitude $|H_i(w)|$, $|H_r(w)|$ et leur écart $|H_e(w)|$ (sortie 2)

Méthode de SCHUR (CAS DISCRET)

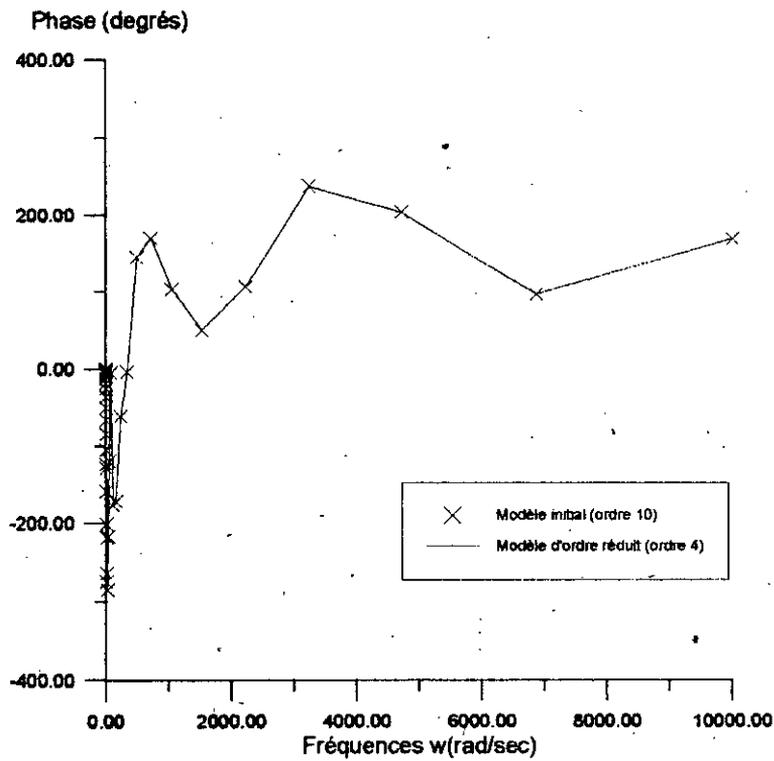


Figure 1-3-8a Spectre de phase (sortie 1)

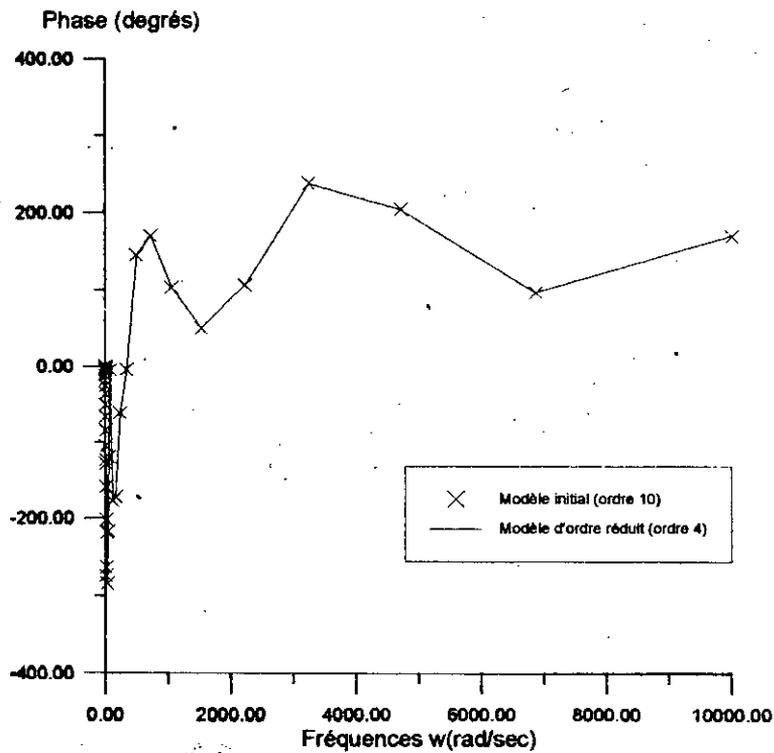


Figure 1-3-8b Spectre de phase (sortie 2)

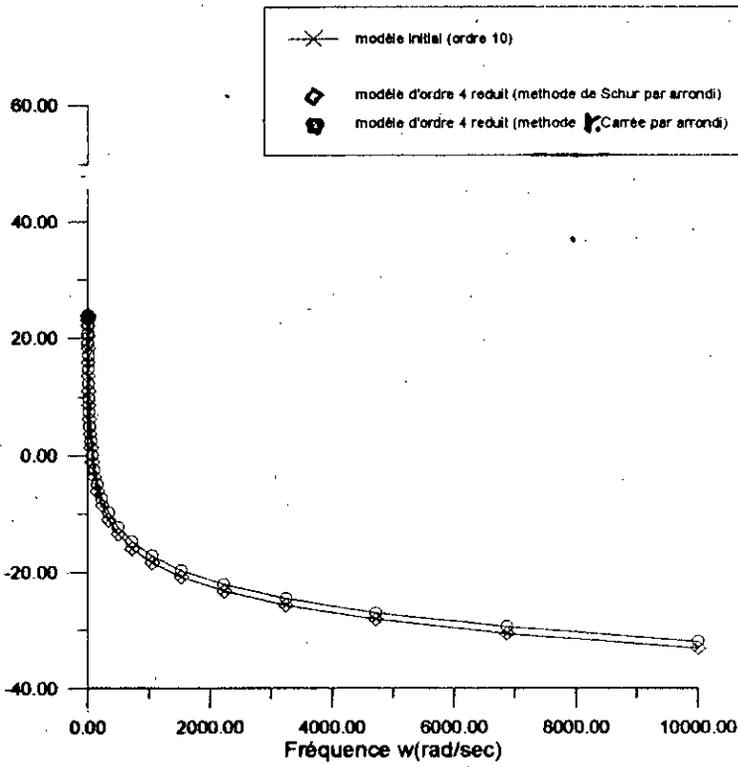


Figure 3-10. Comparaison entre la methode de Schur et la methode de la racine carrée (sortie 1)

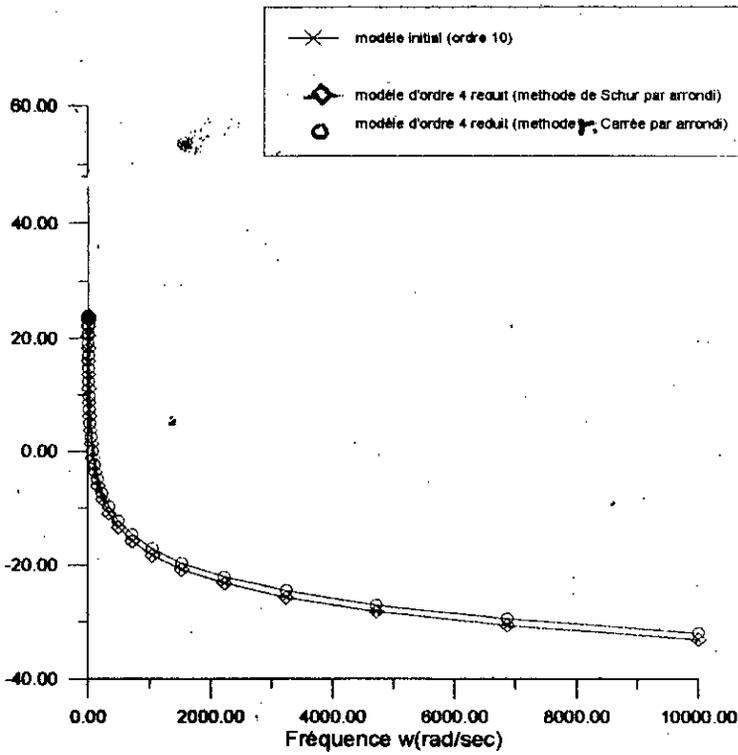


Figure 3-10. Comparaison entre la methode de Schur et la methode de la racine carrée (sortie 2)

- Interprétation :

A partir de ces résultats nous pouvons confirmer que la procédure de Schur qui utilise la notion de projection interne donne un modèle d'ordre réduit qui est stable, causal, observable, commandable et présente une bonne approximation du modèle initial (ceci est valable aussi bien dans le cas continu que dans le cas discret). En d'autres termes la réduction de l'ordre du modèle affecte peu les principales propriétés qui sont d'ailleurs préservées.

Comme nous l'avons déjà mentionné, en limitant la précision arithmétique des matrices de projection F et G, utilisées pour le calcul du modèle d'ordre réduit, il s'est avéré qu'effectivement la méthode de Schur est plus robuste par rapport à la méthode de la Racine - Carrée.

Les tracés des réponses fréquentielles du modèle d'ordre réduit par les deux procédures après limitation de la précision arithmétique des matrices de projection, comparés aux tracés du modèle initial dans la figure (3-10) le montrent.

II.4 CONCLUSION:

Dans ce chapitre, nous avons étudié deux procédures de réduction :

La M.T.R.E. pour les systèmes minimaux et la méthode de projection de Schur pour les modèles non minimaux.

Chacune des deux méthodes aboutit à un modèle d'ordre réduit stable, commandable et observable.

Le modèle d'ordre réduit sera utilisé dans le chapitre suivant, pour la synthèse d'une structure de réglage par retour d'état qui permettra de commander le modèle original d'améliorer ces performances et son comportement dynamique. dynamique.

CHAPITRE III

SYNTHESE DE LA COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT POUR LES SYSTEMES MULTIVARIABLES

III.1 INTRODUCTION:

L'objet de ce chapitre est la synthèse d'une structure de commande optimale par retour d'état pour un modèle multivariable d'ordre (n) supposé linéaire, invariant dans le temps, commandable et observable.

Cette synthèse se fera en deux étapes. En effet, la structure de réglage d'état sera d'abord établie pour le modèle d'ordre réduit ($k < n$) et ensuite réorganisée pour être appliquée au modèle initial d'ordre (n).

