

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

École Nationale Polytechnique
Département d'Électronique
Laboratoire des Dispositifs de Communication
Et de Conversion Photovoltaïque



Thèse de Doctorat

Présentée par **KAMRI Djekidel**

Magister en Électronique de l'École Nationale Polytechnique d'Alger

Thème

STABILITÉ ET STABILISATION PRATIQUE DES SYSTEMES AFFINES PAR MORCEAUX APPLICATIONS AUX CONVERTISSEURS DC/DC

Soutenue Publiquement le 20 Avril 2014

Membre du Jury :

Mr. AIT CHEIKH Mohamed Salah ...Professeur à l'ENPPrésident
Mr. CHERIF Larbes Professeur à l'ENPRapporteur
Mr. BOUDJEMA FaresProfesseur à l'ENPExamineur
Mr. MOKRANI Lakhdar.....Professeur à l'Université de LaghouatExamineur
Mme. BARAZANE Linda..... Professeur à l'USTHB..... Examinatrice
Mr. GUESMI KamelMaître de Conférences à l'Université de Djelfa Examineur

(PWA)

(Bonds Graph) (PWA) (Lyapunov) (BMI)

(LMI) (Lyapunov) . Matlab ()

(Luenberger)

BMI , LMI (PWA)

Résumé:

L'objectif de notre projet de thèse concerne l'observation et la commande d'une classe importante de systèmes hybrides. Plus particulièrement nous nous sommes intéressés aux systèmes commutés affines par morceaux PWA (Piecewise Affine Systems) et une commande par logique de commutation qui dépend de l'état du système. Le problème majeur avec ces systèmes est que les sous-systèmes de ces derniers n'ont aucune raison de partager le même équilibre. Ce qui nous a motivé à opter pour une stabilisation par commutations plutôt pratique dont le principe est de ramener la trajectoire du système à une petite balle autour du point désiré et de pouvoir la garder aux alentours. Si l'idée de stabilisation pratique est veille, l'approche proposée est tout à fait nouvelle dans la formulation du problème et les développements associés qui permettent de calculer exactement les coordonnées du point de convergence et par suite la distance par rapport au point de fonctionnement désiré et donc l'erreur commise. La formulation BMI (Inéquations Matricielles Bilineaires) qui sous certaines conditions peut être transformée en LMI (Inéquations Matricielles Linéaires) permet d'utiliser les algorithmes existants (ex: toolbox LMI du Matlab) pour la résolution du problème de stabilisation de n'importe quel système PWA. Comme la bonne maîtrise de la commande d'un système est fonction des informations disponibles sur ce dernier, alors une reconstruction d'informations non mesurables au moyen de celles disponibles est nécessaire; c'est le rôle du multi-estimateur que nous avons proposé pour compléter la méthodologie. Le schéma proposé dans ce contexte est une simple extension de l'estimateur de Luenberger aux systèmes multi-affines mais une fois associé à notre approche de contrôle, permet d'obtenir de bonnes performances. L'application de l'approche de commande proposée ainsi que le multi-estimateur associé aux différentes topologies de convertisseurs DC/DC a donné lieu à de très bons résultats de simulation.

Mots clé: BMI; Convertisseurs DC-DC; Commande par commutations; LMI; Observateur Hybride; Stabilisation Pratique; Système Commutés; Systèmes Hybrides; Systèmes PWA.

Abstract:

The objective of this thesis is to develop a control and observation technique for the most known sub-class of switched and hybrid systems named PieceWise Affines (PWA) Systems. We have to note that for these systems, the sub-models do not generally share any equilibrium. Interested in the stabilization by switching, we propose a general systematic switching practical stabilization method for PWA switched systems around an average equilibrium by developing a computational technique for the synthesis of a suitable observer based control. Based on the Lyapunov theory, we will present a method that drives asymptotically system trajectory into a ball centered on the desired non-equilibrium reference. The design control searches for a single Lyapunov-like function that satisfies practical quadratic stabilization properties in an appropriate continuous state space partition. Apart from the novelty of the approach and its on-line applicability, the method provides a way to drive the system states into a quantifiable small ball around the nonequilibrium desired reference and ensure the stabilization with a precise error. To complete the method, a simple state estimation procedure is introduced to avoid states measurements, the technique is based on Luenberger-like observer structure. Our main motivation for this direction is the control of power electronic switching circuits where the affine term in the PWA model is essentially due to the input voltage, the work will be carried out directly on the Piece-Wise Affine (PWA) convincing representation obtained from the Bonds Graph modeling method. Satisfactory simulation results are obtained for several examples and some switching devices.

Keywords: DC-DC converters; BMI; Hybrid Observability; Hybrid Systems; LMI; Practical Stabilization; PWA Systems; Switching Control; Switching Systems.

Remerciements

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse ont été effectués au département d'électronique de l'École Nationale Polytechnique d'Alger ENP en collaboration avec le laboratoire d'Automatique des Systèmes Hybrides ASH du SUPELEC Rennes France. Je dois remercier le responsable de l'équipe M. Jean Buisson professeur au Supelec de m'avoir accueilli au sein du groupe et du temps qu'il m'a consacré avec M. Romain Bourdais membre de l'équipe. Je les remercie de l'intérêt qu'ils ont donné à mon travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mon encadreur M. Cherif Larbes, professeur à l'École Nationale Polytechnique d'Alger pour ses précieux conseils et la confiance qu'il m'a accordée.

Je remercie Mr. Ait Cheikh Mohamed Salah. Professeur à l'ENP de nous avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse. Je remercie également messieurs : Boudjema Fares, Mr. Mokrani Lakhdar, Mr. Guesmi Kamel ainsi que Mme Barazane Linda pour leur participation au jury et du temps consacré à la lecture de ce manuscrit.

Mes remerciements vont également à tous les responsables et les enseignants de l'ENP et en particulier ceux du département d'Électronique et d'Électrotechnique pour leurs collaborations et leurs soutiens aux départements d'Électrotechnique et d'Électronique de l'Université de Laghouat auquel j'appartiens.

*À la Mémoire de mes Parents,
Pour ma Femme, Pour mes Enfants,
Pour toute ma grande Famille, Pour tous mes Amis*

Résumé étendu

L'objectif de notre projet de thèse concerne la commande par commutations et l'observation d'une classe importante de systèmes non linéaires connue sous le nom générique systèmes hybrides. Ces derniers sont caractérisés essentiellement par l'interaction de leurs dynamiques continues avec des grandeurs discrètes ou événementielles. Plus particulièrement nous nous sommes intéressés aux systèmes commutés affines par morceaux PWA (PieceWise Affin Systems) et une commande par logique de commutation qui dépend de l'état du système. En général, le formalisme hybride permet de représenter les systèmes complexes par une collection de sous-systèmes où la commutation entre ces sous-systèmes est provoquée par son évolution ou imposée de l'extérieur. Ce type de modélisation est très important et couvre de nombreux systèmes physiques et situations réelles tels que les convertisseurs d'énergie DC/DC qui constituent une des applications visées dans cette thèse. Ces derniers présentent un grand souci en Génie Électrique et Automatique, que ce soit aux niveaux commande (convertisseurs de faible puissance) et équilibrage des tensions de capacité flottantes (convertisseurs multicellulaires) ou bien au niveau de l'estimation des tensions aux bornes des capacités. En effet, l'implantation de capteurs de tensions pour ces circuits est généralement une opération très complexe et coûteuse voire inaccessible dans le cas des convertisseurs intégrés.

Notre contribution dans ce domaine est double, d'une part en proposant une approche pratique originale de commande par commutations dont l'efficacité a été prouvée pour les systèmes commutés PWA en général. D'autre part, en développant une technique pour la synthèse d'observateur commuté parfaitement adaptée aux systèmes commutés PWA et en particulier ceux issus de la modélisation des convertisseurs DC/DC.

Sachant qu'une déstabilisation globale d'un système commuté peut être rencontrée lors de la commutation entre sous-systèmes stables et réciproquement une stabilisation du système global commuté peut être obtenue par une judicieuse commutation entre sous-systèmes instables. Par conséquent, l'étude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes commutés constitue des questions centrales à investiguer dans cette thèse.

Le problème majeur avec les systèmes multi-affines est que leurs sous-systèmes n'ont aucune raison de partager le même équilibre, et la régulation se fait généralement autour de point de fonctionnement qui ne représente pas un équilibre commun auquel la convergence au sens stricte ne peut être assurée. Ce qui nous a motivé à opter pour une stabilisation par commutations plutôt pratique dont le principe est de ramener la trajectoire du système à une petite balle autour du point désiré et de pouvoir la garder aux alentours. Si l'idée de stabilisation pratique est vieille, l'approche proposée est tout à fait nouvelle dans la formulation du problème et les développements associés qui permettent de calculer exactement les coordonnées du point de convergence et par suite la distance par rapport au point de fonctionnement désiré et donc l'erreur commise. A notre connaissance, cela n'a jamais été fait auparavant. Le caractère général est un autre avantage de l'approche proposée, sa formulation BMI qui sous certaines conditions peut être transformée en LMI, permet d'utiliser les algorithmes existants (ex : toolbox LMI du Matlab) pour la résolution du problème de stabilisation de n'importe quel système PWA.

Comme la bonne maîtrise de la commande d'un système est fonction des informations disponibles sur ce dernier, alors une reconstruction d'informations non accessibles au moyen de celles disponibles est nécessaire voire indispensable ; c'est le rôle du multi-estimateur que nous avons proposé pour compléter la méthodologie. Le schéma proposé dans ce contexte est une extension de l'estimateur de Luenberger aux systèmes commutés PWA. L'efficacité de cette technique d'estimation a été confirmée et conduit à de bonnes performances une fois associée à notre approche de contrôle des commutations.

Table des matières

Table des matières

Introduction générale	1
Chapitre I : Mathématiques préliminaires	5
1.1. Introduction	5
1.2. Fonctions et ensembles convexes	7
1.3. Inégalités matricielles linéaires.....	13
1.4. Optimisation convexe	16
1.5. Résolution numérique des LMI	18
Chapitre II : Introduction aux systèmes dynamiques hybrides	21
2.1. Notions de systèmes dynamiques continus	22
2.1.1. Stabilité des systèmes dynamiques continus	24
2.1.2. Notion de stabilité pratique des systèmes dynamiques	27
2.1.3. Inclusions différentielles.....	29
2.2. Systèmes à événements discrets	30
2.3. Systèmes hybrides.....	31
2.3.1. Exemples 1 : Boite de vitesses automatique.....	33
2.3.2. Exemples 2 : Convertisseur DC-DC Buck-Boost	35
2.3.3. Séquence d'exécution dans un système hybride :.....	36
2.3.4. Bons comportements dans les systèmes hybrides.....	39
2.3.5. Stabilité d'un équilibre dans un système hybride	43
Chapitre III : État de l'art sur les systèmes à commutations	44
3.1. Systèmes à champs vecteurs discontinus	45
3.2. Systèmes à commutations	48
3.3. Stabilité des systèmes commutés	49
3.3.1. Approche par les inclusions différentielles	50
3.3.2. Approche hybride :.....	53
3.3.2.1. Stabilité pour un signal de commutation arbitraire.....	55
3.3.2.2. Stabilité conditionnelle.....	58
a). Restrictions dans le domaine temporel	59
b). Restrictions dans l'espace d'états	59
i. Fonction de Lyapunov multiple.....	59
ii. Partition de l'espace des états	61
3.4. Systèmes commutés multi-affines (PWA):.....	63
3.5. Stabilisation Quadratique:.....	67

Chapitre IV : Stabilisation pratique et Observateurs Commutés des Systèmes PWA	71
4.1. Stabilisation pratique et discussion des travaux antérieurs:.....	73
4.1. 1. Stabilisation pratique : approche de Zhai & Michel	73
4.1. 2. Stabilisation pratique : approche de Xuping Xu et Zhai.....	74
4.1. 3. Comparaison des approches de stabilisation :.....	75
4.2. Stabilisation pratique : première variante de l'approche proposée:.....	76
4.3. Stabilisation pratique : deuxième variante de l'approche proposée :	86
4.4. Multi-estimateur d'états du système :.....	90
4.5. Exemple illustratifs	93
4.5.1. Exemple de systèmes théorique à deux modes	93
4.5.2. Exemple de systèmes à saturation (à trois modes).....	100
4.6. Conclusion.....	104
Chapitre V : Application en Électronique de Puissance	105
5.1. Présentation générale des convertisseurs DC/DC à commutations.....	106
5.2. Approche de modélisation énergétique.....	108
5.3. Méthode de modélisation explicite exacte.....	111
5.3.1. Topologie à un seul commutateur.....	111
5.3.2. Topologie à plusieurs commutateur.....	112
5.3.3. Commande des convertisseurs multicellulaires.....	113
5.4. Application de l'approche de commande/observation pratique aux convertisseurs	115
Exemple 5.1 : Convertisseur Buck non idéal.....	115
Exemple 5.2 : Convertisseur Boost non idéal.....	121
5.5. Analyse des exemples de convertisseurs étudiés	124
Exemple 5.3 : Convertisseur bicellulaire.....	125
Exemple 5.4 : Convertisseur multicellulaire	128
5.6. Conclusion.....	134
Conclusion générale et perspectives	135
Bibliographies	138

Notations et acronymes :

- SDC : Systèmes dynamiques continus.
SC : Systèmes commutés ou à commutations.
SCL : Systèmes commutés linéaires.
SED : Systèmes à évènements discrets.
SDH : Systèmes dynamiques hybrides.
PWA : Systèmes multi-affines ou affines par morceaux « Piecewise Affin systems »
MLD : Système hybride en temps discret (à logique mixte)
LMI : Inéquations matricielles linéaires « Linear Matrix Inequality »
BMI : Inéquations matricielles bilinéaires «Bilinear Matrix Inequality »
NMI : Inéquations matricielles non linéaires «Nonlinear Matrix Inequality »
LP : Programme linéaire.
QP : Programme quadratique.
SDP : Programme semi-défini.
CQLF : Fonction de Lyapunov quadratique commune.
MQLF : Fonction de Lyapunov quadratique multiple.
EDD : Équation différentielle discontinue.
DC/DC : Convertisseur continu/continu.
CCM : Mode de conduction continue pour le convertisseur DC/DC.
DCM : Mode de conduction discontinue pour le convertisseur DC/DC.
- $B(x_0, \varepsilon)$: Balle de centre x_0 et de rayon ε .
 S, \bar{S} : Ensemble convexe et sa fermeture.
 \mathcal{M} : Ensemble affine.
 \mathcal{X} : domaine de l'espace \mathbb{R}^{n+1} défini par : $\mathcal{X} = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} | z_{n+1} = 1\}$.
 Ω_i : Région de l'espace \mathbb{R}^{n+1} définie par $x^t Q_i x \geq 0$.
 $\Omega_{i,j}$: L'intersection des deux régions Ω_i et Ω_j .
 $\partial\Omega_i$: Fermeture de la région Ω_i .
- $\gamma_\lambda(A_1, A_2)$: Combinaison convexe de A_1 et A_2 .
 x^* : Point d'équilibre d'un système.
 $x_{ei} = x_i^{eq}$: Point d'équilibre des dynamiques du mode i .
 x_a : Équilibre moyen du système commuté.
 z^* : Point de fonctionnement désiré (ramené à l'origine) dans l'espace augmenté.
 z^{**} : Point de convergence (ramené à l'origine) dans l'espace augmenté.
 $f_i(x)$: Champs vecteur (associée aux dynamiques du mode i) supposé Lipschitz continu.
 $\mathcal{F}(x(t))$: Une inclusion différentielle $\{f_i(x), i = 1, m\}$
 $\sigma(t)$: signal de commutation continu par morceaux.
 f_s : Fréquence des commutations.
 \mathbb{I} : Ensemble des indexes des modes $\mathbb{I} = \{1, \dots, m\}$.
 \mathbb{I}_0 : Ensemble des indexes des modes dont le terme affine est nul i.e. $\mathbb{I}_0 = \{i \in \mathbb{I} | b_i = 0\}$.
 \mathbb{I}_1 : Ensemble des indexes des modes dont le terme affine est non nul i.e. $\mathbb{I}_1 = \{i \in \mathbb{I} | b_i \neq 0\}$.
- $V_i(x)$: fonction d'énergie associée aux dynamiques du mode i .
 $\dot{V}_i(x)$: Dérivée temporelle de $V_i(x)$ le long de la trajectoire du mode i .
 $\emptyset(x) = 0$: Surface de séparation entre régions.
 $S_{i,j}$: Surface de commutation entre régions.
 $V(0)$: Voisinage de l'origine.

Liste des Figures

2.1. Exemple théorique d'un système hybride.....	33
2.2. Automate hybride du fonctionnement de la boîte de vitesse automatique.....	34
2.3. Circuit électrique simplifié du Buck-Boost	35
2.4. Schématisation du fonctionnement hybride du Buck-Boost.....	35
2.5. Schématisation du temps hybride.....	37
2.6. Exemple d'exécution dans un système hybride.....	38
2.7. Exemple de système hybride bloquant et non déterministe.....	39
2.8. Exemple de système hybride avec des commutations infiniment rapides.....	41
2.9. Schématisation hybride de la balle bondissante.....	42
2.10. Représentation de la position verticale et de la vitesse de la balle.....	42
3.1. Solution au sens de Carathéodory (à gauche) et au sens de Filipove (à droite).....	44
3.2. Schématisation hybride de système avec une seule discontinuité.....	46
3.3. Fonction multiple de Decarlo.....	60
3.4. Fonction multiple de Ye & M.....	60
4.1. Schématisation de la stabilité pratique.....	77
4.2. Construction simple en dimension deux (approche 1).....	81
4.3. Construction simple en dimension deux (approche 2).....	89
4.4. Exemple théorique : Différentes exécutions (trajectoires) à partir de différentes conditions initiales	93
4.5. Évolutions des états X_1 & X_2 en fonction du temps sous l'approche de stabilisation à partir de conditions initiales nulles	94
4.6. Courant d'inductance et son estimé en (a), tension de sortie et son estimé en (b); avec des conditions initiales du convertisseur différentes de celles de l'observateur	95
4.7. Différentes trajectoires et leurs zoom sous l'approche de stabilisation	96
4.8. Superposition des trois exécutions de la Fig. 4.7	97
4.9. Exécution à une très faible précision pour des conditions initiales nulles	98
4.10. Exécution à une très faible précision en démarrant de condition initiale à l'intérieur de la balle de convergence.....	99
4.11. Système asservi à saturation.....	100
4.12. Stabilisation des états à l'origine et leurs estimés correspondants pour des conditions initiales du système différentes de celles du multi-observateur.....	102
4.13. Trajectoire du système à saturation sans l'utilisation de l'observateur et à partir de conditions initiales nulles	103
4.14. Passage en cycle limite pour une commande basée sur les sorties du système en (a) et commande basée sur les sorties du multi-observateur en (b).....	103
5.1. Topologies usuelles de convertisseurs à commutations, Boost en a), Buck-Boost en b), Buck en c) et le convertisseur multicellulaire en d).	107
5.2. Topologie du convertisseur multicellulaire	112
5.3. Circuit électrique du convertisseur Buck non idéal	116

5.4-a. Première exécution : Courant d'inductance i_L (a), tension de sortie V_0 (b) et le rapport cyclique en (c) pour le Buck à partir de conditions initiales nulles.....	118
5.4-b. Première exécution : Courant d'inductance i_L (a), tension de sortie V_0 (b) et le rapport cyclique en (c) pour le Buck à partir de conditions initiales nulles.....	119
5.4-c. Première exécution : Courant d'inductance i_L (a), tension de sortie V_0 (b) et le rapport cyclique en (c) pour le Buck à partir de conditions initiales nulles.....	120
5.5. Circuit électrique du convertisseur Boost non idéal	121
5.6. Courant d'inductance et son estimé en (a), tension de sortie et son estimé en (b); avec des conditions initiales du système différentes de celles de l'observateur (test en boucle ouverte de l'observateur).....	122
5.7. Courant d'inductance en (a), tension de sortie en (b); lorsque la stabilisation est basée sur les états estimés (test en boucle fermée de l'observateur).....	123
5.8. Circuit Simplifié électrique du convertisseur à deux cellules	125
5.9. Courant d'inductance et son estimé en (a), tensions V_C et son estimé en (b) pour des conditions initiales nulles	126
5.10. Fig. 5.10 : Trajectoire de la sortie du convertisseur bicellulaire sans l'utilisation d'observateur (a), stabilisation à base du multi-estimateur lorsque les deux systèmes partent de la même condition initiale nulle en (b) et en (c) lorsque le convertisseur part de zéro alors que l'observateur part du point désiré (60 750) ^t	127
5.11. Circuit Simplifié électrique du convertisseur multicellulaire	128
5.12. Courant d'inductance i_L en fonction des tensions v_1 et v_2 pour différentes conditions initiales	128
5.13. Courant d'inductance (a), tensions v_1 (b) et v_2 (c) pour des conditions initiales nulles	130
5.14. Variations de (+80% à $t=0.035$) sur E & R sans effet sur le courant et les tensions	131
5.15. Courant d'inductance pour des variations de 50% de E&R(à $t=0.05$ pour une référence de $\begin{pmatrix} 4 \\ 80 \\ 30 \end{pmatrix}$).....	132
5.16. Sorties du convertisseur multicellulaire commandé à base du multi-estimateur pour les mêmes conditions initiales nulles (test en boucle fermée).....	132
5.17. Sorties du convertisseur multicellulaire /multi-estimateur pour différentes conditions initiales (test en boucle ouverte).....	133
5.18. Trajectoire de la sortie du convertisseur multicellulaire commandé à base du multi-estimateur lorsque les deux systèmes partent de conditions initiales différentes	134

Références liées aux travaux de thèse :

Les travaux effectués durant cette thèse ont donné lieu aux publications suivantes :

Articles dans des Journaux internationaux:

1. D. Kamri, R. Bourdais, J. Buisson, C. Larbes: Practical Stabilization for Piecewise-Affine Systems: A BMI Approach, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* (2012), 6, 859-870. “**Elsevier avec Impact factor 2012: 1.69**”
2. D. Kamri, C. Larbes: Observer Based Control for DC/DC converters: Practical Switching Control, *Arab Journal of Science and Engineering (AJSE)*, Arab J Sci Eng (2014), 39, 4089–4102. “**Springer avec Impact factor 2012: 0.39**”

Conférences internationales avec comité de lecture:

1. D. Kamri , C. Larbes: “Observer-based control for Boost and Buck-Boost Converter: Practical Switching Control”, ICEECA 2012, Khenchla, Algeria.

Page Blanche

Introduction générale

Introduction générale

Les systèmes dynamiques constituent un groupement de méthodologies d'études constructives des principes de compréhension des systèmes complexes. Ces méthodologies permettent d'étudier les comportements de systèmes simples et complexes de différents domaines en développant un savoir-faire multidisciplinaire et des applications spécifiques. Cette approche a été suivie par les chercheurs du monde entier pour attaquer les problèmes scientifiques liés à la technologie et la science de la vie ainsi que les sciences économiques et humaines.

En technologie, et en particulier en automatique, la théorie de la commande s'occupe du développement de méthodologies pour la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes dynamiques. Pour des raisons de sécurité et de temps d'expérimentations, ces développements ont été appuyés par des outils de simulation de plus en plus performants en exploitant la disponibilité de calculateurs plus puissants. Aujourd'hui, on se permet d'implémenter des techniques plus avancées et de prendre en charge des modèles mathématiques plus complexes en simulation.

Afin d'être bénéfique à l'industrie et participer à l'amélioration de la productivité, la tâche de conception des systèmes de commande doit disposer de modèles qui reflètent au mieux les dynamiques du système réel à étudier. Cela évoque le passage par l'incontournable phase de modélisation des procédés physiques. L'objectif de cette première étape est d'établir des relations entre les différentes variables caractéristiques du procédé et trouver une représentation mathématique rigoureuse du comportement du processus dans un domaine de fonctionnement donné. L'avancée technologique, la complexité des fonctionnements envisagés des systèmes mis en jeu ainsi que la réclamation de plus en plus de hautes performances, font de cette phase une étape fondamentale pour l'obtention de modèles valides pour les systèmes à étudier. En fonction des objectifs et des connaissances a priori disponibles sur le processus à étudier, différents modèles peuvent être envisagés en vue de représenter son comportement.

En automatique, les modèles de systèmes physiques sont généralement classés selon que le modèle représente des dynamiques continues ou des événements discrets. C'est l'évolution temporelle et la nature des variables utilisées dans la description du système qui font cette distinction. Les systèmes à dynamiques continues SDC sont caractérisés par des grandeurs physiques dont l'évolution est fonction continue du temps, leur étude fait appel à la théorie des équations différentielles. Les systèmes à événements discrets SED sont décrits par des grandeurs physiques ne pouvant prendre qu'un nombre fini de valeurs, ses éléments constitutifs sont caractérisés par deux états (tout ou rien) pouvant être gérés par l'algèbre de Boole. Leur étude se fait au moyen de méthodes états-transitions et la théorie des automates à états ou les réseaux de Pétri.

Cependant, la majorité des systèmes dynamiques mettent en jeu dans leur fonctionnement explicitement des variables continues et discrètes, de tels systèmes sont appelés systèmes dynamiques hybrides SDH. En plus des systèmes hybrides naturels (mouvements d'insectes, divisions et développements des cellules biologiques...etc.), certains fonctionnements de systèmes sont hybrides par nature (commande de procédés chimiques par électrovannes et pompes, déplacements de robots, unités de l'industrie automobile et la gestion du trafic aérien.etc.), d'autres qui sont continus deviennent hybrides à cause de leur système de commande qui est discrète. Cette interaction du continu/discret est bien connue en automatique, ce n'est que par souci de simplicité d'analyse et de synthèse qu'on considérait indépendamment ces deux types de systèmes jusqu'aux années 90 en favorisant l'un ou l'autre caractère. En effet, certaines approches de commande comme la commande à relais, la commande à structure variable, la stabilisation des systèmes non linéaires par commutations

et l'emploi de correcteur programmable considéraient déjà la présence de ces deux dynamiques. L'objectif du formalisme hybride est la recherche de fondement mathématique commun afin de développer des approches unifiées et systématiques pour l'étude de ces systèmes. Du côté automatique, une attention particulière a été donnée à la recherche de représentation unifiée de modèles hybrides [18][23][24][31][52], au dégagement de propriétés fondamentales telles que l'existence et l'unicité de solution et à l'extension des concepts liés à l'analyse de la stabilité et la synthèse de commande [49][50][54][63][65][82]. Alors que les questions d'atteignabilité et de vérification des systèmes hybrides ont été largement investiguées par les chercheurs de la communauté des informaticiens où le caractère évènementiel est légèrement favorisé [3][22][73]. Depuis alors, de nombreuses théories et outils mathématiques dédiés aux systèmes hybrides ont été développés et constituent actuellement une plateforme commune à toutes les méthodes pratiquées auparavant sur les systèmes dynamiques à double aspect continu-discret.

