

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT *Electronique*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Annulation adaptative des  
interferences sinusoïdales.*

Proposé par :

**B. DERRAS**

Etudié par :

**M. TIAL**

Dirigé par

**B. DERRAS**

PROMOTION

*Juin 1996*

## DEDICACE

*Je dédie ce travail*

- *A mon très chère Père qui a toujours su me conseiller, m'encourager, m'appuyer; lui la source de ma réussite.*
- *A ma Mère, faible témoignage de mon affection et mon profond dévouement pour tous ses sacrifices.*
- *A Nesma, la fleur de ma vie*
- *A mes Frères et Soeurs*
- *A tous mes amis (es)*

## REMERCIEMENTS

*J'adresse mes remerciements à tous les enseignants de l'ENP qui ont contribué de près ou de loin à ma formation, en particulier à Monsieur B.DERRAS qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être mon promoteur, qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour les conseils qu'il m'a fournis et l'intérêt qu'il a porté à mon égard.*

*Je remercie aussi ma sœur Wafia pour son assistance précieuse durant cette recherche. Sans oublier Leïla pour toute sa disponibilité, son plus grand aide et les efforts qu'elle a fournis pour achever la saisie de ce mémoire.*

## العنوان: إلغاء تكييفي للتداخلات الجيبية

الهدف من هذه الدراسة هو استعمال طريقة تكييفية لإلغاء التداخلات الجيبية أو الدورية المخلة بإشارة معطاة.

هذا العمل ينجز في العادة باستعمال مرشح رفض ثابت مضبط على تواتر التداخل، غير أن هذه الطريقة غير ممكن إستعمالها إذا كان هذا التواتر غير ثابت أو غير معروف بطريقة دقيقة.

الطريقة المقترحة هنا، تستعمل مرشح تكييفي لحد

ذو التداخل، هذا الإجراء يدعى إلغاء تكييفي للضجة وهو ملائم في حالة ما إذا كان لدينا بالإضافة إلى المدخل الأولي (يحتوي على الإشارة + التداخل)، مدخل إضافي يدعى مدخل مرجعي لا يحتوي إلا على التداخل.

المدخل المرجعي يرشح باستعمال خوارزمية تكييفية ملائمة ويعطي إشارة تتطابق شيئاً فشيئاً مع التداخل الجيبية الموجود في المدخل الأولي ويحذف بعد ذلك من هذا الأخير ولا يبقى بهذا إلا الإشارة بدون أي تداخل. مرشح الرفض التكييفي المحصل عليه يستطيع التغلب على مساوئ مرشح الرفض الثابت.

### Title: Adaptive noise cancelling of sinusoidal interference

**Abstract:** The purpose of this study is to investigate a use of adaptive algorithms (such as LMS and RLS) for eliminating sinusoidal or other periodic interferences corrupting a signal.

This task is normally accomplished with a fixed notch filter tuned to the frequency of the interference. The procedure is called adaptive noise cancelling and is applicable when an auxiliary reference input is available containing the interference alone (a sinusoidal or a combination of sinusoids in our case).

The reference input is filtered by using an appropriate adaptive algorithm and provide a signal that is closely matches the interfering sinusoid, and is then subtracted from the primary input leaving the signal alone.

The obtained adaptive notch filter can overcome the inconvenients of fixed notch filter.

### Titre: Annulation adaptative des interferences sinusoidales.

**Résumé:** Le but de cette étude est l'utilisation des algorithmes adaptatifs (tel que l'algorithme LMS et MCR) pour l'élimination des interferences sinusoidales ou periodiques qui viennent perturber un signal donné.

Cette tache est normalement accomplie par un filtre réjecteur fixe accordé à la fréquence de l'interference. Cependant, cette approche ne peut être utilisée si cette fréquence glisse ou si elle n'est pas précisément connue.

L'approche proposée ici utilise un filtre adaptatif. La procédure est appelée annulation adaptative du bruit et est applicable quand une entrée auxiliaire dite de référence ne contenant que l'interference est disponible (dans notre cas on a une sinusoïde ou une combinaison de sinusoïdes).

L'entrée de référence est filtrée en utilisant un algorithme adaptatif approprié et fournit un signal qui s'égalise petit à petit avec la sinusoïde d'interference, et est alors soustraite de l'entrée primaire contenant le signal contaminé ne laissant ainsi que le signal utile.

Le filtre réjecteur adaptatif ainsi obtenu peut surmonter les inconvenients du filtre réjecteur fixe.

SOMMAIRE

Introduction Générale

Chapitre I : Généralités sur le filtrage numérique	3
I.1- Introduction	3
I.2- Notions fondamentales	3
I.3- Classification des filtres numériques	7
I.4- Aperçu sur quelques méthodes de synthèse	9
I.5- Conclusion	12
Chapitre II : Filtres réjecteurs fixes	
II.1- Introduction	13
II.2- Analyse générale	13
II.3- Synthèse d'un filtre rejecteur	15
II.4- Simulation	22
II.5- Conclusion	24
Chapitre III : Système de réduction des interférences :	
Principe et Analyse	26
III.1- Introduction	26
III.2- Motivation	26
III.3- Notions sur le filtrage adaptatif	27
III.4- L'annulation adaptative du bruit	27
III.5- Application aux interférences sinusoïdales	30
III.6- Conclusion	42
Chapitre IV : Algorithmes adaptatifs pour l'annulation des	
interférences sinusoïdales	43
IV.1- Introduction	43
IV.2- Filtre adaptatif transversal	43
IV.3- Minimisation de l'erreur quadratique moyenne	45
IV.4- Recherche du minimum par la méthode du gradient	50
IV.5- Algorithme LMS	62
IV.6- Filtre rejecteur adaptatif	58
IV.7- Algorithme MCR	73
IV.8- Algorithme FTF	78
IV.9- Complexité et stabilité numérique	83
IV.10- Applications de l'annulation adaptative des	
interférences sinusoïdale	84
IV.11- Conclusion	85
Chapitre V : Simulation et résultats	86
V.1- Introduction	86
V.2- Modèle proposé	86
V.3- Interprétation des résultats	88
V.4- Conclusion	103
Conclusion Générale	104
Bibliographie	106
Annexes	108

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'élimination des interférences sinusoïdales qui contaminent un signal est généralement accomplie par un filtre rejeteur fixe accordé à la fréquence de l'interférence. On désire généralement une réjection à bande très étroite dans le but de pouvoir filtrer l'interférence sans toutefois distordre le signal. Cependant dans plusieurs applications, cette méthode présente des inconvénients. Par exemple, si la fréquence de l'interférence n'est pas précisément connue et si la réjection est à bande étroite, le centre de réjection peut ne pas correspondre exactement à cette fréquence. De plus, si celle-ci glisse légèrement au cours du temps, une réjection fixe ne peut agir que si elle couvre entièrement le domaine de glissement de la fréquence entraînant ainsi une distorsion importante du signal.

Ces problèmes peuvent être surmontés en utilisant l'annulation adaptative des interférences. Cette approche utilise un filtre linéaire adaptatif transversal et deux entrées; l'une dite primaire et contient le signal contaminé par l'interférence et l'autre dite de référence et contient une information sur cette interférence. Cette façon de faire permet une poursuite satisfaisante de la fréquence à rejeter dans le cas où nous avons un glissement de fréquence ou une imprécision de cette dernière.

Notre étude se compose essentiellement de trois parties :

La première est consacrée à l'annulation fixe (non adaptative) des interférences sinusoïdales. On y trouve deux chapitres :

Le chapitre I portera sur des généralités sur le filtrage numérique.

Le chapitre II est consacré à l'étude des filtres rejeteurs fixes. La deuxième partie traite le concept de l'annulation adaptative et est divisée en deux chapitres III et IV.

Le chapitre III présente le principe de l'annuleur adaptatif d'interférences. On y trouve une analyse détaillée sur son

comportement surtout en régime permanent, ses propriétés et ses performances.

Le chapitre IV portera sur le développement théorique des algorithmes adaptatifs et leur application à ce type de problèmes.

La troisième et dernière partie présentée au chapitre V est consacrée à la simulation et à l'interprétation des résultats.

Nous terminerons notre étude par une conclusion générale.

La démonstration de certains résultats est donnée après la conclusion générale sous forme d'annexes.

## CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LE FILTRAGE NUMÉRIQUE

**1.1. Introduction :** Le traitement numérique des signaux consiste à traiter des suites de nombres en vue d'extraire l'information utile. Bien que le progrès n'a pas cessé dans l'étude des dispositifs analogiques, c'est surtout le domaine de traitement numérique qui a connu une évolution considérable.

L'utilisation de l'ordinateur a permis l'appel à des méthodes de traitement de plus en plus complexes, généralement irréalisables par voies analogiques [1]. Elle a aussi offert la possibilité de l'étude par simulation des systèmes de traitement analogiques avant même leur réalisation pratique.

### **1.2. Notions fondamentales :**

#### **1.2.1. Systèmes numériques :**

- **Définition :** Un système numérique est un système qui convertit une suite de données d'entrée  $x(n)$  appelée signal d'excitation en une suite de sortie  $y(n)$  appelée réponse du système; il établit alors une relation de cause à effet.

L'analyse ou la synthèse d'un système nécessite sa représentation par un modèle mathématique. Ce modèle est un opérateur fonctionnel  $T$  (ou transformation) qui agit sur un signal d'entrée  $x(n)$  et le transforme en un signal de sortie  $y(n)$  tel que [2] :

$$y(n) = T(x(n)) \quad (1.1)$$

La figure (1.1) Schematise une telle transformation

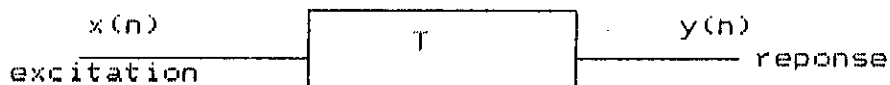


fig. 1.1 Système discret



**- Propriétés :**

1. **Linéarité :** Un système est dit linéaire si l'opérateur  $T$  satisfait les principes de superposition et d'homogénéité, soit donc :

$$\begin{aligned} T(ax_1(k) + bx_2(k)) &= a T(x_1(k)) + b T(x_2(k)) \\ &= a y_1(k) + b y_2(k) \end{aligned} \quad (1.2)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes et  $y_1(k)$ ,  $y_2(k)$  sont respectivement les réponses aux excitations  $x_1(k)$ ,  $x_2(k)$ .

2. **Causalité :** Un système est causal, si la réponse ne précède jamais l'excitation.

3. **Invariance temporelle :** Un système discret est dit invariant dans le temps, si la réponse à l'excitation  $x(k-k_0)$  est  $y(k-k_0)$  où  $k_0$  est un entier quelconque et  $y(k)$  est la réponse à  $x(k)$ ; d'une autre manière:

$$\begin{aligned} \text{si } T(x(k)) &= y(k) \\ \text{alors } T(x(k-k_0)) &= y(k-k_0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

4. **Stabilité :** Un système discret est dit stable si sa réponse à une excitation de gamme dynamique finie est également à gamme dynamique finie.

**- Représentation :** Un système discret peut être représenté de plusieurs manières, on distingue alors entre les représentations suivantes  $\left[ 1 \right]$  :

1. **Par réponse impulsionnelle :**

Dans le domaine temporel, la relation liant l'entrée à la sortie est donnée par :

$$y(k) = \sum_{l=0}^{+\infty} h(l) x(k-l) \quad (1.4)$$

où  $h(k)$  est la réponse impulsionnelle du système [3]. La relation (1.4) exprime en fait un produit de convolution entre le signal d'entrée (excitation) et la réponse impulsionnelle  $h(k)$ , on notera alors :

$$y(k) = h(k) * x(k) \quad (1.4 \text{ bis})$$

## 2. Réponse fréquentielle :

La réponse fréquentielle  $H(f)$  d'un système discret est liée aux transformés de Fourier  $X(f)$  et  $Y(f)$  des signaux discrets  $x(k)$  et  $y(k)$  par [4] :

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \quad (1.5)$$

En prenant la transformée en  $z$  [5] des deux membres de l'équation (1.4) on obtient :

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) \quad (1.6)$$

où  $H(z)$  est la fonction de transfert du système; celle-ci peut aussi s'écrire sous la forme rationnelle suivante (dans le cas où  $h(k)$  est de durée infinie).

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad (1.7)$$

## 3. Equation récurrente :

Pour obtenir la représentation sous la forme d'une équation récurrente, il suffira d'exprimer l'équation (1.7) dans le domaine temporel, on aura alors :

$$y(k) = \sum_{i=0}^M b_i x(k-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(k-i) \quad (1.8)$$

#### 4. Représentation d'état :

L'état d'un système linéaire d'ordre N, est défini par un ensemble d'au moins N variables internes représentées par un vecteur  $U(n)$  appelé vecteur d'état. Le fonctionnement d'un tel système linéaire auquel est appliquée la suite d'entrée  $x(k)$  et qui donne une réponse  $y(k)$ , est caractérisé par l'équation d'état et l'équation d'observation suivantes :

$$\begin{aligned} U(k+1) &= AU(k) + B x(k) \\ y(k) &= C^t U(k) + dx(k) \end{aligned} \quad (1.9)$$

où la matrice du système A est de dimension  $N \times N$ , la commande B et l'observation C sont deux vecteurs de N composantes  $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ .

#### I.2.2. Filtrés numériques :

- **Définition :** Un filtre numérique est un système discret linéaire invariant dans le temps qui modifie la distribution fréquentielle des composantes d'un signal selon des spécifications données.

- **Filtre idéal :** C'est un filtre qui transmet toutes les composantes utiles du signal sans atténuation ni déphasage tout en éliminant complètement les autres composantes.

- **Filtre réel :** Le problème général en filtrage numérique est l'élaboration d'un système linéaire invariant dans le temps possédant la réponse fréquentielle désirée et se prêtant à une réalisation efficace. A cause de cette dernière contrainte, on ne peut obtenir la réponse fréquentielle idéale que d'une manière approchée. En pratique, les spécifications sont données avec des tolérances; ceci constitue un gabarit dans lequel la réponse fréquentielle du filtre doit s'insérer.

#### - **Avantages des filtres numériques :**

Par rapport aux filtres analogiques, les filtres numériques, possèdent à leur actif les performances suivantes  $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$  :

- la précision : Elle dépend principalement de celle des convertisseurs à l'entrée et à la sortie ainsi que de la précision des calculs à l'intérieur du filtre lui-même.

- la stabilité : Le phénomène de vieillissement étant très atténué, le filtre numérique conserve ses caractéristiques et reste donc stable au cours du temps.

- la souplesse : Si pour une raison ou une autre on aura aussi à changer les coefficients du filtre, une simple reprogrammation suffit.

- la réalisation : les progrès actuels de la technologie des circuits intégrés augmentent l'intérêt économique des filtres numériques.

- Conditions de travail : Les filtres numériques se prêtent à un fonctionnement même pour de très basses fréquences pour lesquelles les filtres analogiques se trouvent incapables d'opérer.

### I.3. Classification des filtres numériques :

L'importance de la réponse fréquentielle et la durée de la réponse impulsionnelle permet la classification des filtres numériques de deux manières différentes [5] :

#### I.3.1. Classification selon la réponse fréquentielle :

Les filtres numériques peuvent être classifiés selon leurs réponses fréquentielles, qui font apparaître les bandes de fréquences favorisées, dans de larges catégories, telles que :

- Filtre passe-bas (fig. I.2) :

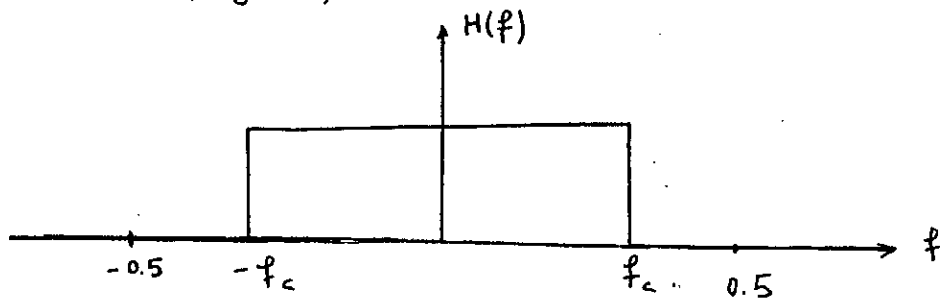


Fig. I.2 Filtre passe-bas

- Filtre passe-haut (fig. I.3)

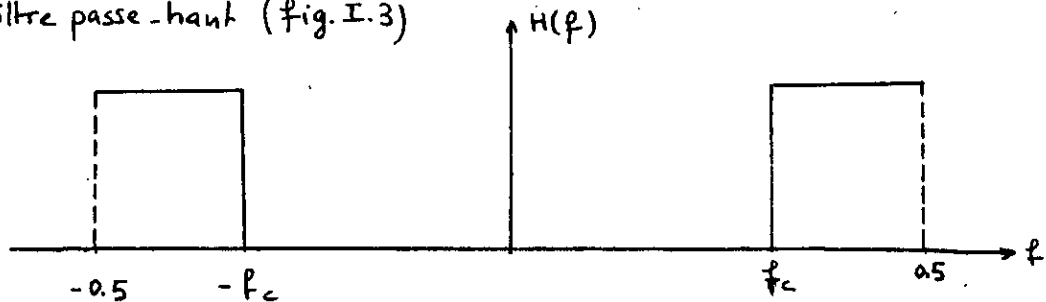


Fig. I.3 Filtre passe-haut

- Filtre passe-bande (fig. I.4)

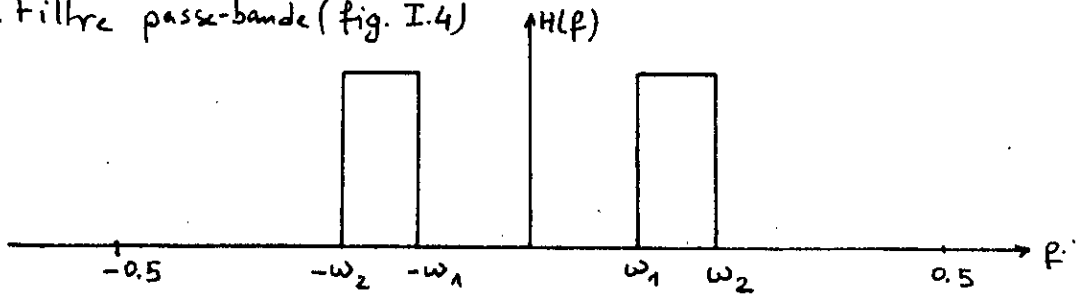


Fig. I.4 Filtre passe-bande

- Filtre coupe-bande (fig. I.5)

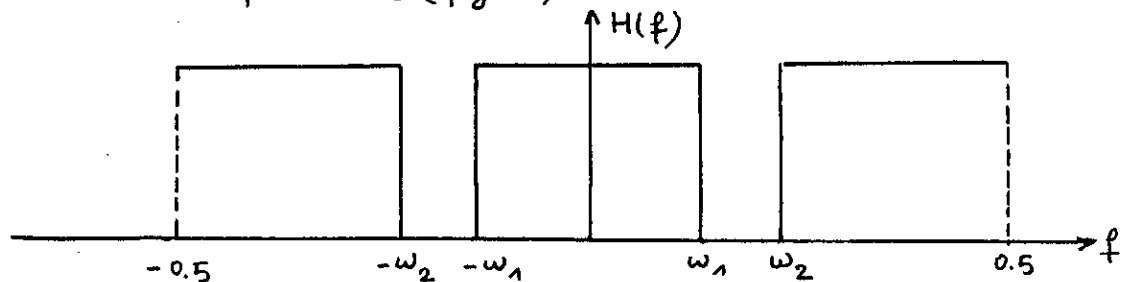


Fig. I.5 Filtre coupe-bande

A cause de la nature idealisee de ces reponses frequentielles les filtres pratiquement realisables ne peuvent satisfaire ce type de specifications que d'une maniere approximative.

### I.3.2. Classification selon la duree de la reponse impulsionnelle :

On distingue entre 2 categories [4] :

#### I.3.2.1. Filtres à reponse impulsionnelle finie RIF

Ce sont des systemes lineaires invariants dans le temps, defines par une equation selon laquelle une valeur de sortie representant un echantillon du signal filtre, est obtenue par une sommation ponderee d'un ensemble fini de valeurs d'entrees. Les coefficients de ponderation de la sommation constituent la reponse impulsionnelle du filtre  $h(k)$  qui sont nuls sur un intervalle de duree finie. Les filtres sont de type à memoire finie sans retro-action c'est à

dire que leur sortie est déterminée en fonction d'informations d'entrée d'ancienneté limitée.

Ayant tous les pôles de la fonction de transfert à l'origine, un filtre RIF est toujours stable. Cependant leur réalisation nécessite un très grand nombre d'échantillons de la réponse impulsionnelle, en particulier lorsqu'ils sont à bandes passantes très étroites. Ces filtres sont fréquemment désignés par filtres non récursifs, en raison de leur structure qui ne nécessite pas une boucle de réaction comme c'est le cas pour l'autre catégorie de filtres [5].

#### I.3.2.2. Filtres à réponse impulsionnelle infinie RII :

Ce sont des systèmes linéaires invariants dans le temps dont le fonctionnement est régi par une équation de convolution du type (1,4) portant une infinité de termes. Ils conservent une trace des signaux qui leur ont été appliqués, pendant une durée infinie, ils sont donc à mémoire infinie. Celle-ci est réalisée par une boucle de réaction de la sortie sur l'entrée, d'où leur dénomination des filtres récursifs. Ils peuvent être représentés par une équation aux différences du type (1.8) [1].

Le fait d'avoir une réponse impulsionnelle infinie permet d'obtenir des fonctions de filtrage beaucoup plus sélectives que celle des filtres RIF, à quantité de calcul équivalente (ayant le même nombre de coefficients).

#### I.4. Aperçu sur quelques méthodes de synthèse :

Une fois que le gabarit du filtre est fixé, le problème général est de trouver un système linéaire dont la réponse fréquentielle satisfait bien les spécifications exigées. Pour cela différentes méthodes de synthèse ont été élaborées, celles-ci différentes pour les filtres RIF que pour les filtres RII et ceci à cause des caractères différents de ces deux catégories [4].

##### I.4.1. Synthèse des filtres RIF :

Pour les filtres RIF, les principales méthodes de synthèse sont :

- Synthèse par série de Fourier (méthode de fenêtrage) [6] :

Ayant la réponse fréquentielle du filtre désiré, la réponse

impulsionnelle idéale est alors donnée par :

$$g(k) = \int_{-1/2}^{1/2} G(f) e^{j2\pi f k} df \quad (1.10)$$

Comme  $g(k)$  sont les coefficients du développement en série de Fourier de  $G(f)$ , il faut en général une infinité de coefficients. Un fenêtrage approprié est alors nécessaire de façon à ce que la transformée de Fourier du produit satisfait les spécifications données dans les limites des tolérances.

On a alors :  $\hat{g}(k) = W(k) g(k)$  (1.11)

où  $W(k)$  est la fenêtre choisie.

Ensuite  $g(k)$  est décalée pour assurer la causalité du filtre synthétisé.

- **Echantillonnage en fréquence** : Il suffit de représenter la réponse fréquentielle du filtre désirée  $G(f)$  par un certain nombre ( $2L$ ) de ses échantillons, alors :

$$g(k) = \sum_{n=L}^{L-1} G(n) \exp(j \frac{2\pi}{L} nk) \quad k_0 \leq k \leq k_0 + 2L-1 \quad (1.12)$$

où  $G(n)$  représente les échantillons prélevés avec une période égale à  $1/2L$ . La fonction de transfert du filtre désirée est  $G(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k) z^{-k}$

#### I.4.2. Synthèse des filtres RII

Pour les filtres RII, on peut tirer parti de tout l'arsenal des méthodes de synthèses des filtres analogiques en établissant une transposition donnant naissance à une correspondance appropriée des deux domaines analogiques et numériques [7]. Une telle correspondance doit appliquer le demi plan gauche du plan des  $S$  à l'intérieur du cercle unité pour garantir la stabilité et l'axe imaginaire du plan  $S$  au cercle unité pour qu'on soit en accord avec la transformée de Fourier [5].

- Equivalence de la dérivation :

L'analogie qui existe entre les équations différentielles et les équations aux différences permet d'établir l'équivalence [5]:

$$\frac{d}{dt} x_a(t) \longleftrightarrow \frac{x(k) - x(k-1)}{T_0} \quad (1.13)$$

où  $T_0$  est la période d'échantillonnage

Il suffira donc de remplacer  $S$  dans la fonction de transfert du filtre analogique par

$$\frac{1 - z^{-1}}{T_0}$$

Il est à noter que l'image du demi plan gauche du plan des  $S$  est l'intérieur du cercle de centre  $(\frac{1}{2}, 0)$  et de rayon égal à  $1/2$ , la stabilité reste donc assurée, mais l'approximation des dérivées par les différences n'est satisfaisante qu'aux alentours de  $z = 1$  qui est la région commune entre ce cercle et le cercle unité.

Pour une bonne approximation, ceci nécessite une grande fréquence d'échantillonnage ce qui produit un nombre de données redondantes c'est le désavantage majeur de cette méthode.

- Equivalence de l'intégration :

On peut appliquer le principe précédent à l'intégration ce qui donne :

$$y_a(t) = \int_{t_0}^t x_a(u) du \longleftrightarrow y(k) = y(k-1) + T_0 \frac{x(k) + x(k-1)}{2} \quad (1.14)$$

Où l'intégration numérique est basée sur la règle trapézoïdale.

Il suffira donc de poser dans la fonction de transfert du filtre analogique :

$$\frac{T_0}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{S} \quad (1.15)$$

Cette équation s'appelle transformation bilinéaire [4]

L'image du demi plan gauche du plan des  $S$  est l'intérieur du cercle unité. Toutefois, il est à noter que la correspondance entre les fréquences analogiques et numériques est donnée par une relation non linéaire :

$$\omega_a = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \left( \omega_n \frac{T_0}{2} \right) \quad (1.16)$$



Où  $w_a$  et  $w_n$  sont resp. les pulsations analogique et numérique.

- Invariance impulsionnelle

La réponse impulsionnelle du filtre numérique est obtenue en échantillonnant périodiquement la réponse impulsionnelle du filtre analogique [1.5]. Si la fonction de transfert  $H_a(s)$  du filtre analogique est donnée par :

$$H_a(s) = \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{s - s_j} \quad (1.17)$$

sa réponse impulsionnelle sera donnée par :

$$h_a(t) = \sum_{j=1}^N a_j e^{s_j t} u(t) \quad (1.18)$$

où

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'échantillonnage de  $h_a(t)$  donne :

$$h(k) = \sum_{j=1}^N a_j \exp(s_j k T_0) u(k T_0) \quad (1.19)$$

Il faut cependant choisir une période d'échantillonnage assez faible (même par rapport à la période de Nyquist) pour minimiser l'effet du recouvrement spectral dû à l'effet de l'échantillonnage et à l'effet des bandes de transitions [5].

**I.5. Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons présenté les systèmes numériques et leurs représentations, les filtres numériques et leurs avantages, et brièvement les méthodes de synthèses classiques.

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude d'un certain type de filtre assez particulier, c'est le filtre rejecteur fixe.

## CHAPITRE II : FILTRES RÉJECTEURS FIXES

### II.1- Introduction :

Dans certaines applications, l'élimination ou la récupération d'un signal sinusoïdal ou à bande étroite sont très demandées. Comme exemple citons le domaine des radars, communication, control, etc... .

Cette tâche est généralement accomplie par un filtre réjecteur fixe caractérisé idéalement par un gain égal à l'unité pour toutes les fréquences sauf aux fréquences des sinusoïdes en considération où le gain du filtre doit être nul [8].

### II.2- Analyse générale :

Supposons qu'on ait un signal  $Y_k$  donné par :

$$Y_k = x_k + n_k \quad (2.1)$$

où  $x_k$  est un signal sinusoïdal et  $n_k$  un bruit additif coloré indépendant de  $x_k$ . Soient  $S_y(\omega)$ ,  $S_x(\omega)$  et  $S_n(\omega)$  les densités spectrales de puissance (DSP) de  $y_k$ ,  $x_k$  et  $n_k$  respectivement; alors d'après (2.1) on a :

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) + S_n(\omega) \quad (2.2)$$

Si le signal  $x_k$  contient  $p$  sinusoïdes de fréquences  $f_1, f_2, \dots, f_p$  alors l'expression de sa DSP est donnée par :

$$S_x(\omega) = \sum_{i=1}^p \sigma_i^2 (\delta(\omega - \omega_i) + \delta(\omega + \omega_i)) \quad (2.3)$$

$$\text{où } \omega_i = 2\pi f_i \quad i=1, \dots, p \quad (2.4)$$

et  $\sigma_i^2$  est la puissance de la sinusoïde de fréquence  $f_i$  et est donnée par :

$$\sigma_i^2 = \frac{A_i^2}{2} \quad (2.5)$$

où  $A_i$  est l'amplitude de la sinusoïde.

Quant à la fonction delta, c'est la fonction de Dirac définie par le produit scalaire [2].

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t) dt \quad (2.6)$$

En faisant passer le signal  $y_k$  à travers un filtre numérique ayant une fonction de transfert  $H(z, \phi)$ , la puissance  $P$  du signal à la sortie est donnée par [5].

$$P = \frac{T_e}{2\pi} \int_{-\pi/T_e}^{\pi/T_e} \left| H(e^{j\omega T_e}, \phi) \right|^2 S_y(\omega) d\omega \quad (2.7)$$

$T_e$  est la période d'échantillonnage.

$\phi$  est une fonction de  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$  montrant ainsi que la réponse fréquentielle du filtre  $H(z, \phi)$  dépend des fréquences  $f_1, f_2, \dots, f_p$ .

En utilisant (2.2) et (2.3) on trouve :

$$P = A(\phi) + B(\phi) \quad (2.8)$$

où

$$A(\phi) = \frac{T_e}{2\pi} \int_{-\pi/T_e}^{\pi/T_e} \left| H(e^{j\omega T_e}, \phi) \right|^2 S_n(\omega) d\omega \quad (2.9)$$

qui représente la puissance de la composante bruit à la sortie du filtre et,

$$B(\phi) = \sum_{i=1}^p \frac{T_e \sigma_i^2}{\pi} \left| H(e^{j\omega_i T_e}, \phi) \right|^2 \quad (2.10)$$

qui est la puissance moyenne des sinusoides à la sortie du filtre. Idéalement, on désire minimiser  $B(\phi)$  seulement c'est-à-dire en laissant  $A(\phi)$  inchangé. Ceci n'est possible que s'il n'y a pas de bruit ou que la fonction de transfert du filtre présente un gain égale à l'unité sur toute la bande de fréquence qu'occupe le bruit; ceci suppose que cette bande ne contient aucune des fréquences  $f_1, f_2, \dots, f_p$  car sinon celles-ci seraient transmises sans atténuation à la sortie. Comme ce n'est pas le cas en pratique, c'est-à-dire que la bande de fréquence du bruit contient en général les fréquences des sinusoides, alors la minimisation de  $B(\phi)$  entrainera automatiquement celle de  $A(\phi)$ . De plus comme  $A(\phi)$  est proportionnelle à la puissance du bruit, la minimisation de  $A(\phi)$  est d'autant plus importante que la

puissance du bruit est élevée. La source de problèmes dans cette analyse résulte en fait de la dépendance de la contribution de la puissance du bruit  $A(\phi)$  du paramètre  $\phi$  et donc des fréquences des sinusoides  $f_1, f_2, \dots, f_p$ . La solution est de prendre  $A(\phi)$  comme étant une constante et donc indépendante de  $\phi$ .

Ceci nous amène à la construction d'un filtre ayant un gain égal exactement à l'unité partout sauf aux fréquences que l'on veut rejeter où celui-ci devient nul. Un tel filtre s'appelle filtre réjecteur idéal c'est-à-dire qu'il a une bande de réjection nulle. Sa fonction de transfert est donnée par :

$$H(e^{j\omega T_0}, \phi) = 0 \begin{cases} 0 & \text{pour } \omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.11)$$

Avec cette fonction de transfert l'expression (2.8) devient

$$P = \frac{T_0}{2\pi} \int_{-\pi/T_0}^{\pi/T_0} S_n(\omega) d\omega = A \quad (2.12)$$

A n'est rien d'autre que la puissance du bruit  $n_k$  qui est indépendante de  $\phi$ . Vu la structure idéale de  $H(e^{j\omega T_0}, \phi)$ , la réalisation d'un tel filtre est impossible. En pratique, le filtre réjecteur présente une certaine bande de réjection pour chaque fréquence à rejeter. Plus cette bande de réjection est faible, plus  $A(\phi)$  tend à devenir constante et donc moins de distorsions sont présentes dans le bruit à la sortie du filtre [9].

## II.3- Synthèse d'un filtre réjecteur fixe :

### II.3.1- Approche du problème :

A la différence des autres filtres classiques (passe-bas, passe-haut, etc...), la synthèse d'un filtre réjecteur se fait d'une manière tout à fait différente. Trouvons une méthode permettant la paramétrisation d'un tel filtre.

Si  $H(z)$  est la réponse fréquentielle de ce filtre et  $\omega_i, i=1, \dots, p$  les fréquences à rejeter, alors un filtre réjecteur aura la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = e^{jv_i T_0} \quad i=1, \dots, p \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.13)$$

posons 
$$H(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)} \quad (2.14)$$

où  $P_1(z)$  et  $P_2(z)$  sont deux polynômes en  $z$ . Alors les spécifications du filtre réjecteur idéal données par (2.13) deviennent :

$$\begin{cases} P_1(e^{jv_i T_0}) = 0 & i=1, \dots, p \\ P_1(z) = P_2(z) & \text{pour } z \neq e^{jv_i T_0} \quad i=1, \dots, p \end{cases} \quad (2.15)$$

$P_1(z)$  est donc un polynôme ayant  $p$  zéros correspondants respectivement aux fréquences  $f_1, f_2, \dots, f_p$ . Pour  $P_2(z)$  on prend en pratique :

$$P_2(z) = P_1(z) + \alpha \quad (2.16)$$

où  $\alpha$  est un nombre complexe qui vérifie :

$$\left| P_2(z) \right| = \left| P_1(z) + \alpha \right| \cong \left| P_1(z) \right| \quad (2.17)$$

le signe  $|\cdot|$  indique le module.

