

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département: ELECTRONIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**Etude, simulation et application des algorithmes
du gradient et des moindres carrés récursifs dans
l'égalisation adaptative**

Proposé par:

Mr B. DERRAS

Etudié par:

**F. ABABSA
M. KHEBIZA**

Dirigé par:

Mr B. DERRAS

PROMOTION: Juillet 1993

E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi El-Harrach - ALGER -

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

DEDICACES

Je dédie ce mémoire :

- à toute ma famille.
- à tous mes amis.

Fakhr-eddine.

DEDICACES

Je dédie ce mémoire :

- A mes chers parents, EL-GHAZOUANI et HALIMA,
pour tous les sacrifices afin d'assurer notre
avenir.
- A mes chers SOUMIA et KAMAL.
- A AZZIZI et KHTITI.
- A mes frères et soeurs.
- A tous mes amis.

Mohamed.

REMERCIEMENTS

Nous ne saurions présenter cette étude sans exprimer nos remerciements:

- à tous les professeurs de l'École Nationale Polytechnique qui ont contribué à notre formation, en particulier, Monsieur B.DERRAS qui a bien voulu diriger cette étude. Nous tenons à lui exprimer notre vive reconnaissance pour l'aide précieuse qu'il n'a cessé de nous prodiguer tout au long de ce travail.

- à tous ceux qui ont participé, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

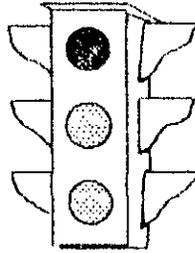
SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE	1
Chapitre I: Introduction sur les systèmes de communication numérique	3
I.1 Généralités	3
I.2 Introduction sur les systèmes de communication numérique	3
I.3 Codes de lignes	5
I.4 Modèle du canal - Problème des distorsions	10
I.5 Mise en forme des impulsions	12
I.6 Egalisation - Egalisation adaptative	17
Chapitre II: Structures des égaliseurs	20
II.1 Introduction	20
II.2 Egaliseur transversal	20
II.3 Egaliseur fractionné	21
II.4 Egaliseur récursif	23
II.5 Egaliseur en treillis	25
Chapitre III: Algorithmes adaptatifs	29
III.1 Introduction	29
III.2 Critère du minimum de l'erreur quadratique moyenne	29
III.3 Algorithme du gradient (LMS)	34
III.4 Algorithme des moindres carrés récursifs (MCR)	47
III.4.a Algorithme de Kalman	50
III.4.b Algorithme Fast Kalman	56
III.5 Complexité et stabilité numérique	61
Chapitre IV: Simulation et interprétation des résultats	63
IV.1 But de la simulation	63
IV.2 Modèle proposé	63
IV.3 Modèle du canal de transmission	65
IV.4 Génération des signaux	67
IV.4.a Génération de la séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA)	67
IV.4.b Génération du bruit blanc gaussien	68
IV.5 Interprétation des résultats	69
CONCLUSION	85
ANNEXE A	
ANNEXE B	
REFERENCES	

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction générale



Les récents progrès de la téléinformatique ont entraîné la nécessité de développer des systèmes de transmission de données pouvant acheminer un nombre d'éléments binaires par seconde de plus en plus grand. Aux débits de 1200 bits par seconde ont succédé des débits de 2400, 4800, puis 9600 bits par seconde.

Dans cette course vers les grandes vitesses de transmission un problème nouveau s'est posé. En effet, l'égalisation classique des lignes de transmission qui uniformisent approximativement le module et linéarise grossièrement la phase du gain d'une ligne s'est révélée insuffisante pour transmettre des données à grande vitesse.

D'autre part, l'utilisation de réseaux commutés (multi-trajets) en téléphonie nécessite toujours une égalisation adaptative car chaque séance de transmission risque de s'effectuer dans des conditions entièrement différentes, c'est à dire que pour des communications différentes on peut avoir des canaux avec des caractéristiques différentes. De plus on peut avoir des variations lentes des caractéristiques d'un même canal au cours du temps.

Ainsi, nous avons commencé notre travail en consacrant tout un chapitre à rappeler les différents concepts de la transmission numérique des données, à savoir la modélisation des systèmes binaires, les codes de lignes, le problème des interférences entre symboles (ISI), et avec plus de détails, l'égalisation et l'égalisation adaptative.

Dans un autre chapitre, on donnera les différentes structures existantes des égaliseurs adaptatifs ainsi que les propriétés de chacune d'elles tout en insistant sur les structures transversales et récursives.

Le troisième chapitre portera sur le développement théorique des algorithmes adaptatifs du gradient et des

moindres carrés récursifs (MCR) utilisés pour la mise à jour des coefficients optimaux des égaliseurs. On donnera les propriétés, les performances ainsi que l'implémentation numérique de chaque algorithme.

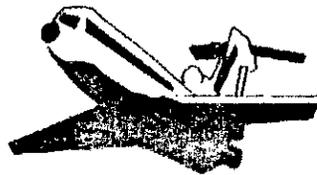
Un chapitre sera consacré à la simulation effectuée ainsi qu'aux interprétations des résultats obtenus.

Enfin, un organigramme général du programme élaboré pour la simulation des différentes expériences d'une égalisation adaptative symbolisera la fin de cette étude.

Le langage évolué utilisé est le turbo pascal version 6.0.

Chapitre I

Introduction sur les systèmes de communication numérique



I.1 GENERALITES

Lors d'une transmission numérique de données, la durée d'une impulsion émise est d'autant plus courte que le débit d'information est plus grand. Pour faciliter la réception, il est souhaitable que les supports des impulsions successives émises soient disjoints. La voie de transmission qui se comporte comme un filtre linéaire pour les impulsions émises a pour effet d'étaler dans le temps ces impulsions. Ainsi, pour de grands débits, même si les impulsions successives émises sont disjointes, cet étalement entraîne un chevauchement des impulsions voisines à l'entrée du récepteur, traditionnellement désigné par le terme d'interférence entre symbole (ISI) [16]. Ces interférences ne sont pas connues au récepteur, car les caractéristiques de la voie de transmission lui sont inconnues et de plus elles varient lentement au cours du temps. De ce fait, pour de grands débits, le récepteur doit s'adapter automatiquement aux caractéristiques de la voie de transmission. En effet, ceci peut être réalisé à l'aide d'un égaliseur adaptatif.

La modélisation des systèmes numériques de transmission de données, le problème des ISI ainsi que l'égalisation des canaux de transmission représentent le vif sujet de ce chapitre.

I.2 INTRODUCTION SUR LES SYSTEMES DE COMMUNICATION NUMERIQUES

Ce paragraphe a pour objet de décrire les principes de fonctionnement des émetteurs et récepteurs, et des systèmes appelés multiplexeurs, destinés à transmettre plusieurs communications sur un même support. Dans ce but, nous rappelons tout d'abord les principaux types de canaux de transmission existants (figure I.1).

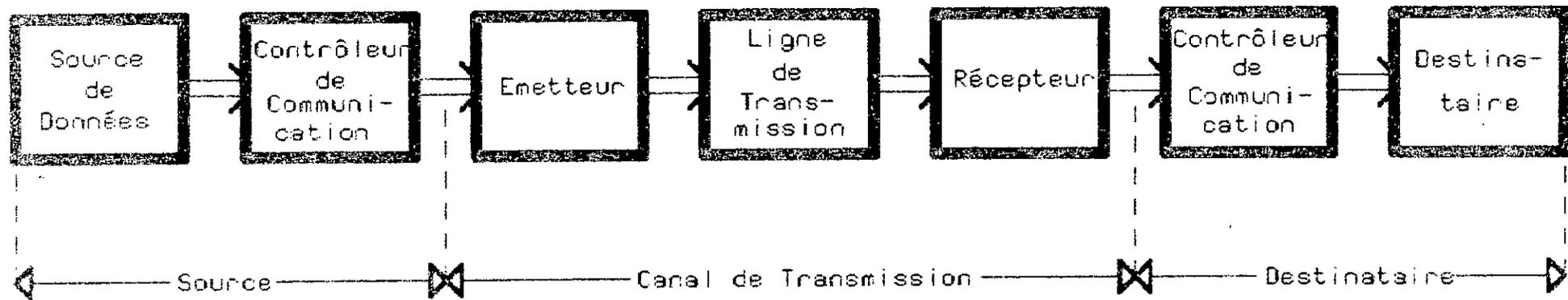


Figure 1: MODELE DE SYSTEME DE COMMUNICATION
NUMERIQUE

I.2.a Ligne de transmission

Une ligne de transmission permet de relier physiquement les emplacements géographiques où se situent la source et le destinataire, nous allons voir dans le paragraphe (1.4) qu'elle peut être modélisée par un filtre linéaire bruité. Une ligne peut être un câble coaxial, une ligne à paire métallique ou l'espace libre.

I.2.b Émetteur

L'émetteur a en particulier pour fonction de transformer le message des données qu'il reçoit en un signal compatible avec la ligne de transmission utilisée. L'émetteur peut contenir un codeur et un modulateur.

I.2.c Récepteur

Le récepteur est fonctionnellement différent suivant qu'il est conçu pour recevoir des signaux synchrones ou asynchrones. Il permet l'adaptation entre la ligne de transmission et le destinataire, il contient un démodulateur et un décodeur.

I.2.d Contrôleur de communication

Le contrôleur de communication regroupe les organes chargés des différentes fonctions de communication, il permet entre autre de réaliser une protection contre les erreurs.

I.3 LES CODES DE LIGNES

Pour mieux transporter une information à travers un canal de transmission on modifie sa représentation. Ainsi, un choix convenable du "code" utilisé peut faire en sorte que le spectre du signal soit mieux adapté aux caractéristiques de la ligne de transmission [17] puisque les transformateurs d'isolement se trouvant aux extrémités et les amplificateurs

pouvant se trouver répartis le long de la ligne, courent les très basses fréquences défigurant le signal.

I.3.a Code ON-OFF

Le signal on-off est un signal à deux niveaux, 1 et 0. Sa loi de codage est donnée par l'expression [13] suivante :

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{si le } k^{\text{ième}} \text{ bit} = 1 \\ 0 & \text{si le } k^{\text{ième}} \text{ bit} = 0 \end{cases} \quad (\text{I-1})$$

Soit T_0 la durée de l'impulsion $p(t)$ utilisée (figure I-2)

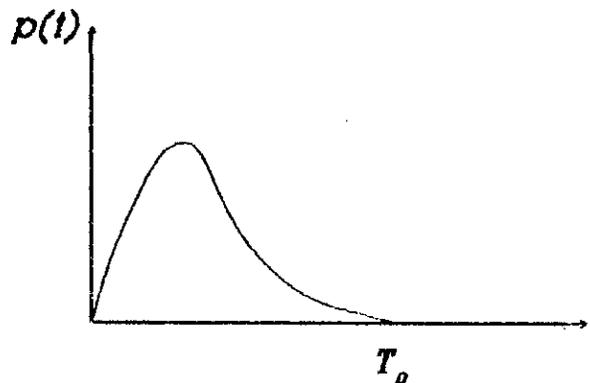


fig.(I-2) Forme de l'impulsion standard

Ainsi le nombre d'impulsion qui peuvent exister dans un intervalle de temps $[-T/2, T/2]$ est T/T_0 , on suppose que le nombre de 1 et de 0 dans cet intervalle est le même.

La densité spectrale du signal on-off utilisant l'impulsion rectangulaire de durée T_0 est donnée par [13] : (voir figure (I-3))

$$S(\omega) = \frac{T_0}{16} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_0}{4\pi}\right) \cdot \left[1 + \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T_0}\right)\right] \quad (\text{I-2})$$

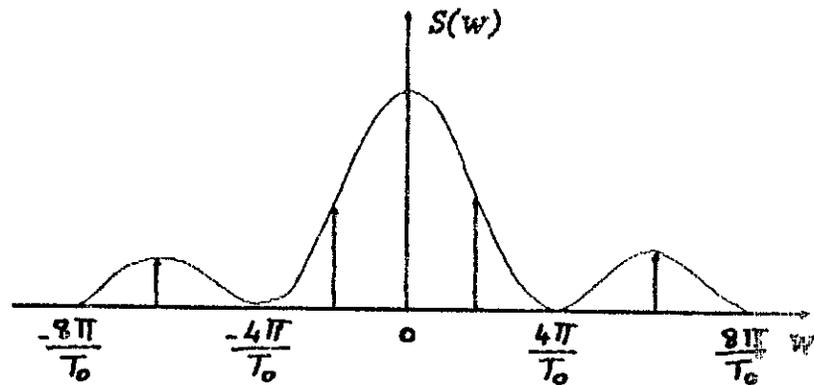


fig.(I-3) Densité spectrale d'un signal ON-OFF

Le signal on-off est un signal simple mais il a plusieurs inconvénients :

- Il possède une composante continue ($f=0$).
- Il est moins résistant aux interférences entre symboles

I.3.b Code polaire

Le signal polaire est un signal à deux niveaux, +1 et -1. Sa loi de codage est donnée par :

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{si le } k^{\text{ième}} \text{ bit} = 1 \\ -1 & \text{si le } k^{\text{ième}} \text{ bit} = 0 \end{cases} \quad (\text{I-3})$$

Ainsi, l'expression de sa densité spectrale s'écrit [13]:

$$S(\omega) = \frac{T_0}{4} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_0}{4\pi}\right) \quad (\text{I-4})$$

D'après l'expression (I-4), on remarque que ce code possède une densité spectrale identique à un facteur près à celle du signal on-off.

L'avantage que présente le code polaire est qu'il permet

de déduire directement la donnée transmise, on dit souvent qu'il est transparent. Toutefois, la présence de la composante continue (figure (I-4)) constitue son inconvénient majeure.

I.3.c Code bipolaire

Le signal bipolaire est un signal à trois niveaux +1, 0 et -1. Sa loi de codage est donnée par [13] :

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si le } k^{\text{ième}} \text{ bit} = 0 \\ 1 \text{ ou } -1 & \text{si le } k^{\text{ième}} \text{ bit} = 1 \end{cases} \quad (\text{I-5})$$

Notons que si le $k^{\text{ième}}$ bit est égal à 1, a_k prend la valeur 1 (-1) si sa valeur précédente était -1 (1) (c.à.d d'une manière alternée).

Le spectre de puissance du signal bipolaire est donnée par l'expression : (voir figure (I-4))

$$S(\omega) = \frac{T_0}{4} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_0}{4\pi}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\omega T_0}{2}\right) \quad (\text{I-6})$$

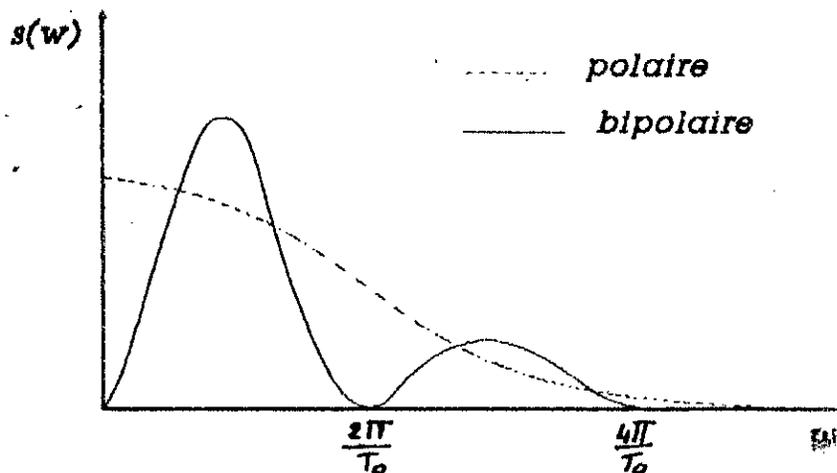


figure (I-4) Densités spectrales du signal polaire et bipolaire

Le signal bipolaire présente les avantages suivants:

- Une meilleure adaptation avec les circuits vu que sa composante continue est nulle (figure (I-4)).
- Etant donné que les (1) et les (-1) arrivent d'une manière alternée, il y a possibilité de détecter les erreurs à la réception.

En plus des codes cités dans cette section, il existe d'autres codes tel que : le code MILLER, le code BHD et le code entrelacé d'ordre 2 [17].

I.3.d Choix d'un procédé de codage

Le choix d'un code différent des codes on-off et polaire est dû à la nécessité de supprimer la composante continue dans le spectre du signal transmis. Le procédé de codage le plus utilisé est le bipolaire, dans ce cas l'élimination de la composante continue entraîne une diminution de la résistance au bruit.

I.4 MODELE DU CANAL - PROBLEME DES DISTORSIONS

Les canaux utilisés en transmission sont généralement modélisés par des systèmes linéaires invariants dans le temps. Le modèle standard d'un canal est celui de la figure (I-5)

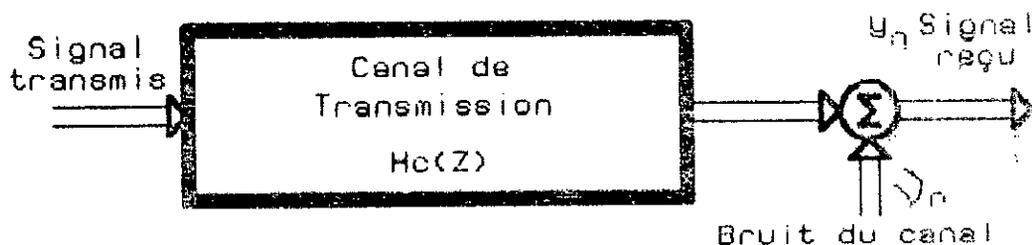


figure (I-5) Modèle standard du canal de transmission

Généralement on suppose que v_n est un bruit gaussien additif avec des caractéristiques bien spécifiées.

La fonction de transfert $H_c(Z)$ ¹ contient les effets du modulateur, du démodulateur ainsi que les effets des distorsions du canal lui-même.

La fonction de transfert du canal $H_c(Z)$ peut être représentée par:

$$H_c(\omega) = |H_c(\omega)| \cdot e^{j\theta_c(\omega)} \quad (I-7)$$

On appelle retard d'enveloppe, la fonction :

¹ : $H_c(Z)$ d'un système à bande de base ne contient pas les effets du modulateur et du démodulateur.

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega} \quad (1-8)$$

Si $|H_c(\omega)|$ n'est pas constante dans la bande passante, alors le signal transmis sera distordu en amplitude et si $\theta_c(\omega)$ n'est pas constant dans la bande passante, alors le signal transmis sera distordu en phase ou en retard.

Comme résultats des distorsions d'amplitude, de phase et du filtrage coupant les hautes fréquences causées par la réponse non idéale du canal, les impulsions successives transmises à travers ce canal à une cadence comparable à la bande de fréquence B sont chevauchées à la réception, traditionnellement ce phénomène est désigné par le terme d'interférence entre symboles (ISI)(voir figure (1-6)).

En plus de la distorsion linéaire, les signaux transmis à travers les canaux téléphoniques sont sujets à d'autres impaires, spécifiquement les distorsions non linéaires, l'offset de fréquence, la phase-jitter, le bruit impulsif et le bruit thermique [8].

L'apparition de ces problèmes dépend surtout du débit de transmission et du type de modulation [8,16].

- Si le débit est inférieur à 1800 bits/s on peut utiliser une technique de démodulation comme le FSK, qui est relativement insensible à la quantité de distorsion rencontrée sur un canal téléphonique typique.

- Si le débit est entre 1800 et 2400 bits/s, la technique la plus appropriée est le PSK à quatre phase.

- Si le débit est supérieure à 2400 bits/s, les modulations efficaces sont : QAM, PAM et PSK à deux phases.

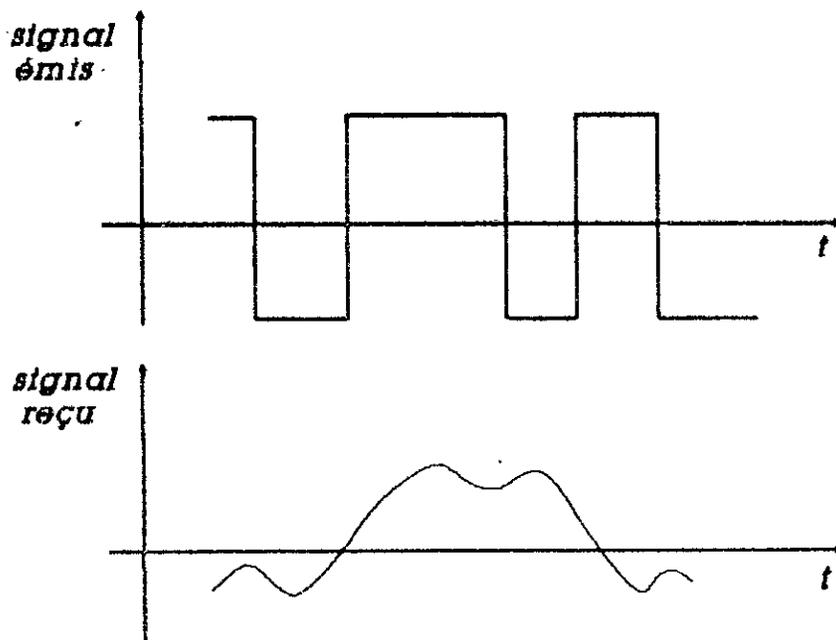


fig.(I-6) Exemple de distorsion introduite par la ligne

I.5 MISE EN FORME DES IMPULSIONS

soit $\{a_n\}$ les symboles véhiculant l'information digitale, soit $p(t)$ l'impulsion, supposée à bande de base, qui va représenter les données $\{a_n\}$. Le signal transmis à bande de base est donné par:

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot p(t-nT) \quad (I-9)$$

Le signal est transmis à travers un canal de transmission ayant une réponse fréquentielle $H_c(\omega)$ et une réponse impulsionnelle $h_c(t)$. Par conséquent, le signal reçu est :

$$r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot g(t-nT) + v(t) \quad (I-10)$$

$$g(t) = \int p(\tau) \cdot h_c(t-\tau) \cdot d\tau \quad (I-11)$$

A la réception, on utilise un filtre adapté à l'impulsion reçue. Ainsi, la réponse du filtre de réception est :

$$G^*(\omega) = P^*(\omega) \cdot H_c^*(\omega) \quad (I-12)$$

où * désigne la forme conjuguée.

La sortie du filtre récepteur est :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x(t-nt) + Z(t) \quad (I-13)$$

où $x(t)$ et $Z(t)$ représentent, respectivement, les réponses du filtre récepteur à l'impulsion d'entrée d'entrée $g(t)$ et au bruit $v(t)$.

Si $y(t)$ est échantillonnée à $t = kT + \tau_0$, $k = 0, 1, \dots$
on aura :

$$y(kT + \tau_0) = y_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x(kT + \tau_0 - nT) + Z(kT + \tau_0) \quad (I-14)$$

τ_0 est le retard de transmission à travers le canal.
L'équation (I-13) peut s'écrire :

$$y_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_{k-n} + Z_k \quad \text{si } \tau_0 = 0 \quad (I-15)$$

ou bien :

$$y_k = x_0 \left[a_k + \frac{1}{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_{k-n} + Z_k \right] \quad (n \neq k) \quad (I-16)$$

x_0 est considéré comme un facteur de normalisation, il est généralement pris égal à 1, d'où :

$$y_k = a_k + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_{k-n} + Z_k \quad (n \neq k) \quad (I-17)$$

Le terme a_k représente le symbole de l'impulsion désirée à l'instant k , le terme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_{k-n}$ $(n \neq k)$ représente l'interférence entre symboles et Z_k le bruit additif qu'on suppose gaussien.

D'après l'équation (I-17), la condition pour avoir des ISI nulles est :

$$x(t-kT) = x_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (I-18)$$

puisque le signal $x(t)$ est un signal à bande limitée on peut le représenter par [8] :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2W}\right) \cdot \frac{\sin\left(2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)\right)}{2\pi W\left(t - \frac{n}{2W}\right)} \quad (I-19)$$

Avec $T=1/2.W$. $x(n/2W)$ est le signal $x(t)$ échantillonné à une cadence $2W=1/T$, ce choix particulier s'appelle le taux de Nyquist [8,20]. Si on choisit $T=1/2W$ alors on aura :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi(t-nT)}{T}\right)}{\frac{\pi(t-nT)}{T}} \quad (I-20)$$

Pour éviter les ISI, les coefficients $x(nT)$ doivent être tous nuls sauf celui correspondant à $n=0$. Par conséquent l'impulsion $x(t)$ qui donne des ISI nulles est (figure (I-7)):

$$x(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\left(\frac{\pi t}{T}\right)} \quad (I-21)$$

Avec

$$X(f) = \begin{cases} T & |f| \leq \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (I-22)$$

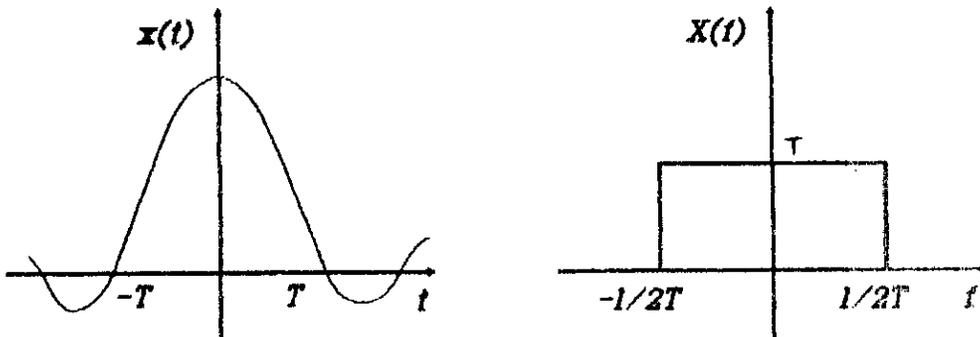


fig.(I-7) Impulsion idéale à ISI nulle

Une telle impulsion présente deux problèmes de base :

- $X(f)$ est rectangulaire, donc physiquement irréalisable.
- $x(t)$ décroît en $1/t$, par conséquent une mauvaise synchronisation introduite par une erreur d'échantillonnage à la réception résulte en une somme divergente d'ISI [8].