L'établissement de cette structure se base sur les équations du système global en boucle - fermée et l'utilisation de la forme canonique.

Pour évaluer la qualité du réglage du modèle initial nous comparerons la réponse indicielle du modèle original en boucle - ouverte et sa réponse en boucle - fermée.

Notons que cette étude se fera pour le cas discret vu que de nos jours les contrôleurs digitaux sont très répandus et sont utilisés pour commander aussi bien les systèmes continus que les systèmes discrets.

III.2. STRUCTURE DE COMMANDE OPTIMALE PAR RETOUR D'ETAT :

III.2.1 EQUATIONS EN BOUCLE - OUVERTE:

En supposant que l'effet des perturbations sur le modèle d'ordre réduit est négligeable, sa représentation d'état est donnée par :

$$\dot{X}_r(k) = \tilde{A}_r \cdot X_r(k) + \tilde{B}_r \cdot U(k) \quad (\text{III.1})$$

$$Y_r(k) = \tilde{C}_r \cdot X_r(k) \quad (\text{III.2})$$

où $X_r(k)$: vecteur d'état de dimension ($x \times 1$).

$Y_r(k)$: vecteur de sortie de dimension ($p \times 1$).

$U(k)$: vecteur de commande de dimension ($m \times 1$).

et avec $\tilde{A}_r \in \mathfrak{R}^{k \times k}$, $\tilde{B}_r \in \mathfrak{R}^{k \times m}$, $\tilde{C}_r \in \mathfrak{R}^{p \times k}$

La figure (III.1) montre le schéma analogique correspondant à cette représentation:

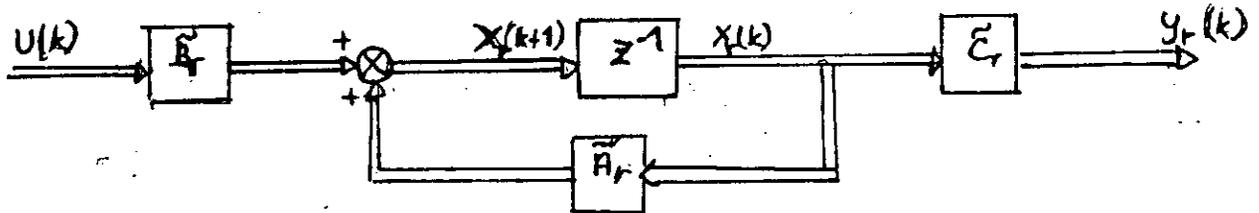


Figure (III.1): Représentation du modèle d'ordre réduit en boucle - ouverte

Rappelons que ce modèle est linéaire, invariant dans le temps, commandable et observable.

III.2.2: EQUATIONS EN BOUCLE FERMEE:

Le principe de la commande par retour d'état se base sur la minimisation d'un critère quadratique qui permet d'obtenir une commande optimale (U_{opt}) donnée en fonction du vecteur d'état du modèle considéré et de la consigne qui lui est appliquée.

Ce critère est donné par l'expression suivante:

$$J = X^T(r) \cdot Q \cdot X(k) + \sum_{l=0}^{k-1} [X^T(l) \cdot Q \cdot X(l) + U^T(l) \cdot R \cdot U(l)] \quad (III.3)$$

- avec: Q, R : Matrices de pondération définies positives [A1].
 X : Vecteur d'état du système à commander.
 U : Vecteur de commande.

La minimisation de ce critère intégrale fait appel au principe de Bellmann [3], [8] elle permet d'obtenir la loi de commande donnée par l'expression suivante :

$$U_{opt}(k) = -K_r \cdot X_r(k) + w(k) \quad (III.4)$$

Où K_r : La matrice de contre réaction d'état de dimension $(m \times k)$.

$w(k)$: Le vecteur de consigne de dimension $(m \times 1)$.

Le vecteur de consigne intervient par une contre - réaction sur le vecteur de commande pour assurer que la sortie $Y(k)$ prenne en régime établi la valeur imposée par cette consigne.

L'équation d'état en boucle - fermée est obtenue par injection de l'équation (III-1) dans l'équation (III-1) :

$$X_r(k+1) = \tilde{A}_r \cdot X_r(k) + \tilde{B}_r \cdot w(k) \quad (III.5)$$

avec:

$$\tilde{A}_r = \tilde{A}_r - \tilde{B}_r \cdot K_r \quad (III.6)$$

Notons que \tilde{A}_r de dimension $(k \times k)$ et \tilde{B}_r de dimension $(k \times m)$.

Le schéma analogique du système en boucle fermée est alors donné par la figure (III-2):

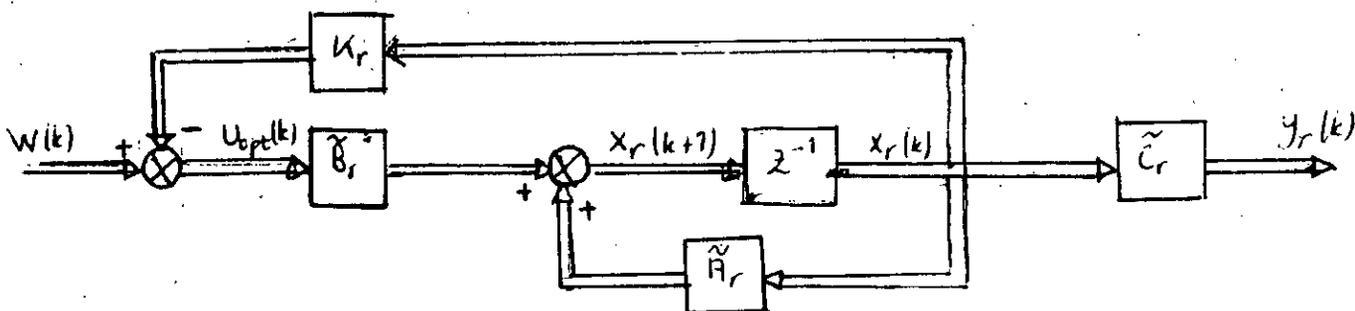


Figure (III-2) Représentation du modèle d'ordre réduit en boucle - fermée.

Cette commande optimale permettra d'améliorer les performances du systèmes citées ci dessous [17]:

- 1 **Le temps de réponse (T_r)** : Défini par la durée du régime transitoire lorsque le système est soumis à une grandeur qui peut être soit un échelon unité soit une impulsion unité. En d'autres termes, c'est l'intervalle de temps compris entre l'instant d'une variation en échelon d'un signal d'entrée et l'instant où la variation corrélative du signal ne s'écarte plus au delà d'une tolérance spécifiée en général $\pm 5\%$ de sa valeur en régime final.
- 2 **Le taux de dépassement** : Défini comme étant l'écart transitoire maximal entre la réponse et sa valeur de régime final, i.e. : C'est la différence entre la valeur du régime final et celle du régime initial.

La figure (III-3) permet d'illustrer ces performances à partir d'une représentation graphique de la réponse indicielle d'un système du second ordre sous amorti :

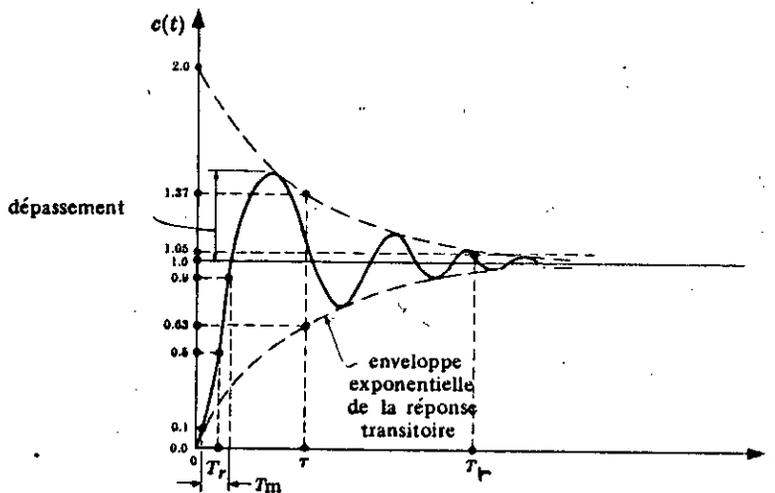


Figure (III-3) : Réponse indicielle d'un système du second ordre

III.2.3 TRANSFORMATION SOUS FORME CANONIQUE ET DECOMPOSITION EN SOUS SYSTEME.

Pour déterminer les éléments de la matrice K_r , nous appliquerons une des procédures explicitées par Bühler [3] qui donne des résultats satisfaisants pour les systèmes MIMO [1]. Cette procédure fait appel à la forme canonique de réglage obtenue à partir d'une transformation linéaire T_c [A5]. Cette transformation permettra d'établir une nouvelle représentation d'état du modèle donnée par :

$$Z_r(k+1) = \tilde{A}'_f \cdot Z_r(k) + \tilde{B}'_f \cdot w(k) \quad (\text{III.8})$$

$$Z_r(k) = T_c \cdot X_r(k) \quad (\text{III.9})$$

$$\tilde{A}'_f = T_c \cdot X_r(k) \quad (\text{III.10})$$

$$\tilde{B}'_f = T_c \cdot \tilde{B}_f \quad (\text{III.11})$$

a- Décomposition de \tilde{A}'_f :

Cette forme canonique de réglage est choisie pour obtenir une décomposition du système global en m - sous systèmes d'ordre n_i ($i = \overline{1, m}$).

\tilde{A}'_f est dans ce cas une matrice diagonale par blocs :

$$\tilde{A}'_f = \begin{bmatrix} A'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A'_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & A'_m \end{bmatrix}$$

(III.12)

Les sous - matrices $A'_i (i = \overline{1, m})$ de dimension $(n_i \times n_i)$ sont sous la forme de réglage :

$$\tilde{A}'_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_{i,0} & -\alpha_{i,1} & \dots & \dots & -\alpha_{i,n_i-1} \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

avec $\alpha_{i,j} (j = \overline{0, n_i - 1})$ les coefficients de l'équation caractéristique du $i^{\text{ème}}$ sous système.