L'équation (2.14) devient 
$$H(z) = \frac{P_1(z)}{P_1(z) + \alpha} \quad (2.18)$$

On peut remarquer que le filtre ainsi caractérisé obéit approximativement bien aux spécifications requises car :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } z = e^{jv_i T_0} & H(z) = 0 \\ \text{et pour } z \neq e^{jv_i T_0} & H(z) \cong 1 \end{array}$$

### II.3.2- Expressions de $P_1(z)$ et $P_2(z)$ :

Pour plus de clarté, on traitera séparément les filtres rejecteurs simples (rejection d'une seule composante fréquentielle) et multiples (réjection d'une série de composantes fréquentielles).

### II.3.2.1- Filtre rejecteur simple :

Ce filtre a pour rôle l'élimination d'une seule composante fréquentielle que l'on supposera localisée à la fréquence  $f_0$ .

En posant  $z_0 = e^{j\omega_0 T_0}$  où  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , on aura l'expression suivante du polynôme  $P_1(z)$  :

$$P_1(z) = (z - z_0) \quad (2.19)$$

$P_1(z)$  n'est rien d'autre qu'un polynôme du 1<sup>er</sup> ordre ayant  $z_0$  comme racine et donc vérifie bien  $P_1(z_0) = 0$ .

La fonction de transfert  $H(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)}$  a donc un seul zéro qui se situe sur le cercle unité. Pour  $P_2(z)$  il suffira de prendre

$$P_2(z) = P_1(z) + \alpha = z - z_0 + \alpha \quad (2.20)$$

On voudrait, comme on l'a déjà vu, avoir  $P_2(z) \cong P_1(z)$ , il faut donc que :

$$z_0 - \alpha \cong z_0 \quad (2.21)$$

On posera alors

$$z_0 - \alpha = az \quad (2.22)$$

où "a" est une constante réelle très proche de l'unité. Dans tout ce qui suit, on écrira  $(1-\varepsilon)$  au lieu de "a", avec  $\varepsilon$  une quantité réelle positive très faible devant l'unité.

L'expression de la réponse fréquentielle du filtre obtenu est :

$$H(z) = \frac{z - z_0}{z_0 - (1-\varepsilon)z} \quad (2.23)$$

Le pôle de  $H(z)$  se situe donc sur le même angle que le zéro et à une distance égale à  $\varepsilon$  de celui-ci; étant à l'intérieur du cercle unité, le filtre synthétisé est donc stable.

Remarque : Pour des signaux réels (non complexes), tous les pôles et les zéros complexes sont dédoublés par leur conjugué.

On aura alors l'expression finale de la réponse fréquentielle d'un filtre réjecteur simple :

$$H(z) = \frac{(z - z_0) (z - z_0^*)}{(z - (1-\varepsilon)z_0) (z - (1-\varepsilon)z_0^*)} \quad (2.24)$$

où \* indique le conjugué

- Evaluation des performances :

Ayant synthétisé le filtre réjecteur simple, il reste à évaluer ses performances qui sont [8,10]

- La fréquence rejetée
- La bande de rejection
- La réponse en phase.

1- Fréquence rejetée : Les zéros de  $H(z)$  se situent sur le cercle unité exactement aux fréquences  $\pm f_0$ , donc le filtre rejette complètement la fréquence choisie.

2- Bande de rejection : C'est la bande de fréquence évaluée à -3dB du maximum du module de la fonction de transfert  $H(z)$ .

Le calcul développé en Annexe A montre que la bande de rejection du filtre est donnée par :

$$\Delta f = \frac{\varepsilon}{\pi T_0} \quad (2.25)$$

où sous forme normalisée :

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\varepsilon}{\pi} \quad (2.26)$$

où  $f_0 = \frac{1}{T_0}$  est la fréquence d'échantillonnage.

D'après (2.26) plus  $\varepsilon$  est faible, plus la rejection du filtre est plus fine. Cependant les pôles sont d'autant plus proche du cercle unité et donc de la région d'instabilité [11].

3- Réponse en phase : Pour que la synthèse d'un filtre soit efficace, il faut qu'elle permet d'avoir en plus du spectre d'amplitude demandé, une réponse en phase linéaire ou du moins quasilineaire.

Prenant la fonction de transfert d'un filtre réjecteur simple (eq.2.24), on distingue 03 voisinages différents :

- En dehors du voisinage de  $z_0$ ,  $H(z)$  vaut approximativement l'unité et donc :  $\arg H(z) = 0$

- Au voisinage de  $z_0$  tout en ayant  $z \neq z_0$ ,  $H(z)$  vaut approximativement :

$$H(z) \cong \frac{z - z_0}{z - (1-\epsilon)z_0} = \frac{1}{1 + \epsilon \frac{z_0}{z - z_0}} \quad (2.27)$$

Comme on est au voisinage de  $z_0$  posant :  $w = w_0 \pm \delta w$  (2.28) avec  $\delta w \ll w_0$ .

L'expression de  $z$  devient alors :

$$z = z_0 e^{\pm j \delta w T_0} = z_0 (1 \pm j \delta w T_0) \quad (2.29)$$

en ne considerant que le cas  $w = w_0 + \delta w$  alors l'expression (2.27) de  $H(z)$  devient :

$$H(z) = \frac{1}{1 - j \frac{\epsilon}{\delta w T_0}} \quad (2.30)$$

Ce qui donne une réponse en phase :

$$\arg(H(z)) = \arctg \frac{\epsilon}{\delta w T_0} \quad (2.31)$$

Donc en se rapprochant de  $z_0$  la phase de  $H(z)$  tend de plus en plus à partir de zéro d'atteindre  $\pm \pi/2$  sans toutefois l'atteindre.

- Et pour  $z = z_0$ ,  $H(z) = 0$   $\arg H(z) = 0$ .

La réponse en phase du filtre est partout linéaire sauf au voisinage de  $z_0$ ; comme les fréquences correspondantes à ce voisinage sont rejetées par le filtre, on peut affirmer que la réponse en phase est



quasilinéaire.

Ayant établi les performances du filtre rejeteur simple, la synthèse d'un tel filtre peut se faire en précisant seulement la fréquence à rejeter et la bande de rejection correspondante.

La figure (II.1 a et b) montre respectivement le spectre d'amplitude et de phase d'un filtre rejeteur de fréquence de rejection égale à 0.2 et de bande de rejection égale à 0.008 soit :

$$H(z) = \frac{(z - e^{j0.4\pi})(z - e^{-j0.4\pi})}{(z - 0.975 e^{j0.4\pi})(z - 0.975 e^{-j0.4\pi})}$$

### II.3.2.2- Filtre rejeteur multiple :

Ce filtre a pour rôle l'élimination de plusieurs fréquences  $f_1, f_2, \dots, f_p$ . La méthode de synthèse d'un tel filtre se fait en se basant directement sur celle du filtre rejeteur simple, ce qui permet d'obtenir la fonction de transfert :

$$H(z) = \prod_{i=1}^p \frac{(z - z_i)(z - z_i^*)}{(z - (1 - \epsilon_i)z_i)(z - (1 - \epsilon_i)z_i^*)} \quad (2.32)$$

où  $z_i = e^{j\omega_i T_e}$  et  $\omega_i = 2\pi f_i$

$H(z)$  a  $p$  zéros localisés exactement sur le cercle unité aux fréquences  $f_1, \dots, f_p$ , on a donc des réjections totales de ces fréquences.

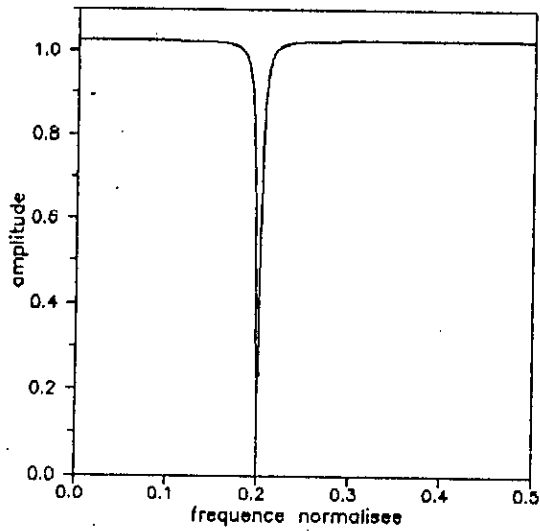
#### Evaluation des performances :

Elle se fait de la même façon que celle faite pour la rejection d'une seule fréquence.

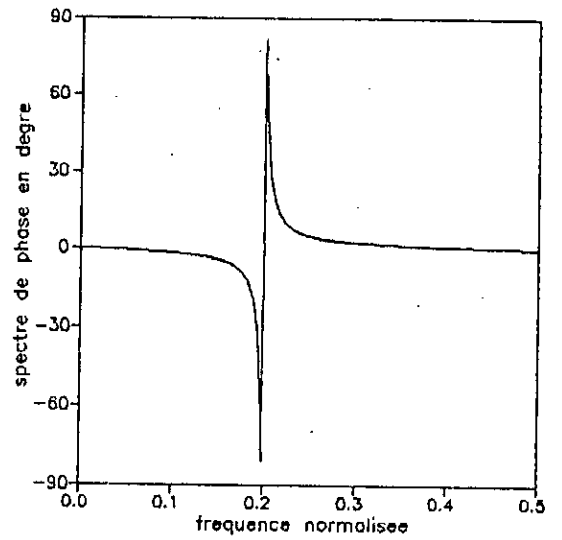
1- Fréquences rejettées : Elles sont au nombre de  $P$  et sont localisées aux fréquences choisies.

2- Bande de réjection : De même que précédemment, le calcul développé en Annexe A donne la bande de réjection pour chaque fréquence. Pour la fréquence  $f_i$ , la bande de rejection normalisée est donnée par :

$$\frac{\Delta f_i}{f_o} = \frac{\epsilon_i}{\pi} \quad (2.33)$$

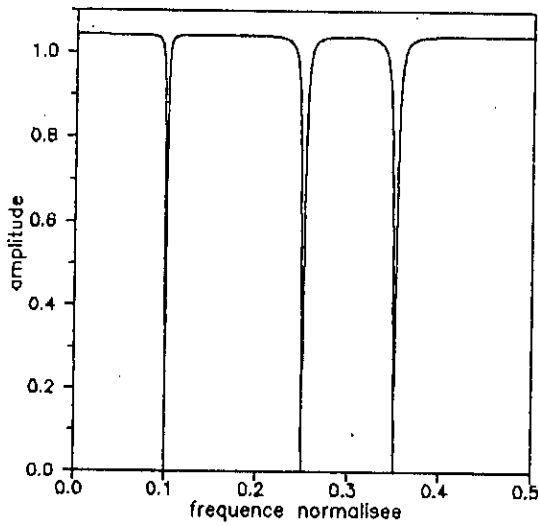


a-Spectre d'amplitude

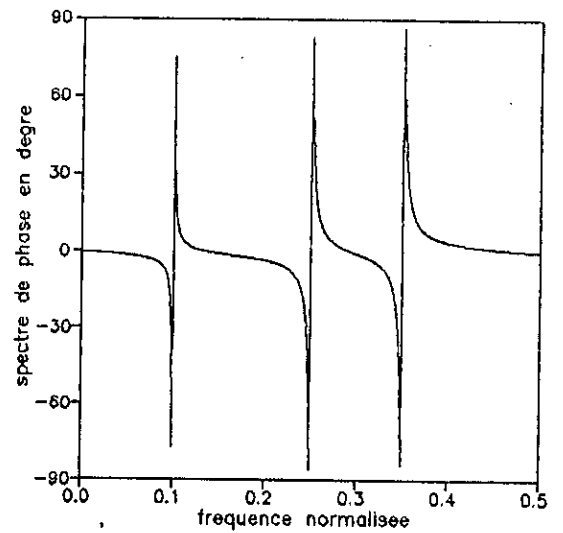


b-Spectre de phase

Fig.II.1 Filtre rejeteur fixe.  
freq=0.2, bp=0.008

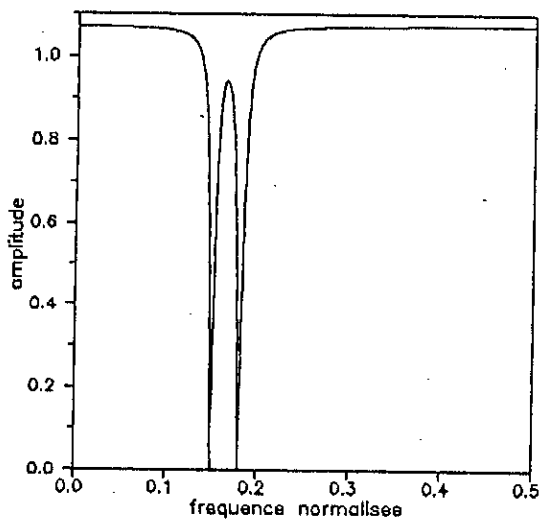


a-Spectre d'amplitude

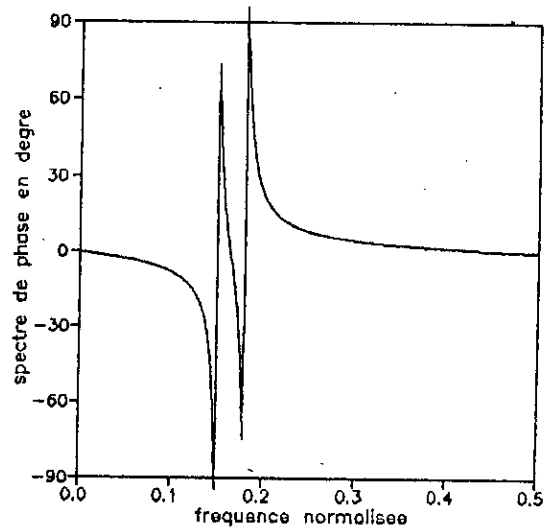


b-Spectre de phase

Fig.II.2 Filtre rejeteur multiple  
frequence=0.1,0.25,0.35  
BP=0.002,0.005,0.006



a-Spectre d'amplitude



b-Spectre de phase

Fig.II.3 Filtre rejeteur avec frequences rapprochees  
frequence=0.15,0.18  
BP=0.01,0.012

On voit qu'à chaque fréquence  $f_i$ , lui correspond sa propre bande de rejection qui n'est fonction que de la constante  $\epsilon_i$  attribuée au pôle  $P_i = (1-\epsilon_i)z_i$ . Ayant donc la bande de rejection du filtre pour la fréquence  $f_i$ , on peut directement avoir la constante  $\epsilon_i$ .

**3- Réponse en phase :** Elle est partout linéaire sauf au voisinage des fréquences  $f_1, f_2, \dots, f_p$  qui sont d'ailleurs rejetées. On peut donc affirmer que la réponse en phase dans ce cas est aussi quasilineaire.

La figure (II.2 a et b) montre le spectre d'amplitude et de phase d'un filtre rejecteur multiple qui rejette trois composantes sinusoidales de fréquences respectivement 0.1, 0.25 et 0.35 et de bande de rejections normalisées 0.002, 0.005 et 0.006.

**Remarque :** Il est cependant à noter que lorsque deux fréquences sont trop proches l'une de l'autre, on aura une distorsion dans toute la gamme comprise entre ces deux fréquences (voir fig II.3 a et b), sauf si on prend une bande de rejection très faible pour les deux fréquences ce qui augmente les risques d'instabilité.

**II.4- Simulation :** Dans ce paragraphe on analysera le comportement du filtre rejecteur fixe dans le cas de l'élimination d'une sinusoïde. On prendra pour cela un signal utile constitué par la sinusoïde  $4 \sin(2\pi \times 0,005 k)$  (voir fig II.4), ce signal est contaminé par une composante sinusoidale. Trois cas peuvent se présenter :

- La fréquence de l'interférence est connue de façon précise
- La fréquence de l'interférence n'est connue qu'approximativement.
- La fréquence de l'interférence glisse légèrement au cours du temps (processus non stationnaire).

**Exemple 1 :** C'est le cas simple de la rejection d'une sinusoïde de fréquence connue de façon précise, soit  $5 \sin(2\pi \times 0.008 k)$ . La fig II.5 montre le signal utile plus la sinusoïde d'interférence, soit donc le signal  $4 \sin(2\pi \times 0.005 \times k) + 5 \sin(2\pi \times 0.008 \times k)$ . On utilise un filtre rejecteur simple avec une fréquence de rejection égale à 0.008 et une bande rejection égale à 0.0008.

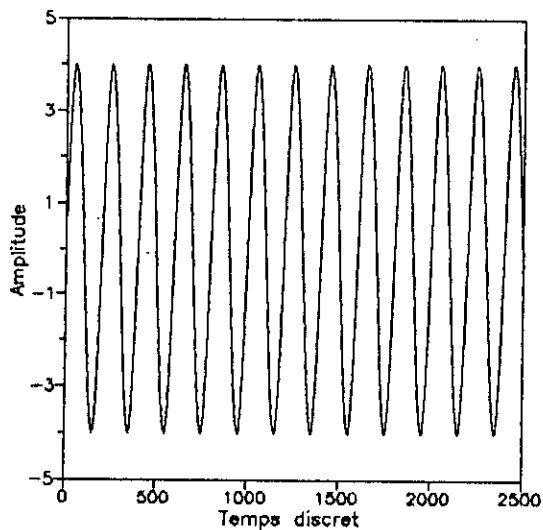


Fig.II.4 Signal sinusoidal pur

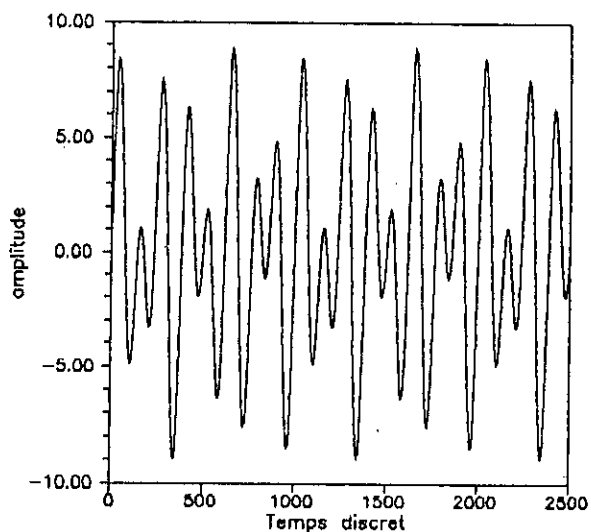


Fig.II.5 Signal pur contamé par une interférence sinusoidale connue

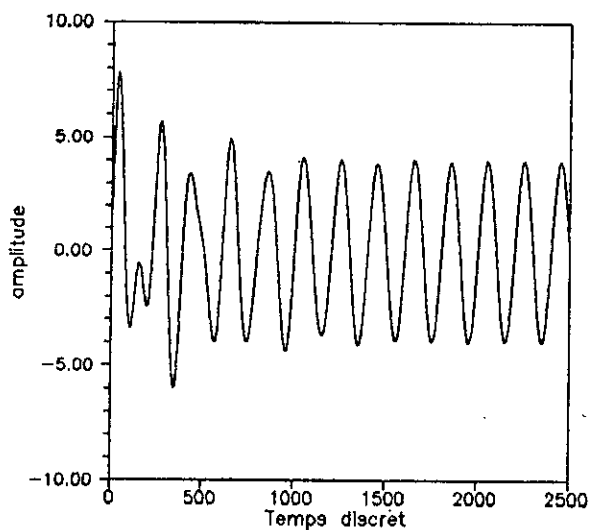


Fig.II.6 Filtrage de la sinusoide de fréquence connue

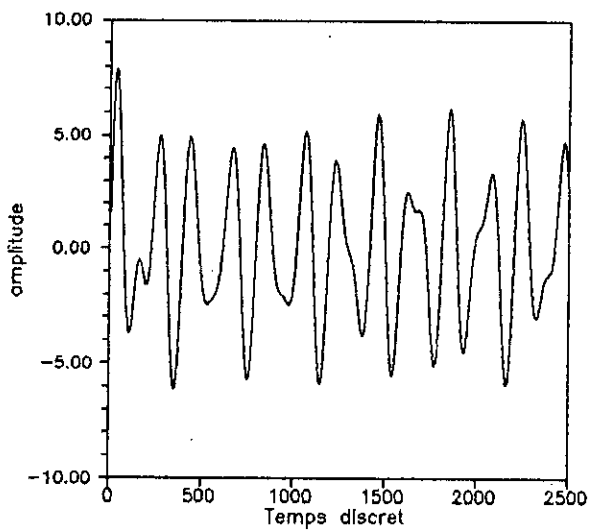


Fig.II.7 Filtrage de la sinusoide de fréquence approximativement connue

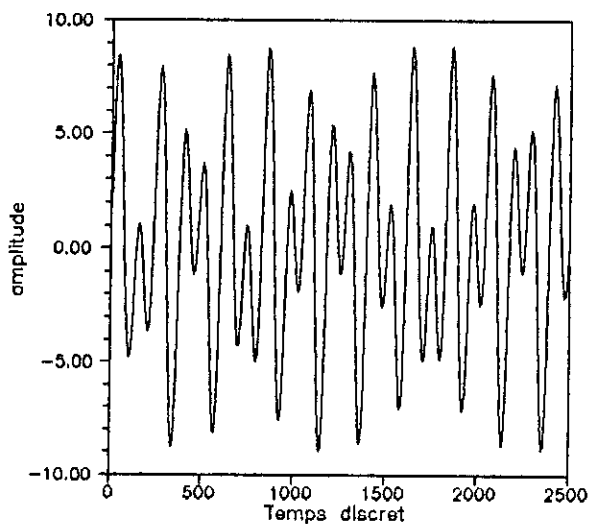


Fig.II.8 Signal sinusoidal contamé par une interférence sinusoidale de fréquence variable

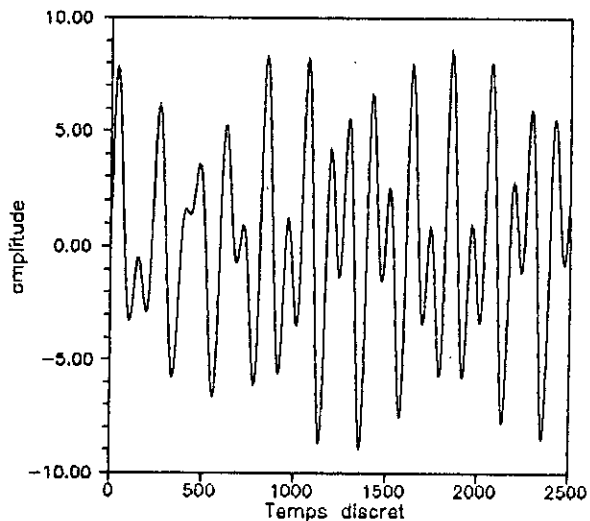


Fig.II.9 Filtrage de la sinusoide de fréquence variable

La fig II.6 montre le signal obtenu après filtrage. On remarque qu'il y a une bonne réjection de la sinusoïde d'interférence.

**Exemple 2 :** Un cas qui peut aussi se présenter est celui où la fréquence de la sinusoïde d'interférence ne soit connue que d'une manière approximative. Supposant que cette fréquence soit estimée à 0,0079 au lieu de 0,008. Le signal à filtrer est donc

$$4 \sin(2\pi \times 0,005 \times k) + 5 \sin(2\pi \times 0,0079 \times k)$$

L'utilisation du filtre rejecteur de l'exemple 1 montre (Fig II.7) que le signal obtenu après filtrage n'arrive pas à bien extraire la sinusoïde d'interférence. Le filtrage est d'autant plus médiocre que l'estimation de la fréquence de la sinusoïde d'interférence est mauvaise.

**Exemple 3 :** Un cas encore qui peut se présenter est celui où l'on opère dans un environnement non stationnaire [11,12]. Pour voir cela prenant la "sinusoïde" d'interférence :

$$5 \sin(2\pi \cdot f \cdot k)$$

où  $f$  est elle-même une fonction sinusoidale définie par

$$f = 0,008 + 0,0008 \sin(2\pi \times 10^{-4} \times k)$$

La fig II.8 montre le signal bruité et la fig II.9 celui obtenu après filtrage. On remarque alors qu'après filtrage, le signal contient beaucoup plus de distorsions que celles obtenues dans le cas précédent. Dans ce cas le filtrage n'arrive pas à poursuivre le glissement de la fréquence à rejeter car il est fixé à priori pour rejeter une fréquence fixe.

## II.5- Conclusion :

La synthèse des filtres rejecteurs fixes diffère de celle des filtres classiques tel que les filtres passe-bas, passe-bande, etc... .

Une fois synthétisé, la réjection de celui-ci est d'autant plus fine que les pôles de la fonction de transfert sont très proche du cercle unité et par suite de la région d'instabilité; un compromis s'impose donc entre la finesse du filtrage et le coût.

L'élimination des interférences sinusoidales est normalement accomplie par un filtre rejecteur fixe accordé aux fréquences de l'interférence,

cependant, cette méthode ne peut être utilisée si la fréquence de l'interférence glisse ou si elle n'est pas précisément connue. Le chapitre suivant fournit la solution à de tels problèmes en proposant une nouvelle méthode, c'est l'annulation adaptative des interférences sinusoidales.

## CHAPITRE 3 : SYSTÈME DE RÉDUCTION DES INTERFÉRENCES : PRINCIPE ET ANALYSE

**III.1- Introduction :** La méthode usuelle d'estimation d'un signal contaminé par un bruit additif est de le faire passer à travers un filtre qui tend à éliminer ou au moins minimiser le bruit tout en laissant le signal relativement inchangé.

La synthèse d'un tel filtre est du domaine du filtrage optimal qui est dû au travail pionnier de Wiener et Kalman [13].

Les filtres utilisés dans ce but peuvent être fixes ou adaptatifs. L'étude des filtres fixes est basée sur la connaissance antérieure de certaines propriétés statistiques du signal et du bruit. Les filtres adaptatifs quant à eux, ont la possibilité d'ajuster leurs paramètres automatiquement et leur synthèse ne requiert qu'une faible (ou aucune) connaissance des caractéristiques du bruit et du signal.

**III.2- Motivation :** Un exemple du type de problèmes motivant cette étude est le suivant. Soit un moteur à vitesse variable qui génère des vibrations à travers le châssis sur lequel il est monté. Ces vibrations sont de nature périodique et consistent en un fondamental de fréquence égale à celle du moteur plus des harmoniques. Supposons qu'en un autre point du châssis, on désire faire des mesures de vibrations venant d'une autre source et sans interférence du moteur. Ce que l'on mesurera en fait c'est des vibrations dues au mouvement du châssis provoqué d'une part de cette source et d'autre part du moteur. Il est presque impossible de placer un filtre réjecteur fixe pour chaque harmonique du moteur, car ce filtre doit avoir des réjections très étroites, donc un coefficient de qualité très important d'où un prix assez élevé, de plus ces fréquences sont en général inconnues ou glissantes [14].

Notre étude consiste donc à "synthétiser" un filtre réjecteur accordé, avec des réjections étroites et centrées exactement sur les harmoniques du moteur dont la fréquence peut varier ou glisser d'une façon inconnue.

### III.3- Notions sur le filtrage adaptatif [4] :

- Définition d'un système adaptatif : Un système adaptatif est un système qui a une structure qui s'ajuste dans le sens où ses performances s'améliorent ou se perfectionnent suivant un critère donné à travers le contact avec son environnement.

- Définition d'un système linéaire adaptatif : On appellera système linéaire adaptatif tout système adaptatif qui devient linéaire quand son ajustement s'arrête (après adaptation). Ces systèmes sont très utiles; ils ont la propriété d'être mathématiquement traitables et sont donc plus facile à étudier que les autres formes des systèmes adaptatifs.

- Caractéristiques des systèmes adaptatifs : Par rapport aux systèmes non adaptatifs, les systèmes adaptatifs présentent les caractéristiques suivantes :

- Ils peuvent s'adapter (s'optimiser) en présence d'un environnement non stationnaire ou d'exigences variables.

- Ils peuvent s'entraîner pour effectuer un filtrage spécifique leur synthèse est donc accomplie automatiquement par un entraînement.

- Ils peuvent généralement être considérés comme des systèmes non linéaires avec des paramètres variants dans le temps.

- Ils sont généralement plus difficile à analyser que les systèmes non adaptatifs, mais ils offrent la possibilité à tout moment d'améliorer leurs performances.

### III.4- L'annulation adaptative du bruit [15]

L'annulation adaptative des interférences sinusoïdales est en réalité un cas simple d'une application beaucoup plus générale qui est l'annulation adaptative du bruit. Il est donc tout à fait logique de présenter tout d'abord cette application.

III.4.1- Principe : L'annulation adaptative du bruit est une méthode d'élimination d'une interférence non désirée quand une référence de celle-ci est disponible. On utilise alors une entrée auxiliaire dite de référence qui permet la mesure du bruit dans un



champ où le signal est faible ou non détectable. La fig III.1 montre le problème de base et sa solution.

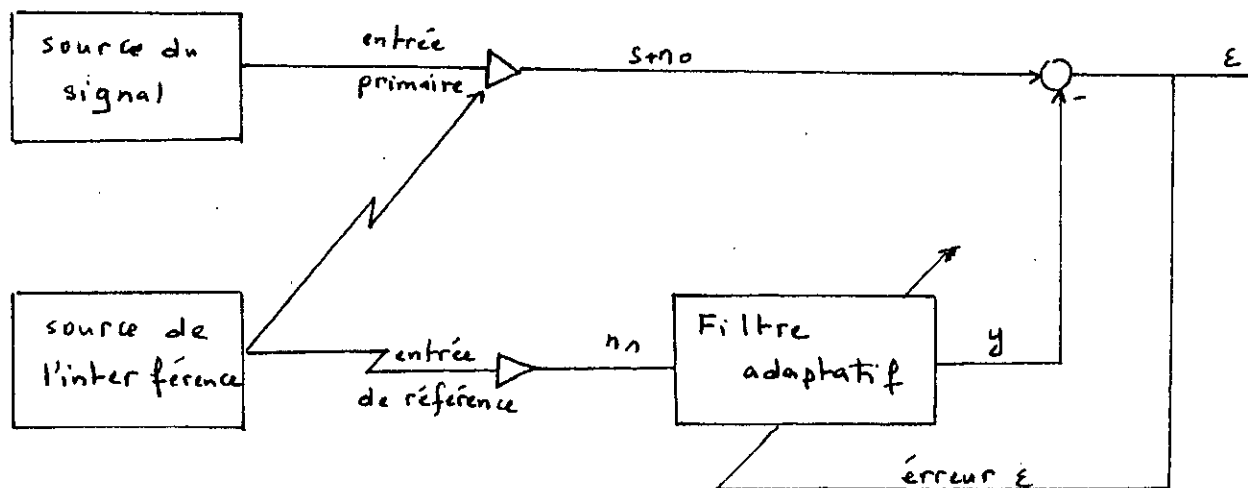


Fig III.1 Annuleur adaptatif du bruit

Un signal  $s$  est transmis à travers un canal de transmission à un détecteur qui reçoit aussi un bruit  $n_0$  non corrélé avec le signal  $s$ . Le signal combiné avec le bruit ( $s+n_0$ ) forment l'entrée primaire de l'annuleur. Un second détecteur reçoit le bruit  $n_1$  non corrélé avec le signal  $s$  mais corrélé d'une façon inconnue avec le bruit  $n_0$ , c'est l'entrée de référence. Le bruit  $n_1$  est filtré pour produire une sortie  $y$  qui doit être le plus possible une réplique de  $n_0$ , cette sortie est soustraite de l'entrée primaire ( $s+n_0$ ) pour produire la sortie du système  $\varepsilon$  donnée par

$$\varepsilon = s + n_0 - y \quad (3.1)$$

Si on connaît les caractéristiques des canaux à travers lesquels, le bruit est transmis à l'entrée primaire et celle de référence, il est théoriquement possible d'utiliser un filtre fixe capable de changer  $n_1$  en  $n_0$ . La sortie du filtre peut alors être soustraite de l'entrée primaire  $s+n_0$ , et par conséquent la sortie du système contiendra le

signal  $s$  seulement.

Cependant puisque les caractéristiques du chemin de transmission sont en général inconnues, ou connues seulement d'une façon approximative, ou même variables dans le temps, l'utilisation d'un filtre fixe ne fournit pas de bons résultats. D'ailleurs l'utilisation d'un tel filtre demande un ajustement des caractéristiques de celui-ci avec une précision difficile à atteindre et la moindre erreur va faire croître la puissance du bruit à la sortie.

Dans la fig III.1 l'entrée de référence est suivie par un filtre adaptatif. L'adaptation est accomplie par un algorithme qui répond à un signal d'erreur qui dépend de la sortie du filtre.

Donc avec un algorithme approprié, le filtre peut toujours s'ajuster en minimisant la puissance du signal erreur. Parmi les algorithmes fonctionnant ainsi on trouve l'algorithme du gradient et ses variantes [15] et l'algorithme MCR [13].

#### III.4.2- Analyse :

Supposons que  $s$ ,  $n_0$  et  $n_1$  soient trois signaux stationnaires de moyennes nulles. Supposons aussi que  $s$  et  $n_0$  sont non corrélés de même que  $s$  et  $n_1$  alors que  $n_0$  et  $n_1$  sont corrélés.

