

UNIVERSITE D'ALGER

7/78

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

پيروزاك

DEPARTEMENT MECANIQUE

الدراسة لوطنية للعلوم الهندسية
PROJET DE FIN D'ETUDES

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHEQUE

SYNTHESE DES CONNAISSANCES
ACTUELLES SUR LES ENGRENAGES

Proposé par:
ME PIEROZAK

Etudié par:
ME CHARIKHI

promotion janvier 1978

SYNTHESE DES CONNAISSANCES
ACTUELLES SUR LES ENGRENAGES

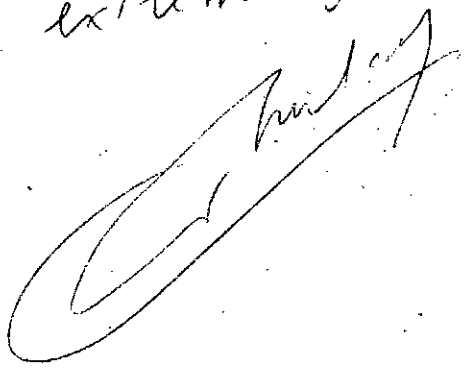
Proposé par:
M^E PIEROZAK

Etudié par:
M^E CHARIKHI

promotion janvier 1978

Je remercie M^r PIEROZAK

pour son extrême gentillesse.

A large, stylized handwritten signature in black ink, appearing to be 'P. PIEROZAK'.

BIBLIOGRAPHIE

- TRAITE PRATIQUE et THEORIQUE DES ENGRENAGE (HENRIOT) T.I et II
- CONSTRUCTION MECANIQUE - Elements des projets (L. GEMINARD, F. GROS LA FARGE)
- CINEMATIQUE (PRUDHOMME et LEMASSON)
- COURS DE CONSTRUCTION MECANIQUE de M^E PIEROZAK.

PLAN.

Introduction - Définition et Classification

Chapitre I - ENGRENAGES CYLINDRIQUES A DENTURES DROITES

- I - Etude cinématique
- II - " - Dynamique
- III - " - Technologique

Chapitre II - ENGRENAGES CYLINDRIQUES DENTURE HELICOIDALE -

- I - Etude cinématique
- II - " - Dynamique
- III - " - Technologique

Chapitre III - ENGRENAGES CONIQUES.

- I - Etude cinématique
- II - " - Dynamique.
- III - " - Technologique

Chapitre IV - ENGRENAGES GAUCHES.

- I - Définitions
- II - Engrenages gauches hélicoïdaux
- III - Couple roue et vis - Couple roue creuse et vis - couple roue et vis globique.

3) Les engrenages gauches (ou hyperboliques), pour lesquels les axes sont quelconques et dont les principaux cas sont :

- Les engrenages gauches à dentures hélicoïdales.
- Les couples roue et vis.
- Les couples roue torique et vis (roue creuse et vis).
- Les couples roue et vis globique

L'utilisation des engrenages a pris une telle ampleur dans les secteurs les plus divers de l'industrie qu'une étude détaillée, faisant souvent appel à des théories et à des techniques avancées, est nécessaire.

Nous allons justement traiter les diverses questions concernant les engrenages en procédant de la manière suivante :

I / ETUDE CINEMATIQUE

- A/ Surfaces primitives.
- B/ " " de dentures, profils.
- C/ Continuité d'engrènement. Conduite.
- D/ Interférences.
- E/ Correction de dentures
- F/ Glissement des dentures

II / ETUDE DYNAMIQUE -

- A/ Efforts et poussées
- B/ Résistance mécanique
 - Rupture
 - Pression superficielle de contact.
 - Fatigue.
 - Usure.
 - Rendement
 - Matériaux utilisés

III / ETUDE TECHNOLOGIQUE

- A/ Procédés de taillage
 - par reproduction
 - par outils de forme
 - par génération

B/ Procèdes de finition.

- Rectification.

- Rasage (ou shaving).

C/ Traitements thermiques.

ENGRENAGES CYLINDRIQUES À DENTURES DROITES

I. ETUDE CINÉMATIQUE

A. POSITION DU PROBLÈME. SURFACES PRIMITIVES

1/ Engrenages extérieurs (Pl. 1. fig. 1)

Soient (P) et (P') deux plans liés aux axes A et A' immobilisant (P') en communiquant à l'ensemble une rotation autour de O' opposée à $\vec{\omega}'$ ($-\vec{\omega}'$).

Le problème se ramène alors à un mouvement du plan P sur le plan fixe P' .

Le mouvement de (P) par rapport à (P') se ramène à une rotation $\vec{\Omega} = -\vec{\omega}' + \vec{\omega}$, autour de I , centre instantané de rotation. Or, par définition, la vitesse de I est nulle, donc la résultante de \vec{v} et \vec{v}' communiqués par $\vec{\omega}$ et $\vec{\omega}'$ en I est nulle:

$$\vec{v} + \vec{v}' = 0 \quad (\text{condition qui impose à } I \text{ d'être sur la droite } OO')$$

puisque: $\vec{v} = \vec{\omega} \times OI \Rightarrow |\vec{v}| = |\vec{\omega}| \times OI$
 et $\vec{v}' = \vec{\omega}' \times O'I \Rightarrow |\vec{v}'| = |\vec{\omega}'| \times O'I$
 et $\vec{v} + \vec{v}' = 0 \Rightarrow |\vec{v}| = |\vec{v}'|$
 on a donc: $|\vec{\omega}| \times OI = |\vec{\omega}'| \times O'I$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{OI}{O'I} = \frac{|\vec{\omega}'|}{|\vec{\omega}|}}$$

Par ailleurs:

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}', \text{ comme } \vec{\omega} \text{ et } -\vec{\omega}' \text{ ont le même sens}$$

on en déduit:

$$|\vec{\Omega}| = |\vec{\omega}| + |\vec{\omega}'|$$

Si on écrit que la vitesse de O due à la rotation $\vec{\Omega}$ est égale à celle qui est due à $-\vec{\omega}'$.

on aura:

$$|\vec{v}_O| = |\vec{\Omega}| \times IO = |\vec{\omega}'| \times O'O'$$

$$\Rightarrow IO (|\vec{\omega}| + |\vec{\omega}'|) = |\vec{\omega}'| \cdot OO'$$

$$\Rightarrow IO = \frac{|\vec{\omega}'|}{|\vec{\omega}| + |\vec{\omega}'|} \cdot OO'$$

Soit:

$$R_p = \frac{|\vec{\omega}'|}{|\vec{\omega}| + |\vec{\omega}'|} \cdot \Delta$$

Si on note IO (rayon primitif) par R_p et OO' par Δ (entraxe) la base du mouvement est le lieu des points I .

Les deux circonférences roulent sans glisser l'une sur l'autre; on les appelle circonférences primitives, elles engendrent deux cylindres d'axes respectifs A_1 et A_2 dont les surfaces latérales sont dites surfaces primitives.

Puisque les cylindres primitifs sont extérieurs l'un à l'autre l'engrenage est dit parallèle extérieur.

2/- Engrenages intérieurs (voir pl. 1. fig. 2)

Cette fois-ci le centre instantané de rotation I est extérieur à OO' (puisque $\vec{\omega}$ et $\vec{\omega}'$ sont opposés).
La position de I est donnée par:

$$\frac{IO}{IO'} = \frac{|\vec{\omega}'|}{|\vec{\omega}|}$$

et: $\vec{\Omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}'$

$$|\vec{\Omega}| = |\vec{\omega}| - |\vec{\omega}'|$$

(les vecteurs rotation $\vec{\omega}$ et $-\vec{\omega}'$ étant opposés leur modules se retranchent).

et: $|\vec{v}_o| = |\vec{\Omega}| \cdot IO = |\vec{\omega}'| \cdot OO'$

$$\Rightarrow IO = \frac{|\vec{\omega}'|}{|\vec{\Omega}|} \cdot OO' = \frac{|\vec{\omega}'|}{|\vec{\omega}| - |\vec{\omega}'|} \cdot OO'$$

et: $IO' = \frac{|\vec{\omega}|}{|\vec{\omega}| - |\vec{\omega}'|} \cdot OO'$

-7-

en posant:

$$OO' = \Delta \quad ; \quad IO = R_p \text{ et } IO' = R_p'$$

$$R_p = \frac{|\vec{\omega}'|}{|\vec{\omega}| - |\vec{\omega}'|} \cdot \Delta$$

$$R_p' = \frac{|\vec{\omega}|}{|\vec{\omega}| - |\vec{\omega}'|} \cdot \Delta$$

Notation: pour alléger l'écriture on notera les rayons primitifs par R et R' (ou r et r').

B I. SURFACES DES DENTURES. PROFILS CONJUGUES -

A I. PASSAGE DES ROUES DE FRICTION AUX ENGRENAGES

Dans une première étude nous avons vu les conditions pour obtenir un rapport donné de vitesses angulaires à transmettre d'un arbre à un autre.

Effectivement les surfaces primitives peuvent être matérialisées par des roues dites roues de friction dont les diamètres sont dits diamètres primitifs (notés: D_p et D'_p ou simplement D et D').

Mais l'utilisation de telles roues de friction, devient une source d'irrégularités, dans le cas où les puissances à transmettre sont assez importantes.

Ceci suggère l'idée de remplacer les roues de friction par des cylindres, pourvus de dentures, qu'on appelle engrenages. On appelle pignon l'engrenage de petit diamètre et roue l'engrenage de grand diamètre.

Selon que les dents soient parallèles à l'axe des roues ou enroutées suivant une hélice sur les cylindres primitifs, on parle de dentures droites ou de dentures hélicoïdales.

Le problème qui se pose pour adapter de tels engrenages est d'abord de trouver la forme exacte à donner aux dents pour obtenir une transmission correcte.

Cette forme est engendrée par le profil de la dent qui est l'intersection de la surface de denture et du plan perpendiculaire à l'axe de l'engrenage.

Le mouvement des deux roues dentées n'est possible que si les profils sont constamment tangents, on dit alors que les profils sont conjugués.

Il existe deux sortes de méthodes pour la détermination des profils conjugués, se sont :

- la méthode des enveloppes
- la méthode des roulettes

2 I. DETERMINATION DES PROFILS CONJUGUES

PAR LA METHODE DES ENVELOPPES -

(Les connaissances sur les enveloppes sont nécessaires pour une bonne compréhension de ce chapitre).

Considérons deux cylindres d'axe A et A' qui roulent sans glisser l'un sur l'autre. Si nous associons au cylindre d'axe A une surface S dont l'intersection avec un plan perpendiculaire à A est le profil γ , S roulera en glissant sur son enveloppe S' pendant le roulement sans glissement des 2 cylindres l'un sur l'autre.

Si nous associons donc au cylindre d'axe A' la surface S' , nous obtenons deux surfaces S et S' conjuguées. Le profil γ' (associé au cylindre d'axe A') sera donc conjugué au profil γ .

On définit la ligne de contact comme étant la droite L selon laquelle les deux surfaces S et S' sont tangentes (c'est la droite parallèle aux axes A et A' issue du point M , point de contact de γ et γ' à l'instant considéré).

La méthode des enveloppes qui on se donne d'étudier met en jeu les propriétés particulières des enveloppes -

0) METHODE GENERALE : (voir fig. pl. 2).

Notation : On appellera toujours C (respectivement C') l'intersection du cylindre d'axe A avec le plan perpendiculaire à A (respectivement à A') ce sont des cercles de centres O et O' .

Pour tracer le profil γ' à partir du profil donné γ nous utiliserons la propriété suivante des enveloppes.

Le point de contact d'une courbe avec son enveloppe est le pied de la normale à cette courbe, menée par le centre instantané de rotation (ici le Centre Instantané de Rotation du mouvement est I)

De ce fait un premier point est immédiat : c'est celui du contact sur la position de la figure (point M).

Pour la détermination des autres points, il suffit de prendre deux points I_i et I'_i respectivement sur C et C' tels que : $\overline{I_i I_i} = \overline{I'_i I_i}$, et de considérer le point M_i pied de la normale à γ issue de I_i . Pour qu'un point M'_i appartienne à γ' (enveloppe γ) il suffit que $I_i M_i = I'_i M'_i$ et $\alpha_i = \alpha'_i$ (α_i = angle fait entre $M_i I_i$ et la tangente à C en I_i , α'_i = angle fait entre $M'_i I'_i$ et la tangente à C' en I'_i).

Lorsque les Cercles C et C' auront roulé l'un sur l'autre dans de telles conditions jusqu'à ce que I_i et I'_i viennent en position I , M'_i et M_i seraient confondus. En répétant cette construction plusieurs fois on obtient le profil γ' .

Donc la méthode de construction est la suivante:

- Tracer sur C et C' plusieurs arcs successifs égaux ($I_1 I_2 = I_2 I_3 = I_3 I_4 = \dots = I_i I_{i+1} = I' I'_1 = I'_1 I'_2 = I'_2 I'_3 = \dots$) le tracé sera d'autant plus précis que le nombre d'intervalle pris est grand.

- Mener à partir de γ les droites normales successives issues de $I_1, I_2, I_3, I_i, \dots$ etc. Le pieds des normales sont M_1, M_2, \dots, M_i (sur la figure en prend exemple sur le point 5) puis mesurer les angles successifs $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_i, \dots$ etc. (ici nous avons pris α_5) fait entre le segment $M_i I_i$ et la tangente au cercle C en I_i , etc...

- Reporter les angles α_i et les longueurs $M_i I_i$ sur le cercle C' de telle manière à ce que α_i soit l'angle fait par $M'_i I'_i$ et la

tangente en I_i à C . On déduit ainsi M_i en reportant la longueur $M_i I_i$.

Une telle construction est trop longue si on veut avoir un tracé précis.

Ceci est dû au fait qu'on doit reporter des angles et mener des perpendiculaires à partir d'une courbe quelconque.

Cette solution n'est pas adoptée en pratique.