Pour éviter ces problèmes, on limite le débit de transmission à $1/T = f < 2W$ symboles/s (débit inférieur à la limite de Nyquist), et on essaye de voir s'il y a des impulsions qui satisfont à la condition d'ISI nulles.

Si $W < 1/T < 2W$, il est possible de concevoir une variété d'impulsions qui possèdent des caractéristiques spectrales adéquates et qui sont libres de toute ISI sur un canal idéal.

L'impulsion la plus utilisée, généralement connue sous le nom du cosinus surélevé [8,10], est donnée par l'expression :

$$x(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\left(\frac{\pi t}{T}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\beta \pi t}{T}\right)}{1 - \frac{4\beta^2 t^2}{T^2}} \quad (1-23)$$

et

$$X(f) = \begin{cases} T & 0 \leq |f| \leq \frac{(1-\beta)}{2T} \\ \frac{T}{2} \left[1 - \frac{\sin\left(n\pi\left(f - \frac{1}{2T}\right)\right)}{\beta} \right] & \frac{1-\beta}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \end{cases} \quad (1-24)$$

où β est le paramètre rolloff [10].

On remarque que $x(t)$ décroît en $1/t^3$. Donc une erreur d'échantillonnage à la réception ne cause pas une divergence de la série des composants d'ISI.

D'après le théorème de Nyquist, un canal idéal ayant une bande W peut être utilisé pour transmettre une information digitale avec un débit égal $2W$ symboles/seconde sans ISI aux instants d'échantillonnage. Cependant comme indiqué précédemment, une telle impulsion est physiquement non réalisable. En réduisant le débit des symboles à une valeur inférieure à $2W$ symboles/seconde, on a montré que des impulsions réalisables satisfaisant la condition d'ISI nulle

aux instants d'échantillonnage sont possibles. Toutefois, on peut imposer la condition que le débit soit $2W$ symboles/seconde tout en retirant la contrainte d'avoir des ISI nulles aux instants d'échantillonnage. Dans un tel cas, on obtient une classe d'impulsions physiquement réalisables qui sont appelées signaux à réponse partielle [8]. Pour ce type d'impulsion on obtient des ISI contrôlées, ceci nous permet d'augmenter le débit. Toutefois, cette technique nécessite des codeurs et des décodeurs plus complexes.

I.6 EGALISATION - EGALISATION ADAPTATIVE

Dans les systèmes de communication, le récepteur a essentiellement pour fonction de supprimer les interférences entre symboles (ISI). Pour cela, il est en général constitué par un filtre linéaire (figure (I-8)) dont le gain est l'inverse de celui du canal de transmission. Ainsi, le gain du canal se trouve uniformisé ou encore égalisé par le récepteur. C'est pourquoi cette partie du récepteur est souvent appelée égaliseur, ses caractéristiques sont fonction de celles de la ligne de transmission.

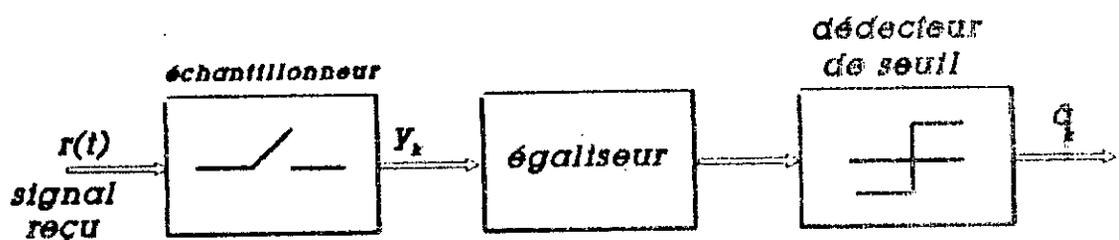


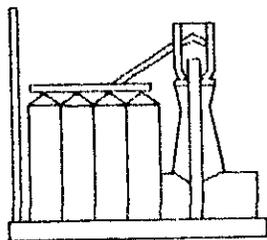
fig (I-8) Schéma de principe d'une égalisation

Le chevauchement des impulsions successives $g(t-nT)$ fait que l'information portée par y_k n'est plus relative au symbole transmis a_k . Le chevauchement est essentiellement

La décision sur les symboles à la réception s'obtient en faisant passer le signal de sortie de l'égaliseur $y(n)$ par un organe de décision (détecteur de seuils) qui délivre à son tour des données binaires estimées \hat{a}_n . La probabilité de commettre une erreur de décision dépend généralement des caractéristiques de la ligne (rapport signal sur bruit, distorsions, bande passante,...) et il est souhaitable qu'elle soit aussi faible que possible.

Chapitre II

Structures des égaliseurs



II.1 INTRODUCTION

Pour remédier aux problèmes des interférences entre symboles (chapitre I) rencontrés en transmission numérique de données, différents types d'égaliseurs ont été mis en oeuvre. Dans ce chapitre, on donnera les structures pouvant être rencontrées en pratique tout en insistant sur les propriétés et les performances de chacune d'elles.

II.2 EGALISEUR TRANSVERSAL

Parmi les multiples structures utilisées dans l'égalisation, la plus simple est celle de l'égaliseur linéaire transversal [1,8,10,20] représenté à la figure (II-1). Dans une telle structure les échantillons $[x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]$ disponibles dans l'égaliseur à l'instant $n.T$ sont pondérés par des coefficients $\{c_i\}$, $i=0,1,\dots,N-1$ pour produire le signal de sortie :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} C_i \cdot x(n-i) \quad (II.1)$$

$y(n)$ est une estimation du symbole transmis $a(n)$.

La décision $\hat{a}(n)$ est obtenue par une quantification de l'estimation $y(n)$.

L'optimisation des coefficients de l'égaliseur peut être conduite suivant divers critères. Le plus utilisé étant celui du minimum de l'erreur quadratique moyenne. Pour ajuster automatiquement ces coefficients on peut utiliser l'un des algorithmes décrits dans le chapitre III.

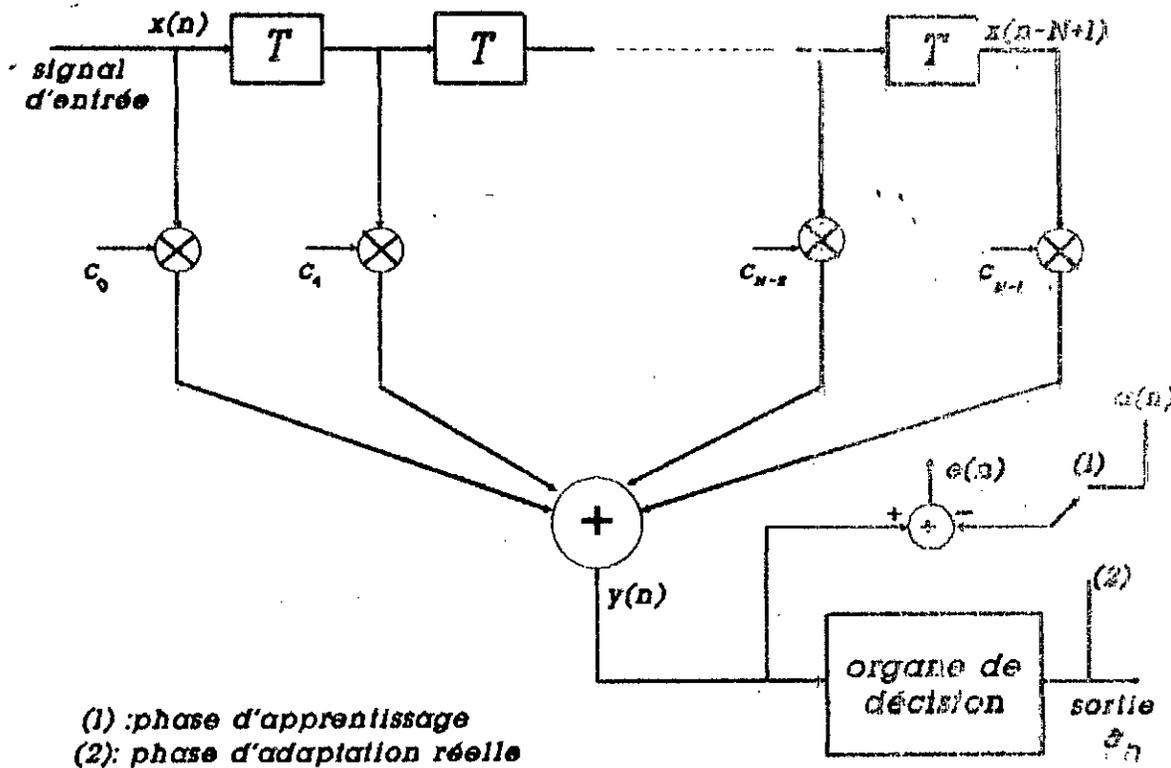


figure (II-1) Egaliseur linéaire transversal

II.3 EGALISEUR FRACTIONNE

Un égaliseur fractionné se différencie d'un égaliseur transversal classique par un retard τ élémentaire inférieur à la période de signalisation T . Dans une implémentation digitale, τ doit être égale à KT/M , où K et M sont deux entiers tels que $M > K$. En pratique, il convient de choisir $\tau = \frac{T}{M}$ avec M un petit entier généralement pris égal à 2 [20].

Ainsi, le signal reçu sera échantillonné puis décalé dans la ligne à retard de l'égaliseur chaque T/M seconde.

Une seule sortie est produite chaque T secondes pour chaque M échantillons d'entrée de l'égaliseur.

La structure d'un tel égaliseur est donnée à la figure (II-2). Le signal de sortie s'écrit comme suit :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} C_i \cdot x(nT - i \frac{KT}{M}) \quad (II-2)$$

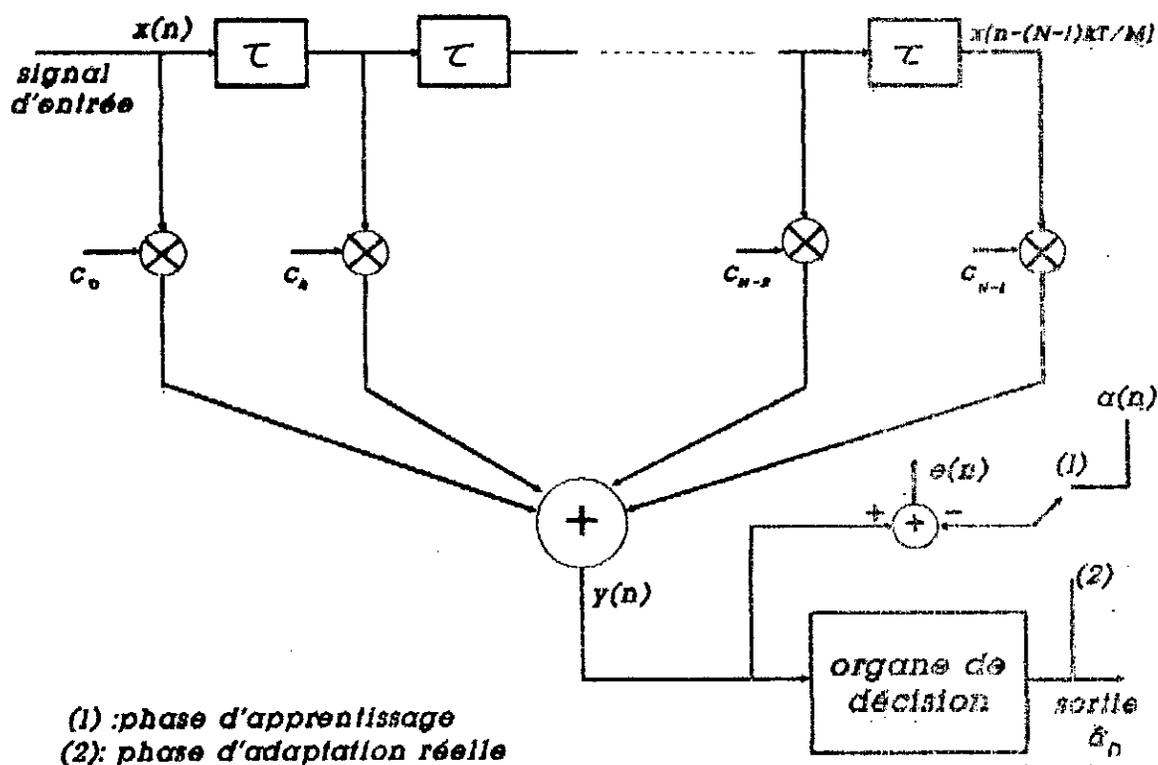


figure (II-2) Egaliseur fractionné

Les coefficients optimaux de l'égaliseur (KT/M) sont ajustés chaque période de signalisation T suivant les différents algorithmes adaptatifs (chapitre III).

L'intérêt pratique d'une telle structure comparé à celui d'une structure classique transversale est la diminution très importante de la sensibilité à l'instant d'échantillonnage [20].

II.4 EGALISEUR RECURSIF

un égaliseur récursif avec décision dans la boucle (DFE) que nous appelons, par simplicité égaliseur récursif, est représenté à la figure (II-3).

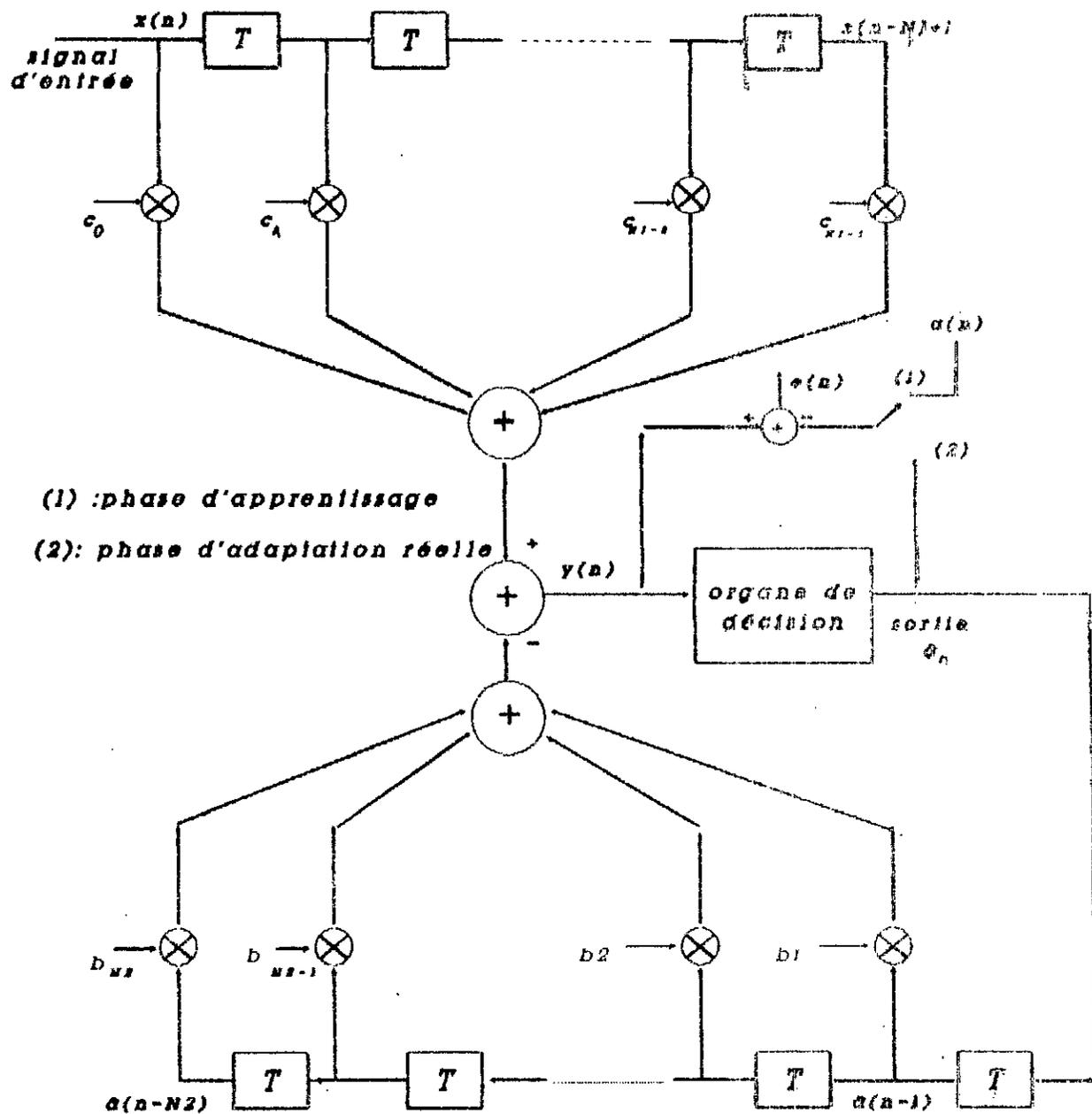


figure (II-3) Egaliseur récursif

La structure de cet égaliseur est celle d'un filtre numérique récursif (RII) modifié par insertion de l'organe de décision dans la partie réursive du filtre [1,8,16,20,21].

L'une des idées qui sont à l'origine de cette structure est que les symboles $\hat{a}(n-1)$, $\hat{a}(n-2)$, ..., $\hat{a}(n-N_2)$ réinjectés dans le filtre sont susceptibles d'éliminer une très large part des interférences entre le symbole $a(n)$ et les symboles antérieurs. Les coefficients des parties directe et rétroactive sont mis à jour à l'aide d'algorithmes adaptatifs.

D'après la description donnée ci-dessus, la sortie de l'égaliseur récursif peut être exprimée comme suit :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N_1-1} C_i \cdot x(n-i) - \sum_{i=1}^{N_2} b_i \cdot \hat{a}(n-i) \quad (11-3)$$

où

$y(n)$ est une estimation du symbole transmis $a(n)$.

$\{C_i\}_{i=0, 1, \dots, N_1-1}$ sont les coefficients de la partie directe de l'égaliseur, $\{b_i\}_{i=1, 2, \dots, N_2}$ ceux de la partie rétroactive.

$\{\hat{a}(n-1), \hat{a}(n-2), \dots, \hat{a}(n-N_2)\}$ sont les symboles détectés précédemment.

La décision $\hat{a}(n)$ est obtenue à l'aide d'un organe non linéaire dont la fonction est de quantifier l'estimation $y(n)$ puis comparer le résultat à un seuil donné.

* Propriétés

1- Les nombreuses simulations réalisées à ce jour ont permis de constater que l'erreur quadratique moyenne pour un égaliseur linéaire transversal est toujours nettement supérieure à l'erreur quadratique moyenne pour un égaliseur récursif [16]. Ce résultat a été observé dans le cas où le

nombre total de coefficients de l'égaliseur récursif est égal ou même inférieur à celui de l'égaliseur transversal. On peut expliquer cette amélioration en remarquant que le dispositif de décision dans la boucle permet d'éliminer tout bruit dans la partie récursive.

2- Dans un égaliseur récursif, comme dans l'égaliseur transversal, les erreurs sont inévitables, même si elles se produisent avec une faible probabilité (par exemple de l'ordre de 10^{-6}), on peut alors s'attendre à une propagation des erreurs. Des suggestions intéressantes ont été faites, leur idée commune est de réaliser un précodage à l'émission [16]. Malgré cela, le problème de propagation des erreurs dans un égaliseur récursif reste un problème d'actualité. Cette possibilité d'erreurs qui s'enchaînent enlève de l'attrait à un type d'égaliseur aux caractéristiques très prometteuses; d'autant plus qu'une suite d'erreurs est susceptible de perturber le processus d'adaptation utilisé pour la mise à jour des coefficients optimaux de l'égaliseur.

3- Etant donné que la structure de l'égaliseur récursif est celle d'un filtre numérique RII, alors il a tendance à devenir instable lorsque l'un des pôles de sa fonction caractéristique sort du cercle unité. Néanmoins, ceci peut être évité par l'implémentation d'algorithmes qui stabilisent l'égaliseur à chaque fois qu'il y a risque d'instabilité [14].

II.5 EGALISEUR EN TREILLIS

L'application des structures en treillis dans l'égalisation adaptative des canaux de transmission présente de nombreux avantages comparée à la structure transversale classique [8]:

- Elle permet d'atteindre une plus grande rapidité d'adaptation avec des circuits de complexité modérée.
- Elle est pratiquement insensible au bruit de calcul.

- Un filtre en treillis d'ordre N peut être construit à partir d'un autre filtre d'ordre $N-1$ et ce par une simple addition en cascade d'une cellule en treillis élémentaire (figure (II.4.b)) sans avoir à refaire entièrement la conception comme c'est le cas pour les autres structures. Cette propriété s'est révélée très pratique lors de la conception des systèmes numériques à grande échelle utilisant les structures en treillis.

La figure (II-4-a) présente la structure d'un égaliseur en treillis qui utilise l'algorithme du gradient (chapitre III) pour la mise à jour de ses coefficients optimaux. L'étage d'ordre m de cet égaliseur génère deux signaux, $f_m(n)$ et $b_m(n)$, qui représentent respectivement les erreurs de prédiction avant et arrière des deux prédicteurs d'ordre m . Ces deux prédicteurs ont les mêmes coefficients de réflexion k_m pour l'étage d'ordre m .

Les coefficients de réflexion sont ajustés de telle façon à minimiser la somme au carré des erreurs de prédiction avant et arrière.

Dans notre étude on a considéré, d'une part, la structure transversale vue les avantages qu'elle présente, à savoir simplicité des circuits et facilité de l'implémentation numérique, et d'autre part, la structure récursive vu l'intérêt qu'elle présente dans le domaine de la recherche scientifique orientée vers la transmission numérique de données à grande vitesse à travers des canaux dispersifs.

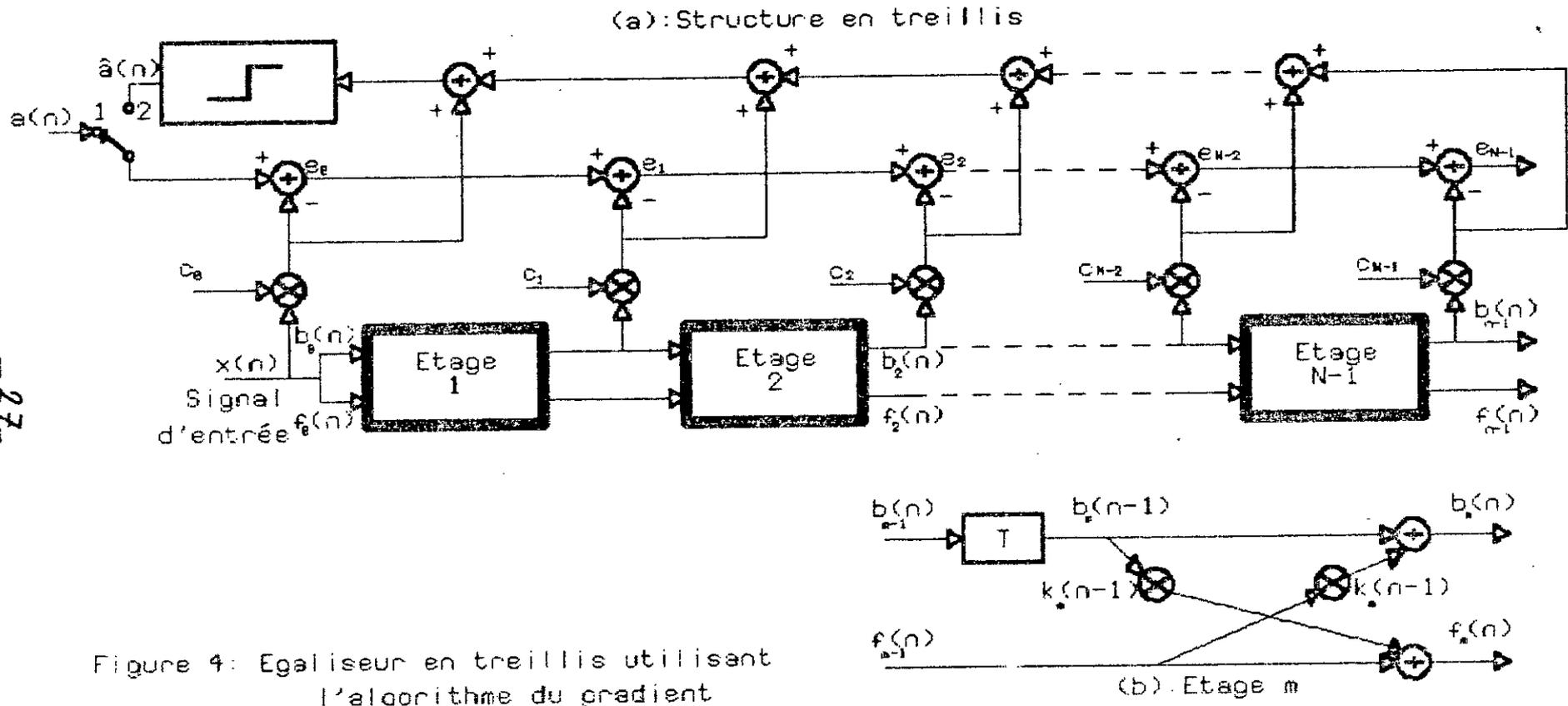
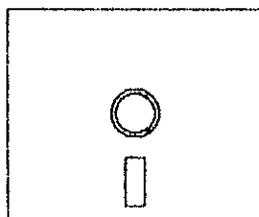


Figure 4: Egaliseur en treillis utilisant l'algorithme du gradient

Chapitre III

Algorithmes adaptatifs



III.1 INTRODUCTION

Diverses techniques et méthodes ont été développées ces deux dernières décennies en faveur du filtrage adaptatif.

En effet, quand il faut égaliser ou modéliser un système dont les caractéristiques évoluent ou non dans le temps, on fait appel à des filtres adaptatifs à coefficients variables. L'évolution de ces coefficients est déterminée par un critère d'optimisation et calculée suivant un algorithme d'adaptation. Le choix de ces deux contraintes (le critère et l'algorithme) est fonction de l'application.

Dans ce chapitre est étudié le critère de minimisation de l'erreur quadratique moyenne, ainsi que l'algorithme du gradient et l'algorithme des moindres carrés récursifs (MCR) (version brute et version rapide).