En élevant l'équation (3.1) au carré, on trouve :

$$e^2 = s^2 + (n_0 - y)^2 + 2s(n_0 - y) \quad (3.2)$$

On suppose que l'algorithme adaptatif prend en charge la minimisation de la puissance moyenne  $E(e^2)$  du signal de sortie. En prenant la moyenne statistique des deux membres de (3.2) on trouve

$$E(e^2) = E(s^2) + E(n_0 - y)^2 + 2E(s(n_0 - y)) \quad (3.3)$$

En prenant en considération le fait que  $s$  est non corrélé avec  $n_0$  et  $y$ , l'éq. (3.3) devient :

$$E(e^2) = E(s^2) + E((n_0 - y)^2) \quad (3.4)$$

Le filtre adaptatif tend à minimiser  $E(e^2)$ , mais vu que le signal  $s$

de puissance  $E(s^2)$  reste non affecté (ne dépend pas de  $\rho$ ), alors quand le filtre s'ajuste, la puissance minimale de la sortie  $e$  est donnée par :

$$\min E(e^2) = E(s^2) + \min E((n_0 - y)^2) \quad (3.5)$$

La minimisation de  $E(e^2)$  entraîne celle de  $E((n_0 - y)^2)$ , donc la minimisation de la puissance moyenne totale du signal de sortie  $e$  minimise celle du bruit à la sortie, le signal  $s$  quant à lui reste inchangé, on aura ainsi une augmentation du rapport signal sur bruit RSB à la sortie.

De (3.5) on peut dire que la valeur minimale de  $E(e^2)$  est donnée par :

$$E(e^2)_{\min} = E(s^2) \quad (3.6)$$

qui est obtenue pour :

$$E((n_0 - y)^2) = 0$$

On voit que dans l'annulation adaptative du bruit, si l'entrée de référence est corrélée avec un certain signal dans l'entrée primaire, le filtre adaptatif s'ajuste de façon à ce que à la sortie du système, ce signal soit aussi faible que possible.

Si l'entrée de référence n'est pas corrélée avec l'une des composantes de l'entrée primaire on aura :

$$E(e^2) = E((s+n_0)^2) + E(y^2) \quad (3.7)$$

et donc la minimisation de  $E(e^2)$  entrainera celle de  $E(y^2)$  qui s'accomplie en prenant tous les poids nuls, ainsi  $E(y^2) = 0$  et l'entrée primaire  $(s+n_0)$  est reproduite exactement à la sortie; aucun filtrage n'est effectué, cependant l'entrée de référence n'aura aucun effet sur l'entrée primaire.

### III.5- Application aux interférences sinusoïdales [14]

Dans certains cas, l'entrée primaire contient le signal utile  $s$  avec en addition des interférences sinusoïdales indésirables, et d'autres types de bruits.

L'avantage qu'offre l'utilisation de l'annulation adaptative dans ce cas est la capacité d'extraire adaptativement la ou les fréquences de l'interférence.

L'analyse qui va être développée concerne l'effet de ces bruits introduits sur le filtrage. Pour cela on supposera que le filtre adaptatif a atteint son régime permanent. Pour trouver la réponse impulsionnelle en régime établi du filtre on se base sur la théorie du filtrage optimal de Wiener. On prendra, un filtre RII pour que les erreurs introduites à la sortie de l'annuleur ne soient dues qu'à l'effet de ces bruits et non pas à la réponse impulsionnelle finie du filtre.

### III.5.1- Filtre optimal de Wiener

Trouvons la réponse impulsionnelle optimale que ce filtre doit avoir pour annuler complètement l'interférence sinusoidale présente dans le signal d'entrée. La fig (III.2) montre le filtre utilisé dans cette application.

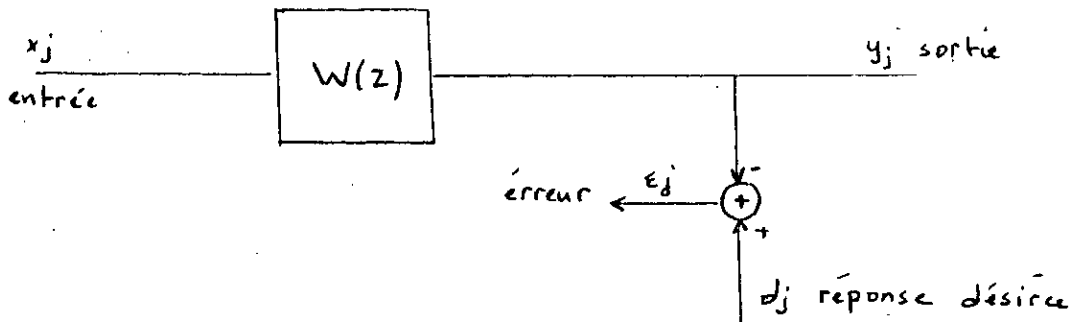


Fig III.2 Filtre de Wiener

On se fixe comme objectif la minimisation de l'erreur quadratique moyenne  $E(e_j^2)$  qui vérifie

$$E(e_j^2) = E(d_j^2) + \sum_{i,k=-\infty}^{+\infty} w_i w_k E(x_{j-i} x_{j-k}) - 2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} w_i E(d_j x_{j-i}) \quad (3.8)$$

Pour trouver la réponse impulsionnelle optimale  $w_i$ , il suffira de poser

$$\frac{\partial E(e_j^2)}{\partial w_i} = 0 \quad (3.9)$$

La fonction d'autocorrélation du signal d'entrée  $x_j$  est donnée par :

$$R_{xx}(k) = E(x_j x_{j+k}) \quad (3.10)$$

La fonction d'intercorrélation entre le signal d'entrée  $x_j$  et la réponse désirée  $d_j$  est définie par

$$R_{xd}(k) = E(x_j d_{j+k}) \quad (3.11)$$

L'application de (3.9) donne la réponse impulsionnelle optimale du filtre

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} w_i R_{xx}(k-i) = R_{xd}(k) \quad (3.12)$$

L'équation (3.12) est connue sous le nom de l'équation de Wiener-Hopf discrète [13].

La fonction de transfert peut alors être déduite de la façon suivante; la densité spectrale de puissance (DSP) du signal d'entrée est la transformée en Z de  $R_{xx}(k)$  d'où [5] :

$$S_{xx}(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{xx}(k) z^{-k} \quad (3.13)$$

La densité interspectacle entre l'entrée et la réponse désirée est donnée par :

$$S_{xd}(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{xd}(k) z^{-k} \quad (3.14)$$

De (3.12) on déduit la fonction de transfert optimale du filtre

$$W(z) = \frac{S_{xd}(z)}{S_{xx}(z)}$$

### III.5.2- Effet de l'introduction des bruits non corrélés à l'entrée primaire et de référence

L'application de la théorie de filtrage de Wiener à l'annulation des interférences (en particulier les interférences sinusoidals) peut maintenant être considérée.

La fig III.3 montre un annuleur adaptatif. L'entrée primaire consiste en plus du signal utile  $s_j$  en la somme de deux bruits  $m_{oj}$  et  $n_j$ . L'entrée de référence consiste en la somme de deux autres bruits  $m_{1j}$  et  $n_j * h(j)$  où  $h(j)$  est la réponse impulsionnelle du canal dont la fonction de transfert est  $H(z)$  et "\*" indique le produit de convolution.

Les bruits  $n_j$  et  $n_j * h(j)$  sont à origine commune et sont par suite corrélés entre eux, mais, ils sont non corrélés avec  $s_j$ . Les bruits  $m_{oj}$  et  $m_{1j}$  sont non corrélés entre eux, et non corrélés avec  $s_j$ ,  $n_j$  et  $n_j * h(j)$ .

Pour des raisons d'analyse, tous les chemins de propagation des bruits sont supposés être équivalents à des filtres linéaires invariants dans le temps.

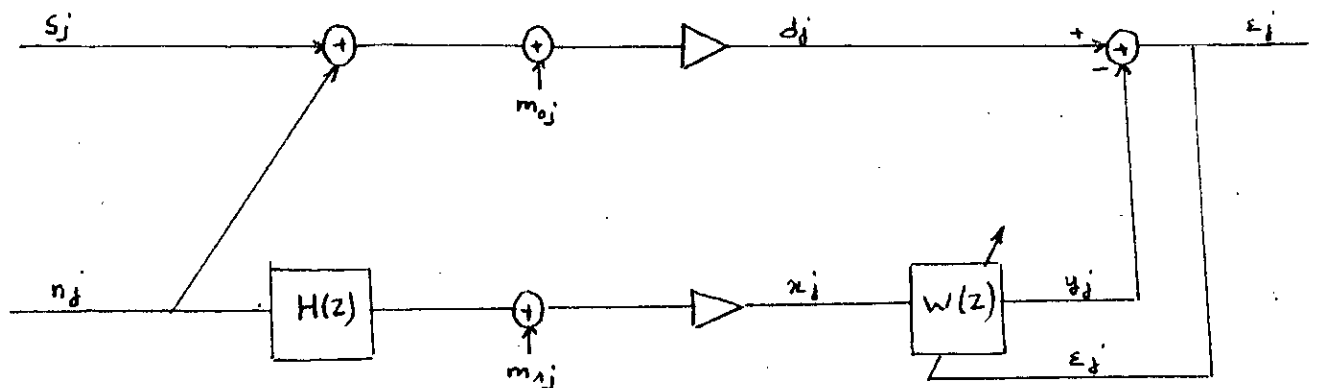


Fig III.3 Annuleur adaptatif avec bruits corrélés et non corrélés

L'annuleur adaptatif de la fig III.3 comporte un filtre adaptatif qui a comme entrée  $x_j$ , l'entrée de référence de l'annuleur qui n'est rien d'autre que  $m_{1j} + (n_j * h(j))$  et qui a comme réponse désirée par analogie avec le filtre de Wiener, l'entrée primaire de l'annuleur soit donc  $(s_j + m_{oj} + n_j)$ ; le signal d'erreur  $e_j$  représente la sortie de

l'annuleur.

Si on suppose que le processus adaptatif a convergé vers la solution optimale de Wiener-Hopf et donc que le minimum a été atteint, la fonction de transfert du filtre donnée par (3.15) peut être écrite en fonction des paramètres de l'annuleur comme suit :

La DSP de l'entrée du filtre  $S_{xx}(z)$  peut être exprimée en fonction de ses composants additionnelles non corrélées. La DSP du bruit  $m_{1j}$  est  $S_{m1m1}(z)$  et celle de l'interférence sinusoïdale qui arrive via  $H(z)$

est  $|H(z)|^2 S_{nn}(z)$  donc :

$$S_{xx}(z) = S_{m1m1}(z) + S_{nn}(z) |H(z)|^2 \quad (3.16)$$

Le bruit  $n_j$  est de nature sinusoïdale et est donc donné par :

$$n_j = \sum_{n=1}^P A_n \cos(2\pi f_n j + \theta_n) u(j) \quad (3.17)$$

où  $u(j)$  est la fonction échelon donné par :

$$u(j) = \begin{cases} 1 & j \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.18)$$

La transformée en  $z$  de  $n_j$  donne :

$$N(z) = \sum_{n=1}^P A_n \frac{\cos \theta_n - \cos(2\pi f_n - \theta_n) z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos(2\pi f_n) + z^{-2}} \quad (3.19)$$

d'où

$$S_{nn}(z) = \sum_{i,j=1}^P A_i A_j \frac{(\cos \theta_i - \cos(2\pi f_i - \theta_i) z^{-1})(\cos \theta_j - \cos(2\pi f_j - \theta_j) z^{-1})}{(1 - 2z^{-1} \cos(2\pi f_i) + z^{-2})(1 - 2z^{-1} \cos(2\pi f_j) + z^{-2})} \quad (3.20)$$

Vu que l'expression de  $S_{nn}(z)$  est assez compliquée, on écrira dans tout ce qui suit  $S_{nn}(z)$  seulement.

La densité interspectacle de puissance entre l'entrée du filtre et la réponse désirée ne dépend que de la corrélation mutuelle des composantes primaires et de références soit donc :

$$S_{xd}(z) = S_{nn}(z) H(z^{-1}) \quad (3.21)$$

La fonction de transfert du filtre optimal est alors donnée par :

$$W(z) = \frac{S_{nn}(z) H(z^{-1})}{S_{m_1 m_1}(z) + S_{nn}(z) |H(z)|^2} \quad (3.22)$$

On remarque que  $W(z)$  est complètement indépendante de  $S_{ss}(z)$  et  $S_{m_0 m_0}(z)$  ce qui implique que le signal  $s_j$  et le bruit  $m_{0j}$  sont transmis intégralement à la sortie de l'annuleur. D'autre part l'existence du bruit non corrélé  $m_{1j}$  à l'entrée de référence rend le filtrage des composantes sinusoidales moins efficace.

Un cas assez intéressant est produit quand le bruit additif  $m_{1j}$  à l'entrée de référence est nul. Alors  $S_{m_1 m_1}(z) = 0$  et donc la fonction de transfert optimale du filtre devient

$$W(z) \cong \frac{1}{H(z)} \quad (3.23)$$

Le filtre adaptatif va donner donc à sa sortie le signal  $y_j$  exactement identique à  $n_j$ ; théoriquement la sortie de l'annuleur ne contiendra donc aucune composante de l'interférence sinusoidale  $n_j$ , le bruit non corrélé  $m_{0j}$  quant à lui reste inchangé <sup>(1)</sup>.

Les performances de l'annuleur peuvent être évaluées plus généralement en terme de rapport des densités spectrales du signal sur celle du

---

(1) Il est à remarquer que vu que  $n_j$  est constitué d'interférences sinusoidales alors il y a une multitude de fonctions de transferts  $H(z)$  donnant le même bruit  $(n_j * h(j))$ , le point commun entre ces fonctions est qu'elles sont égales aux fréquences d'interférences  $f_1, f_2, \dots, f_p$ . Aussi (3.23) n'est valable que pour ces fréquences



bruit (RDSB) à la sortie de l'annuleur soit  $\rho_{out}(z)$  sur le RDSB à l'entrée primaire  $\rho_{pri}(z)$  ce qui donne le facteur de bruit  $F$  défini par :

$$F = \frac{\rho_{out}(z)}{\rho_{pri}(z)} = \frac{\text{DSP du bruit à l'entrée}}{\text{DSP du bruit à la sortie}}$$

$$F = \frac{S_{nn}(z) + S_{momo}(z)}{\rho_{out. bruit}(z)} \quad (3.24)$$

La DSP du bruit à la sortie de l'annuleur  $S_{out. bruit}(z)$  est composée de trois termes. Le premier est dû à la propagation de  $m_{oj}$  directement vers la sortie, soit  $S_{momo}(z)$ , le second est dû à la propagation de  $m_{ij}$  via  $-W(z)$  soit donc  $|W(z)|^2 S_{mimi}(z)$  et le  $S^{omo}$  est dû à la propagation de  $n_j$  vers la sortie via la fonction de transfert  $(1-H(z)W(z))$  soit donc une DSP égale à

$$|1 - H(z)W(z)|^2 S_{nn}(z) \text{ d'où}$$

$$S_{out. bruit}(z) = S_{momo}(z) + |W(z)|^2 S_{mimi}(z) + |1 - W(z)H(z)|^2 S_{nn}(z) \quad (3.25)$$

Pour plus de clarté exprimons le rapport des DSP du bruit non corrélé sur la DSP du bruit corrélé (rapport bruit sur bruit) à l'entrée primaire et à l'entrée de référence, soit :

$$A(z) = \frac{S_{momo}(z)}{S_{nn}(z)} \quad (3.26)$$

$$B(z) = \frac{S_{mimi}(z)}{|H(z)|^2 S_{nn}(z)} \quad (3.27)$$

La fonction de transfert donnée par (3.22) devient :

$$W(z) = \frac{1}{H(z) (1+B(z))} \quad (3.28)$$

et la DSP (3.25) à la sortie de l'annuleur devient :

$$S_{\text{out bruit}}(z) = S_{\text{momo}}(z) + \frac{S_{\text{m1m1}}(z)}{|H(z)|^2 |1+B(z)|^2} + S_{\text{nn}}(z) \left| 1 - \frac{1}{1+B(z)} \right|^2 \quad (3.29)$$

Ayant  $B(z) = B(z^{-1})$ , (3.29) devient :

$$S_{\text{out bruit}}(z) = S_{\text{nn}}(z) \left[ A(z) + \frac{B(z)}{1+B(z)} \right] \quad (3.29 \text{ bis})$$

Le facteur de bruit  $F$  est alors donné par :

$$F = \frac{(1+A(z)) (1+B(z))}{A(z) + B(z) + A(z) B(z)} \quad (3.30)$$

Le facteur de bruit est bien supérieur à l'unité, donc le RDSB à la sortie est supérieur au RDSB à l'entrée.

Il apparaît de (3.30) que le pouvoir du système à réduire des interférences est limité par le rapport des DSP du bruit non corrélé sur la DSP du bruit corrélé aux entrées primaire et de référence.

Plus  $A(z)$  et  $B(z)$  sont petits, plus le facteur de bruit  $F$  est plus élevé et donc plus l'action de l'annuleur est plus efficace.

Soit donc les cas suivant :

- 1er cas : La DSP du bruit non corrélé à l'entrée primaire  $m_{o_j}$  est faible comparée à la DSP du bruit  $n_j$ ,  $A(z)$  est donc faible d'où :

$$F = \frac{1 + B(z)}{B(z)}$$

- 2ème cas : c'est la DSP du bruit non corrélé à l'entrée de référence qui est faible comparée à la DSP du bruit  $n_j * h(j)$  d'où

$$F = \frac{1 + A(z)}{A(z)}$$

3<sup>ème</sup> cas :  $A(z)$  et  $B(z)$  sont tous les deux faibles alors

$$F = \frac{1}{A(z) + B(z)} \quad (3.33)$$

Le meilleur cas se produit donc quand  $A(z)$  et  $B(z)$  sont tous les deux faibles, le facteur de bruit est très élevé et permet donc d'avoir une réjection presque totale de l'interférence sinusoidale donc une reproduction exacte du signal à la sortie de l'annuleur.

### III.5.3-Effet des composantes du signal utile sur l'entrée de référence

Dans certains cas l'entrée de référence de l'annuleur adaptatif du bruit contient des niveaux faibles des composantes du signal en addition avec les bruits corrélés et non corrélés usuels.

Pour voir cela on peut reprendre l'exemple du moteur. Si on desire faire des mesures sur un point du châssis très proche de la source il y aura des interférences dues au mouvement de rotation du moteur, celles-ci sont de plus en plus faibles si ce point est loin du moteur et plus proche de la source, ceci constitue l'entrée primaire de l'annuleur.

De même pour constituer l'entrée de référence, on fait des mesures sur un point du châssis très proche du moteur, cependant, il y aura toujours un signal additif dû à la source.

Il est clair que de telles composantes produisent une certaine annulation du signal utile à la sortie. La question qui se pose est si cette annulation est suffisamment importante pour rendre une telle application inutile. La réponse est fournie dans cette section à travers une analyse quantitative basée sur la théorie de filtrage optimal de Wiener.

La fig III.4 montre un annuleur adaptatif des interférences sinusoidales dont l'entrée de référence contient les composantes du signal utile, et l'entrée primaire et de référence contiennent les interférences sinusoidales. Les bruits additifs non corrélés sont omis pour simplifier l'analyse.

Les composantes du signal utile dans l'entrée de référence sont supposées être propagées à travers un canal qui peut être modélisé par la fonction de transfert  $G(z)$ .

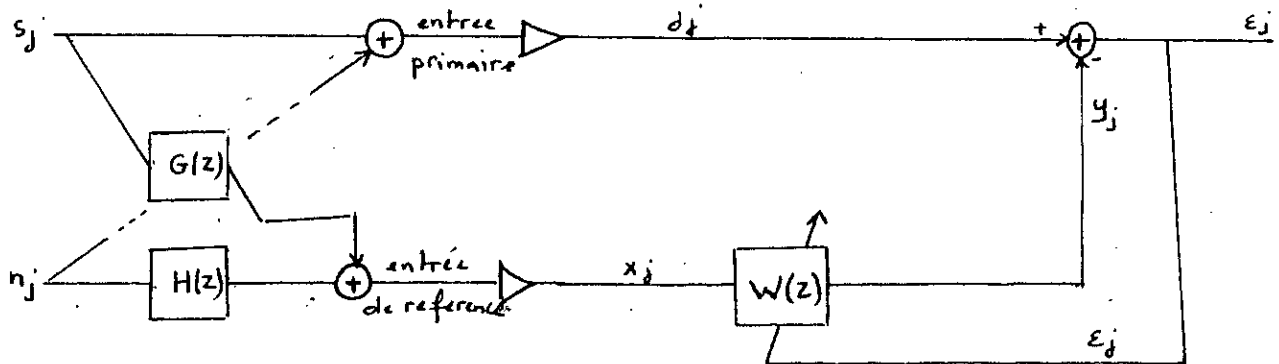


Fig III.4 Annuleur adaptatif avec composantes du signal utile à l'entrée de référence

La DSP à l'entrée du filtre  $W(z)$  est donnée par :

$$S_{xx}(z) = S_{ss}(z) |G(z)|^2 + S_{nn}(z) |H(z)|^2 \quad (3.34)$$

La densité interspectacle de puissance entre l'entrée primaire et de référence est donnée par :

$$S_{xd}(z) = S_{ss}(z) G(z^{-1}) + S_{nn}(z) H(z^{-1}) \quad (3.35)$$

La fonction de transfert du filtre de Wiener optimal obtenue est alors:

$$W(z) = \frac{S_{ss}(z) G(z^{-1}) + S_{nn}(z) H(z^{-1})}{S_{ss}(z) |G(z)|^2 + S_{nn}(z) |H(z)|^2} \quad (3.36)$$

Notre premier objectif est de trouver le rapport des DSP du signal sur celle du bruit (RDSB)  $\rho_{out}(z)$  à la sortie. La fonction de transfert représentant le chemin de propagation du signal de l'entrée vers la sortie de l'annuleur est égale à  $(1 - G(z)W(z))$ , celle du chemin de propagation du bruit est :  $(1 - H(z)W(z))$ .

La DSP du signal utile à la sortie de l'annuleur est :

$$S_{ss\ out}(z) = |1 - G(z)W(z)|^2 S_{ss}(z) \quad (3.37)$$

en utilisant (3.36) on trouve

$$S_{ss \text{ out}}(z) = \left| \frac{(H(z) - G(z))S_{nn}(z) H(z^{-1})}{S_{ss}(z) |G(z)|^2 + S_{nn}(z) |H(z)|^2} \right|^2 S_{ss}(z) \quad (3.38)$$

celle du bruit à la sortie

$$S_{nn \text{ out}}(z) = \left| \frac{(G(z) - H(z))S_{ss}(z) G(z^{-1})}{S_{ss}(z) |G(z)|^2 + S_{nn}(z) |H(z)|^2} \right|^2 S_{nn}(z) \quad (3.39)$$

Donc le RDSB à la sortie est donné par :

$$\rho_{\text{out}}(z) = \frac{S_{ss \text{ out}}(z)}{S_{nn \text{ out}}(z)} = \frac{S_{nn}(z)}{S_{ss}(z)} \left| \frac{H(z)}{G(z)} \right|^2 \quad (3.40)$$

L'expression (3.40) peut être écrite d'une manière beaucoup plus intéressante en fonction du RDSB à l'entrée de référence comme suit :

La DSP du signal utile à l'entrée de référence est :

$$S_{ss \text{ réf}}(z) = S_{ss}(z) |G(z)|^2 \quad (3.41)$$

Celle du bruit

$$S_{nn \text{ réf}}(z) = S_{nn}(z) |H(z)|^2 \quad (3.42)$$

Le RDSB à l'entrée de référence est

$$\rho_{\text{réf}}(z) = \frac{S_{ss}(z)}{S_{nn}(z)} \left| \frac{G(z)}{H(z)} \right|^2 \quad (3.43)$$

on a donc

$$\rho_{\text{out}}(z) = \frac{1}{\rho_{\text{réf}}(z)} \quad (3.44)$$

Ce résultat est tout à fait logique, il montre que plus l'entrée de référence contient des composantes du signal utile et plus la sortie contiendra celles du bruit. Le RDSB à la sortie est exactement l'inverse pour toutes les fréquences du RDSB à l'entrée de référence. Notre objectif suivant est de trouver une expression pour le "signal de distorsion" à la sortie. Quand les composantes du signal utile sont

présentés à l'entrée de référence, une distorsion du signal se produit à la sortie. Le taux de distorsion dépend du signal utile qui se propage à travers le filtre adaptatif.

La fonction de transfert représentant le chemin de propagation vers la sortie du signal à travers le filtre est :

$$-G(z) W(z) = -G(z) \frac{S_{ss}(z) G(z^{-1}) + S_{nn}(z) H(z^{-1})}{S_{ss}(z) |G(z)|^2 + S_{nn}(z) |H(z)|^2} \quad (3.45)$$

quand  $|G(z)|$  est faible, (3.45) devient :

$$-G(z) W(z) \cong -\frac{G(z)}{H(z)} \quad (3.46)$$

donc la DSP du signal se propageant à la sortie via le filtre est

$$S_{ss}(z) \left| \frac{G(z)}{H(z)} \right|^2 \quad (3.47)$$

La combinaison de ces composantes avec les composantes du signal venant de l'entrée primaire provoque une distorsion.

On définit alors le signal de distorsion  $D(z)$  comme le rapport des DSP du signal se propageant à travers le filtre  $W(z)$  sur celle du signal se propageant via l'entrée primaire, soit

$$D(z) = \left| G(z) W(z) \right|^2 \quad (3.48)$$

où d'une manière approchée quand  $(G(z))$  est faible :

$$D(z) \cong \left| \frac{G(z)}{H(z)} \right|^2 \quad (3.49)$$

Cette expression peut être écrite en utilisant l'expression des DSP à

$$\text{l'entrée primaire : } \rho_{\text{pri}}(z) = \frac{S_{ss}(z)}{S_{nn}(z)} \quad (3.50)$$

et de référence (éq. 3.43), soit donc :

$$D_r(z) \approx \frac{\rho_{\text{ref}}(z)}{\rho_{\text{pri}}(z)} \quad (3.51)$$

Cette équation montre qu'une fois la solution optimale de Wiener-Hopf obtenue le signal de distorsion est d'autant plus faible que le RDSB à l'entrée de référence est faible comparé à celui de l'entrée primaire. Ce résultat est tout à fait raisonnable.

L'analyse précédente montre que la présence des composantes du signal utile à l'entrée de référence est indésirable, mais le système de réduction de bruit peut toujours être efficace.

Notons que si par erreur l'entrée de référence ne contient que les composantes du signal et aucune composante du bruit, le signal à la sortie de l'annuleur sera complètement annulé; donc un choix judicieux de l'entrée de référence s'impose.

### III.6- Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le concept général de l'annulation adaptative du bruit. L'analyse a été faite en se basant sur le filtrage optimal de Wiener. L'existence des bruits non corrélés à l'entrée primaire et de référence perturbe un tel système qui se trouve incapable de minimiser leur effet; quant à l'existence des composantes du signal utile à l'entrée de référence, elles créent une distorsion à la sortie qui est d'autant plus faible que leur contribution à l'entrée de référence est négligeable par rapport à celui du bruit à l'entrée primaire.

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude et l'application des algorithmes adaptatifs dans un tel système.

## CHAPITRE 4 : ALGORITHMES ADAPTATIFS POUR L'ANNULATION DES INTERFÉRENCES SINUSOÏDALES

### IV.1- Introduction :

Dans le chapitre précédent, l'analyse de l'annuleur du bruit a été faite en régime permanent c'est-à-dire en supposant que l'annulation a atteint son régime établi. De plus pour simplifier cette analyse et pour lui donner un aspect théorique et général, nous avons utilisé la solution optimale non causale de Wiener pour caractériser le filtre (adaptatif) de l'annuleur de bruit [16]. Malgré qu'une telle solution est généralement donnée par une forme rationnelle (fonction de transfert d'un filtre RII) et physiquement non réalisable (non causale), les différents résultats et propriétés issus de l'analyse du chapitre précédent restent pratiquement valables lorsqu'on utilise un filtre du type RIF et causal. L'utilisation de ce dernier reste préférée, car, malgré ses performances limitées par rapport à celles des filtres RII, il représente un candidat très adapté à une utilisation pratique, du fait qu'il est toujours stable et simple à implémenter.

Dans ce chapitre, nous allons développer principalement trois algorithmes utilisant le filtre adaptatif transversal qui est toujours stable, et voir l'application d'un tel type de filtrage sur l'annuleur adaptatif dans le cas où l'entrée de référence ne contient que des interférences sinusoidales. Dans ce cas l'annuleur doit agir de telle manière à laisser passer toutes les composantes fréquentielles sauf celles qui existent à l'entrée de référence, sa fonction de transfert (après adaptation) de l'entrée primaire à sa sortie est donc celle d'un filtre rejeteur [14,15].

### IV.2- Filtre adaptatif transversal :

C'est un filtre numérique variant dans le temps dont la forme générale est montrée sur la figure (IV.1). Il est aussi appelé filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF).

Ce filtre a comme entrée le signal  $x_k$ , comme sortie le signal  $y_k$  et comme réponse impulsionnelle les poids  $w_1, \dots, w_M$ .

On voit que la sortie est une combinaison linéaire finie des



échantillons du signal d'entrée d'où la qualification "transversal" ou RIF.

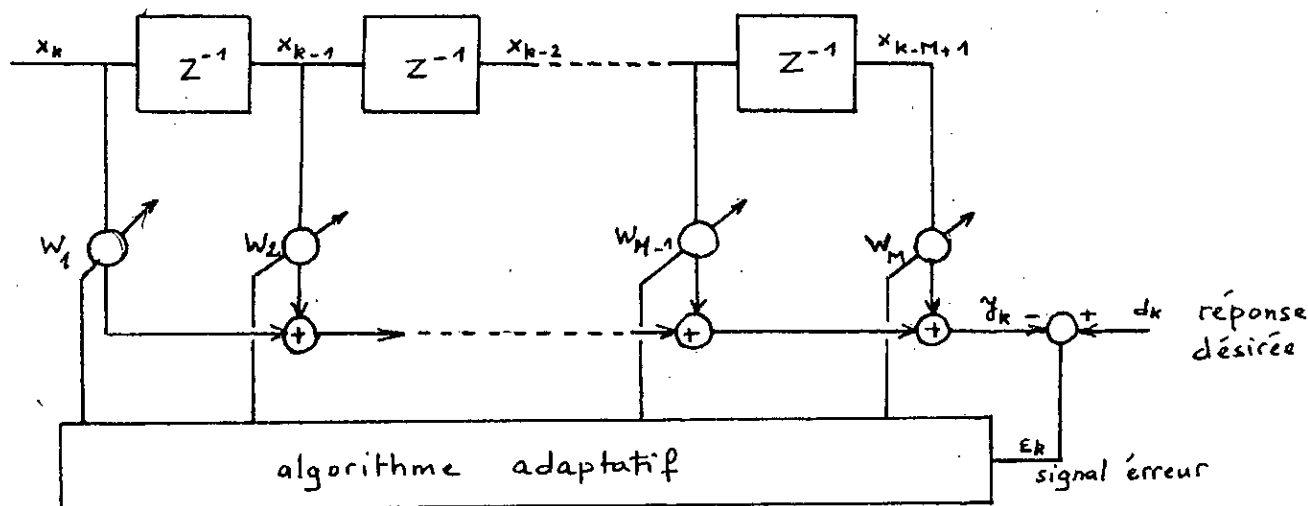


Fig IV. 1 Filtre adaptatif transversal

- Signal d'entrée et vecteur de pondération :

Les composantes d'entrée sont des échantillons séquentiels de la même source du signal. On définit alors le vecteur d'entrée  $X_k$  :

$$X_k = (x_k \ x_{k-1} \ \dots \ x_{k-M+1})^T \quad (4.1)$$

où T représente la transposée et k l'indice temporel.

La sortie  $y_k$  est alors donnée d'après la fig (IV.1) par :

$$y_k = \sum_{i=1}^M w_{i,k} x_{k-i+1} \quad (4.2)$$

Si on définit le vecteur poids comme suit :

$$W_k = (w_{1,k} \ w_{2,k} \ \dots \ w_{M,k})^T \quad (4.3)$$

alors l'expression de la sortie du filtre  $y_k$  (eq.4.2) devient :

$$Y_k = X_k^T W_k = W_k^T X_k \quad (4.4)$$

- Réponse désirée et erreur :

Le procédé d'adaptation est le suivant :

Le vecteur poids  $W_k$  s'ajuste à l'aide d'un algorithme d'adaptation en essayant de donner une sortie  $y_k$  qui coïncide le plus possible avec un signal appelé réponse désirée  $d_k$ . Le vecteur poids s'ajuste alors

en essayant de minimiser la puissance moyenne du signal  $\epsilon_k$ .

#### IV.3. Minimisation de l'erreur quadratique moyenne :

Le signal erreur à l'instant  $k$  est donnée par :

$$\epsilon_k = d_k - X_k^T W = d_k - W^T X_k \quad (4.5)$$

On a omis l'indice  $k$  du vecteur poids dans ce paragraphe, car on ne parlera pas ici de la procédure d'ajustement des poids.

L'erreur quadratique à l'instant  $k$  est :

$$\epsilon_k^2 = d_k^2 + W^T X_k X_k^T W - 2d_k X_k^T W \quad (4.6)$$

en prenant la moyenne statistique de (4.6) on trouve l'expression de l'erreur quadratique moyenne (EQM) :

$$\xi = E(\epsilon_k^2) = E(d_k^2) + W^T R W - 2P^T W \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

où  $R$  est une matrice  $M \times M$  dite matrice d'autocorrélation de l'entrée, elle a la structure d'une matrice de Toeplitz [11] car, le signal d'entrée  $x_k$  est supposé stationnaire.

$$R = E(X_k X_k^T) = E \begin{bmatrix} x_k^2 & x_k x_{k-1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_k x_{k-M+1} \\ x_k x_{k-1} & x_k^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_k x_{k-M+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_k x_{k-M+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_k^2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

et  $P$  est un vecteur  $M \times 1$  qui représente l'intercorrelation entre la réponse désirée  $d_k$  et les composantes du signal d'entrée  $x_k$ :

$$P = E (d_k X_k) = E (d_k x_k \quad d_k x_{k-1} \dots d_k x_{k-M+1})^T \quad (4.9)$$

De l'équation (4.7) on peut voir que l'EQM est une fonction quadratique exacte des composantes du vecteur poids  $W$  quand la réponse désirée et le signal d'entrée sont des processus aléatoires stationnaires. C'est d'ailleurs une hypothèse qui sera retenue pour toute l'analyse qui va suivre.