Remarque :

- 1 Les valeurs propres de \tilde{A}'_f qui représentent les pôles du système global en boucle fermée sont égaux aux pôles des m - sous systèmes.

De ce fait, par un choix adéquat des pôles à imposer à chaque sous - système nous pouvons aboutir à un comportement dynamique satisfaisant pour le système en boucle fermée.

- 2 Le choix de l'ordre (n_i) des sous systèmes est tel que l'effort de commande soit réparti entre eux le plus uniformément possible.
- 3 L'ordre (n_i) le plus élevé doit être choisi égal au plus petit entier 'j' vérifiant :

$$\text{rang}[\tilde{B}_r, \tilde{A}_r \tilde{B}_r, \dots, \tilde{A}_r^{(j-1)} \tilde{B}_r] \quad (\text{III.14})$$

Les autres ordres doivent vérifier les conditions suivantes :

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \quad (\text{III.15})$$

avec $n_1 = j$

et

$$\sum_{i=1}^m n_i r \quad (\text{III.16})$$

b. Décomposition de \tilde{B}'_f :

De la même manière, la matrice \tilde{B}'_f est décomposée en m - sous systèmes :

$$\tilde{B}'_f{}^T = [B'_1, B'_2, \dots, B'_m] \quad (\text{III.17})$$

avec B'_i : matrice de dimension $(n_i \times m)$

et :

$$B'_i = [0^T, 0^T, \dots, b_i^T] \quad (\text{III.18})$$

où : 0^T vecteur nul de dimension $(1 \times m)$.

b_i^T vecteur ligne de dimension $(1 \times m)$ donné par :

$$b_i^T = [b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,m}] \quad (\text{III.19})$$

avec

$$b_{i,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = l \\ 0 & \text{si } i \neq l \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

III.2.4 DETERMINATION DE LA MATRICE DE CONTRE REACTION D'ETAT K_r :

a - Relations intermédiaires:

La matrice de contre réaction K_r peut être décomposée suivant ses vecteurs lignes :

$$K_r^T = [k_1^T, \dots, k_m^T] \quad (III.21)$$

En décomposant la transformation T_C en sous matrices T_i de dimensions $(n_i \times r)$, et compte tenu des équations précédentes, nous aboutissons à la formule suivante :

$$\sum_{j=0}^{n_i-1} \alpha_{i,j} t_{i,j+1} = t_{i,n_i} \cdot \tilde{A}_r - k_i^T \quad (III.22)$$

avec :

$$t_{i,j+1} = e_i \cdot A_r^j \quad (III.23)$$

b - Détermination du vecteur e_i :

Pour chaque sous système, nous pouvons montrer que:

$$T_i \cdot \tilde{B}_r = B_i' \quad (III.24)$$

Cette relation correspond à n_i équations qui peuvent être réunies en une seule relation matricielle donnée par :

$$e_i \cdot Q_{C_i} = d_i \quad (III.25)$$

avec :

Q_{C_i} : La matrice de commandabilité de dimension $(r \times (m \cdot n_i))$ du $i^{ème}$ sous système

d_i : Le vecteur ligne de dimension $(1 \times (m \cdot n_i))$ donné par :

$$d_i = [0^T, 0^T, \dots, b_i^T] \quad (III.26)$$

Où : b_i^T est donné par l'expression : (III.20)

Le calcul du vecteur e_i se fait selon trois cas :

- Cas où $n_i = r/m$

Q_{c_i} est une matrice de dimension $(r \times r)$, sous la condition qu'elle soit régulière nous pouvons écrire :

$$e_i = d_i \cdot Q_{c_i} \quad (\text{III.27})$$

- Cas où $n_i > r/m$

Q_{c_i} est une matrice de dimension $(r \times (m \times n_i))$, dans ce cas nous procédons par une décomposition de cette matrice suivant la forme suivante :

$$Q_{c_i} = [Q_{c_n} \quad Q_{c_e}] \quad (\text{III.28})$$

telle que Q_{c_n} est une sous matrice régulière de dimension $(r \times r)$

Q_{c_e} est une sous matrice de dimension $(r \times (m \times n_i - r))$

De même, le vecteur d_i est décomposé en deux sous vecteurs :

$$d_i = [d_n \quad d_e] \quad (\text{III.29})$$

Avec $d_n = 0^T$

L'équation (III.25) aura pour nouvelle expression :

$$e_i \cdot [Q_{c_n} \quad Q_{c_e}] = [d_n \quad d_e] \quad (\text{III.30})$$

en d'autres termes :

$$\begin{cases} e_i \cdot Q_{C_n} = d_n \\ e_i \cdot Q_{C_e} = d_e \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

Ce qui nous permet d'établir l'équation suivante :

$$e_i = d_n \cdot Q_{C_n}^{-1} \quad (\text{III.32})$$

- Cas où $n_i < r/m$

La matrice de commandabilité est décomposée selon ses vecteurs lignes :

$$Q_{C_i} = \begin{bmatrix} Q_{C_n} \\ Q_{C_e} \end{bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

telle que Q_{C_n} est une sous matrice régulière de dimension $((m \times n_i) \times (m \times n_i))$

Q_{C_e} est une sous matrice de dimension $((r - m \times n_i) \times (m \times n_i))$

Par conséquent le vecteur e_i doit être décomposé en deux sous vecteurs :

$$e_i = [e_n \quad 0^T] \quad (\text{III.34})$$

avec e_n sous vecteur de dimension $(1 \times (m \times n_i))$

0^T sous vecteur de dimension $(1 \times (r - m \times n_i))$

Ces décompositions permettent d'écrire :

$$[e_n \quad 0^T] \cdot \begin{bmatrix} Q_{C_n} \\ Q_{C_e} \end{bmatrix} = d_i \quad (\text{III.35})$$

D'où la relation qui permet de calculer le vecteur e_i ,

$$e_n \cdot Q_{C_n} = d_i \quad (III.36)$$

vu que Q_{C_n} est une sous matrice régulière nous pouvons écrire :

$$e_n = d_i \cdot Q_{C_n}^{-1} \quad (III.37)$$

c - Détermination des vecteurs lignes k_i^T de la matrice K_r :

A partir des relations (III 22) et (III - 23) nous pouvons écrire :

$$k_i^T = e_i \cdot p_i \quad (III.38)$$

$$i = \overline{1, m}$$

où p_i est un polynôme matriciel donné par :

$$p_i = \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \alpha_{i,j} \cdot \tilde{A}_r^j \right) + \tilde{A}_r^{n_i} \quad (III.39)$$

avec $\alpha_{i,j}$: les n_i - coefficients de l'équation caractéristique :

$$\det(zI - A'_i) = 0 \quad (III.40)$$

Ces coefficients sont liés aux valeurs propres de A'_i donc aux pôles du système global en boucle fermée.

De là, nous déduisons qu'il existe une relation entre les pôles du système global en boucle fermée (égaux aux pôles des m - sous - systèmes) et les vecteurs lignes k_i^T de la matrice de contre réaction d'état K_r .

Ainsi pour chaque sous - système, nous pouvons imposer n_i - pôles pour le système global en boucle - fermée.

En résumé, la décomposition du système en boucle fermée en m - sous - système d'ordre (n_i) , en plus du choix des n_i - pôles pour chaque sous système, nous permettent de déterminer la matrice de contre réaction K_r ($k \times k$) correspondant au comportement dynamique souhaité.

- Choix des pôles:

Cette synthèse qui se base sur l'assignation des pôles a fait ces preuves et a donné des résultats relativement satisfaisants, étant donné que le comportement transitoire du système est souvent rapporté à la localisation dans le plan complexe des racines de son équation caractéristique tel que :

- **Pour le cas continu** : Le choix de ces pôles se fait de sorte à ce qu'ils soient dans le demi - plan complexe gauche pour assurer la stabilité et le plus loin possible de l'axe imaginaire afin d'avoir une réponse assez rapide. Comme il est à noter qu'un choix de pôles complexes à partie imaginaire petite permet de réduire le taux de dépassement en amortissant les oscillations.
- **Pour le cas discret** : Les pôles sont choisis de manière à ce qu'ils se situent dans le cercle unité pour préserver la stabilité. Pour les pôles réels il est judicieux de choisir des pôles positifs afin d'éviter les oscillations importantes dans la réponse transitoire en garantissant un amortissement rapide. Afin d'avoir une réponse rapide, il est préférable de choisir des pôles vérifiant $w_i T < \frac{\pi}{2}$ tel que w_i est la partie imaginaire et T la période d'échantillonnage.

III-3 STRUCTURE DE REGLAGE D'ETAT POUR LE MODELE INITIAL D'ORDRE (n)

Afin de pouvoir appliquer cette commande au modèle initial d'ordre (n) , la matrice de contre réaction d'état K_r de dimension $(r \times r)$ doit être augmentée de zéros.

La nouvelle matrice de contre réaction d'état sera donnée sous la forme suivante :

$$K'_r = \left[\begin{array}{c|c} K_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} (m-r) \text{ lignes} \\ (n-k) \text{ colonnes} \end{array} \quad \text{(III.41)}$$

Le système en boucle - fermée sera représenté par le schéma suivant :

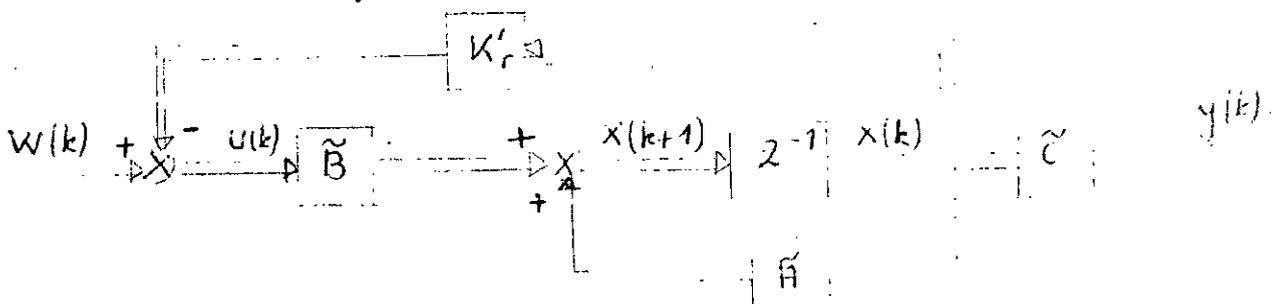


Figure (III-4) Représentation du modèle initial en boucle - fermée

III-4 ALGORITHME DE CALCUL DE K'_r :

Cet algorithme résume la procédure de calcul de la matrice K'_r :

Etape 1 : Calcul du plus petit entier non nul (j) telle que la matrice Q_r soit régulière :

$$Q_r = [\tilde{B}_r, \tilde{A}_r \tilde{B}_r, \dots, \tilde{A}_r^{(j-1)} \tilde{B}_r]$$

$$\text{rang}(Q_r) = k$$

où : k : ordre du modèle simplifié.