Toutefois en automatique, malgré tous ces développements, à cause de l'interaction de ces deux aspects continu-discret et la complexité des applications modernes, beaucoup de problèmes de stabilités et de stabilisations restent non résolus. La majorité des théories et des résultats bien établis ne sont pas d'application générale, elles sont développées pour des classes spécifiques de systèmes hybrides. La classe des systèmes hybrides la plus importante et qui a reçu plus d'investigations par les chercheurs automaticiens, est celle des systèmes commutés SC. Nous nous intéressons dans ce rapport de thèse à cette classe dont l'intérêt provient du fait que la plupart des mouvements et des évolutions dynamiques de phénomènes non linéaires peuvent être approximés par une collection de dynamiques simples (linéaires) associées à des lois de commutation.

Les systèmes commutés trouvent leurs applications dans de nombreux domaines technologiques tels que les systèmes mécaniques avec collisions et les circuits électriques à diodes et commutateurs. En effet, cette classe constitue un formalisme idéal pour modéliser tous les systèmes dynamiques à plusieurs échelles de temps où la partie rapide est omise pour en constituer un évènement discret qui affecte les dynamiques lentes. Généralement, les dynamiques lentes sont représentables par des modèles linéaires affines et on obtient ce qu'on appelle les systèmes commutés affines par morceaux PWA, nos travaux de thèse portent sur cette classe de systèmes hybrides qui a retenu notre attention.

Objectifs

Théoriquement, l'objectif de cette thèse est de contribuer à l'étude de la commande et l'observation des systèmes commutés linéaires SCL. Du point de vue pratique, nos travaux se focalisent sur les applications en Génie Électrique représentées par les convertisseurs statiques dont les dynamiques lentes sont linéaires affines. Par conséquent, une grande partie de cette thèse sera consacrée aux systèmes multi-affines nommés (PWA systems).

Basée sur la théorie de Lyapunov, une approche permettant de dégager des conditions générales de stabilisation pratiques sous forme d'inéquations matricielles bilinéaires BMI sera proposée pour les systèmes multi-affines PWA. Sous certaines conditions, ces BMI sont abordables par les outils de résolution des inéquations matricielles linéaires LMI du Matlab. En vue d'appliquer cette approche à retours d'états aux convertisseurs DC/DC de l'électronique de puissance, une proposition de structure appropriée de multi-observateurs qui une fois associée à l'approche de commande proposée permet d'estimer avec une grande précision les états inaccessibles aux mesures.

Organisation de la thèse :

Ce travail est organisé en 5 chapitres qui se présentent comme suit :

Chapitre 1

Le premier chapitre représente une introduction mathématique aux outils utilisés dans ce travail, en particulier les problèmes de convexité et de l'optimisation convexe sont rappelés ; une attention particulière est donnée aux inéquations matricielles linéaires (LMI) et aux algorithmes de résolution associés.

Chapitre 2

Le deuxième chapitre est une étude panoramique sur les systèmes dynamiques continus et hybrides. Après avoir passé en revue les notions de base sur les systèmes dynamiques continus, nous ferons une introduction générale aux systèmes hybrides. Dans ce chapitre d'introduction, nous avons insisté sur le bon conditionnement des formulations hybrides et la notion d'exécutions admissibles pour de tels systèmes en abordant les problèmes généraux de la stabilité et de la stabilisation de ces systèmes. Une introduction par l'exemple est adoptée pour faciliter la compréhension.

Chapitre 3

Ce troisième chapitre constitue un état de l'art sur les systèmes commutés. Un approfondissement de la question de stabilité des systèmes commutés est d'abord abordé par l'approche générale de la théorie des inclusions différentielles. Puis l'approche hybride de tels systèmes est détaillée par une présentation générale des différentes techniques développées pour l'analyse de stabilité et de la stabilisation par commutations. Une attention particulière est donnée aux systèmes PWA objet de notre travail, cela en précisant les difficultés inhérentes à la présence du terme affine. Ce dernier complique énormément la manipulation des formes quadratiques dans la formulation des questions de stabilité et de stabilisation. Ce terme affine est aussi la principale cause de l'absence d'équilibre commun dans ces systèmes, alors qu'il est bien connu que dans la régulation (stabilisation) des systèmes PWA à un point de fonctionnement qui n'est pas un équilibre commun, la convergence au sens stricte ne peut jamais être assurée. Nous abordons toutes ces questions sans toutefois proposer de solution.

Chapitre 4

Notre propre travail est présenté dans ce chapitre, il est complètement consacré à la proposition de méthodologie de stabilisation et d'observation des systèmes multi-affines PWA qui modélisent les convertisseurs DC/DC objet de notre thèse.

L'extension des méthodes de synthèse de commande employées pour les systèmes linéaires commutés n'est pas facile. Certains problèmes sont spécifiquement liés aux systèmes PWA, en particulier la formulation LMI des conditions de stabilisation n'est pas directe. En se basant sur la théorie de Lyapunov, une approche pratique de contrôle des commutations est proposée pour la stabilisation quadratique des systèmes multi-affines et la formulation LMI du problème. Cette approche permet de contourner le problème de non convergence des systèmes PWA à un point de fonctionnement désiré par une stabilisation pratique autour de ce dernier. L'approche proposée et pour la première fois, permet de chiffrer exactement l'erreur minimale commise en précisant les coordonnées du point de convergence de la trajectoire du système ce qui permet de calculer exactement la distance (l'erreur) par rapport au point désiré. Puisque l'approche proposée est classée à retours d'états, les résultats obtenus n'auront de sens pratique que si les états inaccessibles à la mesure sont bien estimés. Afin de valoriser la

méthode, un multi-observateur parfaitement adapté aux systèmes PWA et les convertisseurs DC/DC pour estimer les tensions (généralement non mesurables) aux bornes des capacités, est proposé. Aucune contraintes majeure (en particulier celle du temps de séjour) n'est posée pour l'approche de commande ni pour le multi-observateur dans les formulations BMI, ce qui fait que la méthodologie proposée est moins conservatrice que beaucoup de méthodes de commande/observation existantes.

Chapitre 5

Dans ce cinquième et dernier chapitre, nous présentons nos résultats de simulation. Nous rappelons brièvement d'abord les techniques de modélisation des convertisseurs DC/DC et en particulier le formalisme de modélisation Bond Graph et la formulation PCH (Port Control Hamiltonian) habituellement utilisé pour les convertisseurs.

Les résultats du chapitre précédent sont exploités afin de commander les convertisseurs DC/DC. Les bons résultats de simulation obtenus concernent toutes les topologies usuelles des convertisseurs à commutations, ce qui confirme la bonne démarche de commande et de l'observateur dans la méthodologie proposée.

Chapitre I

Préliminaires Mathématiques

Introduction

Ce chapitre préliminaire présente les notions mathématiques de base pour faciliter la lecture du manuscrit, il rappelle les définitions nécessaires pour la compréhension des outils mathématiques utilisés dans ce travail, la présentation de ces notions mathématiques préliminaires n'est pas forcément cohérente, elle est plutôt liée aux différents concepts entrepris dans ce manuscrit. En particulier les problèmes de convexité et de l'optimisation convexe sont rappelés ; une attention particulière est attachée aux inéquations matricielles linéaires (LMI) et aux algorithmes de résolution associés.

1.1. Préliminaires : [45]

Définition 1.1 :

Une fonction $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ où D est un ouvert de \mathbb{R}^n et contient l'origine, est dite définie positive, si $V(0)=0$ et $V(x) > 0 \quad \forall x \in D - \{0\}$; si de plus $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, elle est dite radialement non bornée.

Définition 1.2 :

Une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite propre si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $V^{-1}([0, a]) = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 \leq V(x) \leq a\}$ est compact.

Définition 1.3 :

Une fonction multivaluée \emptyset de D vers E est une application qui associe à chaque $x \in D$ un ensemble $\emptyset(x) \subset E$.

Définition 1.4 :

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$, S est un ensemble invariant pour un système si : $\forall x_0 \in S, x(t) \in S \quad \forall t \geq t_0$.

Définition 1.5 :

Soit $p > 1$, la p -norme d'un vecteur x est définie comme suit :

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |x_{(i)}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

La norme Euclidienne de x est le cas particulier pour $p=2$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i |x_{(i)}|^2}$$

Alors que la norme infinie de x est définie par :

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_{(i)}|$$

Définition 1.6 : (Matrice définie positive)

Une matrice réelle symétrique $n \times n$ A , est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Définition 1.8 : (Matrice Hurwitz)

Une matrice $n \times n$ est dite Hurwitz (stable), si toutes ses valeurs propres ont des parties réelles négatives.

1.2. Ensembles et fonctions convexes : [16] [17] [34] [62]

Définition 1.9 :

Un ensemble $S \subseteq R^n$ est dit affine, si pour tous $x_1, x_2 \in S$ et pour tout $\theta \in R$, nous avons $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in S$ i.e. une ligne passant par deux points de S est complètement dans S .

Définition 1.10 :

Soient $S_1 \subseteq R^n$ et $S_2 \subseteq R^m$ deux ensembles, leur produit cartésien est donné par :

$$S_1 \times S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in R^{n+m} \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2 \right\}$$

Définition 1.11 :

Soient $S \subseteq R^n \times R^m$, la projection de S sur R^n est :

$$Proj_{R^n}(S) = \left\{ x_1 \in R^n \mid \exists x_2 \in R^m : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in S \right\}$$

Définition 1.12 :

Une boule de R^n muni de la norme Euclidienne est définie par :

$$B(x_0, \varepsilon) = \{y \in R^n \mid \|y - x_0\| \leq \varepsilon\}$$

$x_0 \in R^n$ est le centre de la boule et $\varepsilon \geq 0$ est son rayon.

Définition 1.13 :

Un ensemble $S \subseteq R^n$ est dit borné si $\exists \varepsilon < \infty, x \in R^n$ tel que : $S \subseteq B(x, \varepsilon)$.

Définition 1.14 :

Pour un ensemble $S \subseteq R^n$, son intérieur est défini par :

$$Int(S) = \{x \in S \mid \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq S\}$$

Définition 1.15 :

Une partition d'un ensemble $S \subseteq R^n$ notée $\{S_i\}_{i=1}^k$, est une collections d'ensembles $S_1, S_2, \dots, S_k, k \in N$ tel que : $\cup_{i=1}^k S_i = S, Int(S_i) \cap Int(S_j) = \emptyset, \text{ pour } i \neq j$

Définition 1.16 :

Un ensemble $S \subseteq R^n$ est ouvert si il est équivalent à son intérieur : $S \text{ ouvert} \Leftrightarrow S = Int(S)$.

Définition 1.17 :

Un ensemble $S \subseteq R^n$ est dit fermé si tout point extérieur de S possède un voisinage disjoint de S : $S \text{ fermé} \Leftrightarrow \forall x \notin S, \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap S = \emptyset$.

Définition 1.18 :

La fermeture (closure) d'un ensemble S notée \bar{S} est le plus petit ensemble fermé contenant S :

$$\bar{S} = \{\forall x \in R^n \mid \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset\}$$

Définition 1.19 :

Une combinaison convexe de points $x_1, x_2, \dots, \dots, x_k, k \in N$ est donnée par :

$$\sum_{i=1}^k \theta_i x_i, \theta_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^k \theta_i = 1$$

Définition 1.20 :

Un ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit convexe, si le segment joignant n'importe quels deux points de S est complètement dans S .

$$S \text{ convexe} \Leftrightarrow \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in S, \forall x_1, x_2 \in S, 0 \leq \theta \leq 1.$$

D'une manière générale, un ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit convexe, si quelque soit les points x_1, x_2, \dots, x_k de S , leur combinaison convexe est dans S .

$$\sum_{i=1}^k \theta_i x_i \in S, \theta_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^k \theta_i = 1$$

Propriété 1 :

L'intersection d'un nombre quelconque d'ensembles convexes est un ensemble convexe.

Propriété 2 :

L'image d'un ensemble convexe par un opérateur linéaire est un ensemble convexe.

Définition 1.21 :

La coque d'un ensemble convexe $S \subseteq \mathbb{R}^n$, noté $co(S)$ est l'ensemble convexe qui contient S et ne contient aucun ensemble qui contient S . elle peut être exprimée par :

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i x_i \mid x_i \in S: \theta_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \theta_i = 1 \right\}$$

Définition 1.22 :

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe, et soit $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est convexe si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in S \text{ et } \forall \theta \in (0,1): f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2)$$

Définition 1.23 :

Une fonction $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m, S \subseteq \mathbb{R}^n$, est dite affine s'il existe $H \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ et $K \in \mathbb{R}^m$ tel que pour tout $x \in S$:

$$f(x) = Hx + K. \quad \text{Si de plus } S \text{ est convexe alors } f \text{ est convexe (mais pas strictement).}$$

Définition 1.24 :

Une fonction $f: S \rightarrow \mathbb{R}, S \subseteq \mathbb{R}^n$, est quadratique s'il existe $Q \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in S$:

$$f(x) = x^t Q x + h^t x + k$$

Note : Si S est convexe de dimension complète alors f est convexe si et seulement si $x^t Q x \geq 0$.

Définition 1.25 :

Une fonction $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m, S \subseteq \mathbb{R}^n$ est dite affine par morceaux (PWA), s'il existe une partition $\{S_i\}_{i=1}^p$ de S avec $p \in \mathbb{N}$, des matrices $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et des vecteurs $k_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, p$, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} H_1x + k_1 & \text{si } x \in S_1, \\ H_2x + k_2 & \text{si } x \in S_2, \\ \vdots & \\ H_px + k_p & \text{si } x \in S_p, \end{cases}$$

Définition 1.26 :

Un ensemble quadratique est de la forme suivante :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | x^t Q x + h^t x + k \leq 0\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} Q & h \\ h^t & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0 \right\}$$

$Q \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{R}$

Définition 1.27 :

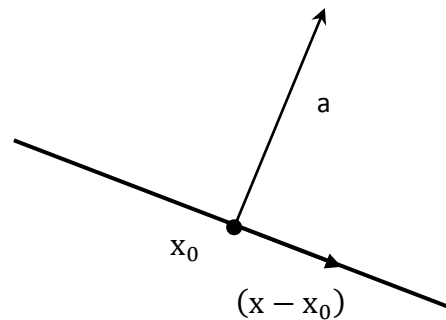
Un demi-plan (hyperplan) dans \mathbb{R}^n est un ensemble de la forme :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n | a^t x = b\}, \quad a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0_n, b \in \mathbb{R}$$

Ou équivalamment :

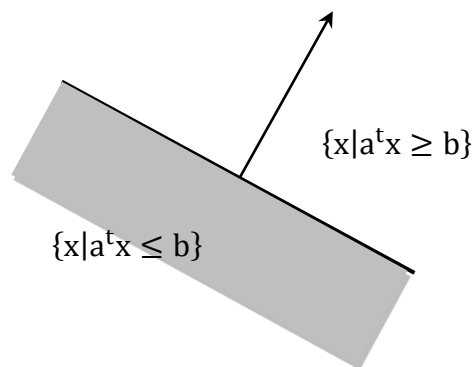
$$H = \{x \in \mathbb{R}^n | a^t (x - x_0) = 0\}, \quad b = a^t x_0$$

Où a est le vecteur normal au plan.



Un hyperplan est un ensemble affine (dimension $(n-1)$) et convexe, il divise l'espace \mathbb{R}^n en deux demi-espaces ouverts.

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n | a^t x - b < 0\} \quad \text{et} \quad H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | a^t x - b > 0\}$$



L'intersection d'un nombre fini d'hyperplan est un ensemble affine :

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

Définition 1.28 : (Polyèdre)

L'intersection définie par un nombre fini de demi-espaces est un polyèdre (ensemble convexe)

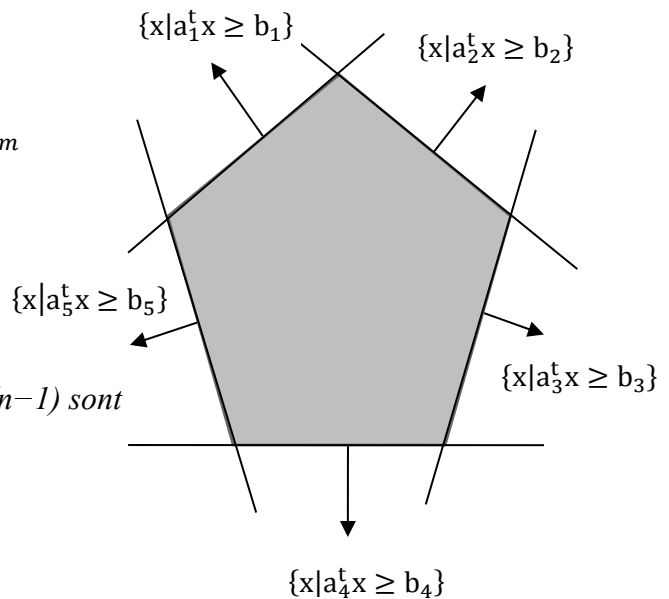
$$P = \{x \in R^n | a_i^t x - b_i < 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^m [a_i^t x - b_i < 0]$$

$$= \{x \in R^n | Ax - b < 0\}, A \in R^{m \times n}, b \in R^m$$

D'autre part : $\bar{P} = \bigcap_{i=1}^m [a_i^t x - b_i \leq 0]$

Où $F = P \cap \{x \in R^n | a_i^t x = b_i\}$ est appelée face du polyèdre ; faces de dimension 0, 1 et (n-1) sont appelées « vertiges », « edges » et « facets ».



Définition 1.29 : (Polytope)

Un polytope est un polyèdre fermé et borné où chaque point peut être représenté par une combinaison convexe de ses sommets. Il représente donc la coque de ses points sommets, cette représentation est appelée v-représentation qui a l'avantage d'être décrite par des hyperplans.

$$\mathcal{P} = co(\{v_1, v_2, \dots, v_{nv}\}),$$

Beaucoup d'algorithmes d'optimisation sont basés sur la représentation polytopique ou ellipsoïdale des régions d'espace.

Définition 1.30 : (Ellipsoïde)

Un ellipsoïde peut être défini de différentes manières, nous retiendrons les trois formes ci-dessous où le passage entre ces deux représentations est possible.

Un ellipsoïde centré en x_c , est un ensemble décrit uniquement par x_c et la matrice P :

$$\varepsilon = \{x \in R^n | (x - x_c)^t P (x - x_c) \leq 1\}, \quad P^t = P > 0$$

Ou équivalamment, un ellipsoïde peut être décrit par une forme quadratique générale :

$$\varepsilon = \{x \in R^n | x^t P x + 2b^t x + c \leq 0\}, P^t = P > 0, b^t P^{-1} b - c > 0$$

$$\varepsilon = \left\{ x \in R^n \mid \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} P & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0 \right\}, P^t = P > 0, b^t P^{-1} b - c > 0$$

La dernière condition permet d'assurer que l'ellipsoïde ne se réduit pas à un point et ne soit pas vide. Cette représentation n'est pas unique, la multiplication par un même facteur positif de A, b et c tient toujours. En effet par identification, nous avons : $b = -Px_c$ et $c = x_c^t P x_c - 1$. Une autre manière de décrire un ellipsoïde est de considérer la déformation de la

sphère unité par une matrice Q qui est l'inverse du facteur de Sholesky de la matrice définie positive P : $Q = P^{-\frac{1}{2}}$.

$$\varepsilon = \{x = Qy + x_c | y^t y \leq 1\}, \quad P^t = P > 0$$

Le volume de l'ellipsoïde est proportionnel au déterminant de Q . Si les λ_i sont les valeurs propres de P , l'ellipsoïde admet des demi-axes de longueurs $1/\sqrt{\lambda_i}$. Puisque le déterminant de P est égal au produit de ses valeurs propres et la trace de P est égale à leur somme, ces paramètres peuvent être utilisés pour maximiser ou minimiser la taille et par conséquent le volume de l'ellipsoïde.

$$\begin{aligned} \log \det P &= \log \lambda_1 + \log \lambda_2 + \dots + \log \lambda_n \\ \text{trace } P &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \end{aligned}$$

Nous rencontrons souvent des questions d'optimisations de type min et max de ces paramètres.

Ex1 :

$$\begin{aligned} &\text{Min } \log \det P \\ &\text{tel que } \begin{cases} P^t = P > 0 \\ F(P^{-1}) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Où $F(P^{-1})$ est une contrainte LMI en P^{-1} , et donc l'optimisation est convexe en P^{-1} .

Ex2 :

$$\begin{aligned} &\text{Min } \text{trace } P \\ &\text{tel que } \begin{cases} P^t = P > 0 \\ F(P) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Où $F(P)$ est une contrainte LMI en P , et nous avons le problème d'optimisation LMI classique à critère linéaire.

Ex3 :

Problème de minimisation de la plus grande valeur propre de P ou équivalamment la minimisation de la borne supérieur sur cette valeur.

$$\begin{aligned} &\text{Min } \lambda \\ &\text{tel que } \begin{cases} \lambda I \geq P \\ P^t = P > 0 \\ F(P) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Où $F(P)$ est une contrainte LMI en P , et nous avons le problème d'optimisation LMI classique à critère linéaire.

Remarque :

En commande, on aura souvent besoin d'optimiser le volume de forme polyédrale fermée i.e. polytope, pour cette question, il n'y a pas d'expression analytique à optimiser. Le moyen le plus simple consiste à résoudre ce problème indirectement en optimisant le volume de l'ellipsoïde contenu/ contenant le polytope en question.

Par exemple, l'inclusion de l'ellipsoïde $\varepsilon = \{x = Qy + x_c | y^t y \leq 1\}$, dans le polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i^t x - b_i < 0\}$ est équivalent à $\forall i = 1, 2, \dots, m, a_i^t(Qy + x_c) - b_i \leq 0$ pour tout vecteur y tel que $y^t y \leq 1$. Ce maximum est atteint pour i tel que $y = \frac{Qa_i}{\|Qa_i\|}$ ce qui conduit aux lemmes suivants :

Lemme 1 :

L'ellipsoïde $\varepsilon = \{x = Qy + x_c | y^t y \leq 1\}$,

Est inclus dans le polyèdre $P = \{x \in R^n | a_i^t x - b_i \leq 0\}$,

Si et seulement si $\|Qa_i\| + a_i^t x_c - b_i \leq 0$

L'application du complément de Schur conduit à :

$$\begin{bmatrix} (b_i - a_i^t x_c)P & a_i \\ a_i^t & (b_i - a_i^t x_c) \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \text{ et } P = Q^{-2}.$$

Cette inéquation est facilement solvable (LMI) si x_c est connu ou nul (ellipsoïde centré à l'origine).

Lemme 2 :

L'ellipsoïde centré à l'origine $\varepsilon = \{x | x^t P x \leq 1\}$

Est inclus dans le polyèdre $P = \{x \in R^n | a_i^t x - b_i \leq 0\}$,

Si et seulement si $\begin{bmatrix} P & a_i \\ a_i^t & b_i^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$

Définition 1.31 : (Cône)

Un cône elliptique de sommet x_c est un ensemble de la forme :

$$Co = \{x \in R^n | (x - x_c)^t P (x - x_c) \leq 0\}$$

Où $P^t = P \in R^n$ possède $(n-1)$ valeurs propres positives et une valeur propre négative.

Ou après changement de variable :

$$Co = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y_n \end{pmatrix} \in R^n \mid y^t \tilde{P} y \leq y_n^2 \right\}, \quad \tilde{P} \in R^{(n-1) \times (n-1)}, \quad \tilde{P}^t = \tilde{P} > 0, y_n \geq 0$$

On peut choisir $y_n = 1$ si on désire limiter le volume du cône et en utiliser la formule du volume de l'ellipsoïde.

Régions coniques [23] :

Quelques indications sur la mise en forme quadratique de régions d'espace.

- 1) Si une région Ω_i contient l'origine et doit être délimitée par des demi-espaces, ils doivent être au moins au nombre de deux, soit la région Ω_i définie par :

$$C_1^t x \geq 0 \text{ et } C_2^t x \geq 0$$

Elle peut être décrite la forme quadratique suivante :

$$x^t Q_0 x \geq 0 \text{ avec } Q_0 = C_1 C_2^t + C_2 C_1^t \quad (1-26)$$

- 2) Si une région Ω_i ne pas contient l'origine telle que $C^t x + d \geq 0$, alors la forme quadratique correspondante est la suivante :

$$z Q_1 z^t \geq 0 \quad \text{Où } z = [x \ 1] \text{ et } Q_1 = [0_n \ C; \ C^t \ 2d]. \quad (1-27)$$

- 3) Si une région d'espace Ω_i est décrite par :

$$C_1^t x + d_1 \geq 0 \text{ et } C_2^t x + d_2 \geq 0$$

Alors, il faut prendre en considérations toutes les combinaisons des demi-espaces.

1.3. Inégalités matricielles linéaires (LMI) : [16] [25] [62] [68] [72]

Une inéquation matricielle linéaire (ou LMI selon l'acronyme anglo-saxon) est une expression de la forme :

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots \dots x_n F_n > 0 \quad (1-1)$$

Où

- $x = (x_1, x_2 \dots \dots x_n)$ est un vecteur de n nombres réels appelés variables de décision.
- $F_0, F_1, \dots \dots F_n$ est un ensemble de matrices symétriques réelles (ou complexes), donc ($F_i \in S^{m \times m}$ (ou $H^{m \times m}$)).
- Le symbole d'inéquation $>$ signifie que $F(x)$ est définie positive i.e. les principaux mineurs de $F(x)$ sont positifs.

Donc $F : \mathbb{X} \rightarrow S^{m \times m}$ (ou $H^{m \times m}$) est une fonction affine de l'espace vectoriel \mathbb{X} dans $S^{m \times m}$ (ou $H^{m \times m}$).

Pour la fonction affine qui associe à chaque x , la fonction :

$$F(x) = F_0 + T(x) \quad (1-2)$$

Où T est une transformation linéaire, si \mathbb{X} est de dimension finie n de base $(e_1, e_2 \dots \dots e_n)$ donc chaque $x \in \mathbb{X}$ peut s'écrire: $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, par suite on a :

$$T(x) = T\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j F_j, \quad F_j = T(e_j). \quad (1-3)$$

Finalement la forme (1-2) est obtenue.