La figure IV.2 montre l'allure de  $\xi$  dans le cas où  $M = 2$ .

La surface ainsi formée est parabolique et les contours donnant  $\xi = C^{te}$  sont des ellipses [17]. Cette fonction a un seul minimum  $\xi_{min}$  correspondant au vecteur poids optimal  $W^*$ .

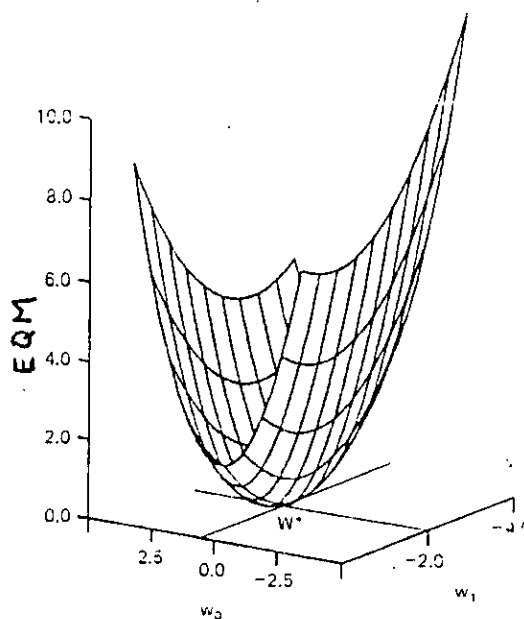


Fig. IV.2. Erreur quadratique moyenne pour  $M = 2$

#### IV.3.1. - Le gradient et l'EQM minimale [17]

Le mécanisme d'adaptation doit à chaque itération ajuster le vecteur

poids de telle façon à obtenir le minimum  $\xi_{\min}$  de l'EQM. Ce dernier est obtenu en prenant le gradient de l'EQM noté  $\nabla_w$  :

$$\nabla_w = \frac{\partial \xi}{\partial w} = \left[ \frac{\partial \xi}{\partial w_1} \quad \frac{\partial \xi}{\partial w_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \xi}{\partial w_M} \right]^T = 2 RW - 2P \quad (4.10)$$

en posant  $\nabla_w = 0$ , on obtient le vecteur poids optimal  $w^*$  donné par

$$w^* = R^{-1}P \quad (4.11)$$

C'est l'équation de Wiener Hopf pour un filtrage transversal.

En remplaçant (4.11) dans (4.7) on trouve l'expression de l'EQM minimale.

$$\xi_{\min} = E(d_k^2) - P^T w^* = E(d_k^2) - P^T R^{-1}P \quad (4.12)$$

#### IV.3.2. Orthonormalisation de la matrice d'auto-correlation

Les valeurs propres de la matrice  $R$  s'obtiennent en résolvant l'équation caractéristique d'ordre  $M$  :

$$\det(R - \lambda I) = 0 \quad (4.13)$$

où  $\lambda$  est un scalaire qui représente les valeurs propres et  $I$  la matrice identité; cette équation possède  $M$  solutions  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ . A chacune des valeurs propres  $\lambda_n$ , correspond un vecteur propre  $Q_n$  donné tel que :

$$R Q_n = \lambda_n Q_n \quad (4.14)$$

En étendant l'équation (4.14) à toutes les valeurs propres on aura :

$$R(Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_M) = (Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_M) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_M \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Si  $Q$  est la matrice des vecteurs propres définie par :

$$Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_M) \quad (4.16)$$

On aura (si toutes les valeurs propres sont distinctes) :

$$R = Q \Lambda Q^{-1} \quad (4.17)$$

où  $\Lambda$  est une matrice diagonale qui contient toutes les valeurs propres.

Propriétés : [17]

- R étant symétrique, les vecteurs propres correspondants aux valeurs propres distinctes sont orthogonaux :

$$Q_m^T Q_n = 0 \text{ pour } m \neq n \quad (4.18)$$

- R étant réelle et symétrique, toutes les valeurs propres sont réelles.

- Toutes les valeurs propres de la matrice d'autocorrélation R sont positives du fait que R est définie positive ou au moins semi-positive.

Remarque : la matrice des vecteurs propres Q peut être normalisée de

telle manière à avoir :  $Q^T Q = I$  (4.19)

On retiendra dans tout ce qui suit cette forme orthonormale de décomposition de la matrice d'autocorrélation R.

#### IV.3.3 Changement de coordonnées :

En prenant  $V = W - W^*$  (4.20)

On trouve [17] :

$$\xi = \xi_{\min} + V^T R V \quad (4.21)$$

La quantité V représente la déviation du vecteur poids W du vecteur poids optimal  $W^*$ . Une variation de W autour de  $W^*$  implique une augmentation de l'EQM d'une quantité égale à  $V^T R V$ , car :

$$V^T R V \geq 0 \quad (4.22)$$

(puisque R est une matrice définie semi-positive en pratique).

L'expression du gradient de (4.10) quant à elle devient :

$$\nabla_{\mathbf{w}} = \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial v_1}, \frac{\partial \xi}{\partial v_2}, \dots, \frac{\partial \xi}{\partial v_M} \right)^T \quad (4.23)$$

$$\nabla_{\mathbf{w}} = 2\mathbf{R}\mathbf{v} = 2\mathbf{R}\mathbf{w} - 2\mathbf{p}.$$

En réalité on utilise souvent le vecteur  $\mathbf{v}'$  au lieu de  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{v} \quad (4.24)$$

alors (4.21) devient

$$\xi = \xi_{\min} + \mathbf{v}'^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}' \quad (4.25)$$

$\mathbf{v}'$  représente ce qu'on appelle les axes principaux du système, c'est à dire, suivant les vecteurs propres de la matrice R. On verra ultérieurement la nécessité d'un tel changement de variables pour démontrer la convergence des algorithmes du gradient et LMS.

#### IV.3.4- Décorrélation de l'erreur et de l'entrée :

Quand  $\mathbf{w} = \mathbf{w}^*$ , un résultat statistique assez important apparaîtra, il concerne la décorrélation entre l'erreur et les composantes du vecteur du signal d'entrée  $X_k$ .

d'après (4.5) :

$$\varepsilon_k = d_k - \mathbf{w}^T X_k.$$

en multipliant les deux cotes de l'égalité par  $X_k$ , et en prenant la moyenne statistique on trouve :

$$E(\varepsilon_k X_k) = \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{R}\mathbf{v} \quad (4.26)$$

Or pour  $\mathbf{w} = \mathbf{w}^*$  on aura  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  donc

$$\left[ \begin{array}{c} E-(\varepsilon_k X_k) \\ W = W^* \end{array} \right] = 0 \quad (4.27)$$

Donc, une fois l'optimum atteint, le signal erreur  $\varepsilon_k$  devient non corrélé (orthogonal) au signal d'entrée. Ceci est en fait le résultat du principe d'orthogonalité dans le cas statistique.

#### IV.4- Recherche du minimum par la méthode du gradient [18]

IV.4.1- Idée de base : Le problème est de trouver une procédure d'ajustement qui permet d'atteindre  $W^*$  après adaptation. L'idée est de commencer par une valeur arbitraire  $W_0$ , on mesure la pente de la courbe en ce point (dans le cas où  $M=1$ ) et on choisira une nouvelle valeur  $W_1$  qui est égale à  $W_0$  plus un incrément proportionnel au négatif de la pente et ainsi de suite jusqu'à atteindre  $W^*$ .

#### IV.4.2- Algorithme du gradient :

La procédure de mise à jour du vecteur poids est la suivante [18]

$$W_{k+1} = W_k + \mu(-\nabla_{W_k}) \quad (4.28)$$

or d'après (4.23) :

$$\nabla_{W_k} = 2RV_k = 2R(W_k - W^*) \quad (4.29)$$

d'où (4.28) devient :

$$W_{k+1} = (I - 2\mu R)W_k + 2\mu RW^* \quad (4.30)$$

L'équation matricielle aux différences (4.30) ne peut être résolue directement car la matrice  $R$  n'est pas diagonale et donc le système d'équation obtenu est couplé. En utilisant le changement de variables donné précédemment on trouve :

$$V'_{k+1} = (I - 2\mu\Lambda) V'_k \quad (4.31)$$

La matrice des valeurs propres  $\Lambda$  est diagonale, les équations aux différences obtenues sont donc découplées.

D'après (4.30) on peut écrire :

$$V'_k = (I - 2\mu\Lambda)^k V'_0 \quad (4.32)$$

Donc, puisque la convergence (ie  $W_k = W^*$ ) est atteinte lorsque  $V'_k = 0$ , l'algorithme du gradient converge si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (I - 2\mu\Lambda)^k = 0 \quad (4.33)$$

Ecrit sous forme matricielle, cette équation devient :

$$(\lim_{k \rightarrow \infty} (1-2\mu\lambda_1)^k, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} (1-2\mu\lambda_M)^k) = (0, \dots, 0) \quad (4.33 \text{ bis})$$

La condition nécessaire et suffisante pour la convergence de l'algorithme du gradient et donc d'avoir :

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}} \quad (4.34)$$

où  $\lambda_{\max}$  est la plus grande valeur propre de la matrice R.

Ayant cette condition on aura :  $\lim_{k \rightarrow \infty} V'_k = 0$  ou sous une autre forme

$\lim_{k \rightarrow \infty} W_k = W^*$ . Cependant vu que le vecteur poids  $W_k$  a M composantes,

chaque poids  $w_{ik}$  converge suivant la raison géométrique  $(1-2\mu\lambda_i)$  correspondante.

Enfin, en réexprimant (4.31) en fonction de  $W_k$ , on trouve :

$$W_k = W^* + (I-2\mu R)^k (W_0 - W^*) \quad (4.35)$$

- Courbe d'apprentissage : c'est la courbe donnant l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre d'itérations.

D'après (4.25), l'EQM à l'étape k est donnée par :



$$\xi_k = \xi_{\min} + V_k^T \wedge V_k' \quad (4.36)$$

en remplaçant  $V_k'$  par sa valeur de l'éq.(4.32) on trouve :

$$\xi_k = \xi_{\min} + V_0^T (I - 2\mu \wedge)^{2k} \wedge V_0' \quad (4.37)$$

$$\xi_k = \xi_{\min} + \sum_{n=1}^M V_{on}^2 \lambda_n (1 - 2\mu \lambda_n)^{2k}$$

on voit que la courbe d'apprentissage de l'algorithme du gradient décroît suivant une somme de progressions géométriques de raisons :

$$r_n = (1 - 2\mu \lambda_n)^2 \quad (4.38)$$

De plus on remarque que si la condition (4.34) est satisfaite, alors

$$\xi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \xi_{\min}$$

#### IV.5- Algorithme LMS (Least Mean squares)

En pratique on ne peut avoir la valeur exacte de la matrice d'autocorrélation et donc du gradient  $\nabla_{W_k}$  à l'instant  $k$ ; on utilise alors une estimation de ce dernier qui fournit au début de l'adaptation de mauvais résultats, mais ils deviennent au cours du temps de plus en plus satisfaisants.

L'algorithme LMS est donc issu directement de l'algorithme du gradient, en prenant  $\epsilon_k^2$  comme une estimation de  $\xi_k$  donc à chaque itération, le gradient est estimé par :

$$\hat{\nabla}_{W_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \epsilon_k^2}{\partial w_1} \\ \frac{\partial \epsilon_k^2}{\partial w_M} \end{pmatrix} = 2\epsilon_k \begin{pmatrix} \frac{\partial \epsilon_k}{\partial w_1} \\ \frac{\partial \epsilon_k}{\partial w_M} \end{pmatrix} = -2\epsilon_k X_k \quad (4.39)$$

$$\text{on remarque que } E(\hat{\nabla}_{W_k}) = -2E(X_k X_k^T W_k) \quad (4.40)$$

$$E(\hat{\nabla}_{W_k}) = 2(RW_k - P) = \nabla_{W_k}$$

donc  $\hat{\nabla}_{W_k}$  est une estimation non biaisée [5] de  $\nabla_{W_k}$ .

L'algorithme LMS est donc donné par :

$$\begin{aligned} W_{k+1} &= W_k - \mu \hat{\nabla}_k \\ &= W_k + 2\mu \varepsilon_k X_k \end{aligned} \quad (4.41)$$

Puisque la mise à jour du vecteur poids se fait par une estimation bruitée du gradient, on s'attend à ce que le processus adaptatif soit bruite.

Par sa forme donnée en (4.41), l'algorithme LMS peut être implémenté sans élévation au carré, sans moyennage ni différentiation, il est donc élégant par sa simplicité et son efficacité pratique. Il nécessite environ 2M opérations de multiplications par itération.

- Condition de convergence [17] :

On remarque de (4.41) que le vecteur poids  $W_k$  dépend des vecteurs d'entrée  $X_{k-1}, X_{k-2}, \dots, X_0$ .

On suppose que les vecteurs d'entrées sont indépendants dans le temps :

$$E(X_j X_{j+k}^T) = 0 \quad \text{pour } k \neq 0 \quad (4.42)$$

alors on peut dire que  $W_k$  est indépendant de  $X_k$ .

Prenant la moyenne statistique des deux membres de (4.41), on aura :

$$E(W_{k+1}) = E(W_k) + 2\mu (E(d_k X_k) - E(X_k X_k^T W_k)) \quad (4.43)$$

en utilisant l'hypothèse précédente on trouve :

$$E(W_{k+1}) = E(W_k) + 2\mu (P - R E(W_k)) \quad (4.44)$$

ou d'une autre façon :

$$E(W_{k+1}) = (1 - 2\mu R) E(W_k) + 2\mu R W^* \quad (4.45)$$

Cette équation n'est rien d'autre que la forme moyennée de l'équation (4.30).

En effectuant les mêmes opérations faites pour l'algorithme du gradient, on trouve :

$$E(V_k) = (1 - 2\mu\Lambda)^k V_0 \quad (4.46)$$

Donc après un nombre suffisant d'itérations, la moyenne du vecteur poids  $E(W_k)$  converge vers la solution optimale de Wiener. La condition nécessaire est suffisante pour la convergence de l'algorithme LMS est donnée par (4.34) :

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}}$$

Cependant, vu que les valeurs propres de la matrice  $R$  ne sont pas disponibles en général, on ne peut donc à priori choisir  $\mu$ . Une solution est l'utilisation d'une borne supérieure de  $\lambda_{\max}$ , soit donc :

$$\lambda_{\max} \leq \text{Tr}(\Lambda) = \text{Tr}(R) = M \sigma_x^2 \quad (4.47)$$

où  $\text{Tr}(\cdot)$  est la trace de la matrice et  $\sigma_x^2$  est la puissance moyenne du signal d'entrée  $x_k$ .

On obtient donc une condition suffisante de convergence donnée par :

$$0 < \mu < \frac{1}{M \sigma_x^2} \quad (4.48)$$

C'est une condition sévère, mais facile à appliquer car l'estimation de la puissance du signal est beaucoup plus simple que l'estimation de  $\lambda_{\max}$  qui nécessite l'estimation de  $R$ .

#### - Courbe d'apprentissage :

La convergence des deux algorithmes, le gradient et le LMS est régie par les mêmes conditions. Cependant d'après (4.46), celle-ci n'est

observée qu'en moyenne pour l'algorithme LMS; c'est-à-dire qu'il faut répéter plusieurs fois la même procédure avec des conditions initiales différentes et des réalisations différentes et prendre comme résultat la moyenne des résultats obtenus. La courbe d'apprentissage ainsi tracée décroît suivant  $M$  raisons géométriques de la forme :

$$(r_n) = (1 - 2\mu\lambda_n)^2 = n = 1, \dots, M$$

La forme de la courbe d'apprentissage est donc approximativement celle d'une somme d'exponentielles décroissantes. Évaluons la constante de

temps de chaque exponentielle, donnée sous la forme  $\exp\left[-\frac{k}{\tau_n}\right]$

on aura donc

$$e^{-\frac{1}{\tau_n}} = r_n = (1 - 2\mu\lambda_n)^2 \cong 1 - 4\mu\lambda_n \quad (4.49)$$

or  $e^{-\frac{1}{\tau_n}} = 1 - \frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{2! \tau_n^2} + \dots$

$\tau_n$  est élevé en pratique donc :

$$\tau_n = \frac{1}{4\mu\lambda_n} \quad (4.50)$$

La courbe d'apprentissage décroît donc suivant une somme d'exponentielles ayant chacune une constante de temps égale à  $\frac{1}{4\mu\lambda_n}$ . En prenant

$$\lambda_{\text{moy}} = \frac{\sum \lambda_i}{M} = \frac{\text{Tr}(R)}{M} = \sigma_x^2 \quad (4.51)$$

on aura une expression de la constante de temps moyenne de la courbe d'apprentissage :

$$\tau_{\text{moy}} = \frac{1}{4\mu\lambda_{\text{moy}}} = \frac{1}{4\mu\sigma_x^2} \quad (4.52)$$

on remarque que :

$$\frac{1}{4\mu\lambda_{\text{max}}} < \tau_{\text{moy}} < \frac{1}{4\mu\lambda_{\text{min}}} \quad (4.53)$$

Donc la vitesse de convergence de l'algorithme dépend de la dispersion des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation.

- Erreur résiduelle :

L'estimation bruitée du gradient fait que le vecteur poids ne converge pas vers le minimum  $W^*$  mais varie d'une façon aléatoire autour de celui-ci, ce qui produit un excès en erreur quadratique moyenne appelé erreur résiduelle et définie par :

$$\text{Excès (EQM)} = E(\xi_k - \xi_{\min}) = E(V_k^T \wedge V_k') \quad (4.54)$$

si on suppose que l'étape d'adaptation s'est écroulée on trouve [17].

$$\text{Excès (EQM)} = \mu \xi_{\min} \sum_{n=1}^M \lambda_n = \mu \xi_{\min} \text{Tr} (R) \quad (4.55)$$

on définit l'erreur résiduelle relative  $m$  (misadjustement) par [18] :

$$m = \frac{\text{Excès (EQM)}}{\xi_{\min}} = \mu \text{Tr} (R) \quad (4.56)$$

En ce exprimant  $m$  en fonction de la vitesse de convergence de l'algorithme, on trouve :

$$m = \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{\tau_{\text{moy}}} \quad (4.57)$$

Cette relation est très importante, car elle relie l'erreur résiduelle relative à la constante de temps de la courbe d'apprentissage et au nombre de poids.

On remarque que pour une adaptation rapide ( $\mu$  élevé), l'erreur résiduelle est importante, mais elle devient de plus en plus faible, si l'adaptation se fait d'une manière assez lente ( $\mu$  faible).

En pratique, on choisit au départ une valeur importante pour  $\mu$  pour avoir une adaptation rapide, puis on prend un  $\mu$  faible pour minimiser l'erreur résiduelle. Cette procédure fournit comme on le verra au chapitre suivant de très bons résultats, mais elle reste valable seulement quand le processus est stationnaire.

- Remarque :

Pour démontrer la convergence de l'algorithme LMS, on a supposé l'indépendance dans le temps des vecteurs poids  $X_k$ ; quand cette condition n'est pas vérifiée et que les vecteurs sont corrélés, l'algorithme LMS converge et fournit de bons résultats à condition que celle-ci c'est-à-dire la corrélation ne soit pas trop forte [19]. Enfin, l'algorithme LMS se résume comme suit :

1- Initiatisation

- $W_0 = 0$  initialisation du vecteur poids
- Choisir  $\mu$  tel que  $0 < \mu < \frac{1}{M \sigma^2}$

2- A chaque itération  $K = 0, 1, 2, \dots$  on calcule

$$e_k = d_k - W_k^T X_k$$

$$W_{k+1} = W_k + 2\mu X_k e_k$$

Comportement de l'algorithme LMS dans un environnement non stationnaire

Toute l'analyse développée précédemment est basée sur la stationnarité des signaux. Le processus adaptatif consiste alors à commencer en un point quelconque de la courbe donnant  $\xi$  (voir par exemple fig III.2) et descendre à chaque itération jusqu'à atteindre le minimum et s'y installer.

Cependant si le processus adaptatif opérait dans un environnement non stationnaire, la courbe de la fig IV.2 se déplacerait avec son minimum dans son système de coordonnées, et l'algorithme adaptatif aura non seulement pour tâche de descendre jusqu'au minimum mais aussi de le poursuivre quand il se déplace [20].

Ce qu'on peut noter, c'est que même si on opère dans un environnement non stationnaire, l'algorithme LMS aura toujours tendance à poursuivre ce minimum. Toutefois, la convergence se fait vers une valeur supérieure à la valeur minimale et cela est dû à l'erreur résiduelle relative  $m$  qui n'est plus une fonction linéaire de  $\mu$  comme on l'a vu précédemment mais une somme de deux erreurs résiduelle relative

$m_1 + m_2$ ;  $m_1$  est due à l'estimation du gradient par  $-2e_j X_j$  qui est une fonction linéaire de  $\mu$  et  $m_2$  est due à la non stationnarité qui est en générale une fonction inconnue de  $\mu$  [18].

Notons que si on utilise l'algorithme LMS pour l'identification d'un système du même ordre que le filtre adaptatif et dont les coefficients variants dans le temps sont issus d'un processus de Markov du 1<sup>er</sup> ordre, la fonction donnant l'erreur résiduelle relative en fonction de  $\mu$  présente un minimum (fig IV.3), il faudra donc choisir  $\mu$  très proche de la valeur qui donne le minimum et il n'y a pas de méthode générale permettant un tel choix [18,21].

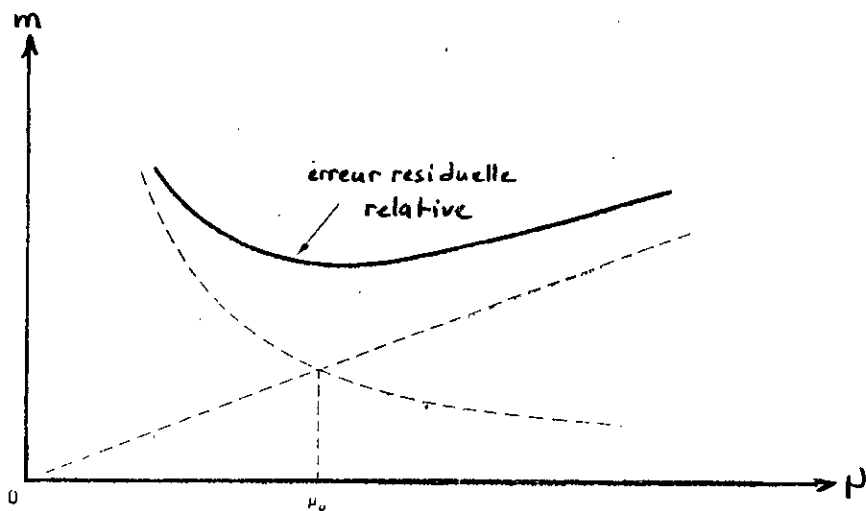


Fig. IV.3 Erreur résiduelle relative totale

#### IV.6- Filtre rejeteur adaptatif [14]:

Quand l'entrée de référence de l'annuleur de bruit (voir fig III.1) ne contient que des interférences sinusoidales, l'estimation bruitée faite sur le gradient fait que le filtre rejeteur obtenu après adaptation à une certaine bande de rejection et présente à la sortie de l'annuleur des harmoniques des fréquences d'interférences. Cette partie du chapitre sera donc consacrée à l'étude des caractéristiques de ce filtre.

**IV.6.1- Une seule sinusoïde à l'entrée de référence :**

La fig (IV.4.a) montre un annuleur du bruit adaptatif dont l'entrée  $x_k$  est donnée par :

$$x_k = D \cos(\omega_0 k T_0 + \theta) \tag{4.58}$$

avec  $\omega_0 = 2\pi f_0$ .

Notre but est de démontrer que le bloc en pointillé peut être approximé, si certaines conditions sont vérifiées, par un filtre  $G(z)$  linéaire invariant dans le temps dont l'entrée est  $\varepsilon_k$  et la sortie est  $y_k$  (fig IV.4.b).

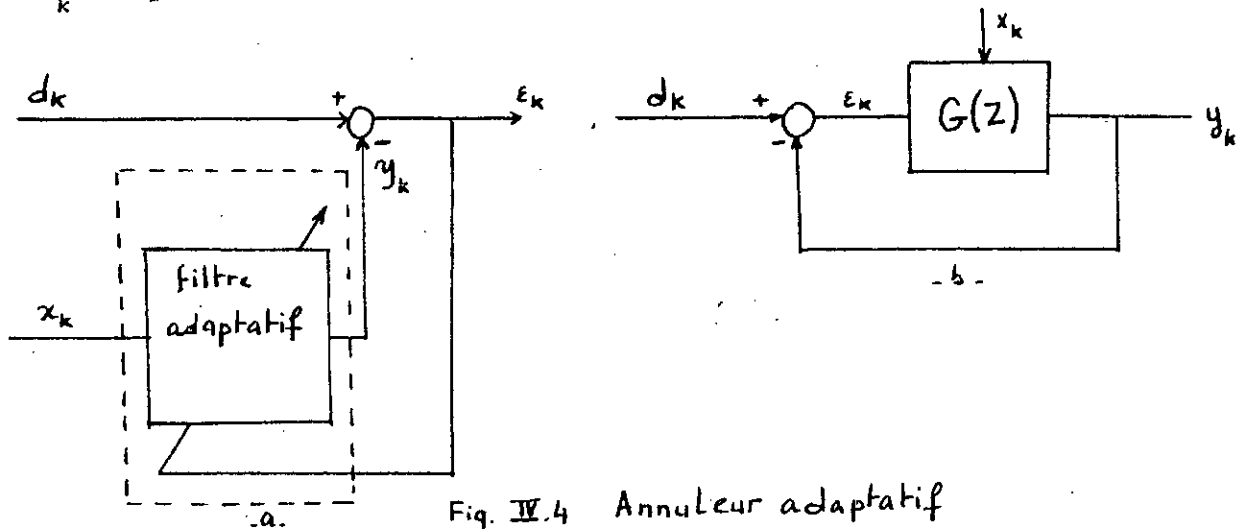


Fig. IV.4 Annuleur adaptatif  
 a. Bloc diagramme      b. Fonction de transfert

Calculant alors la transformée en z de la sortie,  $Y(z)$ , en fonction de celle de l'entrée  $E(z)$  [5].

On a tout d'abord

$$E(z) = Z(\varepsilon_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k z^{-k} \tag{4.59}$$

La fig (IV.5) montre le diagramme bloc de l'annuleur du bruit adaptatif utilisant l'algorithme LMS.

en prenant les notations suivantes :

$$z' = z e^{j\omega_0 T_0}, \quad z'^{-1} = z e^{-j\omega_0 T_0}$$

$$z'' = z e^{2j\omega_0 T_0}, \quad z''^{-1} = z e^{-2j\omega_0 T_0}$$



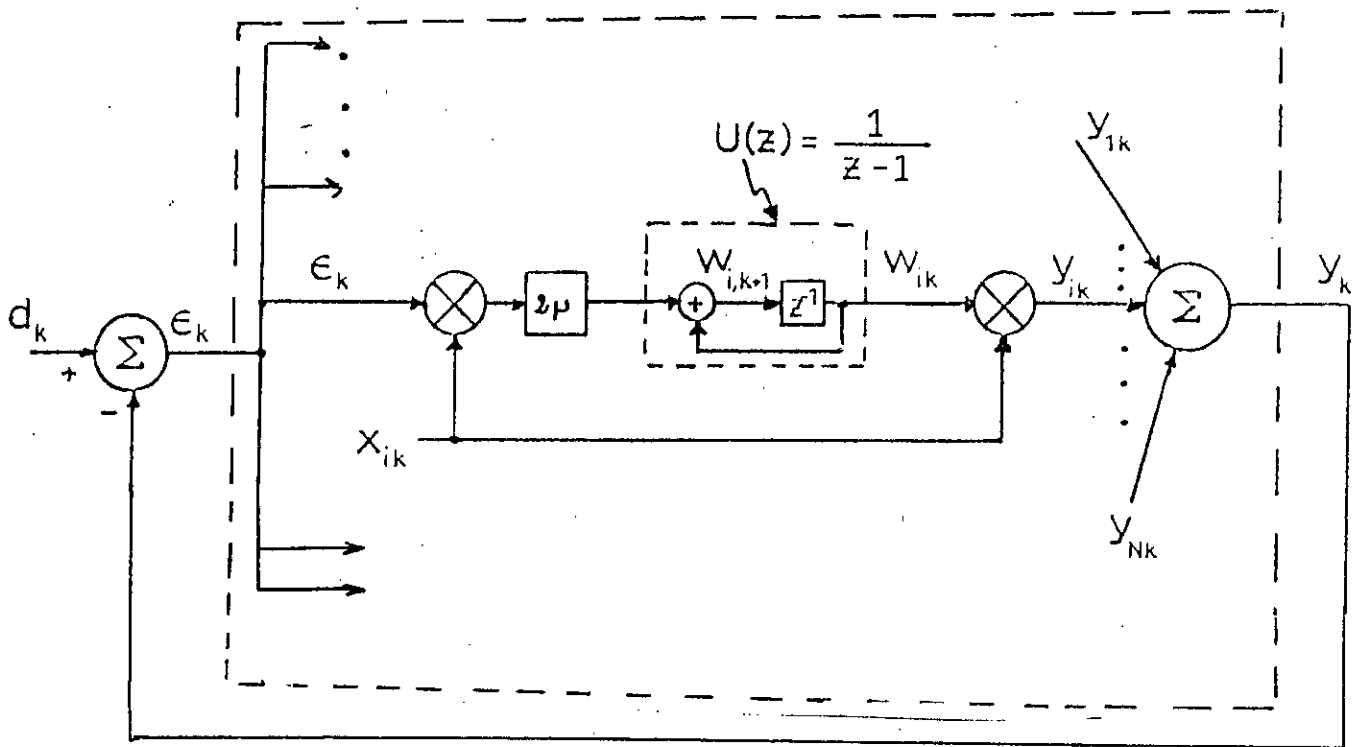


Fig. IV.5 Annuleur adaptatif utilisant l'algorithme LMS

On trouve (voir annexe B) :

$$Y(z) = Y_{IT}(z) + Y_{VT}(z) \quad (4.60)$$

$$\text{où } Y_{IT}(z) = \frac{\mu\mu C^2}{2} E(z) (u(z'^{-}) + u(z')) \quad (4.61.a)$$

$$Y_{VT}(z) = \frac{\mu C^2}{2} \left\{ u(z'^{-}) E(z''^{-}) \sum_{l=1}^M e^{2j\theta_l} + u(z') E(z'' ) \sum_{l=1}^M e^{-2j\theta_l} \right\} \quad (4.61.b)$$

$Y_{IT}(z)$  est la partie de  $Y(z)$  invariante dans le temps (IT) puisque dans (4.61.a) apparaissent seulement les fréquences de  $E(z)$ ;  $Y_{VT}(z)$  quant à elle, est la partie variante dans le temps (VT), elle introduit les harmoniques de  $E(z)$  qui sont  $E(z'')$  et  $E(z''^{-})$ , ceci est illustré à la (fig.IV.6) où  $G(z)$  est la fonction de transfert invariante dans le temps et  $G_{VT}(z)$  est celle variante dans le temps et donc non désirée.

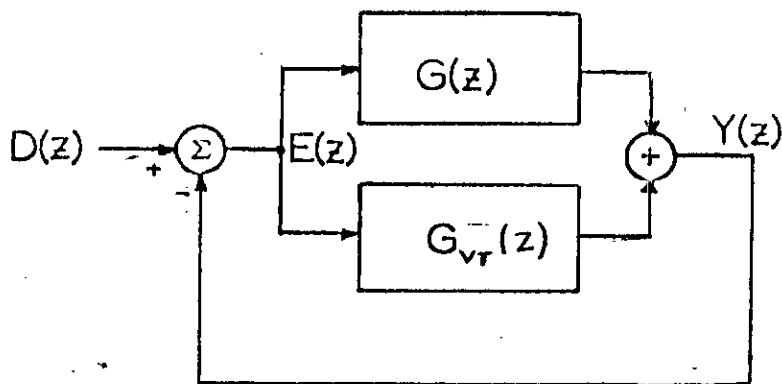


Fig.IV.6 Introduction d'harmoniques

Les calculs développés en annexe C montrent que

$$\sum_{i=1}^M e^{2j\theta i} = \alpha(\theta, -\omega_0 T_e, M) \beta(\omega_0 T_e, M) \quad (4.62)$$

$$\sum_{i=1}^M e^{-2j\theta i} = \alpha(-\theta, \omega_0 T_e, M) \beta(\omega_0 T_e, M)$$

où

$$\alpha(\theta, \omega_0 T_e, M) = e^{2j\theta} e^{j\omega_0 T_e (M-1)}$$

$$\beta(\omega_0 T_e, M) = \frac{\sin(M\omega_0 T_e)}{\sin(\omega_0 T_e)} \quad (4.63)$$

Le produit  $\alpha \cdot \beta$  est un nombre complexe dont  $\beta$  est l'amplitude ( $\beta$  réel) et  $\alpha$  est l'angle ( $|\alpha| = 1$ )

L'expression de  $Y(z)$  devient alors :

$$Y(z) = \frac{M\mu C^2}{2} E(z) (u(z') + u(z''))$$

$$+ \frac{\mu C^2}{2} E(z'') u(z'') \alpha(\theta, -\omega_0 T_e, M) \beta(\omega_0 T_e, M) \quad (4.64)$$

$$+ \frac{\mu C^2}{2} E(z') u(z') \alpha(-\theta, \omega_0 T_e, M) \beta(\omega_0 T_e, M)$$

D'après (4.64), on peut voir que si le rapport  $\beta(\omega_0 T_e, M)/M$  est très inférieur devant l'unité les composantes VT sont négligeables devant les composantes IT. Plus exactement si  $\beta/M = 0$ ,  $Y(z)$  se réduit à  $Y_{IT}(z)$ .

La fig (IV.7) montre la fonction  $\beta/M$  pour plusieurs valeurs de  $M$ . On voit que tant que  $f_0 T_0$  n'est pas trop proche de "0" ni de "0,5", il y aura plusieurs points pour lesquels  $\beta/M \cong 0$ .