Sur la figure nous avons représenté en trait d'axe fort le lieu des points de contact successifs dit ligne d'engrenement des deux profils, en effet les points de cette courbe sont obtenus facilement. Ce sont les intersections successives des arcs des cercles de centres O et O' et de rayons OM_i et $O'M_i$. Par ailleurs le profil γ_1 est obtenu de la même manière à partir de γ_2 (issu d'un autre point que I) sur la figure le point de contact des deux profils est M' .

b) METHODE PONCELET (planche 3)

Cette méthode est plus directe et plus simple que la précédente.

Considérons le même profil γ que précédemment et traçons un cercle de rayon $I_i M_i$ centré sur I_i (M_i pied de la normale à γ issue de I_i); ce cercle est tangent à l'enveloppe γ' . nous pouvons ainsi éviter le report d'angle si nous traçons l'enveloppe de tous les cercles centrés en I_i et de rayon $r_i = I_i M_i$ (mais pour cette méthode on doit mener des perpendiculaires à γ issues de I_i).

Méthode de tracé :

- 1) Tracer les normales à γ issues de I_2, I_3, \dots, I_i
 - 2) Tracer les cercles de centres successifs I_2, I_3, \dots, I_i et de rayons successifs $r_2 = I_2 M_2, r_3 = I_3 M_3, \dots, r_i = I_i M_i$. puis tracer l'enveloppe de ces cercles.
- mais cette méthode n'est pas utilisée en pratique.

Nous étudierons toutefois une génération de dentures dans les engrenages Poncelet.

C1. METHODE DE REULEAUX. (planche 4)

Cette méthode fait intervenir la ligne d'engrènement et comporte deux étapes :

- 1) Construction de la ligne d'engrènement à partir de γ .
- 2) Construction de γ' à partir de la Ligne d'engrènement en procédant de manière inverse.

1^{ère} étape : Soit un point M_i de la ligne d'engrènement, ce point se trouve sur un arc du cercle de centre O et de rayon OM_i , et puisque le cercle C ayant roulé jusqu'à ce que I_i vienne en position I , M_i se trouve sur la ligne d'engrènement M_i se trouve aussi sur le cercle de centre I et de rayon $I_i M_i$, donc M_i est l'intersection de ces deux arcs de cercle.

2^e étape : c'est l'étape inverse.

Connaissant le point M_i (point de contact de M_i' et M_i , I_i et I_i sont en coïncidence.) il suffit de constater que M_i' se trouve simultanément sur le cercle de centre I de rayon $I M_i$ et sur le cercle de centre O de rayon $O M_i$.

- Méthode :

- 1^{er} : mener les perpendiculaires à γ issues de $I_1, I_2, I_3, \dots, I_i$ de pieds (sur γ) : M_1, M_2, \dots, M_i .

- 2^{ème} : tracer l'arc de cercle de centre I_i et de rayon $I_i M_i$, puis l'arc de cercle de centre O et de rayon $O M_i$. L'intersection donne le point M_i de la ligne d'engrènement.

- 3^{ème} : pointer le compas sur O et tracer le cercle avec une ouverture $O M_i$, l'intersection de ce cercle avec le cercle de centre I_i de rayon $I_i M_i$ donne le point M_i' de γ' qui viendra en contact avec M_i quand I_i et I_i' seront confondus.

- Les trois méthodes de tracé de profils conjugués font toutes appel à un tracé d'enveloppe. Elle présentent donc toutes l'inconvénient de la difficulté du tracé et la construction de tel profil serait trop onéreuse. C'est pourquoi cette solution est rejetée. Nous allons donc étudier un autre mode de génération de profil conjugués : la méthode des roulettes.

31. METHODE DES ROULETTES - (pl. 5 et 6)

a) Principe (voir pl. 5)

Dans cette méthode on a été amené à introduire une troisième (3^{ème}) surface cylindrique tangente aux deux (2) surfaces primitives. Cette surface appelée Roulette et notée (R) Roulera ^{sur C et C'} sans Glissement sur les deux surfaces primitives. Une surface (N) invariablement liée à (R) enveloppe deux surfaces S et S' conjuguées liées aux surfaces primitives pendant le roulement sans glissement : d'axe instantané de rotation (Δ) des trois surfaces.

Soit C et C' les intersection des surfaces primitives plan (P) perpendiculaire aux axes A et A', et L et R les intersections du plan P et des surfaces (R) et (N) (voir figure)

Nous allons nous servir des propriétés du roulement sans glissement pour montrer que L enveloppe γ et γ' et en déduire la construction des profils conjugués par la méthode de roulettes.

b) Détermination des profils par la méthode des roulettes - (pl. 6)

Quand (R) roule sans glisser sur C, L enveloppe un profil γ , le point de contact des deux courbes γ et L est la normale commune à γ et L de pied M, issue de I.

Quand (R) roule sans glisser sur C', L enveloppe un profil γ' ; le point de contact des deux courbes γ' et L est la normale de pied M, commune à γ et L, issue de I. Donc γ et γ' sont bien tangents en M, ce sont des profils conjugués.

Nous pourrions donc construire deux profils conjugués γ et γ' à l'aide de la donnée de deux cercles primitifs (R) et L (L quelconque) mais cette construction est longue et inutile. Nous nous placerons dans le cas particulier où L est un point de (R). (dans ce cas les enveloppes de L dans le mouvement de (R) par rapport à C et R par rapport à C' se réduisent aux lieux successifs des points L pendant les

deux mouvements) sur la planche 6, on a procédé à une telle construction. Deux paires de profils γ sont construits, nous nous intéresseront au profil γ et γ' .

(R) est ici un cercle intérieur à C.

Le problème est donc de rechercher le lieu de L dans le mouvement (R) par rapport à C et dans le mouvement de (R) par rapport à C'.

Sur la figure le point L est représenté en position M à l'instant où γ et γ' sont tangents. en ce point appartient à γ et γ' . Pour représenter les autres points de γ et γ' il suffit de traduire graphiquement le roulement sans glissement de (R) sur C et C'.

Pour cela nous diviserons C, C' et (R) en intervalles $I_1, I_2, I_3, \dots, I_1', I_2', \dots, J_1, J_2, \dots$ tels que :

$$I_1 I_2 = I_1' I_2' = J_1 J_2 = \dots = I_i I_{i+1} = I_i' I_{i+1}' = J_i J_{i+1}.$$

de telle manière à ce que I_i, I_i' et J_i coïncident à un instant donné.

Soit un point J_i de (R), la corde $J_i L$ (L appartient à (R), L est représenté par sa position particulière M sur la figure) fait un angle α_i avec la tangente à (R) en J_i .

Soient les points M_i' et M_i tels que $I_i' M_i' = I_i M_i = J_i L$ et tels que les angles respectifs faits entre $I_i' M_i'$ et $I_i M_i$ avec les tangentes en I_i' et I_i à C' et C soient égaux à α_i .

Les points M_i et M_i' se trouvent respectivement sur γ et γ' et sont confondus lorsque J_i, I_i et I_i' sont confondus en I.

Effectivement (R) ayant roulé sur C jusqu'à I, $J_i L$ et $I_i M_i$ se confondent. Il en est de même pour $I_i' M_i'$ et $J_i L$, (R) ayant roulé sur C' jusqu'à ce que I_i' vienne se confondre avec I. M_i et M_i' seront donc bien confondus et γ et γ' sont bien tangents au point de contact (du fait du roulement sans glissement de (R) sur C et C').

Conclusion : Le mouvement de la roulette nous permet de construire deux profils conjugués à partir de la donnée d'une roulette et d'un point L lié à la roulette :

Si la roulette et le profil γ sont imposés (cas de la pl. 6) L se déduit à partir de ces données et donc γ' aussi.

(L est l'intersection de γ et (R)).

Méthode de tracé :

- Diviser (R) , C et C' en arcs égaux les points sur (R) , C et C' seront notés successivement J_i , I_i , et I'_i . La position de L sur (R) est présentée par le point de contact de γ et γ' à l'instant où la figure est représentée.
- Cette position servira au report de longueurs $J_i L$, soit α_i l'angle que fait $J_i L$ avec la tangente à (R) en J_i .
- Reporter la longueur $J_i L$ à partir de I_i sur un segment qui fait un angle α_i avec la tangente à C en I_i , on obtient ainsi le point M_i . Faire de même pour I'_i sur le cercle l'on obtient le point M'_i qui viendra en contact avec M_i quand J_i viendra en I .
- On obtient ainsi γ en joignant les points M_i et γ' en joignant les points M'_i .

Sur la figure, l'exemple est pris sur J_5, I_5 , et I'_5

$$J_5 L = I'_5 M' = I_5 M \quad ; \quad (J_5 L, (R)) = (I'_5 M', C') = (I_5 M, C) = \alpha_5.$$

Remarque :

La construction pourrait être faussée si les angles α_i ne sont pas convenablement reportés (pour C , α_i est pris en dessus de la tangente contrairement au cas de (R) et C')

Mais cette étude générale n'a qu'un intérêt théorique. En pratique les roulettes choisies sont bien particulières d'une part et le point L a une position particulière sur (R) .

Les deux cas particuliers exploités sont :

- La génération de dentures épicycloïdale.
- La génération de dentures à développantes de cercle.

4) Cas particulier des dentures épicycloïdales :

Rappel sur le roulement sans glissement d'un cercle sur une courbe :

- un point d'un cercle décrit une cycloïde si le cercle roule sans glisser sur une droite.
- un point d'un cercle décrit une épicycloïde si le cercle roule sans glisser à l'extérieur d'un cercle.
- un point d'un cercle décrit une hypocycloïde si le cercle roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle.

Si nous nous plaçons dans le cas où (R) est constituée de deux arcs de cercles G et G' de rayon g et g' , tangents en I à C et C' , et si nous réduisons L au point I , nous nous plaçons dans le cas particulier de génération de dentures épicycloïdales.

Nous ferons une distinction entre les trois explications aux engrenages extérieurs, intérieurs, et aux pignons et crémaillères.

a) Engrenages extérieurs : (voir pl. 7)

Nous supposerons que G et G' sont intérieurs à C et C' . Si nous étudions le roulement sans glissement de (R) sur C et C' nous constatons que :

Lors du roulement sans glissement de (R) sur C' :

- I décrit un arc d'hypocycloïde γ_1' (flanc de pied du profil lié à C') lorsque G' roule sans glisser à l'intérieur de C' .
- I décrit un arc d'épicycloïde γ (flanc de tête du profil lié à C') lorsque G roule sans glisser sur C' .

Lors du roulement sans glissement de (R) sur C :

- I décrit un arc d'hypocycloïde γ' (flanc de pied du profil lié à C) lorsque G roule sans glisser à l'intérieur de C .
- I décrit un arc d'épicycloïde γ (flanc de tête du profil lié à C) lorsque G' roule sans glisser sur C .

Remarques :

- 1) Les arcs de cercles G et G' constituant la roulette ne sont pas quelconques :

Ils sont intérieurs et leurs diamètres respectifs sont égaux ^{aux} rayons respectifs de C et C' dans ce dernier cas nous obtenons des flancs de pied rectilignes.

(si $2g > R$ et $r_g' > R'$, les racines des dents seraient très affaiblies.) (- voir pl. 9. fig. 2)

2) Le flanc de tête est limité par un cercle dit "Cercle de tête" le flanc de pied est limité par un cercle dit "Cercle de pied" et la différence des rayons de ces deux cercles constitue la hauteur de la dent conforme à la normalisation qui sera étudiée plus loin.

3) Le lieu des points de contact des deux dents (ligne d'action ou ligne d'engrènement) est le lieu du point I dans le mouvement de (R) par rapport à C et () par rapport à C', c'est donc une portion de (R).

La ligne d'engrènement est limitée par le point M et M₁ (début et fin de l'engrènement) qui sont les intersections de (R) et des deux cercles de tête (sur la planche est représentés en trait fin le couple de dentures au début et à la fin de l'engrènement, en trait fort le contact en I. Cette ligne d'engrènement représentée en trait d'axe fort sur la figure.

4) le sens du mouvement de roulement sans glissement de (R) par rapport à C et C' est représenté par la flèche f.

b) Engrenages intérieurs (Pl. 8)

La roulette est constituée par deux arcs des cercles G et G' tangente en I aux surfaces primitives. Le diamètre du cercle G intérieur aux deux cercles primitifs est inférieur au rayon primitif du pignon, le cercle G' est extérieur aux deux cercles primitifs comme le montre la figure.

Le même raisonnement que dans le cas des engrenages extérieurs nous conduit à conclure:

Roulement sans glissement de la roulette sur C :

- I décrit l'arc d'épicycloïde γ_1 (flanc de tête du profil du pignon) quand G' roule sans glisser à l'extérieur de C .

- I décrit l'arc d'hypocyloïde de γ (flanc de pied du profil du pignon) quand G roule sans glisser à l'intérieur de C .

Roulement sans glissement de la roulette sur C'

- I décrit l'hypocyloïde γ' (flanc de tête du profil de la roue) quand G roule à l'intérieur de C' .

- I décrit l'arc d'épicycloïde γ'' (flanc de pied du profil de la roue) quand G' roule à l'extérieur de C' .

Remarques:

1) on peut obtenir un flanc de pied rectiligne pour le pignon (dans le cas où le diamètre²³ de G est tel que $2g = R_p$) mais on ne peut pas obtenir un flanc de tête rectiligne pour la roue, puisque ce même diamètre de G ne peut pas être égal à R_p . (voir planche 9. fig. 1).

2) La ligne d'engrènement est là aussi confondue avec une partie de la roulette (en trait d'axe fort sur la figure).

c) Pignon et crémaillère épicycloïdaux: (Pl. 19).

Une crémaillère a une surface primitive de rayon infini (plan), (ligne primitive C).

Étudions à présent les profils correspondant à l'ensemble pignon et crémaillère.

La roulette est aussi l'ensemble des deux arcs des cercles G et G' de même rayon, g tel que $2g < R_p$. Ces deux cercles sont tangents à C et C' en I comme l'indique la figure.

- I décrit l'arc de cylindre (flanc de pied du profil de la crémaillère) lorsque G roule sans glisser sur C' dans le sens de la flèche.