LMI en automatique :

Généralement en automatique l'expression (1-1) apparaît comme fonction de variables matricielles au lieu de variables de décision scalaires i.e. $\mathbb{X} = R^{m \times m}$, un bon exemple est l'équation de Lyapunov : $F(X) = A^t X + X A + Q < 0$ où A, Q sont des matrices $R^{m \times m}$ données et X est la matrice inconnue de dimension $m \times m$. cette LMI est un cas particulier de (1-2) (tout en prenant $F_0 = 0$ et $F(X) = -A^t X - X A - Q$) en considérant une base quelconque de \mathbb{X} $(e_1, e_2 \dots \dots e_n)$, tout X appartenant à \mathbb{X} est représenté par : $X = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, ce qui donne :

$$F(X) = F\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = F_0 + \sum_{j=1}^n x_j F_j. \quad (1-4)$$

Les coefficients x_j dans le développement de X , constituent les variables de décision, leur nombre n correspond à la dimension de \mathbb{X} . Le nombre n est tel que $\text{Max}(n) = m^2$ selon la structure imposée à X , pour une matrice X symétrique de dimension $m \times m$, on aura $n = m(m + 1)/2$ éléments.

La LMI (1-4) est convexe en la contrainte x i.e. l'ensemble $\{X | F(X) > 0\}$ est convexe, elle peut prendre n'importe quelle forme spéciale et couvrir donc une grande variété de problèmes convexes.

Propriétés :

- Plusieurs LMI peuvent se transformer en une seule LMI, en effet, $F_1(x) > 0, F_2(x) > 0, \dots \dots F_k(x) > 0$ est équivalent à $\text{diag}(F_1(x), F_2(x), \dots \dots F_k(x)) > 0$.
- Transformation de congruence : pour une matrice M carrée et T non singulière, le produit T^tMT est appelé transformation de congruence de M . cette transformation ne change pas le nombre de valeurs propres négatives et positives par conséquent $M > 0$ si et seulement si $T^tMT > 0$.

Considérons une matrice $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$, M_{11} carrée et non singulière et la matrice

non singulière $T_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -M_{11}^{-1}M_{12}^t & I \end{bmatrix}$ ce qui conduit à :

$$M > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} - M_{12}^t M_{11}^{-1} M_{12} \end{bmatrix} > 0 \quad (1-5)$$

De même en considérant $T_2 = \begin{bmatrix} I & -M_{22}^{-1}M_{21}^t \\ 0 & I \end{bmatrix}$ on obtient :

$$M > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} M_{11} - M_{21}^t M_{22}^{-1} M_{21} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (1-6)$$

(1-5) et (1-6) constituent bien le puissant outil du complément de Schur qui permet de linéariser certaines inéquations matricielles non linéaires (NMI).

- LMI non strictes :

Les problèmes LMI peuvent être constitués par des LMI stricts et/ou de LMI non stricts. Généralement, lorsqu'il y a solution aux LMI stricts (celles prises en charge par le toolbox LMI du Matlab), il y a aussi solution aux LMI non stricts. De plus, lorsqu'il y a optimisation de certain critère supplémentaire, les deux valeurs optimums coïncident. Cependant, certaines LMI non strictes n'auront pas de solutions lorsqu'elles sont remplacées par des LMI strictes : Exemples :

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} \geq 0 \text{ a une solution (} P = 0 \text{) alors que } \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} > 0 \text{ n'a pas de solution,}$$

De même pour :

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ a une solution pour (} P > 0 \text{) alors que } \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} > 0 \text{ n'a pas de solution.}$$

Certaines LMI non strictes ou LMI multiple (p.ex. : LMI strictes avec contrainte additionnelle d'égalité) peuvent être transformées en une seule LMI réalisable (solvable avec le toolbox LMI du Matlab).

Exemple :

Considérons les deux LMI multiples suivantes, avec $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}$ est une fonction affine, et pour des matrices A, B et des vecteurs a, b .

$$\begin{cases} F(x) > 0 \\ Ax = a \end{cases} \quad \text{Ou} \quad \begin{cases} F(x) > 0 \\ x = Bu + b, \quad u \in \mathbb{U} \end{cases} \quad (1-7)$$

Plus généralement, ces LMI multiples peuvent être de la forme suivante :

$$\begin{cases} F(x) > 0 \\ x \in \mathcal{M} \end{cases} \quad (1-8)$$

Où \mathcal{M} est un ensemble affine de \mathbb{R}^n , cette LMI multiple peut être transformée en une seule LMI $\tilde{F}(x) > 0$ en éliminant la contrainte affine comme suit :

Tout ensemble affine peut être écrit sous la forme suivante :

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n | x = x_0 + m, m \in \mathcal{M}_0\}$$

Avec $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et \mathcal{M}_0 un espace linéaire de \mathbb{R}^n et de dimension $\dim(\mathcal{M}_0) = \tilde{n}$ ($\tilde{n} \leq n$) et soit $(e_1, e_2 \dots \dots e_{\tilde{n}})$ sa base, alors en utilisant la décomposition (1-3) la LMI (1-8) s'écrit :

$$\begin{aligned} F(x) > 0 \\ &= F_0 + T(x_0 + \sum_{j=1}^{\tilde{n}} x_j e_j) > 0 \\ &= F_0 + T(x_0) + \sum_{j=1}^{\tilde{n}} x_j T(e_j) > 0 \\ &= \tilde{F}_0 + x_1 \tilde{F}_1 + x_2 \tilde{F}_2 \dots \dots + x_{\tilde{n}} \tilde{F}_{\tilde{n}} > 0 \\ &= \tilde{F}(\tilde{x}) > 0 \end{aligned}$$

Finalemment la LMI (1-8) est équivalente à $\tilde{F}(\tilde{x}) > 0$ avec $\tilde{F}_0 = F_0 + T(x_0)$, $\tilde{F}_j = T(e_j)$ et $\tilde{x} = (x_1, x_2 \dots \dots x_{\tilde{n}})^t$ sont les coefficients de $(x - x_0)$ dans la base de \mathcal{M}_0 .

Ces propriétés sont très utiles pour la formulation des questions de stabilité et de stabilisation des systèmes commutés par des LMI à contraintes convexes.

Inégalités matricielles bilinéaires (BMI)

Les BMI représentent une généralisation des LMI, Elles sont des inéquations matricielles qui font intervenir des produits d'inconnus matricielles et scalaires ce qui complique leur résolution. Les BMI ne sont pas des problèmes convexes et peuvent avoir plusieurs solutions locales. Par conséquent, les techniques d'optimisation convexe employées pour résoudre les LMI ne sont pas applicables en général, mais selon la taille du problème en main, les techniques de gridding-up ou de changement de variables pour les variables scalaires sont toujours possibles.

LMI standards :

Parmi les problèmes les plus rencontrés, les trois problèmes suivants généralement associés aux LMI sont pris en charge par le toolbox LMI du Matlab que nous avons utilisé :

- Problème de réalisabilité ou faisabilité : il s'agit de trouver l'ensemble S des x tel que $F(x) > 0$.

La façon la plus simple d'attaquer ce problème est de chercher le vecteur x minimisant le scalaire t tel que :

$$-F(x) < tI \quad (1-9)$$

Si la valeur minimale de t est négative, alors le problème est faisable c'est-à-dire l'ensemble S n'est pas vide.

- Problème de valeurs propres (EVP, EigenValue Problems) : il consiste en la minimisation de la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique F_1 sous contraintes LMI.

$$\text{minimiser } \lambda \text{ tel que } \begin{cases} \lambda I - F_1(x) > 0 \\ F_2(x) > 0 \end{cases} \quad (1-10)$$

- Problème de valeurs propres généralisées (GEVP, Generalised EigenValue Problems) : il s'agit là de minimiser la plus grande valeur propre généralisée d'une paire de matrices F_1, F_2 sous contraintes LMI.

$$\text{minimiser } \lambda \text{ tel que } \begin{cases} \lambda F_2(x) - F_1(x) > 0 \\ F_2(x) > 0 \\ F_3(x) \end{cases} \quad (1-11)$$

Les deux derniers problèmes peuvent être considérés comme une optimisation de la forme :

$$\min_x f(x) \text{ tel que } \{F(x) > 0 \quad (1-12)$$

Différents types d'algorithmes peuvent être utilisés pour résoudre ces trois problèmes : Simplex, ellipsoïdes ou les méthodes des points intérieurs qui s'avèrent les plus efficaces (voir résolution numériques des LMI).

Complément de Schur

Le complément de Schur est une propriété qui permet de passer d'une inégalité matricielle à une autre, comme c'est déjà vu le résultat est issu directement de l'utilisation de la transformation de congruence :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x)^t \\ S(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R(x) > 0 \\ Q(x) - S(x)^t R^{-1} S(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) > 0 \\ R(x) - S(x) Q^{-1} S(x)^t > 0 \end{cases}$$

Avec $Q(x) = Q(x)^t, R(x) = R(x)^t$ et $S(x)$ sont affines en x .

S-Procédure pour des fonctions quadratiques et des inéquations non strictes :

Considérons une collection de $(m+1)$ fonctions quadratiques :

$$F_i(x) = x^t A_i x + b_i^t x + c_i, \quad A_i^t = A_i, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

On veut tester la condition : $F_0(x) > 0$ pour tout x telle que : $F_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m$.

La S-Procédure donne une condition convexe suffisante :

S'il existe $\tau_i \geq 0$ tel que pour tout $x, F_0(x) - \sum_{i=1}^m \tau_i F_i(x) \geq 0$ alors la condition est satisfaite.

Par exemple le cas pour $m=1$: S'il existe un x tel que $F_1(x) > 0$, la réciproque est vraie.

Voici une autre variante n'utilisant que des inéquations strictes et formes quadratiques (fonctions quadratiques sans constantes ni termes de linéarité) :

La condition que : $x^t A_0 x > 0, \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } x^t A_i x \geq 0, i = 1, \dots, m$.

Est vraie s'il existe $\tau_i \geq 0$ te que $A_0 - \sum_{i=1}^m \tau_i A_i > 0$.

1.4. Optimisation convexe : [17] [34] [62]

Un problème d'optimisation convexe est généralement de la forme :

$$\text{minimiser } f_0(x) \text{ tel que } \begin{cases} f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ a_i^t x = b_i, \quad i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (1-13)$$

où les fonctions $f_i(x), i = 0, \dots, m$ sont convexes et les fonctions d'égalité $g_i(x) = a_i^t x - b_i, i = 1, \dots, p$ sont affines.

On notera que l'ensemble de réalisabilité de cette optimisation est convexe puisqu'il est égal à l'intersection de m sous-ensembles convexes et de p hyperplans. Le problème restera toujours convexe si seulement la fonction objective $f_0(x)$ est concave et on désire la maximiser. Deux avantages sont à retenir de la formulation de problèmes d'optimisation en optimisation convexe :

- Il n'existe pas de minimum local pour la fonction objective, le résultat obtenu est optimum au sens global.
- De puissants outils numériques existent pour résoudre ce genre de problème en un temps raisonnable.

Heureusement, la majorité des problèmes d'optimisation en théorie des systèmes peuvent être formulés en une optimisation convexe.

Définition 1.32 : (optimum local et global)

Soit S un sous-ensemble d'un espace normé, un élément x^* est dit optimum (minimum) local d'une fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ Si $\forall x \in S, \exists \epsilon > 0$ tel que :

$$f(x^*) \leq f(x), \text{ pour tout } x: \|x - x^*\| < \epsilon$$

L'optimum est dit global si $f(x^*) \leq f(x)$, pour tout $x \in S$.

Définition 1.33 : (optimum de fonction convexe)

Si une fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors toute solution optimale locale de f est une solution optimale globale de f . si f est strictement convexe alors cette solution optimale est unique.

Programmes convexes :

Notre travail vise essentiellement la stabilité et la stabilisation des systèmes commutés et la formulation LMI de ces problèmes (donc convexe) en se basant sur la théorie de Lyapunov. Comme il est déjà connu, le seul problème avec cette théorie est l'absence de méthodes systématiques pour la recherche des fonctions d'énergies. D'autres part si on échoue de trouver de telle fonction, aucune conclusion ne peut être tirée en ce qui concerne la stabilité des systèmes. C'est dans ce cadre là qu'intervient l'optimisation convexe comme outil mathématique efficace en fournissant une méthode systématique de recherche de fonction de Lyapunov en exploitant les contraintes d'évolution du système.

D'une manière générale, l'optimisation convexe (1-13) appelée aussi programme convexe s'écrit :

$$\min f(x) \text{ tel que } x \in S \tag{1-14}$$

Où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe et l'ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est convexe.

Programmes linéaire (LP) :

Un des cas particulier des programmes convexes de type (1-14) est le programme linéaire (LP) dans lequel $f(x)$ est linéaire et l'ensemble S est exprimé par des égalités et inégalités linéaires et possède donc une structure polyédrale.

$$\min c^t x \text{ tel que } Ax \leq b \tag{1-15}$$

Où $x \in \mathbb{R}^{nx}$, $c \in \mathbb{R}^{nx}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times nx}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et m le nombre de contraintes.

Pour ce type de programme convexe, il existe des méthodes de résolutions numériques efficaces telles que les algorithmes des points intérieurs (voir section ci-après).

Programmes quadratique (QP) :

Un autre type de programme convexe largement utilisé en automatique est le programme quadratique (QP) dans lequel la fonction objective $f(x)$ est quadratique (convexe) toujours avec une structure polyédrale de l'ensemble S .

$$\min x^t Q x + c^t x / A x \leq b \quad (1-16)$$

Où $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q=Q^t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et m le nombre de contraintes.

On notera que les programmes LP sont un cas particulier des QP. De même que les LP, les programmes quadratiques peuvent être résolus en un temps polynomiale mais moins rapidement que les LP.

Programmes semi-défini (SDP) :

Un programme semi-défini est une généralisation des programmes linéaires où les contraintes d'inégalités sont remplacées par des inégalités généralisées de type LMI.

$$\min c^t x \text{ tel que } \begin{cases} F_0(x) + \sum_{i=1}^m \tau_i F_i(x) \leq 0, & i = 1, \dots, m \\ A x \leq b \end{cases} \quad (1-17)$$

Probablement c'est le type de programmes le plus exploité en automatique, un exemple typique est la formulation des questions de la stabilité et la stabilisation des systèmes linéaires et non linéaires par le concept de Lyapunov.

Dans ce travail, on évoquera parfois aussi (sans les utiliser) les programmes non convexes MILP et MIQP (Mixed-Integer Linear/Quadratic program) développés par le groupe de Morari pour la commande optimale des systèmes dynamiques sous contraintes et en particulier les systèmes hybrides.

1.5. Résolution numérique des LMI : [16] [34] [61] [65][72]

Depuis le début des années 90, les scientifiques ont reconnu que la plupart des problèmes de commande et d'optimisation peuvent se formuler en une optimisation convexe à base de LMI. Toutefois, les algorithmes de l'époque telle que l'algorithme des ellipsoïdes [développé dans les années 70] n'étaient pas efficaces pour la résolution des problèmes convexes. La taille du programme était approximativement une fonction exponentielle du nombre de paramètres, cela a conduit les gens à s'intéresser à l'algorithme rapide de [Karmarkar 1984] initialement développé en 1984 pour les programmes linéaires et son extension aux problèmes d'optimisation à contraintes LMI par [Nesterov 1988]. Depuis, plusieurs variantes et améliorations ont été proposées et l'efficacité de l'algorithme a été reconnue, l'apparition des monographies de [Nesterov & Nemirovski 1994, Boyd & al 1994] font l'apogée de la popularité des LMI et de l'algorithme des points intérieurs. Une propriété importante de la méthode des points intérieurs est leur complexité polynomiale, c'est-à-dire que le nombre d'opérations nécessaires pour résoudre un problème avec une précision donnée est une fonction du nombre d'inconnus et celui des contraintes. Plusieurs outils numériques (solveurs) à base de l'algorithme des points intérieurs sont maintenant disponibles pour résoudre les LMI, la première implémentation software a été gratuitement commercialisée comme un toolbox utilisable avec Matlab (initialement développée pour Scilab en 93) par Gahinet, El Ghaoui en 1995. Un autre solveur populaire est le SeDuMi développé par Sturm en 99 tous deux interfaçables avec le fameux outil YALMIP développé par Loftberg en 2004.

Vue le rôle important des algorithmes des points intérieurs Dans la résolution des problèmes convexes, nous donnons dans la section suivante, le principe de base de la version la plus simple de la méthode.

Méthode des points intérieurs :

D'une manière générale, pour les méthodes des points intérieurs les contraintes sont remplacées par une fonction de pénalité et l'optimisation se poursuit par résolution successive de problèmes sans contraintes. Le principe est le suivant :

Soit F une fonction affine avec $F_i = F_i^t \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et la LMI suivante :

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots \dots x_m F_m > 0 \quad (1-18)$$

Et soit $S = \{x | F(x) > 0\}$ le domaine d'une fonction convexe $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ dont on veut minimiser, ainsi le problème consiste en l'optimisation convexe suivante :

$$x^* = \inf_{x \in S} f(x) \quad \text{Ou équivalamment} \quad \begin{cases} \min_x f(x) \\ \text{tel que } F(x) > 0 \end{cases} \quad (1-19)$$

Pour résoudre ce problème i.e. trouver la/les solutions optimales, il est d'abord nécessaire d'introduire une fonction barrière \emptyset telle que :

- \emptyset est strictement convexe à l'intérieur de S
- Approche $+\infty$ pour toute séquence $\{x_n\}_1^{+\infty}$ dans S qui converge vers les points de bordure (limite) de S .

En utilisant une telle fonction barrière, notre problème d'optimisation à contrainte qui consiste à minimiser f sur tout $x \in S$ est remplacé par l'optimisation sans contrainte qui consiste à minimiser la fonction convexe (au sens stricte dans \mathbb{R}^n) suivante :

$$f_t(x) = tf(x) + \emptyset(x) \quad (1-20)$$

Où $t > 0$ est appelé paramètre de pénalité.

Le principe est de déterminer une application $t \rightarrow x(t)$ qui associe à chaque $t > 0$ un optimum $x_{\text{opt}}(t)$ de $f_t(x)$. Puis en variant t , cette optimisation est généralement résolue par la technique itérative de Newton-Raphson pour approximer le minimum x_{opt} de $f_t(x)$. Ainsi, pour une séquence du paramètre de pénalité t_n ($t_n \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$), on aura $x_{\text{opt}}(t_n \rightarrow x_{\text{opt}}$ quand $t \rightarrow \infty$) où $x^* = f(x_{\text{opt}})$ est solution du problème convexe original (1-19).

Pour l'implémentation, On utilise plutôt souvent pour la minimisation la fonction convexe suivante :

$$g_t(x) = \emptyset_0(t - f(x)) + \emptyset(x) \quad (1-21)$$

Où $t > t_0 = x^*$ et \emptyset_0 est une fonction barrière pour le demi-axe positif des réels. De même, l'objectif serai de déterminer le minimum $x_{\text{opt}}(t)$ de $g_t(x)$ pour $t > 0$. C'est-à-dire que à chaque t_i on aura un minimum $x_{\text{opt}}(t_i)$ et la trajectoire $x_{\text{opt}}(t)$ quand t varie est appelée trajectoire (ou chemin) des centres. Sous certaines conditions $x_{\text{opt}}(t)$ est analytique et possède une limite lorsque $t \rightarrow t_0$. Le point $x_{\text{opt}} = \lim_{t \rightarrow t_0} (x_{\text{opt}}(t))$ est optimal dans le sens où $x^* = f(x_{\text{opt}})$ puisque pour $t > t_0$ on a $f(x_{\text{opt}}) < t$.

Les méthodes des points intérieurs peuvent être appliquées aux problèmes de réalisabilité et ceux d'optimisation définis précédemment.

Problème de réalisabilité :

Pour le problème de réalisabilité f n'est pas définie et le problème se réduit à :

$$S = \left\{ x \mid F(x) = F_0 + \sum_1^m x_i F_i > 0 \right\}$$

Toujours pour une fonction affine F telle que $F_i = F_i^t \in \mathbb{R}^{n \times n}$, l'objectif est de trouver l'ensemble des $\{x | F(x) > 0\}$. sachant que pour une fonction $F(x)$ affine en x telle que $F_i = F_i^t \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la fonction définie par $\log \det F(x)^{-1}$ est une fonction convexe en F , donc la fonction suivante peut être candidate pour servir comme fonction de barrière :

$$\phi(x) = \begin{cases} \log \det F(x)^{-1} & \text{pour } x \in S \\ \infty & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1-22)$$

En supposant que l'ensemble S est borné et non vide, ce qui veut dire que $\phi(x)$ est strictement convexe dans S et possède un seul minimum (global) noté $\phi(x^*)$, le point x^* est appelé centre analytique de l'ensemble de réalisabilité S ou de LMI $F(x) > 0$.

$$\begin{aligned} x^* &= \arg \min_x \phi(x) \\ &= \begin{cases} \arg \max_x \log \det F(x) \\ F(x) > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1-23)$$

Ce minimum est ensuite facilement calculable par la technique itérative de Newton-Raphson qui converge quadratiquement vers le centre analytique x^* .

Problème d'optimisation :

En générale, le problème d'optimisation consiste en une minimisation sous contrainte de la forme (1-19) :

$$\begin{cases} \min_x f(x) \\ F(x) > 0 \end{cases} \quad \text{Ou équivalamment} \quad \begin{cases} \min_x f(x) \\ x \in S \end{cases}$$

Plus précisément, il s'agit de trouver: $x^* = \inf_{x \in S} f(x)$.

Ce problème peut être facilement transformé en un problème de réalisabilité comme suit :

$$\tilde{F}_t(x) = \begin{pmatrix} t - f(x) & 0 \\ 0 & F(x) \end{pmatrix} > 0 \quad (1-24)$$

Où comme mentionné précédemment, $t > t_0 = x^*$ est le paramètre de pénalité. En utilisant toujours la fonction barrière (1-22) pour la LMI (1-24), on aura l'optimisation sans contrainte qui consiste à minimiser la fonction strictement convexe suivante :

$$g_t(x) = \log \det \tilde{F}_t(x)^{-1} = \underbrace{\log \frac{1}{(t-f(x))}}_{\phi_0(t-f(x))} + \underbrace{\log \det F(x)^{-1}}_{\phi(x)} \quad (1-25)$$

La séquence du minimum global $x_{\text{opt}}(t_i)$ de $g_t(x)$ converge vers $x^* = \inf_{x \in S} f(x)$ quand $t \rightarrow t_0$.

Note :

Il existe des versions d'algorithme d'implémentation plus récentes et plus rapides de la méthode des points intérieurs que nous n'avons pas pu consulter. D'autre part, les solveurs spécialisées sont sophistiquées donc plus efficaces et peuvent prendre en charges certains types de BMI ou des LMI à contraintes d'égalités, ces solveurs ne sont pas commercialisés et nous n'avons pas pu se procurer d'eux. Nous nous sommes contentés des résultats d'optimisation pouvant être obtenus par Matlab.

Chapitre II

Introduction aux Systèmes Dynamiques Hybrides

Introduction

Le contenu de ce chapitre traite les notions introductives liées aux systèmes dynamiques continus et hybrides. L'analyse et la synthèse de ces derniers reposent sur les concepts généraux développés pour les premiers.

Ce chapitre ne se veut pas être exhaustif ni complet et ne présente pas un état de l'art pour ces deux types de systèmes, plutôt on présentera seulement les notions nécessaires liées aux concepts généraux des systèmes dynamiques continus et leur extensions aux systèmes hybrides. En particulier, les questions de bon conditionnement pour ces derniers seront entamées, elles sont étroitement liées à la notion de solution et d'exécution dans un système hybride.

2.1. Notion de système dynamique :

Lorsque dans un système physique, l'évolution des sorties est fonction seulement des entrées appliquées, le système est dit statique. Dans le cas où le comportement des sorties du système dépend aussi des entrées antérieures, le système est dit dynamique. La plupart des systèmes physiques livrés à eux-mêmes sont modélisables par des systèmes dynamiques. D'une manière générale, un système dynamique est une entité plus au moins isolée et constitué par un ensemble d'éléments en interaction. En vue d'analyser et de développer des techniques de commande pour ces systèmes, on a besoin de chiffrer qualitativement et quantitativement ces interactions en se basant sur les lois de la physique, d'où l'idée de recherche de modèle mathématique qui reflète au mieux toutes les dynamiques du système. Afin d'éviter de poursuivre l'évolution antérieure des signaux d'entrée, on fait souvent appel à la représentation interne du système dont les variables ont la propriété de garder toutes les informations utiles temporelles y compris celles résultant de l'application des entrées antérieures.

En plus de la caractérisation entrée/sorties des systèmes, la représentation d'états est l'outil le plus employé dans la modélisation des systèmes physiques. Historiquement, cette représentation constitue la base de toutes les méthodes de résolutions numériques employées dans la théorie de la commande de systèmes. Dans l'espace des états, un système dynamique est essentiellement caractérisé par ses n variables d'état $x(t) \in \mathbb{R}^n$ où le nombre n est appelé ordre du système, et un formalisme mathématique qui décrit le processus d'évolution. Aucun élément aléatoire n'est admis dans de tel processus pour les systèmes déterministes (les états présents du système sont totalement déterminés par ses états passés et futurs).

Définition 2.1 : Un système dynamique continu est décrit par un triplet (X, U, f) , où $X \subset \mathbb{R}^n$ est l'espace des états, $U \subset \mathbb{R}^m$ est l'ensemble des entrées externes (entrées, perturbations), et $f: X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ vecteur décrivant les dynamiques du système telle que :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)); \quad x(t_0 \geq 0) = x_0, x \in X \text{ et } u \in U. \quad (2-1)$$

L'entrée $u(t)$ est une fonction du temps ou du temps et de l'état dans le cas de retour d'état i.e. $u = k(t, x)$, le remplacement de $u(t)$ dans l'équation précédente conduit au système autonome suivant :

$$\dot{x}(t) = f(t, x); \quad x(t_0) = x_0, x \in X. \quad (2-2)$$

Ainsi la définition de l'équilibre et l'analyse de la stabilité des systèmes seront généralement investiguées à travers ce modèle mathématique en considérant une forme particulière d'entrée. Cette question se trouve au centre d'intérêt de la théorie des systèmes dynamiques qui s'occupe essentiellement de l'évolution des états en fonction du temps.

Une classe spéciale de (2-2) est constituée par les fonctions f qui ne dépendent pas explicitement du temps ou lorsqu'une forme particulière d'entrée est considérée dans (2-2) :

$$\dot{x}(t) = f(x); \quad x(t_0) = x_0, x \in X. \quad (2-3)$$

Remarque 2.1 :

D'une manière générale, tout système dynamique peut être décrit par l'équation différentielle générale suivante :

$$\frac{dy}{dt}^n = f\left(t, \frac{dy}{dt}^{n-1}, \dots, \frac{dy}{dt}, y(t)\right) \tag{2-4}$$

Où f et y sont des fonctions et $t \in \mathbb{R}^+$ est généralement considéré comme le temps. Puisque l'équation contient la $n^{ième}$ dérivée, on dira que l'équation est d'ordre n . Pour le système (2-2), l'équation $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ est du premier ordre et si le temps t est la seule variable indépendante, nous dirons que l'équation différentielle est ordinaire (ODE) sachant que l'équation (2-4) peut être rendue comme simple ODE par simple changement de variable.