Etape 2- Décomposition du système global en boucle fermée en m - sous système d'ordre respectivement n_1, n_2, \dots, n_m tel que :

$$n_1 = j$$

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \text{ et } \sum_{i=1}^m n_i = k \cdot n_1$$

où m représente le nombre de commandes.

Etape 3 : Calcul des matrices de commandabilité Q_{C_i} ($r \times r$) de chaque sous système

$$Q_{C_i} = [\tilde{B}_r, \tilde{A}_r \tilde{B}_r, \dots, \tilde{A}_r^{(n_i-1)} \tilde{B}_r]$$

$$i = \overline{1, m}$$

Etape 4 : test sur la commandabilité de chaque sous système; si le sous système est commandable aller à l'étape 5 sinon revenir à l'étape 2.

Etape 5 : Calcul du vecteur e_i de dimension ($1 \times r$) :

$$e_i = \begin{cases} d_i \cdot Q_{C_i}^{-1} & \text{si } n_i = r/m \\ d_i \cdot Q_{C_n}^{-1} & \text{si } n_i > r/m \\ d_i \cdot Q_{C_n}^{-1} & \text{si } n_i < r/m \end{cases}$$

avec $d_i = [0^T, 0^T, \dots, b_i^T]$ vecteur de dimension ($1 \times r$)

$b_i^T = [b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,m}]$ vecteur de dimension ($1 \times m$)

où $b_{i,e} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = e \\ 0 & \text{si } i \neq e \end{cases}$

Etape 6 : Choix des n_i - pôles pour chaque sous système et calcul des coefficients $\alpha_{i,j}$ ($j = \overline{0, n_i - 1}$) de l'équation caractéristique

$$\det(zI - A_i) = 0 \quad (i = \overline{1, m})$$

correspondants aux n_i - pôles choisis.

Etape 7 : Calcul du polynôme matriciel p_i de dimension $(r \times r)$

$$p_i = \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \alpha_{i,j} \cdot \tilde{A}_i^j \right) + \tilde{A}_i^{n_i} \quad (i = \overline{1, m})$$

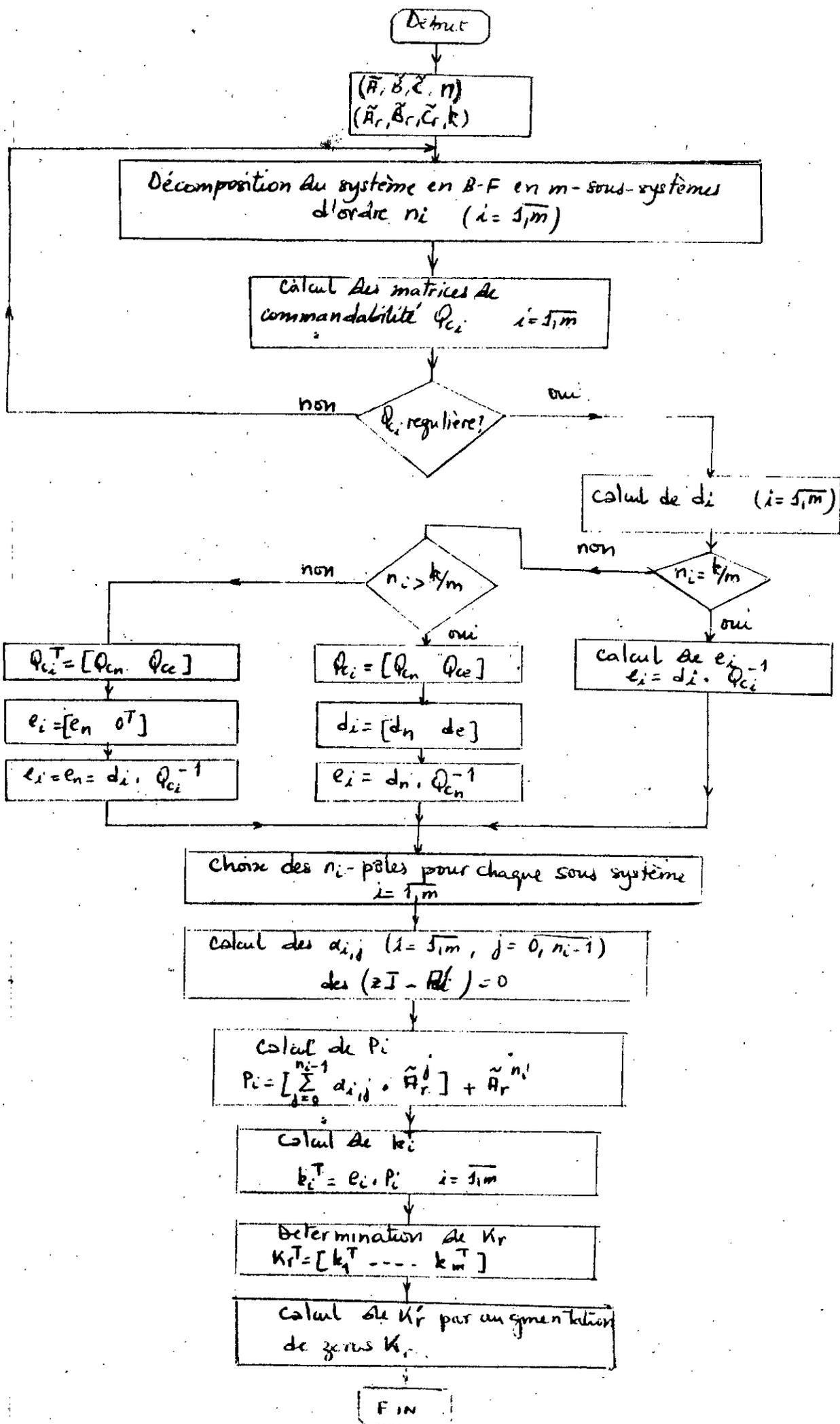
Etape 8 : Calcul de la matrice de contre réaction Kr:

$$K_r^T = [k_1^T, \dots, k_m^T]$$

$$\text{avec : } k_i^T = e_i \cdot p_i$$

Etape 9 : Calcul de K_r' à partir de l'expression (III-41)

III.5 ORGANIGRAMME :



III.6. APPLICATION ET INTERPRETATION

Dans cette partie, nous utilisons un exemple de modèle discret pour illustrer la synthèse de la commande vu que les modèles discrets sont plus adaptés aux calculateurs numériques qui sont les plus utilisés de nos jours et qu'à partir de modèles continus nous pouvons toujours se ramener à des représentations discrètes moyennant des échantillonneurs ou une circuiterie de conversion analogique - digitale.

La représentation d'état du modèle MIMO discret d'ordre 16 a été obtenue à partir de quatre filtres : deux filtres Butterworth d'ordre 4 et deux filtres passe-tout d'ordre 4, mis en série et donnés en termes des coefficients du numérateur et dénominateur, de leur fonction de transfert, déterminés à l'aide de l'algorithme de Leverrier-Fadeeva [A6].

La représentation d'état de ce système est alors donnée par :

• la matrice d'évolution:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.702 & 0.344 & 0.304 & -0.202 & 0.529 & 0.676 & 0.344 & 0.022 \\ 0 & 0.368 & 0 & 0 & 0.311 & 0.514 & 0.542 & 0.161 \\ 0.304 & -0.337 & 0.449 & 0.384 & 0.588 & 0.729 & 0.523 & 0.707 \\ 0 & 0 & 0 & 0.135 & 0.518 & 0.721 & 0.829 & 0.708 \\ 0.629 & 0.011 & 0.635 & 0.588 & 0.431 & 0.945 & 0.015 & 0.437 \\ 0.214 & 0.192 & 0.696 & 0.323 & 0.248 & 0.461 & 0.274 & 0.582 \\ 0.213 & 0.983 & 0.795 & 0.703 & 0.370 & 0.940 & 0.643 & 0.752 \\ 0.081 & 0.244 & 0.696 & 0.143 & 0.393 & 0.322 & 0.546 & 0.981 \\ 0.388 & 0.820 & 0.753 & 0.162 & 0.447 & 0.460 & 0.918 & 0.991 \\ 0.952 & 0.136 & 0.669 & 0.485 & 0.476 & 0.517 & 0.270 & 0.279 \\ 0.947 & 0.398 & 0.633 & 0.860 & 0.388 & 0.661 & 0.970 & 0.754 \\ 0.390 & 0.601 & 0.056 & 0.813 & 0.279 & 0.402 & 0.246 & 0.171 \\ 0.261 & 0.177 & 0.598 & 0.557 & 0.078 & 0.606 & 0.844 & 0.004 \\ 0.692 & 0.828 & 0.227 & 0.739 & 0.370 & 0.986 & 0.694 & 0.496 \\ 0.284 & 0.358 & 0.319 & 0.316 & 0.254 & 0.150 & 0.456 & 0.079 \\ 0.777 & 0.988 & 0.699 & 0.135 & 0.672 & 0.670 & 0.817 & 0.163 \end{bmatrix}$$