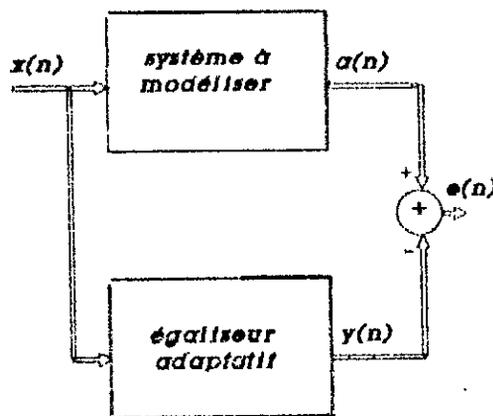


fig. (III-1) Modélisation

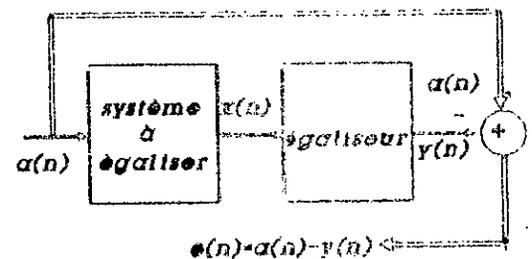


fig. (III-2) Egalisation

III.2 CRITERE DU MINIMUM DE L'ERREUR QUADRATIQUE MOYENNE

Soit à déterminer les coefficients d'un égaliseur d'ordre N (chapitre II), tel que l'écart entre le symbole $a(n)$ et le signal de sortie de l'égaliseur $y(n)$ où :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x(n-i) \quad (\text{III-1})$$

soit minimal. Ce type de problème se présente lorsqu'on veut adapter un égaliseur.

Il est intéressant de signaler que cette étude est faite pour un égaliseur transversal (filtre RIF), les résultats obtenus sont aussi valables pour l'égaliseur récursif (DFE) (filtre RII).

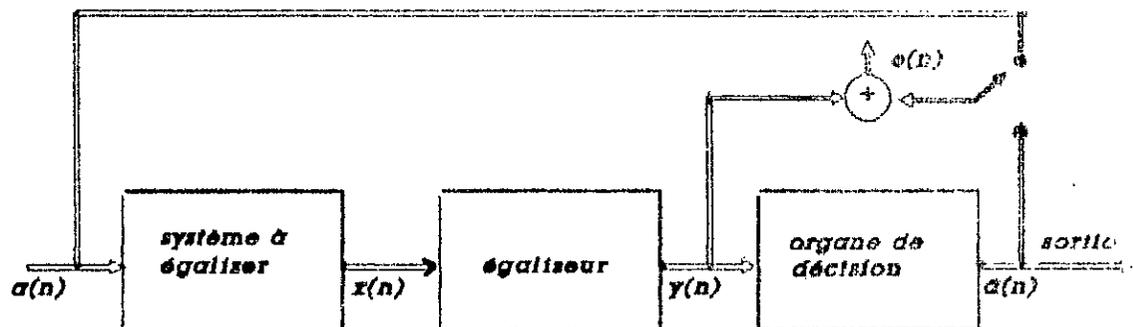


Figure (III-3) Principe de l'égalisation adaptative

Dans ce qui suit, on considère que tous les signaux sont réels, bien qu'il peuvent être complexes; il faut souligné que ce dernier cas ne présente pas de difficulté dans les calculs. D'après le critère de minimisation de l'erreur quadratique moyenne sur un ensemble d'indices $(0, 1, \dots, k-1)$ où k est un entier très supérieur à l'ordre de l'égaliseur.

il faut minimiser la fonction $\xi(n)$ définie par ¹ :

$$\xi(k-1) = \frac{1}{K} \cdot \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{(k-1)-n} [a(n) - y(n)]^2 \quad (\text{III.2})$$

aussi

$$\xi(k-1) = \frac{1}{K} \cdot \sum_{n=0}^{k-1} [a(n) - c_N^T(k-1) \cdot X_N(n)]^2 \quad (\text{III.3})$$

$C_N(i)$ ² : est le vecteur des coefficients cherchés minimisant la fonction $\xi(k-1)$.

Ces coefficients vérifient le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial \xi(k-1)}{\partial c_i} = 0 \quad 0 \leq i \leq N-1 \quad (\text{III.4})$$

D'après l'expression (III-1) on obtient:

$$\frac{\partial \xi(k-1)}{\partial c_i} = \frac{-2}{K} \cdot x(n-i) \cdot \sum_{n=0}^{k-1} [a(n) - y(n)] \quad 0 \leq i \leq N-1 \quad (\text{III.5})$$

Il en résulte , le système de N équations linéaires tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{k-1} x(n) \cdot a(n) = \sum_{n=0}^{k-1} x(n) \cdot y(n) \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^{k-1} x(n-N+1) \cdot a(n) = \sum_{n=0}^{k-1} x(n-N+1) \cdot y(n) \end{array} \right. \quad (\text{III.6})$$

¹ : dans ce cas le facteur d'oubli λ est égal à 1 parce que les signaux sont supposés stationnaires.

² : les dimensions des vecteurs et matrices sont indiquées à l'aide d'indices, l'absence de ces derniers indique que la dimension est 1. Ainsi $y(n)$ est un scalaire, $X_N(n)$ est un vecteur colonne de dimension N. $A_N P(n)$ est une matrice ayant N lignes et P colonne. La matrice transposée est caractérisée par l'indice T.

Le système précédent donne :

$$\begin{pmatrix} x(0) \cdot x(1) \dots \dots \dots x(k-1) \\ x(-1) \cdot x(0) \dots \dots \dots x(k-2) \\ \vdots \\ x(-N+1) \cdot x(-N+2) \dots \dots x(k-N) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a(0) \\ a(1) \\ \vdots \\ a(k-1) \end{pmatrix} = X_{NK} \cdot X_{NK}^T \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{N-1} \end{pmatrix}$$

(III-7)

où

A_k est le vecteur colonne des éléments $a(n)$.

X_{NK} est une matrice ayant N lignes et k colonnes (la matrice de gauche dans l'expression (III-7)).

C_N le vecteur colonne de l'ensemble des coefficients cherchés, noté \hat{C}_N , qui correspond à la condition d'optimalité de WIENER-HOPF [2,4,8,10] :

$$X_{NK} \cdot X_{NK}^T \cdot \hat{C}_N = X_{NK} \cdot A_k \tag{III-8}$$

Finalement les coefficients sont déterminés par :

$$\hat{C}_N = [X_{NK} \cdot X_{NK}^T]^{-1} \cdot X_{NK} \cdot A_k \tag{III-9}$$

On vérifie facilement que la matrice $[X_{NK} \cdot X_{NK}^T]$ est une matrice carrée d'ordre N dont les éléments sont données par :

$$\beta_{ij} = \sum_{n=0}^{k-1} x(n-i) \cdot x(n-j) \quad 0 \leq i, j \leq N-1 \tag{III-10}$$

Si le signal à l'entrée de l'égaliseur est stationnaire ou périodique, chaque élément β_{ij}/k est une estimation du $(i-j)$ ème élément de la fonction d'autocorrélation de $x(n)$:

$$\beta_{ij} = \phi(i-j) \tag{III-11}$$

où $\phi_x(n)$ est la valeur de la fonction d'autocorrélation en n du signal $x(k)$.

On peut définir une matrice carrée d'ordre N , notée R_{NN} ,

appelée matrice d'autocorrélation dont les éléments sont données par l'expression (III-11).

Soit σ_x^2 la puissance totale du signal $x(n)$.

R_{NN} s'écrit :

$$R_{NN} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \phi_x(1) & \phi_x(2) & \dots & \phi_x(N-1) \\ \phi_x(1) & \sigma_x^2 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_x(N-1) & \phi_x(N-2) & \dots & \phi_x(1) & \sigma_x^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-12})$$

On vérifie facilement que :

$$R_{NN} = \frac{1}{K} X_{NK} \cdot X_{NK}^T \quad (\text{III-13})$$

D'après l'équation de WIENER-HOPF (III-8), on détermine le vecteur optimal, en fonction de l'inverse de la matrice d'autocorrélation R_{NN} .c.à.d :

$$\hat{C}_N = \frac{1}{K} R_{NN}^{-1} \cdot X_{NK} \cdot A_K \quad (\text{III.14})$$

Le vecteur optimal peut être exprimé en fonction de la matrice d'autocorrélation normalisée $\hat{R}_{NN} = \frac{R_{NN}}{\sigma_x^2}$, du signal $x(n)$, et le

vecteur V_N d'intercorrélacion entre le signal d'entrée $x(n)$ et la réponse désirée $a(n)$. On a ainsi:

$$V_N = \frac{1}{K} \cdot X_{NK} \cdot A_K \quad (\text{III.15})$$

Il en résulte :

$$\hat{C}_N = R_{NN}^{-1} \cdot V_N \quad (\text{III.16})$$

ou

$$\hat{C}_N = \frac{1}{\sigma_x^2} \cdot R_{NN}^{-1} \cdot V_N \quad (\text{III.17})$$

On remarque bien que R_{NN} et R'_{NN} sont des matrices symétriques, leurs éléments sont identiques sur toute la diagonale, leur forme est dite de "TOEPLITZ" symétrique [1,19].

Etant donnée que la matrice d'autocorrélation est définie positive et possède une double symétrie (elle est symétrique par rapport à l'anti diagonale), il en résulte un ensemble de propriétés pour les systèmes adaptatifs.

* Propriétés

- Les valeurs propres de la matrice d'autocorrélation R_{NN} , notées α_i ($0 \leq i \leq N-1$) sont déterminées tel que:

$$\det(\alpha \cdot I_N - R_{NN}) = 0 \quad (\text{III.18})$$

on a:

$$\det(R_{NN}) = \prod_{i=0}^{N-1} \alpha_i \quad (\text{III.19})$$

et

$$N \cdot \sigma_x^2 = N \cdot \phi_x(0) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \quad (\text{III.20})$$

En plus, puisque la matrice R_{NN} est symétrique définie positive, on aura:

- Toutes les valeurs propres sont réelles et positives.
- Les mineurs principaux sont tous positifs et

correspondent à des matrices d'autocorrélation d'ordre inférieur ou égal à N.

Suivant ces propriétés, la matrice R_{NN} est diagonalisable :

$$R_{NN} = T_{NN}^{-1} \cdot D_{NN} \cdot T_{NN} \quad (\text{III-21})$$

T_{NN} : est la matrice dont les colonnes représentent les vecteurs propres, associés aux valeurs propres de la matrice d'autocorrélation R_{NN} , cette matrice est appelée la matrice orthogonale (matrice de passage).

D_{NN} : est la matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres de la matrice R_{NN} :

$$D_{NN} = \text{Diag}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}) \quad (\text{III-22})$$

Soit $W_N(n)$, le vecteur différence de coefficients dans l'espace transformé [2,11], exprimé dans la base où la matrice de passage est T_{NN} . Alors:

$$W_N(n) = T_{NN} [C_N(n) - \hat{C}_N(n)] \quad (\text{III-23})$$

Dans la section suivante, ce vecteur en raison de sa définition sera très utilisé dans le calcul

III.3 ALGORITHME DU GRADIENT (LMS)

L'algorithme du gradient (LMS) est très utilisé en filtrage adaptatif, en particulier en égalisation; il correspond à une opération effectuée sur le vecteur des coefficients $C_N(n)$, pour fournir une sortie ayant une différence minimale avec le signal $a(n)$ ³ désiré.

Ainsi, le gradient associé au critère de minimisation de

³ : Pendant la phase d'adaptation réelle, le symbole désiré est la sortie du circuit de décision, mais durant la phase d'apprentissage il correspond au symbole transmis $a(n)$.

l'erreur quadratique moyenne, vu dans la section précédente, a une importance pratique très appréciée en raison de sa simplicité et de sa robustesse [2]. Cette algorithme a été développé pour la première fois par WIDROW et HOFF en 1960 [11]. Il est de plus en plus utilisé dans plusieurs domaines, en particulier en Automatique et dans les systèmes de télécommunication.

Soit :

$$C_N(n) = \begin{bmatrix} c_0(n) \\ c_1(n) \\ \vdots \\ c_{N-1}(n) \end{bmatrix} \quad (\text{III-24})$$

La minimisation de l'erreur quadratique moyenne est obtenue en calculant, pour chaque itération ⁴ les nouveaux coefficients de l'égaliseur, ainsi à l'instant n les coefficients sont représentés par le vecteur $C_N(n-1)$ qui a été mis à jour à l'instant précédent $(n-1)$.

En supposant que l'égaliseur est transversal (filtre RIF)⁵, l'estimation a priori de la sortie est telle que:

$$y(n) = C_N^T(n-1) \cdot X_N(n) \quad (\text{III-25})$$

avec

$$X_N(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(n-N+1) \end{bmatrix} \quad (\text{III-26})$$

⁴ : Le terme itération est relatif à la simulation

⁵ : l'étude qui suivra est relative à l'égaliseur transversal (filtre RIF)

L'erreur $e(n)$ est obtenue en soustrayant $y(n)$ du signal désiré $a(n)$:

$$e(n) = a(n) - y(n) \quad (\text{III-27})$$

Il est intéressant de signaler que dans le cas d'un égaliseur récursif (DFE), l'erreur $e(n)$ et la sortie $y(n)$ se calculent de la même façon que pour un égaliseur transversal, cependant on doit modifier les vecteurs $X_N(n)$ et $C_N(n-1)$ tel que [4]:

$$X_N(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x(n-N_1+1) \\ \hat{a}(n-1) \\ \vdots \\ \hat{a}(n-N_2) \end{bmatrix} \quad (\text{III-28})$$

et

$$C_N(n-1) = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{N_1} \\ \dots \\ -b_1 \\ -b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ -b_{N_2} \end{bmatrix} \quad (\text{III-29})$$

où N_1 et N_2 représentent respectivement l'ordre de la partie directe et rétroactive de l'égaliseur, $N=N_1+N_2$.

L'objectif de l'algorithme du gradient (LMS) est la mise à jour des coefficients d'une manière itérative dans le but de converger vers le vecteur optimal \hat{C}_N qui minimise la fonction coût $\epsilon(n)$ définie par l'expression (III-3).

On commence tout d'abord par estimer la matrice d'autocorrélation R_{NN} et le vecteur d'intercorrélacion entre le signal d'entrée et le signal désiré noté V_N définis en (III-15); par [1,11,20]:

$$V_N(n) = \sum_{i=1}^n a(i) \cdot X_N(i) \quad \text{(III-30)}$$

et

$$R_{NN}(n) = \sum_{i=1}^n X_N(i) \cdot X_N^T(i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} x(i) \\ x(i-1) \\ \vdots \\ x(i-N+1) \end{pmatrix} \cdot (x(i), \dots, x(i+1-N)) \quad \text{(III-31)}$$

Il en résulte :

$$R_{NN}(n+1) = R_{NN}(n) + X_N(n+1) \cdot X_N^T(n+1) \quad \text{(III-32)}$$

et

$$V_N(n+1) = V_N(n) + X_N(n+1) \cdot a(n+1) \quad \text{(III-33)}$$

D'après les équations (III-16) (III-32) et (III-33) on obtient:

$$R_{NN}(n+1) \cdot C_N(n+1) = V_N(n+1) = V_N(n) + X_N(n+1) \cdot a(n+1) \quad \text{(III-34)}$$

soit finalement l'équation (III-35):

$$C_N(n+1) = C_N(n) + R_{NN}^{-1}(n+1) \cdot X_N(n+1) \cdot [a(n+1) - C_N^T(n) X_N(n+1)]$$

Il est intéressant de remarquer que la quantité :

$$e(n+1) = a(n+1) - C_N^T(n) \cdot X_N(n+1) \quad \text{(III-36)}$$

représente l'erreur à l'instant $(n+1)$ à la sortie du système. Cette erreur est appelée erreur "à priori", car $e(n+1)$ est

calculées en fonction du vecteur $C_N(n)$, qui est obtenue à l'itération précédente n .

L'algorithme dans lequel les coefficients sont calculés par la récurrence (III-35) est celui des moindres carrés récurrents (RLS), qui sera étudié avec ses différentes variantes dans la section suivante.

Des algorithmes basés sur les hypothèses simplificatrices, mais d'un grand intérêt pratique. En remplaçant dans l'égalité (III-35) la matrice $R^{-1} NN(n)$ par une matrice diagonale.

Il est intéressant de remarquer que dans l'équation (III-12) les éléments de la diagonale de la matrice $R NN(n)$ sont supérieures aux autres éléments de la matrice, car la fonction d'autocorrélation instantanée $\phi_x(n)$ est maximale pour $n=0$:

$$|\phi_x(n)| \leq \phi_x(0) \quad (\text{III-37})$$

Donc en premier lieu, on peut négliger les autres éléments devant ceux de la diagonale, ainsi la matrice inverse $R^{-1} NN$, peut être ramenée à une matrice diagonale $\mu \cdot I NN$, où μ est un réel positif généralement très faible qu'on appelle le pas d'adaptation.

La mise à jour des coefficients est alors donnée par l'équation:

$$C_N(n+1) = C_N(n) + \mu \cdot X_N(n+1) \cdot e(n+1) \quad (\text{III-38})$$

ou

$$C_N(n+1) = C_N(n) + \mu \cdot X_N(n+1) [a(n+1) - C_N^T(n) X_N(n+1)] \quad (\text{III-39})$$

Les éléments du vecteur gradient, noté ∇_N , sont définis par [11.20]:

$$\nabla_N(n+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta e^2(n+1)}{\delta C_N(n+1)} \quad (\text{III-40})$$

$$\nabla_N(n+1) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\delta e^2(n+1)}{\delta c_0} \\ \frac{\delta e^2(n+1)}{\delta c_1} \\ \vdots \\ \frac{\delta e^2(n+1)}{\delta c_{N-1}} \end{pmatrix} \quad (\text{III-41})$$

Il en résulte (voir annexe A1):

$$\nabla_N(n+1) = -X_N(n+1) \cdot e(n+1) \quad (\text{III-42})$$

D'après les égalités (III-38) et (III-42) :

$$C_N(n+1) = C_N(n) + \mu \cdot (-\nabla_N(n+1)) \quad (\text{III-43})$$

La relation (III-43), montre bien que l'évolution des coefficients de l'égaliseur est faite dans le sens négatif du gradient de la fonction $\frac{1}{2} \cdot e^2(n)$, d'où la dénomination

algorithme du gradient. Le signe (-) correspond à une variation négative, d'où la recherche d'un minimum de la fonction coût $\epsilon(n)$.

Compte tenu de la définition de l'erreur, la relation (III-43) peut s'écrire sous la forme de l'équation suivante :

$$C_N(n+1) = [I_{NN} - \mu \cdot X_N(n+1) \cdot X_N^T(n+1)] \cdot C_N(n) + \mu X_N(n+1) \cdot e(n+1) \quad (\text{III-44})$$

Cette dernière équation sera très utile pour démontrer la convergence du vecteur des coefficients $C_N(n)$, en moyenne carré vers la solution de l'équation de WIENER-HOPF.

Globalement l'algorithme peut être illustré par le graphe suivant :

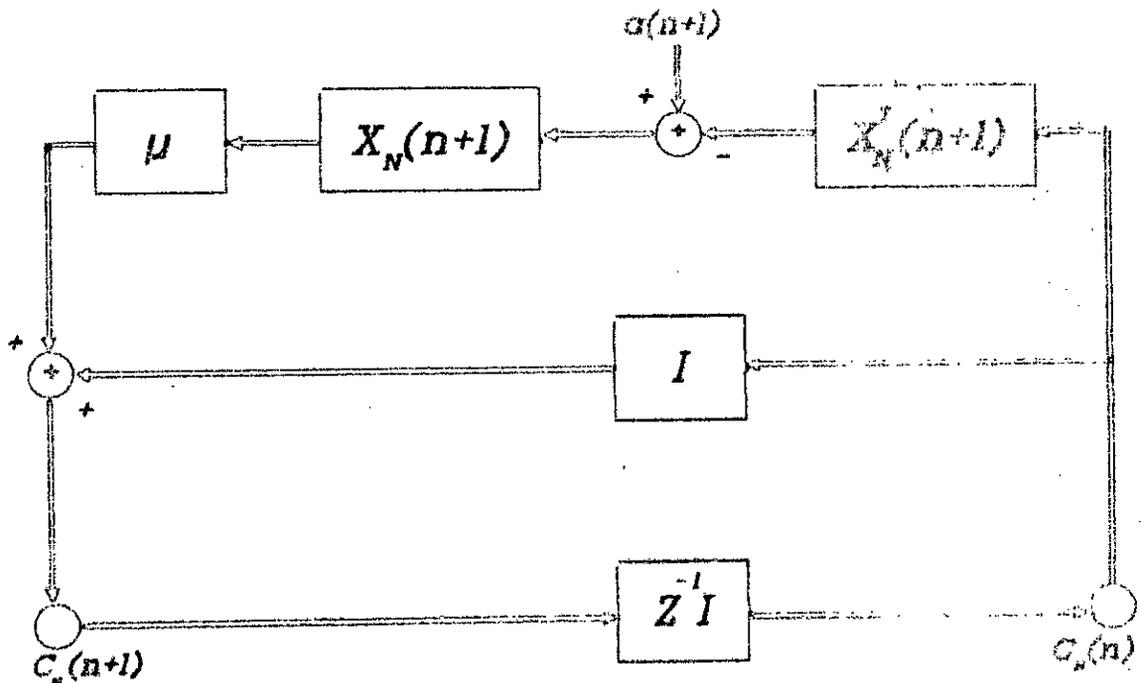


figure (III-4) Graphe de fluence représentant l'algorithme du gradient

On remarque , D'après les équations (III-42) et (III-43), qu'il faut $2N+1$ multiplications et $2N$ additions par itération pour le calcul des coefficients de l'égaliseur.

III.3.a Hypothèses fondamentales

Il est intéressant de signaler quelques hypothèses fondamentales qui seront prises en compte dans les démarches qui suivent pour exploiter les propriétés générales de l'algorithme du gradient [11]:

1- Chaque vecteur d'entrée de l'égaliseur, $X_N(n)$ est statistiquement indépendant des vecteurs précédents $X_N(k)$ $k=0,1,\dots,n-1$. Ainsi:

$$E[X_N(n) \cdot X_N^T(k)] = 0 \quad k=0,1,\dots,n-1 \quad (\text{III-45})$$

2- Chaque vecteur d'entrée de l'égaliseur est statistiquement indépendant des échantillons précédents du signal désiré $a(k)$ $k=0,1,\dots,n-1$, c.à.d :

$$E[X_N(n) \cdot a(k)] = 0 \quad k=0,1,\dots,n-1 \quad (\text{III-46})$$

3- Chaque échantillon du signal désiré $a(n)$ est dépendant du vecteur d'entrée correspondant $X_N(n)$, mais statistiquement indépendant des échantillons précédents du signal désiré.

L'analyse statistique de l'algorithme du gradient basée sur les hypothèses ci-dessus est dite théorie d'indépendance [2]. On remarque D'après l'équation (III-39) que le vecteur des coefficients à l'instant n dépend seulement [1]:

- des vecteurs d'entrées précédents, à savoir $X_N(n)$, $X_N(n-1)$,....., $X_N(0)$.
- des échantillons du signal désiré $a(n)$, $a(n-1)$,....., $a(0)$.
- de la valeur initiale du vecteur des coefficients.

Ainsi, D'après les hypothèses (1) et (2), on conclue que le vecteur des coefficients $C_N(n)$ est indépendant de $X_N(n+1)$ et $a(n+1)$.

III.3.b Propriétés

Soit l'espérance mathématique des deux membres de la relation (III-44) (on tiendra compte des hypothèses citées ci-dessus). On obtient lorsque n tend vers l'infini (démonstration voir annexe A2):

$$E[X_N(n) \cdot X_N^T(n)] \cdot E[C_N(n)] = E[X_N(n) \cdot a(n)] \quad (\text{III-47})$$

ou

$$E[X_N(\infty) \cdot X_N^T(\infty)] \cdot E[C_N(\infty)] = E[X_N(\infty) \cdot a(\infty)] \quad (\text{III-48})$$

Tenant compte des expressions (III-30) et (III-31), on trouve:

$$E[C_N(\infty)] = R_{NN}^{-1} \cdot V_N \quad (\text{III-49})$$

d'où

$$E[C_N(\infty)] = \hat{C}_N \quad (\text{III-50})$$

Ainsi, l'algorithme du gradient converge en moyenne vers le vecteur optimal $\hat{C}_N(n)$, qui est la solution de l'équation de WIENER-HOPF ; d'où la dénomination également de gradient stochastique [2].

III.3.c Condition de convergence

Si on observe l'équation (III-36), on remarque que la suite d'erreur $e(n+1)$ est calculée en fonction des coefficients avant la mise à jour, d'où la dénomination erreur "à priori". L'erreur "à posteriori" est définie par [1]:

$$s(n+1) = a(n+1) - C_N^T(n+1) \cdot X_N(n+1) \quad (\text{III-51})$$

Si l'espérance de la valeur absolue de l'erreur "à posteriori" est plus petite que celle de l'erreur "à priori", le système peut être considéré comme stable, ce qui est logique puisque $s(n+1)$ se calcule avec le vecteur coefficient le plus récent $C_N(n+1)$, ainsi $s(n+1)$ exploite d'avantage d'informations.

c'est à dire:

$$E[s(n+1)] < E[e(n+1)] \quad (\text{III-52})$$

D'après les équations (III-36) et (III-38), l'erreur "à posteriori" se réécrit comme suit (démonstration voir annexe A3):

$$s(n+1) = e(n+1) [1 - \mu \cdot X_N^T(n+1) \cdot X_N(n+1)] \quad (\text{III-53})$$

On suppose que l'erreur $e(n+1)$ est décorrélée avec le vecteur d'entrée le plus récent $X_N(n+1)$:

En prenant l'espérance des deux membre de la relation (III-53) on trouve (voir Annexe A4):

$$|1 - \mu \cdot E[X_N^T(n+1) \cdot X_N(n+1)]| < 1 \quad (\text{III-54})$$

qui implique:

$$0 < \mu < \frac{2}{N \cdot \sigma_x^2} \quad (\text{III-55})$$

avec σ_x^2 : la puissance totale du signal d'entrée de l'égaliseur $x(n)$.