Vu que la fonction  $\beta/M$  présente  $(M-1)$  zéros localisés en

$$f_i T_0 = \frac{i}{2M} \quad i=1, \dots, (M-1) \quad (4.65)$$

alors quand  $M$  augmente, les zéros de  $(\beta/M)$  deviennent plus nombreux ce qui offre la possibilité d'avoir  $\beta/M \cong 0$ .

La fonction de transfert de  $E(z)$  à  $Y(z)$  peut alors être approximée par un filtre linéaire invariant dans le temps :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{M\mu C^2}{2} \frac{2(z \cos \omega_0 T_0 - 1)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T_0 + 1} \quad (4.66)$$

La fig (IV.8) montre la réponse fréquentielle  $G(e^{j\omega T_0})$  :

- Réponse du filtre réjecteur :

La fonction de transfert de l'annuleur est celle donnant  $E(z)$  à partir de  $D(z)$  notée  $H(z)$  :

$$H(z) = \frac{E(z)}{D(z)} = \frac{E(z)}{Y(z) + E(z)} = \frac{1}{1 + G(z)} \quad (4.67)$$

d'après (4.66).

$$H(z) = \frac{z^2 - 2z \cos \omega_0 T_0 + 1}{z^2 - (1 - \frac{M\mu C^2}{2})z \cos \omega_0 T_0 + (1 - M\mu C^2)} \quad (4.68)$$

$H(z)$  a deux zéros localisés sur le cercle unité et donnés par

$$z = e^{\pm j\omega_0 T_0} \quad (4.69)$$

quant aux pôles ils sont donnés par :

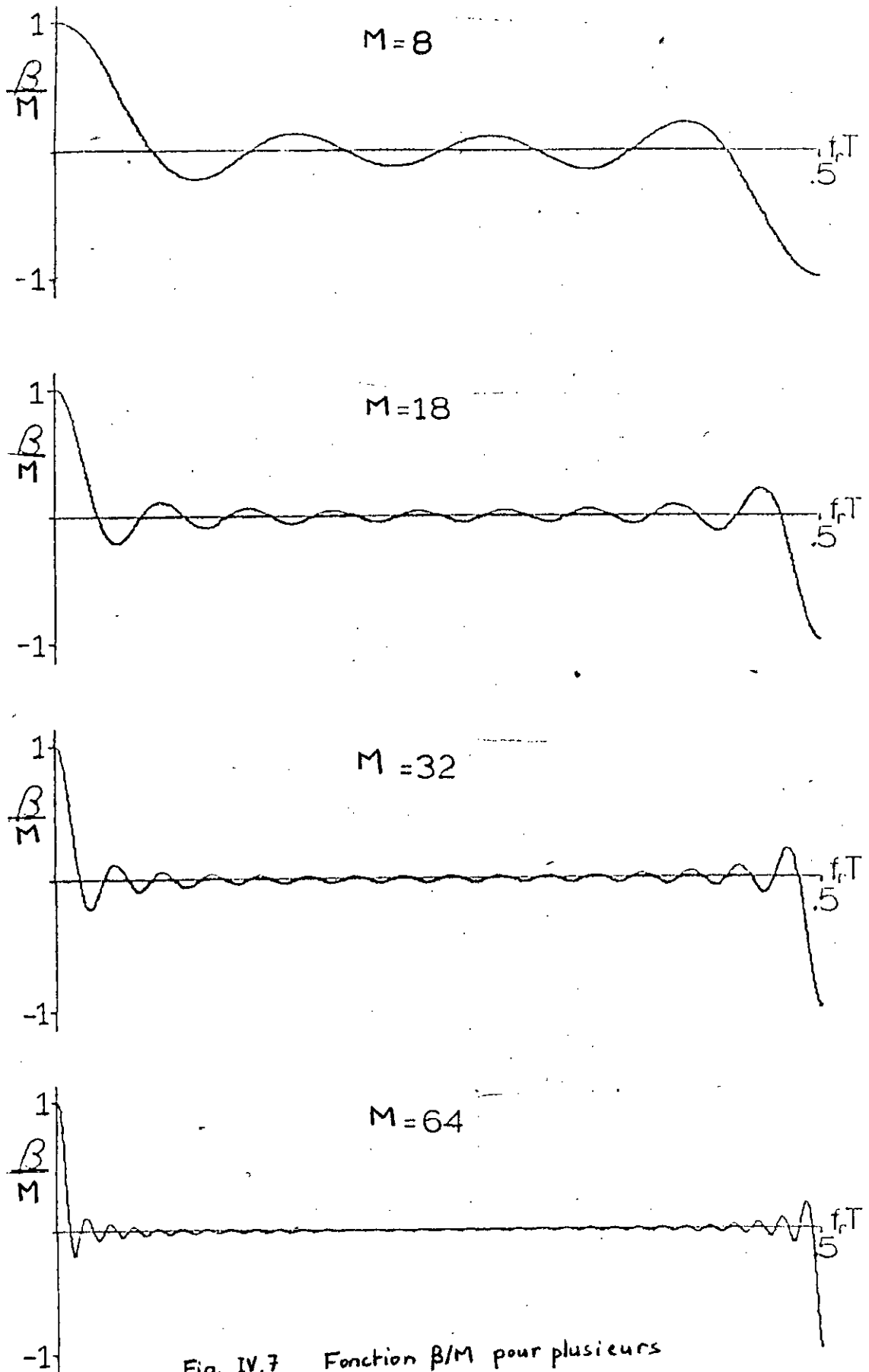


Fig. IV.7 Fonction  $\beta/M$  pour plusieurs valeurs de  $M$

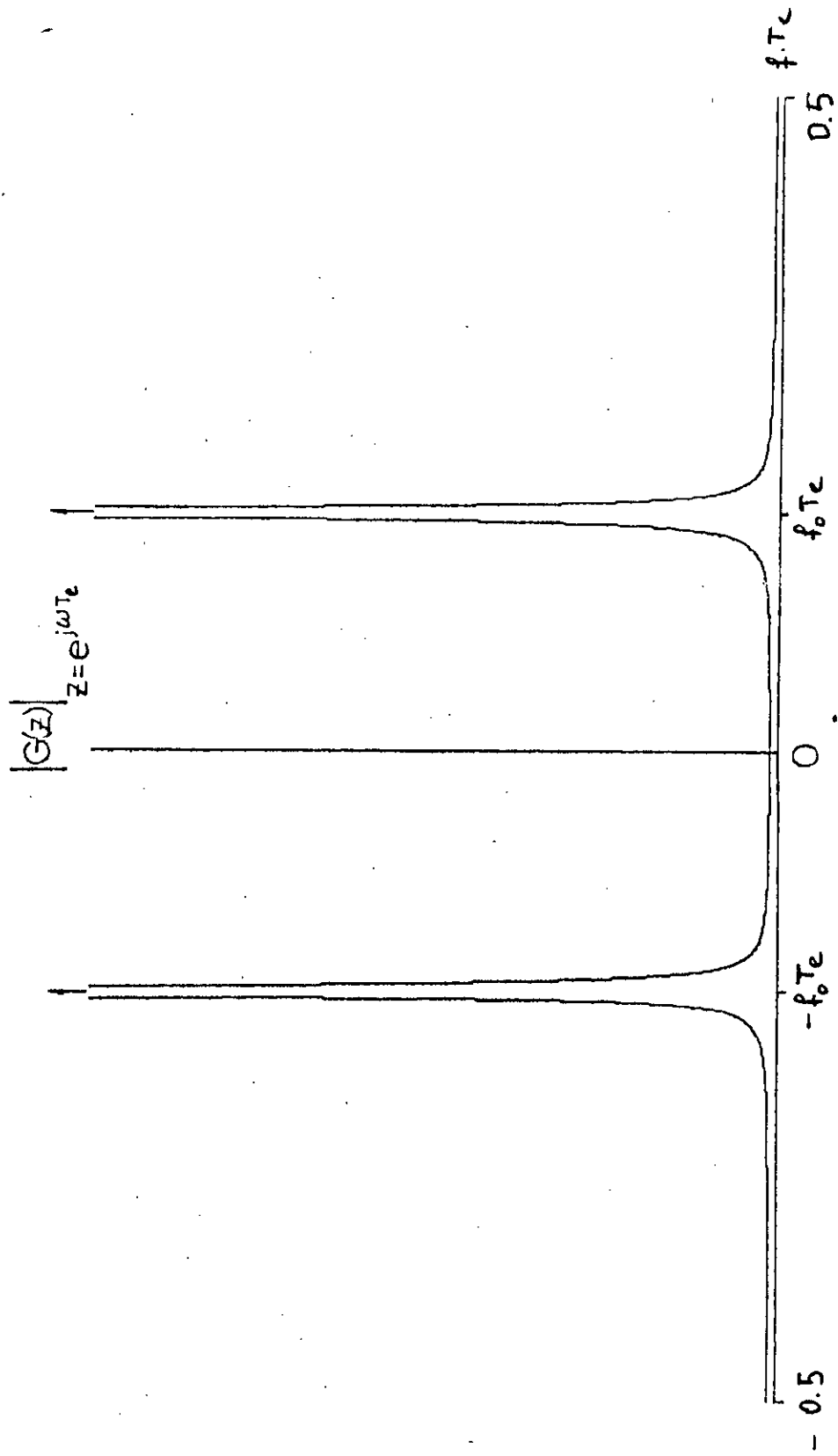


Fig. IV.8 Réponse fréquentielle

$$z = \left(1 - M\mu \frac{C^2}{2}\right) \cos \omega_0 T_0 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{M\mu C^2}{2}\right)^2 \cos^2 \omega_0 T_0 - (1 - M\mu C^2)} \quad (4.70)$$

Pour une adaptation lente  $M\mu C^2 \ll 1$ , les pôles sont donc localisés aux points :

$$z \cong \left(1 - \frac{M\mu C^2}{2}\right) e^{\pm j \omega_0 T_0} \quad (4.71)$$

D'après ce qu'on a vu chapitre II, le filtre ainsi obtenu est un filtre rejeteur ayant une réjection localisée à  $f_0 T_0$  et une bande de réjection normalisée égale à :

$$\frac{\Delta f_0}{f_0} = \frac{M\mu C^2}{2\pi} \quad (4.72)$$

Donc pour avoir une bande de réjection faible il faut diminuer  $M$  ce qui rend important l'influence des termes  $VT$  ou diminuer  $\mu$  ce qui rend l'adaptation lente, il faut donc faire un compromis.

#### IV.6.2- Extention à une somme de sinusoides à l'entrée de référence :

Si l'entrée de référence consiste en une somme de sinusoides de fréquences  $f_1, \dots, f_p$ , alors :

$$x_K = \sum_{m=1}^p C_m \cos(\omega_m k T_0 + \theta_m) \quad (4.73)$$

avec

$$\omega_m = 2\pi f_m, \quad m = 1, \dots, p$$

donc la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur d'entrée  $X_K$  est donnée par :

$$x_{ik} = \sum_{m=1}^p C_m \cos(\omega_m (k-i+1) T_0 + \theta_m) = \sum_{m=1}^p C_m \cos(\omega_m k T_0 + \theta_{im}) \quad (4.74)$$

$$\text{avec } \theta_{im} = \theta_m - (i-1) \omega_m T_0 \quad (4.74)$$

En procédant de la même manière que précédemment et en prenant les notations suivantes :

$$z_m = z e^{jv_m T_0}, \quad z_{-m} = z e^{-jv_m T_0}$$

$$z_{\pm m \pm n} = z e^{j(\pm v_m \pm v_n)}, \quad w_{\pm m \pm n} = \pm v_m \pm v_n$$

$$\theta_{\pm m \pm n} = \pm \theta_m \pm \theta_n$$

on trouve :

$$Y(z) = Y_{IT}(z) + Y_{VTD}(z) + Y_{VTS}(z) \quad (4.75)$$

avec

$$Y_{IT}(z) = \frac{M\mu}{2} \sum_{m=1}^P C_m^2 E(z) (u(z_m) + u(z_{-m})) \quad (4.76)$$

$$Y_{VTD}(z) = \sum_{m=1}^P \sum_{\substack{n=1 \\ m \neq n}}^P \frac{\mu C_m C_n}{2} \left\{ u(z_{-n}) E(z_{m-n}) \alpha(-\theta_{m-n}, w_{m-n}, \frac{T_0}{2}, M) \right. \\ \left. + u(z_n) E(z_{n-m}) \alpha(\theta_{m-n}, -w_{m-n}, \frac{T_0}{2}, M) \right\} \beta(w_{m-n}, \frac{T_0}{2}, M) \quad (4.77)$$

$$Y_{VTS}(z) = \sum_{m=1}^P \sum_{n=1}^P \frac{\mu C_m C_n}{2} \left\{ u(z_{-n}) E(z_{-m-n}) \alpha(\theta_{m+n}, -w_{m+n}, \frac{T_0}{2}, M) \right. \\ \left. + u(z_n) E(z_{m+n}) \alpha(-\theta_{m+n}, w_{m+n}, \frac{T_0}{2}, M) \right\} \beta(w_{m+n}, \frac{T_0}{2}, M) \quad (4.78)$$

La sortie  $Y(z)$  consiste en une portion IT soit  $Y_{IT}(z)$  plus un nombre de termes VT résultants d'une multiplication de fréquence et fournissant donc des composantes différences de fréquences  $Y_{VTD}(z)$  et somme de fréquences  $Y_{VTS}(z)$ .

**Filtre réjecteur multiple :**

En supposant que dans (4.77) et (4.78), chacune des fonctions  $\beta/M \cong 0$ ;  
La fonction de transfert  $G(z)$  sera donnée par [14].

$$G(z) = \frac{M\mu}{2} \sum_{m=1}^P C_m^2 E(z) (u(z_m) + u(z_{-m})) \quad (4.79)$$

La fonction de transfert  $H(z)$  de  $D(z)$  à  $E(z)$  sera :

$$H(z) = \frac{1}{1 + \hat{G}(z)} = \frac{1}{1 + \frac{M\mu}{2} \sum_{m=1}^P C_m^2 (u(z_m) + u(z_{-m}))} \quad (4.80)$$

$H(z)$  est donc la fonction de transfert d'un filtre réjecteur multiple, dont les réjections sont localisées aux fréquences  $f_1, f_2, \dots, f_p$  et dont la bande de réjection correspondante à chaque fréquence  $f_m$  est donnée par [14]

$$\frac{\Delta f_m}{f_0} = \frac{M\mu C_m^2}{2\pi} \quad (4.81)$$

#### IV.6.3- Effet des composantes variantes dans le temps :

##### - Une seule sinusoïde :

Quand les paramètres  $f_0, T_0$  et  $M$  ne sont pas tels que l'on peut supposer que  $\beta/M \cong 0$ , des harmoniques non négligeables de la fréquence d'interférence sont introduits à la sortie, et leur contribution est donnée par :

$$\alpha(\theta, -\omega_0 T_0, M) \beta(\omega_0 T_0, M) \frac{\mu C^2}{2} u(z e^{-j\nu_0 T_0}) E(z e^{-2j\nu_0 T_0}) \\ + \alpha(-\theta, \omega_0 T_0, M) \beta(\omega_0 T_0, M) \frac{\mu C^2}{2} u(z e^{j\nu_0 T_0}) E(z e^{2j\nu_0 T_0})$$

Les harmoniques introduits sont  $E(z e^{\pm 2j\nu_0 T_0})$  filtrés à travers

$$u(z e^{\pm j\nu_0 T_0}).$$

Considérant un point du cercle unité représentant  $E(z)$  dans le plan  $z$  et localisé à la fréquence  $\pm \omega_d$  proche de  $\pm \omega_0$  (fig IV.9).

Intéressons-nous seulement aux fréquences positives; l'effet de la

double rotation dans  $E(z e^{-2j\nu_0 T_0})$  est la rotation du point A et A' en B et B' respectivement.

L'effet du filtrage à travers  $u(z e^{-j\nu_0 T_0})$  fait que le point B est beaucoup plus atténué que le point B' qui est très proche de  $\omega_0$ .



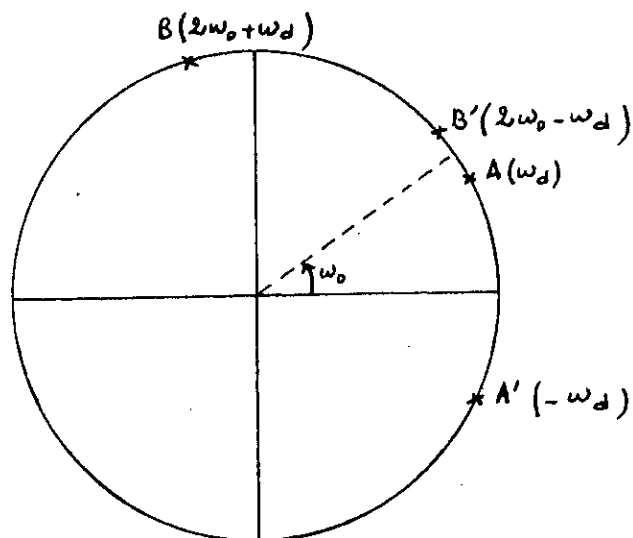


Fig. IV. 9 Localisation des harmoniques par rapport à  $f_0$ .

La fig. IV.10 a et b montre la contribution des composantes IT et VT.

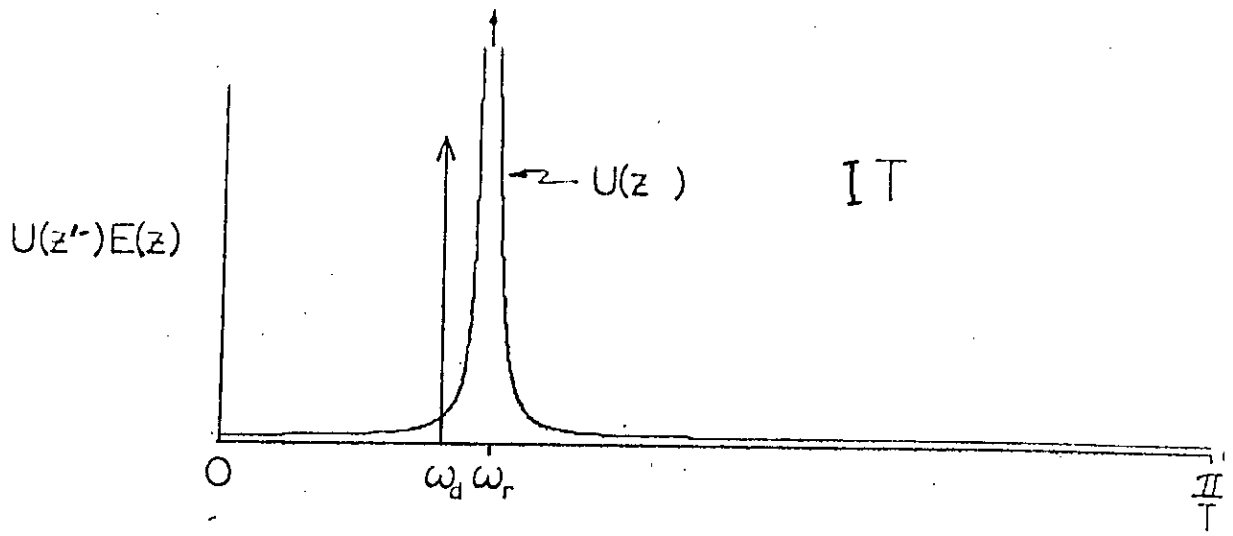
Pour réduire les harmoniques on doit avoir  $\beta/M \cong 0$  on peut soit jouer sur la fréquence d'échantillonnage de telle façon à avoir  $f_0/f_s$  entre 0 et 0,5 et assurant l'approximation voulue ou augmenter l'ordre M du filtre.

- Une somme de sinusoides :

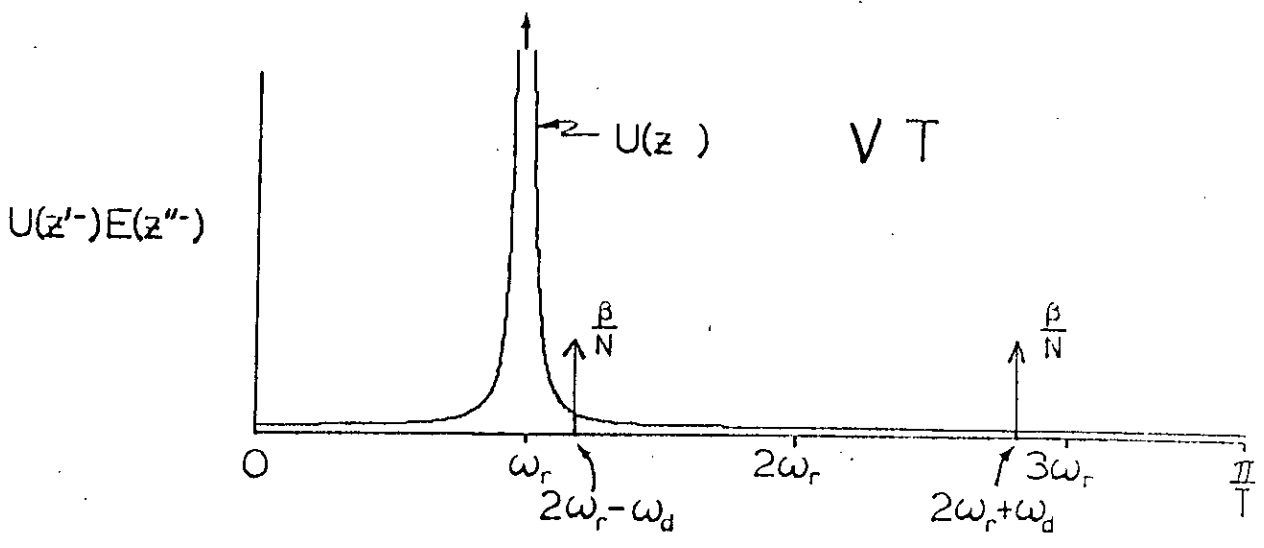
Les harmoniques introduits dans ce cas sont donnés par (4.77) et (4.78). Si les fonctions  $\beta/M$  ne sont pas proches de zéro, il y a introduction d'harmoniques dus à la somme et à la différence des fréquences.

Pour les harmoniques dus à la somme des fréquences (4.78), ils peuvent être traités de la même façon que dans le cas, où on avait une seule sinusoïde d'interférence. Pour  $m=n$  dans (4.78) on a exactement les mêmes harmoniques.

Pour les harmoniques dus à la différence des fréquences, l'analyse peut être faite de la façon suivante. Prenant le cas de deux fréquences  $f_m$  et  $f_n$  à l'entrée de référence et la fréquence  $f_d$  à l'entrée  $E(z)$  (voir fig IV.6). En ne considérant que les fréquences positives, on aura comme le montre la fig IV.11 des harmoniques de chaque côté de  $f_d$  à une distance égale à  $(f_n - f_m)$ .



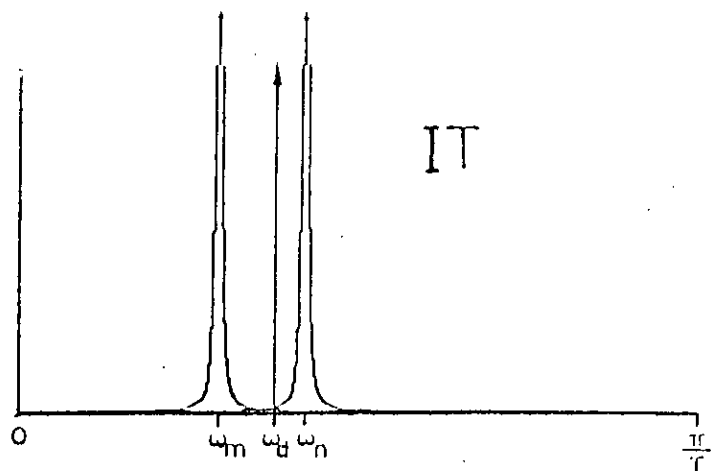
(a)



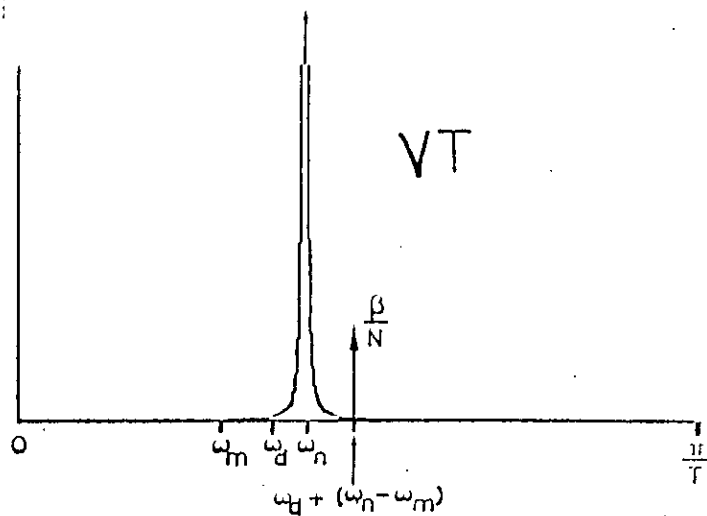
(b)

Fig. IV. 10 Contribution des composantes IT et VT.

$U(z_{-m})E(z)$   
 $U(z_{-n})E(z)$



$U(z_{-n})E(z_{m-n})$



$U(z_{-m})E(z_{n-m})$

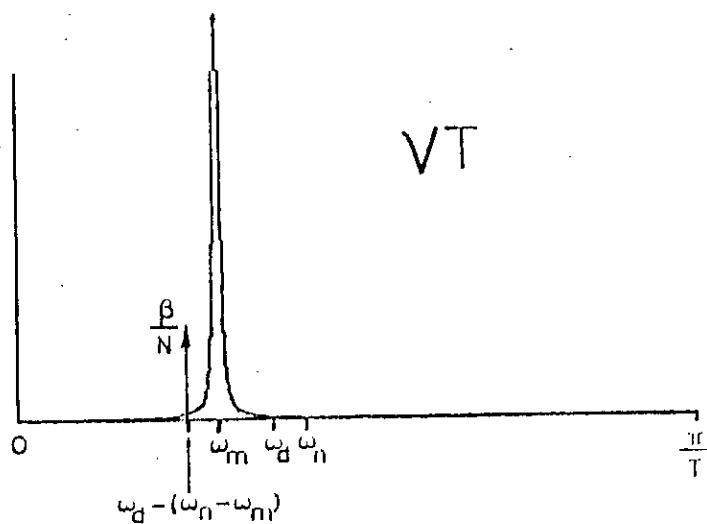


Fig. IV. 11 Contribution des termes IT et VT dans le cas de deux sinusoïdes à l'entrée de référence.

On a vu précédemment que l'on pouvait choisir une fréquence d'échantillonnage adéquate de manière à avoir  $\beta/M \cong 0$ , cependant cette solution ne reste plus utilisable si on a plusieurs sinusoides à l'entrée de référence. En effet, si  $f_m$  et  $f_n$  sont très proche l'une de l'autre, il faudra choisir une fréquence d'échantillonnage assez élevée de manière à avoir

$\left[ \frac{f_m - f_n}{2} \right] T_e$  assez loin de zéro, cependant ceci va rendre la fréquence

$\left[ \frac{f_m + f_n}{2} \right] T_e$  très proche de 0,5 ce qui augmente la valeur de la fonction  $\beta\left( \frac{\omega_m + \omega_n}{2} T_e, M \right)$  et vice-versa.

Donc le seul moyen de réduire les harmoniques dû à la somme et à la différence de fréquences est d'augmenter l'ordre  $M$  du filtre.

#### IV.6.4- Filtre réjecteur adaptatif à deux poids :

La fig.12 montre la fonction  $\beta/M$  dans le cas où  $M=2$

On voit que cette fonction présente un seul zéro localisé à la fréquence normalisée 0,25, donc, si on utilise un annuleur ayant un filtre à deux poids, il faudra s'assurer que  $f_0 T_e \cong \frac{1}{4}$ , il faut donc avoir une fréquence d'échantillonnage égale quatre fois la fréquence de la sinusoïde d'interférence, c'est une condition assez gênante car il se pourrait que le signal à l'entrée primaire ne permet pas un échantillonnage à cette fréquence.

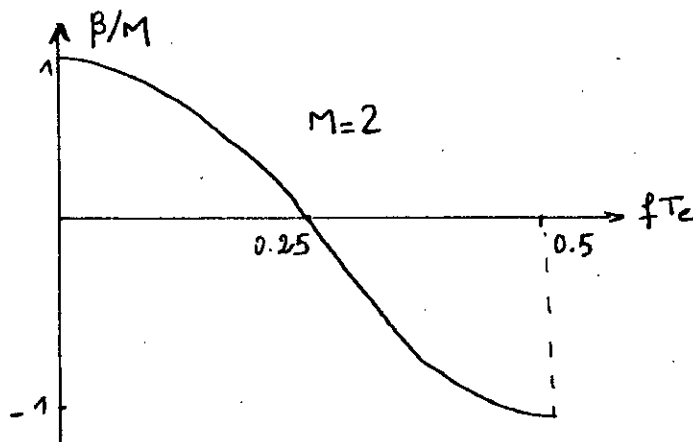


Fig. IV.12 Fonction  $\beta/M$  pour  $M=2$ .

La solution à ce problème est présentée à la fig IV.13.

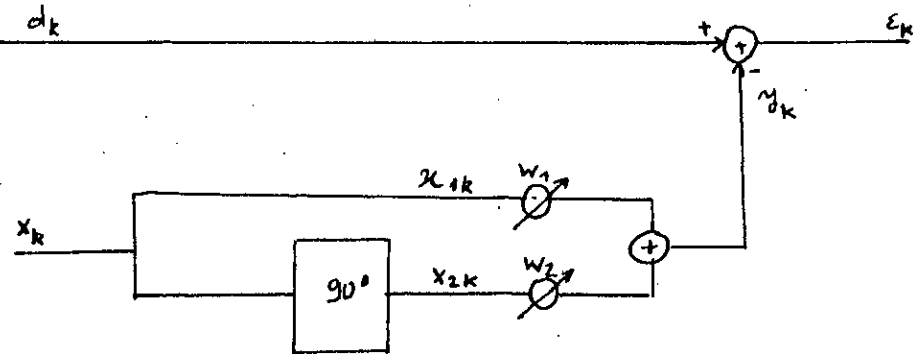


Fig IV.13 Implementation de L'annuleur avec dephasage à  $90^\circ$

on a :

$$\begin{aligned} x_{1k} &= C \cos (\omega_0 k T_0 + \theta) \\ x_{2k} &= C \cos (\omega_0 k T_0 + \theta - \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (4.82)$$

en utilisant la notation précédente on aura :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta \\ \theta_2 &= \theta - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La sortie  $Y(z)$  est donnée par l'équation (4.64), en remplaçant  $M$  par 2.

Mais vu que  $\sum_{i=1}^2 e^{\pm zj\theta_i} = 0$ , les termes  $V_i$  sont partout nuls et on

aura donc :

$$G(z) = \mu C^2 (u(z e^{-j\omega_0 T_0}) + u(z e^{+j\omega_0 T_0})) \quad (4.83)$$

Le filtre réjecteur obtenu a donc la réponse fréquentielle :

$$H(z) = \frac{z^2 - 2z \cos \omega_0 T_0 + 1}{z^2 - 2(1-\mu C^2) z \cos \omega_0 T_0 + (1-2\mu C^2)} \quad (4.84)$$

et présente une bande de rejection égale à :

$$\frac{\Delta f_o}{f_o} = \frac{\mu C^2}{\pi} \quad (4.85)$$

L'implémentation du filtre de la figure (IV.13) présente les meilleurs résultats car le filtre réjecteur à une bande de réjection qui est faible comparée à celle donnée par l'équation (4.72) et tout les termes VT sont nuls sans aucune condition, aucun harmonique n'est donc introduit.

**Remarque :**

La structure de la fig.IV.13 n'est utilisable que si l'entrée de référence contient une seule sinusoïde d'interférence, car si on utilise une entrée de référence donnée par :

$$x_k = \sum_{m=1}^P C_m \cos (\omega_m k T_o + \theta_m)$$

Y(z) sera donnée par (voir annexe D) :

$$Y(z) = \mu \sum_{m=1}^P C_m^2 E(z) (u(z_m) + u(z_{-m})) \quad (4.86)$$

$$+ \sum_{n=1} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}} \left\{ u(z_{-n}) E(z_{m-n}) e^{-j\theta_{m-n}} + u(z_n) E(z_{n-m}) e^{j\theta_{m-n}} \right\}$$

On aura donc des termes VT et par suite des harmoniques à la sortie Y(z), cependant il n'y a aucune procédure qui peut être utilisée pour les réduire.

**IV.7- Algorithme des moindres carrés recursifs (MCR)**

On se fixe comme objectif la minimisation par rapport à W de l'erreur quadratique définie par [18] :

$$\xi_k = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \varepsilon_i^2 \quad (4.87)$$

où  $\varepsilon_i$  est donnée comme précédemment par (voir (4.5))

$$e_i = d_i - Y_i = d_i - W_i^T X_i$$

$\lambda$  est un facteur de pondération appelé facteur d'oubli et vérifie

$$0 < \lambda \leq 1 \quad (4.88)$$

L'utilisation de ce facteur assure que les anciennes données sont oubliées dans le but d'offrir la possibilité de suivre les variations des statistiques des données observées quand le filtre opère dans un environnement non stationnaire. Pour  $\lambda = 1$ , l'environnement est stationnaire et on retrouve la méthode ordinaire (non pondérée) des moindres carrés; la quantité  $(1-\lambda)^{-1}$  est appelée mémoire de l'algorithme; pour  $\lambda = 1$  l'algorithme a une mémoire infinie.

La valeur optimale du vecteur poids peut être obtenue en écrivant

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial W_k} = 0$$

ce qui donne après dérivation l'équation normale [11,18]:

$$R_k W_k = P_k \quad (4.89)$$

$$\text{où } R_k = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} X_i X_i^T \quad (4.90)$$

$$P_k = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} X_i d_i \quad (4.91)$$

Isolant dans (4.90) le terme correspondant à  $i=k$  de la sommation, on trouve :

$$R_k = \lambda R_{k-1} + X_k X_k^T \quad (4.92)$$

C'est la récursion donnant la procédure de mise à jour de la matrice d'autocorrélation déterministe du signal  $x_k$ ;  $X_k X_k^T$  joue donc le rôle d'un terme de correction.