0.930	0.280	0.478	0.029	0.954	0.209	0.769	0.371
0.783	0.816	0.457	0.378	0.357	0.114	0.934	0.225
0.747	0.372	0.520	0.489	0.838	0.547	0.250	0.234
0.436	0.686	0.446	0.576	0.974	0.006	0.360	0.853
0.006	0.310	0.150	0.739	0.259	0.176	0.769	0.166
0.585	0.009	0.286	0.679	0.251	0.599	0.500	0.744
0.518	0.104	0.834	0.536	0.424	0.432	0.747	0.160
0.067	0.521	0.696	0.036	0.813	0.082	0.672	0.048
0.544	0.776	0.578	0.122	0.898	0.687	0.682	0.662
0.390	0.221	0.681	0.973	0.245	0.375	0.757	0.125
0.216	0.055	0.331	0.188	0.761	0.836	0.563	0.914
0.386	0.071	0.057	0.351	0.695	0.124	0.653	0.018
0.627	0.160	0.987	0.614	0.452	0.973	0.617	0.593
0.659	0.724	0.541	0.608	0.264	0.029	0.814	0.902
0.709	0.297	0.002	0.126	0.665	0.080	0.814	0.694
0.539	0.501	0.856	0.553	0.117	0.494	0.842	0.931

• la matrice d'observation:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• la matrice de commande:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 2.52E-01 & 6.32E-01 & -2.71E-01 & 5.60E-01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4.05E-01 & 0 & 7.17E-01 & 8.65E-01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• la matrice des valeurs singulières de ce modèle est:

$$\Sigma = \text{diag} \left\{ \begin{array}{l} 1.312E+02; 1.282E+02; 1.114E+01; 1.115E+01; 1.083E-01; 1.084E-01; \\ 1.035E-01; 7.953E-02; 5.092E-02; 4.034E-02; 3.531E-02; 3.530E-02; \\ 2.809E-02; 1.979E-02; 1.548E-03; 1.518E-03 \end{array} \right\}$$

La réduction du modèle original d'ordre 16 par la méthode de Sotir permet d'établir la représentation du modèle d'ordre réduit ci-dessous :

• la matrice d'évolution réduite :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.698 & 0.340 & 0.296 & -0.210 \\ 0 & 0.359 & 0 & 0 \\ 0.296 & 0.340 & 0.450 & 0.387 \\ 0 & 0 & 0 & 0.140 \end{bmatrix}$$

• la matrice de commande réduite :

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0.249 & -0.407 \\ 0.628 & 0 \\ -0.267 & 0.720 \\ 0 & 0.870 \end{bmatrix}$$

• la matrice d'observation réduite :

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce modèle est d'ordre 4 et à deux entrées, donc la décomposition sera en deux sous-systèmes d'ordre $n_1 = n_2 = 2$.

• Les matrices de commandabilité correspondantes sont :

$$Q_{c1} = \begin{bmatrix} 2.52E-01 & -4.05E-01 & 3.12E-01 & -2.41E-01 \\ 6.32E-01 & 0 & 2.32E-01 & 0 \\ -2.71E-01 & 7.17E-01 & -2.58E-01 & 5.30E-01 \\ 0 & 8.56E-01 & 0 & 1.16E-01 \end{bmatrix}$$

$$Q_{c1} = Q_{c2}$$

• Les vecteurs d_1 et d_2 sont :

$$d_1 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$d_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

• Les vecteurs e_1 et e_2 sont :

$$e_1 = d_1 \cdot Q_{c1}^{-1}$$

$$= [3.12E-01 \ 2.32E-01 \ -2.58E-01 \ 0]$$

$$e_2 = d_2 \cdot Q_{c2}^{-1}$$

$$= [2.41E-01 \ 0 \ 5.31E-01 \ 1.16E-01]$$

• Les pôles choisis pour le premier sous-système sont :

$$Z_1 = +0.25 + j \ 0.18$$

$$Z_2 = +0.25 - j \ 0.18$$

Les deux sous-systèmes étant du même ordre, nous imposons les mêmes pôles pour le second sous-système.

$$Z_1' = Z_1$$

$$Z_2' = Z_2$$

• Les polynômes matriciels sont :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.56E-01 & 7.32E-01 & 8.15E-01 & -2.78E-01 \\ 0 & 5.66E-01 & 0 & 0 \\ 8.15E-01 & -5.86E-01 & 8.78E-01 & 6.22E-01 \\ 0 & 0 & 0 & 1.62E-01 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = P_1$$

• Les coefficients de la matrice de contre-réaction sont alors donnés par :

$$k_1^T = [2.75E-01 \quad 5.11E-01 \quad 2.75E-02 \quad -2.43E-01]$$

$$k_2^T = [5.75E-02 \quad -4.87E-01 \quad 2.70E-01 \quad 4.16E-01]$$

D'où la matrice de contre réaction d'état aura pour forme :

$$K_r \begin{bmatrix} k_1^T \\ k_2^T \end{bmatrix}$$

- La matrice de contre réaction d'état pour le système initial s'obtient par augmentation de zéros la matrice K_r obtenue ci-dessus :

$$K'_r = \left[\begin{array}{c|c} K_r & 0_1 \\ \hline 0_2 & 0_3 \end{array} \right]$$

0_1 : matrice nulle de dimension (2×12)

0_2 : matrice nulle de dimension (12×4)

0_3 : matrice nulle de dimension (12×12)

Pour évaluer la performance de la commande par retour d'état, nous traçons la réponse indicielle du modèle original en boucle - ouverte et sa réponse en boucle - fermée.

Réponses indicielles du modèle discret original (ordre 16)

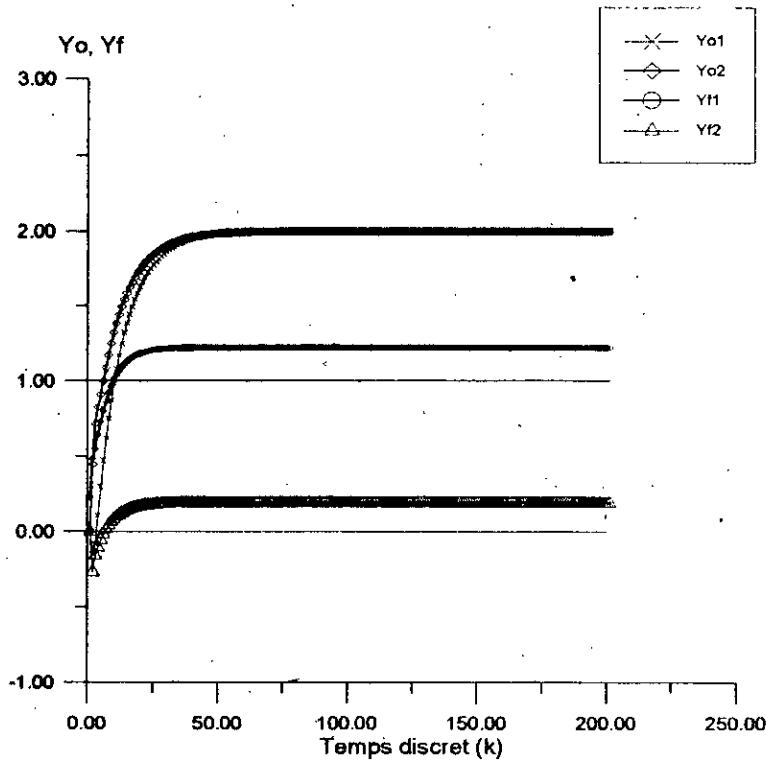


Figure 3-1: Réponse indicielles en boucle ouverte (Yo) et en boucle fermée (Yf) par rapport à la 1ere consigne $w1(k)$ ($w2(k) = 0$).

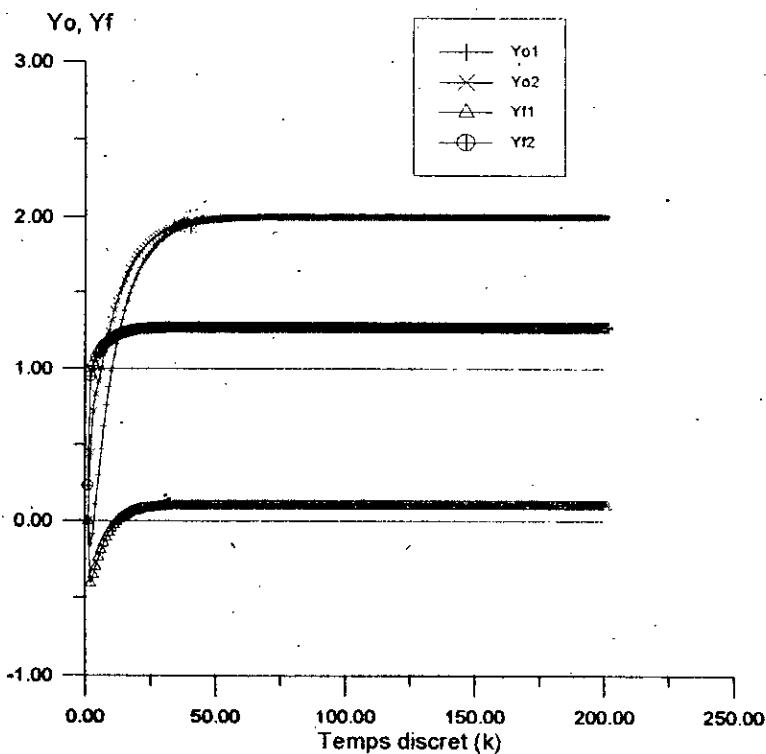


Figure 3-2: Réponse indicielles (Yf) par rapport à la 2ieme consigne $w2(k)$.

avec :

O: boucle ouvert , F: boucle fermée , 1: sortie 1, 2: sortie 2

Les figures (3-1) et (3-2) représentent les réponses indicielles du modèle d'ordre 16 en boucle-ouverte et en boucle-fermée respectivement par rapport à la première grandeur de commande et à la deuxième grandeur de commande.