La condition de stabilité (III-55) est facile à utiliser, cependant en pratique il se peut qu'il soit insuffisant d'imposer que l'égalité (III-52) soit satisfaite en moyenne, d'où la nécessité de prendre une marge de sécurité pour la limite supérieure du pas d'adaptation μ .

L'analyse détaillée montre que, pour le cas des signaux gaussiens, la stabilité est obtenue par la condition suivante [1]:

$$0 < \mu < \frac{2}{3 \cdot N \cdot \sigma_x^2} \quad (\text{III-56})$$

Si on calcule l'espérance du vecteur $W_N(n)$ défini en (III-23), on trouve:

$$E[W_N(n+1)] = (I_{NN} - \mu \cdot D_{NN}) \cdot E[W_N(n)] \quad (\text{III-57})$$

¹ : c'est à dire rendre l'erreur $e(n)$ presque un bruit blanc (blanchissement), ainsi $e(n)$ est décorrélée des données $x(n)$.

d'où

$$E[W_N(n+1)] = (I_{NN} - \mu \cdot D_{NN})^n \cdot E[W_N(0)] \quad (\text{III-58})$$

avec $W_N(0)$ donné par:

$$W_N(0) = D_{NN}^{-1} \cdot T_{NN} \cdot V_N \quad (\text{III-59})$$

D'après l'équation (III-58), pour qu'il y ait convergence, la limite de $E[W_N(n+1)]$ doit tendre vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Pour cela, il faut que la condition suivante soit vérifiée [2,11]:

$$0 < \mu < \frac{2}{\alpha_{\max}} \quad (\text{III-60})$$

α_{\max} : est la valeur propre maximale de la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée .

Cette condition est parfois prise en considération et elle est moins contraignante que la condition (III-55).

III.3.d Erreur résiduelle

Généralement, l'égaliseur n'arrive pas à atteindre l'erreur quadratique moyenne minimale ϵ_{\min} , définie par:

$$\epsilon_{\min} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{l=0}^{K-1} [a(l) - \hat{C}_N \cdot X_N(l)]^2 \quad (\text{III-61})$$

ϵ_{\min} est calculée théoriquement en fonction de vecteur optimal \hat{C}_N . Ainsi, même après convergence (n assez grand), l'erreur quadratique $\epsilon(n)$ n'atteint pas ϵ_{\min} , d'où l'existence d'une erreur résiduelle .

On illustre cette propriété par la figure suivante:

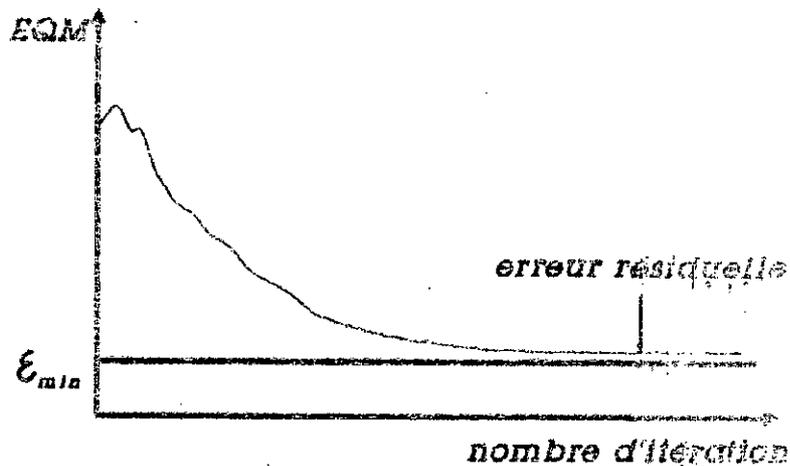


figure (III-5) l'évolution de l'erreur quadratique moyenne par l'algorithme du gradient (LMS)

Il en résulte :

$$\varepsilon_{\min} = E[a^2(n)] - \hat{C}_N^T \cdot R_{NN} \cdot \hat{C}_N \quad (\text{III-62})$$

$\varepsilon(n)$ se déduit en fonction de ε_{\min} (démonstration voir annexe A5).

$$\varepsilon(n) = \varepsilon_{\min} + [\hat{C}_N - C_N(n)]^T \cdot R_{NN} \cdot [\hat{C}_N - C_N(n)] \quad (\text{III-63})$$

En remplaçant dans l'équation (III-63), R_{NN} par son expression, on aboutit à une autre forme de $\varepsilon(n)$:

$$\varepsilon(n) = \varepsilon_{\min} + W_N^T(n) \cdot D_{NN} \cdot W_N(n) \quad (\text{III-64})$$

D'autre part, le calcul de la limite de l'espérance suivante donne:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[W_N(n) \cdot W_N^T(n)] = \frac{N}{2} \cdot \varepsilon(\infty) \cdot I_{NN} \quad (\text{III-65})$$

En raison de la définition du vecteur $W_N(n)$, l'équation (III-65) montre bien que, lorsque n devient très grand, les déviations des coefficients sont belles et bien blanchies. Les équations (III-64) et (III-65) permettent d'écrire:

$$\varepsilon(n) = \varepsilon_{\min} + \frac{N}{2} \cdot \varepsilon(\infty) \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \quad (\text{III-66})$$

où

$\varepsilon(\infty)$ est l'erreur résiduelle après une infinité d'itération.
 α_i les valeurs propres de la matrice d'autorrélation R_{NN} avec
 $i=0, \dots, N-1$.

Ainsi:

$$\varepsilon(\infty) \left(1 - \frac{N}{2} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \right) = \varepsilon_{\min} \quad (\text{III-67})$$

donc l'erreur résiduelle a pour expression[2]:

$$\varepsilon(\infty) = \frac{\varepsilon_{\min}}{1 - \frac{N}{2} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i} \quad (\text{III-68})$$

Si μ est très petit, l'erreur résiduelle s'exprime:

$$\varepsilon(\infty) = \varepsilon_{\min} \left(1 + \frac{N}{2} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \right) \quad (\text{III-69})$$

Pour évaluer les performances de l'ensemble, c.à.d. algorithme, égaliseur et critère, on définit un rapport noté m (misadjustment) [11] tel que:

$$m = \frac{\varepsilon(\infty) - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\min}} = \frac{\varepsilon(\infty)}{\varepsilon_{\min}} - 1 \quad (\text{III-70})$$

Il est évident qu'on souhaite toujours avoir un m proche de zéro.

Il y a un autre critère pour évaluer la performance de l'ensemble, c'est la rapidité de convergence. Il faut bien noter, d'après l'équation (III-56), que si les valeurs propres sont dispersées, le temps de convergence dépend de la plus petite valeur propre. Globalement l'égaliseur fonctionne

d'autant mieux que le rapport des valeurs propres extrêmes $\lambda_{\min} / \lambda_{\max}$ est proche de l'unité, c.à.d. que le signal d'entrée $x(n)$ s'approche d'un bruit blanc. Ainsi le temps de convergence est inversement proportionnel au pas d'adaptation μ , d'où la nécessité de choisir (en pratique) un μ optimal qui réalise un compromis entre l'erreur résiduelle et le temps de convergence. Mais dans le cas général, on fait varier μ dans le sens décroissant tout en respectant la condition de stabilité de telle sorte à avoir un rapport μ très proche de zéro et un temps de convergence optimal.

Enfin, l'algorithme du gradient (LMS) appliqué aux égaliseurs adaptatifs peut être résumé comme suit:

1- Initialisation de l'algorithme:

- $C_N(0) = 0$.

- choisir un μ tel que: $0 < \mu < \frac{2}{N \cdot \sigma_x^2}$

2- à chaque instant $n=1, 2, \dots$, on calcule:

- $e(n+1) = a(n+1) - C_N^T \cdot X_N(n+1)$.

- $C_N(n+1) = C_N(n) + \mu \cdot X_N(n+1) \cdot e(n+1)$.

III.4 ALGORITHMES DES MOINDRES CARRÉS RECURSIFS (MCR)

Dans cette section nous allons développer l'algorithme de Kalman (RLS conventionnel) la version Fast-Kalman (Fast RLS) pour la mise à jour des coefficients optimaux des égaliseurs adaptatifs tout en effectuant une comparaison constructive entre les différentes propriétés de chaque algorithme.

Durant la phase d'apprentissage (chapitre I), une succession de symboles $\{a(n)\}$ bien connue du récepteur est transmise à travers le canal de transmission donnant ainsi naissance, à l'instant n , au signal d'entrée de l'égaliseur représenté par le vecteur de dimension N :

$$X_N(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-N+1) \end{bmatrix} \quad (\text{III-72})$$

Les coefficients de l'égaliseur à l'instant n sont représentés par le vecteur $C_N(n-1)$ qui a été mis à jour à l'instant précédent $n-1$.

Ainsi l'estimation à priori de la sortie de l'égaliseur à l'instant n s'écrit:

$$y(n) = C_N^T(n-1) \cdot X_N(n) \quad (\text{III-73})$$

Cette sortie est différente de la donnée idéale transmise $a(n)$ par le terme d'erreur :

$$e(n) = a(n) - y(n) \quad (\text{III-74})$$

Les expressions (III-73) et (III-74) sont bien communes à différents types d'égaliseurs, le plus évident étant l'égaliseur linéaire transversal d'ordre N pour lequel le signal $x(n)$ représente la sortie du canal de transmission échantillonné à chaque période de signalisation T .

Pour l'égaliseur récursif (DFE) (voir chapitre II), le signal d'entrée à l'instant n est donnée par [5]:

$$X_N(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-N_1) \\ \dots \\ \hat{s}(n-1) \\ \vdots \\ \hat{s}(n-N_2) \end{bmatrix} \quad (\text{III-75})$$

où N_1 et N_2 représentent respectivement l'ordre de la partie directe et rétroactive de l'égaliseur, $N = N_1 + N_2$.

($\hat{s}(n-1), \hat{s}(n-2), \dots, \hat{s}(n-N_2)$) les éléments disponibles dans la

partie rétroactive de l'égaliseur. Les coefficients de cet égaliseur sont représentés par le vecteur:

$$C_N(n-1) = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ \dots \\ b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (III-75)$$

où (b_1, \dots, b_N) sont les coefficients de la partie rétroactive.

L'objectif des algorithmes des (MCR) est de déterminer le vecteur optimal qui minimise la fonction coût suivante:

$$e(n) = \sum_{l=0}^n \lambda^{n-l} \cdot (a(l) - C_N^T(n) \cdot X_N(l))^2 \quad (III-77)$$

ou λ est un nombre positif inférieur ou égal 1 dit facteur d'oubli [2,11,18].

L'inverse de $1-\lambda$ est la mémoire de l'algorithme.

Lorsque $\lambda=1$, toutes les informations sont pondérées d'une manière égale, ceci est le cas lorsqu'on opère dans un environnement stationnaire. L'algorithme correspondant est le RLS classique à mémoire infinie.

Lorsque $\lambda < 1$, les informations passées sont atténuées géométriquement, par conséquent les informations récentes jouent un rôle plus influant que celui des informations passées dans le processus d'adaptation. Ceci étant le cas lorsqu'on opère dans un environnement non stationnaire.

Le vecteur optimal $C_N(n)$ minimisant l'équation (III-77) est solution de l'équation de WIENER-HOPF discrète (voir section précédente):

$$R_{NN}(n) \cdot \hat{C}_N(n) = V_N(n) \quad (\text{III-78})$$

ou

$$R_{NN}(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \cdot X_N(i) \cdot X_N^T(i) \quad (\text{III-79})$$

et

$$V_N(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \cdot X_N(i) \cdot a(i) \quad (\text{III-80})$$

$R_{NN}(n)$ est la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée $X_N(i)$ avec $i=1, 2, \dots, n$.

$V_N(n)$ est le vecteur d'intercorrélation entre le signal d'entrée de l'égaliseur $X_N(i)$ et la réponse désirée $a(i)$ avec $i=1, 2, \dots, n$.

En isolant les termes correspondant à $i=n$ dans les expressions (III-79) et (III-80), on obtient:

$$\begin{aligned} R_{NN}(n) &= \lambda \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{(n-1)-i} \cdot X_N(i) \cdot X_N^T(i) \right] + X_N(n) \cdot X_N^T(n) \\ &= \lambda \cdot R_{NN}(n-1) + X_N(n) \cdot X_N^T(n) \end{aligned} \quad (\text{III-81})$$

et

$$\begin{aligned} V_N(n) &= \lambda \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{(n-1)-i} \cdot X_N(i) \cdot a(i) \right] + X_N(n) \cdot a(n) \\ &= \lambda \cdot V_N(n-1) + X_N(n) \cdot a(n) \end{aligned} \quad (\text{III-82})$$

ces deux dernières décompositions sont très importantes pour le développement des algorithmes des moindres carrés récursifs.

III.4.a Algorithme de Kalman

Le calcul d'une estimation au sens des moindres carrés du vecteur $\hat{C}_N(n)$ suivant l'équation (III-78) nécessite l'inversion de la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée. Ceci

demande un temps particulièrement important surtout lorsque l'ordre de l'égaliseur est assez grand ce qui n'est pas désiré en filtrage adaptatif où les opérations sont supposées être effectuées en temps réel. L'algorithme de kalman [9,11] permet la mise à jour de la matrice d'autocorrélation inverse d'une manière récursive dès qu'une information nouvelle devient disponible, ceci est réalisé par l'application de l'identité matricielle souvent appelée "Lemme d'inversion" (annexe A6) à l'équation (III-81) tout en considérant que la matrice $R_{NN}(n)$ est non singulière définie positive.

Pour cela, on effectue les identifications suivantes:

$$A = R_{NN}(n)$$

$$B^{-1} = \lambda \cdot R_{NN}(n-1)$$

$$C = X_N(n)$$

$$D = 1$$

Nous obtenons ainsi une équation qui donne et d'une manière récursive l'inverse de la matrice d'autocorrélation:

$$R_{NN}^{-1}(n) = \lambda^{-1} \cdot R_{NN}^{-1}(n-1) - \frac{\lambda^{-1} \cdot R_{NN}^{-1}(n-1) \cdot X_N(n) \cdot X_N^T(n) \cdot R_{NN}^{-1}(n-1)}{1 + \lambda^{-1} \cdot X_N^T(n) \cdot R_{NN}^{-1}(n-1) \cdot X_N(n)} \quad (\text{III-84})$$

Il est commode de poser:

$$P_{NN}(n) = R_{NN}^{-1}(n) \quad (\text{III-85})$$

et

$$K_N(n) = \frac{\lambda^{-1} \cdot P_{NN}(n-1) \cdot X_N(n)}{1 + \lambda^{-1} \cdot X_N^T(n) \cdot P_{NN}(n-1) \cdot X_N(n)} \quad (\text{III-86})$$

En utilisant ces nouvelles notations, l'équation (III-83) devient:

$$P_{NN}(n) = \lambda^{-1} \cdot P_{NN}(n-1) - \lambda^{-1} \cdot K_N(n) \cdot X_N^T(n) \cdot P_{NN}(n) \quad (\text{III-87})$$

Le vecteur $K_N(n)$ est souvent appelé vecteur gain ou le gain de Kalman.

En réarrangeant l'équation (III-85) on obtient l'équation (III-88) suivante:

$$\begin{aligned} K_N(n) &= \lambda^{-1} \cdot P_{NN}(n-1) \cdot X_N(n) - \lambda^{-1} \cdot K_N(n) \cdot P_{NN}(n-1) \cdot X_N(n) \\ &= P_{NN}(n) \cdot X_N(n) \end{aligned}$$

d'où finalement:

$$K_N(n) = R_{NN}^{-1}(n) \cdot X_N(n) \quad (\text{III-89})$$

L'étape suivante consiste à développer une équation récursive permettant la mise à jour du vecteur optimal $\hat{C}_N(n)$. Pour cela, on utilise les équations (III-78), (III-82) et (III-84) afin d'exprimer $\hat{C}_N(n)$ comme suit:

$$\begin{aligned} \hat{C}_N(n) &= R_{NN}^{-1} \cdot V_N(n) \\ &= \lambda \cdot P_{NN}(n) \cdot V_N(n-1) + P_{NN}(n) \cdot X_N(n) \cdot a(n) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (\text{II} \\ \text{I-} \\ \text{98}) \end{array}$$

En remplaçant $P_{NN}(n)$ dans le premier terme du deuxième membre de l'équation (III-90) par l'expression (III-83), on obtient l'équation (III-91) suivante:

$$\begin{aligned} \hat{C}_N(n) &= P_{NN}(n-1) \cdot V_N(n-1) - K_N(n) \cdot X_N^T(n) \cdot R_{NN}^{-1}(n-1) \cdot V_N(n-1) \\ &\quad + P_{NN}(n) \cdot X_N(n) \cdot a(n) \end{aligned}$$

d'où

$$\hat{C}_N(n) = \hat{C}_N(n-1) - K_N(n) \cdot X_N^T(n) \cdot \hat{C}_N(n-1) + P_{NN}(n) \cdot X_N(n) \cdot a(n) \quad (\text{III-92})$$

Finalement, en utilisant le fait que:

$$P_{NN}(n) \cdot X_N(n) = K(n)$$

On obtient l'équation récursive cherchée:

$$\hat{C}_N(n) = \hat{C}_N(n-1) + K_N(n) \cdot (a(n) - X_N^T(n) \cdot \hat{C}_N(n-1)) \quad (\text{III-93})$$

d'où

$$\hat{C}_N(n) = \hat{C}_N(n-1) + K_N(n) \cdot e(n) \quad (\text{III-94})$$

En conclusion, les équations (III-74), (III-85), (III-86) et (III-94) constituent l'algorithme de kalman pour la mise à jour des coefficients optimaux de l'égaliseur adaptatif sans inversion explicite de la matrice d'autocorrélation $R_{NN}(n)$.

* Conditions initiales

L'applicabilité de l'algorithme de Kalman nécessite une valeur initiale non nulle $P_{NN}(0)$ qui assure la non singularité de la matrice d'autocorrélation $R_{NN}(n)$. Ceci est obtenu en modifiant l'expression de la matrice d'autocorrélation [11]:

$$R_{NN}(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} X_N(i) X_N^T(n) + \delta \lambda^n I_{NN} \quad (III-95)$$

où I_{NN} est la matrice identité de dimension $N \times N$.

δ est une petite constante positive dont le choix est peu important du moment où il n'influe guère sur les performances de l'algorithme lorsque n devient assez grand.

Ainsi pour $n=0$:

$$R_{NN}(0) = \delta \cdot I_{NN} \quad (III-96)$$

ce qui correspond à :

$$P_{NN}(0) = \delta^{-1} \cdot I_{NN} \quad (III-97)$$

le vecteur initial $\hat{C}_N(0)$ est généralement pris égal au vecteur nul 0_N .

Enfin, l'algorithme de kalman appliqué aux égaliseurs adaptatifs peut être résumé comme suit:

1- Initialisation de l'algorithme:

- $P_{NN}(0) = \delta^{-1} \cdot I_{NN}$ δ est une petite constante positive.
- $\hat{C}_N(0) = 0$.

2- à chaque instant $n=1,2,\dots$ on calcule

$$K_N(n) = \frac{\lambda^{-1} \cdot P_{NN}(n-1) \cdot X_N(n)}{1 + \lambda^{-1} \cdot X_N^T(n) \cdot P_{NN}^{-1}(n-1) \cdot X_N(n)}$$

$$e(n) = a(n) - \hat{C}_N^T(n-1) \cdot X_N(n)$$

$$\hat{C}_N(n) = \hat{C}_N(n-1) + K_N(n) \cdot e(n)$$

$$P_{NN}(n) = \lambda^{-1} \cdot P_{NN}(n-1) - \lambda^{-1} \cdot K_N(n) \cdot X_N^T(n) \cdot P_{NN}(n-1)$$

Remarque

Cet algorithme est appelé aussi RLS (récuratif least square). En fait l'algorithme de Kalman original nécessite une étape dite de prédiction, dans laquelle on utilise l'équation d'état. Dans cet algorithme cette étape n'existe pas et c'est pour cette raison qu'on peut considérer l'algorithme RLS comme un cas particulier de celui de Kalman.

* Propriétés

1- L'algorithme de kalman converge, en moyenne quadratique aux environs de $2N$ itérations [11], où N est l'ordre de l'égaliseur, et ce indépendamment des caractéristiques propres du canal de transmission. Ainsi la vitesse de convergence de l'algorithme de Kalman est nettement supérieure à celle de l'algorithme du gradient vu dans la section précédente.

2- Contrairement à l'algorithme du gradient, la vitesse de convergence de l'algorithme de Kalman est indépendante de la dispersion des valeurs propres du signal d'entrée [2,11].

3- La convergence très rapide de l'algorithme de Kalman

est obtenue aux dépens d'une augmentation considérable du nombre d'opérations arithmétiques par itération. Cette complexité qui est proportionnelle à N^2 , découle de la manipulation de matrices $N \times N$ pour le calcul du vecteur gain $K_N(n)$, ce qui rend ainsi l'algorithme de Kalman inexploitable pratiquement.

III.4.b Algorithme Fast Kalman

Pour surmonter la limitation exposée ci-dessus, à savoir la complexité du calcul, certains algorithmes rapides [2,5,11] mathématiquement équivalents à l'algorithme de Kalman ont été mis en oeuvre. Ils réduisent, d'une part, le nombre d'opération par itération pour être proportionnel à N , et d'autre part, gardent la rapidité de convergence de l'algorithme RLS conventionnel.

L'algorithme présenté ici a été proposé par FALCONNER en 1978 [5], souvent connu sous le nom "Fast Kalman", il a des relations conceptuelles avec l'algorithme de LEVINSON pour le problème de prédiction.

Cet algorithme exploite la propriété de décalage "shifting property" rencontrée dans la plupart des problèmes d'estimation séquentielle. En égalisation, cette propriété exprime le fait qu'à chaque itération, le nombre des échantillons nouveaux entrant et celui des échantillons anciens quittant l'égaliseur n'est pas N mais un petit entier P qui peut prendre les valeurs 1 ou 2 (1 dans le cas de l'égaliseur transversal, 2 dans celui de l'égaliseur récursif).

Ceci se traduit dans le calcul par une manipulation de matrices $N \times P$ pour la mise à jour du vecteur gain $K_N(n)$ ce qui réduit effectivement le nombre d'opération par itération.

Pour mettre en évidence ce qui a été dit, on définit deux vecteurs de dimension P ; le premier $\xi_p(n)$ spécifie les p échantillons récents qui entrent dans l'égaliseur. Tandis que

le deuxième $\rho_p(n)$ spécifie les p derniers échantillons qui le quittent à l'instant $n+1$.

Ainsi, pour l'égaliseur transversal ($p=1$) on aura:

$$\xi_1(n) = x(n+1) \qquad \rho_1(n) = x(n-N_1+1)$$

et pour l'égaliseur récursif ($p=2$):

$$\xi_2(n) = \begin{bmatrix} x(n+1) \\ \hat{a}(n) \end{bmatrix} \qquad \rho_2(n) = \begin{bmatrix} x(n-N_1+1) \\ \hat{a}(n-N_2) \end{bmatrix}$$

On définit aussi un vecteur étendu de dimension $M=N_1+p$, noté $X_M(n)$, contenant les composantes du vecteur $\xi_p(n)$ ajoutées dans l'ordre à ceux du vecteur $X_N(n)$.

Dans le cas de l'égaliseur récursif, $X_M(n)$ s'écrit:

$$X_M(n) = \begin{bmatrix} x(n+1) \\ \text{-----} \\ x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x(n-N_1+1) \\ \text{-----} \\ \hat{a}(n) \\ \text{-----} \\ \hat{a}(n-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{a}(n-N_2) \end{bmatrix} \qquad \text{(III-98)}$$

Généralement il existe des matrices de permutation S_{Mx} et Q_{Mx} qui permettent de réarranger les éléments du vecteur étendu $X_M(n)$ de telle sorte à séparer les vecteurs $\xi_p(n)$, $\rho_p(n)$,

$$R_{NN}(n) \cdot A_{NP}(n) = -B_{NP}(n) \quad (\text{III-103})$$

où

$$\begin{aligned} B_{NP}(n) &= \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \cdot X_N(i) \cdot \xi_P^T(i) \\ &= \lambda \cdot B_{NP}(n-1) + X_N(n) \cdot \xi_P^T(n) \end{aligned} \quad (\text{III-104})$$

Par analogie avec l'équation (III-94), la matrice $A_{NP}(n)$ peut être générée d'une manière récursive suivant l'équation :

$$A_{NP}(n) = A_{NP}(n-1) - K_N(n) \cdot e_P^T(n) \quad (\text{III-105})$$

avec : $A_{NP}(0) = 0_{NP}$.

De même, on définit la matrice $-D_{NP}(n-1)$ des coefficients du prédicteur arrière ainsi que l'erreur de prédiction arrière $\eta_P(n)$ tel que :

$$\rho_P(n) = -D_{NP}^T(n-1) \cdot X_N(n+1) + \eta_P(n) \quad (\text{III-106})$$

La matrice $D_{NP}(n-1)$ est choisie de telle façon à minimiser la fonction coût :

$$J(D) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \cdot (\rho_P(i) + D_{NP}^T(n-1) \cdot X_N(i+1))^2 \quad (\text{III-107})$$

ce qui implique que :

$$R_{NN}(n+1) \cdot D_{NP}(n) = -\tilde{B}_{NP}(n) \quad (\text{III-108})$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{NP}(n) &= \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \cdot X_N(i+1) \cdot \rho_P^T(i) \\ &= \lambda \cdot \tilde{B}_{NP}(n-1) X_N(n+1) + \rho_P^T(n) \end{aligned} \quad (\text{III-109})$$

et

$$D_{NP}(n) = D_{NP}(n-1) - K_N(n+1) \cdot \eta_P^T(n) \quad (\text{III-110})$$

avec $D_{NP}(0) = 0_{NP}$.