- I décrit l'arc de cylindre (flanc de tête du profil de la crémaillère) lorsque G' roule sans glisser sur C'.
Pour le pignon:

- I décrit l'arc d'hypocycloïde (flanc de pied du pignon) lorsque G' roule sans glisser à l'intérieur de C.

- I décrit l'arc d'épicycloïde (flanc de tête du pignon) lorsque G roule sans glisser à l'extérieur de C.

Remarque :

1) la ligne d'engrènement est représentée en trait d'axe fort.

2) le flanc de pied du pignon sera rectiligne si $2g = R_p$.

3) Si nous prenons pour roulette l'arc de cercle G et la droite C nous obtenons un flanc de pied rectiligne pour la crémaillère seulement le flanc de tête du pignon sera en développante de cercle.

Cette catégorie d'engrenage représente toutefois de graves inconvénients, dont les principaux sont les suivants:

- Fonctionnement avec à coups et vibration à cause des variations des poussées sur les dents (ligne d'engrènement non rectiligne).

- Réalisation pratique difficile.

- Mauvais fonctionnement si l'entraxe n'est pas rigoureusement respecté.

Tous ces inconvénients ont fait que les engrenages épicycloïdaux sont rejetés.

5/ Cas des dentures en développante de cercle (voir pl. 10).

Génération d'un profil en développante de cercle.

Nous sommes en présence de ce cas si nous prenons pour roulette un plan (R) tangent en I aux deux surfaces primitives. La surface (N) est un plan perpendiculaire à (R) suivant une droite MM' parallèle à Δ (axe instantané de rotation).

Si nous nous intéressons au roulement sans glissement de R sur C (voir fig. 4), nous constatons que (N) enveloppe une surface S par rapport au cylindre qui est engendrée par la droite MM' (car IM perpendiculaire à (N)) le profil γ est donc la courbe décrite par le point M lié à la droite R qui roule sans glisser sur C :

C'est un arc de développante de cercle et la surface S (surface de denture) est une surface cylindrique engendrée par cet arc.

La développante de cercle jouit de certaines propriétés géométriques qui nous permettront d'en faire un tracé exact (voir plus loin).

Génération des surfaces conjuguées (voir pl. 10 - Fig. 2)

La figure 2 correspond au cas réel d'engrenages à développante de cercle. En effet (N) n'est pas un plan perpendiculaire à (R) , mais il fait un angle avec celui-ci et le coupe suivant la droite NN' parallèle à Δ (AIR).

Pour montrer que le roulement sans glissement de P sur les deux cylindres primitifs, engendre deux surfaces (S) et (S') enveloppées par (N) , introduisons le plan (R') perpendiculaire à (N) contenant Δ et auquel est lié le plan (N') coïncidant avec (N) .

Si (R) roule sans glisser sur les cylindres primitifs dans le sens indiqué sur la figure, il entraîne (R') qui va glisser sur lui-même et rouler sans glisser sur les deux cylindres coaxiaux aux cylindres primitifs, et de rayons R_1 et R_1' puisqu'il est entraîné par (N) qui est invariablement lié à (R) .

On a :

$$\frac{v_{R'}}{v_R} = \frac{IM}{IN} = \cos \beta$$

comme: $V_R = \omega R = \omega' R'$ ($V_R = \text{vit. de translation du plan } R$, R')
 $V_{R'} = \dots R'$)

on a: $\frac{V_{R'}}{V_R} = \frac{V_{R'}}{\omega R} = \frac{V_{R'}}{\omega' R'} = \cos \beta$

$\Rightarrow V_{R'} = \omega R \cos \beta = \omega' R' \cos \beta =$

Puisque: $R \cos \beta = OT$ et $R' \cos \beta = O'T'$

$$V_{R'} = \omega \cdot OT = \omega' \cdot O'T'$$

donc,

R' : rouler sans glisser sur les deux cylindres de rayons OT et $O'T'$ ceci nous ramène aux conditions du problème étudié précédemment pour la génération du profil à développante de cercle.

Les surfaces (S) et (S') engendrées par (N') dans le mouvement de (R') sur les deux cylindres de rayons R_1 et R'_1 , sont deux surfaces cylindriques dont les profils constamment tangents (en M) sont des développantes des cercles C_1 et C'_1 (cercles de centre O et O' de rayon R_1 et R'_1)

Nous avons tracé les profils conjugués correspondant aux cercles primitifs C et C' sur la planche 11.

Remarquer que les profils γ_1 et γ'_1 d'un côté, γ et γ' d'autre part sont parallèles, ceci est dû à l'une des propriétés de la développante d'un même cercle.

On peut écrire :

$$IM_1 = \widehat{DD_1} = \widehat{D'D'_1} = \theta R_1 = \theta' R'_1$$

θ et θ' étant les angles $\widehat{DOD_1}$ et $\widehat{D'O'D'_1}$

donc

$$\frac{\theta}{\theta'} = \frac{R'_1}{R_1}$$

Nomenclature et normalisation (pl. 12 et 13)

L'intersection d'un plan perpendiculaire à A et A' avec les cylindres sur lesquels roule sans glisser le plan R' définit deux cercles C_1 et C'_1 , dit cercles de base, de rayons $R_1 = R \cos \beta$ et $R'_1 = R' \cos \beta$.

- Elle définit aussi la tangente commune TT' dite aussi droite d'action ou encore ligne d'engrènement.

- Cette droite fait l'angle β avec (R) , β est dit angle de pression. La normalisation actuelle fixe la valeur de β à 20 degrés. Ce choix est justifié sur la planche 12.

- Ce genre d'engrenages a fait l'objet d'une normalisation pour des raisons multiples dont les principales sont les suivantes :

- Les poussées sur les dents ne sont plus variables contrairement aux cas des dentures épicycloïdales; ceci implique une régularité dans le fonctionnement.

- La réalisation technologique est relativement aisée comme nous le verrons plus loin.

- Et surtout possibilité d'avoir un entraxe de fonctionnement différent de l'entraxe considéré sans changer le rapport de vitesse puisque ce rapport ne dépend que des cercles de base.

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{R_1}{R'_1}$$

La position du centre instantané de rotation est alors donnée par $\omega R = \omega' R'_1$, elle définit les diamètres primitifs de fonctionnement; sur la planche 20 nous avons comparé les dentures épicycloïdales aux dentures à développante de cercle (engrènement, efforts, usure, technologie etc...)

Normalisation (voir pl. 13)

on définit d'abord le pas circonférenciel (ou pas au primitif), qui est représenté par $\overline{AA'}$ sur la figure sa longueur p est $p = z \cdot p = \pi \cdot D_p$ où z est le nombre de dents de la roue et D_p le diamètre primitif.

Par ailleurs l'arc \overline{AB} sur C est dit épaisseur de la dent et symbolisé par e , et l'arc $\overline{BA'} = \overline{AB}$ dit intervalle et noté i ($i = e$)

$$\text{on a : } p = i + e = 2e = 2i$$

le module, symbolisé par M est défini par :

$$M = \frac{p}{\pi} \quad \text{où } p \text{ est exprimé en mm.}$$

on en déduit la relation fondamentale :

$$D_p = M z$$

Notons que si p exprimé en pouces le rapport $P = \frac{\pi}{p}$ est appelé "diametral pitch".

et on a : $P.M = 25,4$

La normalisation prévoit les valeurs suivantes pour les modules en mm.

- Première liste :

1	1,25	1,50	2	2,50	3	4	5	6	8	10	12	16	20
---	------	------	---	------	---	---	---	---	---	----	----	----	----

- 2^{ème} liste :

1,125	1,375	1,75	2,25	2,75	3,50	4,50	5,50	7	9	11	14	18
-------	-------	------	------	------	------	------	------	---	---	----	----	----

- 3^{ème} liste :

3,25	3,75	6,50
------	------	------

La préférence est accordée aux valeurs de la 1^{ère} liste. Les valeurs de la 2^{ème} liste peuvent être prises dans le cas où celles de la 1^{ère} ne conviennent pas. Les valeurs de la 3^{ème} liste ne doivent être prises qu'exceptionnellement.

Saillie et creux :

La roue dentée est limitée extérieurement par le cylindre de tête (engendré par le cercle de tête) et à sa partie inférieure par le cylindre de pied (engendré par le cercle de pied). Ces deux cylindres sont coaxiaux avec le cylindre primitif. La différence $D_a - D_f$ des diamètres de ces cylindres est égale à $2h$ où h est la hauteur de la dent.

Cette hauteur se partage en saillie s (partie extérieure à C) et en creux t (partie intérieure à C). La normalisation a fixé :

$$s = M$$
$$t = 1,25M \Rightarrow h = 2,25M$$

La largeur l de la dent varie en fonction du guidage de la roue dentée selon la loi :

$l = k M$ où k est le coefficient de largeur de la dent caractérisant le guidage.

$k = 6,4$ ou 8 pour les guidages médiocres.

$k = 10$ ou $12,5$ pour les bons guidages

$k = 16$ pour les guidages soignés

- Notons que le cercle de base (C_b) définit un pas de base (P_b).

Sachant qu'on ne peut associer que des engrenages de même module et tenant compte de la normalisation, nous pouvons procéder à des tracés de dentures à développante de cercle.

TRACÉ DE DENTURES À DÉVELOPPANTE DE CERCLE - (Pl. 14, 15, 16)

Rappelons d'abord les propriétés principales d'une développante de Cercle (pl. 14).

La développante du cercle C de Rayon R , est le lieu du point M fixe sur une tangente au cercle C , qui roule sans glisser sur celui-ci.

- Deux points M et M' de la tangente décrivent deux développantes de cercle parallèles.

- le point de contact de M avec le cercle est dit point de rebroussement.

- La normale en chaque point de la développante de cercle est tangente au Cercle C .

- Le rayon de courbure ρ de la développante du cercle C au point M est tel que : $\rho = TM$, où T est le point de tangence avec C de la normale menée par M .

- Un fil inextensible enroulé sur le cercle C , et tendu par une extrémité se déroule en décrivant une développante de cercle.

TRACE APPROCHE (pl. 15).

Remarque:

Pour les grands nombres de dents ce tracé donne une grande précision.

Dans ce tracé on utilise la propriété du rayon de courbure de la développante du cercle.

En effet le rayon de courbure en I des deux profils en contact étant IT pour γ et IT' pour γ' ; γ et γ'

peuvent être considérés en première approximation comme étant des arcs de cercles de centres respectifs T et T' et de rayons respectifs $R = IT$ et $R' = IT'$. Le module, l'angle de pression, le nombre de dents du pignon et de la roue étant connu l'engrenage peut être tracé aisément.

TRACE A PARTIR DE PROFIL CONJUGUE (pl. 16)

Pour cet exemple on se donne de tracer les dentures d'un pignon sachant l'angle de pression, le module, le nombre de dents du pignon et de la roue, et enfin connaissant le tracé des dentures de la roue.

La méthode de tracé d'une denture du pignon fait appel au roulement sans glissement de C' et à la droite d'action.

Soit un point M quelconque sur le profil d'une dent de la roue ce point M viendra à la position M' en contact avec le point M' ^① le point M' est déterminé par l'intersection du cercle de centre O'' et de rayon $O''M$ et de la droite (XX') i' et i'' , points liés à C' et C , viendront en contact en I, la distance $M'i'$ est donc égale à $M'i''$, or $i'i'' = i'i'$ car, C' roulant sans glisser sur C , i' et i'' viennent en contact en I. Par ailleurs $M'i'' = M'i'$ car M' et M'' sont confondus quand i' et i'' le sont aussi. Ceci nous permet de construire M'' , il suffira de déterminer l'intersection des deux cercles:

C_1 de centre O , et de rayon OM'' et C_2 de centre i'' et de rayon $i'i''$ (OM'' et $i'i''$ sont connus puisqu'on connaît la position de contact de M'' et M).

① du pignon sur la droite d'action XX' .

On obtient ainsi tous les points de la denture conjuguée. Le point B où les sommets des dents du pignon entrent en contact avec les dents de la roue est donné par l'intersection du cercle de tête du pignon C_a et de la droite d'action XX' .

Le point A où les sommets des dents de la roue entrent en contact avec les dents du pignon est donné par l'intersection des cercles de tête de la roue C'_a et de la droite d'action YY' .

Il existe un autre mode de tracé de denture en développante du cercle à partir de la donnée de l'angle de pression, le module, et le nombre de dents du pignon et de la roue (pl. 17).

La ^{méthode} ~~procédure~~ consiste à utiliser la propriété fondamentale de la développante du cercle (roulement sans glissement de la droite d'action sur les cercles de base C_b et C'_b).

Pour cela, il faut donc diviser les deux cercles de base en arcs égaux (les arcs de C_b ne sont pas forcément égaux aux arcs de C'_b) et graduer la droite d'action de telle manière à avoir des segments sur II' égaux aux arcs C'_b , et les segments sur II' égaux aux arcs sur C_b .

En numérotant les points sur les segments et les arcs comme l'indique la figure, de telle manière à ce que les points de même numéro soient en contact.

Un point M quelconque de la développante de cercle est obtenu en traçant à partir du point de tangence T_i sur le cercle un segment tangent au cercle de base, et de longueur $T_iM = N_iI$, N_i étant le point sur le segment qui viendra en contact avec le cercle de base après le roulement sans glissement.

On obtient ainsi tous les points de γ et γ' qu'on limitera par le cercle de pied et le cercle de tête selon la normalisation.

Nota : Sur la figure nous avons pris un exemple non conforme à la normalisation ($\beta = 45^\circ$).

EINGRENAGE INTERIEUR A DEVELOPPANTE
DE CERCLE - (pl. 18) -

L'avantage de ce genre d'engrenage est de limiter l'encombrement au prix des inconvénients de la difficulté de réalisation.

C) ETUDE DE L'ENGRENEMENT -

1) CONTINUITÉ D'ENGRENEMENT (planche n° 21) (Conduite des engrenages droits)

IL s'agit d'étudier les conditions cinématiques d'un engrenement correct.

Du point de vue cinématique on ne peut associer que des engrenages de même module.