Solution et trajectoire d'état : Existence et Unicité [19] [24] [25] [31] [44] [48] :

Le comportement du système dynamique est complètement déterminé par la solution de l'équation différentielle 2-3, cette solution doit être unique pour une certaine condition initiale. La solution de l'équation 2-3 sur un intervalle $[t_0, t_0 + T]$ est fonction continue de x , elle est donnée par :

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+t} f(x(s)) ds \tag{2-5}$$

Cette solution est bien connue sous le nom de solution de Carathéodory qui n'est pas forcément différentiable partout (au sens de mesure de Lebesgue), en effet la solution de Carathéodory est une généralisation de la solution classique qui est continuellement différentiable. Autrement dit, la solution de type (2-5) est toujours valide i.e. l'intégrale n'a pas besoin d'être définie aux points de mesure zéro, c'est ce qui la distingue de la solution classique. L'existence et l'unicité de cette solution dépendent des caractéristiques du champ vecteur en 2-3. A noter qu'une condition suffisante pour l'existence de la solution 2-5 est la continuité en fonction du temps de $f(x, t)$. Cette condition est aussi celle de l'existence de solution classique, en effet, si $f(x, t)$ est continue alors toute solution est classique. Sachant que la continuité de $f(x, t)$ ne suffit pas pour que la solution soit unique. Une autre condition plus restrictive garantissant l'unicité de la solution est la vérification de la propriété de Lipschitz par rapport à x au voisinage de la condition initiale x_0 :

Définition 2.2 : Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite localement Lipschitz continue si $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|, \forall (x_1, x_2) \in B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$.
Où L est appelé constante de Lipschitz.

A noter que pour la stabilité asymptotique, nous avons besoin de l'existence globale de solution. Rappelons qu'une fonction peut être aussi globalement Lipschitz si la condition de la définition précédente est vérifiée pour \mathbb{R}^n , à noter que si une fonction est Lipschitz sur un domaine, elle est forcément continue sur ce domaine. D'autre part, elle est Lipschitz sur ce domaine si elle est de classe C^1 .

En effet la propriété de Lipschitz garantit que la fonction n'évolue pas plus rapidement qu'une certaine fonction linéaire ce qui n'est pas le cas des systèmes discontinus (objet de notre étude) dont les solutions sont mieux caractérisées au sens de Krasovskii ou Filipove (voir chapitre suivant). En général, la propriété de Lipschitz au sens global est rarement vérifiée pour les systèmes physiques souvent non linéaires.

Remarque 2.2

- Si une fonction est seulement continue sur un domaine, elle n'est pas forcément Lipschitz sur ce domaine, néanmoins si elle a une dérivée partielle en x bornée, elle est donc Lipschitz : $Df(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \leq L, L$ constante de Lipschitz.

- La notion de solution maximale est aussi utile, c'est une solution qui ne peut être étalée en avant dans le temps donc ne peut résulter de la troncation (en temps) d'une autre solution. Par conséquent, l'unicité de solution est liée à l'existence d'une seule solution maximale pour chaque condition initiale.
- Toutefois, l'unicité de solution classique peut être garantie sous une condition plus faible qui est liée à la notion de la continuité de Lipschitz d'un seul côté.

Remarque 2.3 :

Pour les systèmes discontinus (ou à commutations), la continuité au sens global du système n'est pas vérifiée (particulièrement aux points de mesure zéro). Par conséquent l'existence de solution n'est garantie que localement dans les intervalles de temps où la propriété de continuité est vérifiée. L'existence de solution au sens global nécessite plutôt de fortes conditions. En effet, La relaxation dans la solution de Carathéodory qui consiste à définir le champ vecteur dans (2-2) aux points de mesure zéro n'est pas toujours suffisante pour que de telle solution existe.

La solution (2-5) s'appelle aussi trajectoire du système, en adoptant la notation $x(t_0) = x_0$, la trajectoire d'un système dynamique issue d'un point x_{t_0} est l'évolution (courbe) du système passant par x_0 en t_0 et telle que à chaque instant t , la tangente à cette courbe au point $x(t)$ coïncide avec le champ de vecteurs $f(x(t))$ évalué en ce point. L'étude des systèmes dynamiques vise essentiellement à déterminer le lieu des trajectoires d'un tel système. Une notion capitale dans ce cadre est de savoir si, pour un système donné, deux états proches à un instant t de l'évolution du système vont rester proches, voire se confondre, ou s'éloigner.

Définition 2.3 : [45] un point $x = x^*$ est un point d'équilibre du système (2-3) s'il possède la propriété que lorsqu'une solution $x(t)$ évolue à partir de x^* , elle demeure en x^* tout le temps future.

Selon cette définition les points d'équilibre du système (2-3) sont les solutions réelles de l'équation :

$$f(x^*)=0, t \geq 0 \tag{2-6}$$

Sans perte de généralité on peut toujours considérer que le point d'équilibre est à l'origine ($x^* = 0$) puisque tous les points de fonctionnement désirés peuvent se ramener à l'origine par un simple changement de variable, donc on supposera que $f(t, 0)=0$ pour $t \geq 0$. Noter que dans le cas général, on n'exclut pas l'existence de plusieurs points d'équilibre, toutefois on ne considère que les systèmes autonomes dont l'origine est un équilibre isolé.

Noter pour qu'un point $x = x^*$ soit un équilibre du système non autonome (2-1), il doit y exister une entrée \bar{u} tel que $f(x^*, \bar{u})=0$.

Dépendance par rapport à la condition initiale : [21] [24] [52] [64]

La propriété de Lipschitz au sens global permet d'assurer la continuité de la solution et de donner un sens à l'équation différentielle i.e. de bien poser le problème représenté par l'équation. En effet, c'est ce qui justifie l'existence ou la recherche des algorithmes numériques de résolution ou plutôt d'approximation pour les problèmes bien posés et par conséquent leur simulation. Cela est appuyé par le théorème de propagation de la distance entre solutions ci-après qui atteste que les trajectoires de système bien posé restent proches si elles démarrent de conditions initiales proches du moins pour des échelles de temps petits.

Théorème 2.1 :

Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions de $[0, T] \rightarrow R^n$ du système représenté par : $\dot{x} = f(x)$ avec respectivement x_{10} et x_{20} comme conditions initiales, si f est Lipschitz continue avec une constante de Lipschitz L , alors pour tout $t \in [0, T]$

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|x_{10} - x_{20}\|e^{Lt}$$

Ainsi il est confirmé que lorsque le champ vecteur est Lipschitz, le système représenté sera bien posé et la solution unique est continuellement dépendante de la condition initiale i.e. ses dérivées partielles sont continues par rapport au temps et à la condition initiale [64]. Cependant, pour de grandes valeurs de t , on ne peut garantir que les solutions restent proches et une étude approfondie de la sensibilité par rapport aux conditions initiales est à prévoir.

2.1.1. Stabilité des systèmes dynamiques :

La stabilité est une question centrale dans la théorie des systèmes, du point de vue commande cette propriété est la plus impérative en boucle fermée. Intuitivement parlant, un équilibre de système dynamique x^* est localement stable si lorsque sa trajectoire part d'un point du voisinage de cet équilibre ne s'éloigne pas trop. L'équilibre x^* est localement asymptotiquement stable s'il est localement stable et toutes les trajectoires qui partent de son voisinage convergent vers x^* quand $t \rightarrow \infty$. Tout au long de ce manuscrit, nous ne faisons pas de distinction entre la stabilité de système et la stabilité de son équilibre (isolé).

Définition 2.4 : [45]

Soit le système autonome (2-3) avec $f: D \subseteq R^n \rightarrow R^n$ localement Lipschitz et un point d'équilibre isolé $x^* = 0$, le système est dit

- Stable, si $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \geq 0, \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tel que $\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$
- Attractif, s'il existe un voisinage $\mathbb{V}(0)$ de l'origine tel que :

$$\forall x_0 \in \mathbb{V}(0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

L'origine est un point d'équilibre globalement attractif si $\forall x_0 \in R^n, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

- Asymptotiquement stable, s'il est stable et attractif.

L'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

La stabilité définie ci-dessus est dite uniforme par rapport au temps si $\delta(t_0, \varepsilon) = \delta(\varepsilon)$ i.e. indépendante de t_0 . Cette notion est très importante pour la stabilité des systèmes dynamiques continus ; par exemple le système : $\dot{x} = x/t, x(0) = x_0$ dont la solution est $x(t) = x_0 e^{\left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t}\right)}$ est stable au sens de la définition ci-dessus avec $\delta(t_0, \varepsilon) = \varepsilon e^{-\frac{1}{t_0}}$ mais pas uniformément stable.

La stabilité asymptotique est très utile en pratique, mais elle ne donne aucune indication sur la rapidité de convergence de la solution vers l'équilibre, généralement on fait appel à une notion plus intéressante qui est la stabilité exponentielle.

Définition 2.5 : [45]

L'origine $x^* = 0$ du système (2-3) est dit exponentiellement stable s'il existe un voisinage $\mathbb{V}(0)$ de l'origine et deux constantes λ_1, λ_2 strictement positives tel que :

$$\|x(t)\| < \lambda_1 \|x_0\| e^{-\lambda_2(t-t_0)}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{V}(0), \quad \forall t \geq t_0$$

Où dans ce cas là λ_2 s'appelle taux de convergence.

L'origine du système est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable si $\mathbb{V}(0) = R^n$.

Théorie de Lyapunov

Ayant défini les concepts de stabilité et de la stabilité asymptotique. La vérification de la stabilité des équilibres peut être obtenue par l'investigation de l'énergie totale d'un système. Sachant que l'énergie du système est liée aux amplitudes des états du système, et que si l'énergie totale du système décroît (dissipation sans restauration) quand ses états tendent vers zéro, alors la trajectoire du système tend vers l'équilibre (l'origine), de là vient l'idée de l'utilisation des fonctions d'énergie. Cependant, en pratique pour la plupart des systèmes physiques où le modèle mathématique n'est pas simplifiable, il est difficile d'écrire une expression manipulable de l'énergie totale du système. Lyapunov a montré qu'au lieu de ces fonctions d'énergie, l'utilisation de certaine classe de fonctions définies positives (appelées fonctions de Lyapunov) peut être utile pour étudier la stabilité des systèmes dynamiques. Depuis alors, le concept de stabilité des systèmes dynamiques est étroitement lié à la théorie de Lyapunov. Les fondements de la théorie de Lyapunov peuvent être consultés dans n'importe quel livre de systèmes non linéaires tel que [45]. Alors que notre objectif est d'étudier l'application voire l'extension de cette théorie à la stabilité et la stabilisation des systèmes dynamiques hybrides et plus particulièrement celle des systèmes commutés objet de notre travail. Pour cela nous avons besoin de rappeler les définitions mathématiques des fonctions positives permettant de formuler les théorèmes de Lyapunov d'une façon plus condensée [45].

Définition 2.6 :

Une fonction $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ où D est un ouvert de \mathbb{R} et contient l'origine, est dite définie positive, si $V(0)=0$ et $V(x)>0 \forall x \in D - \{0\}$; si de plus $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, elle est dite radialement non bornée.

Définition 2.7 :

Une fonction continue $\varphi : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ est dite de classe \mathcal{K} , si elle est strictement croissante et $\varphi(0)=0$; elle est de classe \mathcal{K}_∞ , si $a=\infty$ et $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = \infty$.

Définition 2.8 :

Une fonction continue $\varphi : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est dite de classe \mathcal{KL} , si pour chaque s fixe, $\varphi(r, s)$ est de classe \mathcal{K} par rapport à r , et pour chaque r fixe, $\varphi(r, s)$ est décroissante par rapport à s et $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r, s) = 0$

Définition 2.9 :

Une fonction continue $\varphi : \mathbb{R} \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est dite décroissante, s'il existe une fonction ψ de classe \mathcal{K} telle que : $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times V, |\varphi(t, x)| \leq (\|x\|_n)$.

Définition 2.10 : [45]

Une fonction $V(x)$ est appelée fonction d'énergie généralisée ou fonction de Lyapunov pour le système (2-3) si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, c'est une fonction scalaire.
2. $V(0)=0$, $V(x)>0$ pour $x \neq 0$, elle est définie positive.
3. $\frac{dV}{dt}(f(x)) < 0$, le système est dissipatif.

Théorème 2.2 : [45]

S'il existe une fonction C^1 définie positive $V : R^n \rightarrow R$ dont la dérivée le long de la trajectoire du système (2-3) est telle que :

- $\forall x, \dot{V} \leq 0$, alors le système (2-3) est stable.
- $\forall x \neq 0, \dot{V} < 0$, alors le système (2-3) est asymptotiquement stable.
- $\dot{V} < 0, \forall x \neq 0$ et V est radialement non bornée, alors le système est globalement asymptotiquement stable.

En utilisant les fonctions de comparaison, la variante ci-dessous est plus générale et surtout très utile pour les démonstrations de stabilité.

Théorème 2.3 : [65]

Soit le système autonome (2-3) avec un point d'équilibre isolé $x^* = 0$.

S'il existe une fonction de Lyapunov continuellement différentiable $V : R^n \rightarrow R$ et deux fonctions α et β de classe \mathcal{K} tel que :

$$\alpha(\|x\|) \leq V(x) \leq \beta(\|x\|), \quad \forall x \in D \subset R^n \text{ et } 0 \in D$$

L'équilibre à l'origine du système est

- Stable si : $\frac{dV(x)}{dt} \leq 0$;
- Asymptotiquement stable s'il existe une fonction $\phi(x)$ de classe \mathcal{K} telle que :

$$\frac{dV(x)}{dt} \leq -\phi(\|x\|);$$

- Exponentiellement stable s'il existe des constantes positives $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma$ et p telle que :

$$\alpha(\|x\|) = \bar{\alpha}\|x\|^p$$

$$\beta(\|x\|) = \bar{\beta}\|x\|^p$$

$$\phi(\|x\|) = \gamma V(x)$$

- Quadratiquement stable si $p=2$.

Les résultats sont globaux si les fonctions sont de classe \mathcal{K}_∞ .

Théorèmes réciproques de Lyapunov :

La théorie de Lyapunov est basée sur le fait que si on arrive à trouver une fonction de Lyapunov qui satisfait certaines conditions alors le système possède certaines propriétés (ex : stabilité). Il est tout à fait naturel de se poser la question inverse : si le système possède une certaine propriété de stabilité, existe-il une fonction de Lyapunov pour le système avec des caractéristiques bien définies. Les théorèmes qui se posent de cette manière s'appellent théorèmes réciproques de Lyapunov et ne sont généralement pas dus à Lyapunov mais dégagées un peu plus tard. Certains d'entre eux sont très utiles et plus utilisés dans la stabilité des systèmes non linéaires que ceux de Lyapunov lui-même.

Exemple de théorème réciproque de Lyapunov : [22]

Considérons le système autonome suivant : $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$ avec f Lipschitz dans $R^n \setminus \{0\}$ et continue en 0. Si l'origine est globalement asymptotiquement stable, alors il existe une fonction propre et définie positive $V(x)$ telle que $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$.

Nous allons revenir sur les théorèmes réciproques pour les systèmes commutés.

Invariance de LaSalle : [45]

Un des outils les plus utilisés comme une extension des travaux de la stabilité de Lyapunov est le principe d'invariance de LaSalle. Sous certains comportements de solution, il est possible d'étendre la notion de stabilité asymptotique lorsque la dérivée de la fonction de Lyapunov n'est pas strictement négative. Rappelons qu'un ensemble est positivement invariant pour un système donné, si lorsque toutes les solutions qui partent de cet ensemble y restent pour tous le temps future.

Théorème 2.4 : [45]

Supposons qu'il existe une fonction C^1 définie positive $V : R^n \rightarrow R$ dont la dérivée le long de la trajectoire du système (2-3) est $\dot{V} \leq 0 \forall x$, et soit M le plus grand ensemble invariant contenu dans l'ensemble $\{x \in R^n | \dot{V}(x) = 0\}$. Alors toute trajectoire du système (2-3) borné pour $t \geq 0$ approche M lorsque $t \rightarrow \infty$. En particulier, si toutes les solutions restent bornées et $M = \{0\}$ alors le système (2-3) est globalement asymptotiquement stable (à l'origine).

En effet, ce théorème fournit une condition pour que l'ensemble invariant M soit attractif. Cela en exigeant la borneture de toutes les solutions du système, cette propriété est vérifiée lorsque V est choisie radialement non borné (condition suffisante et pas nécessaire). La deuxième condition est que $\dot{V}(x)$ ne soit pas identiquement nulle le long de toute solution non nulle. Le résultat de ce théorème est très intéressant et d'application générale avec une extension aux cas des systèmes hybrides.

2.1.2. Stabilité pratique :

Le concept de la stabilité asymptotique des équilibres de systèmes (donc des systèmes) est tout à fait naturel en exprimant de façon intuitive les comportements des systèmes autour de points remarquables. Cependant, pour certains systèmes complexes n'ayant pas d'équilibres ou qui ne convergent pas, l'extension du concept de stabilité autour de point d'équilibre à la stabilité par rapport à un ensemble de points devient nécessaire. C'est le cas des convertisseurs en électronique de puissance objet de notre travail où les sous-systèmes (modes) sont instables ou du moins ne possèdent pas d'équilibre commun et doivent être maintenus en un certain point de fonctionnement. Les cycles limites dans les systèmes non linéaires sont un autre exemple de stabilité par rapport à un ensemble de points. La notion de stabilité par rapport à une région ou un ensemble de point n'est pas nouvelle, elle est liée à la ω -stabilité et aux ensembles ω -limites employés dans la conception de commande des systèmes non linéaires.

Théoriquement, deux notions sont liées à ce concept de stabilité :

- Stabilité par rapport à un ensemble invariant, dans ce cas l'invariant ne peut être quitté une fois on entre dedans. Ce concept est étroitement lié à la théorie de Lyapunov et le principe d'invariance de LaSalle [45] [40]. En effet, les niveaux de fonctions de Lyapunov sont des invariants.
- Stabilité par rapport à une région quelconque, l'approche ici est plus générale et présente une certaine flexibilité dans le sens où la trajectoire du système est autorisée à quitter temporairement la région pour y revenir finalement [78].

Plusieurs variantes et formulations ont été proposées pour ce concept de stabilité, certaines extensions ont été faites pour les systèmes hybrides et commutés [31].

Nous reviendrons sur ce concept de stabilité dans le chapitre 4 qui est complètement consacré à la stabilisation pratique des systèmes commutés affines par morceaux où nous allons proposer notre propre définition et méthode de stabilisation. Nous nous contentons de donner ici une définition au sens large des choses pour la stabilité des régions.

Définition 2.11 : (au sens large) :

Une région de points est asymptotiquement globalement stable pour un système donné si toute solution est bornée et reste proche de la région lorsqu'elle démarre de son voisinage, de plus si la solution possède un domaine temporel étendu (illimité) alors elle doit converger vers cette région.

Cycle limite :

L'analyse de stabilité des systèmes cyclique ou périodique est généralement abordée par une analyse de comportements par rapport à un ensemble de points, où généralement le point désiré ne représente pas un point d'équilibre et la commande aura comme objectif d'imposer une trajectoire fermée (cycle limite) autour d'un certain point de fonctionnement. Ce concept de stabilité (et donc la stabilité des cycles limites) est habituellement abordé en utilisant l'application de Poincaré pour en étudier la stabilité du cycle [4] [32] [33], plusieurs techniques d'applications de cette approche ont été proposées pour la stabilisation des convertisseurs d'électronique de puissance, [69] en est un bon exemple. La stabilité des cycles limites est encore un sujet de recherches bien que certains résultats soient déjà bien établis, cette approche peut être classée comme une méthode de stabilisation pratique.

2.1.3. Inclusion différentielle :

Une inclusion différentielle est une généralisation d'équation différentielle, à chaque état, une inclusion différentielle spécifie un ensemble d'évolutions possibles au lieu d'une seule. Cela est défini par une fonction multivaluée [5] [21].

Une inclusion différentielle est décrite par :

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{F}(x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (2-7)$$

Avec $\mathcal{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction multivaluée.

Un point x^* est un équilibre pour l'inclusion différentielle si $0 \in \mathcal{F}(x^*(t)), \forall t \in \mathbb{R}^+$.

Cette notion est très générale et peut être utilisée pour modéliser une large classe de systèmes dynamiques allant des systèmes incertains qui ne peuvent être représenté par un seul modèle aux systèmes à discontinuités ou plus généralement aux systèmes commutés auxquels cette notion est étroitement liée. D'autant plus, lorsque \mathcal{F} est un singleton, cette notion couvre bien la modélisation par équation différentielle comme cas particulier.

En général, cette modélisation est intéressante lorsque \mathcal{F} est un ensemble convexe fermé ce qui permet de faciliter l'analyse en l'associant au problème de Cauchy (existence de solution). Si \mathcal{F} ne l'est pas, le système (2-7) peut être généralisé à :

$$\dot{x}(t) \in \text{clco}(\mathcal{F}(x(t))) \quad (2-8)$$

Où clco désigne l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble \mathcal{F} , le système (2-8) est le système relaxé de (2-7), et en s'aidant du théorème de relaxation de Filipove qui atteste que toute solution de (2-7) est solution du système relaxé (2-8), dans beaucoup de cas la réciproque est vraie. En effet, sous certaines hypothèses, toute solution du système relaxé peut être approximée par une solution du système original. Ce théorème de relaxation est particulièrement très utile pour prouver la stabilité des systèmes commutés linéaires à travers les inclusions différentielles linéaires [voir chapitre III].

Avant de pouvoir définir les solutions d'une inclusion différentielle et les conditions de leurs existences, nous rappelons ci-dessous la définition de la continuité absolue et la semi-continuité supérieure.

Définition 2.12 : [5] [21] [44]

Une fonction $x : [a, b] \rightarrow R^n$ est dite absolument continue, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que pour toute collection finie $\{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ d'intervalles ouverts disjoints et contenues dans $[a, b]$ avec $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, alors :

$$\sum_{i=1}^n |x(b_i) - x(a_i)| < \varepsilon$$

Ou équivalamment : si elle est continue et peut être écrite comme l'intégrale de sa dérivée \dot{x} :
 $x(t) = x(a) + \int_a^t \dot{x}(\tau) d\tau$ pour tout $t \in [a, b]$ et \dot{x} localement intégrable.

La notion de la continuité absolue (d'origine soviétique) est très importante pour l'étude des équations différentielles. Bien qu'une fonction absolument continue ne soit pas différentiable partout, sa propriété majeure est qu'elle peut être retrouvée à partir de sa dérivée. En effet, c'est le minimum requis pour le type de solution à chercher pour une équation différentielle discontinue. Une fonction absolument continue est une fonction continue et de variation bornée par conséquent toute fonction Lipschitz continue est absolument continue. Elle a donc une dérivée finie sauf aux points de mesure² zéro.

Définition 2.13 : [5] [21] [44]

Une fonction $x : [a, b] \rightarrow R^n$ est solution de (2-7) au sens de Carathéodory si elle est absolument continue et satisfait (2-3) pour presque tous $t \in [a, b]$.

Remarque 2.4 :

La difficulté de travailler avec les inclusions différentielles est que (2-7) possède une infinité de solution, par conséquent, l'étude de (2-7) consiste à chercher à ce que toutes les solutions satisfassent certaines propriétés (ex. stabilité), donc il est important de savoir à quelles conditions l'inclusion possède une seule solution, cela nous évite de parler des notions de stabilité forte (par rapport à toutes les solutions) et faible (par rapport à une seule solution).

Existence et unicité de solutions :

Sous certaines conditions (semblables à celles des équations différentielles), l'existence et l'unicité de solution pour une inclusion différentielle (convexe fermé) peuvent être garanties. La première est liée à la semi-continuité supérieur de fonctions multivaluées qui assure l'existence d'une solution pour chaque condition initiale, et la deuxième utilise une propriété similaire à celle de la continuité Lipschitz appelé : Lipschitz continuité d'un seul côté « one-side Lipschitz continuity » qui garantit l'existence d'au plus une solution de l'inclusion pour chaque condition initiale, pour plus de détail voir [5] [21]. Nous allons y revenir dans le chapitre suivant.

Remarque 2.5 :

Pour attaquer les EDD, il n'y a pas que l'approche qui consiste à associer une inclusion différentielle aux équations différentielles discontinues à droite EDD (donc à la fonction multivaluée au niveau des discontinuités). D'autres approches dues à Hermes et Euler permettent de construire aussi une solution généralisée des EDD en se basant sur des algorithmes d'approximation [44].

² Mesure au sens de Lebesgue

2.2. Systèmes à Évènements Discrets (SED) :

Avant de pouvoir définir les systèmes hybrides qui ne sont autres que le résultat d'interaction de systèmes à dynamiques continues et systèmes évènementiels, il est peut être judicieux de donner une définition précise de ces derniers. Certains types de systèmes se prêtent bien à l'abstraction des dynamiques continues en faveur du caractère évènementiel, on dira que sont naturellement évènementiels, des exemples typiques sont les systèmes de production, systèmes des transports aériens et ferroviaires, systèmes de communication ainsi que les systèmes du web-services. Dans tous ces systèmes, l'activité est conditionnée par l'instant d'occurrence d'évènements tels que fin d'exécution de tâches et/ou arrivée d'un produit...etc.

Définition 2.14 :

Les systèmes à évènements discrets (SED) sont des systèmes dynamiques qui évoluent en accord avec l'occurrence abrupte d'évènements à des intervalles irréguliers.

Ces systèmes sont essentiellement caractérisés par un espace d'états discrets et des transitions entre états conditionnées par l'occurrence d'évènements. Par conséquent, l'évolution dans ces systèmes peut s'exprimer en termes de séquences d'états où la durée de séjour dans chacun des états n'est pas systématiquement connue i.e. le temps n'apparaît pas explicitement comme dans le cas des systèmes continus. Les moyens les plus employés pour l'étude des comportements logiques des SED sont basés sur la théorie des langages et des automates, on notera l'importance des puissants outils graphiques : les Réseaux de Pétri et le Grafcet.