Le vecteur initial $K_N(1)$ est : $K_N(1) = 0_N$.

$$\hat{e}(n) = \xi_p(n) + A_{NP}^T(n) \cdot X_N(n)$$

$$E_{PP}(n) = \lambda \cdot E_{PP}(n-1) + \hat{e}_p(n) \cdot \hat{e}_p(n)^T$$

$$K_M(n) = S_{MM} \cdot \begin{bmatrix} E_{PP}^{-1}(n) \cdot \hat{e}_p(n) \\ \text{-----} \\ K_N(n) + A_{NP} \cdot E_{PP}^{-1}(n) \cdot \hat{e}_p(n) \end{bmatrix}$$

On partitionne le vecteur $Q_{MM} \cdot K_M(n)$ comme suit:

$$Q_{MM} \cdot K_M(n) = \begin{bmatrix} m_N(n) \\ \text{-----} \\ \mu_P(n) \end{bmatrix}$$

$$\eta_P(n) = \rho_P(n) + D_{NP}^T(n-1) \cdot X_N^T(n+1)$$

$$D_{NP}(n) = [D_{NP}(n-1) - m_N(n) \cdot \eta_P^T(n)] \cdot [I_{PP} - \mu_P(n) \cdot \eta_P^T(n)]^{-1}$$

$$K_N(n+1) = m_N(n) - D_{NP}(n) \cdot \mu_P(n) \quad (\text{III-112})$$

b- la mise à jour des coefficients optimaux de l'égaliseur $\hat{C}_N(n+1)$:

$$e(n+1) = a(n+1) - \hat{C}_N(n) \cdot X_N(n+1) .$$

$$\hat{C}_N(n+1) = \hat{C}_N(n) + K_N(n+1) \cdot e(n+1) .$$

III.5 COMPLEXITÉ ET STABILITÉ NUMÉRIQUE

Le nombre de multiplications (la division étant comptée comme une multiplication) par itération et la précision requise sont les facteurs essentiels qui déterminent la complexité en temps réel d'un algorithme donné [5,20].

Le tableau ci-dessous [5] donne le nombre de multiplications et d'additions par itération effectuées lors de la mise à jour des coefficients optimaux d'un égaliseur transversal par les trois algorithmes étudiés dans ce

chapitre.

Algorithme	Multiplications	Additions
Gradient	$2N$	$2N$
Kalman	$3N^2 + 5N$	$2N^2 + 2N + 1$
Fast Kalman	$10N + 4$	$12N + 5$

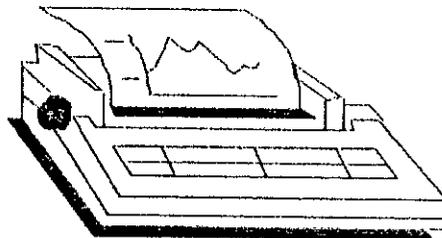
On remarque que pour N assez grand, la complexité de l'algorithme Fast Kalman est 5 fois supérieure que celle de l'algorithme du gradient, alors que l'algorithme de Kalman conventionnel est environ N fois plus complexe.

Néanmoins et malgré les avantages qu'ils offrent, les algorithmes à moindres carrés récursifs (MCR) présentent un inconvénient assez gênant à savoir leur tendance à devenir instable lorsqu'ils sont implémentés avec une précision finie [2,11,18]. Ceci est essentiellement dû à une accumulation à long terme des erreurs d'arrondi engendrées par les opérations de quantification effectuée par la machine considérée.

Parmi les différents types d'algorithmes à moindres carrés récursifs, le Fast Kalman est celui qui penche le plus vers l'instabilité numérique, cependant celle-ci peut être évitée en introduisant dans l'algorithme considéré des expressions mathématiques qui tiennent compte de l'accumulation des erreurs d'arrondi [2].

Chapitre IV

Simulation et interprétations Des résultats



IV.1 BUT DE LA SIMULATION

Entre les développements théoriques et leurs applications à des procédés réels, les études de simulation ont un rôle important. En effet, certaines caractéristiques de fonctionnement des systèmes ne sont pas toujours faciles à mettre en évidence de manière précise par des voies purement théoriques.

La simulation se révèle alors être un moyen d'investigation simple et efficace, elle permet à l'Ingénieur d'évaluer un système expérimentalement et de déterminer les modifications nécessaires pour sa conception réelle avec un coût plus réduit et une performance raisonnable.

IV.2 MODELE PROPOSE

Le modèle de simulation proposé pour mettre en évidence les différentes propriétés des algorithmes utilisés lors d'une égalisation adaptative est celui de la figure (IV-1), il comprend:

- Deux générateurs de signaux. Le premier génère une séquence binaire pseudo-aléatoire de niveaux ± 1 , qui modélise l'information utile à transmettre, le deuxième génère un bruit blanc gaussien centré qui modélise le bruit additif introduit par le canal de transmission.

- Un modèle du canal de transmission :

Le modèle proposé tient compte des distorsions introduites par le canal lors d'une transmission numérique de données, à savoir les distorsions d'amplitude et/ou de phase.

- Un égaliseur adaptatif:

Dans notre étude de simulation, on a considéré deux types de structures, à savoir, la structure transversale et la structure récursive (voir chapitre II). D'autre part, les algorithmes adaptatifs utilisés pour la mise à jour des coefficients optimaux des égaliseurs sont respectivement l'algorithme du gradient, l'algorithme de Kalman et, en fin, le Fast Kalman.

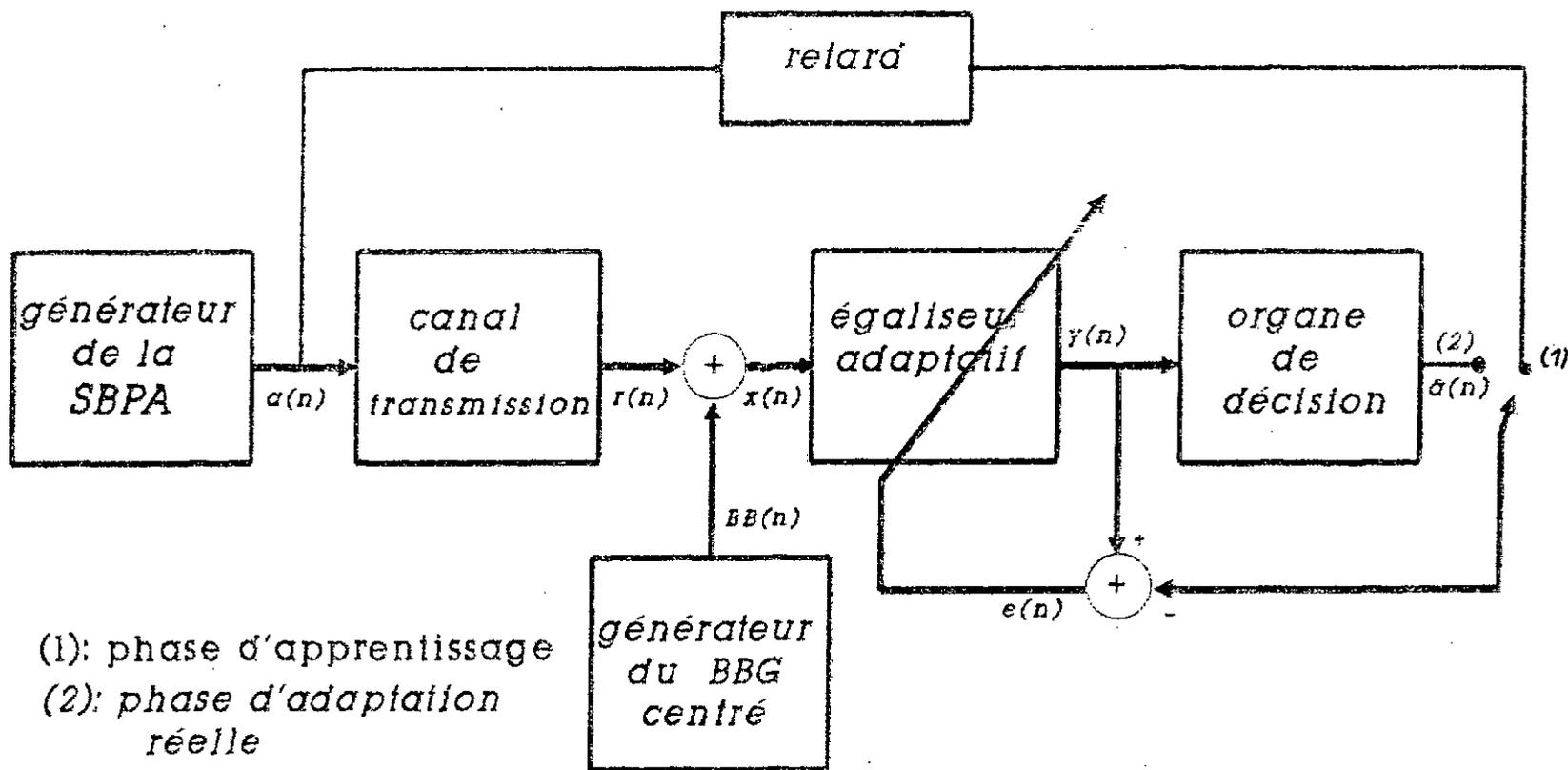


Fig-IV.1 Modèle de simulation proposé

Le critère considéré est celui de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne.

- Un organe de décision:

C'est un simple détecteur de seuil, il permet de générer les symboles estimés à la réception suivant le signal de sortie de l'égaliseur $y(n)$. Ainsi, si $y(n) > 0$, le symbole estimé est $\hat{a}(n)=1$. Si par contre, $y(n) \leq 0$, le symbole estimé est alors $\hat{a}(n)=-1$.

IV.3 MODELE DU CANAL DE TRANSMISSION

Le canal a été modélisé par un filtre numérique à réponse impulsionnelle finie (RIF). Ce dernier est un système linéaire discret invariant dans le temps défini par une équation selon laquelle, la sortie représentant un échantillon du signal filtré, est obtenue par une sommation pondérée d'un ensemble fini d'échantillons du signal d'entrée. Ainsi:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i \cdot x(n-i) \quad (IV-1)$$

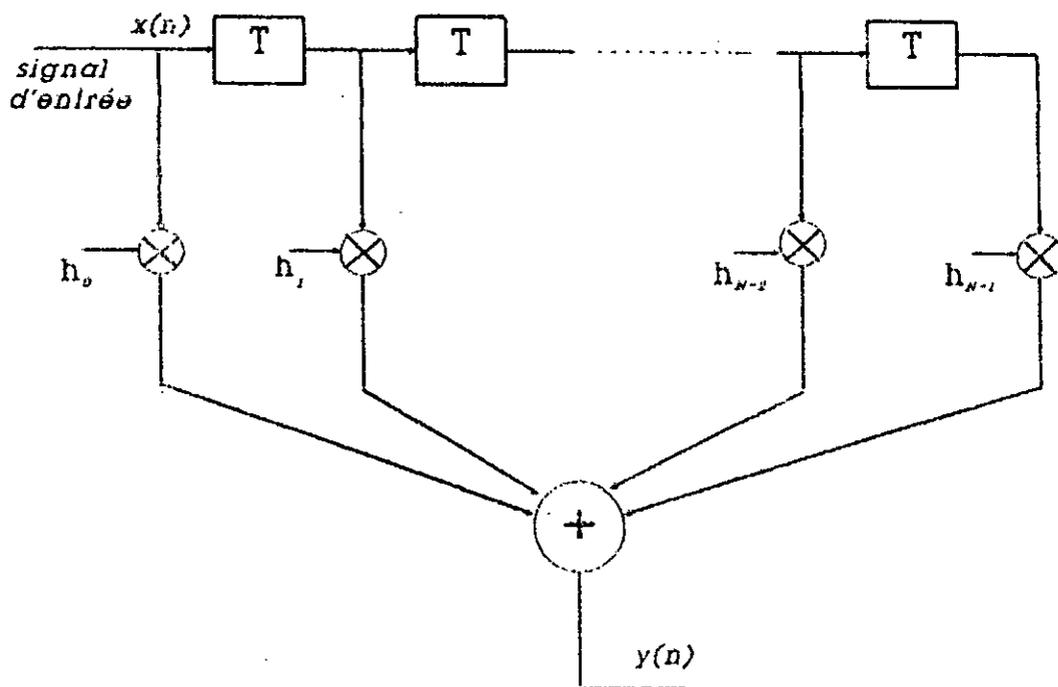


Figure (IV-2) Modèle RIF pour le canal de transmission

phase.

IV.4 GENERATION DES SIGNAUX

IV.4.a Génération de la séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA)

Tout d'abord, il faut définir ce qu'est une séquence binaire pseudo-aléatoire [6]. Une séquence étant une suite d'événements. Elle est pseudo-aléatoire si la suite des événements peut être déterminée parfaitement à priori. Autrement dit, elle est créée de façon déterministe, mais elle apparaît comme aléatoire à un observateur qui ignore la façon dont elle est fabriquée (par exemple, tous les événements de la séquence apparaissent le même nombre de fois, les événements successifs sont pratiquement incorrélés). Les séquences binaires (deux niveaux) présentent l'avantage d'être faciles à traiter sur le plan théorique et pratique (transmission aisée).

Pour engendrer une SBPA de niveaux 0 ou 1, il suffit de rétroalimenter un registre à décalage de N digits à travers une fonction booléenne (figure (IV-4)), qu'on choisit très généralement comme la disjonction (addition modulo 2). La période de l'horloge qui commande le décalage est T .

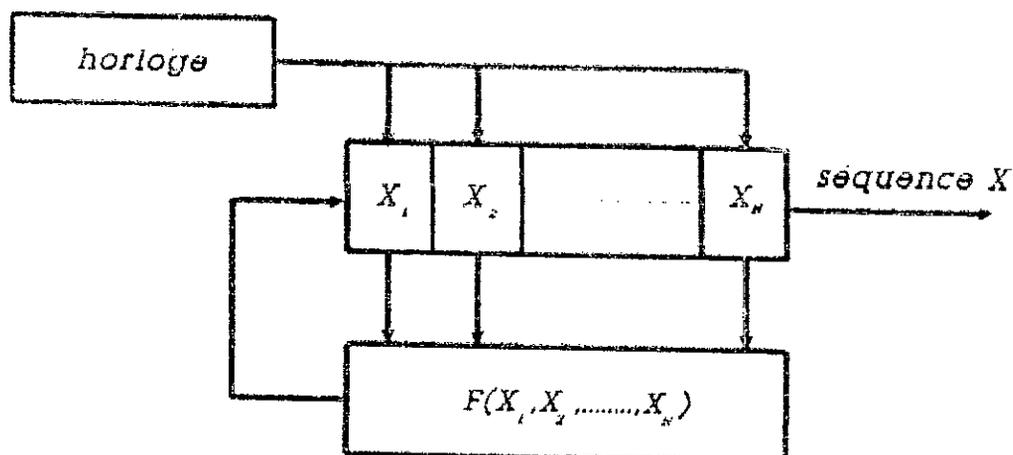


figure (IV-4) générateur de la SBPA

nécessairement limitée. Une technique assez répandue permet de générer un signal pseudo-aléatoire à distribution gaussienne à partir d'un signal pseudo-aléatoire à distribution uniforme. Ceci se fait à l'aide de la transformation de BOX-MUELLER donnée par la relation récurrente suivante [12]:

$$z(k) = y(k) \cdot \cos[2\pi \cdot x(k+1)] \sigma + m \quad (\text{IV.5})$$

où $y(k)$ est un signal pseudo-aléatoire ayant la distribution de RAYLEIGH défini par la relation:

$$y(k) = \sqrt{2 \cdot \sigma^2 \cdot \log \frac{1}{x(k)}} \quad (\text{IV.6})$$

et où $x(k)$ est le signal pseudo-aléatoire à distribution uniforme.

Le signal ainsi généré possède la distribution de gauss de moyenne m et de variance σ^2 .

Dans notre modèle de simulation, le bruit généré est un bruit blanc gaussien centré (de moyenne nulle) dont la variance est fonction du rapport signal sur bruit (RSB) désiré:

$$\sigma^2 = P_r \cdot 10^{-\frac{RSB}{10}} \quad (\text{IV-7})$$

où P_r représente la puissance du signal à la sortie du canal de transmission.

RSB est le rapport signal sur bruit désiré (en dB).

IV.4 INTERPRÉTATIONS DES RESULTATS

Les résultats de notre simulation sont donnés sous forme de graphes qui démontrent d'une manière explicite l'influence des différents paramètres sur les propriétés de convergence des algorithmes étudiés.

Ainsi, la figure (fig-1) illustre le rôle que peut jouer la phase d'apprentissage dans le bon démarrage d'une égalisation adaptative. Une égalisation effectuée sans phase d'apprentissage entraîne une convergence vers un optimum autre que celui désiré, à savoir un optimum qui ne minimise pas l'erreur quadratique moyenne entre le signal de sortie de l'égaliseur $y(n)$ et la référence $a(n)$.

La figure (fig-2) représente l'influence du pas d'adaptation μ sur la convergence de l'algorithme du gradient. En effet, on remarque que la convergence de cet algorithme est, d'une part, d'autant plus rapide que μ est grand tout en impliquant une erreur résiduelle grande. D'autre part, elle est d'autant plus lente que μ est petit tout en impliquant cette fois-ci une erreur résiduelle petite (convergence fine). Ceci est le cas pour les deux structures considérées, à savoir les structures transversales et récursives. D'où la nécessité d'un compromis dans le choix du pas d'adaptation μ pour concilier rapidité et finesse de convergence. Ce choix peut être facilité si on accepte que μ varie au cours des itérations successives (on commence par un μ grand puis on le diminue après un certain nombre d'itération).

L'aspect émergeant de la figure (fig-3) est la grande influence du bruit introduit par le canal de transmission sur la convergence de l'algorithme du gradient pour les deux structures. Lorsque le rapport signal sur bruit (RSB) est faible, l'algorithme perd beaucoup en finesse et en vitesse de convergence conduisant ainsi à une probabilité d'erreur de bit considérable, cependant, lorsqu'on augmente le rapport signal sur bruit, l'algorithme reprend son allure, sa finesse et l'erreur quadratique moyenne tend vers une valeur minimale.

La figure (fig-4) montre que la convergence de l'algorithme du gradient est d'autant meilleure que

L'ordre de l'égaliseur est grand ¹, ce qui s'explique par le fait suivant:

Étant donné que le canal de transmission est modélisé par un filtre RIF et que l'égaliseur modélise l'inverse de ce canal, on conclue que le modèle le plus convenable d'un égaliseur est celui d'un filtre numérique RII. Ce qui explique, d'une part, la bonne convergence obtenue à chaque fois que l'on augmente l'ordre N_e de l'égaliseur transversal, et d'autre part, les performances meilleures obtenues lors de l'utilisation d'une structure récursive d'ordre relativement faible. Ce résultat est très important lorsqu'on sait que la complexité de l'algorithme du gradient (nombre d'opérations par itération) est proportionnelle à N_e .

Ainsi, l'utilisation d'un égaliseur récursif réduit la complexité tout en gardant les mêmes performances d'un égaliseur transversal d'ordre nettement supérieur.

Cette propriété trouve son utilité dans les transmissions numériques de données à grandes vitesses.

L'influence que peuvent avoir les distorsions introduites par le canal de transmission est illustrée à la figure (fig-5). Deux aspects importants se font remarqués:

- la finesse et la vitesse de convergence de l'algorithme du gradient se dégradent lorsque les distorsions sont considérables.

- En présence des distorsions, la structure récursive présente des performances nettement meilleures, ce qui justifie son utilisation pour l'égalisation des canaux dispersifs tel que le canal radio.

La figure (fig-6) confirme l'équivalence existante entre l'algorithme de Kalman et l'algorithme Fast Kalman. En effet, on voit bien que les deux algorithmes ont les mêmes propriétés de convergence pour un même type de canal.

¹ : l'ordre de l'égaliseur transversal ainsi que celui de la partie directe de l'égaliseur récursif est noté N_e . L'ordre de la partie rétroactive de l'égaliseur récursif est noté N_r .

D'autre part et comparé à l'algorithme du gradient, cette figure illustre la puissance des algorithmes à moindres carrés récursifs (MCR) à converger rapidement (après $2N$ itérations) avec une finesse tout à fait remarquable tout en impliquant une erreur résiduelle et une probabilité d'erreur de bit nettement inférieures à celles trouvées pour l'algorithme du gradient.

La figure (fig-7) montre que l'algorithme Fast Kalman n'est pas tellement sensible au choix de l'ordre de l'égaliseur. En effet, on remarque que cet algorithme arrive à converger avec une finesse impeccable pour des ordres relativement faibles, ce qui permet, en pratique, de réduire la complexité par un choix adéquat de l'ordre de l'égaliseur.

La figure (fig-8) illustre l'influence du rapport signal sur bruit (RSB) sur la convergence de l'algorithme Fast Kalman. Ainsi pour un RSB relativement faible (de l'ordre de 5 dB), on remarque qu'au démarrage de l'égalisation, l'algorithme perd beaucoup en finesse et tend à diverger, ceci n'est que transitoire. En effet, après une centaine d'itérations l'algorithme reprend son allure, sa finesse et l'erreur quadratique moyenne converge vers une valeur minimale. Ceci confirme la puissance et la suprématie de cet algorithme sur l'algorithme du gradient.

La figure (fig-10) illustre l'insensibilité que présente l'algorithme Fast Kalman vis-à-vis des distorsions introduites par le canal de transmission.

La supériorité de l'algorithme Fast Kalman sur l'algorithme du gradient est encore confirmée par la figure (fig-12). En effet, on voit bien que le deuxième coefficient de l'égaliseur, c_1 , converge vers un optimum après uniquement quelques itérations (environ 30 itérations) lorsque sa mise à jour est effectuée par le biais de l'algorithme Fast Kalman alors que cette même convergence est obtenue après un nombre élevé d'itérations lorsqu'on considère l'algorithme du

gradient.

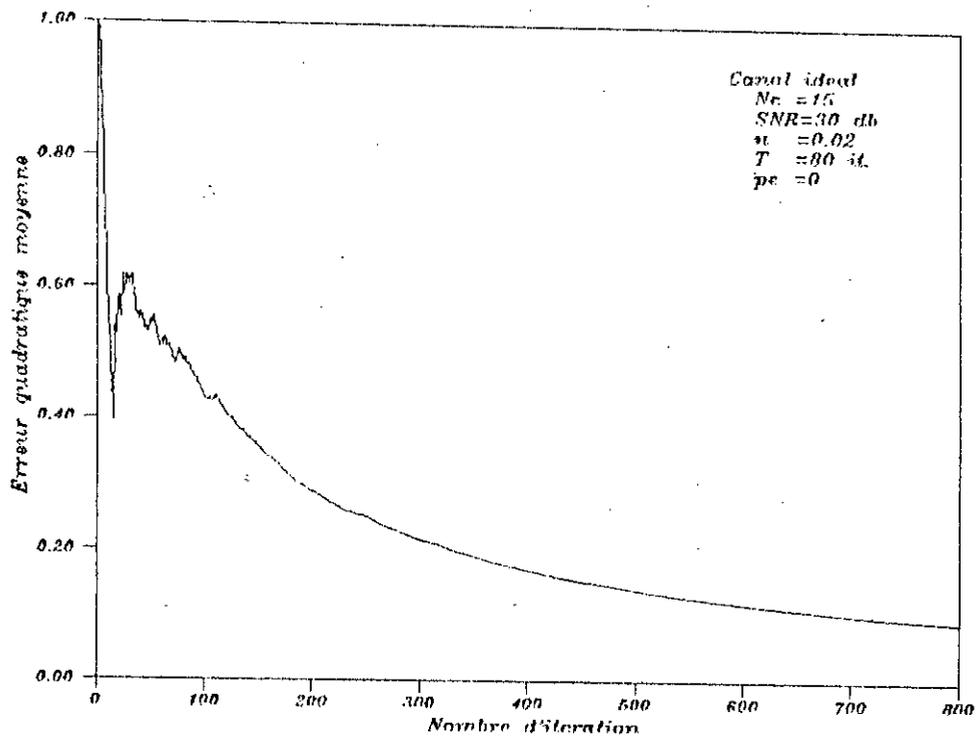
Ainsi, une hiérarchie tout à fait logique s'impose quant au choix de l'algorithme adaptatif à utiliser pour la mise à jour des coefficients optimaux des égaliseurs.

L'influence du paramètre delta qui représente la valeur initiale de l'énergie d'erreur de prédiction avant sur la convergence de l'algorithme Fast Kalman est représentée à la figure (fig-9). Pour que l'algorithme démarre correctement, il faut que les conditions initiales correspondent à une situation de moindres carrés.

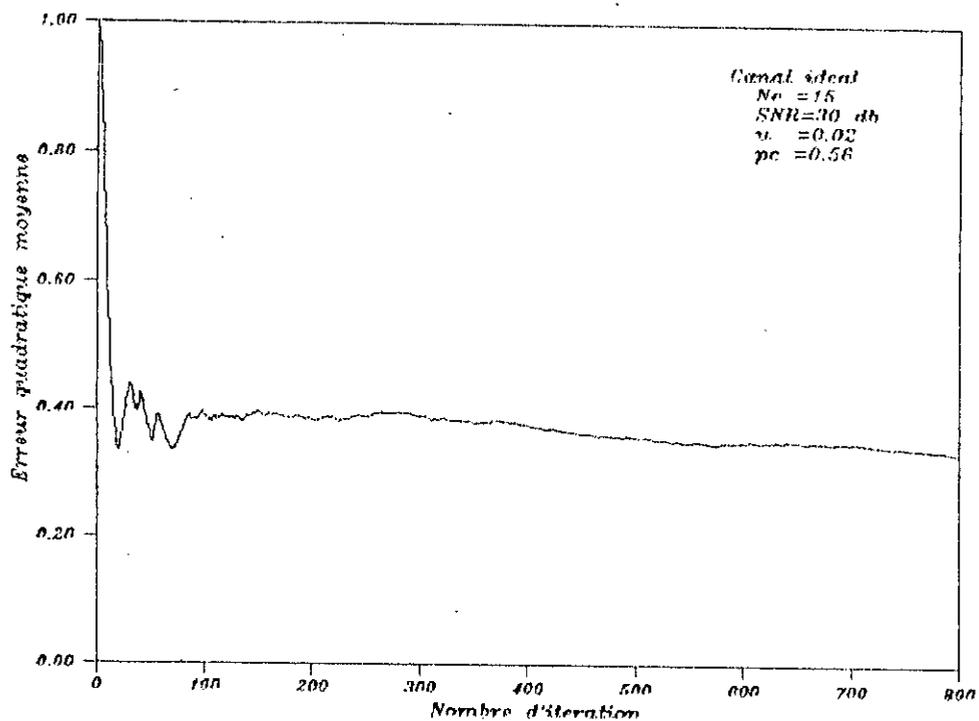
En effet, les développements mathématiques [2] ont démontrés que delta ne peut être choisi arbitrairement petit et qu'une borne inférieure s'impose. Ceci explique la détérioration de la finesse de convergence de l'algorithme au démarrage lorsque delta est inférieur à 0.01.