D'une façon similaire, on utilise l'équation (4.91) pour trouver :

$$P_k = \lambda P_{k-1} + X_k d_k \quad (4.93)$$

Pour le calcul de l'estimateur en moindres carrés  $W_k$  du vecteur poids, d'après (4.89), on doit déterminer l'inverse de la matrice d'autocorrélation  $R_k$ . En pratique, on essaie toujours d'éviter une telle opération car elle prend beaucoup de temps surtout si l'ordre  $M$  du filtre est élevé. On doit aussi pouvoir calculer  $W_k$  récursivement pour  $k = 1, 2, \dots, \infty$ . On peut réaliser ces deux objectifs en utilisant le lemme d'inversion matricielle, ceci suppose que les conditions initiales ont été choisies pour assurer la non-singularité de la matrice d'autocorrélation  $R_k$ .

- Lemme d'inversion matricielle [18].

Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices  $M \times M$  définies positives telle que :

$$A = B + CDC^T \quad (4.94)$$

où  $D$  est une autre matrice  $N \times N$  est elle aussi définie positive et  $C$  une matrice  $M \times N$  alors :

$$A^{-1} = B^{-1} - B^{-1}C(D^{-1} + C^T B^{-1}C)^{-1}C^T B^{-1} \quad (4.95)$$

Si on suppose que la matrice d'autocorrélation  $R_k$  est définie positive et donc non singulière, en faisant les identifications suivantes :

$$A = R_k$$

$$B = \lambda R_{k-1}$$

$$C = X_k$$

$$D = 1$$

on trouve :

$$R_k^{-1} = \lambda^{-1} R_{k-1}^{-1} - \frac{\lambda^{-2} R_{k-1}^{-1} X_k X_k^T R_{k-1}^{-1}}{1 + \lambda^{-1} X_k^T R_{k-1}^{-1} X_k} \quad (4.96)$$

Pour une meilleure représentation prenant :

$$H_k = R_k^{-1} \quad (4.97)$$

et

$$K_k = \frac{\lambda^{-1} H_{k-1} X_k}{1 + \lambda^{-1} X_k^T H_{k-1} X_k} \quad (4.98)$$



alors (4.96) devient

$$H_k = \lambda^{-1} H_{k-1} - \lambda^{-1} K_k X_k^T H_{k-1} \quad (4.99)$$

$H_k$  est une matrice  $M \times M$  et  $K_k$  est un vecteur  $M \times 1$  appelé vecteur gain qui peut être écrit comme suit

$$K_k = H_k X_k \quad (4.100)$$

- Mise à jour du vecteur poids

Utilisant pour cela l'équation (4.89)

$$\begin{aligned} W_k &= H_k P_k \\ &= \lambda H_k P_{k-1} + H_k X_k d_k \end{aligned} \quad (4.101)$$

en remplaçant (4.99) dans (4.101), on trouve :

$$\begin{aligned} W_k &= W_{k-1} + K_k (d_k - X_k^T W_{k-1}) \\ W_k &= W_{k-1} + K_k \alpha_k \end{aligned} \quad (4.102)$$

$\alpha_k$  est l'erreur d'estimation à priori car le produit  $X_k^T W_{k-1}$  est une estimation de la réponse désirée  $d_k$  basée sur une estimation du vecteur poids faite à l'instant  $(k-1)$ , l'erreur d'estimation à posteriori est définie par [11].

$$\varepsilon_k = d_k - X_k^T W_k \quad (4.103)$$

Notons seulement que la minimisation de  $\xi_k$  est basée sur  $\varepsilon_k$  et non pas sur  $\alpha_k$ .

- Condition initiale

L'application de l'algorithme MCR nécessite une initialisation de (4.99) en choisissant une valeur initiale  $H_0$  qui assure la non singularité de  $R_k$ .

Une façon simple de résoudre ce problème est de modifier un tout petit peu l'expression de la matrice d'autocorrélation  $R_k$  en écrivant :

$$R_k = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} X_k X_k^T + \delta \lambda^k I \quad (4.104)$$

où  $I$  est la matrice identité  $M \times M$ , et  $\delta$  une constante positive faible. D'après (4.104), on remarque que pour une longueur élevée de données, le choix de  $\delta$  n'est pas important, mais pour  $k=0$  :

$$H_0 = \delta^{-1} I \quad (4.105)$$

Pour le choix d'une valeur initiale du vecteur poids, on choisit d'habitude  $W_0 = 0$   
d'où l'algorithme MCR

1- Initialisation :

$$H_0 = \delta^{-1} I \quad \delta : \text{valeur positive faible}$$

$$W_0 = 0$$

2- A chaque itération  $k=1, 2, \dots$  on calcule

$$K_k = \frac{\lambda^{-1} H_{k-1} X_k}{1 + \lambda^{-1} X_k^T H_{k-1} X_k}$$

$$\alpha_k = d_k - W_{k-1}^T X_k$$

$$W_k = W_{k-1} + K_k \alpha_k$$

$$H_k = \lambda^{-1} H_{k-1} - \lambda^{-1} K_k X_k^T H_{k-1}$$

Propriétés : [18]

1- L'algorithme MCR converge en moyenne quadratique aux environs de  $2M$  itérations, où  $M$  est l'ordre du filtre. Ainsi la vitesse de convergence de l'algorithme MCR est supérieure à celle de l'algorithme LMS.

2- Contrairement à l'algorithme LMS, la vitesse de convergence de l'algorithme MCR est indépendante de la dispersion des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée.

3- Quand  $k$  tend vers l'infini, l'EQM instantanée approche sa valeur

optimale, donc théoriquement l'erreur résiduelle est nulle pour l'algorithme MCR.

4- La rapidité de convergence de l'algorithme MCR est obtenue aux dépens d'une augmentation du nombre d'opérations arithmétiques par itération de la matrice H.

5- L'implémentation directe de l'algorithme MCR risque dans certains cas de donner des divergences car à chaque itération la matrice  $H_k$  doit rester définie positive. Ce problème est résolu en utilisant la version factorisée du MCR.

#### IV.8- Algorithme FTF (fast transversal filter)

Pour surmonter la limitation de l'algorithme MCR due à la complexité des calculs numériques, principalement, trois algorithmes rapides, équivalents à l'algorithme MCR ont été mis en oeuvre [22,23,24].

Ces algorithmes rapides exploitent la propriété de décalage des données séquentielles de l'entrée, ce qui rend le nombre d'opérations proportionnel à M et non pas à  $M^2$  comme on le verra par la suite.

L'algorithme FTF introduit par Cioffi et Kailath en 1984 [22], utilise quatre filtres transversaux qui ont la même entrée (voir fig IV.14).

Chaque filtre a une tâche particulière [18]. Les filtres I et II permettent de donner respectivement des prédictions avant et arrière, le filtre III définit le vecteur gain de l'algorithme MCR et le filtre IV permet de produire la solution exacte de l'algorithme MCR.

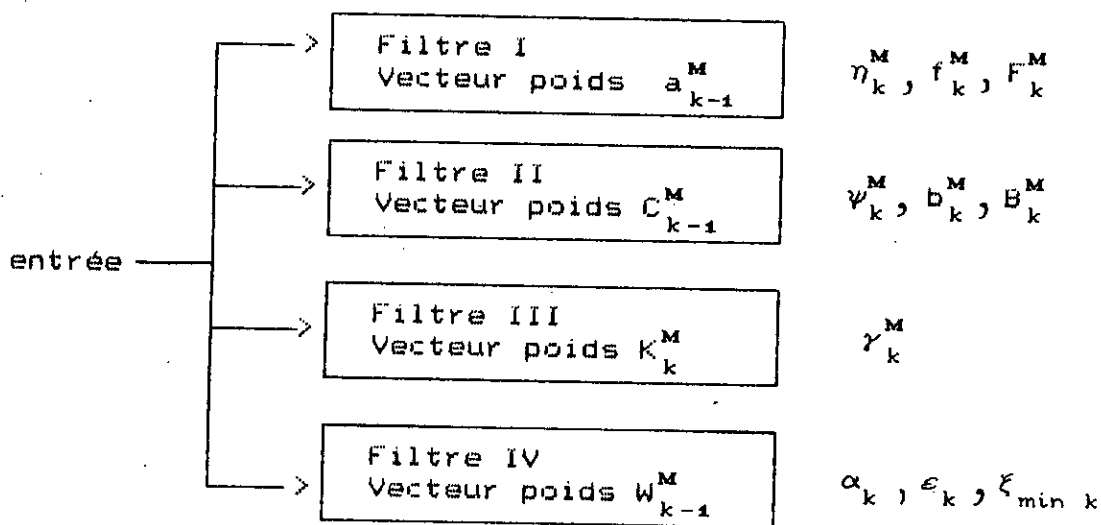


Fig IV.14 Filtre FTF

Vu que les recursions qui vont suivre peuvent être faites sur l'ordre du filtre  $M$ , tous les vecteurs seront affectés par un exposant qui représente l'ordre du filtre.

Pour la prédiction linéaire avant, le vecteur poids du filtre I est défini par :

$$a_k^M = \begin{bmatrix} 1 \\ -w_k \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

L'erreur de prédiction avant à postériori est définie par :

$$f_i^M = x_i - w_k^T X_{i-1}^M = (a_k^M)^T X_{i-1}^{M+1} \quad 1 \leq i \leq k \quad (4.107)$$

avec

$$X_{k-1}^M = \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ \dots \\ x_{k-M} \end{bmatrix}^T \quad (4.108)$$

$$X_k^{M+1} = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

La valeur minimale de la somme pondérée des carrés de l'erreur de prédiction avant à postériori est donnée par :

$$F_k^M = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} (f_i^M)^2 \quad (4.110)$$

En définissant l'erreur de prédiction avant à priori :

$$\eta_k^M = x_k - w_{k-1}^T X_{k-1}^M = \begin{bmatrix} a_{k-1}^M \end{bmatrix}^T X_k^{M+1} \quad (4.111)$$

On trouve en appliquant (4.102)

$$a_k^M = a_{k-1}^M - \begin{bmatrix} 0 \\ K_{k-1}^M \end{bmatrix} \eta_k^M \quad (4.112)$$

$$\text{et } F_k^M = \lambda F_{k-1}^M + \eta_k^M \cdot f_k^M \quad (4.113)$$

Pour la prédiction linéaire arrière, le vecteur poids du filtre II est

défini par :

$$C_i^M = \begin{bmatrix} -G_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad 1 \leq i \leq k \quad (4.114)$$

avec

$$G_i = (g_i, g_{i-1}, \dots, g_{i-M+1})^T \quad (4.115)$$

l'erreur de prédiction arrière à posteriori est :

$$b_i^M = x_{i-M} - X_i^M G_k = (C_i^M)^T X_i^{M+1} \quad (4.116)$$

mais dans ce cas :

$$X_i^{M+1} = \begin{bmatrix} X_i^M \\ x_{i-M} \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

$$\text{et } X_i^M = (x_i, \dots, x_{i-M+1})^T \quad (4.118)$$

La valeur minimale de la somme pondérée des carrés de l'erreur de prédiction arrière à posteriori est :

$$B_k^M = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} (b_i^M)^2 \quad (4.119)$$

En définissant l'erreur de prédiction arrière à priori :

$$\psi_k^M = x_{k-M} - G_{k-1} X_k^M = \begin{bmatrix} C_{k-1}^M \end{bmatrix}^T X_k^{M+1} \quad (4.120)$$

on trouve en appliquant (4.102)

$$C_k^M = C_{k-1}^M - \begin{bmatrix} K_k^M \\ 0 \end{bmatrix} \psi_k^M \quad (4.121)$$

et

$$B_k^M = \lambda B_{k-1}^M + \psi_k^M b_k^M \quad (4.122)$$

Pour le vecteur gain, l'application de la théorie des moindres carrés

développée précédemment donne :

$$K_k^{M+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ K_{k-1}^M \end{pmatrix} + \frac{f_k^M}{F_k^M} a_k^M \quad (4.123)$$

$$K_k^{M+1} = \begin{pmatrix} K_k^M \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{b_k^M}{B_k^M} c_k^M \quad (4.124)$$

on définit alors l'erreur d'estimation pour le filtre III :

$$\gamma_k^M = 1 - \left[ K_k^M \right]^T X_k^M \quad (4.125)$$

Cette erreur a les propriétés suivantes :

1- Pour une estimation (filtre III) on a :

$$\gamma_k^M = \frac{\varepsilon_k}{\alpha_k} \quad (4.126)$$

2- Pour une prédiction linéaire avant (filtre I) :

$$\gamma_{k-1}^M = \frac{f_k^M}{\eta_k^M} \quad (4.127)$$

3- Pour une prédiction linéaire arrière (filtre II) :

$$\gamma_k^{M+1} = \gamma_{k-1}^M - \frac{(f_k^M)^2}{F_k^M} = \lambda \frac{F_{k-1}^M}{F_k^M} \gamma_{k-1}^M \quad (4.129)$$

$$\gamma_k^{M+1} = \gamma_k^M - \frac{(b_k^M)^2}{B_k^M} = \lambda \frac{B_{k-1}^M}{B_k^M} \gamma_k^M \quad (4.130)$$

Si  $\tilde{K}_k^{M+1, M+1}$  représente le dernier élément du vecteur  $\tilde{K}_k^{M+1}$  défini par

$$\tilde{K}_k^M = \frac{K_k^M}{\gamma_k^M} \quad (4.131)$$

on aura :

$$\gamma_k^M = \left( 1 - \psi_k^M \gamma_k^{M+1} \tilde{K}_k^{M+1, M+1} \right) \gamma_k^{M+1} \quad (4.132)$$

et

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_k^M \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{K}_k^{M+1} - \tilde{K}_k^{M+1, M+1} C_{k-1}^M \quad (4.133)$$

et pour finir le filtre IV permet de donner

$$e_k^M = \gamma_k^M a_k^M \quad (4.134)$$

et

$$W_k^M = W_{k-1}^M + \tilde{K}_k^M e_k^M \quad (4.135)$$

L'algorithme FTF est donc donnée par :

1- Initialisation :

$$a_0^M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_0^M = \lambda^M \mu$$

$$C_0^M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_0^M = \mu$$

$$K_0^M = 0$$

$$\gamma_0^M = 1$$

$$W_0^M = w_0$$

2- A chaque iteration  $k = 1, 2, \dots$  on calcule

$$\eta_k^M = \left( a_{k-1}^M \right)^T x_k^{M+1}$$

$$f_k^M = \gamma_{k-1}^M \eta_k^M$$

$$F_k^M = \lambda F_{k-1}^M + \eta_k^M \gamma_k^M$$

$$\gamma_k^{M+1} = \lambda \frac{F_{k-1}^M}{F_k^M} \gamma_{k-1}^M$$

$$\tilde{K}_k^{M+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{K}_{k-1}^M \end{pmatrix} + \lambda^{-1} \frac{\eta_k^M}{F_{k-1}^M} a_{k-1}^M$$

$$a_k^M = a_{k-1}^M - f_k^M \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{K}_{k-1}^M \end{pmatrix}$$

$$\psi_k^M = \lambda B_{k-1}^M \tilde{K}_k^{M+1, M+1}$$

$$\gamma_k^M = (1 - \psi_k^M \gamma_k^{M+1} \tilde{K}_k^{M+1, M+1})^{-1} \gamma_k^{M+1}$$

$$d_k^M = \gamma_k^M \psi_k^M$$

$$B_k^M = \lambda B_{k-1}^M + \psi_k^M d_k^M$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{K}_k^M \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{K}_k^{M+1} - \tilde{K}_k^{M+1, M+1} C_{k-1}^M$$

$$C_k^M = C_{k-1}^M - \begin{pmatrix} K_k^M \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_k^M = d_k^M - \left( W_{k-1}^M \right)^T X_k^M$$

$$e_k^M = \gamma_k^M \alpha_k^M$$

$$W_k^M = W_{k-1}^M + \tilde{K}_k^M e_k^M$$

Remarque :

$\mu$  ne doit pas être choisi trop faible pour éviter que l'algorithme ne devienne instable.

#### IV.9- Complexité et stabilité numérique :

On a vu que pour surmonter la complexité du calcul numérique de l'algorithme MCR, on a introduit l'algorithme MCR rapide donné ci-dessus par la version FTF. En comptant une division comme une



multiplication la complexité des trois algorithmes déjà étudiés est résumé au tableau ci-dessous [22,23] :

Algorithme	Multiplications
LMS	$2M$
MCR	$3M^2 + 5M$
FTF	$7M + 14$

On remarque que pour  $M$  élevé, la complexité de l'algorithme FTF est presque quatre fois supérieure que celle de l'algorithme LMS, alors que l'algorithme MCR est  $M$  fois plus complexe.

Cependant, malgré la rapidité qu'ils offrent, les algorithmes MCR et FTF présentent un inconvénient assez gênant à savoir leur tendance à devenir

instable quand ils sont implémentés avec une précision finie et ceci est dûe à une accumulation des erreurs d'arrondi. Plusieurs méthodes ont été introduites pour une implémentation beaucoup plus stable de l'algorithme FTF [22].

#### IV.10- Applications de l'annulation adaptative des interférences sinusoidales

##### - Electrocardiographie (ECG) :

Le problème majeur dans l'enregistrement d'un signal ECG est la présence indésirée de la composante fréquentielle de 50Hz due à l'alimentation de l'enregistreur par le secteur.

L'application des interférences sinusoidales à ce problème se fait en prenant comme entrée primaire le signal ECG bruité et comme entrée de référence le signal issu directement du secteur; le résultat est comme on le verra au prochain chapitre, l'annulation complète de l'interférence surtout si celle ci est de nature stationnaire [15].

##### - Vibrations d'un moteur

Reprenant l'exemple cité au chapitre précédent comme exemple de motivation [14].

Si l'on désire effectuer des mesures venant d'une source montée sur le

même chassis avec un moteur, le résultat est l'existence toujours des interférences dues aux vibrations du moteur. On prend alors comme entrée primaire le signal issu d'un point de mesure très proche de la source et comme entrée de référence le signal issu d'un point de mesure très proche du moteur en question, l'annuleur fournit ainsi les résultats voulus.

#### - Bruit dans le signal de la parole

Considérant le cas d'un pilote qui communique par la radio d'un petit avion où règne un bruit important de nature périodique dû au moteur. Ces composantes sinusoïdales riches en harmoniques occupent la bande de fréquence de la parole et affectent son intelligibilité.

L'utilisation de l'annulation adaptative des interférences sinusoïdales fournit la solution à ce problème en prenant comme entrée primaire le signal de la parole existant à l'entrée du microphone et comme entrée de référence un signal relevé d'un autre point de l'appareil où la communication du pilote ne peut être entendue [15].

#### IV.11-Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons exposé les algorithmes adaptatifs utilisés pour le filtrage adaptatif.

L'algorithme LMS est très simple à implémenter car il ne requiert pas beaucoup d'opérations numériques par itération, cependant sa vitesse de convergence dépend de la dispersion des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation de l'entrée du filtre. L'algorithme MCR offre une possibilité de convergence très rapide mais au dépend d'une complexité numérique proportionnelle à  $M^2$  où  $M$  est l'ordre du filtre. L'algorithme FTF réduit la complexité numérique de l'algorithme MCR et la rend proportionnelle à  $M$  tout en gardant la même vitesse de convergence.

L'utilisation de ces algorithmes adaptatifs dans l'annulation adaptative des interférences sinusoïdales fait qu'après adaptation.

La fonction de transfert de l'entrée à la sortie de l'annuleur est celle d'un filtre réjecteur.

## CHAPITRE V : SIMULATION ET RÉSULTATS

### V-1- Introduction

Dans de nombreuses applications, les caractéristiques de fonctionnement d'un système ne sont pas faciles à mettre en évidence d'une manière précise par voie purement théorique. La simulation se révèle alors un moyen simple et efficace d'évaluer expérimentalement les caractéristiques et de connaître même les modifications adéquates à apporter à ce système pour augmenter ses performances sans toute fois trop augmenter le coût.

### V-2- Modèle proposé

Pour mettre en évidence les propriétés des algorithmes adaptatifs appliqués à l'annulation adaptative des interférences sinusoidales on a proposé le modèle de simulation suivant :

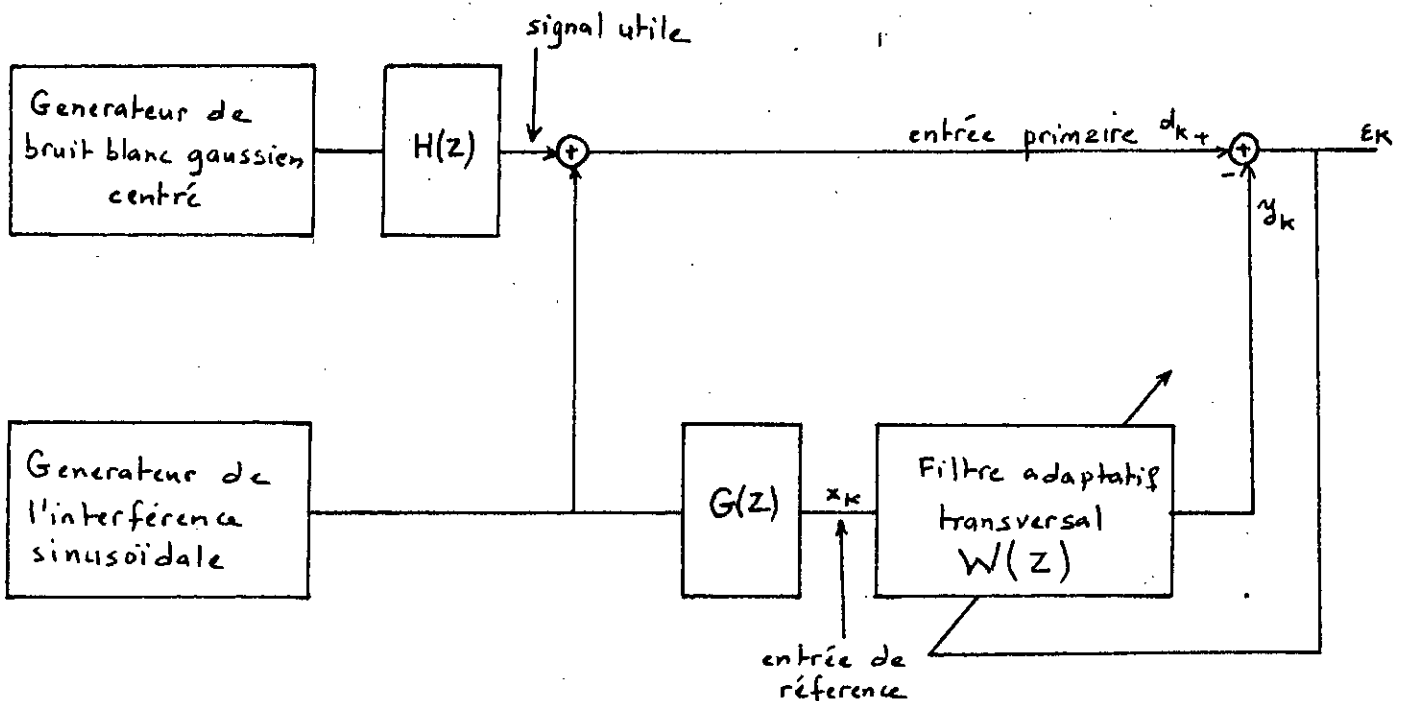


fig V-1 Modèle de simulation proposé

#### - Générateur du bruit blanc gaussien :

Un bruit blanc gaussien est un signal aléatoire contenant toutes les composantes fréquentielles, il est simulé par une séquence de nombres de taille suffisamment grande et qui suivent une loi de probabilité

gaussienne. La variance de la loi indique la puissance du bruit généré.

La séquence pseudo aléatoire à distribution gaussienne est générée à partir de la séquence pseudo aléatoire en utilisant la transformation de Box-Mueller donnée par :

$$Z(k) = y(k) \cos(2\pi x(k+1))\sigma + m \quad (5.1)$$

où  $y(k)$  est un signal pseudo aléatoire défini par :

$$y(k) = \sqrt{2\sigma^2 \log \frac{1}{x(k)}} \quad (5.2)$$

et où  $x(k)$  est un signal pseudo-aléatoire à distribution uniforme. Le signal ainsi généré est pseudo-aléatoire possédant une distribution gaussienne de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$ , on prendra  $m=0$  et  $\sigma^2=1$

- Générateur de l'interférence sinusoïdale :

Ce bloc a pour rôle, la génération de plusieurs sinusoïdes d'amplitudes, de fréquences et de phases choisies

- fonction de transfert  $H(Z)$  :

Pour créer une certaine corrélation entre les composantes du signal utile, le bruit blanc centré attaque un filtre RII de fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{z^4}{(z-p_1)(z-p_1^*)(z-p_2)(z-p_2^*)} \quad (5.3)$$

avec  $P_1 = 0,38 + j0,48$

$P_2 = 0,76 + j0,24$

Ce qui permet de générer un bruit coloré considéré comme étant le signal utile (voir fig V-1)

Notons que toutes les interférences sinusoïdales générées ont des fréquences qui sont à l'intérieur de la bande de fréquence du signal utile.

- Fonction de transfert  $G(Z)$

Le signal représentant l'entrée de référence doit être lié à

l'interférence présente à l'entrée primaire.

Cette liaison est représentée par la fonction de transfert  $G(Z)$ .

Donc en réalité, les sinusoides d'interférences vont subir une variation (différente pour chaque fréquence) d'amplitude et de phase.

### V-3- Interprétation des résultats

Pour mettre en évidence les caractéristiques des algorithmes adaptatifs appliqués à l'annulation des interférences sinusoidales, huit exemples ont été considérés, ceux-ci montrent :

1- l'influence des paramètres d'adaptation sur la convergence des algorithmes LMS et FTF

2- l'annulation d'une somme de sinusoides

3- l'effet du filtrage adaptatif d'une fréquence faible (proche de zéro)

4- l'annulation d'une somme de sinusoides de fréquences voisines.

5- l'effet de l'utilisation d'un filtrage adaptatif à 02 poids avec un déphasage de  $90^\circ$

6- la récupération d'un signal complètement noyé dans le bruit

7- l'aptitude des algorithmes LMS et FTF à opérer dans un environnement non stationnaire.

8- l'application aux signaux de l'ECG.

#### **Exemple 1 :**

Cet exemple fait apparaître les caractéristiques générales des algorithmes LMS, MCR et FTF, en analysant les courbes d'apprentissage et les résultats du filtrage adaptatif (en montrant le signal à l'entrée et à la sortie de l'annuleur).

- Courbes d'apprentissage :

La fig V.2 représente l'influence du pas d'adaptation sur la convergence de l'algorithme LMS ; celle-ci est d'autant plus rapide que  $\mu$  est grand tout en impliquant une erreur résiduelle grande et d'autant plus lente que  $\mu$  est faible tout en impliquant une erreur résiduelle faible. La solution à ce problème est montrée à la fig V.3, l'algorithme utilisé est dit "LMS rapide" et consiste à utiliser un  $\mu$  élevé au début de l'adaptation pour avoir une convergence rapide, puis de le minimiser à chaque fois pour obtenir une convergence fine. Pour

cet exemple  $\mu$  est réduit de moitié chaque 15 itérations; on remarque bien la rapidité et la finesse de la convergence.

La fig V.4 quant à elle montre que la convergence de l'algorithme LMS est d'autant meilleure que l'ordre du filtre est élevé.

L'équivalence des deux algorithmes NLX et FIF est montrée à la fig V.5. En effet on remarque qu'après une étape transitoire due à l'initialisation différentes des deux algorithmes, ceux-ci présentent les mêmes propriétés de convergence.

La fig V.6 montre que l'algorithme FTF n'est pas tellement sensible au choix de l'ordre du filtre, toutefois, celui-ci ne doit pas être faible au point de ne plus pouvoir suivre le signal.

- Filtrage :

Cette partie concerne le filtrage d'un signal d'interférence périodique donné par :

$$3 \sin (0.2 \pi k + 0.3) + 4 \sin (0.3 \pi k + 0.1)$$

La fig (V.7.a) montre d'un côté le signal utile (sans interférence) et d'un autre côté le signal représentant l'entrée primaire de l'anneau (avec interférence) qu'on appellera "signal bruité".

La fig (V.7.b et c) montre l'influence du pas d'adaptation sur le filtrage, on voit que pour un  $\mu$  faible (fig V.7.c), la qualité du filtrage est meilleure, cependant, ceci nécessite un grand nombre d'itérations. l'utilisation de l'algorithme LMS rapide fournit la solution (voir fig V.7. d)<sup>2</sup>.

L'algorithme FTF quant à lui fournit de très bons résultats (fig V.7.2), de plus on n'a pas un problème pour le choix d'un paramètre comme pour l'algorithme LMS, car la convergence de l'algorithme FTF se fait toujours avec la même vitesse.

La comparaison entre les fig V.7.2 et f montre que l'algorithme FIF n'est pas vraiment sensible à l'ordre du filtre adaptatif.

### Exemple 2 :

On va montrer ici l'effet de l'existence de plusieurs sinusoides à l'entrée de référence sur la qualité du filtrage adaptatif.

Prenant pour cela, le cas où l'interférence périodique est donnée

par :

$$2 \sin(0.2\pi k + 0.1) + \sin(0.3\pi k + 0.2) + 1.5 \sin(0.36\pi k + 0.3) + 2 \sin(0.42\pi k + 0.4)$$

La fig V-8.a montre le signal utile et le signal bruité.

On voit que le filtrage obtenu avec un ordre faible ( $M=10$ ) du filtre est médiocre pour l'algorithme LMS (fig V.8.b), l'utilisation de l'algorithme LMS rapide (fig V.8.c) ne donne aucune amélioration; ceci est dû comme on l'a vu précédemment aux fonctions  $\beta/M$  qui ne sont plus négligeables devant l'unité pour  $M$  faible.

L'augmentation de l'ordre ( $M=20$ ) fournit de bons résultats pour les deux algorithmes LMS et LMS rapide (voir fig V.8. d et e respectivement).

La fig V.8.f montre que l'utilisation de l'algorithme FTF offre de bons résultats même si l'ordre est faible ( $M=10$ )

### Exemple 3 :

Cet exemple montre l'effet du filtrage adaptatif d'une fréquence proche de zéro.

Le signal d'interférence existant à l'entrée est donné par :

$$4 \sin(0.02 \pi k + 0.3)$$

La fig V.9 a montre le signal utile et le signal bruité, les fig V.9.b et c montrent respectivement que l'utilisation des algorithmes LMS et LMS rapide n'offre pas les résultats voulus.

En effet, pour une fréquence faible (proche de zéro), la fonction  $\beta/M$  n'est plus négligeable, ce qui rend l'influence des composants VT importante (voir chapitre IV). Cependant, l'algorithme FTF fournit dans ce cas aussi de bons résultats (fig V.9.d).

(2)

Dans toutes les figures, le signal filtré représente le signal à la sortie de l'annuleur.

#### Exemple 4

Considérons le cas où l'entrée primaire présente une interférence périodique donnée par

$$3 \sin(0.2\pi k + 0.3) + 4 \sin(0.22\pi k + 0.1)$$

Le signal utile et le signal bruité sont présentés à la fig V.10.a. Remarquons qu'on a deux fréquences normalisées qui sont très proches (0,1 et 0,11), leur différence est donc une fréquence normalisée égale à 0,01 qui est trop proche de zéro, ce qui rend le terme  $\nabla T$  dû à cette fréquence non négligeable. Donc l'utilisation de l'algorithme LMS (fig V.10. b) et LMS rapide (fig V.10.c) ne permet pas d'avoir le signal voulu à la sortie de l'annuleur. Par contre l'algorithme FTF est insensible à cette différence de fréquence et donne une bonne estimation du signal utile à la sortie de l'annuleur (fig V.10.d)

#### Exemple 5 :

On a vu au chapitre IV que l'utilisation du filtre adaptatif à deux poids avec un déphasage de  $90^\circ$  élimine complètement les composantes  $\nabla T$ .

En effet prenant le cas d'une interférence sinusoïdale de fréquence relativement faible :

$$5 \sin(0.008 \pi k + 0.1)$$

Le signal à l'entrée primaire (bruité) est montré à la (fig V.11 a) On remarque que l'utilisation de l'algorithme LMS avec un filtre transversal à 02 poids présente des distorsions importantes (fig V.11.b), celles-ci sont très atténuées en utilisant un filtre à 02 poids avec un déphasage à  $90^\circ$  des composantes du signal à l'entrée de référence (fig V.11.c).

#### Exemple 6 :

On montrera dans cet exemple l'aptitude de l'annuleur adaptatif des interférences sinusoïdales à récupérer un signal complètement noyé dans l'interférence.



La fig V.12.a montre le signal utile et le signal bruité dû à une interférence donnée par :

$$20 \sin(0.24 \pi k + 0.2)$$

Le filtrage adaptatif utilisant l'algorithme LMS (fig V.12.b) et l'algorithme FTF (fig V.12.c) permet une bonne extraction du bruit donnant ainsi un signal utile pratiquement sans distorsions.

#### Exemple 7 :

L'efficacité de l'utilisation de l'annulation adaptative des interférences est surtout observée quand les signaux sont issus d'un processus aléatoire non stationnaire.

Pour voir cela, prenant le cas d'une interférence "sinusoidale" donnée par :

$$15 \sin(2 \pi f k + 0.1)$$

où  $f$  est issu d'un processus de Markov du 1er ordre de moyenne 0,15 et de variance égale à 0,01 comme le montre la fig V.13.a

La fig V.13.b montre le signal utile et le signal bruité (représentant l'entrée primaire de l'annuleur).

La fig V.13.c montre que pour  $\mu = 10^{-6}$  l'algorithme LMS arrive à suivre les variations de la fréquence, cependant au delà de cette valeur de  $\mu$ , l'algorithme LMS ne fournit pas de bons résultats fig V.13 d et e ce qui est en accord avec la fig IV.3.