L'engrenement de deux dents se fait en deux étapes :

- une étape d'approche et une étape de retraite
(voir schéma).

- Etape d'approche :

Elle commence à partir du moment où une dent de la roue menante attaque une dent de la roue menée en sa pointe et se termine au moment où le contact est en I.

Le moment de l'attaque, coïncide avec le point A_1 , intersection de cercle de base C' et de la droite d'action TT' . Le point de rebroussement de la dent menante est alors A'_1 . Le point de contact se déplace sur la droite A_1I . A_1I est la longueur d'approche (g_a).

La longueur de l'arc $\widehat{I_1I}$ décrit par le cercle primitif pendant la période d'approche est appelée arc d'approche ($\widehat{I_1I} = \widehat{I'_1T} = a_a$).

Pendant cette étape la roue menante a tourné d'un angle φ_a .

Remarque : $A_1I = \widehat{A'_1A'}$ (propriété de la développante)

Ceci nous permet d'écrire :

$$\varphi_a = \varphi_a \cdot R_p$$

$$\text{longueur d'app.} = g_a = \varphi_a \cdot R_b = \varphi_a \cdot R_p \cos \beta = a_a \cos \beta$$

$$\Rightarrow a_a = \frac{g_a}{\cos \beta}$$

- Etape de retraite :

Elle commence à partir de I et se termine en B₂, point d'intersection du cercle de tête de la roue menante et de la limite d'action IT'.

La longueur du segment IB₂ sur lequel se déplace le point de contact s'appelle longueur de retraite (g_a).

La longueur de l'arc $\widehat{II_2}$ est la longueur de retraite (g_r) ($\widehat{II_2} = \widehat{II'_2} = g_r$) c'est l'arc décrit par un point de l'un de deux cercles primitifs pendant la période de retraite.

Pendant cette étape la roue menante a tourné de φ_r

Nous avons les relations suivantes:

$$g_r = \widehat{A'A'_2} = \varphi_r \cdot R_b \quad (\text{car } g_r = IB_2 = \widehat{A'A'_2})$$

$$a_r = \varphi_r \cdot R_p = \varphi_r \cdot \frac{R_b}{\cos \beta}$$

$$\Rightarrow a_r = \frac{g_r}{\cos \beta}$$

$$\text{La mesure } a_\alpha = a_a + a_r = \frac{g_r + g_a}{\cos \beta} = \frac{A_2 I + IB_2}{\cos \beta} = \frac{g_\alpha}{\cos \beta}$$

nous donne la longueur de l'arc $\widehat{I_1 I_2}$ qui est appelé arc de conduite. ($\widehat{I_1 I_2} = \widehat{I'_1 I'_2}$).

Le cas limite d'un engrenement correct correspondant à la valeur de g_α telle que AB = g_α = P_b (P_b = P de base)

Il faut que: AB ≥ pas ou primitif

$$\text{Conduite}_{(a_\alpha)} \geq \text{pas circonferenciel.}$$

ainsi on définit le rapport de conduite E_α :

$$E_\alpha = \frac{g_\alpha}{P_b} = \frac{a_\alpha}{P}$$

généralement E_α ≥ 1,30

calcul de g_d :

$$g_d = \sqrt{(r+s)^2 - r^2 \cos^2 \beta - r \sin \beta} + \sqrt{(r'+s')^2 - r'^2 \cos^2 \beta' - r' \sin \beta'}$$

(page 120. Henriot)

2) Etude du Glissement des Dentures .

La planche 21 met en évidence le glissement relatif des profils pendant l'engrènement. Effectivement les profils P_1 et P_2 roulent en glissant l'un sur l'autre ; contrairement aux mouvements des deux surfaces primitives.

Ceci est une propriété très importante des enveloppes. Dans le mouvement de P par rapport à P' (voir chap I) de centre instantané de rotation I , l'enveloppe δ de γ' roule en glissant sur γ' , et la vitesse de glissement est telle que : $\vec{v}_g = \vec{\Omega} \wedge \vec{IM}$ (M point de tangence des deux profils
 $\vec{\Omega}$ rotation instantanée de P/P')

$$\Rightarrow |\vec{v}_g| = |\vec{\Omega}| \cdot |\vec{IM}| \quad \vec{v}_g \text{ change de sens quand } M \text{ passe par } I \text{ (car } \vec{IM} \text{ change de sens).}$$

ω et ω' sont les vitesses angulaires des roues dentées, $r = \frac{\delta}{z} = \frac{R'}{Z} = \frac{|\vec{\omega}|}{|\vec{\omega}'|}$ le rapport des nombres de dents des deux engrenages, et n_1 le nombre de t/mn. du pignon.

Pour des engrenages extérieurs :

$$|\vec{\Omega}| = |\vec{\omega}| + |\vec{\omega}'|$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_g| = |\vec{\Omega}| |\vec{IM}| = (|\vec{\omega}| + |\vec{\omega}'|) IM = |\vec{\omega}| \left(1 + \frac{|\vec{\omega}'|}{|\vec{\omega}|} \right) IM$$

$$|\vec{v}_g| = \frac{2\pi n_1}{60} \left(1 + \frac{1}{r} \right) |\vec{IM}|$$

$|\vec{v}_g|$ en m/s.

IM en m.

n_1 en tour minute (t/mn).

Si $|\vec{IM}|$ est exprimé en mm.

$$|\vec{v}_g| = \frac{\pi n_1}{30} \left(1 + \frac{1}{r} \right) |\vec{IM}| \cdot 10^{-3}$$

Le glissement total servira pour le calcul du rendement.

Déterminons à présent la valeur de ce glissement en fonction de l'angle de pression β , de la longueur d'approche g_a , et de la longueur de retraite g_r .

Considérons la figure 1, soit $d\ell$ un déplacement élémentaire effectué par un point M sur la droite d'action, pendant un temps dt . pendant cet intervalle de temps les deux cercles primitifs auront roulé d'un arc ds tel que:

$$(1) \quad ds = \frac{d\ell}{\cos\beta}, \text{ d'une part,}$$

$$(2) \quad ds = R\omega dt = R'\omega' dt, \text{ d'autre part.}$$

$$\Rightarrow \omega dt = \frac{ds}{R} = \frac{d\ell}{R\cos\beta} \text{ et } \omega' dt = \frac{ds}{R'} = \frac{d\ell}{R'\cos\beta}$$

$$(\omega + \omega') dt = \frac{d\ell}{\cos\beta} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

Or la vitesse de glissement instantanée est:

$$|\vec{V}_G| = (\omega + \omega') IM$$

Donc le glissement élémentaire pendant dt sera dG tel que:

$$dG = (\omega + \omega') IM dt = (\omega + \omega') \ell dt, \text{ si nous posons } \ell = IM.$$

$$(\omega + \omega') dt = \frac{d\ell}{\cos\beta} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \Rightarrow dG = \frac{\ell d\ell}{\cos\beta} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

ainsi nous obtenons:

$$G_a = \int_0^{g_a} dG = \int_0^{g_a} \frac{\ell}{\cos\beta} \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R} \right) d\ell$$

puisque ℓ varie pendant la période d'approche de la valeur $\ell = g_a$ (longueur d'approche) à la valeur $\ell = 0$.

$$\Rightarrow G_a = \frac{1}{\cos \beta} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \int_{g_a}^0 \ell \, d\ell =$$

en valeur absolue:

$$G_a = \frac{1}{\cos \beta} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \cdot \frac{g_a^2}{2}$$

Pour un engrenage intérieur :

$$|\vec{\omega}| = |\vec{\omega}| - |\vec{\omega}'|$$

$$|\vec{v}_g| = (|\vec{\omega}| - |\vec{\omega}'|) |\vec{IM}| = |\vec{\omega}| \left(1 - \frac{|\vec{\omega}'|}{|\vec{\omega}|} \right) |\vec{IM}| = |\vec{\omega}| \left(1 - \frac{1}{2} \right) |\vec{IM}|$$

$$|\vec{v}_g| = \frac{\pi n'}{30} \left(1 - \frac{1}{2} \right) |\vec{IM}| \text{ si } |\vec{IM}| \text{ est exprimé en m, } |\vec{v}_g|_{\text{cm/s}}$$

$r = \frac{|\vec{\omega}'|}{|\vec{\omega}|}$; $n' = \text{nb de tours/min. du pignon.}$

La planche met en évidence ce glissement, représentons sur deux profils conjugués les points qui viennent en contact pendant les intervalles de temps réguliers pour cela divisons la partie utile AC de la tangente commune en six parties égales :

AB, BC, CD, DE, EF, FG.

appelons :

a, b, c, d, e, f, g, les points du profil δ qui viendront successivement en :

A, B, C, D, E, F, et G.

Soient :

a', b', c', d', e', f', et g', les points du profil δ' qui viendront successivement en contact avec ;
a, b, c, ..., g de δ durant l'engrènement les couples des arcs suivants :

\widehat{ab} et $\widehat{a'b'}$, \widehat{bc} et $\widehat{b'c'}$, \widehat{cd} et $\widehat{c'd'}$... roulent en glissant l'un sur l'autre nous représentons ceci par un graphique (voir figure) où on étale les arcs de développantes sur deux droites parallèles (on étale les profils γ et γ' et on met en regard les segments correspondants)

Le glissement relatif des arcs \widehat{ab} et $\widehat{a'b'}$ est défini par la valeur absolue de $\widehat{ob} - \widehat{a'b'}$.

Le glissement des profils de retraite par

$$G_r = \widehat{Ia'} - \widehat{Ia} \text{ (en valeur absolue)}$$

Le glissement des profils en approche :

$$G_a = \widehat{Ib'} - \widehat{Ib} \text{ (en valeur absolue)}$$

Le glissement relatif total G est tel que :

$$G = G_r + G_a = \widehat{Ia'} - \widehat{Ia} + \widehat{Ib'} - \widehat{Ib}$$

$$G = \widehat{ag} - \widehat{a'g'}$$

Pendant la période de retraite l varie de $l=0$ jusqu'à la valeur $l = g_r =$ longueur de retraite donc le glissement G_r pendant cette période :

$$G_r = \int_0^{g_r} dg = \int_0^{g_r} \frac{1}{\cos\beta} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) l \, dl.$$

$$= \frac{1}{2 \cos\beta} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) g_r^2$$

$$\Rightarrow \boxed{G = G_r + G_a = \frac{1}{2 \cos\beta} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) (g_r^2 + g_a^2)}$$

Dans le cas d'un engrenage intérieur, $\vec{\omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}'$
 et donc $dG = (\omega - \omega') l dt = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) \frac{l dl}{\cos \beta}$

Le même calcul nous conduit à :

$$G = \frac{1}{\cos \beta} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) \frac{g_a^2 + g_r^2}{2}$$

Ce glissement ne nous renseigne pas sur la répartition sur les roues et les pignons, c'est ce qui nous amène à définir le glissement spécifique qui met en jeu le roulement de γ et de γ' l'un par rapport à l'autre.

Le glissement spécifique se définit de la manière suivante :

pour le pignon :

$$G_s = \frac{a g - a' g'}{a g}$$

Pour la roue :

$$G'_s = \frac{a g - a' g'}{a' g'}$$

dans un projet il s'agit de limiter ce glissement spécifique

Sur la planche (23) figure (Fig 3) un schéma sur lequel on a représenté en trois points de contact les profils (A, M et I). Sur chaque point sont représentés la vitesse \vec{v} du point (perpendiculairement primitif) la décomposition de ce vecteur \vec{v} et la droite perpendiculaire à $T T'$ nous donne respectivement \vec{v}_b et \vec{v}_a (vitesse de roulement tangente au deux profils.)

au rayon

nous avons donc :

Les composantes \vec{v}_R et \vec{v}'_R de \vec{v} et \vec{v}' suivant la perpendiculaire commune à M et T qui sont précisément les vitesses de roulement.

en A on a : $|\vec{v}_R| = |\vec{v}| \sin \beta = \omega \cdot OA \cdot \sin \beta = TA \cdot \omega$

$$|\vec{v}_R| = \omega \cdot TA \quad \text{vitesse de roulement de } \gamma$$

vitesse de roulement de γ' :

$$|\vec{v}'_R| = |\vec{v}'| \sin \beta_1 = \omega' \cdot OA \cdot \sin \beta_1 = \omega' \cdot T'A$$

vitesse de glissement en A : $|\vec{v}_g| = |\vec{v}_R| - |\vec{v}'_R|$

en I : $|\vec{v}_R| = |\vec{v}'_R| = \omega \cdot OI \sin \beta = \omega' \cdot O'I \cdot \sin \beta = \omega \cdot OI = \omega' \cdot O'I$

La vitesse de glissement est nulle. ($|\vec{v}_R| - |\vec{v}'_R| = 0$)

en M : le même raisonnement nous conduit à :

$$|\vec{v}_R| = \omega \cdot TM$$

$$|\vec{v}'_R| = \omega' \cdot T'M$$

La vitesse de glissement est

$$|\vec{v}_g| = |\vec{v}_R| - |\vec{v}'_R|$$

Si nous voulons calculer le glissement spécifique au point M par exemple, il nous faut exprimer le glissement g en fonction de la vitesse de glissement \vec{v}_g .

$$dg = M_i - M_i' = |\vec{v}_g| dt = (|\vec{v}'_R| - |\vec{v}_R|) dt$$

i et i' étant les points des profils γ et γ' qui viennent en contact au bout d'un temps dt on obtient ainsi pour le pignon :

$$G_s = \frac{M_i' - M_i}{M_i} = \frac{(|\vec{v}_r'| - |\vec{v}_r|)}{|\vec{v}_r|} dt \quad \text{car } M_i = |\vec{v}_r| dt$$

$$G_s = \frac{|\vec{v}_r'| - |\vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$$

Pour la roue :

$$G_s' = \frac{M_i' - M_i}{M_i'} = \frac{|\vec{v}_r'| - |\vec{v}_r|}{|\vec{v}_r'|}$$

Il est important de voir que G_s varie de la manière suivante :

Pour le pignon G_s passe de la valeur $+1$ en T , à 0 en I puis tend vers l'infini en T .