La figure (fig-11) montre qu'après convergence, le spectre de fréquence de l'inverse de l'égaliseur est pratiquement identique à celui du canal de transmission considéré, ce qui démontre que l'égalisation s'est bien effectuée.

Finalement, le tableau donné à la figure (fig-13) illustre l'influence que peut avoir le rapport signal sur bruit (RSB) sur la probabilité d'erreur de bit. En effet, cette dernière est d'autant plus petite (performances meilleures) que le RSB est grand et ce pour les deux algorithmes considérés, à savoir l'algorithme du gradient et le Fast Kalman. Toutefois, on note une probabilité d'erreur plus faible dans le cas de l'algorithme Fast Kalman pour un même RSB donné.

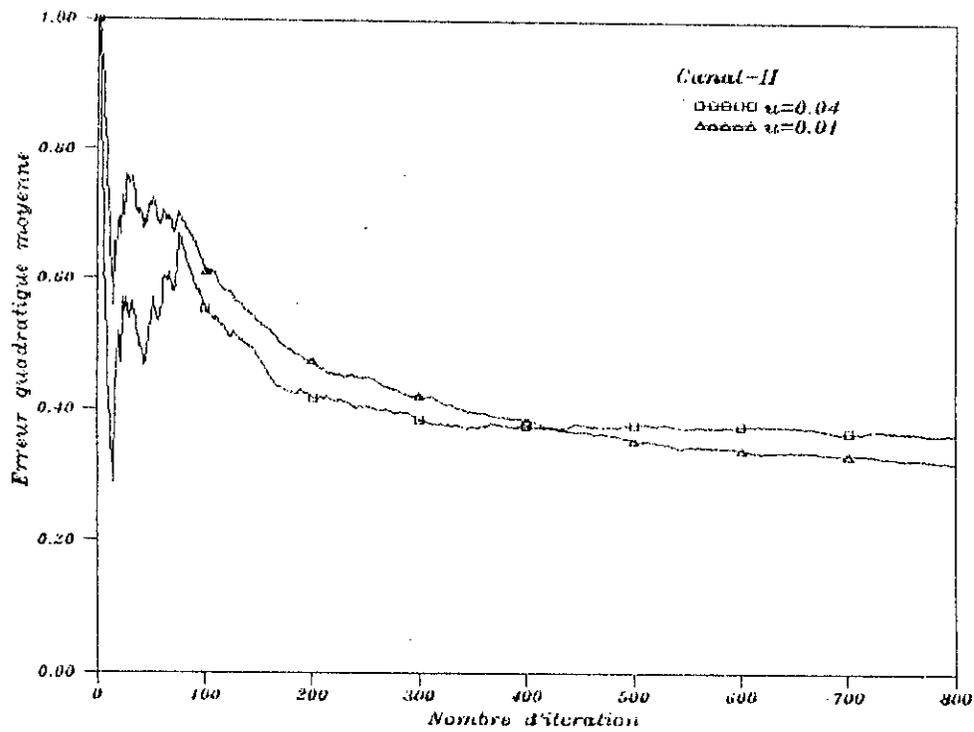


(a) avec phase d'apprentissage

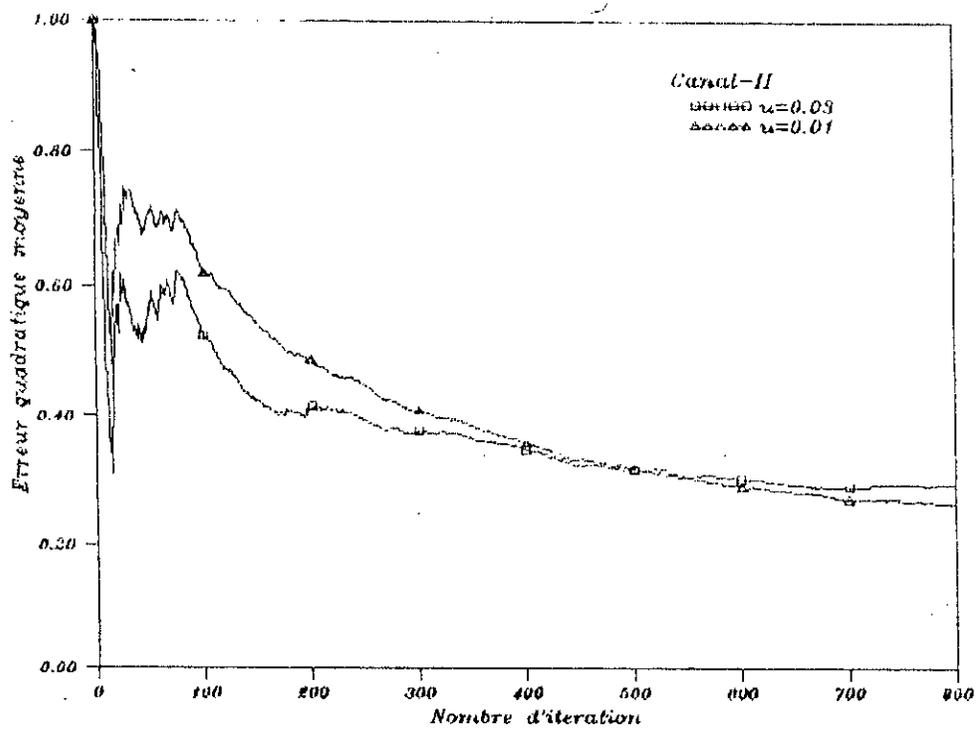


(b) sans phase d'apprentissage

Fig-1 Influence de la phase d'apprentissage sur la convergence de l'algorithme du gradient appliqué à l'égaliseur transversal adaptatif

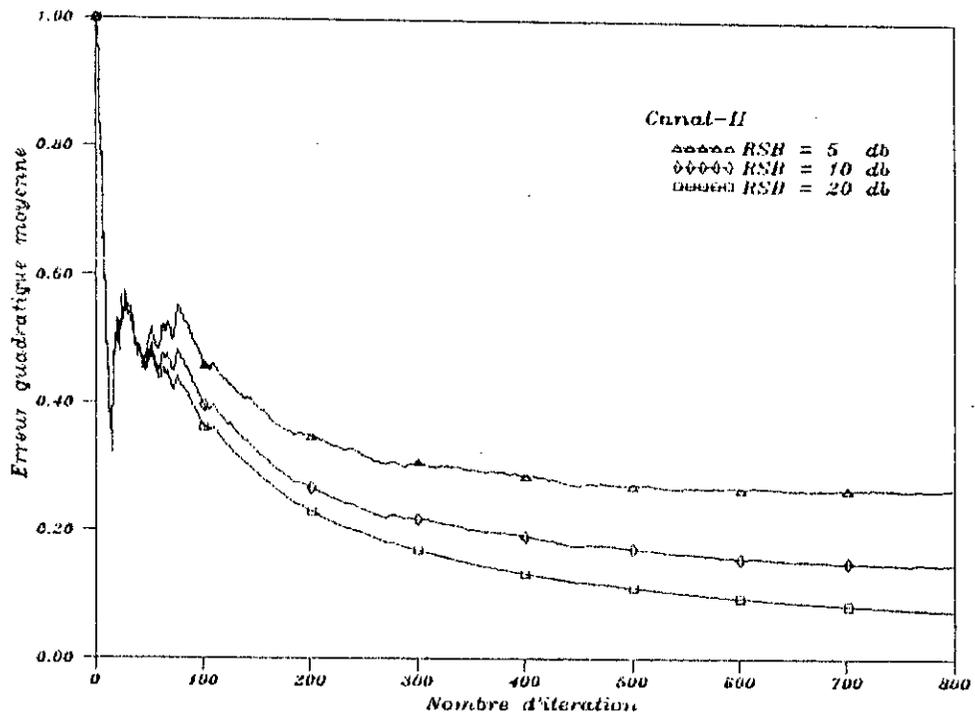


(a) égaliseur transversal
avec $N_e=21$

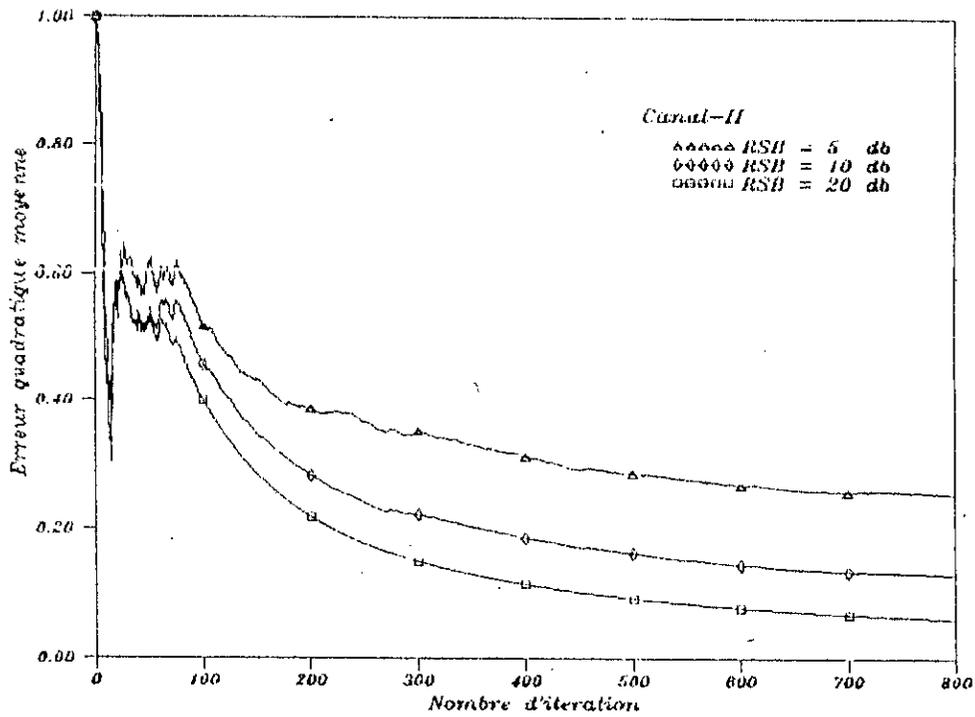


(b) égaliseur récursif
avec $N_e=15$ $N_f=8$

Fig-2 Influence du choix du pas d'adaptation sur la convergence de l'algorithme du gradient appliqué aux égaliseurs adaptatifs

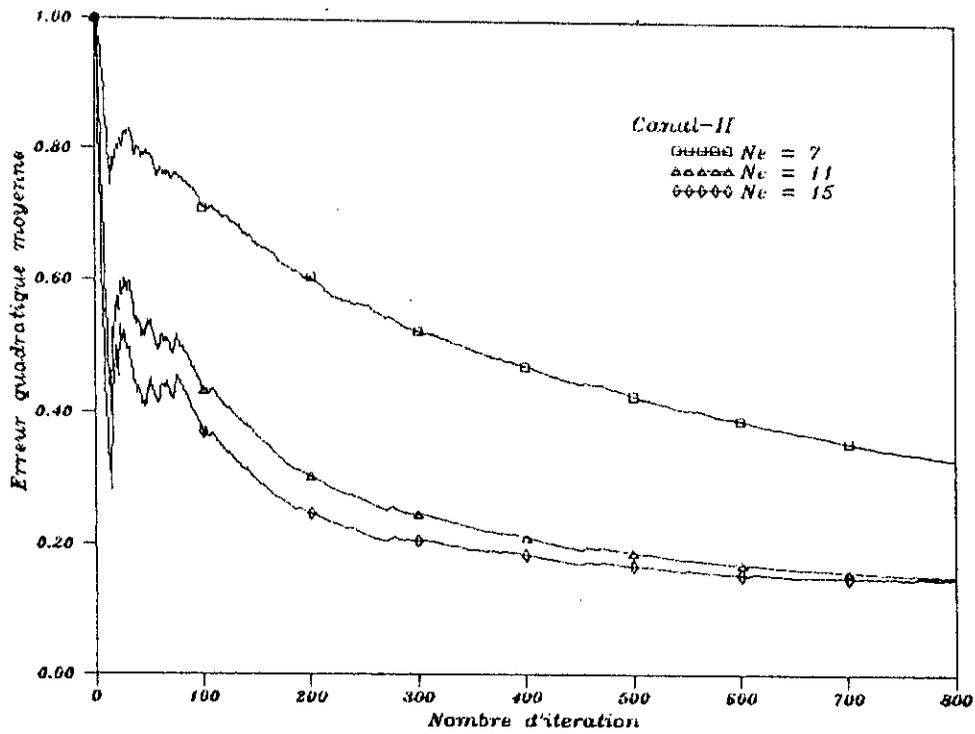


(a) égaliseur transversal
avec $N_e=15$

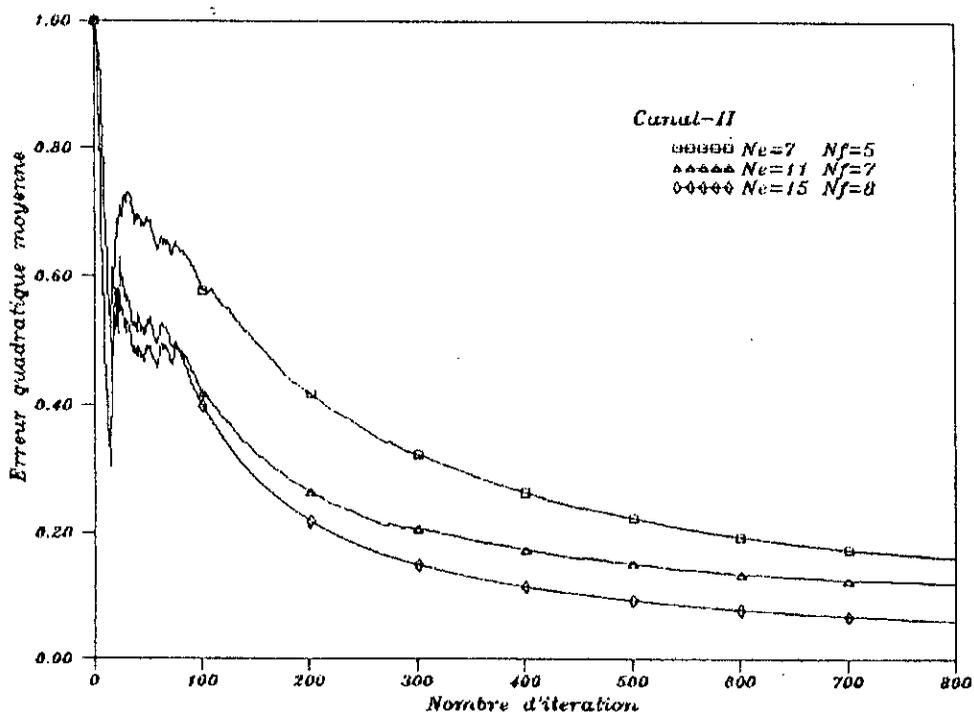


(b) égaliseur récursif
avec $N_e=15$ $N_f=8$

Fig-3 Influence du rapport signal sur bruit sur la convergence de l'algorithme du gradient appliqué aux égaliseurs adaptatifs



(a) égaliseur transversal



(b) égaliseur récursif

Fig-4 Influence de l'ordre de l'égaliseur sur les propriétés de convergence de l'algorithme du gradient

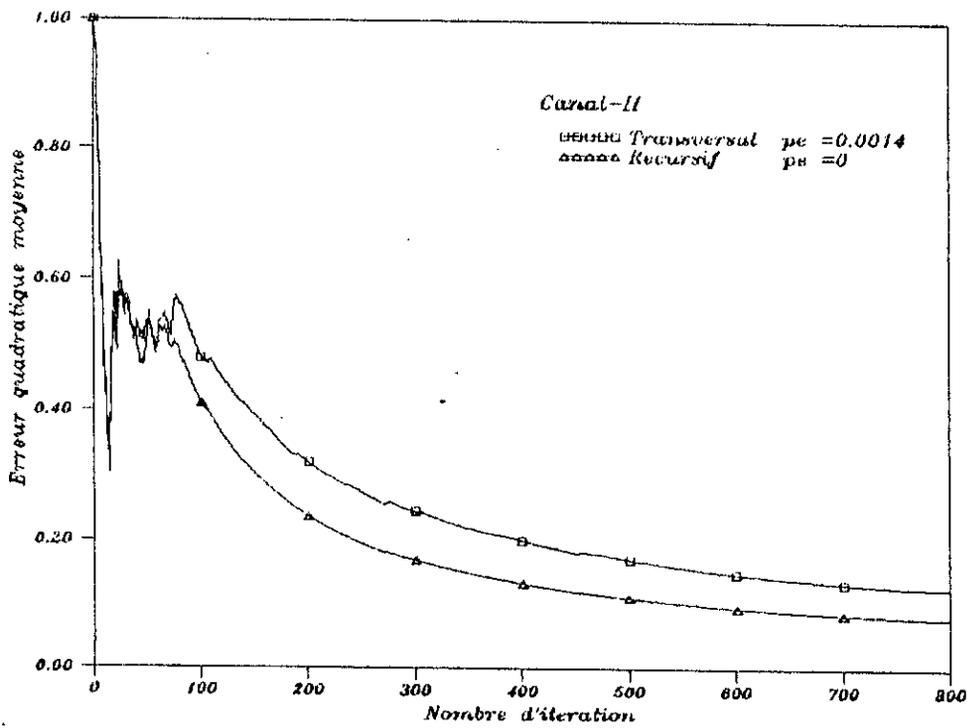
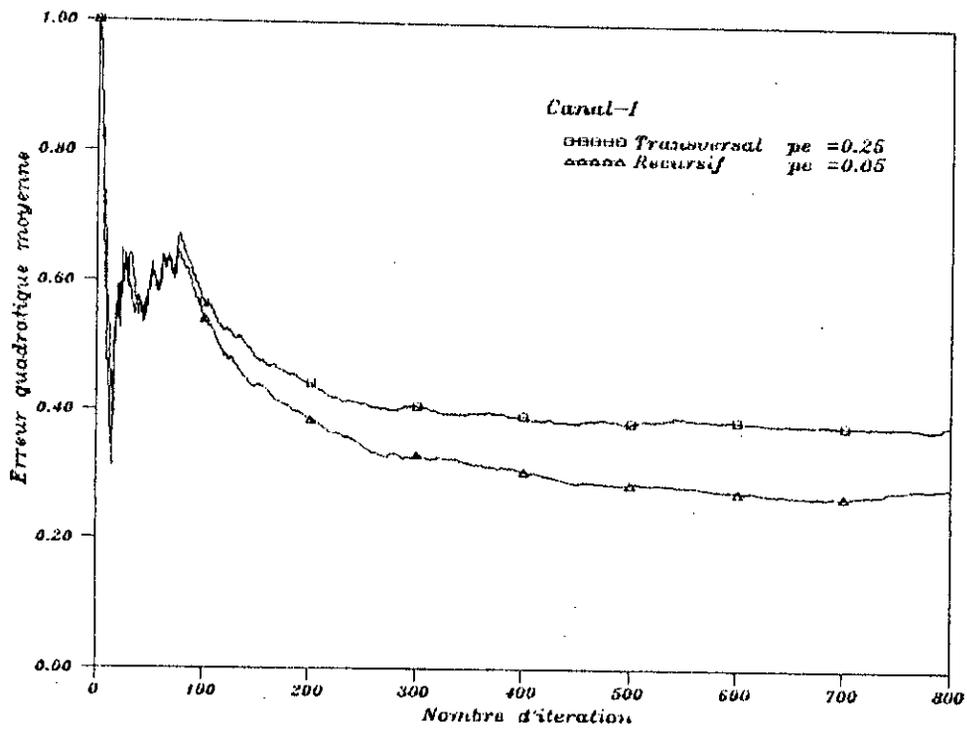
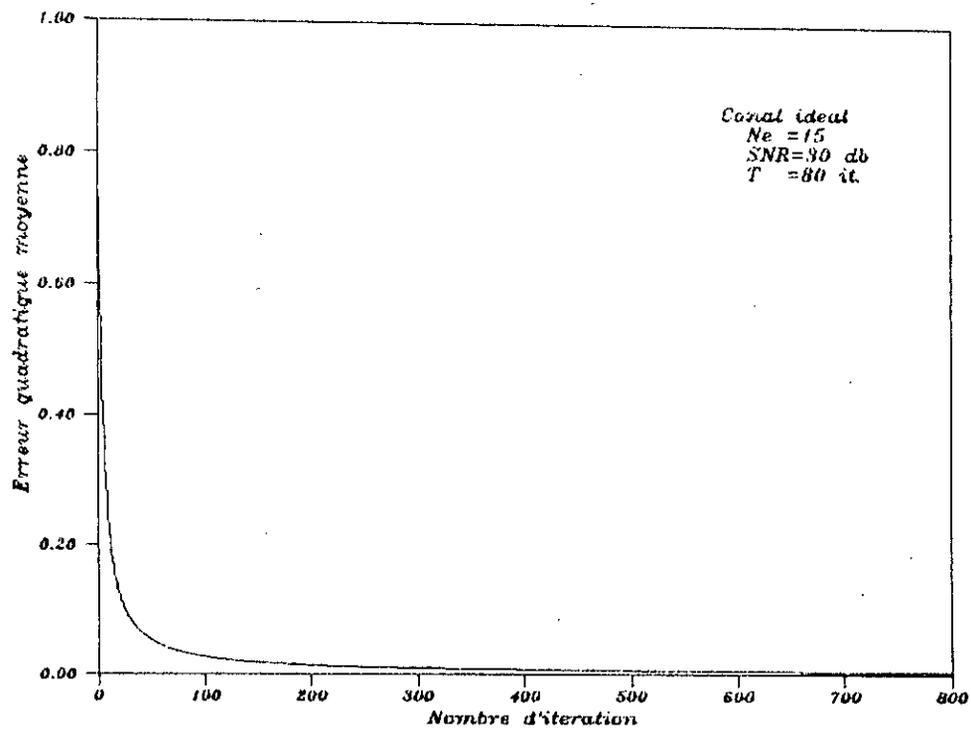
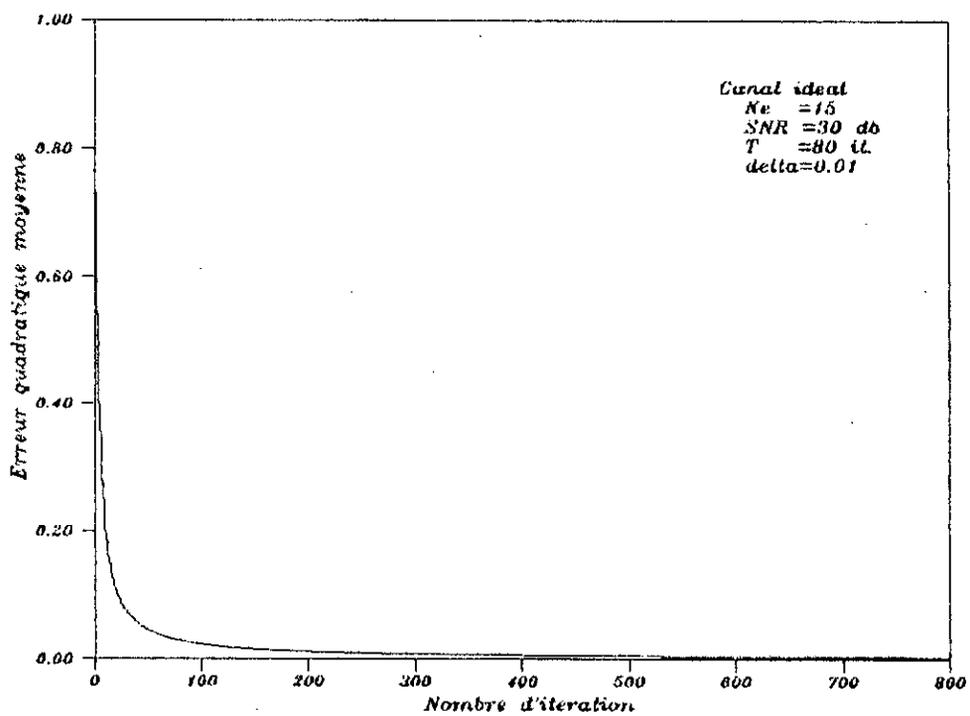


Fig-5 Influence des distorsions introduites par le canal de transmission sur la convergence de l'algorithme du gradient



(a)-Algorithme de Kalman conventionnel



(b)-Algorithme du Fast-Kalman

Fig-6 Resultats de simulation des algorithmes de Kalman et du Fast-Kalman appliques a l'egaliseur transversal adaptatif