De ces tracés nous remarquons que les sorties n'atteignent pas la valeur de référence i.e. qu'il y a un écart entre les sorties et la valeur de consigne.

De plus il existe un certain couplage entre les deux grandeurs de sortie.

En effet la deuxième grandeur de sortie réagit transitoirement à un saut de la grandeur de consigne $W_1(k)$ (voir fig. 3-1). De même la première grandeur de sortie varie transitoirement à cause d'un saut de la grandeur de consigne $W_2(k)$.

Comme il est à noter que le temps de réponse en boucle-fermée s'est relativement amélioré.

III.7. CONCLUSION:

La commande par retour d'état, appliquée au système initial et synthétisée à ^{partir} du modèle réduit suivant l'algorithme établi (III-4), a permis d'apporter une amélioration du point de vue de temps de réponse, et de réduire l'écart de réglage en régime établi.

Une manière d'annuler complètement cet écart serait d'introduire un régulateur intégrateur. Néanmoins ce régulateur a tendance d'augmenter l'ordre du système, ce qui peut être un désavantage pour le comportement dynamique.

Notons aussi que le choix judicieux des pôles n'est pas immédiat et nécessite le calcul des réponses indicielles pour plusieurs valeurs afin de déterminer des pôles relativement satisfaisants.

L'objectif de ce travail était la synthèse d'une commande par retour d'état pour un système multivariable, supposé linéaire et invariant dans le temps, à partir de son modèle d'ordre réduit.

Ce dernier a été obtenu par la réduction de l'ordre du modèle adopté au système initial en utilisant soit la méthode de troncature de la réalisation équilibrée si le système considéré est minimal ou la méthode de projection interne dans le cas où ce système est non minimale.

En ce qui concerne l'étape de réduction, nous pouvons conclure d'après les résultats obtenus que les méthodes de réduction que nous avons utilisées aboutissent à des modèles d'ordre réduit qui suivent de près le comportement dynamique du système initial et qui préservent en général les mêmes caractéristiques que celles du système initial.

Au niveau de l'étape de synthèse de la commande par retour d'état l'exemple d'application numérique utilisé ne nous a pas permis d'évaluer l'habileté de la commande à améliorer toutes les performances requises pour un système donné entre autre la diminution du taux en boucle - fermée.

de dépassement.

Le domaine de commande des systèmes étant très vaste et assez varié, une continuité de ce travail serait envisageable en étendant l'utilisation des modèles d'ordre réduit pour d'autres commandes plus générales et beaucoup plus complexes.

Cette étude nous a permis d'une part d'approfondir nos connaissances en automatique, notamment dans la théorie des systèmes et de leur commandes, d'autre part de nous adapter et de maîtriser la programmation à l'aide du logiciel Matlab [12].

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Ackermann J, "Abtastregelung", Springer Berlin 1972
- [2] Bettayeb M, "New interpretation of balancing state space representation as an input - output energy - minimisation problem", Int - J - Systems - SCI - 1991
- [3] Buhler H, "réglages échantillonnés", traitement dans l'espace d'état, Vol - 2, Presses Polytechniques Romandes, 1983
- [4] Dieulesaint. E & Royer B, "Systems linéaires de commande à signaux analogiques", Edition - Masson, 1987
- [5] Derras B, "The approximation of discrete time linear systems based on the use of projections", These of PHD at the Faculty of the graduate School of the University of Colorado USA - 1988 Department of Electrical and Computer Engineering
- [6] Derras b, "Model Reduction Via a state - space based criterion", Journal of Technology, ENP, Alger, 1993
- [7] Fossard A, "Commandes des systemes multidimensionnels", Edition Dunod, 1972
- [8] Foulard C, Gentijs & Sandraz JP, "Commande et régulation par ordinateur numérique: de la théorie aux applications", 5eme Edition - Paris - Eyrolles - 1987
- [9] Friedland B, "Control system Design", an introduction to state space methods, New York, Mc Graw- Hill Company, 1987
- [10] Gabel R A & Roberts R A, " Signals and linear systems", 3eme Edition, New York, J Wiley and Sons, 1987
- [11] Glover K, "All - optimal Hankel - norm approximation of linear multivariable systems and their L_∞ error bounds", Int J Control, Vol 39, pp 1115 - 1193 1983
- [12] Grapher - 4 Sous Winword 1992 - 1993
- [13] Landau Y d, "Adaptive Control: The model reference approach", control and systems theory, vol - 8, Marcel Dekker, INC Newyork 1979

- [14] Lascaux P & Theodor R, "Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur", Vol - 2, Edition Masson - Paris, 1986 - 1987.
- [15] Laub A J, Heath M T, Paige C c & Ward R C, "Computation of systems balancing and model reduction", JEEE, Trans on Auto Control, Vol AC 28, N° 8 August 1984
- [16] Lof P.a, Smed. T, Anderson G & Hill Dr J, "Fast calculation of a noltage stability index", Trans of power systems, Vol 7, n° 1, February 1992
- [17] Maret L, "Régulation automatique", systèmes analogiques, Presses Polytechniques Romandes, 1987, coll complément au traité d'électricité
- [18] Masson J E, Identification using Low order systems", PHD dissertation University of California, Berkeley, 1988
- [19] Matlab, "The mathworks", Inc, June 1990
- [20] Mendes R S, "Synthèse de régulateurs robustes à placement de pôles", Thèse de Doctorat de l'université Paul Sabatier France 1988
- [21] Moore B C, "Principal component analysis in linear systems: Controlability, observability and model reduction, "JEEE, Trans on Auto Control, vol AC 26 pp 17 31, February 1981
- [22] Naslin P, "Théorie de la commande et conduite optimale, Edition Dunod 1969
- [23] Parant F, "Modelisation et Identification d'un systeme fortement oscillant, application à l'entrainement de bande de metal", Thèse de Doctorat, INPL, Nancy France 1990
- [24] Pernebo L & Silvermanil, "Model reduction via balanced state space representatios "JEEE, Transon auto control, vol AC 27, N°2, April 1982
- [25] Rivoir M, "Cours d'automatique", Tome 1 Edition Eyrolles, 1989
- [26] Rothschild D & Jameson A, "Comparaison of four numerical algorithms for salving the Lyapunov matrix - equation", Int J Control, Vol 11, N° 2 pp 181 198, 1970

- [27] Safanov MG & Chiang R Y, "Aschur - method for balanced model reduction", JEEE, Trans on Auto, Control, Vol 34, N°7 July 1989
- [28] Vincenza K F & Nicholson, H, "Singular perturbational model reduction of balanced systems", JEEE, Trans on auto Control, Vol AC 27, N°2, April 1982

Annexe 1

Rappel mathématique sur les matrices

Notion de matrice:

Une matrice est un tableau rectangulaire dont les éléments peuvent être des êtres mathématiques quelconques. Sa représentation est de la forme:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{A1-1})$$

où a_{ij} est l'élément de la matrice A, se situant à la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Si $m=n$, la matrice A est dite carrée.

Matrice diagonale: C'est une matrice carrée dont tous les éléments non situés sur la diagonale principale sont nuls, ie:

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \quad (\text{A1-2})$$

Matrice unité: La matrice unité "I" est un cas particulier d'une matrice diagonale, tels que les éléments diagonaux sont égaux à 1.

Matrice nulle: La matrice nulle est une matrice dont tous les éléments sont nuls. Nous noterons:

$$A = 0 \quad (\text{A1-3}).$$

Matrice transposée: La matrice A^t , dite transposée de A, est obtenue en interchangeant les lignes et les colonnes de A, ie:

$$B = A^t \text{ tel que } b_{ij} = a_{ji} \quad (\text{A1-4}).$$

Les mineurs: Le mineur M_{ij} de l'élément a_{ij} du déterminant de la matrice A est la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Cofacteur d'une matrice: Le cofacteur C_{ij} de l'élément a_{ij} est obtenu à partir de son mineur M_{ij} , il est donné par la relation suivante:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (\text{A1-5})$$

Déterminant d'une matrice: Le déterminant est défini pour une matrice carrée, nous écrivons:

$$\text{Det}(A) = |A| \quad (\text{A1-6})$$

Ce déterminant est obtenu par la somme sur toutes les permutations possibles.

Matrice adjointe: C'est la transposée de la matrice obtenue en remplaçant chaque élément par son cofacteur. Nous écrivons:

$$A^* = \text{Adj}(A) = [C_{ij}]^t = C_{ji} \quad (\text{A1-7})$$

Trace d'une matrice: La trace d'une matrice A est donnée par la somme des éléments diagonaux. En d'autres termes:

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (\text{A1-8})$$

Matrice unitaire et matrice orthogonale: La trace d'une matrice A de dimension (m x n) avec $m \geq n$ est dite unitaire, si les colonnes de A sont des vecteurs orthogonaux deux à deux et de norme unité. ie:

$$A^* \cdot A = I_n \quad (\text{A1-9})$$

Lorsque la matrice unitaire est à coefficients réels, elle sera dite orthogonale.

Rang d'une matrice: Le rang d'une matrice indique le nombre de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes.

La matrice A est de rang (r), s'il existe au moins un sous déterminant non-nul avec r-lignes et tous les sous déterminants avec (r+1)-lignes sont nuls.

Matrice définie positive: La matrice A, supposée carrée et symétrique, est dite définie positive, si sa forme quadratique obéit à la condition suivante:

$$\forall X \neq 0 : X^T \cdot A \cdot X > 0 \quad (\text{A1-10})$$

où X est un vecteur quelconque.

Pour vérifier cette positivité, nous utiliserons le test de Sylvester qui consiste à ce que tous les sous-déterminants de A soient positifs. ie:

$$A = [a_{ij}] \text{ alors } a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, |A| > 0. \quad (\text{A 1-11})$$

Matrice symétrique: La matrice A est dite symétrique si elle vérifie la relation suivante:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j, \quad (\text{A 1-12})$$

Matrice régulière et matrice singulière: Soit la matrice carrée A de dimension (n x n),

Si $\text{rang}(A) = n$, alors A est une matrice régulière.