Pour la roue G_s passe de $+1$ en T , à 0 en I puis tend vers l'infini en T' .

Les valeurs qui nous intéressent particulièrement sont celles où le contact est en A et G positions extrêmes de la droite d'action utile. Le glissement G est maximal (donné par les oboques).

Nous reviendrons sur cette notion quand nous étudierons les détériorations (griffage).

3) CONDITION DE NON INTERFERENCE -

L'engrènement correct exige en plus de la continuité sur la conduite une condition de non interférence.

Il ya deux sortes d'interférences :

- l'interférence théorique (ou interférence de fonctionnement).
- l'interférence de taillage.

Interférence théorique :

on est en présence de ce cas si l'un des cercles de tête coupe la tangente commune à l'extérieur du segment TT' (voir figure, planche 42)

Considérons le moment où M , point de contact se déplaçant sur TT' vient en T ; à ce moment A et T' sont confondus; si on poursuit l'engrènement à partir de ce moment le profil P' coupe le profil P en C . C'est ce qu'on appelle phénomène d'interférence théorique. Un couple d'engrenages est au seuil de l'interférence théorique quand le cercle de tête d'une roue dentée passe par T ou T' . Le résultat d'un tel phénomène est :

Soit un coincement (impossibilité d'engrènement) si le jeu entre dents est faible.

Soit un mauvais fonctionnement (vibrations, vitesse angulaire variable, usure rapide) si le jeu entre dents est important.

Il est bien entendu qu'en limitant la saillie de la roue (la valeur limite de la saillie est telle que le cercle de tête passe par T , point d'interférence.)

avec le remplacement du pignon par un pignon-ocil il résulte du phénomène d'interférence une dépointe de la partie supérieure de la dent de la roue et, du fait que la saillie du pignon dépasse la valeur limite d'interférence, il y a dégagement de matière de base des dents de la roue.

La condition de non interférence s'écrit :

$$IT_1 \leq IT.$$

$$\text{et, } IT = OI \sin \theta = \frac{ZM}{2} \sin \theta$$

$$\text{et, } IT_1 = \frac{M}{\sin \theta}$$

donc :

$$IT_1 \leq IT$$

$$\Rightarrow \frac{M}{\sin \theta} \leq \frac{ZM}{2} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{Z \geq \frac{2}{\sin^2 \theta}}$$

ce qui correspond à $Z \geq 17$ pour :

$$\theta \approx 20^\circ$$

Ce minimum peut être réduit pour des couples particuliers en effet :

$$IT = \frac{ZM}{2} \sin \theta$$

$$\text{et, } \overline{OT_1}^2 = \overline{IO}^2 + \overline{IT_1}^2 - 2 \overline{IT_1} \overline{IO} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

c'est à dire :

$$\left(\frac{Z}{2} + 1\right)^2 M^2 = \frac{Z^2 M^2}{4} + \overline{IT_1}^2 + ZM \overline{IT} \sin \theta$$

Equation de second degré en \overline{IT}_1 qui donne:

$$\overline{IT}_1 = \frac{m}{2} \left(-Z \sin \theta + \sqrt{Z^2 \sin^2 \theta + 4(Z+1)} \right)$$

$$IT \geq \overline{IT}_1$$

$$\Rightarrow Z' \sin \theta \geq \sqrt{Z^2 \sin^2 \theta + 4(Z+1)} - Z \sin \theta$$

ce qui donne :

$$Z' = 13 \text{ pour } Z = 13$$

$$Z' = 14 \quad " \quad Z \leq 26$$

$$Z' = 15 \quad " \quad Z \leq 45$$

$$Z' = 16 \quad " \quad Z \leq 100$$

Interférence de taillage (pl 25 et 26)

Elle se produit lorsque le cercle de pied est intérieur au cercle de base (voir pl. 57)

Dans un tel cas la dent est dégagée au pied.

Il convient de distinguer les deux cas suivants :

- les cercles de tête coupent TT' à l'intérieur.
- l'un des deux cercles coupe TT' à l'extérieur (fig. 2).

On remarque sur la figure (1) qu'à partir du cercle de base le profil n'est plus en développante de cercle pour le pignon. Dans ce cas le cercle de tête de la crémaillère (droite) est intérieur à IT.

A partir du point S il y a interférence donc apparition d'une trochoïde lors du taillage du pignon.

Cette trochoïde est le lieu du sommet de la dent de crémaillère quand C ~~se~~ roule sans glisser sur C'. On obtient facilement le tracé de cette trochoïde en reportant les longueurs iP à partir de i' (i point de C qui coïncidera avec i') et en conservant les angles α_i (voir tracé de profils conjugués.)

La figure (2) met en évidence la limite de l'interférence de taillage.

On voit que pour éviter cette interférence la saillie maximale de la dent de crémaillère doit être égale à $h - x$, de manière à ce que le cercle de tête de la crémaillère passe par T.

$$x = s - h, = M - IT \sin \beta \text{ car } h_1 = IT \sin \beta \text{ et } s = M$$

Comme :

$$IT = R \sin \beta = \frac{M Z}{2} \sin \beta$$

Z = nombre de dents du pignon.

$$x = M - \frac{M Z}{2} \sin^2 \beta$$

$$x = M \left(1 - \frac{Z}{2} \sin^2 \beta \right)$$

On voit donc que si :

$$Z \nearrow \quad x \searrow$$

$$\beta \nearrow \quad x \searrow$$

Cette formule nous suggère d'aggrandir β .

Notons que le cas de la crémaillère permet d'obtenir un tracé sûr, puisqu'il nous place dans les conditions les plus défavorables.

4) CORRECTION DE DENTURES

On a été amené à corriger les dentures pour éviter d'une part les interférences, et pour améliorer la résistance à la rupture des dents, et les conditions de pression superficielle (voir plus loin) d'autre part.

Il existe trois (3) principes de correction de dentures:

Adoption de dentures basses, aggrandissement de l'angle de pression et déport de dentures.

Le déport de denture est certainement la solution la plus efficace c'est pourquoi nous insisterons sur ce point.

1^{er}/Adoption d'angle de pression $\beta > 20^\circ$; théoriquement cette solution semble intéressante pour éliminer les phénomènes d'interférences mais elle présente des inconvénients graves, dont les principaux sont:

- Amainement de la dent.
- abaissement du rapport de conduite.
- augmentation de la poussée sur les arbres au détriment de la poussée utile.

Cette solution n'est pas envisagée

2^e/Adoption de dentures basse; il existe une normalisation de dentures basses ($\lambda = 0,95M$; $t = 0,75M$) utilisées en industrie automobile. Cette solution permet d'éviter les interférences (voir pl. 28) mais elle présente les inconvénients de l'usure rapide et de la faiblesse du rapport de conduite, mais l'avantage de la résistance.

Il existe par ailleurs des dentures spéciales genre "stub" utilisées dans certains cas exceptionnels.

3^e/Déport de dentures (voir pl. 27 et 28)

Solution la plus plausible aussi bien du point de vue cinématique, dynamique et technologique elle est la plus couramment utilisée.

Il existe deux sortes de déport de denture avec variation d'entraxe et sans variation d'entraxe.

a) Sans variation d'entraxe (voir planche 27 et 28)

Soit la crémaillère génératrice d'une roue et d'un pignon, on appelle ligne de référence la ligne primitive de cette crémaillère normalisée.

Si pendant le taillage de la roue et du pignon, la ligne de référence de la crémaillère le diamètre primitif de la roue ou du pignon, sont tangents nous disons que les dents de la roue et du pignon sont normales.

S'il existe, pendant le taillage une distance v entre la ligne de référence et le diamètre primitif de l'engrenage à engendrer, on dit que la denture de l'engrenage est déportée. C'est le déplacement de profil; on définit le déport x par le rapport:

$$x = \frac{v}{M} \quad M \text{ étant le module de la roue à tailler}$$

Convention :

v , est par conséquent, x sont positifs si la ligne de référence est extérieure au cercle primitif de taillage de la roue (ou du pignon).

v et x sont < 0 dans le cas contraire

Remarque :

Le déport n'implique pas une variation du rayon primitif on a toujours: $R = \frac{MZ}{2}$

mais nous avons:

$$i \neq e \text{ avec } i + e = p$$

$$s \neq M, t \neq 1,25M \text{ avec } s + t = 2,25M.$$

Le cas qui nous intéresse de plus près est le suivant :

Déport pour la roue x' négatif, et x pour le pignon positif et tel que :

$|v'| = |v|$ c'est à dire $x + x' = 0$ en valeur algébrique, nous sommes alors en présence d'un engrenage à dentures déportées sans variation d'entraxe. (voir figure)

Il est facile de voir que l'angle de pression β est conservé mais l'épaisseur est donnée par la formule :

$$s = \frac{\pi M}{2} + 2xM \operatorname{tg} \beta \quad x \text{ est pris en valeur algébrique.}$$

Le pas est donné par :

$$p = s + s' = \frac{\pi M}{2} + 2xM \operatorname{tg} \beta + \frac{\pi M}{2} + 2x'M \operatorname{tg} \beta ,$$
$$= \pi M + 2M \operatorname{tg} \beta (x + x') = \pi M .$$

Ce qui montre bien que le pas est conservé .

La saillie est donnée par :

$$s' = s + v = M + v \quad (v \text{ en valeur algébrique})$$

Le creux par :

$$t' = t - v = 1,25M - v$$

Notons que l'épaisseur est renforcée au niveau de cercle de base d'une valeur :

$$(2xM \operatorname{tg} \beta) \cos \beta = 2xM \sin \beta$$

Engrenages intérieurs :

Dans ce cas, si nous voulons avoir une conservation de l'entraxe il faut effectuer un déport x' pour la roue identique au déport x du pignon (en valeur algébrique)

$$x = x' \text{ ou } x - x' = 0$$

La nouvelle saillie pour la roue sera :

$$s' = M \left(\frac{\pi}{2} - 2x \operatorname{tg} \beta \right) \quad (\text{diminution})$$

l'entraxe étant :

$$\Delta = M \left(\frac{z' - 2}{2} \right)$$

Les autres formules étant les mêmes pour l'engrenage extérieur.

Déport avec variation d'entraxe :

Il arrive qu'on soit amené à effectuer un déport avec variation d'entraxe :

Engrenages extérieurs :

Si $x + x' \neq 0$ on a obligatoirement

$$s' + s \neq \pi M \text{ donc } \Delta' \neq \Delta$$

Le nouvel entraxe Δ' est dit entraxe de fonctionnement Δ' est donné par la formule suivante :

$$\Delta' = \Delta \frac{\cos \beta}{\cos \beta'}, \text{ où } \beta' \text{ est le nouvel angle de}$$

pression et β' est donné par :

$$\boxed{(\operatorname{tg} \beta') \beta' = (\operatorname{tg} \beta) - \beta + 2 \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{x + x'}{z + z'}}$$

Notons qu'il existe les abaques donnant Δ' à partir de $x + x'$ et $z + z'$ et de la connaissance de Δ résulte la détermination de β .

Il arrive que l'entraxe de fonctionnement soit imposé et nous devons déterminer les déport x et x' en fonction de z et z' (ce genre de problème se pose quand nous voulons utiliser une gamme d'outil imposée) nous reviendrons sur cet avantage.

Notons que β ayant changé le module de fonctionnement sera :

$$M' = M \frac{\cos \beta}{\cos \beta'}$$

Engrenages intérieurs :

Dans ce cas si :

$$x' - x \neq 0 \Rightarrow s' + s \neq 0 \Rightarrow \Delta' \neq \Delta$$

avec $\Delta' = \Delta \frac{\cos \beta}{\cos \beta'}$

et,

$$(\text{tg } \beta') - \beta = (\text{tg } \beta) - \beta + 2(\text{tg } \beta) \cdot \frac{x' - x}{z' - z}$$

Avantages des déports de dentures :

L'avantage principal est d'éviter le phénomène d'interférence :

Si $z_L = \frac{2}{\sin^2 \beta}$ est le nombre de dents limite et si :

* $z + z' \geq 2z_L$ les déports x et x' sont donnés par :

$$x = \frac{z_L - z}{z_L} \quad \text{et} \quad x' = \frac{z - z_L}{z_L} \quad (z = \text{nombre de dents du pignon})$$

* On a alors $x + x' = 0$, donc pas de variation d'entraxe.
 $z + z' < 2z_L$ $x = \frac{z_L - z}{z_L}$ et $x' = \frac{z - z_L}{z_L} \Rightarrow x + x' > 0$ d'où variation d'entraxe.

b) Résistance à la rupture :

Le déport renforce la dent à sa racine et procure donc à la dent une grande résistance à la rupture.

c) Pression superficielle - Glissement
Spécifique

Il y a de nettes améliorations en ce qui concerne ces deux critères pour les dentures déportées.

d) Technologie :

L'avantage net c'est la possibilité de générer les dentures déportées avec les outils de tailleage courants. avec un même outil il est possible de prendre plusieurs combinaisons.

e) le seul inconvénient à éviter est la diminution du rapport de conduite d'où risque de bruit pendant le fonctionnement.

II. ETUDE DYNAMIQUE

A) EFFORTS ET POUSSÉES

1) Efforts sur les dentures (planche 29)

Dans une première approximation nous négligerons les forces de frottement.

Soit P (Watts) la puissance sur l'arbre A à transmettre à l'arbre A' de la roue.

les efforts mis en jeu sont :

- la poussée \vec{P} du pignon sur la roue (dont la droite d'action est la tangente commune TT' et d'intensité constante)
- la réaction $\vec{P}' = -\vec{P}$ de la roue sur le pignon.