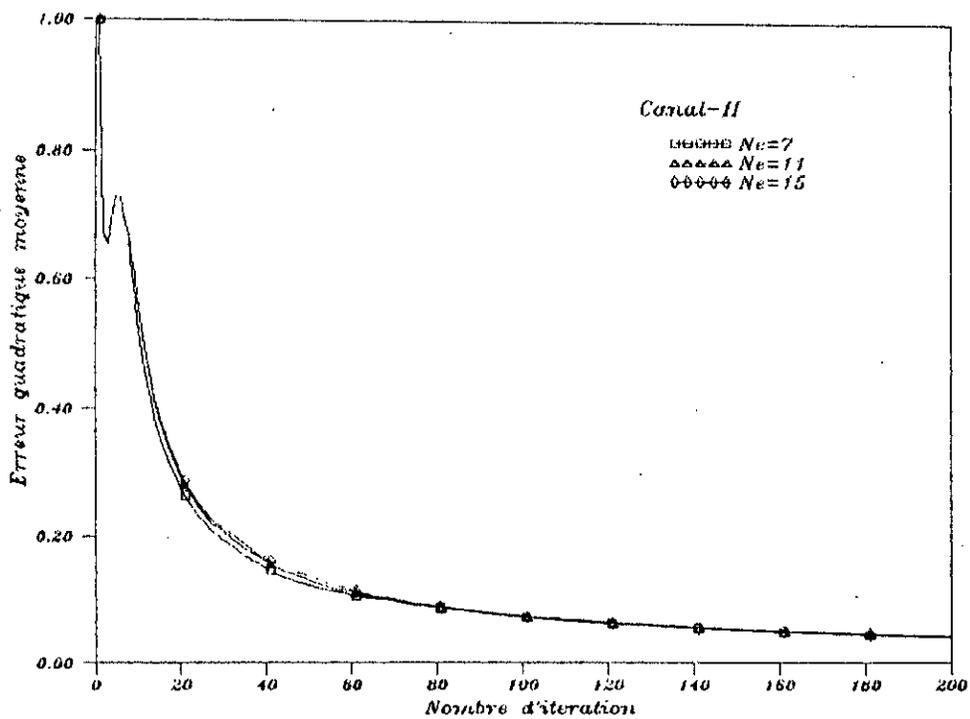


Fig-7 Influence de l'ordre de l'egaliseur sur les proprietes de convergence de l'algorithme du Fast-Kalman avec SNR=20db $\delta=0.01$

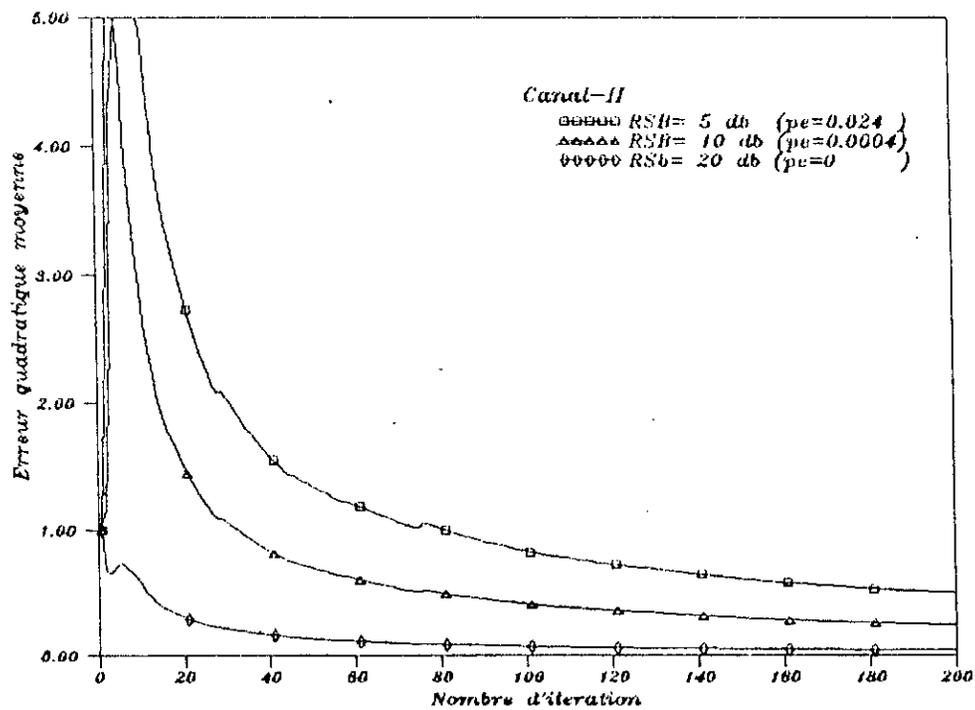


Fig-8 Influence du rapport signal sur bruit sur la convergence de l'algorithme du Fast-Kalman applique a l'egaliseur transversal avec Ne=15 $\delta=0.01$

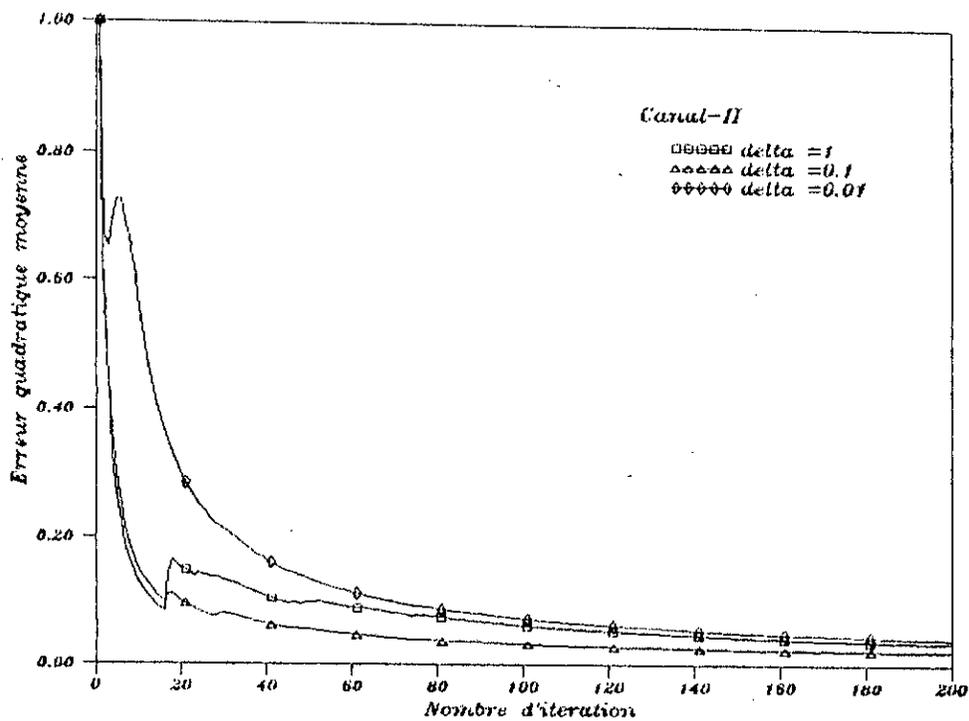


Fig-9 Influence du parametre delta sur la convergence de l'algorithme du Fast-Kalman applique a l'egaliseur transversal avec $N_e=15$ $RSB=20$ db

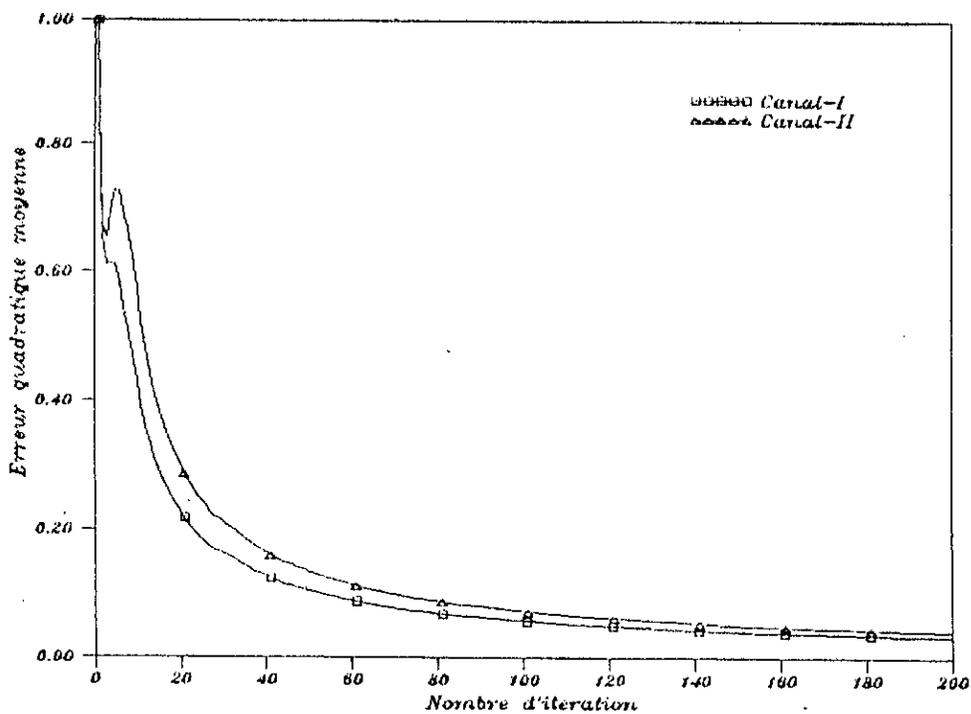
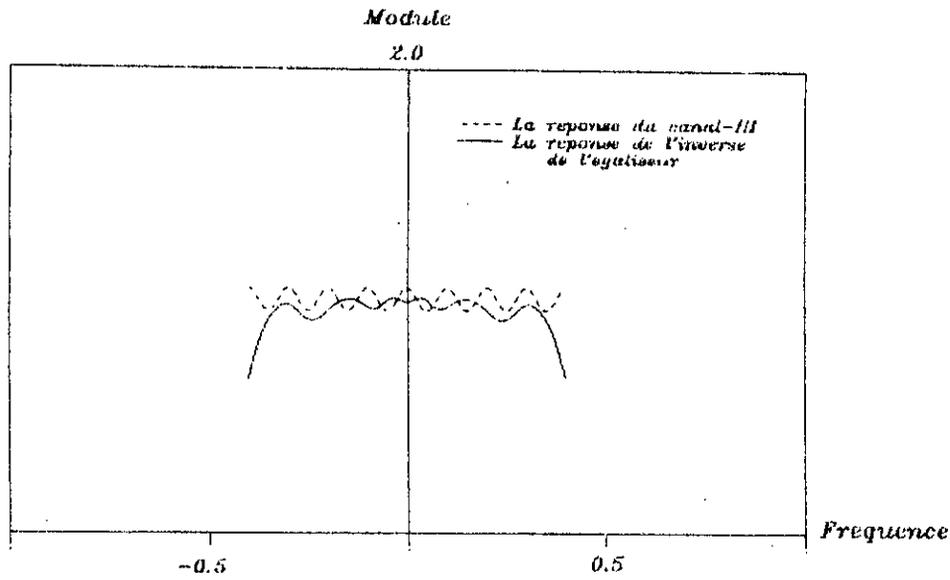
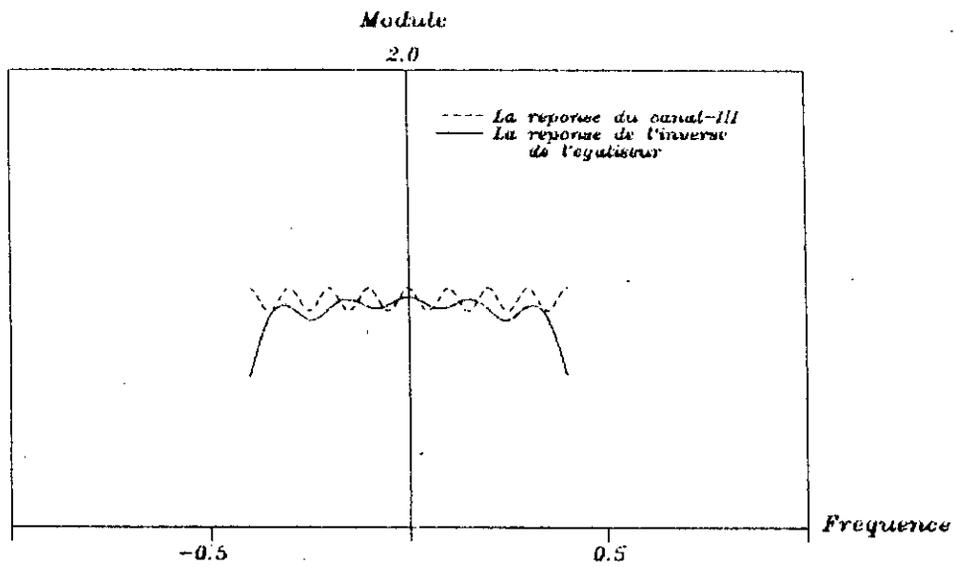


Fig-10 Influence des distorsions introduites par le canal de transmission sur la convergence de l'algorithme du Fast-kalman avec $N_e=15$ $RSb=20$ db $delta=0.01$



(a)-Avec l'algorithme du gradient
 $N_e=15$ $\mu=0.01$



(b)-avec l'algorithme du Fast Kalman
 $N_e=15$ $\delta=0.01$

Fig-11 La réponse fréquentielle en amplitude du canal de transmission et de l'inverse de l'égaliseur après convergence

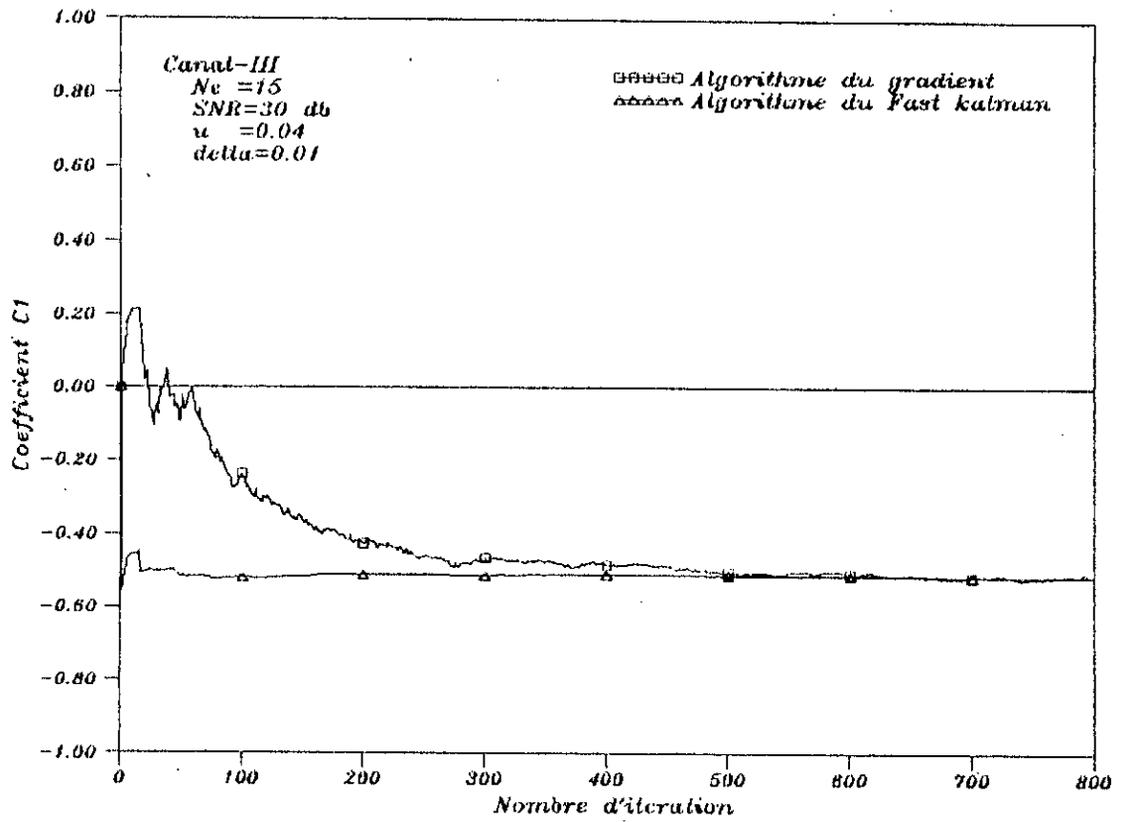


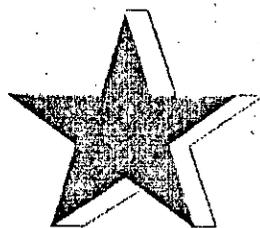
Fig-12 Convergence du coefficient C_1 de l'égaliseur transversal par l'algorithme du gradient et du Fast-kalman

RSB (db)	Gradient	Fast Kalman
30	0.00277	0.00000
20	0.00416	0.00000
10	0.00833	0.00040
5	0.03888	0.02444
0	0.20277	0.18040
-5	0.40555	0.38880

Fig-13 Influence du RSB sur la probabilité d'erreur de bit des algorithmes, gradient et Fast Kalman²

² : le canal utilisé : Canal II
avec $N_e=15$, $\mu=0.04$, $\delta=0.01$

Conclusion



Le but que nous nous sommes fixé dans cette étude est de modéliser un égaliseur qui peut, d'une part, éliminer ou du moins minimiser les interférences entre symboles (ISI) introduites par les canaux de transmission (canal téléphonique ou canal radio), et d'autre part, qui s'adapte parfaitement aux variations dans le temps des caractéristiques du canal considéré.

Pour cela, on a utilisé des moyens micro-informatiques qui nous ont permis de :

- Simuler le fonctionnement des différentes structures d'égaliseurs adaptatifs, en particulier la structure transversale et récursive.

- Modéliser le canal de transmission à égaliser. On a considéré des canaux idéaux et réels avec des distorsions d'amplitude et/ou de phase.

- Choisir l'algorithme adaptatif à utiliser pour la mise à jour des coefficients optimaux de l'égaliseur considéré. Ce choix porte essentiellement sur l'algorithme du gradient, de Kalman et Fast Kalman.

La complexité et les performances numériques des algorithmes adaptatifs étudiés ont été comparées tant en simulation que d'un point de vue théorique.

Toutes les simulations mises en oeuvre ont permis de constater que:

- La structure récursive est nettement plus performante que la structure transversale surtout lorsque le canal de transmission considéré présente le problème d'évanouissement (Fading), des transitions rapides ou des distorsions d'amplitude et/ou de phase considérables.

- Les algorithmes à moindres carrés récursifs (MCR) présentent des propriétés de convergence nettement meilleures que celles présentées par l'algorithme du gradient. En effet, ces algorithmes convergent rapidement avec une finesse remarquable indépendamment des caractéristiques propres du signal considéré alors que l'algorithme du gradient converge

selon le rapport $\lambda_{\min}/\lambda_{\max}$, où λ_{\min} et λ_{\max} sont les valeurs propres minimale et maximale de la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée de l'égaliseur. Ainsi, si $\lambda_{\min}/\lambda_{\max}$ est proche de l'unité on obtient une meilleure convergence.

- La complexité de l'algorithme Fast Kalman, comme celle de l'algorithme du gradient, est proportionnelle à l'ordre de l'égaliseur N , alors que la complexité de l'algorithme de Kalman conventionnel est proportionnelle à N^2 , ce qui rend son application prohibitive en pratique. Ainsi, l'utilisation de l'algorithme Fast Kalman en égalisation adaptative est très recommandée. En effet, ce dernier à pris des deux autres algorithmes leurs meilleures performances, à savoir, la complexité moindre du gradient et la convergence rapide du Kalman conventionnel.

En fin, notons que l'algorithme du gradient est utilisé lorsque le débit est faible et lorsque les caractéristiques du canal varient très lentement dans le temps. Tandis que les algorithmes à moindres carrés récursifs (MCR) sont utilisés lorsque le débit est élevé et lorsque les caractéristiques du canal varient rapidement dans le temps comme le canal Radio.

Les résultats présentés dans ce mémoire ne constituent bien entendu qu'une étape dans l'étude globale des systèmes de communication numériques.

Annexe A

A1 : Calcul du vecteur gradient ∇_N :

par définition on a :

$$\nabla_N(n+1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial e^2(n+1)}{\partial c_0} \\ \frac{\partial e^2(n+1)}{\partial c_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial e^2(n+1)}{\partial c_{N-1}} \end{bmatrix}$$

d'autre part on a :

et : $\frac{1}{2} e^2(n+1) = \frac{1}{2} \left[a(n+1) - c_N \cdot x_N(n+1) \right]^2$

$$\frac{1}{2} e^2(n+1) = \frac{1}{2} \left[a(n+1) - c_0 \cdot x(n+1) \dots - c_{N-1} x(n-N+1) \right]^2$$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial e^2(n+1)}{\partial c_0} = -x(n+1) \cdot e(n+1).$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial e^2(n+1)}{\partial c_1} = -x(n+1) \cdot e(n+1).$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial e^2(n+1)}{\partial c_{N-1}} = -x(n-N+1) \cdot e(n+1).$$

d'où :

$$\nabla_N(n+1) = \frac{\gamma}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial e^2(n+1)}{\partial c_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial e^2(n+1)}{\partial c_{N-1}} \end{bmatrix} = -X_N(n+1) \cdot e(n+1).$$

Finalement :

$$\nabla_N(n+1) = -X_N(n+1) \cdot e(n+1).$$

A2 : Partie de la démonstration de la convergence du vecteur Coefficient C_N

Prenant l'espérance des deux membres de l'équation suivante :

$$C_N(n+1) = \left[I_{NN} - \mu \cdot X_N(n+1) \cdot X_N^T(n+1) \right] \cdot C_N(n) + \mu \cdot X_N(n+1) \cdot a(n+1).$$

En tenant compte des hypothèses fondamentales d'indépendance, on trouve :

$$E[C_N(n+1)] = E[C_N(n)] - \mu \cdot E[X_N(n+1) \cdot X_N^T(n+1)] \cdot E[C_N(n)] + \mu \cdot E[X_N(n+1) \cdot a(n+1)].$$

quand n est très grand on a :

$$E[C_N(n+1)] = E[C_N(n)].$$

Il en résulte :

$$E \left[X_N(n+1) \cdot X_N^T(n+1) \right] \cdot E \left[C_N(n) \right] = E \left[X_N(n+1) \cdot a(n+1) \right]$$

AB: Démonstration de l'expression de l'erreur
"à posteriori"

par définition on a :

$$S(n+1) = a(n+1) - C_N^T(n+1) \cdot X_N(n+1).$$

d'autre part on a :

$$C_N^T(n+1) = C_N^T(n) + \mu \cdot X_N^T(n+1) \cdot e(n+1).$$

Il en résulte :

$$S(n+1) = a(n+1) - C_N^T(n) \cdot X_N(n+1) - \mu \cdot X_N^T(n+1) \cdot X_N(n+1) \cdot e(n+1).$$

Finalement :

$$S(n+1) = e(n+1) \cdot \left[1 - \mu \cdot X_N^T(n+1) \cdot X_N(n+1) \right]$$

cqfd.

A4 : Démonstration de la Condition de stabilité

On a :

$$s(n+1) = e(n+1) \cdot [1 - \mu \cdot X_N^T(n+1) \cdot X_N(n+1)]$$

$$E[|s(n+1)|] = E[|e(n+1)|] \cdot E[|1 - \mu \cdot X_N^T(n+1) \cdot X_N(n+1)|]$$

par hypothèse on a :

$$E[|s(n+1)|] < E[|e(n+1)|]$$

Il en résulte que :

$$\frac{E[|s(n+1)|]}{E[|e(n+1)|]} = E[|1 - \mu \cdot X_N^T(n+1) \cdot X_N(n+1)|] < 1$$

Ainsi :

$$|1 - \mu \cdot E[X_N^T(n+1) \cdot X_N(n+1)]| < 1$$

avec

$$E[X_N^T(n+1) \cdot X_N(n+1)] = N \cdot \sigma_x^2$$

d'où

$$-1 < 1 - \mu \cdot N \cdot \sigma_x^2 < 1$$

On trouve :

$$0 < \mu < \frac{2}{N \cdot \sigma_x^2}$$

A5 : Démonstration de l'expression de $\mathcal{E}(n)$
en fonction de \mathcal{E}_{\min} :

L'erreur quadratique s'exprime :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(n) &= E \left[(a(n) - \mathbf{C}_N^T \cdot \mathbf{X}_N(n))^2 \right] \\ \text{d'où} \quad \mathcal{E}(n) &= E \left[a^2(n) + \mathbf{C}_N^T(n) \cdot \mathbf{X}_N(n) \cdot \mathbf{C}_N^T(n) \cdot \mathbf{X}_N(n) \right. \\ &\quad \left. - 2 \cdot a(n) \cdot \mathbf{C}_N^T \cdot \mathbf{X}_N(n) \right] \\ &= E \left[a^2(n) \right] + E \left[\mathbf{C}_N^T(n) \cdot \mathbf{X}_N(n) \cdot \mathbf{X}_N^T(n) \cdot \mathbf{C}_N^T(n) \right] \\ &\quad - 2 \cdot E \left[\mathbf{C}_N^T \cdot \mathbf{X}_N(n) \cdot a(n) \right] \end{aligned}$$

on suppose que :

$$\hat{\mathbf{C}}_N = \mathbf{C}_N(n) + \Delta C$$

ΔC : est le vecteur d'éviation.

$\hat{\mathbf{C}}$: Le vecteur optimal.

On trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(n) &= E \left[a(n)^2 \right] - 2 \cdot (\hat{\mathbf{C}}_N + \Delta C)^T \cdot \mathbf{V}_N + \\ &\quad (\hat{\mathbf{C}}_N + \Delta C)^T \cdot \mathbf{R}_{NN} \cdot (\hat{\mathbf{C}}_N + \Delta C). \end{aligned}$$

$$\text{on a : } \mathbf{V}_N = \mathbf{R}_{NN} \cdot \hat{\mathbf{C}}_N.$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(n) &= \mathcal{E}_{\min} - 2 \cdot DC^T \cdot R_{NN} \cdot \hat{C}_N + \hat{C}_N^T \cdot R_{NN} \cdot DC + \\
 &\quad DC^T \cdot R_{NN} \cdot \hat{C}_N + DC^T \cdot R_{NN} \cdot DC \\
 &= \mathcal{E}_{\min} - DC^T \cdot R_{NN} \cdot \hat{C}_N + \hat{C}_N^T \cdot R_{NN} \cdot DC + \\
 &\quad DC^T \cdot R_{NN} \cdot DC \\
 &= \mathcal{E}_{\min} + DC^T \cdot R_{NN} \cdot DC.
 \end{aligned}$$

en fin :

$$\mathcal{E}(n) = \mathcal{E}_{\min} + (\hat{C}_N - C_N(n))^T \cdot R_{NN} \cdot (\hat{C}_N - C_N)$$

c.q.f.d.