Si $\text{rang}(A) < n$, alors A est une matrice singulière.

Valeurs propres: Le scalaire λ est dit valeur propre de la matrice carrée A, s'il existe un vecteur colonne non-nul tel que:

$$A \cdot U = \lambda \cdot U \quad (\text{A1-13})$$

Vecteurs propres droits-vecteurs propres gauches: Le vecteur propre droit X associé à une matrice carrée A est défini par la relation suivante:

$$A.X = \lambda.X \quad (A1-14)$$

Le vecteur propre gauche V associé à la matrice carrée A est défini par la relation suivante:

$$V.A = \lambda.V \quad (A1-15)$$

Valeurs singulières: La notion de valeurs-propres n'a pas de signification pour les matrices rectangulaires, d'où l'introduction du concept de valeurs singulières.

Soit A une matrice rectangulaire de dimension (m x n):

Les valeurs singulières de A sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice carrée (A*.A) d'ordre (n).

Opération sur les matrices:

-Egalité: $A=B$ si $a_{ij}=b_{ij} \quad \forall i, j \quad (A1-16)$

-Addition: $C=A+B$ si $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad \forall i, j \quad (A1-17)$

-Produit: Soient les matrices A(m x n) et B(n x k), la matrice C(m x k) est la résultante du produit des deux matrices:

$$C=A.B \quad \text{tel que} \quad : C_{ij} = \sum_{p=1}^n a_{ip} b_{pj}, \quad \forall i = \overline{1, m} \quad j = \overline{1, k} \quad (A1-18)$$

-Inversion: L'inversion matricielle est définie par :

$$A^{-1} = A^*/|A| \quad (A1-19)$$

Annexe 2

Factorisation de Cholesky [14]

Soit A une matrice carrée, définie positive et symétrique [A1], sa décomposition en facteurs de Cholesky est définie par:

$$A = L \cdot L^T \quad (A2-1)$$

où A: matrice de dimension (n x n)

L: matrice triangulaire inférieure de dimension (n x n).

D'une manière explicite :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & l_{nn} \end{bmatrix} \quad (A2-2)$$

Les coefficients l_{ij} ($i = \overline{1, n}$ et $j = \overline{1, n}$) sont donnés par :

$$l_{ij} = [a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2]^{1/2} \quad (A2-3)$$

$$l_{ij} = \begin{cases} 0 & i > j \\ 1/l_{ii} \cdot (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik}) & j = \overline{i+1, n} \end{cases} \quad (A2-4)$$

Annexe 3

Algorithme de décomposition en valeurs singulières (SVD). [16]

Soit une matrice réelle A de dimension (nxn), sa décomposition en valeurs singulières (SVD) est donnée par:

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T \quad (A3-1)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot U_i V_i^T$$

avec U, V : matrices orthogonales de dimension (nxn) [A1].

U_i, V_i : Vecteurs singuliers colonnes des matrices U et V respectivement.

$\Sigma = \text{diag} \{ \sigma_i \}_{i=1, \dots, n}$: matrice diagonale [A1] contenant les valeurs singulières de A avec $\sigma_i \geq 0$
 $V_i = 1, n$. et $\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$.

- Si $\text{rang}(A) = r$ ($r \leq n$) [A1], ses valeurs singulières sont les racines carrées des r-valeurs propres positives du produit $(A^T \cdot A)$, qui sont aussi les r-valeurs propres positives du produit $(A \cdot A^T)$

- U et V sont les matrices orthogonales de dimension (nxn) dont les colonnes sont les valeurs propres de $(A^T \cdot A)$ et $(A \cdot A^T)$ respectivement.

- Si σ_i est la $i^{\text{ème}}$ valeur singulière de A, le vecteur U_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur singulière droit, d'où les relations singulières et les vecteurs gauches et droits de la matrice A sont :

$$\begin{aligned} \text{liant les valeurs} \quad A \cdot V_i &= \sigma_i \cdot U_i \\ \text{singuliers} \quad A^T \cdot U_i &= \sigma_i \cdot V_i \end{aligned} \quad (A3-2)$$

Donc les valeurs singulières de la matrice A, par construction, sont les racines-carrée des valeurs propres du produit $(A \cdot A^T)$ ou $(A^T \cdot A)$, et elles sont décrites par la relation suivante

$$\Lambda(A^T \cdot A) = \Lambda(A \cdot A^T) = \Sigma^2(A). \quad (A3-3)$$

$$\text{où } \Lambda(X) = \text{diag} \{ \lambda_i(x) \} \quad (A3-4)$$

avec λ_i : $i^{\text{ème}}$ valeur propre de la matrice x, $i=1, \dots, n$.

$\Lambda(A \cdot A^T)$: la matrice diagonale [A1] contenant les valeurs propres de la matrice $(A \cdot A^T)$ ou $(A^T \cdot A)$.

Σ : la matrice diagonale [A1] contenant les valeurs singulières de A.

Remarque :

- Si $A=U \cdot \Sigma \cdot V^T$ est la décomposition en valeurs singulières de A, alors les décompositions en valeurs propres de $(A^T \cdot A)$ et $(A \cdot A^T)$ sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} A^T \cdot A &= V \cdot (\Sigma^T \cdot \Sigma) \cdot V^T = V \cdot (\Sigma^2) \cdot V^T \\ A \cdot A^T &= U \cdot (\Sigma \cdot \Sigma^T) \cdot U^T = U \cdot (\Sigma^2) \cdot U^T \end{aligned} \quad (A3-5)$$

Annexe 4

Résolution des équations de Lyapunov Algorithme de Jameson [26].

Soit à résoudre l'équation de Lyapunov, donnée par :

$$A.X + X.A^T = C \quad (A4-1)$$

où A une matrice réelle de dimension $(n \times n)$

C une matrice réelle de dimension $(n \times n)$ (généralement symétrique [A1]).

X une matrice inconnue de dimension $(n \times n)$ (généralement symétrique [A1]).

Ayant les deux matrices A et C , la procédure de calcul de la matrice inconnue X , solution de l'équation (1) est :

Etape -1- Détermination des coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A .
Méthode de Souriau :

Soient $(a)_{i=0,n}$ les $(n+1)$ - coefficients du polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=0}^n a_i \lambda^{n-i} \\ &= a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \end{aligned}$$

Afin de calculer ces coefficients, nous définissons une suite de matrices (A_k) obéissant à la relation de récurrence suivante :

. conditions initiales : $A_0=0$ et $a_0=1$.

. Boucle : pour $k=1,n$

$$\begin{cases} A_k = (A_{k-1} + a_{k-1} I).A \\ a_k = (-1/k).Tr(A_k) \end{cases}$$

où $T_r(A_k)$ désigne la trace de la matrice A_k [A1].

Les coefficients $(a)_{i=0,n}$ sont alors obtenus de proche en proche.

La solution de l'équation (1) s'écrit sous la forme :

$$X = G^{-1} \cdot S_k$$

Etape -2- Calcul de la matrice S_k :

. conditions initiales : $C_0=0$, $C_1=C$, $S_0=0$

. Boucle : pour $k=1,n$

$$\begin{cases} C_k = A^{k-1}.C - C_{k-1}.A^T \\ S_k = S_{k-1} + (-1)^{k-1}.a_{n-k}.C_k \end{cases}$$

Etape -3- Calcul de la matrice G^{-1} :

$$G^{-1} = (-1)^n / 2 \cdot r_{(n+1,1)} \cdot H_{(n+1)}$$

. Calcul des coefficients r_{ij} :
 . Pour $i=\overline{1,2}, j=\overline{1,n}, k=\overline{0,n}$

$$r_{ij} = ak$$

avec $r_{1,1} = a_0$	$r_{2,1} = a_1$
$r_{1,2} = a_2$	$r_{2,2} = a_3$
$r_{1,3} = a_4$	$r_{2,3} = a_5$
$r_{1,4} = a_6$	$r_{2,4} = a_7$

Les coefficients r_{ij} restants sont calculés par la règle de Routh comme suit :

. Pour $i=\overline{3,n+1}, j=\overline{2,n}, k=\overline{2,n}$

$$r_{ij} = r_{(i-2,j+1)} - r_{(i-1,j+1)} \cdot [r_{(i-2,1)} / r_{(i-1,1)}]$$

. Calcul de H_i : pour $i=\overline{1,n+1}$

$$\begin{aligned}
 H_1 &= I_n \\
 H_2 &= I_n \\
 &| \\
 &| \\
 H_{n+1} &= H_{n-1} + [r_{(n-1,1)} / r_{(n,1)}] \cdot A \cdot H_n
 \end{aligned}$$

Annexe 5

Algorithme de calcul de la transformation canonique de réglage T_c [3]

Considérons la représentation d'état d'un système discret d'ordre (n) donnée par :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= \tilde{A}.X(k) + \tilde{B}.U(k) \\ Y(k) &= \tilde{C}.X(k). \end{aligned} \tag{A5-1}$$

Par introduction de la transformation canonique de réglage " T_c " nous obtenons :

$$X_t(k) = T_c.X(k)$$

et

$$X(k) = T_c^{-1} X_t(k) \tag{A5-2}$$

où t désigne les grandeurs transformées.

T_c est la matrice de transformation régulière de dimension (nxn).