\vec{P} se décompose en une force radiale \vec{F}_r ($|\vec{F}_r| = |\vec{P}| \sin \beta$) et une force tangentielle \vec{F}_t ($|\vec{F}_t| = |\vec{P}| \cos \beta$)

le couple moteur \mathcal{E}_m est tel que :

$$\mathcal{E}_m = |\vec{F}_t| R_p = \frac{P}{\omega}$$

P : puissance à transmettre (en Watts)

R_p : Rayon primitif du pignon (mm)

ω : vitesse angulaire du pignon (rd/s)

\mathcal{E}_m : Couple moteur (N.mm)

Si $|\vec{F}_t|$ est exprimé en N, R_p en mm et \mathcal{E}_m en N.m :

$$|\vec{F}_t| = \frac{1000 \mathcal{E}_m}{R_p}$$

Répartition de l'effort sur les dentures: (fig 3. pl. 29)

Durant l'engrènement la poussée peut s'exercer totalement sur une denture (un seul couple de dents en prise) ou partiellement (deux couples de dents en prise)

2) Efforts sur les arbres et paliers (pl 29. fig 2)

les arbres A et A' sont soumis à la torsion et à la flexion, en effet nous avons :

pour la roue :

les éléments de réduction de l'action \vec{P}' en O' sont :

- le vecteur \vec{P}'

- le moment $\mathcal{M}^* = |\vec{P}'| R_p \cos \beta = |\vec{F}_t| R_p$ (torsion)

Si \vec{G} est le poids de la roue, la charge radiale sur l'arbre

A' en O' est: $\vec{R}' = \vec{Q}' + \vec{P}'$

Pour le Pignon:

la charge radiale est un vecteur équivalent à \vec{P}' (réaction de la roue sur le pignon) puisque nous négligerons le poids du pignon.

Moment de torsion sur l'arbre A: $M_t = F_t \times R_p$

les paliers seront calculés pour les charges radiales suivantes:

- Paliers A et B sur l'arbre A:

$$\begin{cases} \vec{R}_A = \frac{AO}{AB} \times \vec{R} \\ \vec{R}_B = \frac{OB}{AB} \times \vec{R} \end{cases}$$

- Paliers C et D sur l'arbre A':

$$\begin{cases} \vec{R}_C = \frac{OC}{CD} \times \vec{R}' \\ \vec{R}_D = \frac{OD}{CD} \times \vec{R}' \end{cases}$$

B] RESISTANCE MECANIQUE (planche 30)

Il s'agit de calculer la dent à la rupture et à la pression superficielle en considérant les efforts et les surfaces de contact. le calcul n'est complet que si l'on tient compte des facteurs dynamiques.

A) Rupture:

a) méthode simplifiée. prédétermination de la dent (Fig 4)

nous nous plaçons d'abord dans les conditions les plus défavorables de calcul en supposant que:

- Une seule dent supporte toute la poussée pendant l'engrènement;
- la section d'encastrement de la dent est la section de la dent au primitif.

On obtient ainsi une dent surdimensionnée.

Nous calculerons la dent à la flexion en faisant les hypothèses supplémentaires suivantes:

- la charge normale n'est pas considérée.
- l'effort tangentiel est appliqué au sommet de la dent.
- la dent est assimilée à une poutre encastree de dimensions:

largeur: $l = kM$

épaisseur: $e = \frac{M}{\pi}$

hauteur: $h = 2,25M$

la contrainte de flexion est donc,

$$\sigma = \frac{M_f}{\frac{I_{ax}}{v}}$$

avec: $M_f = F_t \times h = 2,25 M / F_t$

$v = \frac{e}{2}$ (distance entre la fibre neutre et la fibre de contrainte max)

I_{ax} : moment d'inertie axial de la section = $\frac{l e^3}{12}$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{M l}{\left(\frac{l e^3}{12}\right) \frac{l}{6}} = \frac{6 \times 2,25 M |\vec{F}_t|}{k M \left(\frac{\pi M}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{24 \times 2,5 |\vec{F}_t|}{k M^2 \pi^2}$$

Si le métal utilisé a une résistance pratique à l'extension R_{pe} :

$$R_{pe} \geq \sigma \Rightarrow R_{pe} \geq \frac{24 \times 2,5 |\vec{F}_t|}{k M^2 \pi^2}$$

$$\Rightarrow M \geq 2,3 \sqrt{\frac{|\vec{F}_t|}{k R_{pe}}}$$

On choisit le module normalisé juste supérieur à celui déterminé par cette formule.

Mais cette méthode nous donne des valeurs trop grandes du module (en particulier pour les dentures corrigées.) Pour la sollicitation de la dent.

b) Méthode simplifiée de Willis:

Nous ferons les hypothèses suivantes:

- Seule la composante de flexion \vec{F}_t de l'effort \vec{P} est prise en considération (\vec{P} est supposée appliquée au sommet de la dent)
- Il n'y a qu'un seul couple de dents en prise.

On introduit ici la parabole d'égalité résistance et on calcule la dent comme si elle avait pour section cette parabole (le métal extérieur est supposé en surplus.) le sommet A de cette parabole est le point où la droite d'axe de la dent (voir fig 2). Cette parabole est encastrée sur une surface de largeur $B = kM$ et d'épaisseur $e_L = MM'$ où M et M' sont les points de tangence de la parabole et de la dent. Déterminés par la propriété de la sous tangente, ce qui donne $SA = AN$ (N: milieu de MM')

avec la notation suivante:

$$h_L = AN$$

$$e_L = MM'$$

$$I_{ax} = \frac{M^3}{12} \text{ d'inertie de la parabole par rapport à l'axe } \alpha\beta.$$

nous obtenons la contrainte de flexion:

$$\sigma_L = \frac{h_L |\vec{F}_t|}{\frac{I_{ax}}{e_L}} = \frac{h_L |\vec{F}_t|}{\left(\frac{l e_L^3}{12 \times e_L}\right) l e_L^2} = \frac{6 h_L |\vec{F}_t|}{l e_L^2}$$

Si nous posons
$$Y_L = \frac{6 \left(\frac{h_L}{M} \right)}{\left(\frac{e_L}{M} \right)^2}$$

nous obtenons:

$$\sigma_L = \frac{|\overline{F}_t|}{l_M} Y_L$$

Y_L est dit "Facteur de forme de LEWIS" il dépend du nombre de dents de la roue (pour un angle de pression β donné)

le coefficient de Willis y défini par $y = \frac{1}{\pi x}$ s'exprime en fonction du nombre z de dents de la roue de la manière suivante:

$$y = 0,154 - \frac{1,2}{z} \quad (\text{pour } \beta = 20^\circ)$$

dans ces conditions le module peut être calculé

$$R_{pe} \geq \sigma_L \Rightarrow R_{pe} \geq \frac{|\overline{F}_t| Y_L}{l_M} = \frac{E_m}{R_p k M^2} \cdot \frac{1}{\pi y}$$

$$\Rightarrow R_{pe} \geq \frac{2 \cdot E_m}{k M^3 z} \cdot \frac{1}{\pi y}$$

$$\Rightarrow M \geq \sqrt[3]{\frac{2 E_m}{k z R_{pe} \pi y}}$$

La méthode de LEWIS n'est pas très précise puisque nous avons supposé que l'angle d'incidence de la poussée au sommet de la dent est égal à l'angle de pression (ce qui comporte une certaine erreur).
D'autre part la méthode de LEWIS ne tient pas compte du rapport de conduite.

5) Nouvelle méthode ISO: (fig 3)

cette méthode fait appel aux hypothèses suivantes:

- la charge P est toujours appliquée sur le sommet, mais elle a pour intensité $\frac{|P|}{E_a}$ où E_a est le rapport de conduite.
- Il n'est pas tenu compte de la composante de compression
- la section d'encastrement de la dent est donnée par les droites inclinées de 30° par rapport à l'axe de la dent et tangentes aux profils de raccordement (voir fig 112)
- Soient M et M' ces points de tangence, ils définissent la section d'encastrement.

la contrainte de flexion est donnée par :

$$\sigma = \frac{|\vec{W}| k_{30}}{I_{\alpha\beta 30}} \quad \text{avec } |\vec{W}| = \frac{|\vec{P}|}{E_{\alpha}} \cos \beta'$$

$$\text{et } |\vec{P}| = \frac{|\vec{F}_T|}{\cos \beta}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{|\vec{F}_T| \cdot \frac{\cos \beta'}{\cos \beta} k_{30}}{I_{\alpha\beta}} = \frac{|\vec{F}_T| \cdot \cos \beta \cdot h_{30}}{E_{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot l e_{30}^2}$$

$$\sigma = \frac{6 \left(\frac{h_{30}}{M_0} \right) \cos \beta_0 \cdot \frac{1}{E_{\alpha}} \cdot \frac{|\vec{F}_T|}{l M}}{\left(\frac{S_{30}}{M_0} \right)^2 \cos \beta_0}$$

le facteur $Y_{30} = \frac{6 \left(\frac{h_{30}}{M_0} \right)}{\left(\frac{S_{30}}{M_0} \right)^2}$ est donné par des abaques. (facteur de forme I.S.O)

Y_{30} dépend du nombre de dents, de l'angle de pression, et des déports de denture.

E_{α} est donné aussi par des abaques.

la détermination du module devient alors immédiate.

d) Facteurs de correction

les calculs que nous avons fait ne tiennent pas compte des conditions de fonctionnement. En effet ce sont des calculs où n'intervient aucun effet parasite.

Il existe cependant des facteurs dynamiques qui modifient la contrainte.

2) Pression superficielle. Formule de HERTZ. (pl. 31)

En considérant le contact de dentures, nous considérons que la pression superficielle (p) est maximale au milieu de la surface dite d'aplatissement (de contact). Cette pression p a pour expression:

$$p = 0,59 \sqrt{\frac{|\vec{P}|}{\rho} \times \frac{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}}{E + E'}}$$

$|\vec{P}|$ = poussée des dents selon TT' (normale à la surface d'aplatissement)

E et E' : Modules d'élasticité longitudinale des matériaux constituant les dents.

ρ et ρ' : Rayons de courbure des dents au point de contact M ($\rho = TM$, $\rho' = T'M$)

l : largeur de la dent.

la pression superficielle est infinie en T et T' ($\rho = \rho' = 0$)
 elle est minimum pour $\rho = \rho' = \frac{\Delta \sin \beta}{\sin^2 \beta}$ (Δ : entraxe
 β : angle de pression.) c'est à dire pour le point M , milieu de TT' .

Un engrenage sera calculé pour la pression locale à partir de sa valeur au pt I , en ce point:

$$P_I = R \sin \beta$$

$$P'_I = R' \sin \beta$$

$$p = 0,59 \sqrt{\frac{|\vec{P}| \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) \frac{1}{\sin \beta}}{\rho \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E'}\right)}} = 0,59 \sqrt{\frac{P \frac{\Delta}{RR'} \frac{1}{\sin \beta}}{\frac{1}{E} + \frac{1}{E'}}}$$

Si on pose $i = \frac{z'}{z} = \frac{w}{w'}$ on aura:

$$p = 0,59 \sqrt{\frac{|\vec{P}|}{\rho} \frac{1 + i}{R \sin \beta} \frac{1}{\frac{1}{E} + \frac{1}{E'}}}$$

la largeur $2a$ de la surface d'adoucissement (voir figure) est maximale au milieu de TT' (minimum de la pression) et minimale aux points T et T' (pression infinie)

Contrainte de cisaillement:

Elle est de grande importance puisqu'elle permet d'étudier certains phénomènes (piques ou pittings).

la contrainte est nulle à la périphérie et maximale à une profondeur $x \approx 0,8a$ (a : demi-largeur de la surface d'écrasement) cette profondeur est dite profondeur de cisaillement maximal. (voir p131)

la contrainte de cisaillement τ_c s'est telle que:

$$\underline{\tau_c \approx 0,3 p}$$

Remarque:

la largeur de la surface d'écrasement est donnée par la relation:

$$2a = 0,02 \sqrt{\frac{|P|}{L \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e'} \right)}} \quad \text{pour les aciers.}$$

RENDEMENT DES ENGRENAGES.

(voir Planche)

Un engrenage ne transmet pas intégralement la puissance du pignon du fait que l'existence d'une force de frottement. Rappelons que si un solide (S_1) se déplace sur la surface d'un solide (S_2) , l'action de (S_2) sur (S_1) est la résultante des deux forces \vec{N} et \vec{f} ; \vec{N} est une force normale aux surfaces de (S_1) et (S_2) au point de contact \vec{f} est la force de frottement tangente aux deux surfaces de contact de (S_1) et (S_2) (\vec{f}) s'oppose au mouvement de (S_1) sur (S_2) .

L'angle φ entre \vec{N} et $\vec{F} = \vec{N} + \vec{f}$ est dit angle de frottement. L'intensité de \vec{f} est donné par $|\vec{f}| = |\vec{N}| \operatorname{tg} \varphi$. ($\operatorname{tg} \varphi =$ Coefficient de frottement)

Appliquons ce principe aux surfaces des dents d'un engrenage.