Pour l'algorithme FTF, Le choix d'un facteur d'oubli inférieur à l'unité permet d'avoir les résultats voulus (fig V.13.f).

#### Exemple 8:

Cet exemple concerne en réalité une application de l'annulation adaptative des interférences sinusoïdales. C'est le cas de l'élimination de la fréquence 50Hz qui existe dans les signaux ECG.

Les fig V.14 a et b montrent respectivement le signal utile (sans interférence) et le signal bruité (avec interférence)

L'utilisation des algorithmes LMS, LMS rapide et FTF fournit

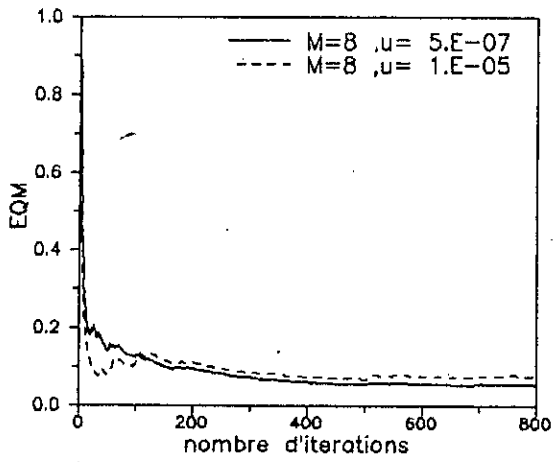


Fig. V.2 Influence du paramètre  $u$  sur la convergence de l'algorithme LMS

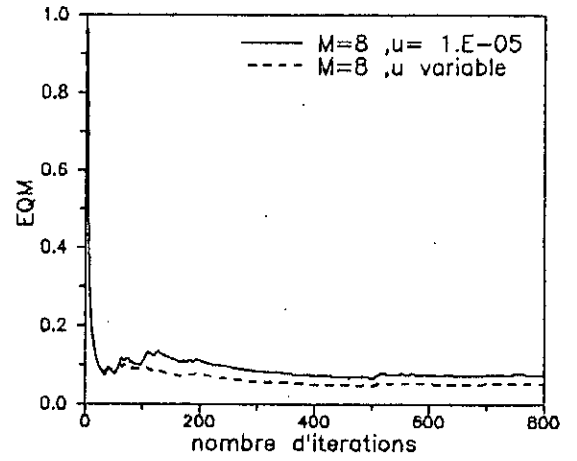


Fig. V.3 comparaison entre les algorithmes LMS et LMS rapide

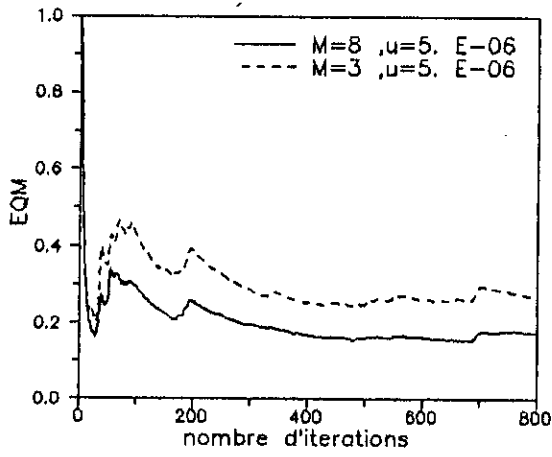


Fig. V.4 Influence de l'ordre sur la convergence de l'algorithme LMS

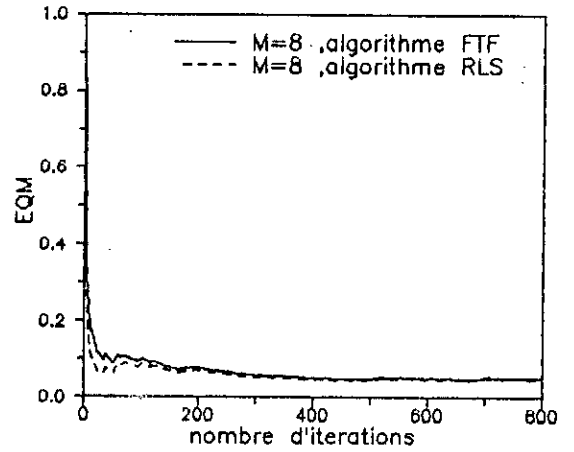


Fig. V.5 Comparaison entre les deux algorithmes FTF et RLS

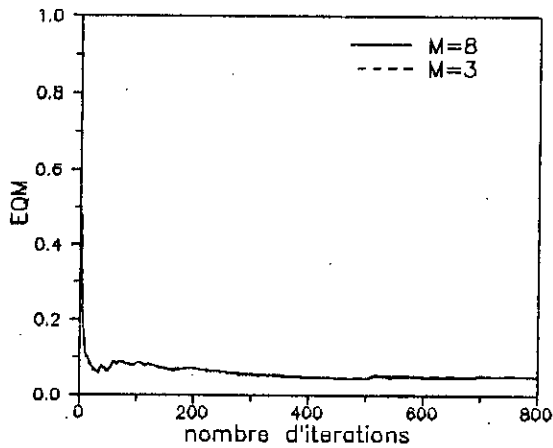
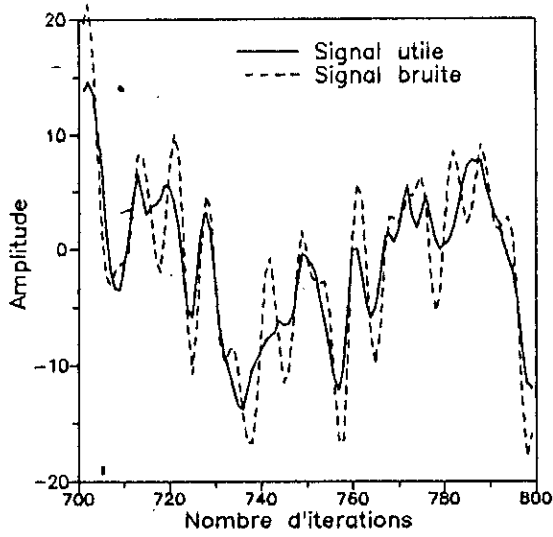
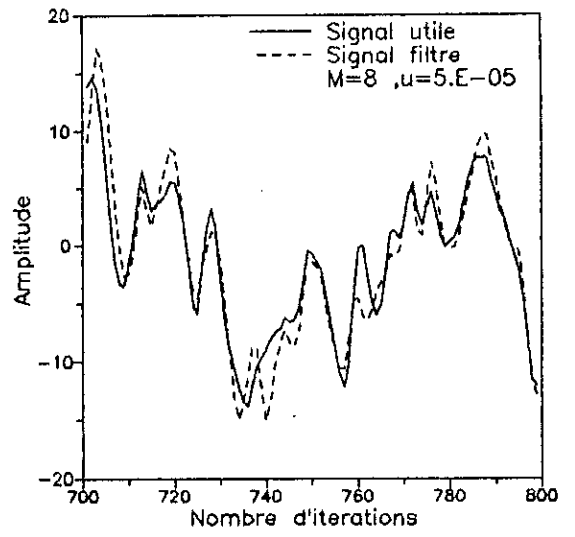


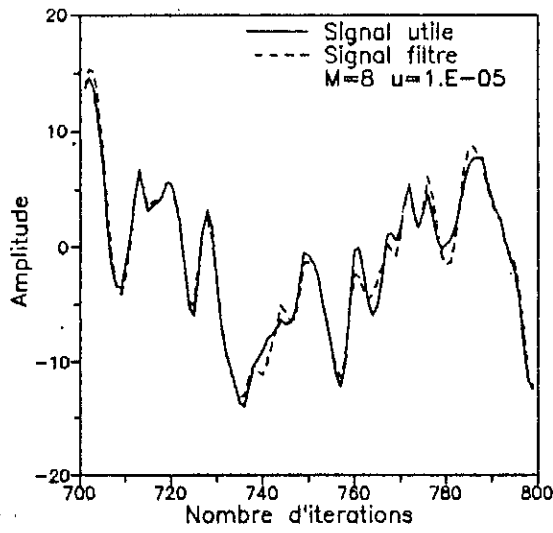
Fig. V.6 Influence de l'ordre sur la convergence de l'algorithme FTF



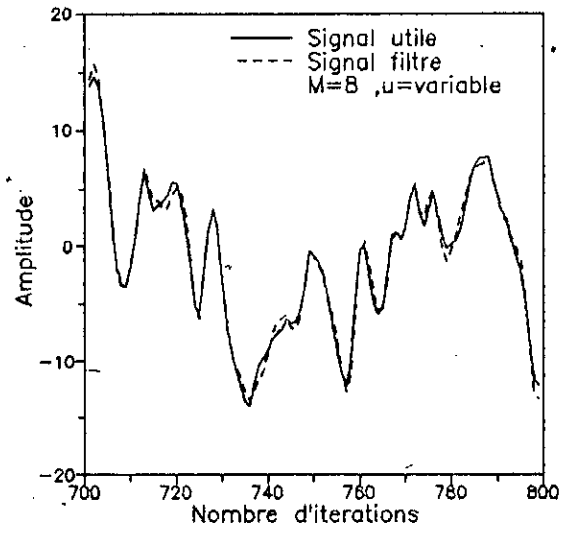
-a-



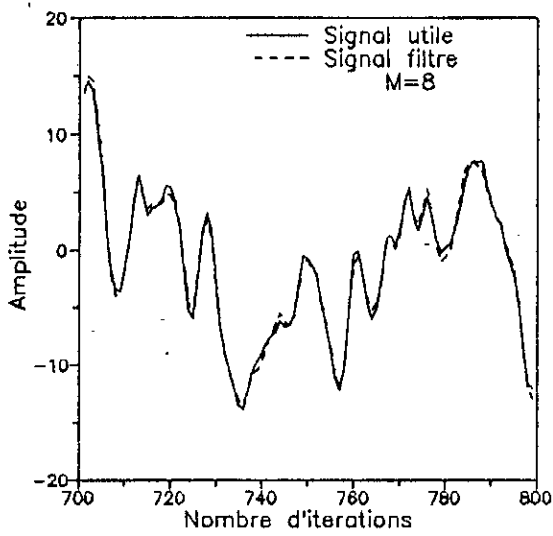
-b-



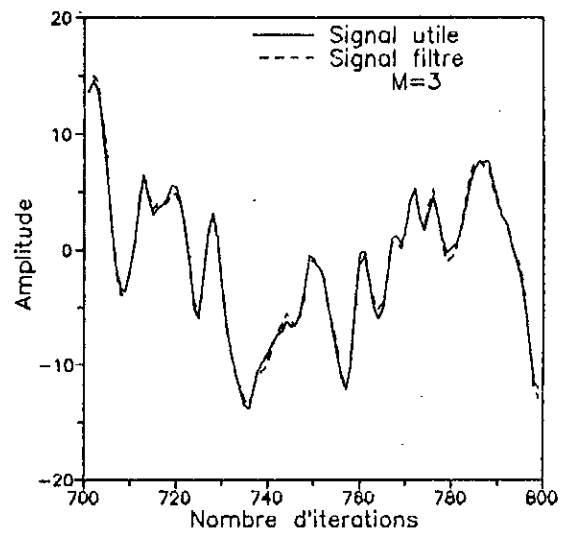
-c-



-d-

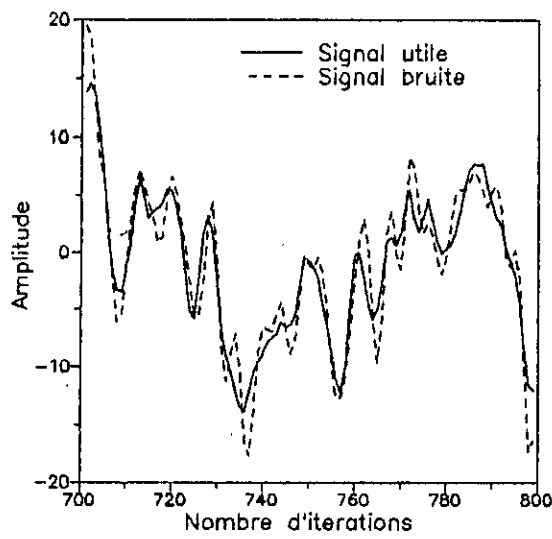


-e-

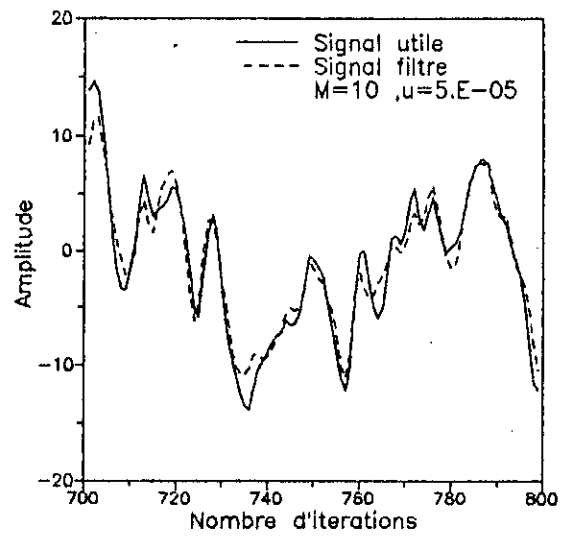


-f-

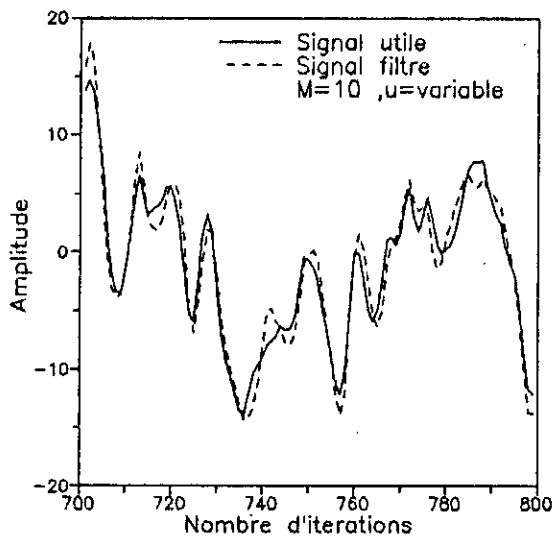
Fig. V.7 Utilisation des algorithmes LMS et FTF pour le filtrage adaptatif de deux sinusoides



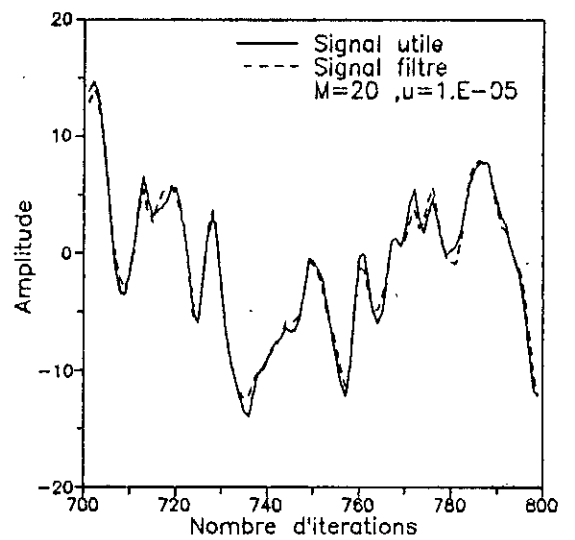
-a-



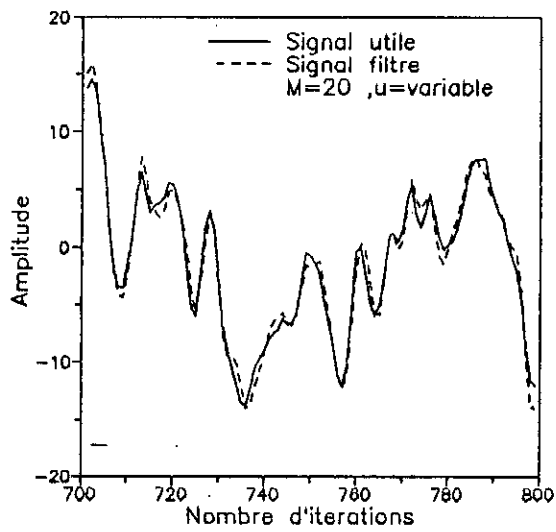
-b-



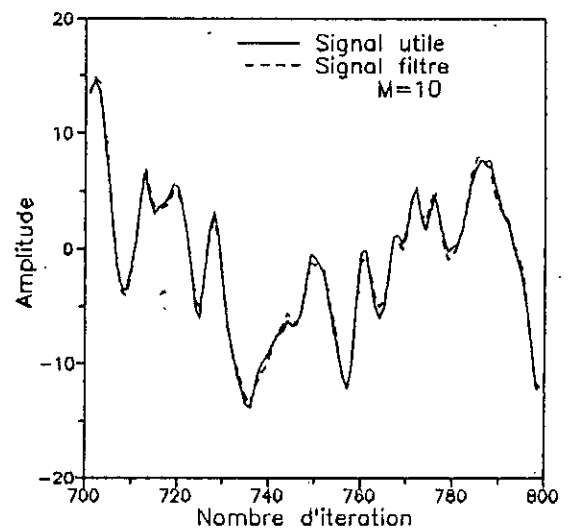
-c-



-d-

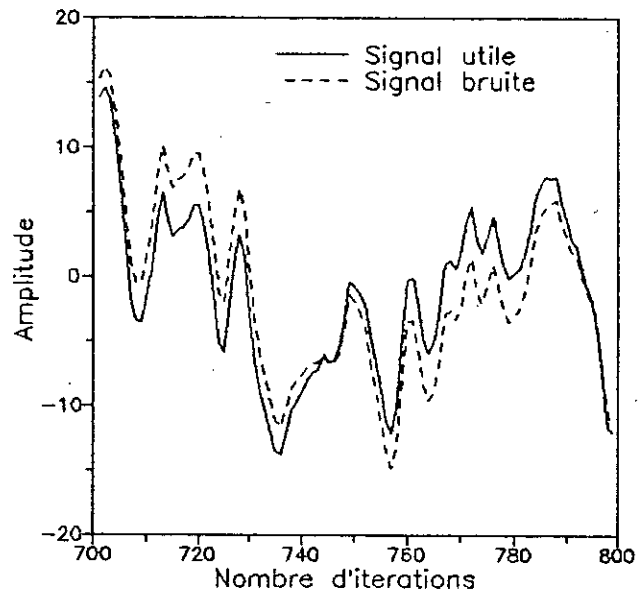


-e-

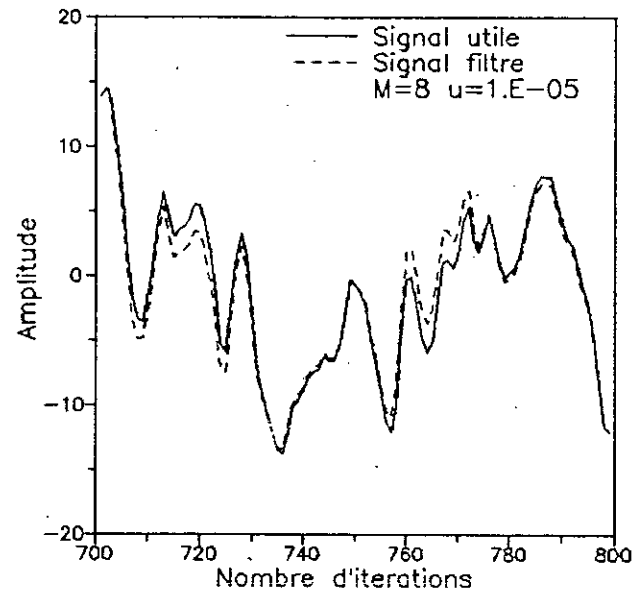


-f-

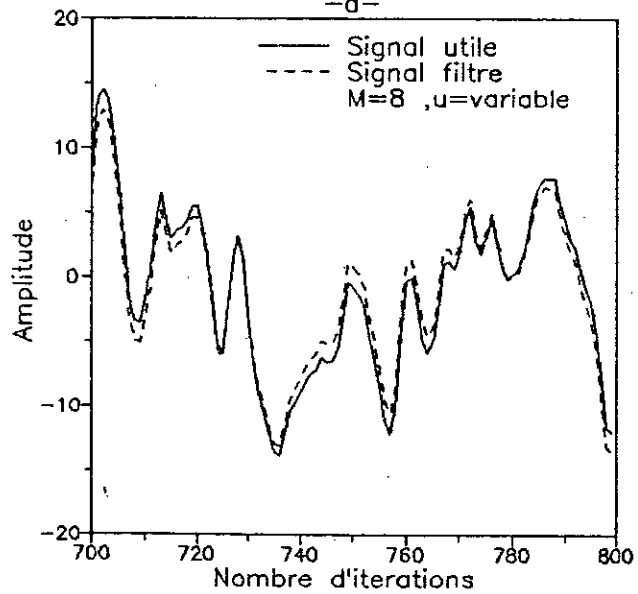
Fig. V.8 Effet du filtrage adaptatif d'une somme de sinusoides



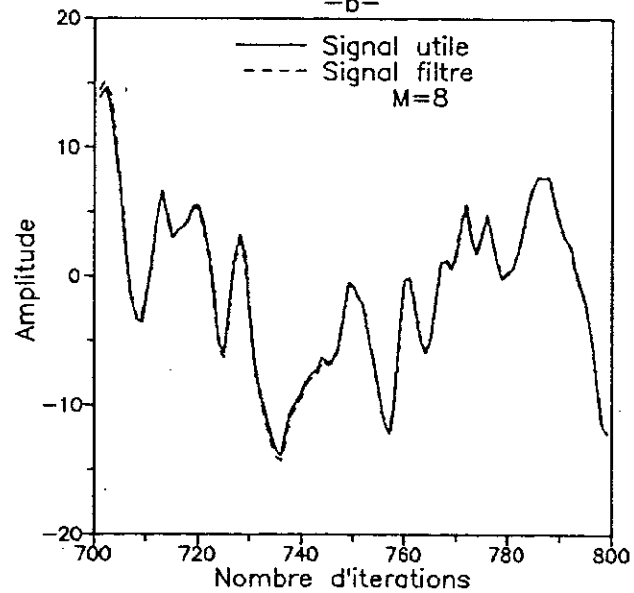
-a-



-b-

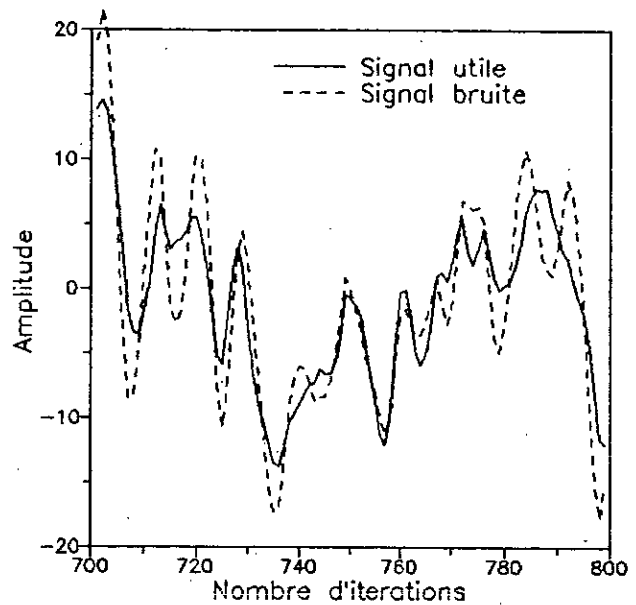


-c-

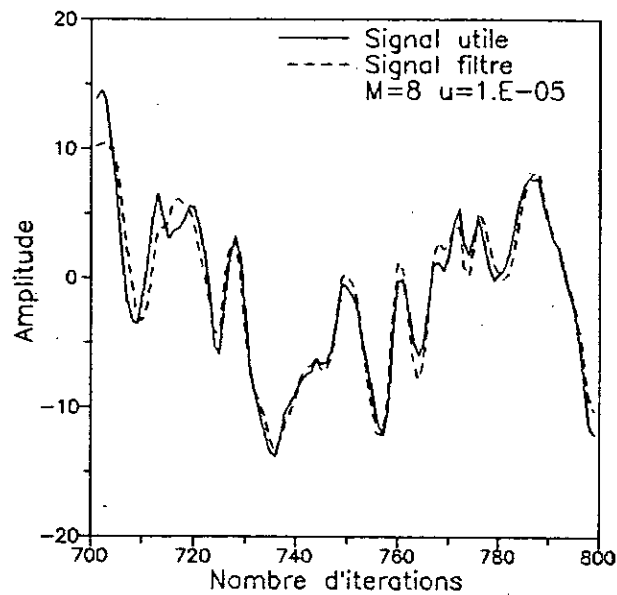


-d-

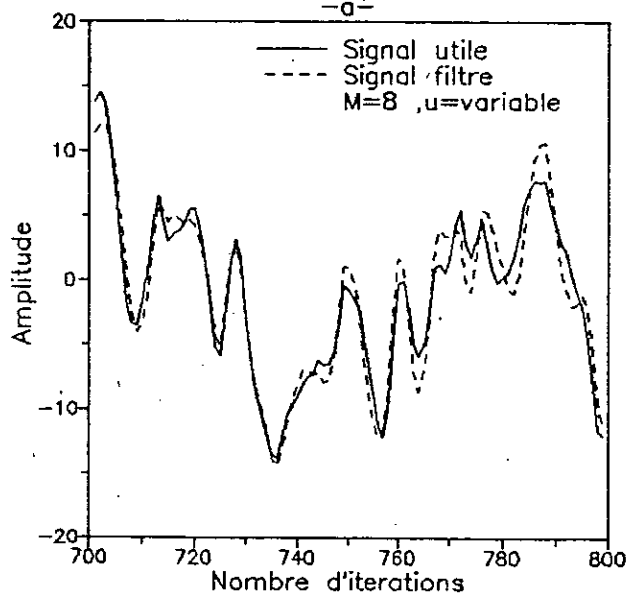
Fig. V.9 Influence de la position de la fréquence sur la convergence des deux algorithmes LMS et FTF



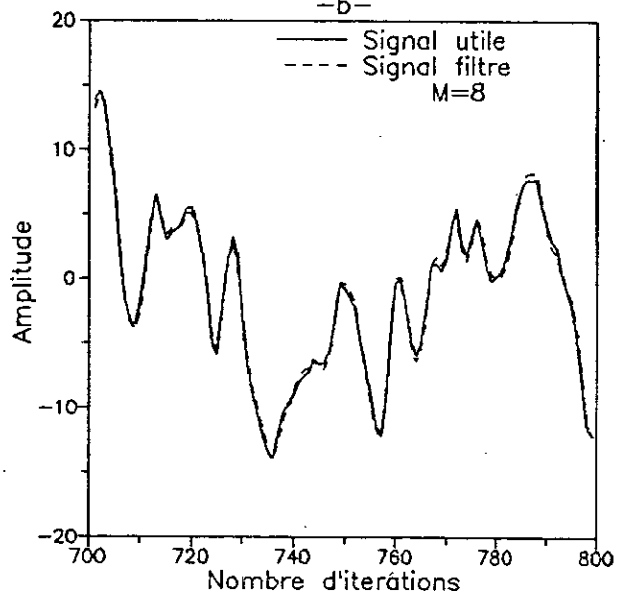
-a-



-b-

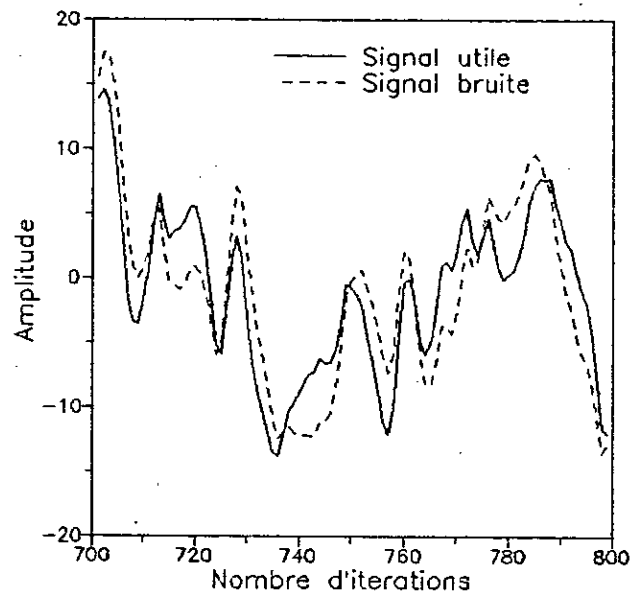


-c-

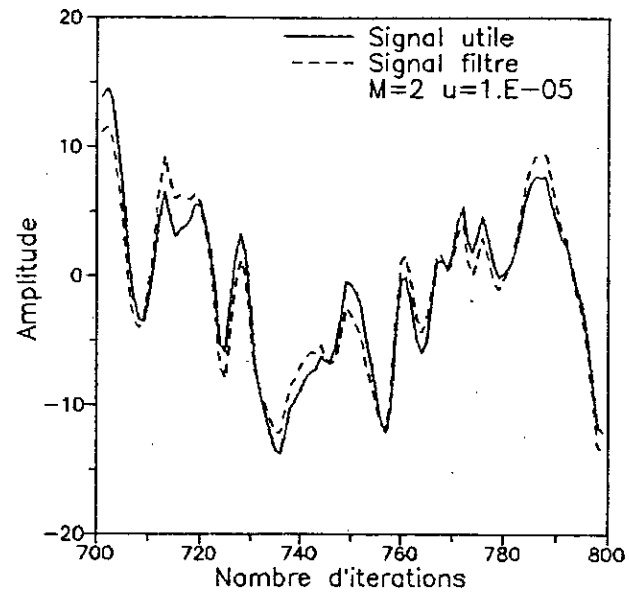


-d-

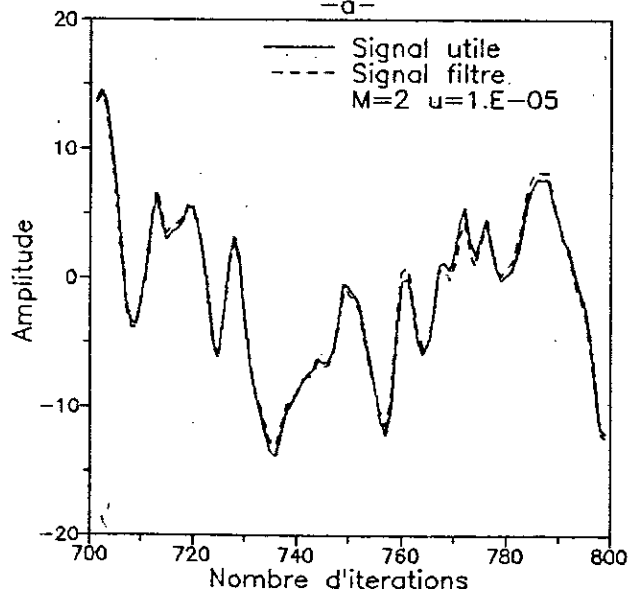
Fig. V.10 Filtrage adaptatif d'interferences sinusoidales de frequences voisines



-a-

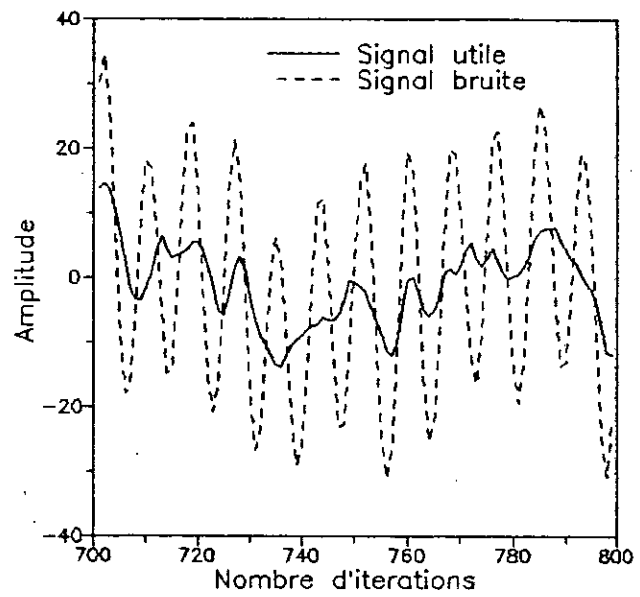


-b-

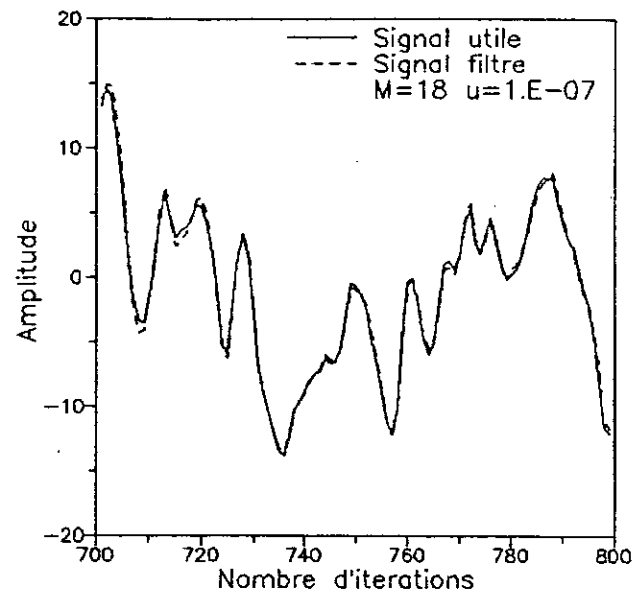


-c-

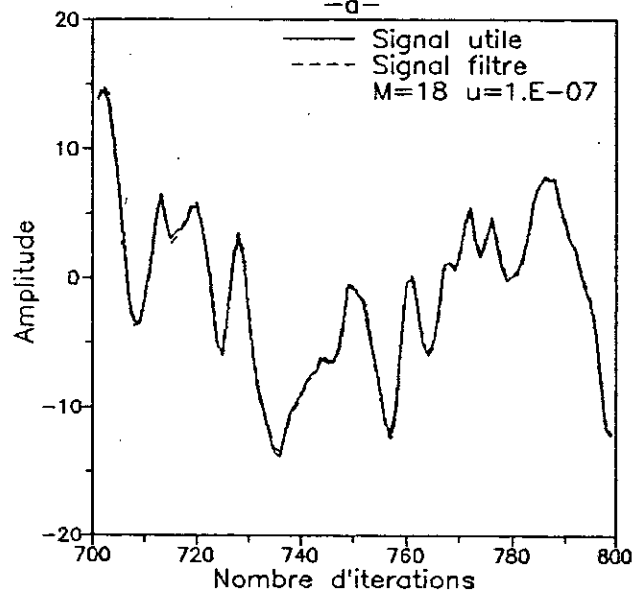
Fig. V.11 Filtrage adaptatif a deux poids avec et sans  
dephasage a 90 degre