2.3. Systèmes hybrides :

Comme il a été déjà mentionné, lorsque dans un système dynamique il y a interaction de dynamiques continues et évènementielles, le système résultant est dénommé système hybride. Cette interaction permet de modéliser un grand nombre de phénomènes de dynamiques variées qui ne peuvent être rencontrées dans les systèmes purement continus ou discrets. Par extension, lorsque dans un même système physique certaines variables varient très rapidement (ou quasi-instantanément) par rapport à d'autres, une formulation hybride du système peut être plus avantageuse. Les systèmes hybrides ont gagné un grand intérêt ces trois dernières décennies de façon que des journées d'étude et des numéros spéciaux de journaux leurs ont été consacrés par ex : [IEEE, AC, avril 98] [Automatica Mars 99] [International Journal for robust and nonlinear control 2001]...etc. D'autant plus, certaines monographies et notes de lectures sous formes de livres ont été entièrement dédiées à ce domaine [Antsaklis 97, Mateev et Savkin 2000, Vanderschaf 2000, Johanssen 2003, ...Etc.] sans oublier la fameuse conférence HSCC (Hybrid Systems Computation and Control) qui se tient régulièrement chaque année depuis 1999. Actuellement, une transaction spécialisée dans les systèmes hybrides existe depuis 2007 dans le célèbre journal [Nonlinear Analysis : Hybrid Systems]. Du point de vue théorique, le point de départ pour aborder ces systèmes, est la formulation hybride et l'obtention de modèle mathématique qui combine les deux aspects continu/discret. Différentes approches ont été proposées par les deux principales communautés travaillant dans le domaine. La première est la représentation par automates qui associe les dynamiques continues aux automates finis [3], cette représentation est liée à la théorie des graphes qui est plus proche aux informaticiens. La seconde est basée sur la formulation par équations différentielles et la spécification de l'arrivée des évènements [18] [37] [40] [65], ce point de vue est proche de la modélisation des systèmes continus en automatique. En effet, dans ces représentations, le système hybride est vu comme une collection de dynamiques continues et des transitions discrètes spécifiées par des fonctions de réinitialisation ou de transition. Depuis alors, plusieurs variantes de ces représentations ont été

proposées. Les systèmes hybrides constituent une classe de systèmes très riche de notion multidisciplinaire de façon qu'une définition claire et/ou de modèle unifié ne soient pas envisageables. En conséquence, les modèles ainsi que les développements associés dépendent du profil du chercheur et/ou de l'application envisagée et les résultats les plus remarquables ne sont exploitables que par classes de systèmes hybrides. En technologie, beaucoup de systèmes physiques incarnent ce double aspect continu/discret que se soit au niveau du modèle mathématique ou de la structure de commande du système. On pourra penser à l'équation du mouvement d'un mobile dont la vitesse varie continuellement et subissant une variation instantanée à l'encontre d'obstacle (ex : collision) ou le changement discontinu de l'évolution de la tension et du courant électrique dans un circuit électronique causé par l'ouverture ou la fermeture d'un commutateur. De même en commande moderne, l'implémentation d'algorithmes numériques sur un processeur pour commander un processus continu évoque cette interaction où les états discrets commandent la logique de décision. D'une manière générale, la commande hybride résulte de l'organisation hiérarchique des systèmes de contrôle/commande de processus complexes, où les dynamiques continues constituent le niveau d'abstraction le plus bas alors que la logique de gestion de l'occurrence des événements discrets (évoquant le changement de comportements) constitue bien le plus haut niveau d'abstraction du système. En plus de la modélisation des systèmes hybrides, les problèmes associés à la commande hybride concernent essentiellement l'analyse de la stabilité et la stabilisation de ces systèmes. Ces questions ont été largement investiguées par les chercheurs du monde entier, les résultats bien établis sont résumés et détaillés dans les articles de référence [23][31][36][37][49][50][54][82].

Vu les différentes manières d'aborder ces systèmes selon les nombreux domaines d'application, la nature multidisciplinaire de la notion de systèmes hybrides a été reconnue. Ce qui a conduit au développement de plusieurs formalismes qui servent actuellement comme outils de description pour ces systèmes. Le choix entre ces formalismes de description est un compromis entre la puissance de modélisation et le pouvoir de décision pour le dégagement de propriétés quantitatives et qualitatives. Nous retenons la définition relative aux systèmes autonomes (objet de notre travail) suivante [52].

Définition 2.15 :

Un système dynamique hybride se définit par un 8-tuplet H : $H = \{Q, X, F, Init, D, E, G, R\}$

Où :

- $Q = \{q_i, i = 1, 2, \dots, m\}$: est l'ensemble fini des états discrets ou modes.
- $X \subseteq \mathbb{R}^n$: est l'espace des états continus avec une partition $\{X_i\}_{i=1}^m$.
- $F = \{f_{q_i}, q_i \in Q\}$: est une collection de champs vecteurs $f_{q_i}: Q \times X \rightarrow X$ avec f_{q_i} Lipchitz sur D_{q_i} .
- $D = \{D_{q_i}, q_i \in Q\}$: est une collection de domaines d'invariant pour chaque mode $D: Q \rightarrow \{X_i\}_{i=1}^m$.
- $Init \subseteq Q \times X$: est l'ensemble des états initiaux.
- $E \subseteq Q \times Q$: est l'ensemble d'arcs représentant les transitions possibles d'un mode à un autre.
- $G = \{G(e_{ij}), e_{ij} = (q_i, q_j) \in E\}$: est un ensemble de gardes ; $G : E \rightarrow \{X_i\}_{i=1}^m$ en supposant que $\forall e_{ij} \in E, G(e_{ij}) \neq \emptyset$.
- $R: E \times X \rightarrow \{X_i\}_{i=1}^m$: est une collection de fonctions de réinitialisation en supposant que $\forall e_{ij} \in E$ et $\forall x \in G(e_{ij}), R(e_{ij}, x) \neq \emptyset$.

Dans l'évolution d'un système hybride, l'état du système peut être décrit par les deux variables : variable continue $x \in X$ et une autre discrète $q_i \in Q$. Cet état est représenté par $(x, q_i) \in X \times Q$.

Dans ce formalisme de description des systèmes hybrides, l'évolution est décrite par une succession de phases continues séparées par des événements (possible multiple) pendant lesquels des actions discrètes se produisent provoquant la réinitialisation des deux variables discrète et continue. Cela peut bien sûr produire des discontinuités dans les variables temporelles. Cette évolution traduit le changement de comportement ou commutation entre modes provoquée lorsque les variables atteignent certains seuils dans l'espace d'états (commutation dépendante de l'état) ou dans le domaine temporel lorsque des temps de séjours sont prédéfinis (commutation dépendante du temps) ou tout simplement par l'arrivée d'évènement externe (commutation contrôlée).

A titre d'introduction, un exemple de fonctionnement ou d'exécution académique de la littérature est montré par la figure suivante :

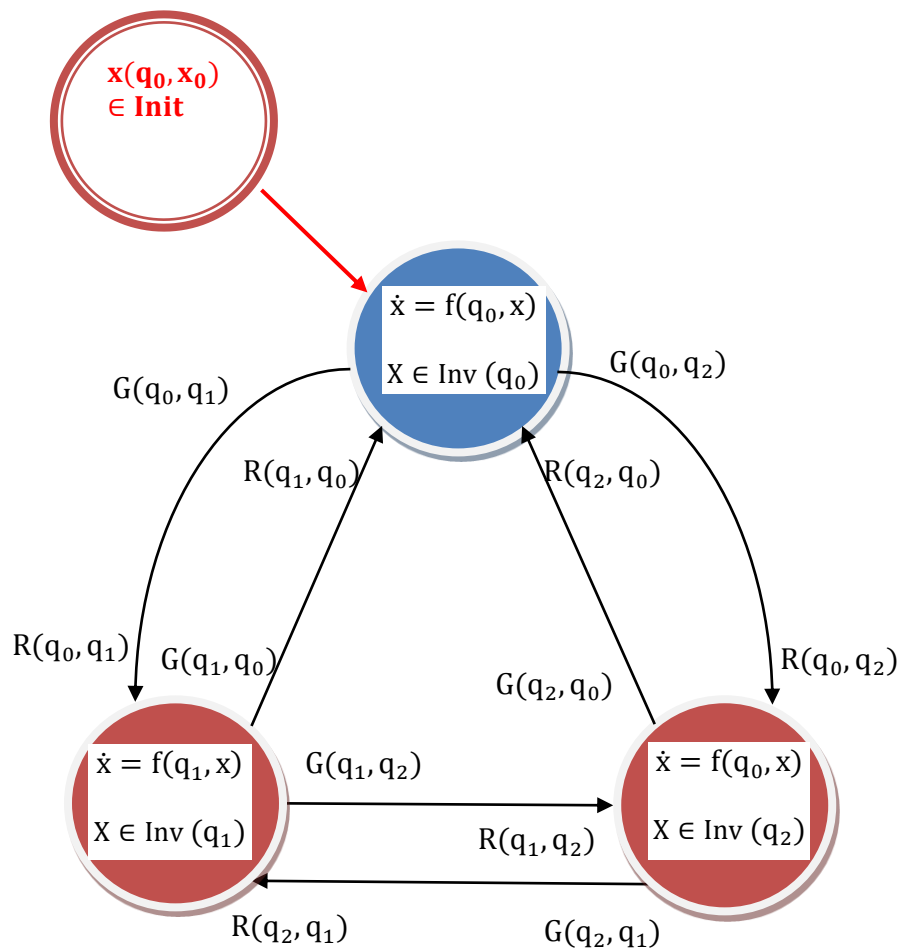


Fig. 2.1. Exemple théorique d'un système hybride

A partir de l'instant initial ($t = t_0$), $q(t_0) = q_0$ et la valeur initiale de la variable continue $x(t_0) = x_0$ appartenant au domaine D_{q_0} . Cette dernière évolue alors en suivant l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f_{q_0}(x(t))$, lorsque la trajectoire $x(t)$ atteint la garde $G(q_0, q_1)$ en un instant t_1 , on dira que la transition est validée et l'état discret peut prendre la valeur q_1 , alors que l'état continu sautera de la valeur actuelle $x(t_1^-)$ à une nouvelle valeur $x(t_1)$ avec

$x(t_1) = R((q_0, q_1), x(t_1^-)) \in X_1$. A partir de là, le système évoluera selon la dynamique continue $\dot{x}(t) = f_{q_1}(x(t))$. Le même processus se répètera pour toutes les transitions futures.

Il n'est pas toujours évident de décrire le fonctionnement d'un système dynamique réel par un système hybride selon le formalisme ci-dessus. En particulier, les définitions des gardes et des règles d'initialisation peuvent très être difficiles à exprimer. Dans ce chapitre d'introduction, nous nous limitons à des exemples simples et illustratifs pour montrer le fonctionnement et familiariser le lecteur avec le formalisme hybride.

2.3.1. Exemple 1 : boîte de vitesse automatique [24] [36] :

Le système de control de la boîte vitesse automatique est un système commuté autonome conçu pour provoquer le changement automatique des gammes de vitesses V pour un véhicule en marche.

Deux données sont transmises par le système de control du moteur du véhicule à la boîte de vitesse pour commuter d'une gamme des vitesses à une autre en changeant le rapport de transmission (selon le rendement pré-spécifié du véhicule qui dépend de la vitesse désirée) qui sont le couple développé $T(t)$ (selon l'accélération a) et la vitesse angulaire $\omega(t)$.

Selon la gamme du véhicule $V4, V5$ ou $V6$, la boîte des vitesses aura 4, 5 ou 6 états discrets, chaque état discret q_i ($i=1, 2, \dots, 6$) correspond à un rapport de transmission (moteur) p_i et donc à une dynamique continue associée f_i . A chaque instant, la vitesse linéaire du véhicule $v_i(t)$ est liée à la vitesse angulaire du moteur $\omega(t)$ par la relation $v_i(t) = 1/p_i \omega(t)$, le changement automatique de la gamme des vitesses au niveau de la boîte se produit lorsque la vitesse angulaire atteint les valeurs max et min pré-spécifiées et donc les commutations se font selon le principe suivant :

$$V_{i,i+1} = \left\{ v \in \mathbb{R} \left| v = \frac{1}{p_i} \omega_{\text{Max}} \right. \right\}$$

$$V_{i+1,i} = \left\{ v \in \mathbb{R} \left| v = \frac{1}{p_{i+1}} \omega_{\text{min}} \right. \right\}$$

L'automate associé est représenté ci-après où les commutations entre les différentes dynamiques se font lorsque le contrôleur (le détecteur d'évènements) détecte v_{Max} ou v_{min} de la gamme associée.

Pour le calcul des fonctions de garde et les dynamiques continues associées à chaque mode de fonctionnement du système, le vecteur d'état du système est généralement augmenté par l'état x_c du correcteur continu employé. Une bonne conduite (pas de changement brusque ni de l'accélération ni de la vitesse) impose des contraintes additionnelles sur les instants de commutations entre les gammes des vitesses au niveau de la boîte pour plus de détail voir [24] [36].

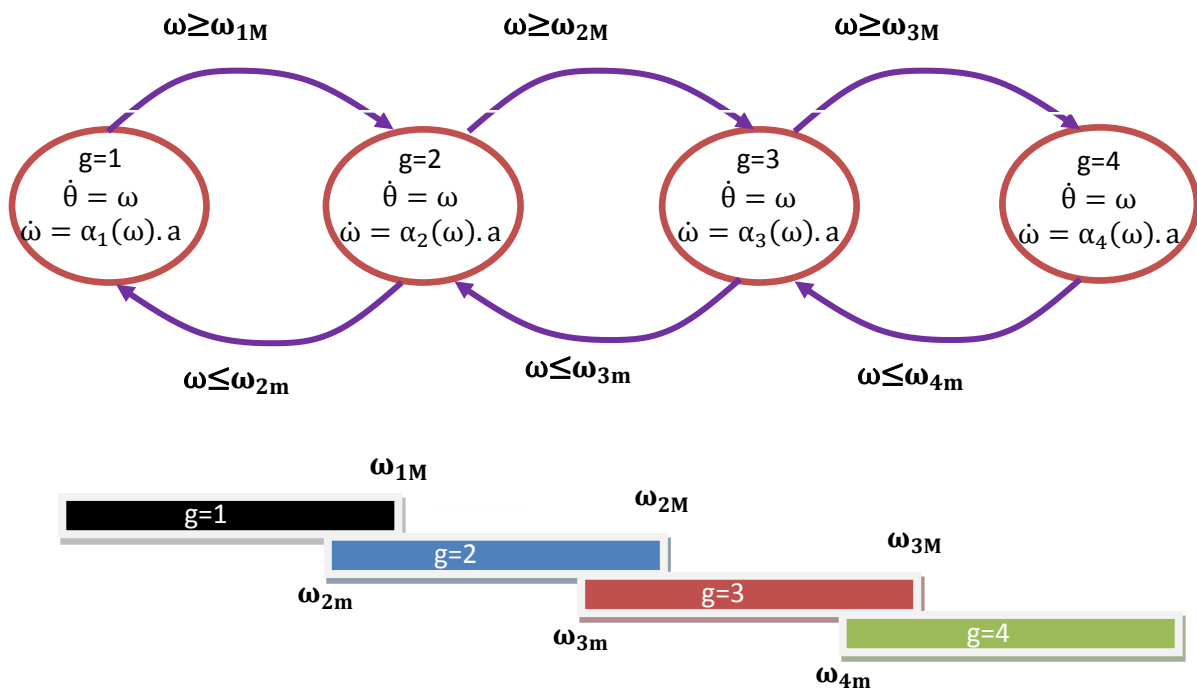


Fig. 2.2. Automate hybride du fonctionnement de la boîte de vitesse automatique.

2.3.2. Exemple 2 Convertisseur DC-DC de type Buck-Boost

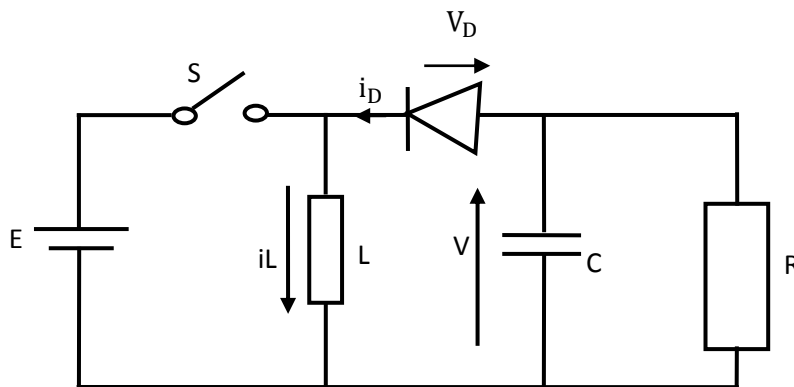


Fig. 2.3. Circuit électrique simplifié du Buck-Boost.

En considérant le schéma simplifié du circuit Buck-Boost avec des composants parfaits. Si on ne permet pas au courant dans l'inductance de s'annuler en excluant le mode de fonctionnement discontinu, la manipulation du commutateur commandé conduit aux deux modes de fonctionnement suivants :

1. Commutateur fermé et diode bloquée.
2. Commutateur ouvert et diode conductrice.

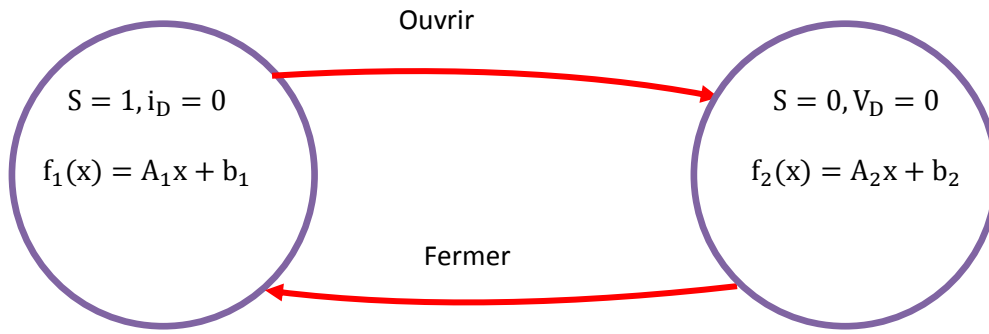


Fig. 2.4. Schématisation du fonctionnement hybride du Buck-Boost

En mode 1, il y a transfert d'énergie à l'inductance sous forme magnétique alors que la capacité alimente la charge. Lorsqu'on ouvre le commutateur, le circuit se trouve en mode 2 pendant lequel l'énergie emmagasinée dans l'inductance est restituée vers la capacité et la charge. Si on laisse le temps à l'inductance de se décharger complètement, la diode se bloque et le courant dans l'inductance s'annule, le circuit passera en mode discontinu c'est ce mode qui a été exclu du fonctionnement. Noter que la description du convertisseur multicellulaire le plus simple (à deux paires d'interrupteurs) avec ce formalisme nécessite beaucoup de calcul pour définir les domaines invariants et les fonctions de gardes.

2.3.3. Séquence d'exécution dans un système hybride :

Une exécution dans un système hybride est représentée par l'évolution temporelle des états hybrides, elle est essentiellement caractérisée par des segments de temps pendant lesquels les dynamiques continues évoluent et des instants de temps bien précis de l'arrivée d'évènements qui causeraient les transitions et par suite les changements de comportements [19][31][48]. Une version simplifiée de la définition du temps hybride ou séquence de temps proposée dans [52] est la suivante :

Définition 2.16 : (temps hybride ou séquence de temps)

Un temps hybride est un ensemble ordonné d'intervalles de temps $T = \cup_{i=0}^{i=N} I_i$ fini ou infini tels que :

- $I_i = [t_i, t_{i+1}^-]$ pour $0 \leq i < N$;
- Si $N < \infty$, $I_N = [t_N, t_{N+1}^-]$ avec $t_N \leq t_{N+1}^-$ ou $I_N = [t_N, t_{N+1}^-)$ pour $t_N < t_{N+1}^-$ ou bien carrément $I_N = [t_N, \infty)$.
- $t_i \leq t_{i+1}^- = t_{i+1}$ pour tout i .

Le temps qui s'écoule entre l'instant de l'arrivée de l'évènement t_i^- de la $i^{\text{ème}}$ transition et l'instant de l'achèvement de cette transition t_i est supposé très faible i.e. $[t_i^-, t_i] \ll$ et donc des transitions instantanées sont envisagées. Par conséquent, le temps hybride T d'un système sera complètement caractérisé par la séquence des instants de commutation t_i i.e. $\langle T \rangle = \{t_i, i = 1, 2, \dots, N\}$.

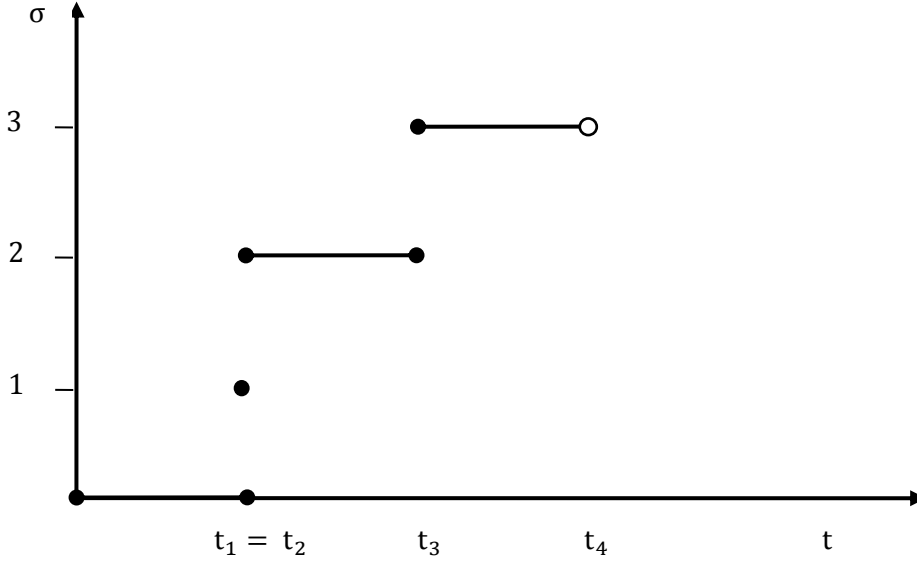


Fig. 2.5. Schématisation du temps hybride

Remarque 2.6 :

A noter que $x_i(t_{i+1}^-)$ représente un point de sortie du domaine D_{q_i} (donc appartient à la frontière ou bordure de D_{q_i}) plus précisément si I_i est un intervalle fermé alors $x_i(t_{i+1}^-)$ est un point de la bordure de D_{q_i} ou si I_i est un intervalle ouvert plutôt c'est $\lim_{t \rightarrow t_{i+1}^-} x_i(t)$ qui appartient à la bordure de D_{q_i} .

Trajectoire hybride [52] :

Une trajectoire hybride (T, q, x) est constitué d'un temps hybride $T = \bigcup_{i=0}^{i=N} I_i$ et de deux séquences de fonctions $q = \{q_i(\cdot)\}_{i=0}^{i=N}$ avec $q_i(\cdot) : I_i \rightarrow Q$ et $X = \{X_i(\cdot)\}_{i=0}^{i=N}$ avec $X_i(\cdot) : I_i \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Exécutions d'un système hybride [18] [19] [24] [31] [48] [52] :

Une exécution d'un système hybride autonome est une trajectoire hybride (T, q, x) de ses variables d'états. La trajectoire hybride est admissible si elle respecte les règles de définition de l'automate.

Définition 2.17 :

Une exécution d'un automate hybride est une trajectoire hybride (T, q, x) qui satisfait les conditions suivantes :

- Condition initiale: $(q_0(t_0), x_0(t_0)) = (q_0, x_0) \in \text{Init}$.
- Évolution du mode discret : $(q_i(t_{i+1}^-), q_{i+1}(t_{i+1})) \in E$,
 $x_i(t_{i+1}^-) \in G(q_i(t_{i+1}^-), q_{i+1}(t_{i+1}))$, $x_{i+1}(t_{i+1}) \in R((q_i(t_{i+1}^-), q_{i+1}(t_{i+1})), x_i(t_{i+1}^-))$.
- Évolution continue : pour tout i ,
 1. $q_i(t) = q_i(t_i)$ pour tout $t \in I_i$.i.e. $q_i(\cdot) : I_i \rightarrow Q$ est constante dans I_i .
 2. $x_i(\cdot) : I_i \rightarrow X$ est solution de $\dot{x}_i = f(q_i(t), x_i(t))$ pour $t \in I_i$ et $x_i(t_i)$ comme condition initiale.
 3. Pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}^-)$, $x_i(t) \in \text{Dom}(q_i(t))$.

Cette exécution est conforme avec la définition de l'automate en (2- 15). La deuxième condition qui montre comment s'effectue la transition, mérite d'être clarifiée, en effet, elle montre la relation entre l'état hybride juste avant la transition i.e. $(q_i(t_{i+1}^-), x_i(t_{i+1}^-))$ et celui juste après i.e. $(q_{i+1}(t_{i+1}), x_{i+1}(t_{i+1}))$ en précisant que $x_i(t_{i+1}^-)$ appartient à la garde de l'arc de la transition et $x_{i+1}(t_{i+1})$ appartient à la réinitialisation de la transition correspondante. Il est évident que la garde de la transition peut être attribuée à la validation de cette transition. Enfin, on notera qu'une transition doit s'effectuer (forcer) si l'état continu essaye de sortir du domaine invariant correspondant à l'état discret associé.

Classification des exécutions :

Une exécution (T, q, x) est dite :

- Finie, si $N < \infty$ et I_N est fermé.
- Infinie, si $N = \infty$ ou $\sum_{i=0}^{i=N} (t_{i+1}^- - t_i) = \infty$.
- Zeno, si $N = \infty$ et $\sum_{i=0}^{\infty} (t_{i+1}^- - t_i) < \infty$.

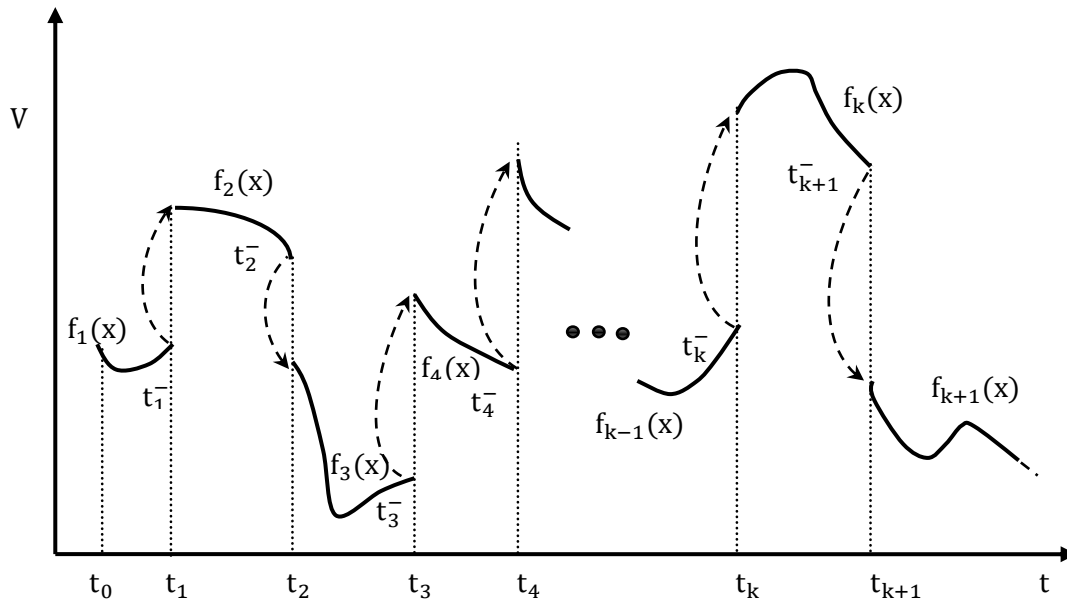


Fig. 2.6 Exemple d'exécution dans un système hybride.