L'action de la dent du pignon sur la dent de la roue se traduit par une force \vec{F} inclinée d'un angle φ par rapport à la ligne d'action ($\vec{F} = \vec{F} + \vec{P}$)

Calculons le travail \mathcal{L}_φ perdu par frottement pendant un tour de la roue. Pour cela nous allons d'abord calculer le travail \mathcal{L}_φ perdu par frottement pendant tout l'engrènement de deux dents:

$$\mathcal{L}_\varphi = |\vec{f}| G_\alpha; G_\alpha = \text{glissement total,}$$

donc le travail perdu pendant un tour de la roue est tel que :

$$\mathcal{L}_\varphi = Z' \mathcal{L}_\varphi = Z' |\vec{f}| G_\alpha = \frac{2R'}{M} |\vec{f}| G_\alpha$$

Z' = nombre de dents de la roue

R' = Rayon primitif de la roue

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{2R'}{M} |\vec{f}| G_\alpha = \frac{2\pi R'}{\pi M} |\vec{f}| G_\alpha.$$

Sous cette forme nous faisons apparaître le pas circonférentiel $\pi M = \frac{g_a}{\cos \beta} = \frac{g_r + g_a}{\cos \beta}$

- ou g_a : longueur de module .
- g_a : — " — d'approche .
- g_r : — " — de retraite .

d'autre part : $G_a = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \frac{g_a^2 + g_r^2}{2 \cos \beta}$

on aura donc :

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{2\pi R' |\vec{F}|}{g_r + g_a} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \frac{g_a^2 + g_r^2}{2 \cos \beta}$$

$$\mathcal{L}_\varphi = \pi R' |\vec{F}| \frac{g_a^2 + g_r^2}{g_a + g_r} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

En remplaçant $|\vec{F}|$ par $|\vec{P}| \operatorname{tg} \varphi$ on aura :

$$\mathcal{L}_\varphi = \pi R' \operatorname{tg} \varphi |\vec{P}| \cdot \frac{g_a^2 + g_r^2}{g_a + g_r} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

Le travail \mathcal{L}_m transmis à la roue par le pignon pendant un tour de la roue est tel que :

$$\mathcal{L}_m = 2\pi R' |\vec{F}_t| = 2\pi R' |\vec{P}| \cos \beta .$$

Le rendement sera donc donné par :

$$\eta = \frac{\mathcal{L}_m - \mathcal{L}_\varphi}{\mathcal{L}_m}$$

$$\eta = \frac{2\pi R' |\vec{P}| \left[\cos \beta - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2} \cdot \frac{g_a^2 + g_r^2}{g_a + g_r} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right]}{2\pi R' |\vec{P}| \cdot \cos \beta}$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{f \sin \phi}{2 \cos \beta} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \frac{g_a^2 + g_r^2}{g_a + g_r}$$

Pour un engrenage intérieur, il est aisé de vérifier que le rendement est tel que :

$$\eta = 1 - \frac{f \sin \phi}{2 \cos \beta} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) \frac{g_a^2 + g_r^2}{g_a + g_r}$$

En pratique le rendement le plus médiocre est compris entre 97,5% et 98%.

Le rendement peut atteindre 99,8% pour des dentures intérieures.

Facteurs de correction:

Pour déterminer le module d'un engrenage, il nous a suffi dans un premier stade de poser $\sigma \leq R_{pe}$, σ étant la contrainte de rupture déterminée comme si la denture était immobile (on l'appelle à cet effet contrainte statique de base, notée aussi σ_b)

la contrainte limite de base σ_{lim} s'obtient en tenant compte d'un facteur de sécurité et d'un facteur de concentration de contrainte (Y_s):

$$\sigma_{lim} = \frac{\sigma}{Y_s \cdot \text{facteur de sécurité}}$$

Mais pour un calcul d'engrenage complet nous ne devons pas nous contenter de résultats découlant uniquement des conditions "statiques".

Des facteurs de correction (de la contrainte limite) tenant compte des conditions dynamiques de fonctionnement ont été introduits (aussi bien pour le calcul à la rupture qu'à la pression superficielle.)

Nous ne ferons que citer ces divers facteurs dont des aboques donnent les valeurs (voir HENRIOT, t.1) ce sont:

le facteur de vitesse (k_v) il dépend de la vitesse tangentielle v_t et il est tel que:

$$k_v = \frac{30}{30 + \sqrt{v_t}} \quad \text{pour la classe I (très grande précision, } v_t \text{ atteint } 100 \text{ m/s)}$$

$$k_v = \frac{12}{12 + \sqrt{v_t}} \quad \text{pour la classe II (denture de précision, } v_t \text{ atteint } 50 \text{ m/s)}$$

$$k_v = \frac{6}{6 + \sqrt{v_t}} \quad \text{pour la classe III (denture de bonne qualité, } v_t \text{ atteint } 20 \text{ m/s)}$$

$$k_v = \frac{3}{3 + \sqrt{v_t}} \quad \text{pour la classe IV (qualité médiocre, } v_t \leq 10 \text{ m/s)}$$

le facteur de service k_A . il tient compte de la nature de l'organe moteur et de l'organe récepteur (degré de choc) il est donné par une table.

le facteur de durée k_{BL} : la valeur de ce facteur est donnée en fonction du nombre de cycles de mise en charge (N) par la formule suivante:

$$k_{BL} = \left(\frac{10^7}{N} \right)^{1/10}$$

le nombre de cycles de mise en charge est donné par des abaques. il dépend du nombre d'heures de fonctionnement et du nombre de tours/minute de l'organe considéré.

le facteur de portée k_M : il dépend du rapport $\frac{p}{d}$ de l'organe considéré (p : largeur de denture, d : diamètre primitif)

Tous ces facteurs influencent l'effort tangentiel limite F_{elim} de base et la contrainte limite de base de la manière suivante:

$$F_{adm} = F_{lim} \cdot k_v \cdot k_A \cdot k_M \cdot k_{BL}$$

$$\sigma_{adm} = \sigma_{lim} \cdot k_v \cdot k_A \cdot k_M \cdot k_{BL}$$

Nous ne devons pas perdre de vue que:

$$F_{t,lim} = \sigma_{lim} \cdot l \cdot m \cdot \frac{1}{Y_E \times Y_F}$$

F_{adm} doit être calculé séparément pour l'organe moteur et pour l'organe récepteur (nous obtenons F_{adm} et F'_{adm})

Nous appellerons capacité de charge à la rupture de l'engrenage, la plus faible des 2 valeurs F_{adm} et F'_{adm} .

Nous appellerons critère de rupture le terme:

$$\left(\frac{F_t}{l \cdot M} \right)_{adm}$$

Ce critère permet de déterminer simplement l'engrenage.

Remarque Si nous voulons égaliser les charges admissibles F_{adm} et F'_{adm} , il faut

$$\frac{\sigma_{lim}}{\sigma'_{lim}} = \frac{Y_F' \cdot k'_{BL}}{Y_F \cdot k_{BL}} = \frac{Y_F'}{Y_F} (l')^{1/10} = \frac{Y_F'}{Y_F} \left(\frac{3'}{3} \right)^{1/10}$$

les facteurs de correction précédemment définis pour la détermination à la rupture sont encore valables pour la détermination à la pression superficielle.

Cette fois-ci la contrainte limite de base p_{lim} est telle que:

$$p_{lim} = \frac{P}{\text{facteur de sécurité}} ; \quad P = \text{pression superficielle statique de base.}$$

où p est donné par:

$$p = Z_E Z_\beta Z_C \sqrt{K}$$

avec $K = \frac{F_t}{d \cdot l} \frac{i+1}{\lambda}$ où $i = \frac{\delta}{\delta'}$

Z_C = facteur géométrique.

Z_β = facteur de longueur de contact.

Z_E = facteur de matériau.

Dans de telles conditions l'effort limite de base est donné

$$\text{par: } F_{t\text{-lim}} = p_{lim}^2 \cdot l \cdot d \cdot \frac{i}{i+1} \cdot \frac{1}{Z_E^2 \cdot Z_\beta^2 \cdot Z_C^2}$$

Sachant que les mêmes facteurs k_A, k_V et k_M entrent en jeu et que le coefficient durée est égal cette fois-ci à $k_{PL} = \left(\frac{10^7}{N}\right)^{1/6}$, nous aurons l'effort tangentiel admissible ($F_{t\text{adm}}$) et la contrainte de pression admissible de la même manière que pour la rupture.

$$F_{t\text{adm}} = p_{lim}^2 \cdot l \cdot d \cdot \frac{i}{i+1} \cdot \frac{k_V \cdot k_{PL} \cdot k_M \cdot k_A}{(Z_E \cdot Z_C \cdot Z_\beta)^2}$$
$$p_{adm} = p_{lim} \cdot \sqrt{k_V} \cdot \sqrt{k_M} \cdot \sqrt{k_{PL}} \cdot \sqrt{k_A}$$

la capacité de charge à la pression superficielle de l'engrenage est la plus faible de $F_{t\text{adm}}$ et $F_{p\text{adm}}$.

le critère de pression superficielle est défini par:

$$k_{adm} = p_{lim} \frac{k_V \cdot k_{PL} \cdot k_M \cdot k_A}{(Z_E Z_\beta Z_C)^2}$$

Remarque: Nous appellerons capacité de charge globale de l'engrenage, la plus faible des valeurs de $F_{t\text{adm}}$ calculées pour la rupture et pour la pression superficielle.

... dans un calcul d'engrenage (quand celui-ci est l'organe principal), la valeur de l'entraxe est déterminée grâce à la capacité de charge à la pression superficielle.

Détériorations des engrenages:

les diverses détériorations risquent de s'accumuler et de causer une rupture brutale des dents. le calcul d'un engrenage à la rupture ne suffit pas si on veut éviter tout accident imprévisible.

En général une rupture peut être consécutive à une surcharge instantanée trop forte, à un traitement thermique mal conduit (un traitement thermique peut entraîner une fragilité de la denture).

Il arrive qu'une denture "se casse" à la suite d'un défaut de rectification.

La rupture a souvent lieu quand le matériau est à la limite de fatigue (nombre de cycles de mise en charge élevé).

Les détériorations superficielles peuvent être suivies d'une rupture. la principale détérioration superficielle se traduit par l'apparition de fortes piqûres (et même des trous) quand la pression superficielle est trop importante. Si la pression superficielle est raisonnable ces piqûres se stabilisent, dans le cas contraire elles risquent d'affaiblir la dent, en prenant de l'ampleur, et causer ainsi une rupture de la dent.

Signalons que l'explication rationnelle de l'apparition des piqûres n'est pas connue à l'heure actuelle.

Un autre genre de détérioration a lieu dans certaines conditions de fonctionnement; c'est le grippage. En effet quand les conditions de vitesse et de pression superficielle sont suffisamment défavorables pour causer une élévation de température trop importante, il y a rupture du film d'huile et, par suite, le contact métal sur métal provoque une tendance au soudage.

Ce phénomène se traduit par un arrachement de métal dans la direction du glissement; on dit qu'il y a grippage.

III) ETUDE TECHNOLOGIQUE:

A) TAILLAGE:

Il existe 3 principaux modes de taillage qui sont les suivants :

- taillage par reproduction.
- taillage par outils de forme.
- taillage par génération.

1) Taillage par reproduction (pl 73)

Ce mode de taillage consiste à reproduire les surfaces de dentures en donnant à l'outil de taillage et à la roue à tailler un mouvement relatif convenable. On utilise pour cela un gabarit sur lequel s'appuie le support de l'outil par l'intermédiaire d'un galet. Le gabarit a le même profil ^{celui} que ^{des} dentures à plus grande échelle. Dans un tel cas, l'outil a, en plus du mouvement de guidage sur le gabarit, un mouvement de translation parallèle à l'axe de la roue à tailler.

Il existe une 2^e solution pour ce genre de taillage, et qui consiste à donner un mouvement suivant le gabarit, non plus à l'outil, mais à la roue à tailler. Dans un tel cas l'outil n'a qu'un mouvement de translation parallèle à l'axe de la roue.

Signifions que ce procédé de taillage n'est pratiquement plus utilisé.

2) Taillage par outils de forme (voir pl 64 et 67)

Les dentures sont générées par fraisage ; la fraise utilisée a un profil constant (en forme de l'entredent de la roue à tailler)

Deux sortes de fraises sont utilisées :

- la fraise disque (ou fraise module)
- la fraise en bout

a) taillage par fraise disque (pl 64)

L'axe de la fraise (qui ne rencontre pas l'axe de la roue à tailler) se déplace parallèlement à l'axe de la roue. L'inconvénient de ce procédé de taillage est que, théoriquement, il faudrait avoir autant de fraises différentes pour un module donné, qu'il y a de nombres de dents différents.

Pratiquement, on se contente d'un jeu de 8 fraises pour les modules $M \leq 10$ et d'un jeu de 15 fraises (pour les modules $M > 10$). Le profil n'est pas rigoureusement celui qu'on cherche mais il s'en rapproche.

Les deux tableaux qui suivent donnent, selon le nombre de dents de la roue à tailler, le numéro de la fraise à utiliser. (Il y a un jeu de fraises par module)

Série à 8 fraises:

Numéro de la fraise	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de dents de l'engrenage à tailler	12	14	17	21	26	35	55	135
	et 13	\bar{a} 16	\bar{a} 20	\bar{a} 25	\bar{a} 34	\bar{a} 54	\bar{a} 134	\bar{a} la crémaillère.

Série à 15 fraises:

N° de la fraise	1	1½	2	2½	3	3½	4	4½	5	5½	6	6½	7	7½	8
Nombre de dents de l'engrenage à tailler	135	80	55	42	35	30	26	23	21	19	17	15			
	\bar{a} l'inf. ni.	\bar{a} 134	\bar{a} 79	\bar{a} 54	\bar{a} 41	\bar{a} 34	\bar{a} 29	\bar{a} 25	et 22	et 20	et 18	et 16	14	13	12

Il est à remarquer que ce procédé de taillage ne sert dans l'industrie que pour les ébauches. Il est utilisé surtout dans les industries à moyens réduits.

b) fraise en bout (pl 67)

La fraise, à cette fois-ci, des arêtes tranchantes réparties sur une surface de révolution (l'axe de la fraise rencontre l'axe de la roue à tailler) la génération de la denture est obtenue par un mouvement d'avance lent (translation parallèlement à l'axe de la roue) et un mouvement de coupe rapide (rotation de la fraise autour de son axe de révolution). Le taillage à l'aide de ce genre de fraise est très économique. Il est surtout utilisé pour les grands modules ($M > 20$).

3) Taillage par génération (pl 68 et 69)

C'est le procédé de taillage le plus utilisé. le principe en est le suivant: il s'agit de donner à l'outil et à la pièce des mouvements relatifs conjugués de manière à reproduire le mouvement d'engrènement.

Les 3 procédés de taillage par génération sont les suivants:

- taillage par outil crémaillère
- taillage par outil pignon.
- taillage par fraise mère.

a) Utilisation de l'outil crémaillère (pl 68)

Dans ce mode de génération de denture, il s'agit de faire engréner l'outil qui est une crémaillère avec la roue à tailler. L'outil qui travaille par mortaisage a un mouvement de coupe parallèle à l'axe de la roue à tailler, le mouvement d'avance (qui doit être très lent) réalise les conditions de roulement sans glissement de la roue et de l'outil (mouvement de génération). Ce mouvement de génération peut être réalisé de 2 manières différentes:

- dans les machines MAAG seule la roue réalise ce mouvement (Rotation et translation Simultanées).