-a-



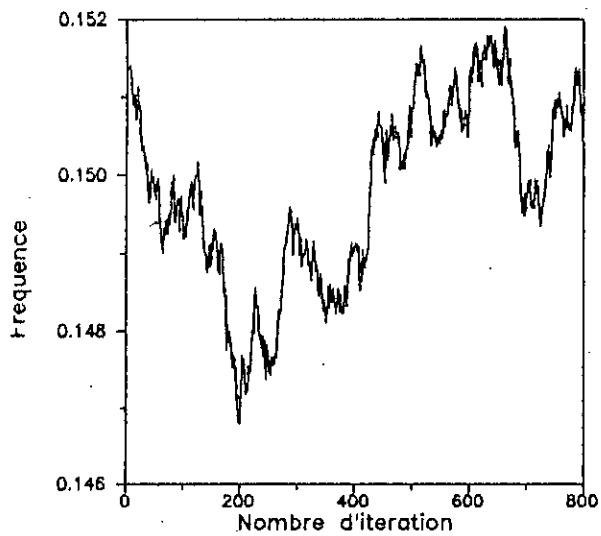
-b-



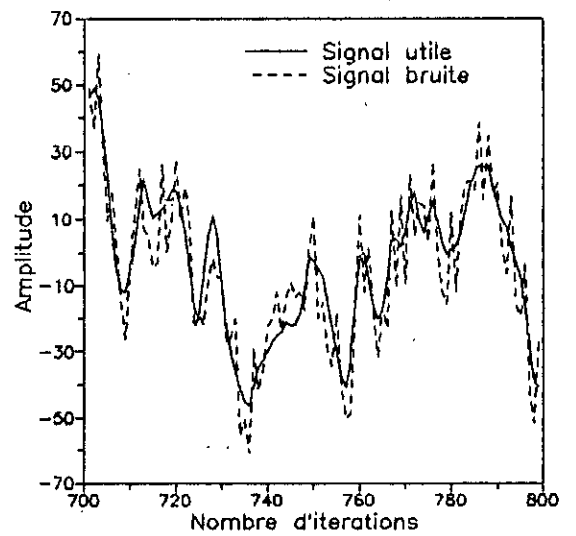
-c-

ig. V.12 Filtrage adaptatif d'un signal noyé dans l'interférence sinusoidale

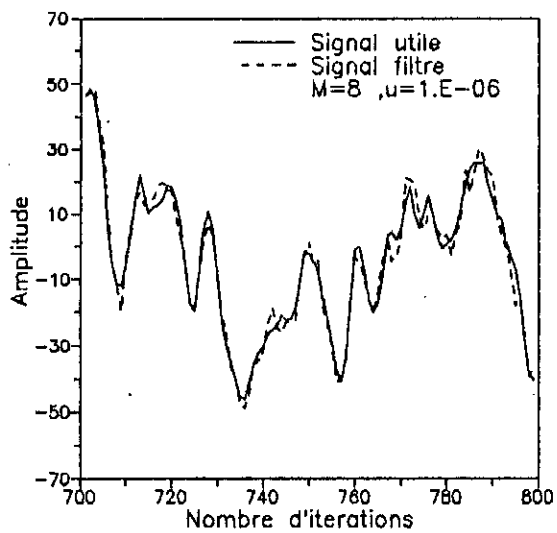




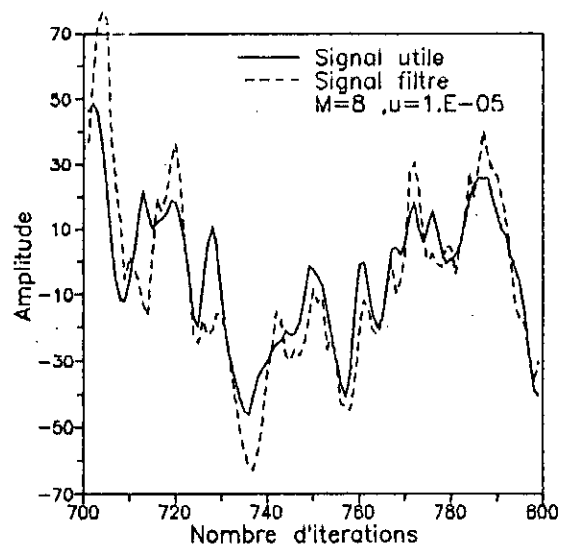
-a-



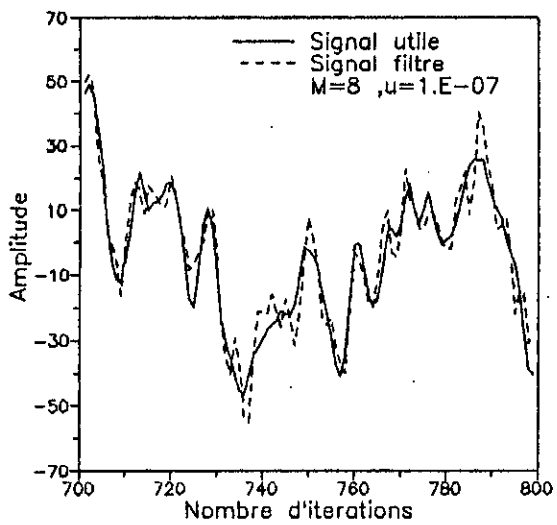
-b-



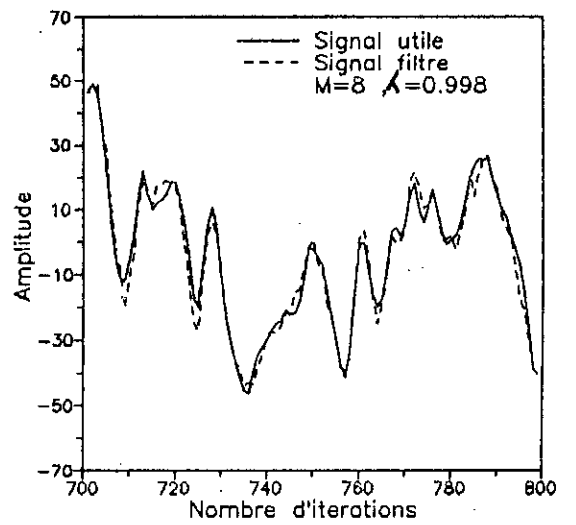
-c-



-d-

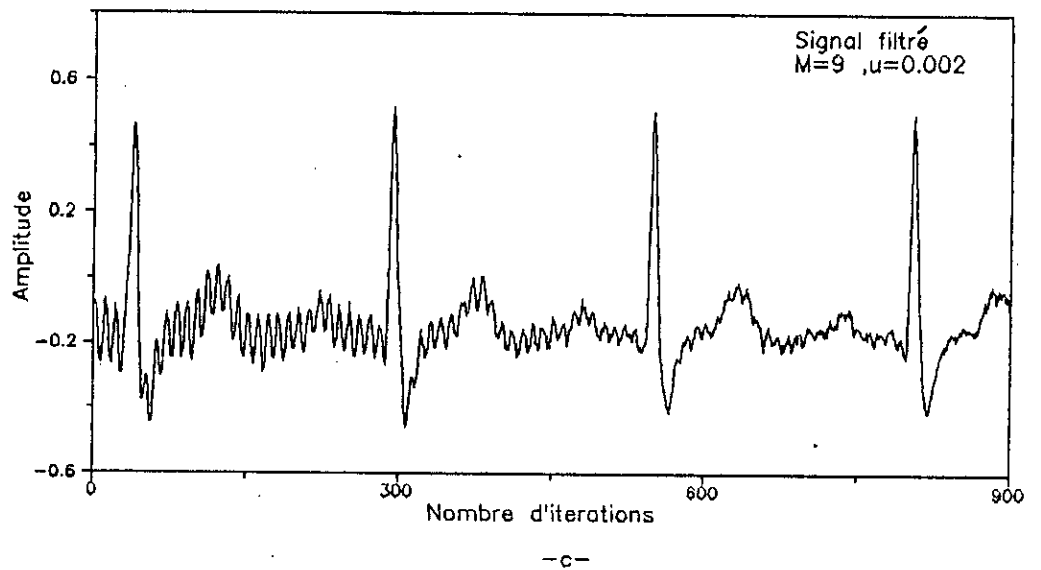
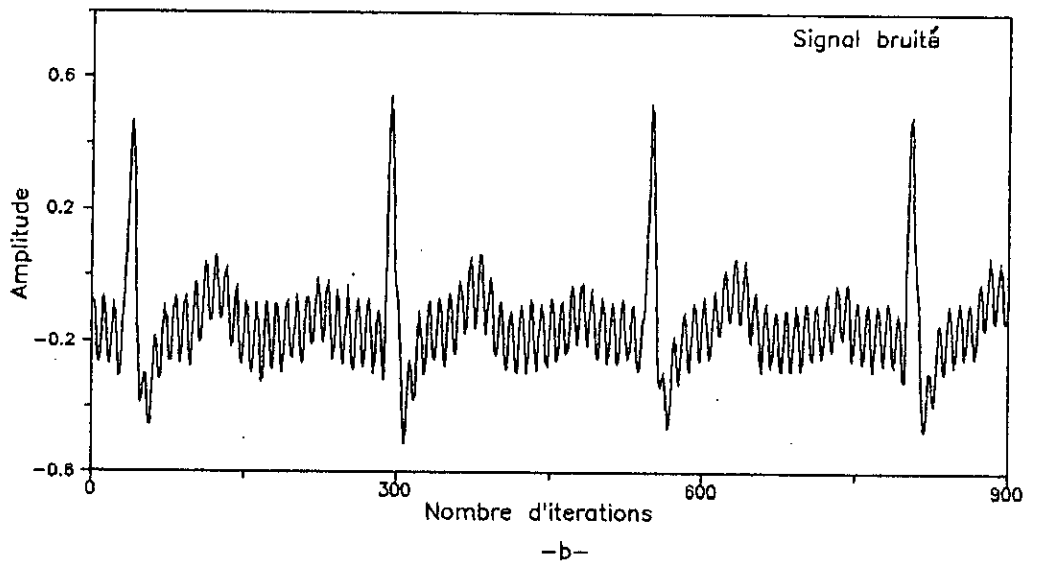
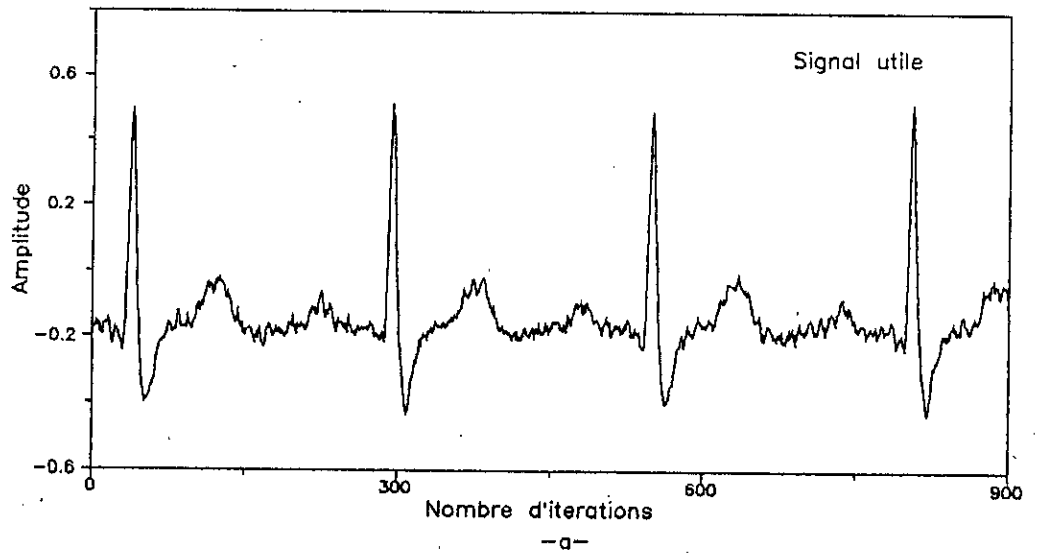


-e-



-f-

Fig. V.13 Annulation adaptative d'interferences sinusoidales issues d'un processus non stationnaire



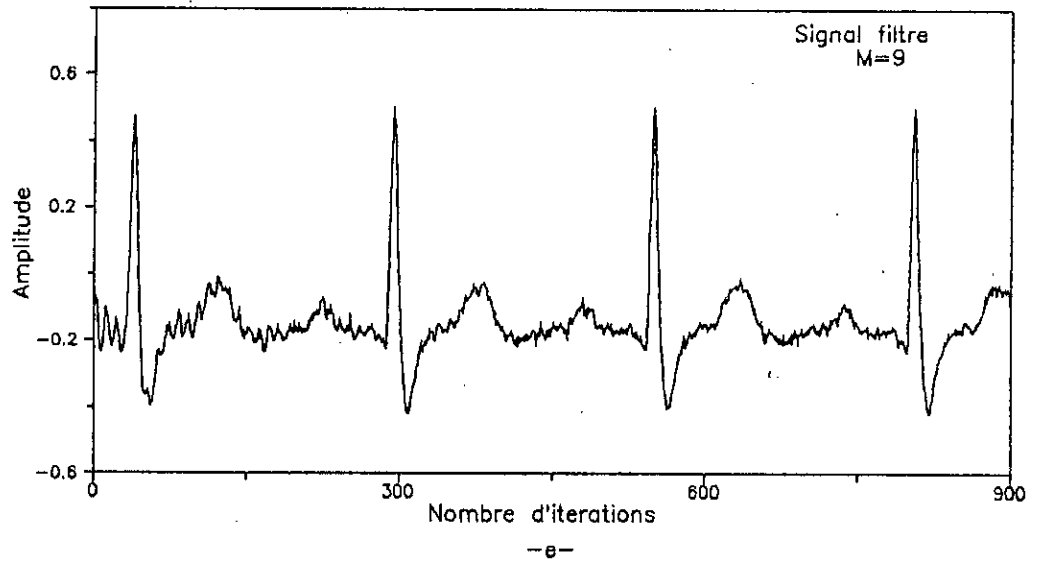
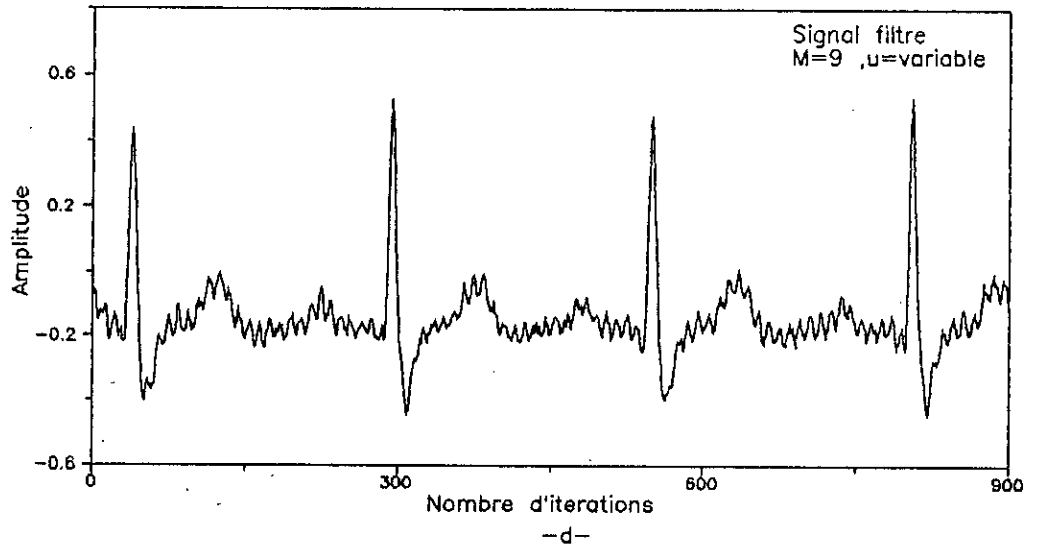


Fig. V.14 Elimination de la frequence 50Hz de l'ECG

respectivement les signaux montres aux fig V.14 c,d et e.

#### V.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, on a vu que pour l'algorithme LMS, le choix d'un pas d'adaptation faible implique une convergence fine mais très lente et vice-versa; l'algorithme LMS rapide offre une convergence rapide et fine en même temps. L'algorithme FTF quant à lui présente la convergence la plus rapide tout en impliquant une erreur résiduelle très faible (nulle théoriquement).

Bien que l'algorithme LMS rapide résout les problèmes de la rapidité et la finesse de convergence de l'algorithme LMS; il se trouve incapable (comme l'algorithme LMS) de filtrer l'interférence si celle-ci est:

- Une somme de sinusoides avec un ordre faible du filtre
- Une sinusoides de fréquence faible (proche de zero)
- Une somme de sinusoides de fréquences voisines
- Issue d'un processus aléatoire non stationnaire

L'algorithme FTF quant à lui ne présente guère cet handicap et offre les meilleurs résultats.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif de notre travail était l'annulation adaptative des interférences sinusoidales. Pour cela nous avons tout d'abord établi par analyse les performances de l'annuleur même en présence de bruits externes.

L'existence de ces bruits est gênant, cependant l'efficacité du système peut toujours être maintenue si la contamination du signal utile par l'interférence est faible.

Le deuxième volet de notre travail consistait à l'étude des algorithmes adaptatifs et leur application à un tel système. Les caractéristiques de ces algorithmes ont été étudiées et comparées tant en simulation que d'un point de vue théorique.

L'algorithme LMS rapide surmonte l'handicape que présente l'algorithme LMS et offre une convergence relativement rapide et finie en même temps. Cependant, pour ces deux algorithmes celle-ci dépend de la dispersion des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation du signal à l'entrée de référence.

Les algorithmes MCR et FIF présentent des propriétés de convergence nettement meilleurs indépendamment des caractéristiques propres du signal à l'entrée du filtre adaptatif.

L'algorithme FIF offre les meilleures performances comparées aux algorithmes LMS, LMS rapide et MCR, car il présente une moindre complexité numérique et une convergence rapide.

L'application de ces algorithmes au système d'annulation d'interférences sinusoidales, fait qu'après convergence la fonction de transfert de l'entrée de l'annuleur à sa sortie est celle d'un filtre réjecteur.

L'utilisation de l'algorithme LMS et LMS rapide offre de bons

résultats, cependant, si l'entrée de référence présente des sinusoides de fréquences faibles (proches de zero) ou élevées (proches de la fréquence maximale) ou même rapprochées, le signal à la sortie de l'anneur contiendra des harmoniques d'amplitudes non négligeables. Il a été établi par simulation que l'algorithme FIF est insensible à de telles fréquences et permet d'avoir un signal à la sortie sans distorsions.

Notre travail n'est qu'une première étape dans l'annulation adaptative des interférences sinusoidales, on peut alors envisager une continuité de ce travail en établissant par analyse théorique les caractéristiques du filtre réjecteur obtenu en utilisant l'algorithme FTF, l'implémentation en treillis des algorithmes adaptatifs et l'utilisation du filtrage adaptatif récursif.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.Labarrere, J.P.Krief & B.Gimonet, *Le Filtrage et ses applications*, Cepadues-Edition, Toulouse, 1988.
- [2] F. De Coulon, *Théorie et traitement des signaux*, Traité d'électricité Vol.VI, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1984.
- [3] J. Max, *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*, Masson, Paris, 1987.
- [4] M. Bellanger, *Traitement numérique du signal*, Masson, Paris, 1987.
- [5] M. Kunt, *Traitement numérique des signaux*, Dunod, Paris, 1981.
- [6] M. Zait & S. Choai, "Etude et simulation des filtres numériques RIF synthétisés par la methode de fenêtrage," P.F.E., E.N.P, Alger, 1993.
- [7] L. Mitiche & M.A.A. Belouchrani, "Etude unifiée des transformations fréquentielles numériques et application à quelques filtres prototype," P.F.E, E.N.P, Alger, 1991.
- [8] A. Nehorai, "A minimal parameter adaptive notch filter with constrained poles and zeros," *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, Vol.ASSP-33, pp.983-996, Août 1985.
- [9] D.V. Bhaskar Rao & S.Y.Kung, "Adaptive notch filtering for the retrieval of sinusoids in noise," *IEEE Trans, Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol.ASSP-32, pp.791-802, Août 1984.
- [10] B.Friedlander & J.O.Smith, "Analysis and performance evaluation of an adaptive notch filter," *IEEE Trans.Inform.Theory*, Vol IT-30, pp.283-295, Mars 1984.
- [11] R.Boite & M.Kunt, *Traitement de la parole*, Presses polytechniques romandes, Lansanne, 1987.
- [12] H.Urkowitz, *Signal theory and random processes*, Artech House, INC, USA, 1983.
- [13] J.Liefermann, *Les principes du traitement statistique du signal*, Masson, Paris, 1981.
- [14] J.R.Glover, "Adaptive noise cancelling applied to sinusoidal interferences," *IEEE Trans.Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol.ASSP-25, Decembre 1977.

- [15] B.Widrow & al, "Adaptive noise cancelling : principles and applications," *Proc.IEEE*, Vol.63, pp.1692-1716, Decembre 1975.
- [16] R.Johnson, "Adaptive IIR filtering : current results and open issues," *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol.IT-30, pp.237-250, Mars 1984.
- [17] B.Widrow & S.D. Stearns, *Adaptive signal processing*, Prentice-Hall, New.Jersey, 1985.
- [18] S.Haykin, *Adaptive filter theory*, Prentice-Hall, New Jersey, 1986.
- [19] N.J.Bershad & L.Zuo-qu, "LMS adaptation with correlated data-a scalar example," *IEEE Trans.Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol.ASSP-32, Août 1984.
- [20] B.Widrow & E.Walach, "On the statistical efficiency of the LMS algorithm with nonstationary inputs," *IEEE Trans.Inform. Theory*, Vol.IT-30, Mars 1984.
- [21] B.Wildrow & al, "Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter," *Proc. IEEE*, Vol.64, pp.1151-1162, Août 1976.
- [22] J.M.Cioffi & T.Kailath, "Fast, recursive-least-squares transversal filters for adaptive filtering," *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, Vol.ASSP-32, Avril 1984.
- [23] D.D.Falconer & L.Ljung, "Application of fast Kalman estimation to adaptive equalization," *IEEE, Trans.Comm.*, Vol.COM-26, pp.1439-1446, Octobre 1978.
- [24] G.Carayannis & al, "A fast sequential algorithm for least-squares filtering and prediction," *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, Vol.ASSP-31, Decembre 1983.



## ANNEXE A

Calcul de la bande de réjection d'un filtre rejeteur fixe :

Soit à calculer la bande de réjection à  $-30\text{dB}$  d'un filtre rejeteur dont les fréquences de réjections sont localisées en  $f_1, f_2, \dots, f_p$ . Les zéros de la fonction de transfert sont donnés par :

$$z_i = e^{j 2\pi f_i T_0} \quad i=1, \dots, p \quad (\text{A.1})$$

où  $T_0$  est la période d'échantillonnage.

Quant aux pôles, ils sont au même nombre que les zéros et sont distants de ceux-ci par  $\epsilon_i$  qui varie d'un pôle à un autre.

L'expression des pôles est donc donnée par :

$$p_i = (1-\epsilon_i) z_i = (1-\epsilon_i) e^{j 2\pi f_i T_0} \quad (\text{A.2})$$

la fonction de transfert est alors donnée par :

$$H(z) = \prod_{i=1}^N \frac{(z-z_i)(z-z_i^*)}{(z-(1-\epsilon_i)z_i)(z-(1-\epsilon_i)z_i^*)} \quad (\text{A.3})$$

Pour calculer la bande de réjection du filtre correspondante à la fréquence  $f_i$ , il suffit de déterminer la fréquence pour laquelle :

$$\left| H(z) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{A.4}$$

Appelons  $\Delta f_i$  la bande de réjection correspondante au zéro  $z_i$  et donc au pôle  $p_i$

Calculons  $\Delta f_i$  telle que

$$\left| H(z) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

où

$$z = e^{j\omega T_0} \\ \omega = \omega_i + \frac{\Delta\omega_i}{2} \quad \text{et} \quad \Delta\omega_i = 2\pi \Delta f_i \quad (\text{A.5})$$

donc

$$z = z_i e^{j\pi \frac{\Delta f_i}{f_0}} \quad (\text{A.6})$$

avec  $\Delta f_i \ll f_i$

On sait qu'au voisinage de  $f_i$  (tel est le cas si on veut évaluer la bande de réjection à la fréquence  $f_i$ ),  $H(z)$  aura une expression du 1<sup>er</sup> ordre qui ne contiendra que  $z_i$  et  $\varepsilon_i$  car la participation des autres pôles et zéros est négligeable donc :

$$H(z) \cong \frac{z - z_i}{z - (1 - \varepsilon_i)z_i} = \frac{1}{1 + \varepsilon_i \frac{z_i}{z - z_i}} \quad (\text{A.7})$$

En remplaçant  $z$  par sa valeur de l'équation (A.6) on aura :

$$H(z) = \frac{1}{1 + \varepsilon_i \frac{1}{\frac{\exp(j\pi \frac{\Delta f_i}{f_0}) - 1}{\Delta f_i}}} \quad (\text{A.8})$$

Comme  $\Delta f_i \ll f_0$  alors  $\exp(j\pi \frac{\Delta f_i}{f_0}) \cong 1 + j\pi \frac{\Delta f_i}{f_0}$

$$\text{d'où (A.8) devient : } H(z) = \frac{1}{1 - j\varepsilon_i (\pi \frac{\Delta f_i}{f_0})^{-1}} \quad (\text{A.9})$$

alors en utilisant (A.4) on peut écrire :

$$\frac{1}{1 - \varepsilon_i^2 \pi^2 (\frac{\Delta f_i}{f_0})^2} = \frac{1}{2} \quad (\text{A.10})$$

ce qui donne une bande de réjection

$$\frac{\Delta f_i}{f_0} = \frac{\varepsilon_i}{\pi} \quad (\text{A.11})$$

La bande de réjection à la fréquence  $f_i$  ne dépend que de la distance entre le pôle et le zéro correspondant à cette fréquence.

Pour le cas de la réjection d'une seule fréquence l'équation (A.11)

devient :

$$\frac{-\Delta f_0}{f_0} = \frac{\varepsilon}{\pi}$$

(A.12)

où  $\varepsilon$  est la distance entre le pôle et le zéro

## ANNEXE B

Expression de  $Y(z)$  :

Le  $i^{\text{ème}}$  élément du vecteur d'entrée  $X_k$  soit  $x_{ik}$  est donné par :

$$\begin{aligned} x_{ik} &= C \cos (\omega_0 (k-i+1) T_0 + \theta) \\ &= C \cos (\omega_0 k T_0 + \theta_i) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

donc

$$\theta_i = \theta - \omega_0 (i-1) T_0 \quad (\text{B.2})$$

En utilisant l'expression générale, c'est-à-dire en fonction de  $\theta_i$  et non pas de  $i$  on a :

$$x_{ik} = \frac{C}{2} \left( e^{j\theta_i} e^{j\omega_0 k T_0} + e^{-j\theta_i} e^{-j\omega_0 k T_0} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$z(\varepsilon_k x_{ik}) = \frac{C}{2} e^{j\theta_i} z(\varepsilon_k e^{j\omega_0 k T_0}) + \frac{C}{2} e^{-j\theta_i} z(\varepsilon_k e^{-j\omega_0 k T_0}) \quad (\text{B.4})$$

en adoptant les notations suivantes :

$$z' = z e^{j\omega_0 T_0}, \quad z'' = z e^{-j\omega_0 T_0}, \quad z''' = z e^{2j\omega_0 T_0}, \quad z'''' = z e^{-2j\omega_0 T_0}$$

on trouve :

$$z(\varepsilon_k x_{ik}) = \frac{C}{2} e^{j\theta_i} E(z''') + \frac{C}{2} e^{-j\theta_i} E(z'') \quad (\text{B.5})$$

pour les composantes du vecteur poids on a :

$$w_{i,k+1} = w_{i,k} + 2\mu \varepsilon_k x_{ik} \quad (\text{B.6})$$

en posant 
$$u(z) = \frac{1}{z-1} \quad (\text{B.7})$$

on aura :

$$w_i(z) = \mu C u(z) \left( E(z''') e^{j\theta_i} + E(z'') e^{-j\theta_i} \right) \quad (\text{B.8})$$

d'où

$$Y_i(z) = \frac{\mu C^2}{2} u(z')^{-} (E(z'')^{-} e^{2j\theta_i} + E(z)) + \frac{\mu C^2}{2} u(z')^{+} (E(z'')^{+} e^{-2j\theta_i} + E(z)) \quad (\text{B.9})$$

en réarrangeant les termes et en posant :

$$Y(z) = \sum_{i=1}^M Y_i(z) \quad (\text{B.10})$$

on trouve :

$$Y(z) = \frac{M\mu C^2}{2} E(z) (u(z')^{-} + u(z')^{+}) + \frac{\mu C^2}{2} u(z')^{-} E(z'')^{-} \sum_{i=1}^M e^{2j\theta_i} + \frac{\mu C^2}{2} u(z')^{+} E(z'')^{+} \sum_{i=1}^M e^{-2j\theta_i} \quad (\text{B.11})$$

## ANNEXE C

Calcul de  $\sum_{i=1}^M e^{j\theta_i}$

on a  $\theta_i = \theta - \omega_0 T_e (i-1)$  (C.1)

et ceci est dû aux retards dans le filtre transversal.

d'où

$$e^{j\theta_i} = e^{j(\theta - \omega_0 T_e (i-1))} = e^{j(\theta + \omega_0 T_e)} e^{-j\omega_0 T_e i}$$
 (C.2)

En prenant la sommation sur tous les termes on trouve :

$$\sum_{i=1}^M e^{j\theta_i} = e^{j(\theta + \omega_0 T_e)} \sum_{i=1}^M (e^{-j\omega_0 T_e})^i$$
 (C.3)

C'est donc la somme de  $M$  termes d'une progression géométrique de premier terme égal à 1 et de raison  $e^{-j\omega_0 T_e}$ .

Après calcul et simplification on trouve :

$$\sum_{i=1}^M e^{j\theta_i} = e^{j\theta} e^{-j\omega_0 T_e (M-1)} \frac{\text{Sin}(M\omega_0 T_e)}{\text{Sin}(\omega_0 T_e)}$$
 (C.4)

appelons :

$$\alpha(\theta, \omega_0 T_e, M) = e^{j\theta} e^{+j\omega_0 T_e (M-1)} \frac{\text{Sin}(M\omega_0 T_e)}{\text{Sin}(\omega_0 T_e)}$$
 (C.5)

et  $\beta(\omega_0 T_e, M) = \frac{\text{Sin}(M\omega_0 T_e)}{\text{Sin}(\omega_0 T_e)}$  (C.6)

on trouve donc

$$\sum_{i=1}^M e^{j\theta_i} = \alpha(\theta, -\omega_0 T_e, M) \beta(\omega_0 T_e, M)$$
 (C.7)

pour le calcul de  $\sum_{i=1}^M e^{-j\theta_i}$ , on remplace  $\theta$  par  $-\theta$  et  $\omega_0$  par  $-\omega_0$  car on

a  $\theta_i = \theta - \omega_0 T_e (i-1)$  et on trouve

$$\sum_{i=1}^M e^{-j\theta_i} = \alpha(-\theta, \omega_0 T_e, M) \beta(\omega_0 T_e, M)$$
 (C.8)

## ANNEXE D

Calcul de  $Y(z)$  pour une somme de sinusoïde à l'entrée de référence :

$$\text{On a } x_k = \sum_{m=1}^P C_m \cos(\omega_m k T_e + \theta_m) \quad (D.1)$$

il suffira d'évaluer les sommations suivantes

$$\sum_{i=1}^2 e^{\pm j(\theta_{im} - \theta_{in})} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^2 e^{\pm j(\theta_{im} + \theta_{in})}$$

$$\text{avec } \theta_{1m} = \theta_m, \theta_{2m} = \theta_m - \pi/2 \quad (D.2)$$

Après calcul on trouve :

$$\sum_{i=1}^2 e^{\pm j(\theta_{im} - \theta_{in})} = 2 e^{\pm j(\theta_m + \theta_n)} \quad (D.3)$$

$$\sum_{i=1}^2 e^{\pm j(\theta_{im} + \theta_{in})} = 0 \quad (D.4)$$

On n'aura que des termes VT correspondants à la différence des fréquences, ceux correspondants à la somme des fréquences s'annulent.

Soit donc :

$$Y(z) = \mu \sum_{m=1}^P C_m^2 E(z) (u(z e^{j\omega_m T_e}) + u(z e^{-j\omega_m T_e})) + \sum_{n, m=1}^P \mu C_m C_n \left\{ \begin{array}{l} u(z e^{-j\omega_n T_e}) E(z e^{j(\omega_m - \omega_n) T_e}) e^{-j(\theta_m - \theta_n)} \\ u(z e^{+j\omega_n T_e}) E(z e^{-j(\omega_m - \omega_n) T_e}) e^{+j(\theta_m - \theta_n)} \end{array} \right\} \quad (D.5)$$

Mais vu que dans ce cas le facteur  $\beta$  est égal à 1, cela veut dire que les termes VT ne sont pas négligeables et les harmoniques introduits ne peuvent être réduits.