Exécution périodique :

Il est important de noter que les exécutions dans les systèmes hybrides peuvent aussi présenter un comportement périodique. Mais déterminer sous quelles conditions un système hybride accepte ce genre d'exécutions est une opération très complexe. D'autant plus, très peu d'outils mathématiques disponibles sont aptes à analyser les solutions périodiques des systèmes hybrides. Néanmoins, certaines tentatives de généralisation du théorème de Poincaré Bendixon aux inclusions différentielles et systèmes hybrides existent déjà et plusieurs versions d'équivalent hybride du théorème sont proposées.

Rappelons que la définition de comportement périodique de systèmes hybrides ne diffère en rien de celle des systèmes classiques :

Définition 2.18 (Exécution périodique) :

Une exécution (T, q, x) est dite périodique, si elle est infinie et il existe un $T_p > 0$ tel que :
 $\forall t \in T, q(t + T_p) = q(t)$ et $x(t + T_p) = x(t)$: T_p est la période de l'exécution.

La notion de sensibilité des trajectoires par rapport aux paramètres et aux conditions initiales ainsi que la théorie de stabilité de Lyapunov sont généralement utilisées pour analyser ce genre de solutions [32] [33] [69] [71].

2.3.4. Bon conditionnement dans un système hybride :

Systèmes hybrides déterministes et non bloquants :

La notion du non blocage est liée à l'existence d'exécution pour toutes les conditions initiales alors que le déterminisme indique son unicité. Nous avons déjà vu que pour un système dynamique continu décrit par une équation différentielle, ces deux propriétés sont vérifiées si le champ vecteur est Lipschitz continu. Cela n'est pas aussi simple pour les systèmes hybrides [4] [19] [24] [31] [38] [52] :

- L'existence et l'unicité de trajectoire sont assurées pendant l'évolution continue par la propriété de Lipschitz des champs vecteurs.
- Reste à définir ces deux notions aux moments des transitions :

Définition 2.19 : [52]

D'une manière générale, un système hybride (autonome) est déterministe si une transition n'est possible que lorsque l'évolution continue est bloquée. De plus si une transition est autorisée alors toutes les autres sont bloquées et la variable continue ne peut être réinitialisée qu'à une seule valeur. Il est déterministe et non bloquant si chaque fois qu'une évolution continue est bloquée (la variable continue atteint la frontière d'un domaine) alors une transition est possible voir figure ci-après.

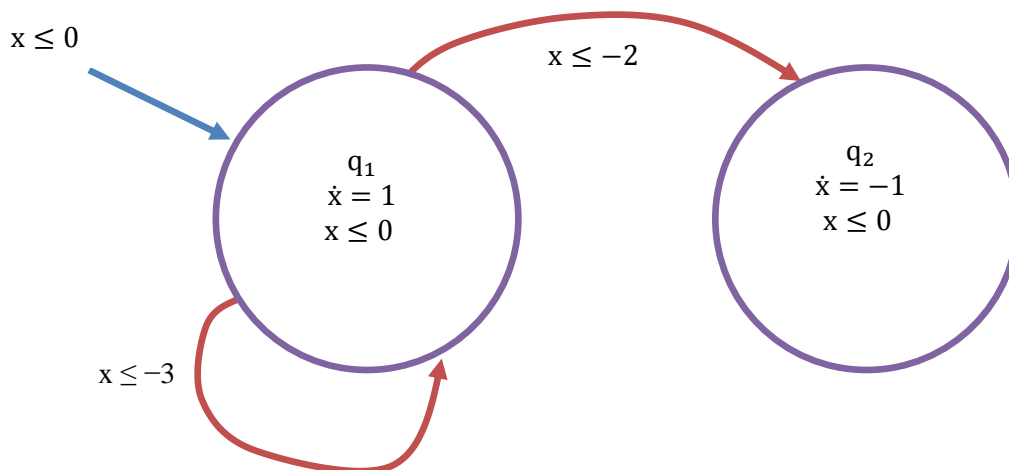


Fig. 2.7 Exemple de système hybride bloquant et non déterministe.

L'existence et l'unicité d'exécutions d'un système hybride pour toute condition initiale est formellement mieux exprimé par le lemme suivant :

Lemme 2.1 : [24] [52]

Un système hybride accepte une exécution maximale unique si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. S'il est non bloquant i.e. pour tout état de transition (q_i, x) ,
 $\exists q_j$ tel que $(q_i, q_j) \in E$ et $x \in G(q_i, q_j)$.
2. S'il est déterministe i.e. pour tout état (q_i, x) ,
 - Si $x \in G(q_i, q_j)$ pour un certain $(q_i, q_j) \in E$, alors (q_i, x) est un état de transition et $R(q_i, q_j, x)$ est un singleton.
 - Si $(q_i, q_j) \in E$ et $(q_i, q_k) \in E$ avec $q_j \neq q_k$, alors $x \notin G(q_i, q_j) \cap G(q_i, q_k)$.

Remarque 2.7 :

Le non blocage est une condition majeure pour l'évolution du système hybride alors que le déterminisme qui assure l'unicité d'exécution, est une propriété non nécessaire mais désirable pour faciliter l'analyse et la simulation du système. Cependant, dans certaines applications, il est plutôt préférable de travailler avec des systèmes hybrides non déterministes en considérant toutes les exécutions possibles pour modéliser les incertitudes du système physique et de son environnement.

Les conditions de non blocage et de l'unicité d'exécution peuvent être aussi définies à partir des ensembles atteignables et les états de transitions. L'atteignabilité est une notion très importante dans l'étude des systèmes hybrides, elle consiste à regrouper tous les états que la trajectoire du système peut atteindre dans un ensemble appelé ensemble atteignable. Alors que les états de transitions sont définis par tous les états à partir desquels l'évolution continue n'est plus possible.

Dépendance continue de l'exécution par rapport à la condition initiale :

De même que pour les systèmes dynamiques continus, l'exécution dans un système hybride dépend énormément des conditions initiales. C'est une propriété qui exige la continuité du système hybride, elle est impérative pour que le modèle hybride puisse représenter les systèmes réalistes. Par définition, un système hybride est continu si lorsque deux de ses exécutions démarrent de conditions initiales proches restent proches. Par conséquent, on peut toujours imposer une aussi petite distance entre les conditions initiales de façon que les exécutions empruntent la même séquence initiale de commutations. La continuité du système hybride par rapport aux conditions initiales est formellement exprimée par le théorème suivant :

Théorème 2.5 : [31] [52]

Un système hybride H (avec $Init_H = Dom_H = Atteig_H$) est continu si,

1. H est déterministe
2. $\forall (q_i, q_j) \in E, G(q_i, q_j) \cap D(q_i)$ est un domaine ouvert de $\partial D(q_i)$.
3. $\forall (q_i, q_j) \in E, R((q_i, q_j), (\cdot))$ est une fonction continue.
4. Pour toute évolution non bloquante à partir de $(q_0, x_0) \in Init_H$, on a une évolution non bloquante à partir de $\mathbb{V}(q_0, x_0)$.

Se sont les conditions qui assurent la continuité du système hybride par rapport aux conditions initiales et permettent sa simulation. En effet, la dernière condition montre que l'exécution ne peut atteindre les bordures $\partial D(q_i)$ tangentiellement.

Exécutions Zeno : [81]

D'après la définition (classification) du Zenonnesse, le phénomène Zeno est rencontré lorsqu'il y a une infinité de transitions en un temps fini appelé temps Zeno, cela se traduit par des transitions qui se rapprochent de plus en plus sur ce temps. Ce qui fait que lors de la simulation numérique, après un certain temps, on ne peut plus distinguer les instants de commutations successives t_i . Par conséquent, le problème que pose l'existence de ce phénomène dans les systèmes hybrides est qu'on ne peut plus prévoir le comportement du système sur ce temps Zeno et les conclusions tirées des résultats de simulations peuvent être erronées. Ce phénomène est spécifique aux systèmes hybrides et à commutation, il ne peut y exister dans un système dynamique purement continu ou discret. De tel comportement ressemble bien à une dichotomie de l'axe des temps qui ne s'arrête jamais bien que la convergence soit assurée. Le nom Zeno provient d'un ancien (~490 Avant Jésus Christ) philosophe grec Zeno et de son école Ealina. Ce phénomène aussi simple qu'il soit posait un problème mathématique, il n'a été rigoureusement décrit et résolu qu'au vingtième siècle et récemment reconnu comme un phénomène fondamental pour les systèmes hybrides.

Théoriquement ce phénomène peut être illustré par l'exemple suivant [24] :

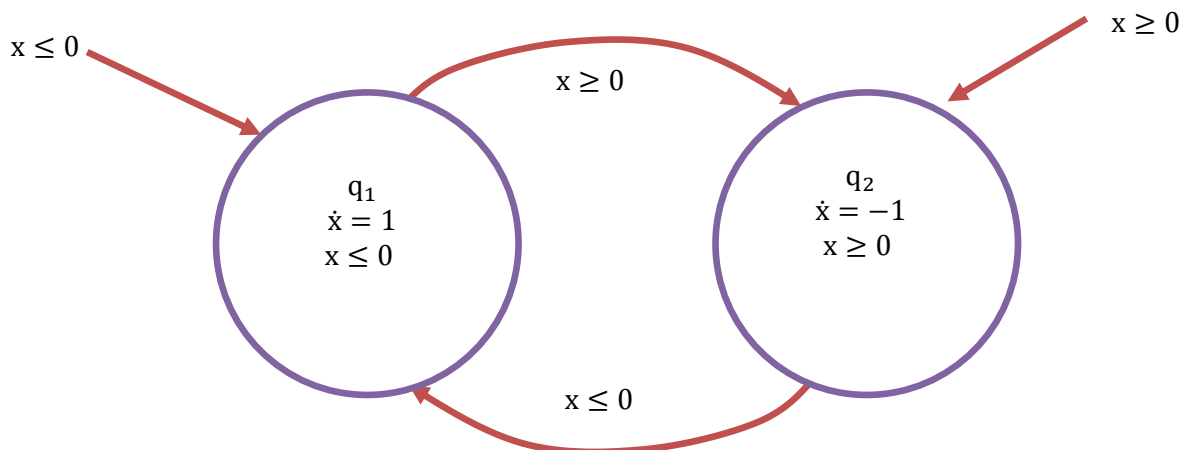


Fig. 2.8 Exemple de système hybride avec des commutations infiniment rapides.

Il est clair que ce système accepte une infinité d'exécutions toutes de types Zeno à partir de n'importe quelles conditions initiales. En effet, le point $x=0$ est atteint à partir d'un point (t_0, x_0) en un temps fini $t = t_0 + \|x_0\|$ puis de perpétuelles commutations se produisent sans de réelle progression dans le temps. Ce phénomène est aussi observé dans le cas de chute libre d'une balle bondissante.

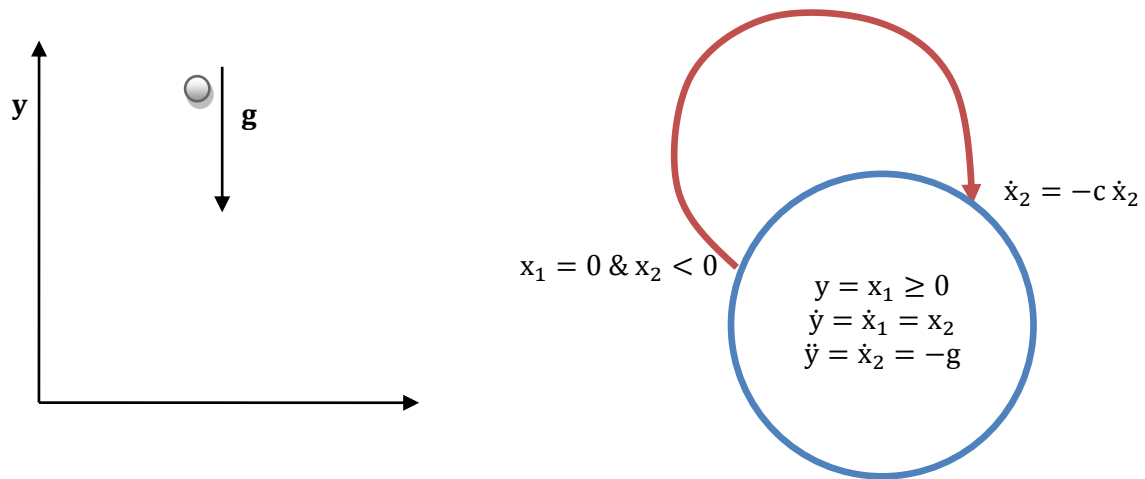


Fig. 2.9 Schématisation hybride de la balle bondissante.

Chute libre: $\ddot{y} = -g$, Collision : $y^+(t) = y^-(t) = 0$ & $\dot{y}^+(t) = -c\dot{y}^-(t)$ avec $c \in [0,1]$ coefficient d'absorption d'énergie à l'impact, g est l'accélération due à la gravité terrestre.

Il est clair que cet exemple de système hybride est déterministe et sans blocage mais avec saut et réinitialisation. Les instants d'impacts peuvent être facilement calculés, par ex :

Le premier impact se produit à : $t_1 = t_0 + \left(x_2(t_0) + \sqrt{x_2^2(t_0) + 2gx_1(t_0)} \right) / g$, et Par suite, le temps d'exécution Zeno est de : $t = t_0 + \frac{x_2(t_0)}{g} + (1 + c)\sqrt{x_2^2(t_0) + 2gx_1(t_0)} / g(1 - c)$.

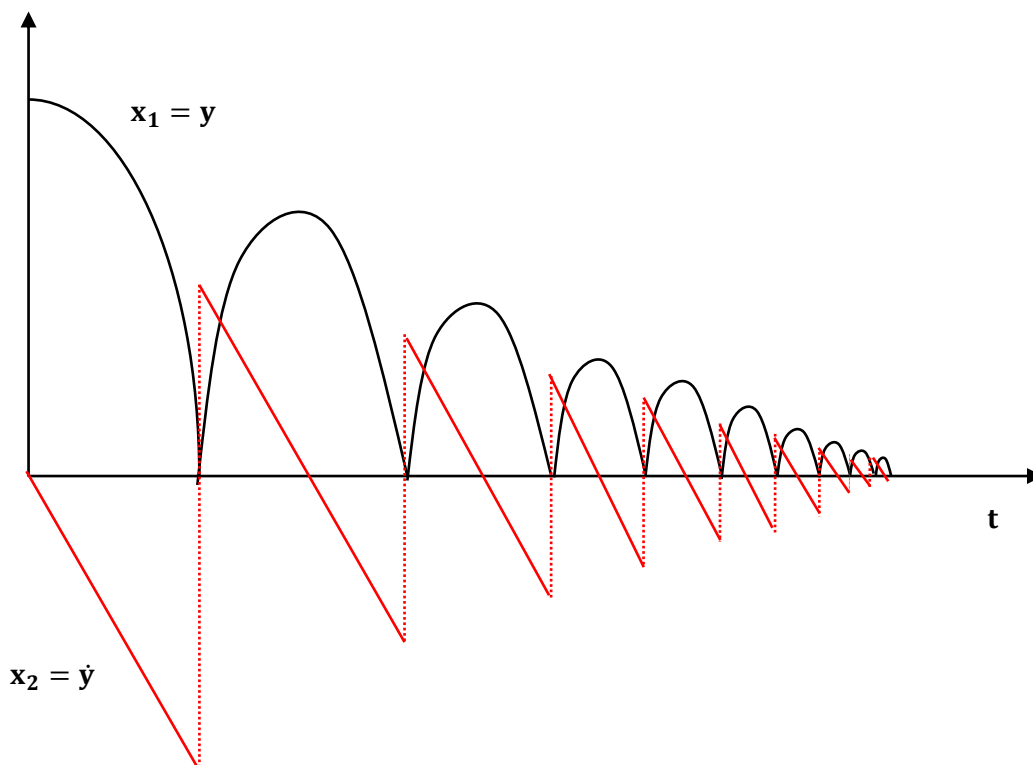


Fig. 2.10 Schématisation de la position verticale et de la vitesse de la balle

L'étude du phénomène Zeno est très importante, car des conclusions erronées de la simulation des systèmes peuvent être tirées si celui-ci est ignoré. Cependant, l'ignorance ou l'obtention de conditions d'exclusion de ce phénomène qui est réel et intrinsèque, n'est pas toujours la bonne solution dans la simulation des systèmes hybrides physiques avec une précision finie. Plutôt, l'extension de l'évolution au-delà du temps Zeno par des dynamiques équivalentes ou la régularisation du fonctionnement en considérant toutes les dynamiques ignorées du système constituent bien les approches les plus pratiques pour se charger du problème.

2.3.5. Stabilité d'un équilibre dans un système hybride :

Nous ne voulons pas aborder le concept de stabilité pour un système hybride en général, plutôt nous préférons détailler ce concept dans le chapitre suivant pour les systèmes commutés qui représentent la classe la plus importante des systèmes hybrides où toutes les notions communément utilisées dans les systèmes dynamiques sont transposables. Nous pouvons nous contenter des définitions suivantes :

Définition 2.20 : [52] [54]

$x^* = 0 \in R^n$ est un point d'équilibre pour le système hybride \mathcal{H} , si :

- $f(q,0)=0$ pour tout $q \in Q$ et
- $((q_1, q_2) \in E) \wedge (0 \in G(q_1, q_2)) \implies R(q_1, q_2, 0) = \{0\}$.

Autrement dit, $(q_0, 0) \in \text{Init}$ et $(\tau, q, x) \in \mathcal{H}_{(q_0,0)}$, alors $x(t)=0$ pour tout $t \in \tau$.

De même l'extension de la notion de stabilité d'équilibre aux systèmes hybrides est directe :

Définition 2.21 : [24] [52] [54]

Soit $x^* = 0 \in R^n$ un équilibre du système hybride \mathcal{H} , cet équilibre est stable, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que pour toute exécution $(\tau, q, x) \in \mathcal{H}_{(q_0, x_0)}$ avec $\|x_0\| < \delta$, $\|x(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \in \tau$.

Définition 2.22 : [24] [52] [54]

Soit $x^* = 0 \in R^n$ un équilibre du système hybride \mathcal{H} , cet équilibre est asymptotiquement stable, s'il est stable et il existe $\delta > 0$ telle que pour toute exécution $(\tau, q, x) \in \mathcal{H}_{(q_0, x_0)}^\infty$ avec $\|x_0\| < \delta$, $\lim_{t \rightarrow \tau_\infty} x(t) = 0$ pour tout $t \in \tau$.

Une extension du théorème 2.2 aux systèmes hybrides peut être directement obtenue.

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons essayé de faire une démarche progressive pour la représentation des systèmes dynamiques en rappelant les notions de base pour les systèmes dynamiques continus et leurs extensions aux systèmes hybrides ou à structures variables. Le choix d'exemples élémentaires dans la démarche conduit certainement à une meilleure compréhension du phénomène hybride. L'approfondissement des concepts de stabilité ou de stabilisation de ces systèmes a été plutôt réservé aux systèmes commutés qui représentent une classe particulière en relation directe avec nos travaux dans le chapitre suivant.

Chapitre III

État de l'art sur les Systèmes à Commutations

Introduction :

Le formalisme hybride constitue un outil mathématique très puissant, il attire l'attention des chercheurs de différentes communautés scientifiques. Son plus grand atout, est sa capacité de pouvoir prendre en charge les modèles de nombreuses applications de domaines variés. Cependant, la diversité des problèmes traités et des performances de plus en plus rudes dans la conception de produits de hautes gammes, compliquent le groupement de toutes les méthodologies associées et les outils de développements dédiés sous un même formalisme. De toute façon, le développement de méthodologies multidisciplinaires n'attire pas les chercheurs contemporains. En dehors des concepts généraux communs, les systèmes hybrides ont été divisés en classes et sous-classes selon le phénomène hybride majeur engendré et le type d'abstraction envisagée. Nos travaux de thèse sont abordés du point de vue automatique où tous les procédés à commander sont divisés en un phénomène majeur qui décrit l'évolution continue du procédé sujet de phénomènes secondaires transitoires pouvant être de type événementiel qui affectent le comportement des dynamiques du système. Tous les systèmes physiques pouvant être modélisés de cette manière, sont appelés systèmes à commutations. C'est à partir de ce point de vue que la théorie de la commande automatique voit les systèmes hybrides. En effet, les systèmes commutés constituent la classe des systèmes hybrides la plus importante et celle qui a reçu plus d'investigations en automatique. Cet intérêt provient du fait, que plusieurs phénomènes physiques non linéaires et/ou à dynamiques variables peuvent être décrit par des systèmes à commutations, en conséquence, presque toutes les approches proposées et les outils développés pour les systèmes hybrides concernent essentiellement les systèmes à commutations [18] [23] [31] [40] [65] [82]. Les investigations de ces systèmes s'articulent autour des questions d'analyse de la stabilité et de la stabilisation par commutations ou la conception de commande. La commande multi modèles ou multi contrôleurs ainsi que les systèmes à logique de commutation (y compris les exemples cités auparavant) ou à structure variable font partie des investigations de cette classe qui constitue l'objectif de notre travail.

A noter que la notion de systèmes commutés n'est pas nouvelle, tous les exemples réels cités et ceux de toutes les applications qui rentrent dans ce cadre, ont été déjà développés et pris en charge par différentes approches mais de manières spécifiques et surtout non systématiques. La différence entre un système dynamique continu et un système commuté est la présence de discontinuités dans le champ vecteur de ce dernier suivi de changement de comportement. Ces systèmes sont modélisables par des équations différentielles discontinues à droites (EDD) qui ont une longue histoire en mathématique et aussi en automatique avant même la notion de systèmes à commutations.

3.1. Systèmes à champs vecteurs discontinus :

L'une des motivations d'étudier les systèmes discontinus provient du fait que la modélisation de certains systèmes technologiques (ex. mécaniques ou électriques) conduit souvent à des équations différentielles discontinues à droites (EDD). Ces dernières résultent aussi de l'approximation des systèmes fortement non linéaires par des systèmes continus par morceaux et l'obtention de systèmes commutés. Les systèmes discontinus sont largement investigués, toutefois certains phénomènes restent incompréhensibles et/ou inconnus jusqu'à maintenant. Ces systèmes sont principalement caractérisés par des transitions entre régions d'espace d'états et la traversée de surfaces de séparation aux niveaux des discontinuités, le problème se complique d'avantage lorsque le système comporte de nombreuses discontinuités et/ou la surface de séparation est commune à plusieurs (plus de deux) régions de l'espace des états. L'étude des équations différentielles discontinues nécessite la généralisation du concept de solution, en effet lorsque les discontinuités à droite sont par rapport à la variable x dans le cas de notre système (2-3) alors la solution n'est pas facile à décrire [21] [38][44] [48].

Supposons que notre système (2-3) possède une discontinuité en un certain point x à partir duquel il change de comportement comme suit :

$$\dot{x} = \begin{cases} f_-(x) & \text{si } \varnothing(x) < 0 \\ f_+(x) & \text{si } \varnothing(x) > 0, \end{cases} \quad (3-1)$$

Naturellement, cette discontinuité divise l'espace d'états en deux parties par un hyperplan $\varnothing(x) = 0$: on notera par $X^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | \varnothing(x) > 0\}$, l'ensemble des x où les dynamiques du système sont décrites par : $\dot{x} = f_+(x)$ et par $X^- = \{x \in \mathbb{R}^n | \varnothing(x) < 0\}$, l'ensemble des x où les dynamiques du système sont décrites par : $\dot{x} = f_-(x)$. Le système ci-dessus est représenté par une équation différentielle discontinue ce qui conduit à la perte de la propriété de Lipschitz ainsi que tous ses avantages.

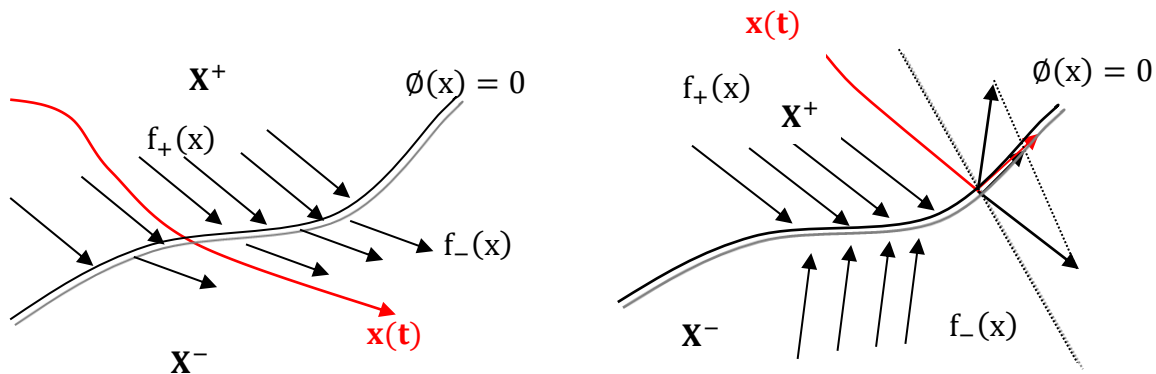


Fig. 3.1. Solution au sens de Carathéodory (à gauche) et au sens de Filipove (à droite).