- dans les machines SUNDERLAND (Cas de la planche 68) un mouvement de translation de l'outil et un mouvement de rotation de la roue conjugués définissent le roulement sans glissement de la roue sur l'outil.

la planche 68 met en évidence les différentes étapes d'un tel taillage, ces étapes sont les suivantes:

1. l'outil n'a qu'un mouvement alternatif (normal au plan de la figure) la roue n'a qu'un mouvement de translation vers la crémaillère - outil (ce mouvement s'arrête quand la profondeur de dent est atteinte) - Voir fig ① et ②

2. la profondeur de dent atteinte, la roue et l'outil acquièrent le mouvement d'engrènement (rotation de la roue et translation de l'outil) - fig ③.

3. l'outil ayant parcouru un pas, la roue se dégage de l'outil. l'outil recule d'une quantité exactement égale au pas. fig ④ et ⑤. la 1^{re} dent est ainsi réalisée. la même opération se répète jusqu'à la réalisation totale des dents de la roue.

b) Utilisation d'un outil pignon FELLOW.

L'outil pignon (ou pignon couteau) qui se présente sous la forme d'une roue dentée a un mouvement de coupe (mortaisage) dont la direction est parallèle à l'axe de la roue à tailler. le mouvement de génération (réalisé par une rotation simultanée de l'outil et de la pièce) est un roulement sans glissement des 2 surfaces primitives. les vitesses de rotation ω_0 et ω de l'outil et de la roue sont déterminées par le nombre de dents de la roue à tailler (ces vitesses doivent être assez lentes pour éviter les stries.)

Remarque: les machines FELLOW sont les seules qui permettent l'usinage des dentures intérieures.

c) Utilisation de la fraise-mère (ou vis-fraise) (pl 66)

L'outil se présente sous la forme d'une vis sans fin qui a un certain nombre de gorges longitudinales (la planche 66 présente l'engrènement de la fraise-mère et de la roue à tailler).

La génération d'une denture droite est réalisée à une double condition:

- l'angle α des axes de la roue à tailler et de la fraise mère doit être tel que : $\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ou $\alpha_0 =$ angle d'inclinaison des filets de la fraise.

- les vitesses angulaires de rotation de la fraise et de la roue à tailler doivent être dans le rapport suivant :

$$\frac{\omega_0 - Z}{\omega - Z_0}$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \omega = \text{vitesse angulaire de la roue.} \\ \omega_0 = \text{vitesse angulaire de la vis.} \\ Z = \text{nombre de dents de la roue.} \\ Z_0 = \text{nombre de filets de la vis.} \end{array} \right.$

la planche 66 montre comment le roulement sans glissement des deux surfaces primitives provoque le taillage des dentures (le mouvement de la fraise mère sera même à celui d'une crémaillère qui engrène avec la roue.)

Il faut noter que la zone de travail d'une fraise-mère est limitée et qu'il faut régulièrement opérer à un changement de position de l'outil (suivant l'axe de l'outil) pour usiner la totalité de la roue.

Certaines machines, équipées avec une tête porte fraise à avance axiale, permettent de faire cette opération de manière continue (taillage diagonal)

B) RECTIFICATION

L'opération de rectification est nécessaire pour les engrenages. Elle permet de palier les déformations consécutives à l'usinage (stries de taillage) et surtout aux traitements thermiques (déformations inévitables dues à l'élévation de température)

les 2 principaux modes de rectification sont :

- mode de rectification par génération.
- mode de rectification par meule de forme.

Nous insisterons surtout sur le premier cité dans la mesure où il est le plus couramment utilisé.

a) mode de rectification par génération.

Il s'agit de donner à la roue à rectifier un mouvement de telle manière à obtenir un roulement sans glissement du cylindre primitif de la roue sur le plan primitif d'une crémaillère (fictive) matérialisée par la surface de la meule.

Dans ce mode de rectification, il existe des procédés avancés. Nous détaillerons sur le procédé MAAG et citerons les autres procédés.

a.1) Procédé de rectification MAAG (pl 80)

a.1.1) Principe de rectification

La crémaillère fictive est définie par les plans de 2 meules dont les arbres font, selon le cas, un angle de 0° ou 15° avec le plan de horizontal (dans l'un ou l'autre des 2 cas l'angle de pression β est égal soit à 15° soit à 0°)

Soient M_0 et β_0 le module et l'angle de pression pendant le baillage de la roue.

Si d_b est le diamètre de base de la développante de cercle à rectifier et z le nombre de dents de la roue, nous aurons :

$$d = \frac{d_b}{\cos \beta} \quad \text{avec } d = \text{diam. primitif de la roue (pendant la rectification)}$$

$$\text{et } d_b = z \cdot M_0 \cdot \cos \beta_0$$

nous déduisons :

$$\boxed{d = z M_0 \frac{\cos \beta_0}{\cos \beta}}$$

• Si $\beta = 0$, $d = z M_0 \cos \beta_0$

• Si $\beta = 15^\circ$, $d = z M_0 \frac{\cos \beta_0}{\cos 15^\circ}$

La connaissance du diamètre primitif de génération d , de la roue est nécessaire pour la réalisation pratique de la rectification.

a.1.2) Principe de la machine MAA-B (pl 80)
la planche 80 donne le schéma de principe d'une machine destinée à la rectification de dents droites. Nous allons montrer qu'elle permet d'obtenir le roulement sans glissement du cylindre primitif de la roue à rectifier sur le plan primitif de la crémaillère fictive définie par les meules. Les axes de la meule sont dans un plan perpendiculaire à l'axe de la roue rectifiée.

Le chariot (a) dit "chariot de génération" supporte la roue rectifiée et peut se déplacer transversalement, dans une direction normale à l'axe, sur les glissières du chariot (b) dit "chariot d'avance". L'arbre de montage de la roue porte à son extrémité un galet (m). Le galet (m) est relié par 2 rubans alternés (r) au bâti (c) fixé sur le chariot (b). Si le diamètre du galet (m) est égal à d , calculé au a.1.1), la condition de roulement sans glissement du cylindre primitif de la roue rectifiée sur le plan primitif de la crémaillère est donc bien réalisée.

Le chariot (b) étant animé parallèlement à l'axe de la roue, la largeur de la denture est entièrement rectifiée. (Les "meules assiettes" sont fixes)

Pour passer au couple suivant de flancs de dentures à rectifier, il suffit de dégager la roue des meules et de commander un mécanisme diviseur qui fait tourner la roue d'un pas angulaire.

Il est bien évident que le galet (m) est interchangeable puisque son diamètre est le diamètre primitif (d) de génération (à chaque diam. de génération correspond un galet (m))

les autres procédés de rectification par génération sont les suivants :

- Procédé NILES :

Une seule meule travaille (meule disque) avec, en plus du mouvement de rotation, un mouvement de translation parallèle à l'axe de la roue.

Le mouvement de génération (roulement sans glissement de la roue sur la crémaillère) est réalisé par une rotation et une translation simultanée de la roue rectifiée (translation du chariot porte-roue conjuguée à la rotation de la table de support de la roue.)

La meule ne travaille que sur un flanc ; un flanc étant terminé, le sens de la génération est renversé.

- Procédé PRATT et WITHNEY

La meule est similaire à celle du procédé NILES, mais elle est assez épaisse pour rectifier 2 flancs simultanément (épaisseur égale à celle de la dent de la crémaillère fictive)

- Procédé KOLB

La meule est une meule disque biconique animée d'un mouvement de translation alternatif. Le mouvement de génération est obtenu grâce au dispositif MAAB (le mouvement du chariot de génération est plus lent). Il existe d'autres variantes de rectification :

- Utilisation de 2 meules disques.
- Utilisation de 2 meules planes.

- Procédé REISHAUER

La meule utilisée a la forme d'une vis sans fin (on peut rapprocher cet outil à la fraise-mère) les mouvements de la meule et de la roue rectifiée sont conjugués (Conditions d'engrènement)

Remarque :

Un système de compensation permet de ramener la meule à sa position correcte dès que l'usure de celle-ci dépasse 1 micron.

bl mode de rectification par meule de forme

la meule travaille dans ce cas à la manière d'une fraise disque. Il en existe deux procédés:

a.1) Procédé MINERVA:

la meule de forme rectifiée sur un seul flanc. Une famille de flancs étant rectifiée, la roue est retournée sur la broche pour rectifier la 2^e famille de flancs.

a.2) Procédé ORCUTT:

La meule de forme rectifiée simultanément sur 2 flancs, elle a donc la même forme que l'entredent de la roue à rectifier.

Remarque générale:

les dentures intérieures ne peuvent être rectifiées que si la roue a un grand diamètre (supérieur à 1m)

Il existe cependant des machines spéciales permettant de rectifier les engrenages à denture intérieure de diamètre supérieur à 250 mm.

C) LE RASAGE (ou SHAVING)

le rasage est une opération de super finition destinée à faire disparaître une surépaisseur, non plus par rectification, mais par un véritable raclage. L'outil est une roue cylindrique dont les dents comportent des gorges équidistantes disposées perpendiculairement à l'axe de la roue.

Le raclage s'effectue par une pression de l'outil sur la roue à finir avec un mouvement parallèle à l'axe des 2 roues. Certaines machines travaillent selon ce principe; Mais on préfère croiser légèrement les axes de la roue et de l'outil.

Un léger freinage de la rotation de la roue à finir permet d'obtenir le résultat recherché.

L'avantage de ce procédé est l'obtention de surfaces finies rapidement.

D) TRAITEMENTS THERMIQUES:

Les traitements thermiques ont une grande importance puisqu'ils déterminent la résistance mécanique de l'engrenage; Mais, les traitements thermiques, s'accompagnant de déformations, une étude spéciale est nécessaire dans le but de ne pas sacrifier les qualités géométriques de l'engrenage (obtenues grâce à des procédés modernes d'usinage.)

Il existe deux modes de traitements thermiques:

1. traitement thermique Complet:

- Avant taillage
- Après taillage

2. traitement thermique Superficiel:

- Cémentation.
- Trempe superficielle.
- Trempe par induction.
- Nitruration.

les traitements thermiques doivent être conduits de telle manière à éviter les oxydations exagérées et les grandes déformations (choix de températures et de procédés de refroidissement convenables)

1. traitement thermique complet

1. a) Avant taillage: Il est parfois nécessaire (et suffisant) d'effectuer un traitement thermique complet avant taillage. la dureté doit être limitée afin d'éviter un usinage difficile et très onéreux.

1. b) Après taillage: l'avantage est la possibilité d'usiner un métal doux. le traitement consiste en un chauffage continu jusqu'à la température de trempe (dans un bain de sel de préférence) le refroidissement se fait par étapes. Une rectification est nécessaire pour la suppression des déformations inévitables.

2. Traitement thermique superficiel.

2.a) Cémentation: Elle permet d'obtenir des pièces résilientes très dures en surfaces. La teneur en carbone ne doit pas dépasser 0,85% à la surface et la couche cémentée doit être uniforme sur toute la surface.

La cémentation gazeuse est la plus utilisée pour les engrenages car c'est la plus rapide, la moins onéreuse et elle cause un minimum de déformations.

2.b) Trempe superficielle à la flamme: on y procède par deux méthodes différentes:

- Trempe rotative.
- Trempe dent par dent.

2.b.1) Trempe rotative: des brûleurs sont disposés sur la périphérie de la roue dentée qui tourne autour de son axe jusqu'à ce que la température de trempe soit atteinte. A ce moment les brûleurs sont remplacés par des jets d'arrosage (ou, à défaut, on plonge la roue dans un bain de refroidissement).

2.b.2) Trempe dent par dent: elle se fait automatiquement par une machine qui commande le mouvement du brûleur. ce procédé est utilisé pour les roues de grands diamètres. Il faut signaler que le choix de l'acier doit se faire convenablement pour une bonne réussite de la trempe. La teneur en carbone doit être comprise entre 0,35% et 0,7% pour une trempe efficace.

2.c) Trempe superficielle par induction:

Le procédé a beaucoup de points communs avec la trempe superficielle à la flamme. L'avantage net de ce procédé est l'élimination presque totale des déformations mais c'est une solution très onéreuse.

lubrification des engrenages:

la nécessité de lubrifier les engrenages se justifie par les 3 rôles principaux qui sont les suivants:

- Eviter le contact métal sur métal par interposition d'un film d'huile entre les surfaces de dentures, ce qui diminue le risque de détériorations (surtout le grippage)

- Améliorer les conditions de rendement (diminution du coefficient de frottement μ_p)

- Absorber la chaleur dégagée par frottement pendant l'engrènement.

C'est surtout sur le rôle d'éviter le grippage qu'il faut insister. Il faut utiliser une huile dont la viscosité soit telle qu'une augmentation de température et de pression superficielle ne provoque pas une rupture du film d'huile brutale et donc une tendance au soudage.

A chaque viscosité d'huile correspond une température limite de rupture du film; Comme la température totale au contact des dents peut être déterminée suivant les conditions de fonctionnement, le choix de l'huile est immédiat.

Il importe de savoir, par ailleurs, qu'une diminution de l'épaisseur du film d'huile s'accompagne d'une usure anormale.

Nous dirons en conclusion que les conditions de lubrification ont une répercussion assez importante sur les détériorations superficielles en particulier.

Conclusion générale :

Nous nous sommes efforcés, au cours de ce projet, de faire un bilan des connaissances actuelles sur les engrenages en nous basant aussi bien sur des données pratiques que sur des données théoriques.

La densité d'un tel travail sur le plan théorique étant trop importante devant le volume horaire qui nous a été offert, nous sommes limités à donner une idée aussi précise que possible sur les engrenages cylindriques à denture droite et à présenter, sur le plan pratique, les autres catégories d'engrenages.

Nous pensons que cette étude ne peut être complète que si les engrenages cylindriques à denture hélicoïdale, à axes concourants et gauches sont présentés en détail sur le plan théorique. C'est ainsi que nous suggérons qu'une telle étude fasse l'objet d'un projet de fin d'études pour les futures promotions.