Posons : $T_c^{-1} = S$

La nouvelle représentation d'état est sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X_t(k+1) &= \tilde{A}_t.X_t(k) + \tilde{B}_t.U(k) \\ y(k) &= \tilde{C}_t.X_t(k). \end{aligned} \tag{A5-3}$$

avec $\tilde{A}_t = T_c.\tilde{A}.T_c^{-1} = T_c.\tilde{A}.S \tag{A5-4a)}$

$\tilde{B}_t = T_c.\tilde{B} \tag{A5-4b)}$

$\tilde{C}_t = \tilde{C}.T_c^{-1} = \tilde{C}.S \tag{A5-4c)}$

et :

$$\tilde{A}_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{A5-5}$$

$$\tilde{B}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{A5-6}$$

où $a_i (i=0, n-1)$ représentent les coefficients du polynôme caractéristique donné par:

$$\begin{aligned} P(z) &= \det(zI - \tilde{A}) \\ &= z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (A5-7)$$

Calcul de S et T:

-La relation (A5-4a) peut s'écrire sous la forme:

$$S \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot S \quad (A5-8)$$

La décomposition de la matrice \tilde{S} suivant ses vecteurs colonnes, nous permet d'obtenir une équation matricielle de la forme:

$$[S_1 \dots S_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} = \tilde{A} \cdot [S_1 \dots S_n] \quad (A5-9)$$

Ce calcul matriciel permet d'établir les relations de récurrence ci-dessous:

$$\begin{aligned} -a_0 \cdot S_n &= \tilde{A} \cdot S_1 \\ S_1 - a_1 \cdot S_n &= \tilde{A} \cdot S_2 \\ S_2 - a_2 \cdot S_n &= \tilde{A} \cdot S_3 \end{aligned} \quad (A5-10)$$

$$S_{n-1} - a_{n-1} \cdot S_n = \tilde{A} \cdot S_n$$

-La relation (A5-4b) peut s'écrire comme suit:

$$S \cdot \tilde{B} = \tilde{B} \quad (A5-11)$$

De la même manière, la décomposition de la matrice "S" suivant ses vecteurs colonnes nous permet d'établir la relation matricielle qui suit:

$$[S_1 \dots S_n] \cdot [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T = \tilde{B} \quad (A5-12)$$

ce qui conduit au calcul du vecteur S_n :

$$S_n = \tilde{B} \quad (A5-13)$$

Les autres vecteurs colonnes sont calculés à partir de la relation de récurrence établie précédemment tels que:

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= \tilde{A} \cdot S_n + a_{n-1} \cdot S_n \\ S_{n-2} &= \tilde{A} \cdot S_{n-1} + a_{n-2} \cdot S_n \end{aligned} \quad (\text{A5-14})$$

$$S_1 = \tilde{A} \cdot S_2 + a_1 \cdot S_n$$

d'une manière concise:

$$S_n = \tilde{B}$$

$$\left| \begin{array}{l} S_k = \tilde{A} S_{k+1} + a_k \cdot S_n \\ \text{avec } k = n-1, 1 \end{array} \right. \quad (\text{A5-15})$$

Les vecteurs S_k établis, la matrice "S" est calculée implicitement

$$S = [S_0 \ S_2 \ \dots \ S_n] \quad (\text{A5-16})$$

d'où le calcul de la matrice de transformation "T_c":

$$T_c = S^{-1} \quad (\text{A5-17})$$

Annexe 6

Algorithme de Leverrier-Fadeeva et sa conséquence [5]

Soit la représentation d'état d'un système discret:

$$\begin{aligned} X(k+1) &= \tilde{A}.X(k) + \tilde{B}.U(k) \\ Y(k) &= \tilde{C}.X(k) + \tilde{D}.U(k) \end{aligned} \quad (A6-1)$$

Le problème consiste à calculer les coefficients de la fonction de transfert correspondante.

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}} \quad \text{avec } a_0=1 \quad (A6-2)$$

Ce calcul peut-être obtenu en utilisant l'algorithme suivant:

- * conditions initiales: $b_0 = \tilde{D}$, $B_1 = I$
- * pour $k = \overline{1, n}$

$$\begin{aligned} a_k &= (-1/k) \cdot \text{Tr}(\tilde{A} \cdot B_k) \\ b_k &= \tilde{C} \cdot B_k \cdot \tilde{B} + \tilde{D} \cdot a_k \\ B_{k+1} &= \tilde{A} \cdot B_k + a_k \cdot I \end{aligned}$$

- * vérifier que $B_{n+1} = 0$

où I est la matrice unité de dimension $(n \times n)$ [A1]

Tr est la trace d'une matrice [A1]

*Démonstration: [5]

En fonction de \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} , \tilde{D} la fonction de transfert peut s'écrire comme suit:

$$H(z) = \tilde{D} + \tilde{C} \cdot (zI - \tilde{A})^{-1} \cdot \tilde{B} \quad (A6-3)$$

$$= \tilde{D} + \tilde{C} \cdot \text{Adj}(zI - \tilde{A}) / \det(zI - \tilde{A}) \cdot \tilde{B} \quad (A6-4)$$

où $\text{Adj}(zI - \tilde{A}) = B_0 Z^n + B_1 Z^{n-1} + \dots + B_n$

Adj représente la matrice adjointe [A1].

$$\text{Posons } A(Z) = \det(ZI - \tilde{A}) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot Z^{n-i} \quad (A6-5)$$

$$\text{d'où } (ZI - \tilde{A})^{-1} = \text{Adj}(ZI - \tilde{A}) / A(Z) = B_0 Z^n + B_1 Z^{n-1} + \dots + B_n / A(Z) \quad (A6-6)$$

Ceci implique que :

$$A(Z) \cdot I = (ZI - \tilde{A}) \cdot (B_0 Z^n + \dots + B_n) \quad (A6-7)$$

En identifiant les termes correspondants de cette équation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} B_0 &= 0 \\ B_1 - \tilde{A}.B_0 &= I \\ B_2 - \tilde{A}.B_1 &= a_1.I \\ &\vdots \\ B_{k+1} - \tilde{A}.B_k &= a_k.I \end{aligned} \quad (A6-8)$$

Pour calculer les coefficients a_k , posons :

$$\alpha(Z) = (ZI - \tilde{A}) \quad (A6-9)$$

alors : $A(Z) = \det(\alpha(Z)) \quad (A6-10)$

Le calcul de la dérivée de $A(Z)$ par rapport à Z donne :

$$A'(Z) = d/dZ (\det(\alpha(Z)))$$

$$A'(Z) = \sum_{i,j} [\delta \det(\alpha(Z)) / \delta \alpha_{ij}(Z)] \cdot [d \alpha_{ij}(Z) / dZ] \quad (A6-11)$$

$$A'(Z) = \sum_{i,j} [\beta(Z)]_{ij} \cdot \delta(i-j) \quad (A6-12)$$

où $\beta_{ij}(Z)$ est la $j^{\text{ème}}$ cofacteur de $(ZI - \tilde{A})$

$$\text{et } \delta(i-j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (A6-13)$$

d'où $A'(Z) = \sum_{i=1}^n \beta_{ii}(Z) \text{Tr}[\beta(Z)] \quad (A6-14)$

avec $\beta(Z) = \text{Adj}(ZI - \tilde{A}) = \text{Adj}[\alpha(Z)] \quad (A6-15)$

De cette dernière expression, nous obtenons l'identité suivante :

$$\sum_k (n-k).a_k.Z^{n-k-1} = \sum_k \text{Tr}(B_k).Z^{n-k} \quad (A6-16)$$

après égalisation des termes de mêmes puissance, nous obtenons :

$$a_k = (-1/k) \cdot \text{Tr}(\tilde{A}.B_k) \quad k=1, n \quad (A6-17)$$

Le calcul des coefficients b_i est plus simple en notant que :

$$H(Z) = \frac{\tilde{C} \cdot (B_1.Z^{n-1} + B_2.Z^{n-2} + \dots + B_n).B_n + \tilde{D} \cdot \sum_{i=0}^n a_i.Z^{n-i}}{\sum_{i=0}^n a_i.Z^{n-i}} \quad (A6-18)$$

$$H(Z) = \frac{\sum_{i=0}^n (\tilde{C}.B_i.B_n + \tilde{D}.a_i)Z^{n-i}}{\sum_{i=0}^n a_i.Z^{n-i}} \quad (A6-19)$$

Conséquence : Nous avons établi précédemment :

$$a_k = (-1/k). \text{Tr}(\tilde{A}.B_k) \quad k=\overline{1,n}$$

$$\text{et } B_k = \tilde{A}.B_{k-1} + a_{k-1}.I$$

Par injection de l'expression B_k dans celle de a_k nous obtenons :

$$a_k = ((-1/k). \text{Tr}[\tilde{A}(\tilde{A}.B_{k-1} + a_{k-1}.I)]) \quad (A6-20)$$

$$\text{d'où } a_k = (-1/k). \text{Tr}(\tilde{A}^2.B_{k-1}) - (1/k).a_{k-1}. \text{Tr}(\tilde{A}) \quad (A6-21)$$

De même en remplaçant l'expression de B_{k-1} dans a_k , nous obtenons :

$$a_k = (-1/k). \text{Tr}(\tilde{A}^3.B_{k-2}) - (1/k).a_{k-2}. \text{Tr}(\tilde{A}^2) - (1/k).a_{k-1}. \text{Tr}(\tilde{A}) \quad (A6-22)$$

En continuant le processus, nous obtenons la relation suivante :

$$a_k = (-1/k). [\text{Tr}(\tilde{A}^k) + a_1. \text{Tr}(\tilde{A}^{k-1}) + \dots + a_{k-1}. \text{Tr}(\tilde{A})] \quad (A6-23)$$

$$\text{Sachant que : } \text{Tr}(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (A6-24)$$

où λ_i sont les valeurs propres de \tilde{A}

$$\text{Tr}(\tilde{A}^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \quad (A6-25)$$

nous aurons :

$$\left[\begin{array}{l} a_k = (-1/k). \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i^k + a_1. \sum_{i=1}^n \lambda_i^{k-1} + \dots + a_{k-1}. \sum_{i=1}^n \lambda_i \right] \\ k = \overline{1,n} \end{array} \right. \quad (A6-26)$$

Ce système d'équation peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ \vdots \\ na_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} \quad (\text{A6-27})$$

avec

$$T_m = \sum_{i=1}^n \lambda_i^m$$

Les valeurs propres de \tilde{A} étant les racines du polynôme :

$$A(Z) = \sum_{i=0}^n a_i Z^{n-i}$$

alors le système d'équations (A6-27) donne la relation qui existe entre les coefficients et les racines d'un polynôme.

La relation (A6-27) permet le calcul des coefficients d'un polynôme $a_i (i=0, n)$ à partir de ces racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.