Pour tous les x appartenant à la surface de commutation $\varnothing(x) = 0$, lorsque les deux champs vecteurs $f_-(x)$ et $f_+(x)$ pointent vers la même direction (c.à.d. tous deux vers X^+ ou X^-), l'évolution du système sera celle du domaine d'arrivée. En supposant que $\varnothing(x)$ est différentiable, en désignant par F_+ et F_- les deux projections respectivement de $f_-(x)$ et $f_+(x)$ sur la normale (qui pointe vers X^+), alors en tout point x de la surface de commutation nous avons : $F_+ = \frac{\nabla\varnothing(x)f_+(x)}{\|\nabla\varnothing(x)\|}$ et $F_- = \frac{\nabla\varnothing(x)f_-(x)}{\|\nabla\varnothing(x)\|}$ avec $\nabla\varnothing(x) = \partial\varnothing(x)/\partial x$ gradient de \varnothing au point x . Cela conduit à $(F_-(x) \cdot F_+(x)) > 0$ lorsque les deux champs vecteur pointent vers la même direction, alors que $(F_-(x) \cdot F_+(x)) < 0$ est obtenue dans les deux autres situations suivantes :

- $F_+(x) > 0$ ($f_+(x)$ pointe vers X^+) et $F_-(x) < 0$ ($f_-(x)$ pointe vers X^-), on a répulsion de la surface de discontinuité des deux cotés. Pour un x de la surface de commutation qui satisfait ces deux conditions, il y a (au moins) deux trajectoire à suivre : l'une allant vers X^+ selon les dynamiques $\dot{x} = f_+(x)$ et l'autre vers X^- selon les dynamiques $\dot{x} = f_-(x)$.
- $F_+(x) < 0$ ($f_+(x)$ pointe vers X^- en s'éloignant de X^+ où il est défini) et $F_-(x) > 0$ ($f_-(x)$ pointe vers X^+ en s'éloignant de X^- où il est défini), il y a attraction vers la surface de discontinuité des deux cotés. Par conséquent, il est impossible d'aller vers X^- ou X^+ lorsqu'on rentre dans la surface de commutation et donc pas de solution ni pour $\dot{x} = f_+(x)$ ni pour $\dot{x} = f_-(x)$.

Ainsi, nous avons deux solutions dans le premier cas (non unicité de la solution) et pas de solution dans le deuxième cas (non existence de solution) c'est les conséquences de perte des propriétés de Lipschitz aux niveaux des discontinuités. Cette situation et surtout l'absence de solution pose un problème conceptionnel pour la stabilité et la stabilisation des systèmes à

discontinuités. Une première solution consiste à relaxer le système par une petite hystérésis Δ ou un petit retard Δt temporel au niveau de la commutation ce qui permet de provoquer les commutations juste à coté de l'hypersurface $\emptyset(x) = 0$ et le résultat sera production de commutations rapides. Si $\Delta \rightarrow 0$ ou $\Delta t \rightarrow 0$, les commutations deviennent infiniment rapides conduisant au phénomène de chattering, dans le cas limite le changement se fait par un glissement le long de la surface de commutation et le phénomène associé s'appelle mode glissant ; phénomène qui a attiré l'attention de plusieurs chercheurs.

Une des solutions est due à Filipove³ [1][21][44] qui proposait une troisième dynamique moyenne de celles du voisinage de la surface de commutation (approximée par une combinaison convexe des deux autres dynamiques) selon laquelle le système évolue ou plutôt glisse le long de la surface de commutation: $\dot{x} = \lambda f_+(x) + (1 - \lambda)f_-(x)$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$. Et notre système à discontinuité devient :

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x) = f_+(x) & \text{si } \emptyset(x) > 0 \\ f_3(x) = \lambda f_+(x) + (1 - \lambda)f_-(x) & \text{si } \emptyset(x) = 0 \\ f_2(x) = f_-(x) & \text{si } \emptyset(x) < 0, \end{cases} \quad (3-2)$$

Où plusieurs valeurs sont assignées au second membre du système (du coté droit de $\emptyset(x) = 0$), par conséquent il peut être représenté par une inclusion différentielle $\dot{x} \in \mathcal{F}$ pour laquelle un concept de solution existe [5].

Remarque 3.1 : [21] [31] [44]

- *En effet, dans le cas de commutation simple (surface commune à seulement deux dynamiques), il est toujours possible de trouver une unique dynamique pour le mode glissant mais pas nécessairement linéaire. Par suite l'existence et l'unicité de la solution de Filipove ci-dessus ne pose pas de problème dans ce cas. Par contre, dans le cas de commutations multiples (surface commune à plusieurs dynamiques), l'unicité du mode glissant est difficile à prouver et généralement non assurée, d'autant plus, la preuve d'attractivité devient un problème très compliqué. Cela est souvent rencontré lorsque certains phénomènes physiques sont négligés dans l'approche de modélisation.*
- *Le mode glissant peut aussi se produire quand les champs vecteurs sont tangents par rapport à la surface de commutation i.e. $(F_+(x) \cdot \nabla \emptyset(x)) = 0$, $(F_-(x) \cdot \nabla \emptyset(x)) = 0$, $\emptyset(x) = 0$, dans ce cas les modes sont glissants d'ordres supérieurs. Se sont des modes glissants non réguliers, si on désire affecter aux modes glissants non réguliers des dynamiques différentes de celle proposée par Filipove, notre système (3-2) aura plus de 3 comportements.*
- *L'étude de commutations multiples et du mode glissant non réguliers est un problème très compliqué et sort du cadre de notre travail. Nous ne considérons que le mode glissant simple et régulier donc attractif défini ci-dessous.*

Définition 3.1 : [40]

Soit $X_0 = X^+ \cap X^- \subseteq \{x | \emptyset(x) = 0\}$ une surface commune des deux bordures de X^+ et X^- définie (par ex) par : $\{x | \emptyset(x) \geq 0 \text{ pour } x \in X^+\}$, donc la région (ou l'ensemble de points) :

$$S_0 = \{x \in X_0 | F_+(x) \cdot \nabla \emptyset(x) < 0 \wedge F_-(x) \cdot \nabla \emptyset(x) > 0\} \quad (3-3)$$

est appelé région du mode glissant régulier pour notre système, si cette région est non vide, le système a un mode glissant attractif sur S_0 .

Cette définition fournit indirectement un test de l'existence de mode glissant régulier. La définition suivante permet de dégager une propriété importante du mode glissant attractif, qui nous paraît très utile pour caractériser le mode glissant dans le cas des systèmes hybrides et commutés.

³ Une autre version est développée par Utkin pour les systèmes non autonomes

Définition 3.2 :

un système a un mode glissant attractif en un point x_* , s'il a une trajectoire qui atteint x_* mais n'a pas de trajectoire qui part d'une condition initiale x_* .

Si on désire que le système évolue en mode glissant régulier pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, la résolution se fait en imposant $\phi(x) = 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$ et donc aussi $\partial\phi(x(t))/\partial t = 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$. Ce qui conduit à :

$$\frac{\partial\phi(x(t))}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial\phi(x(t))}{\partial x} [\lambda f_+(x) + (1 - \lambda)f_-(x)] = 0 \quad (3-4)$$

A partir de laquelle λ est déterminée, l'injection de l'expression de λ dans f_3 permet de dégager les dynamiques du mode glissant. Une démarche similaire à celle présentée a été proposée par Navarro-Lopez [60] pour représenter les systèmes dynamiques discontinus avec entrée de commande par un système dynamique hybride.

Remarque 3.2 :

Nous nous sommes limités au cas simple d'une seule discontinuité, les travaux de Filipove sont d'application générale lorsque le système présente plusieurs discontinuités donc représenté par une fonction continue par morceaux.

L'automate hybride pouvant décrire le système augmenté (3-2) est simplement celui du (3-1) augmenté d'un troisième mode (celui de Filipove).

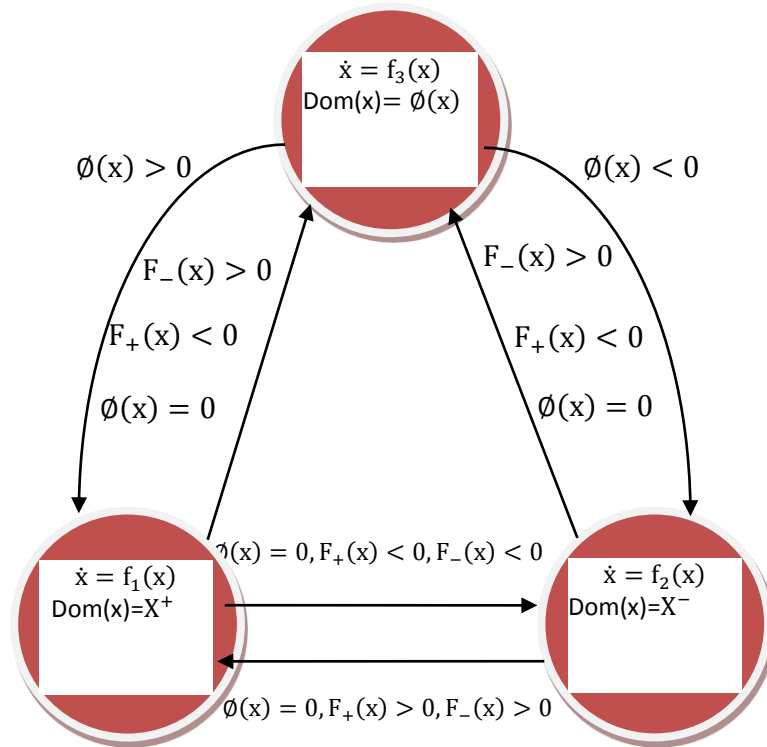


Fig. 3.2. Schématisation hybride de système avec une seule discontinuité.

3.2. Systèmes à commutations :

Les systèmes commutés représente une classe de systèmes hybrides modélisables par des EDD, ils sont principalement caractérisés par des transitions entre régions d'espace sans réinitialisation des d'états. La traversée de surfaces de séparation aux niveaux des discontinuités est orchestrée par une loi de commutation [18] [31] [36] [37].

Définition 3.3 :

De façon très générale, un système commuté est une collection de sous-systèmes dynamiques continus et une logique de décision permettant d'orchestrer les commutations.

Un système commuté peut être décrit par :

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), u(t), t) \quad (3-5)$$

Ou plus généralement par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), u(t), t) \\ \sigma(t) = \varphi(x(t), \sigma(t^-), t) \end{cases} \quad (3-6)$$

Où $\sigma(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{I}$ est une fonction constante par intervalle de temps, elle détermine à chaque instant t le sous-système actif, c 'est le signal de commutations qui prend ses valeurs dans l'ensemble des indices \mathbb{I} . Autrement dit, on suppose que les points de discontinuités (des champs vecteurs) sont complètement caractérisés par la séquence : $t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_f$ où t_f peut être infini. Et que $\sigma(t)$ est continue à droite i.e. $\sigma(t) = i_k$ pour $t_k \leq t < t_{k+1}$.

Classification des commutations :

Le modèle précédent (3-6) est général, le principe est que chaque transition conduit à un changement de mode, chaque mode possède ses propres dynamiques. Le comportement global du système hybride est caractérisé par l'ensemble des dynamiques visitées et les transitoires dus aux commutations. Ces dernières peuvent être autonomes ou commandées de l'extérieur toutes les deux peuvent engendrer des réinitialisations, Selon la nature de ces commutations, les comportements des systèmes hybrides ont été classifié dans [18].

L'absence de l'entrée $u(t)$ dans ces équations conduit à la représentation des systèmes autonomes objet de notre travail. De plus, nous sommes concernés essentiellement par la stabilisation des systèmes commutés où le signal de commutations $\sigma(t)$ et la fonction $\varphi(\cdot)$ ne sont généralement pas connues a priori. Plutôt, c'est notre tâche de concevoir ce signal de commutation ; donc nous n'utilisons que la première représentation (3- 5). Encore, nous excluons de cette représentation les systèmes impulsives ou à sauts ; ainsi les systèmes commutés considérés ne comportent pas de sauts d'états lors des commutations mais avec éventuellement des discontinuités (à droite) de leurs dérivées (champs vecteurs) aux niveaux des instants ou surfaces de commutations. Enfin, une autre simplification adoptée est la stationnarité des systèmes considérés pour lesquels le temps n'apparaît pas explicitement dans leurs équations différentielles.

Nous considérons tout au long de ce travail le système commuté du type suivant :

$$\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x) \quad (3-7)$$

Où dans le cas linéaire
$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x(t) \quad (3-8)$$

Dans le cas général, le signal de commutation peut dépendre du temps et/ou de l'état du système, comme il peut être généré par toute autre technique externe.

3.3. Stabilité des systèmes commutés :

Dans l'étude ou la conception de commande des systèmes dynamiques, une présélection permet d'exclure tous les équilibres instables des points de fonctionnement de façon que le système soit essentiellement caractérisé par les comportements à énergie minimale représentés par les points d'équilibres stables ou les phénomènes cycliques. Le concept de stabilité est motivé par le désir de maintenir les systèmes sur ces configurations

remarquables ou du moins plus proches après un temps d'évolution suffisamment prolongé. Cette propriété tant désirée en pratique est liée à la stabilité asymptotique des systèmes, son avantage lorsqu'elle est vérifiée, est d'assurer que la trajectoire du système converge tôt ou tard vers le point désiré. Pour les systèmes à commutations, toutes les notions définies pour les systèmes dynamiques continus sont transposables, certaines définitions et théorèmes nécessitent de réelles extensions pour les faire adapter aux systèmes à commutations d'autres sont presque directement applicables. Cependant, le problème de stabilité pour les systèmes à commutation est rendu complexe par la présence de discontinuités et le changement de dynamiques. Néanmoins, ce changement de dynamiques reste très intéressant et riche en matière de variété de conclusions qu'on peut tirer en fonction du signal de commutation et des propriétés individuelles des sous-systèmes. Ces dernières s'avèrent insuffisantes pour l'étude de la stabilité du système global. Nous avons déjà signalé au chapitre 2, que mathématiquement les solutions des équations différentielles discontinues à droite (EDD) sont historiquement liées aux inclusions différentielles [21]. En effet, pour un système commuté constitué par une collection de sous-systèmes, il est tout à fait naturel de penser aux inclusions différentielles.

3.3.1. Stabilité des systèmes commutés : Approche par les inclusions différentielles :

Les inclusions différentielles correspondantes aux systèmes commutés (3-7 & 3-8) sont décrites par :

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(x) = \{y | y = f_\sigma(x), \sigma = 1, m\}, x(0) = x_0 \quad (3-9)$$

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(x) = \{y | y = A_\sigma x, \sigma = 1, m\}, x(0) = x_0 \quad (3-10)$$

Plus clairement, nous avons : $f_\sigma \in \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ et $A_\sigma \in \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$

Mathématiquement ces inclusions capturent tous les comportements possibles dans (3-7) et (3-8) sans se soucier de la nature des commutations. Leurs solutions sont des fonctions absolument continues vérifiant (3-7) et (3-8) (voir chapitre 2). Les conditions d'existence et d'unicité de ces solutions sont liées aux deux notions suivantes :

Définition 3.4 : [21][44]

Une fonction $F : R^n \rightarrow \mathcal{P}(R^n)$ est dite *supérieurement semi-continue*, si $\forall x_0 \in R^n$ et pour tout ouvert S contenant $F(x_0)$, il existe un voisinage \mathcal{V} de x_0 tel que $F(\mathcal{V}) \subset S$.

Ou équivalamment, si $\forall x \in R^n$ et $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, \delta)$, $F(y) \subseteq \{y_1 + y_2 \in R^n | y_1 \in F(x) \wedge y_2 \in B(0, \varepsilon)\}$.

Théorème 3.1 : [21]

Pour une inclusion différentielle $\dot{x} \in \mathcal{F}(x)$, avec $\mathcal{F}(x)$ non vide, convexe, compacte, supérieurement continue, s'il existe un scalaire $c > 0$ tel que :

$$\forall x \in R^n, \forall y \in F(x) : \|y\| \leq c(1 + \|x\|)$$

Alors l'inclusion différentielle $\dot{x} \in \mathcal{F}(x)$ possède une solution pour chaque condition initiale $x(0) \in R^n$.

Définition 3.5 : (One-sided Lipschitz Continuity [44])

Une fonction $F : R^n \rightarrow \mathcal{P}(R^n)$ est dite *Lipschitz continue d'un seul côté*, s'il existe un scalaire $L > 0$ tel que pour presque tous $x_1, x_2 \in R^n$:

$$\forall y_1 \in F(x_1), \forall y_2 \in F(x_2) : (x_1 - x_2)^t (y_1 - y_2) \leq L \|x_1 - x_2\|.$$

Théorème 3.2 : [21]

Pour une inclusion différentielle $\dot{x} \in \mathcal{F}(x)$, si $\mathcal{F}(x)$ est non vide, convexe, compacte, supérieurement continue et Lipschitz continue d'un seul côté, alors $\dot{x} \in \mathcal{F}(x)$ a au plus une solution pour chaque condition initiale $x_0 \in R^n$.

Nous avons déjà discuté au chapitre 2 la relaxation du système de type (3-10) et sa relation avec l'inclusion différentielle constituée par son enveloppe convexe. En effet, les systèmes convexifiés de (3-9 & 3-10) sont respectivement décrits par :

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(x) = \{y | y \in \text{clco}(f_\sigma(x)), \sigma = 1, m\}, x(0) = x_0 \quad (3-11)$$

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(x) = \{y | y = Ax, A \in \text{clco}\mathcal{A}\} \quad (3-12)$$

Où $\text{clco}(\cdot)$ désigne l'enveloppe convexe fermée de (\cdot) et $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$.

Pour l'inclusion différentielle linéaire (3-10), l'analyse de la stabilité est équivalente à l'analyse de son enveloppe convexe (3-12) [44]. En effet, toute solution de (3-12) peut être approximée par une solution de (3-10) selon le théorème suivant :

Lemme 3.1 : [83]

Pour une condition initiale fixée $z_0 \in R^n$, soit $z : [0, \infty) \rightarrow R^n$ une solution de $\dot{z} \in \{Az | A \in \text{clco}\mathcal{A}\}$, $z(0) = z_0$

Et soit $r : [0, \infty) \rightarrow R$ une fonction continue telle que $r(t) > 0$ pour $t \geq 0$, alors il existe un η avec $\|\eta - z_0\| \leq r(0)$ et une solution $x : [0, \infty) \rightarrow R^n$ de $\dot{x} \in \{A_\sigma x | A_\sigma \in \mathcal{A}\}$, $x(0) = \eta$ telle que : $\|z(t) - x(t)\| \leq r(t)$, $t \in [0, \infty)$.

Stabilité des inclusions différentielles :

En ce qui concerne la stabilité des inclusions, même pour le cas des inclusions linéaires (3-10 & 12), les premiers résultats bien établis restent sans doute ceux reportés dans les travaux de Molchanov & Pyatnitskii [57] [58]. Pour la stabilité des systèmes (3-10) & (3-12), nous avons les théorèmes suivants :

Théorème 3.3 : [58]

L'inclusion différentielle $\dot{x} \in \mathcal{F}(x) = \{y | y = A_\sigma x, A_\sigma \in \mathcal{A}\}$ est asymptotiquement stable si et seulement si l'inclusion différentielle convexe : $\dot{x} \in \mathcal{F}(x) = \{y | y = Ax, A \in \text{co}\mathcal{A}\}$, est stable.

Théorème 3.4 : [58]

L'origine $x=0$ de l'inclusion différentielle linéaire (3-10) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x)$ strictement convexe, homogène (du second ordre) et quasi-quadratique :

$$V(x) = x^t \mathbb{p}(x) x, \quad \mathbb{p}(x) \in R^{n \times n},$$

Avec $V(0) = 0$, $\mathbb{p}(x) = \mathbb{p}(x)^t = \mathbb{p}(ax)$, $a \in R^*$

Dont la dérivée satisfait : $\dot{V}^* = \text{Sup}_{y \in \mathcal{F}(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(v(x+hy) - v(x))}{h} \leq -\gamma \|x\|^2$, $\gamma > 0$.

Où un critère algébrique a été déduit de cette condition.

Théorème 3.5 : [58]

L'origine $x=0$ du système convexifié (3-12) est asymptotiquement stable, si et seulement s'il existe un nombre $N \geq n$, une matrice $L \in R^{n \times N}$ de rang n et une famille de matrices à diagonales dominantes négatives $\{\Gamma_k \in R^{n \times N}, k = 1, \dots, m\}$ telle que :

$$A_k^t L = L \Gamma_k^t, \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

Et la fonction : $v(z) = z^t z$ soit une fonction de Lyapunov pour l'inclusion:

$$\dot{z} \in G(z) = \{y \mid y = \Gamma z, \quad \Gamma \in \text{co}\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m\}\}$$

En effet, ce théorème de stabilité est basé sur la recherche d'une nouvelle inclusion $\dot{z} \in G(z)$ dans un espace de dimension augmenté \mathbb{R}^N qui contient les solutions de l'inclusion de départ. La matrice L , avec $z = L^t x$, représente la matrice de transformation entre les deux inclusions. Les résultats énoncés dans ces deux théorèmes constituent le lien théorique entre les inclusions différentielles et les systèmes commutés linéaires. En effet, leur applications aux systèmes commutés est directe [22] puisque la description d'une collection de dynamiques individuelles (systèmes commutés) par une inclusion différentielle est aussi directe. Cela confirme bien que la stabilité des systèmes commutés implique l'existence de fonction de Lyapunov commune pour tous les sous-systèmes. Toutefois, à ces jours-ci, il n'y a pas de moyens simples qui permettent de vérifier les critères proposés par les deux théorèmes précédents. En général, la recherche numérique ou analytique d'une fonction de Lyapunov quasi-quadratique ou d'une matrice de transformation L n'est pas facile. Ce qui a motivé la majorité des scientifiques à se contenter de la recherche de fonction de Lyapunov quadratique.

Le théorème suivant représente une extension du théorème 2.3 de Lyapunov pour la stabilité des systèmes non linéaires :

Théorème 3.6 : [21] [65]

Soit $\dot{x} \in \mathcal{F}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ une inclusion différentielle. S'il existe une fonction continuellement différentiable $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, appelée fonction de Lyapunov telle que :

Ils existent 3 fonctions de classe \mathcal{K}_∞ tels que :

- $f_1(\|x\|) \leq V(x) \leq f_2(\|x\|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $\dot{V}(x) \leq -f_3(\|x\|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\text{avec } \dot{V}(x) = \text{Sup} \left\{ \left. \frac{dV}{dx}(x) \right| y \right\} \Big| y \in \mathcal{F}(x),$$

Alors le système commuté représenté par l'inclusion différentielle est globalement asymptotiquement stable.

Remarque 3.3 :

La notion d'inclusion différentielle est un formalisme mathématique très général non pas pour les systèmes commutés seulement mais aussi pour les systèmes dynamiques et hybrides dans toutes leurs généralités. En effet, un système hybride peut être vu comme la combinaison de deux dynamiques : continue et discrète.

5.4.2. Les dynamiques continues sont décrites par des équations différentielles à contraintes pouvant être transformées en une inclusion différentielle à contraintes :

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(x), \quad x \in C \subseteq \mathbb{R}^n.$$

5.4.2. Les dynamiques discrètes ou événementielles sont généralement décrites par des fonctions de mise à jour pouvant être aussi transformées en une inclusion à différence avec contraintes : $x^+ \in \mathcal{G}(x)$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Enfin, on obtient un modèle mathématique général pour tous les systèmes dynamiques hybrides qui met tous les formalismes proposés sous le même parapluie :

$$\begin{cases} \dot{x} \in \mathcal{F}(x), & x \in C. \\ x^+ \in \mathcal{G}(x), & x \in D. \end{cases}$$

Où \mathcal{F} et \mathcal{G} sont des fonctions multivaluées représentant respectivement l'évolution des dynamiques continues du système et les mises à jour possibles. C est le domaine d'évolution, D est le domaine des transitions. Toutes les investigations des systèmes hybrides peuvent être faites à travers ce modèle, les différents comportements et les divers phénomènes rencontrés sont généralement fonction de la géométrie des domaines C et D , c'est toute une autre façon de voir les choses [31].

La théorie des inclusions différentielles est très riche par rapport à celle des systèmes hybrides et certains de leurs résultats bien établis ont servi d'inspiration aux systèmes commutés ou sont directement transposables. Cependant, cette approche est purement théorique et son application en technologie omis les meilleurs ingrédients permettant d'apprécier l'utilisation du formalisme hybride. En effet, la notion de signal de commutation n'existe pas dans les inclusions différentielles autrement dit, leurs résultats ne sont valables que pour un signal de commutation arbitraire. Alors que ce signal est un facteur déterminant dans les systèmes hybrides et commutés pour en étudier les différents comportements possibles, en effet la maîtrise de ce signal constitue une source de richesse pour ces systèmes. D'autres parts, très peu d'informations sur la partition de l'espace d'états sont utilisées dans la théorie des inclusions, pendant que cette opération représente un grand atout pour la stabilité et la stabilisation des systèmes commutés. En effet, la stabilité et la stabilisation de certains systèmes ne peuvent être assurées que par une judicieuse partition de l'espace des états et des lois de commutations bien précises. En un mot, presque toutes les applications du formalisme hybride nécessitent des traitements spécifiques en matière de restrictions dans le domaine temporel et la classe des signaux de commutation admissibles ainsi que dans l'espace des états du système. Néanmoins, la théorie des inclusions différentielles reste sans doute très utile pour l'étude de la stabilité et la stabilisation robustes. Nous laissons à part les inclusions, nous retournons aux approches directes de stabilités qui considère les systèmes commutés (3-8) comme une collection de sous-systèmes muni d'une loi de commutation permettant de choisir le sous-système actif (ou à activer).

Remarque 3.4 :

D'après Lyapunov [45], le comportement au voisinage d'un point singulier du système non linéaire est équivalent au comportement du système linéarisé autour de ce point. En particulier, si les conditions de stabilité développées pour le système linéarisé sont globales, elles peuvent être localement appliquées au système, par suite nous ne présentons pas les développements associés aux cas général des systèmes commutés non linéaires.

3.3.2. Stabilité des systèmes commutés : approche hybride :

La plus forte condition qu'on peut exiger à un système à commutations autonomes, est qu'il soit stable pour n'importe quel signal de commutation. Cela peut conduire dans certains cas, à la conception de logique de commutation (ex. superviseur) indépendamment du système. S'il est impossible de vérifier la stabilité pour un signal de commutations quelconque, on peut chercher pour quelle classe de signaux de commutations, le système restera toujours stable ou du moins déterminer/construire un signal de commutations particulier pour lequel le système commuté est stable. Ce qui fait que la fonction de temps $\sigma(t)$ qui constitue le signal de commutation est un facteur déterminant pour le comportement du système global, sa définition ne diffère en rien du temps hybride déjà vu.

Ces questions ont été formulées sous forme de problèmes bien posés dans le fameux article de référence dû à Liberzon et Morse [49], les problèmes évoqués sont les suivants :

Problème A : Sous quelles conditions le système est asymptotiquement stable quelle que soit la loi de commutation.

Problème B : Identifier les classes de lois de commutation pour lesquelles le système à commutations soit asymptotiquement stable.

Problème C : Trouver/Construire une loi de commutation qui rend le système asymptotiquement stable.