A6 : Lemme d'inversion

Soient A et B deux matrices définies positives de dimension $M \times M$ tel que :

$$A = B^{-1} + C \cdot D^{-1} \cdot C^T$$

Où D est une autre matrice définie positive de dimension $N \times N$. C est une matrice $M \times N$.

L'inverse de la matrice A s'écrit :

$$A^{-1} = B - B.C.(D + C^T.B.C)^{-1}.C^T.B.$$

A7 : Mise à jour du vecteur gain $k_N(n)$ par l'algorithme Fast-Kalman

d'après l'équation (III. 111), on se propose de chercher le vecteur $k_N(n+1)$ qui vérifie l'équation

$$R_{NN}(n+1).k_N(n+1) = X_N(n+1)$$

A cet effet, on définit, la matrice d'AC étendue $R_{MM}(n)$ du vecteur $X_M(n)$ tel que :

$$R_{MM}(n) = \lambda.R_{MM}(n-1) + X_M(n).X_M^T(n)$$

Défini comme telle, la matrice $R_{MM}(n)$ contient les éléments des matrices $R_{NN}(n)$ et $R_{NN}(n+1)$. Ainsi et en utilisant les matrices de permutation S_{MN} et Q_{MN} on peut partitionner la matrice $R_{MM}(n)$ comme suit :

$$S_{MN}.R_{MM}(n).S_{MN}^T = \left[\begin{array}{c|c} \Pi_{PP}(n) & B_{NP}^T(n) \\ \hline B_{NP}(n) & R_{NN}(n) \end{array} \right]$$

et

$$\Phi_{nn} \cdot R_{nn}(n) \cdot \Phi_{nn}^T = \left[\begin{array}{c|c} R_{nn}(n+1) & \tilde{B}_{nn}(n) \\ \hline \tilde{B}_{np}^T(n) & \tilde{\pi}_{pp}(n) \end{array} \right]$$

ou

$$\pi_{pp}(n) = \lambda \cdot \pi_{pp}(n-1) + \varepsilon_p(n) \cdot \varepsilon_p^T(n)$$

$$\tilde{\pi}_{pp}(n) = \lambda \cdot \tilde{\pi}_{pp}(n-1) + \int_p(n) \cdot \int_p^T(n)$$

avec

$$\pi_{pp}(0) = \tilde{\pi}_{pp}(0) = \delta \cdot I_{pp}$$

I_{pp} est la matrice identité de dimension $P \times P$.

Ceci étant fait, déterminons un vecteur étendu $k_H(n)$ qui vérifie l'équation :

$$R_{nn}(n) \cdot k_H(n) = x_H(n)$$

Pour cela on utilise la propriété intéressante de la matrice de permutation S_{nn} à savoir :

$$S_{nn}^T = S_{nn}^{-1}$$

Ce qui permet d'avoir, suivant l'équation précédente :

$$k_H(n) = S_{nn}^T \left(S_{nn} \cdot R_{nn}(n) \cdot S_{nn}^T \right)^{-1} S_{nn} \cdot x_H(n)$$

d'où, après développement des calculs :

$$k_H(n) = S_{nn}^T \left[\begin{array}{c} E_{pp}^{-1}(n) \cdot \hat{\epsilon}'_p(n) \\ \hline k_N(n) + A_{NP}^T(n) \cdot E_{pp}^{-1}(n) \cdot \hat{\epsilon}'_p(n) \end{array} \right]$$

où

$$E_{pp}(n) = \Pi_{pp}(n) + A_{NP}^T(n) \cdot B_{NP}(n)$$

et

$$\hat{\epsilon}'_p(n) = \hat{\epsilon}_p(n) + A_{NP}^T(n) \cdot X_N(n)$$

$\hat{\epsilon}'_p(n)$ représente l'erreur entre $\hat{\epsilon}_p(n)$ et sa nouvelle valeur prédite $- A_{NP}^T(n) \cdot X_N(n)$.

La matrice $E_{pp}(n)$ représente l'énergie de l'erreur de prédiction avant $E_{pp}(n)$, elle est définie positive, d'où $E_{pp}^{-1}(n)$ existe.

Pour simplifier les calculs, on peut écrire $E_{pp}(n)$ d'une manière récursive:

$$E_{pp}(n) = \lambda \cdot E_{pp}(n-1) + \hat{\epsilon}_p(n) \cdot \hat{\epsilon}_p^T(n) + A_{NP}^T(n) \cdot B_{NP}(n) - \lambda \cdot A_{NP}^T(n-1) \cdot B_{NP}(n-1)$$

L'application des équations précédentes donne :

$$E_{pp}(n) = \lambda \cdot E_{pp}(n-1) + \hat{\epsilon}_p(n) \cdot \hat{\epsilon}_p^T(n)$$

Ainsi, on a pu déterminer le vecteur étendu $k_M(n)$ et qui peut être mis à jour à partir de vecteurs de dimension N ($x_N(n)$ et $k_N(n)$), de matrices $P \times P$ ($A_{NP}(n)$ et $B_{NP}(n)$) et d'une matrice $P \times P$ ($E_{PP}(n)$).

L'étape suivante consiste à déterminer le vecteur gain $k_N(n+1)$ à partir du vecteur étendu $k_M(n)$.

Soit le vecteur $Q_{nn} \cdot k_M(n)$ qu'on partitionne comme suit :

$$Q_{nn} \cdot k_M(n) = \begin{bmatrix} m_N(n) \\ \hline \mu_P(n) \end{bmatrix}$$

Multiplions la matrice $Q_{nn} \cdot R_{nn}(n) \cdot Q_{nn}^T$ donnée à la page VIII par le vecteur $Q_{nn} \cdot k_M(n)$, on obtient :

$$\begin{aligned} Q_{nn} \cdot R_{nn}(n) \cdot Q_{nn}^T \cdot Q_{nn} \cdot k_M(n) &= Q_{nn} \cdot R_{nn}(n) \cdot k_M(n) \\ &= \begin{bmatrix} R_{NN}(n+1) \cdot m_N(n) + \tilde{B}_{NP}^T(n) \cdot \mu_P(n) \\ \hline \tilde{B}_{NP}^T(n) \cdot m_N(n) + \tilde{\pi}_{PP}(n) \cdot \mu_P(n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d'autre part, remplaçons $R_{nn}(n) \cdot k_M(n)$ par $x_N(n)$ et utilisons le fait que :

$$Q_{nn} \cdot x_n(n) = \left[\begin{array}{c} x_N(n+1) \\ \hline f_p(n) \end{array} \right]$$

Nous obtenons, après identification :

$$R_{NN}(n+1) \cdot m_N(n) + \tilde{B}_{NP}(n) \cdot u_p(n) = x_N(n+1)$$

or $\tilde{B}_{NP}(n)$ satisfait l'équation :

$$\tilde{B}_{NP}(n) = -R_{NN}(n+1) \cdot D_{NP}(n)$$

finalement, on obtient :

$$R_{NN}(n+1) [m_N(n) - D_{NP}(n) \cdot u_p(n)] = x_N(n+1)$$

et

$$K_N(n+1) = m_N(n) - D_{NP}(n) \cdot u_p(n)$$

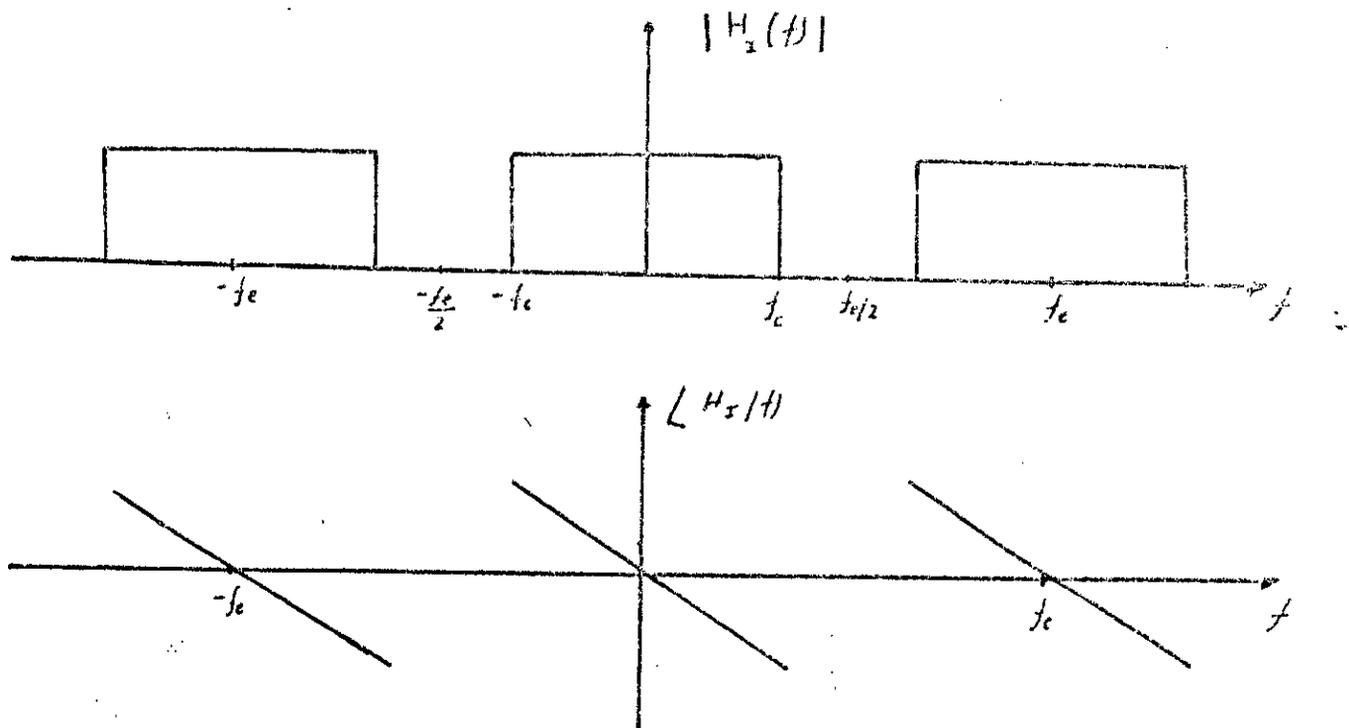
c.q.f.d.

A8 : Calcul de la réponse impulsionnelle
du Canal proposé :

1- Canal idéal :

Le spectre fréquentiel du Canal idéal proposé est le suivant :

$$H_I(f) = 1 \cdot e^{-j2\pi f\tau}$$



La réponse impulsionnelle idéale $h_s(k)$ se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
 h_s(k) &= \frac{1}{f_c} \int_{-f_c}^{f_c} e^{j2\pi f \left(\frac{k}{f_c} - \tau\right)} df \\
 &= \frac{1}{f_c} \left[\frac{e^{j2\pi f \left(\frac{k}{f_c} - \tau\right)}}{j2\pi \left(\frac{k}{f_c} - \tau\right)} \right]_{-f_c}^{f_c} \\
 &= \frac{1}{f_c} \left[\frac{e^{j2\pi f_c \left(\frac{k}{f_c} - \tau\right)} - e^{-j2\pi f_c \left(\frac{k}{f_c} - \tau\right)}}{j2\pi \left(\frac{k}{f_c} - \tau\right)} \right]
 \end{aligned}$$

d'où finalement :

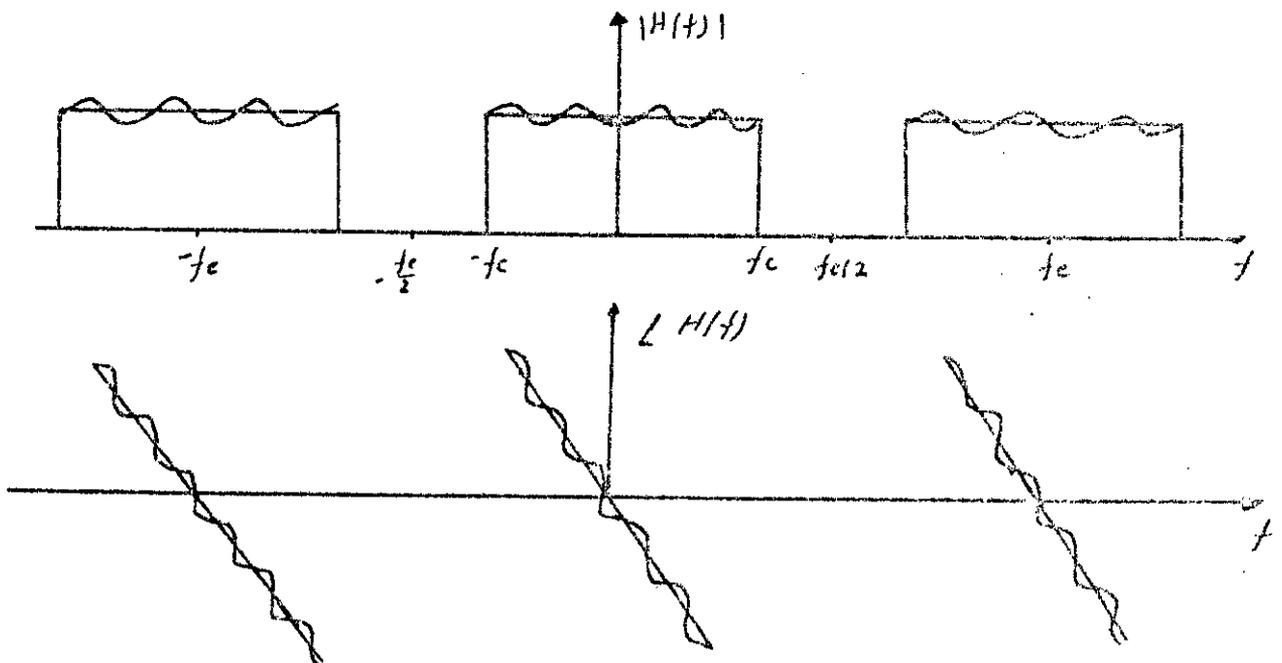
$$h(k) = \frac{2 \cdot f_c}{f_e} \cdot \text{sinc} \left[2\pi f_c (kT_e - \tau) \right]$$

$$\text{avec } f_c = \frac{1}{T_e}$$

où f_c : fréquence de Coupure.
 f_e : fréquence d'échantillonnage.
 τ : c'est le retard provoqué par le Canal.

2. Canal présentant des distorsions :

Le spectre fréquentiel du canal présentant des distorsions d'amplitude et de phase est donné par :



On a :

$$H(f) = \frac{H_I(f)}{I} \cdot \left[1 + A \cdot \cos(2\pi a f) \right] e^{jB \sin(2\pi f_p f)}$$

La réponse impulsionnelle du canal avec distorsions se calcule comme suit :

$$h(k) = \frac{1}{f_c} \int_{-f_c}^{f_c} H_I(f) \left[1 + A \cdot \cos(2\pi f T_a) \right] e^{jB \sin(2\pi T_p f)} e^{jk \frac{2\pi}{f_c} f} df.$$

où :

T_a : est la période du signal déformant l'amplitude.

T_p : est la période du signal déformant la phase.

A : l'amplitude de distorsion d'amplitude.

B : l'amplitude distorsion de phase.

Ainsi :

$$h(k) = \frac{1}{f_c} \int_{-f_c}^{f_c} H_I(f) \left[1 + A \cdot \cos(2\pi f T_a) \right] e^{jB \sin(2\pi T_p f)} e^{jk \frac{2\pi}{f_c} f} df.$$

si on suppose que B est faible, on peut approximer :

$$e^{jB \sin(2\pi T_p f)} \approx 1 + j B \cdot \sin(2\pi T_p f)$$

$$- \frac{B^2}{2} \cdot \sin^2(2\pi T_p f).$$

Ainsi :

$$h(k) = \frac{1}{f_c} \int_{-f_c}^{f_c} H_I(f) \left[1 + \frac{A}{2} \cdot e^{j2\pi T_a f} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j2\pi T_a f} \right] df.$$

$$\left[1 + \frac{B}{2} \cdot e^{j2\pi T_p f} - \frac{B}{2} \cdot e^{-j2\pi T_p f} - \frac{B^2}{4} \cdot (1 - \cos 4\pi T_p f) \right] e^{jk2\pi T_e f} \cdot df$$

soit I et I' les intégrales suivantes :

$$I = \frac{1}{T_e} \int_{-T_c}^{T_c} H_I(f) \cdot \left[1 + \frac{A}{2} \cdot e^{j2\pi T_a f} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j2\pi T_a f} \right] \cdot \left[1 + \frac{B}{2} \cdot e^{j2\pi T_p f} - \frac{B}{2} \cdot e^{-j2\pi T_p f} - \frac{B^2}{4} \cdot (1 - \cos 4\pi T_p f) \right] e^{jk2\pi T_e f} \cdot df$$

$$I' = \frac{1}{T_e} \int_{-T_c}^{T_c} H_I(f) \cdot \left[1 + \frac{A}{2} \cdot e^{j2\pi T_a f} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j2\pi T_a f} \right] \cdot \left[-\frac{B^2}{2} \sin^2(2\pi T_p f) \right] e^{jk2\pi T_e f} \cdot df$$

Avec :

$$h(k) = I + I'$$

On trouve :

$$I = h_I(k) + \frac{B}{2} \left[h_I(kT_e - \tau + T_p) - h_I(kT_e - \tau - T_p) \right] + \frac{A}{2} \left[h_2(kT_e - \tau + T_a) + h_2(kT_e - \tau - T_a) \right]$$

$$I' = -\frac{B^2}{4T_e} \int_{-T_c}^{T_c} H_I(f) \left[1 + \frac{A}{2} \cdot e^{j2\pi T_a f} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j2\pi T_a f} \right] \cdot \left[\frac{e^{j4\pi T_p f}}{2} + e^{-j4\pi T_p f} - 1 \right] e^{jk2\pi T_e f} \cdot df$$

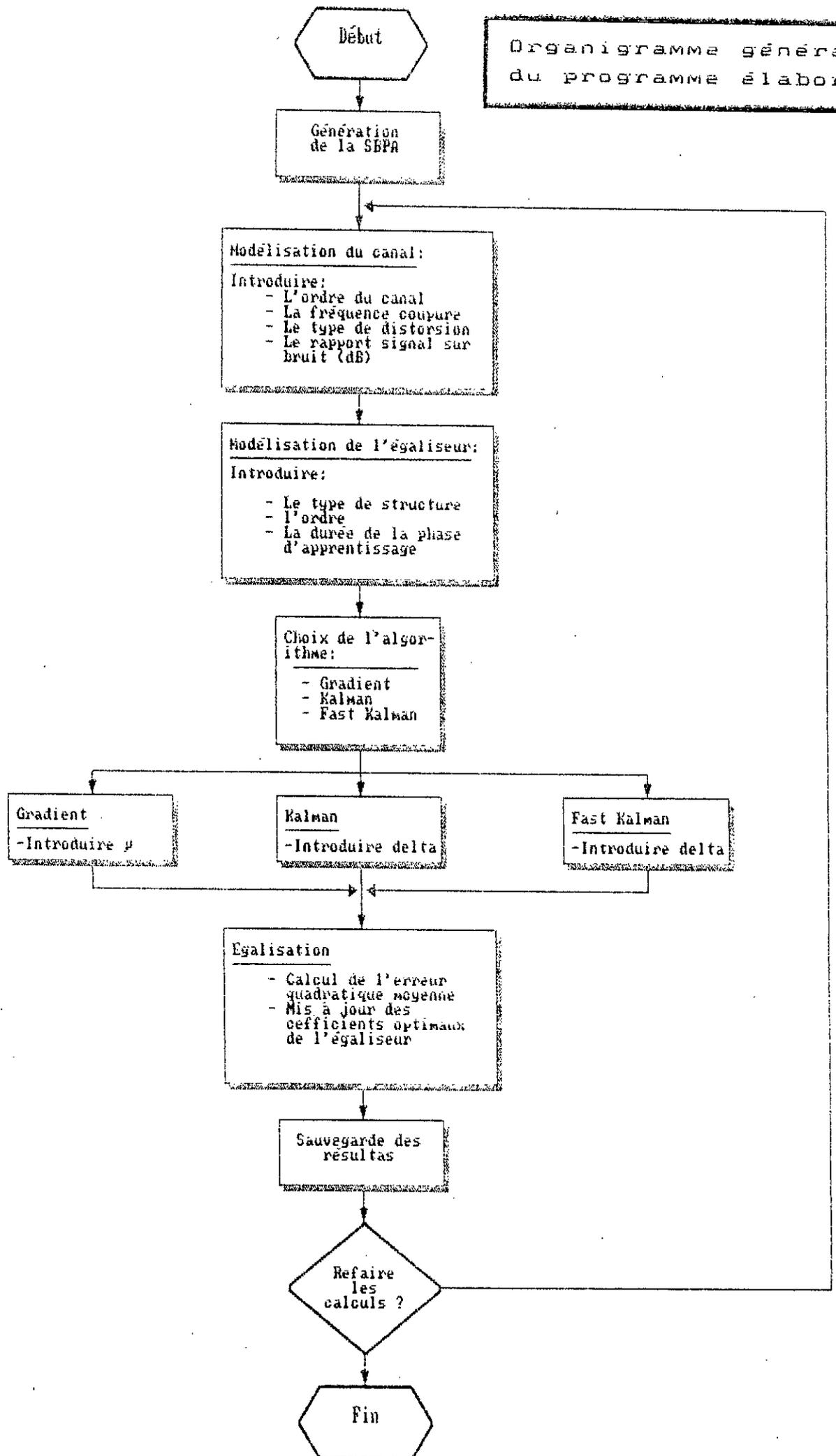
Il en résulte :

$$\begin{aligned} I' &= \frac{AB}{4} \left[h_I (kT_e - \tau + T_a + T_p) - h_I (kT_e - \tau - T_a - T_p) \right] \\ &+ \frac{AB}{4} \left[h_I (kT_e - \tau + T_p + T_a) - h_I (kT_e - \tau + T_a - T_p) \right] \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} h(k) &= h_I(k) + \frac{B}{2} \left[(kT_e - \tau + T_p) - h_I (kT_e - \tau - T_p) \right] \\ &+ \frac{A}{2} \left[h_I (kT_e - \tau + T_a) + h_I (kT_e - \tau - T_a) \right] \\ &+ \frac{AB}{4} \left[h_I (kT_e - \tau + T_a + T_p) - h_I (kT_e - \tau - T_a - T_p) \right] \\ &+ \frac{AB}{4} \left[h_I (kT_e - \tau + T_p - T_a) - h_I (kT_e - \tau + T_a - T_p) \right] \end{aligned}$$

Annexe B



REFERENCES

- [1] M. BELLANGER.
"Analyse des signaux et filtrage adaptatif"
Edition Masson, 1987.
- [2] M. BELLANGER.
"Traitement numérique du signal"
Edition Masson, 1988.
- [3] J.N. CIOFFI, T. KAILATH.
"Fast recursive least square transversal filters for
adaptive filtering"
IEEE trans. , Vol. ASSP-32, Avril 1984, pp. 304-337.
- [4] C.F.N. COWAN, P.M. GRANT.
"Adaptive filters"
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1985.
- [5] D.D. FALCONNER, L. LJUNG.
"Application of Fast Kalman estimation to adaptive
equalization"
IEEE trans. , Vol. COM-26, October 1978, pp. 1439-1446.
- [6] C. FOULARD, S. GENTIL, J.P. SANDRAZ.
"Commande et régulation par ordinateur numérique"
Edition Eyrolles, 1987.
- [7] A. GERSHO.
"Adaptive equalization of highly dispersive channels"
Bell Syst. Tech. J., Vol. 48, January 1969, pp. 55-77.
- [8] A. GIORDANO.
"Least square estimation with applications to digital
signal processing"
John Wiley & Sons, 1985.
- [9] D. GODARD.
"Channel equalization using a Kalman filter for Fast data
transmission"
IBM J. Research and Development, Vol. 18, May 1974, pp.
267-273.
- [10] S. HAYKIN.
"Communication systems"
John Wiley & Sons, 1983.
- [11] S. HAYKIN.
"Adaptive filter theory"
Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J 1986.

- [12] **B.P.LATHI.**
"Modern digital and analog communication systems
HRW series in electrical and computer engeneering"
M.E Van Valkenburg series, Editor 1983.
- [13] **M.KUNT.**
"Traitement numérique des signaux"
Dunod 1981.
- [14] **L.LJUNG, T.SÖDERSTRÖM.**
"Theory and practice of recursive identification"
The MIT press, Cambridge Massachusetts. London, England
1985.
- [15] **R.W.LUKEY.**
"Techniques for adaptive equalization of digital
communication"
Bell Syst. Tech. J., Vol-45, February 1966, pp. 255-286.
- [16] **C.MACCHI, J.P.JOUANNAUD, O.MACCHI.**
"Rcepteurs adaptatifs pour la transmission de données à
grande vitesse"
Annales des Télécommunications, CNET, tome 30, N° 9-10
1975.
- [17] **C.MACCHI, J.F.GUILBERT.**
" Transport et traitement de l'information dans les
réseaux et systèmes téléinformatiques et télématiques"
Edition Dunod 1987.
- [18] **M.S.MUELLER.**
"Least-squares algorithms for adaptive equalizers"
Bell Syst. Tech. J., Vol.60, October 1981, pp. 1905-1925.
- [19] **M.J.MILLER, S.AHMED.**
"Digital Transmission Systems and Networks"
Volume 1, Computer Science Press, 1987.
- [20] **S.QUIRECHI.**
"Adaptive equalization"
Advanced digital communication systems and signal
processings.
Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J 1987.
- [21] **J.SALZ.**
"Optimum mean square decision feedback equalizer"
Bell Syst. Tech. J., Vol.52, October 1973, pp.1341-1373.
- [22] **G.UNGERBOECK.**
"Theory of the spead of convergence in adaptive
equalizers for digital communication"
IBM J. Research and Development, Vol. 16, November 1972,
pp. 546-555.