Remarque 3.5 :

On notera que la notion de stabilité des systèmes commutés est liée aux trajectoires continues (donc de la variable continue), lorsque cette stabilité est indépendante du signal de commutation (donc de la variable discrète), on parle de stabilité uniforme par rapport au signal de commutation. En quelque sorte, Ce concept de stabilité correspond à la stabilité classique pour un signal de commutation arbitraire (problème A). Lorsque la stabilité est définie pour une classe de signaux de commutation ou une séquence de commutation particulière, la stabilité est dite conditionnelle (problème B&C). L'objectif de nos travaux s'articule autour de la question de stabilisation des systèmes commutés formulée par le problème C. Ce cas apparait comme un problème de synthèse plutôt qu'une analyse de stabilité, mais il peut être attaqué de la même façon à quelques différences près (les objectifs sont différents).

Rappelons les extensions des définitions et des théorèmes du chapitre 2 relatives à l'application de la théorie de Lyapunov à la stabilité des systèmes à commutations comme suit :

Nous désignons par $x(t, t_0, x_0, \sigma)$ la solution du système (3-8) pour une condition initiale (t_0, x_0) et une loi de commutation σ .

Définition 3.6 : [19] [24] [37] [54]

Le point d'équilibre commun $x^ = 0$ (l'origine) du système (3-8) est dit*

- *Uniformément stable, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tel que:*

$$\|x_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0, \sigma)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0, \forall \sigma(t) \in \mathbb{I}.$$

- *Uniformément attractif, si $\exists \delta_a > 0$ tel que :*

$$\|x_0\| < \delta_a \Rightarrow x(t, t_0, x_0, \sigma) \rightarrow 0, \forall t \geq t_0, \forall \sigma(t) \in \mathbb{I}.$$

- *Uniformément asymptotiquement stable, s'il est uniformément stable et uniformément attractif.*
- *Uniformément exponentiellement stable, s'il existe des nombres réels positives a, b telle que toutes les solutions du système vérifient :*

$$\|x(t, t_0, x_0, \sigma)\| \leq a \|x_0\| e^{-bt}, \forall t \geq t_0, \forall \sigma(t) \in \mathbb{I}.$$

Nous constatons que dans cette définition, les conditions doivent être vérifiées quel que soit t_0 et quel que soit σ . Par conséquent, la stabilité est uniforme par rapport à t_0 et par rapport à σ . Nous avons vu que l'uniformité par rapport à t_0 est une propriété désirable pour tous les systèmes dynamiques, l'uniformité qui nous intéresse pour les systèmes commutés est celle par rapport à σ .

Par analogie au théorème 2.2, la stabilité des systèmes commutés au sens de Lyapunov s'énonce de la façon suivante :

Théorème 3.7 : [36] [49]

Le point d'équilibre commun $x^* = 0$ (l'origine) du système (3-8) est dit uniformément asymptotiquement stable, s'il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, définie positive et radialement non bornée telle que :

Sa dérivée le long de toutes les solutions $x(t, t_0, x_0, \sigma)$ (indépendamment du signal σ) soit négative, i.e. $\frac{d}{dt}V(\dot{x}(t, \sigma)) < 0$, $x_0 \neq 0$ et $t \neq t_k$

Remarque 3.6 :

Noter que $\dot{V} < 0$ pour $t \neq t_k$, correspond à une fonction de Lyapunov pas nécessairement continuellement différentiable. En effet, elle est généralement continue et différentiable comme elle peut être continue et différentiable par morceaux ou même continue par morceaux et différentiable par morceaux. Ce dernier cas rentre plutôt dans le cadre des fonctions de Lyapunov multiples éventuellement discontinues. L'utilisation de fonctions de Lyapunov discontinues nécessite une loi de commutation judicieusement adaptée ce qui n'est pas convenable pour l'étude de la stabilité sous un signal de commutation arbitraire.

Définition : [49]

Une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov commune pour le système (3-8), si $V(x)$ est une fonction définie positive et vérifie :

$$\frac{d}{dx}V(A_i x) < 0, \quad \forall A_i \in \mathcal{A} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^n$$

3.3.2.1. Stabilité pour un signal de commutation arbitraire :

Nous avons déjà vu que les inclusions différentielles prennent en charge les systèmes commutés sans se soucier de la loi de commutation. En effet, le signal de commutation est complètement omis dans la théorie des inclusions différentielles, le système est vu comme un élément parmi l'ensemble de champs vecteurs considérés. Par conséquent, tous les résultats issus de la théorie des inclusions différentielles sont indirectement valables pour la stabilité sous une loi de commutation arbitraire. Pour l'approche directe, il est clair que pour étudier cette question, de ne considérer que des sous-systèmes asymptotiquement stables ; autrement, une loi qui sélectionne à chaque fois le sous-système instable conduit à une instabilité globale, mais cette condition n'est pas suffisante. Une autre condition largement exploitée aussi seulement nécessaire, est la stabilité de la combinaison convexe du système à analyser [23]. Enfin, une condition qui s'avère nécessaire et suffisante pour la stabilité d'un système commuté sous une loi de commutation arbitraire est l'existence de fonction de Lyapunov commune [22].

Théorème 3.8 : (Condition nécessaire et suffisante pour la stabilité asymptotique) [22].

Le système commuté linéaire (3-8) est asymptotiquement stable sous une loi de commutation arbitraire, si et seulement s'il existe une C^1 fonction⁴ de Lyapunov $V(x)$ commune pour tous ses sous-systèmes $A_i x$ ($\forall A_i \in \mathcal{A}$).

Dans [22], on affirme aussi que les résultats reportés sont applicables sous certaines conditions aux systèmes commutés non linéaires ce qui a été confirmé par Mancilla-Aguilar en 2000. Sans oublier que le cas général de fonction de Lyapunov non nécessairement continuellement différentiable a été proposé par [57] [58] dans le cadre des inclusions différentiables. S'inspirant de ces travaux de Molchanov pour les fonctions de Lyapunov quasi-quadratique et poly-quadratiques initialement développés pour les inclusions différentielles et la stabilité absolue, certains auteurs ont essayé de construire une classe de fonctions de Lyapunov admissibles pour prouver la stabilité des systèmes commutés,

⁴ Une fonction est C^∞ si ses dérivées partielles de tous ordres sont continues, une fonction est C^1 si sa dérivée partielle du premier ordre est continue.

plusieurs formes de fonctions ont été investiguées : poly-quadratiques et homogènes d'ordre 2 ...etc. Où on a même dégagé des critères d'universalité pour le choix de la forme de fonction de Lyapunov [11]. L'avantage de ces fonctions est leur caractère général permettant de prendre en charge les systèmes polynomiaux ou trigonométriques, d'autant plus, des contraintes polynomiales sur les états sont permises. Hélas, ces méthodes de constructions des fonctions de Lyapunov sont complexes et souffrent de l'absence d'algorithmes de résolution récents.

Le problème avec la théorie de Lyapunov reste ouvert pour la recherche de méthodologie permettant de déterminer les fonctions d'énergie associées et surtout de manière systématique. La forme qui se prête bien aux développements mathématiques est la forme quadratique, la majorité des recherches se sont concentrées autour de cette forme. Malheureusement, l'existence de fonction de Lyapunov quadratique commune n'est pas nécessaire, certains systèmes linéaires commutés sont exponentiellement stable et ne possèdent pas de fonction de Lyapunov quadratique commune ont été pris comme contres exemples.

Fonction de Lyapunov quadratique commune : Approche numérique :

L'utilisation des fonctions de Lyapunov quadratiques de la forme: $V(x) = x^t P x$, facilite énormément les développements mathématiques et conduisent dans la plupart des cas à des formulations de conditions de stabilité simples voire élégantes. Dans ce cas, le problème de stabilité se réduit à la résolution d'inéquations matricielles linéaires (LMI) ou du moins bilinéaires (BMI) [16]. Les premiers sont facilement abordables par les algorithmes d'optimisation convexe existants tels que le toolbox LMI du matlab, alors que pour les BMI, il existe actuellement certains algorithmes de résolution mais le problème des BMI reste un sujet de recherche ouvert à moins que la dimension du problème en main soit faible, dans ce cas-là, on peut toujours s'en sortir avec un petit savoir-faire.

Le plus simple exemple est la condition de stabilité du système commuté linéaire (3-8) qui peut être exprimé par :

S'il existe une matrice symétrique et définie positive P de dimension appropriée telle que :

$$P A_i + A_i^t P < 0, \quad \forall i=1, \dots, m \quad (3-13)$$

Alors $V(x) = x^t P x$ est une fonction de Lyapunov commune pour le système (3-8) par conséquent, il est globalement asymptotiquement stable. Cet inéquation appelée aussi équation de Lyapunov peut être facilement résolue par le LMI du Matlab [16] voir chapitre 1.

Fonction de Lyapunov quadratique commune : Approche algébrique :

Bien que l'approche numérique à base des LMI soit efficace surtout lorsque la dimension du système est modeste, son problème est qu'en cas d'infaisabilité i.e. l'algorithme échoue de trouver une solution, aucune indication sur l'origine du problème n'est visible. C'est de ce côté là que vient l'intérêt des approches algébriques. Plusieurs efforts ont été fournis afin de dégager des conditions algébriques (simples) pour la stabilité des systèmes commutés (linéaires), les plus intéressants sont ceux de Molchanov [57] [58] dans le cadre des inclusions différentielles et la stabilité absolue⁵, Liberzon [49] et ceux de Shorton [73].

Pour en citer seulement les résultats importants, Shorton et Narendra en 99, 2001 et 2004 (voir [73]) ont dégagé une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de fonction de Lyapunov quadratique commune en considérant un système commuté du second ordre. Leur approche est basée sur la stabilité du faisceau de matrice $\gamma_\lambda(A_1, A_2)$ formée par une paire de matrices d'états A_1 et A_2 définie par :

$$\gamma_\lambda(A_1, A_2) = \lambda A_1 + (1 - \lambda) A_2, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (3-14)$$

⁵ La stabilité uniformément exponentielle est généralement appelée dans la littérature russe, la stabilité absolue. Rappelons que les concepts d'attractivité, stabilité asymptotique tous deux sont équivalents à la stabilité exponentielle pour les systèmes commutés linéaires.

Leurs résultats sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème 3.9 :

Pour deux matrices A_1 et A_2 Hurwitz, les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1. Le système (3-8) formé par les deux matrices A_1 et A_2 , possède une fonction de Lyapunov quadratique commune.*
- 2. Les deux matrices $\gamma_\lambda(A_1, A_2)$ et $\gamma_\lambda(A_1, A_2^{-1})$ sont Hurwitz.*
- 3. Les deux matrices $A_1 A_2$ et $A_1 A_2^{-1}$ n'ont aucune valeur propre réelle négative.*
- 4. Rang $(A_2 - A_1) = 1$ et $A_1 + \alpha A_2$ non singulière pour tout $\alpha \in [0, \infty)$.*

La généralisation de ces résultats aux systèmes commutés de dimension supérieur s'avèrent difficile et sans issue du moins jusqu'à maintenant, néanmoins la stabilité du système commuté (3-8) pour m sous-systèmes linéaires a été légèrement élargie de façon très conservatrice par le théorème suivant [73] :

Théorème 3.10 :

Pour un nombre fini de matrices Hurwitz $\{A_i: a_{21_i} \neq 0, i = 1, \dots, m | A_i \in R^{2 \times 2}\}$, une condition nécessaire et suffisante pour que cette famille de matrices possède une fonction de Lyapunov quadratique commune (CQLF), est qu'il existe une (CQLF) pour tout 3-tuple $\{\{A_i, A_j, A_k\}: i \neq j \neq k | i, j, k \in \{1, \dots, m\}\}$ du système.

Une autre alternative basée sur l'algèbre de Lie résultant du fruit de travaux de plusieurs auteurs a été développée [49] [50] :

En considérant le système (3-8) où tous les $A_{\sigma(t)}$ sont de Hurwitz, l'algèbre de Lie :

$$g = \text{Lie}\{A_i, i \in \mathbb{I}\} \quad (3-15)$$

Correspond à toutes les matrices A_i et les commutateurs itérés définis à partir des crochets de Lie :

$$[A_i, A_j] = A_i A_j - A_j A_i, \quad \forall i, j \in \mathbb{I} \quad (3-16)$$

Plusieurs critères de stabilité uniforme ont été dégagés sur la base de l'algèbre de Lie [49] :

- Si toutes les matrices $A_i, \forall i \in \mathbb{I}$ commutent par paires i.e. $A_i A_j = A_j A_i, \forall i, j \in \mathbb{I}$, alors le système (3-8) est asymptotiquement stable (Narendra, Blakrichnan en 94), (Agrachev, Liberzon 2001) voir [49].
- En 1994, Gurvits a indiqué que si l'algèbre de Lie est nilpotent, alors le système (3-8) est asymptotiquement stable.
- Indépendamment en 1997, Mori démontre que si toutes les matrices $A_i, \forall i \in \mathbb{I}$ admettent une triangulation (sup ou inf) simultanée, alors il existe une fonction de Lyapunov quadratique commune pour le système (3-8).
- Un peu plus tard, une généralisation dû à Liberzon voir [49] qui a proposé une condition suffisante (en termes d'algèbre de Lie solvable) pour qu'un ensemble de matrices $A_i, \forall i \in \mathbb{I}$ acceptent une triangulation simultanée, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.11 : [49]

Si $g = \text{Lie}\{A_i, i \in \mathbb{I}\}$ est une algèbre de Lie solvable, alors la famille des matrices dans (3-8) accepte une triangulation simultanée et le système (3-8) est asymptotiquement stable.

L'intérêt de ce théorème est qu'il affirme que si la famille des matrices $\{A_i, i \in \mathbb{I}\}$ commutent deux à deux ou génèrent une algèbre de Lie nilpotente alors elles génèrent une algèbre de Lie solvable. De plus, cette approche établit un lien puissant entre les méthodes basées sur les crochets de Lie et la triangulation simultanée habituellement utilisé en automatique.

3.3.2.2. Stabilité conditionnelle :

Nous avons déjà mentionné que la trajectoire d'un système commuté dépend énormément de la loi de commutation ce qui a motivé les gens à définir la stabilité uniforme par rapport à cette loi. Nous pensons que cette notion de stabilité est trop forte et généralement non nécessaire pour les systèmes commutés, une exception est le cas de multicontrôleurs (cas particulier des SC)⁶ où l'uniformité par rapport au signal de commutation aide et garanti une grande flexibilité dans la conception du superviseur [36]. « Cette technique est généralement utilisée pour les systèmes complexes (pas forcément à discontinuités) afin de satisfaire certaines performances globales ne pouvant pas être assurées par un seul contrôleur. Lorsqu'une collection de contrôleurs (tous stabilisants avec différentes performances) est utilisée, on préfère que la commutation ne déstabilise pas le système global afin de se concentrer sur les questions de performances. Ce point de vue est appuyé par le fait qu'une fonction de Lyapunov quadratique commune existe (Hesphana & Morse 2002) [36] [49] lorsqu'on dispose d'une réalisation propre du système et d'une collection de contrôleur LTI qui le stabilisent asymptotiquement ». De plus, en pratique beaucoup de types de signaux de commutation sont inadmissibles et/ou délibérément exclus pour une telle raison ou telle application. D'autant plus, la stabilité uniforme n'est significative que lorsque tous les systèmes partagent une fonction de Lyapunov commune. Pour cela, les gens se posaient la question : si la stabilité uniforme n'est pas possible, alors quels types de restriction peut-on considéré pour que le système commuté reste toujours stable. Naturellement, pour répondre à cette question, il faut examiner le signal de commutation et déterminer les paramètres susceptibles d'influencer le comportement du système commuté. Pour les systèmes considérés i.e. systèmes autonomes et stationnaires, les commutations sont incontrôlables et se produisent à des instants inconnus lorsque le système ou plutôt ses états atteignent certains seuils. Ces seuils ne sont connus que s'il existe une partition naturelle de l'espace des états pour l'activation des sous-systèmes ou si on l'impose afin d'affecter une région d'activation bien définie pour chacun des sous- systèmes. Cette façon de faire impose indirectement les instants de commutation sans les connaître : c'est une restriction dans l'espace des états. Le deuxième paramètre dans le signal de commutation est le temps d'activation des sous-systèmes, les études [36] [49] montrent que ce facteur est aussi important et peut être garant soit pour la stabilité soit pour exclure certains phénomènes indésirables tels que le phénomène Zeno [81]. Intuitivement parlant, si tous les sous-systèmes sont stables, le système commuté sera stable si on laisse le temps à chacun des sous-systèmes d'absorber son régime transitoire après les commutations.

⁶ Dans la majorité des cas multicontrôleurs, le système non linéaire est fixe et on conçoit un correcteur pour chaque région de l'espace afin de satisfaire les performances globales désirées, un superviseur est conçu pour gérer la commutation entre les contrôleurs. Dans certains cas de forte non linéarité, des dynamiques propre à chaque région sont affectées et on aura commutation de contrôleurs et de modèles aussi pour se trouver dans le cas des systèmes commutés non autonomes.

a) Restrictions dans le domaine temporel :

La restriction dans le domaine temporel est caractérisée par la détermination du temps minimum nécessaire pour que tous les sous-systèmes puissent absorber leurs transitoires quel que soit la loi de commutation. Ce temps minimum τ_a s'appelle temps de séjour [36] [49], il vérifie la condition suivante :

$$N_\sigma(t, \tau) \leq N_0 + \frac{t-\tau}{\tau_a} \Leftrightarrow \frac{t-\tau}{N_\sigma(t, \tau) - N_0} \geq \tau_a \quad (3-17)$$

Où $N_\sigma(t, \tau)$ est le nombre de commutation du signal $\sigma(t)$ sur un intervalle (τ, t) et N_0 est une borne limite d'oscillations.

Une extension de ce concept [36] aux cas où certains sous-systèmes sont instables a donné lieu à ce qu'on appelle temps de séjour moyen. Cela à condition que le temps de séjour des modes stables soit prolongés afin de compenser le transitoire des modes instables ou celui dû aux commutations. Cette notion "simple" de temps de séjour est bien détaillée dans la littérature [49].

b) Restrictions dans l'espace d'états :

i. Fonction de Lyapunov quadratique multiple :

Nous avons énuméré dans la section précédente plusieurs critères de stabilité pour les systèmes commutés en se basant sur la fonction de Lyapunov quadratique commune dont l'existence est seulement suffisante. En effet, il n'est pas difficile de construire une séquence de commutation stabilisante pour une famille de sous-systèmes sans que ces derniers ne partagent aucune fonction de Lyapunov quadratique [22] [40]. Nous avons aussi noté que la fonction de Lyapunov n'est pas nécessairement continuellement différentiable, cela a bien motivé les scientifiques à chercher d'autres types de fonction de Lyapunov tout en exploitant les atouts de la forme quadratique mentionnés auparavant. En effet, il est vraiment difficile de se débarrasser de la forme quadratique vue l'élégance des résultats que peut engendrer comme en témoigne le peu d'articles sur l'utilisation de fonction de Lyapunov non quadratique. Par contre, plusieurs types de fonctions quadratiques continues par morceaux et/ou différentiables par morceaux sont actuellement exploités et sont généralement reconnues sous le nom de fonctions de Lyapunov multiple. En effet, la nature intrinsèque des systèmes commutés suggère l'emploi de fonction de Lyapunov multiple pour prendre en considération les dynamiques de chacun des sous-systèmes et réduire le conservatisme de l'utilisation de fonction de Lyapunov commune. Noter que cette dernière oblige tous les sous-systèmes à se comporter de la même manière vis-à-vis du même point d'équilibre, ce qui est contraignant en pratique.

Bien que l'idée de fonction de Lyapunov « quadratique » à matrice variable ne soit pas nouvelle pour la théorie des inclusions différentielles et les systèmes variant dans le temps, Peleties et DeCarlo [63] fut les premiers qui ont associé une fonction de Lyapunov quadratique à chaque sous-système linéaire à activer dans une région de l'espace des états. Les théorèmes de stabilité élaborés dans ce contexte sont fondés sur la décroissance de la fonction de Lyapunov à chaque fois qu'un même sous-système $\dot{x} = A_i x$ est activé. La fonction multiple est définie comme suit [23] :

Théorème 3.12 :

En supposant que $\cup_k \Omega_k = R^n$, soient V_i des fonctions de Lyapunov chacune étant associée à un champ vecteur $A_i x$. pour $k < j$, soient deux instants de commutation $t_k < t_l$ avec $\sigma(t_k) = \sigma(t_l) = j$ et $\sigma(t) \neq j$ pour $t \in [t_{k+1}, t_l[$. S'il existe un $\gamma > 0$ telle que :

$$V_j(x(t_{l+1})) - V_j(x(t_{k+1})) \leq -\gamma \|x(t_{k+1})\|^2$$

Alors le système à commutations est asymptotiquement stable.

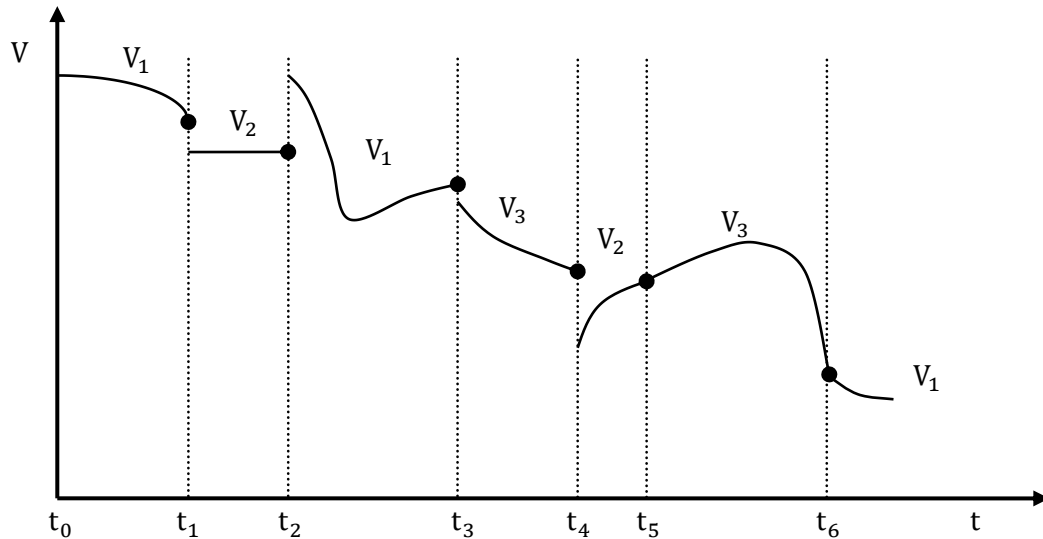


Fig. 3.3. Fonction multiple de Decarlo

Les commutations sont telles que les valeurs de la fonction de Lyapunov juste avant la commutation (marquées par un point noir) doivent être strictement décroissante pour le même sous-système.

Des extensions au cas non linéaire ont été proposées dans (Branicky, 1994, 1995, 1998) où chacun des champs vecteurs est supposé globalement Lipschitz. Toutes les extensions faites se distinguent par la vérification ou non de la continuité aux instants des commutations et les comportements permis des fonctions individuelles d'énergie. On notera que certaines extensions permettent à certains sous-systèmes de gagner de l'énergie pour qu'elle soit dissipée par un autre. Un résultat plus général, qui introduisait la notion de fonction de Lyapunov faible, est donné dans [37]. Dans cet article, la condition précédente a été remplacée par :

$$V_i(x(t)) \leq \alpha V_j(x(t_j)), \quad t \in [t_j, t_{j+1}]$$

Où t_j, t_{j+1} sont des instants de commutation avec $[t_j, t_{j+1}]$ intervalle de temps pendant lequel le mode i est activé, $\alpha : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ est une fonction continue qui satisfait $\alpha(0)=0$.

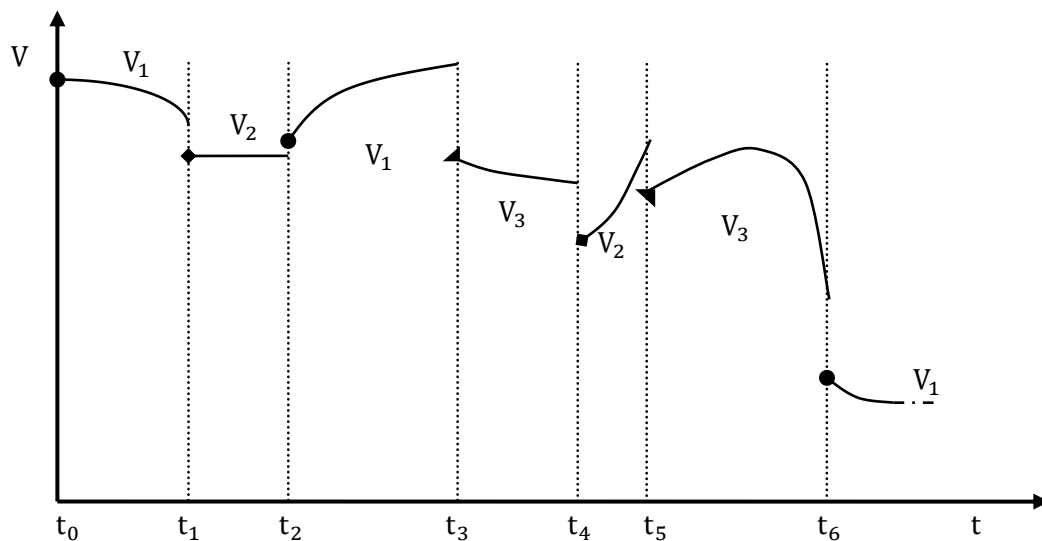


Fig. 3.4. Fonction multiple de Ye & M

L'application de ces théorèmes nécessitent que la trajectoire du système soit connue au moins aux instants des commutations ce qui est très difficile à vérifier. Pour un système commuté quelconque, on verra que la continuité des fonctions d'énergie aux instants des commutations lors de l'opération de synthèse résout beaucoup de problèmes lorsqu'on travaille dans une partition de l'espace des états.

Théorèmes réciproques de Lyapunov :

Les théorèmes de Lyapunov réciproques pour la stabilité des systèmes commutés sont plus importants et peuvent être très utiles dans certain cas. Malheureusement, ces théorèmes réciproques supposent la stabilité des systèmes et fournissent des conditions d'existence de fonction de Lyapunov sans aucune indication sur la méthode de recherche de ces fonctions. Cela n'apporte pas grandes choses et limite énormément leur utilisation, néanmoins c'est bien de savoir qu'une fonction de Lyapunov existe, ça justifie au moins sa recherche.

Rappelons les deux théorèmes réciproques suivants :

Théorème 3.13 : [22]

Si le système commuté (3-8) est asymptotiquement globalement uniformément stable et en plus uniformément exponentiellement stable, alors la famille des sous-systèmes dans (3-8) possède une fonction de Lyapunov commune.

Ce théorème qui a même une extension aux systèmes non linéaires n'apporte pas grandes choses tant que la recherche de fonction de Lyapunov commune reste en générale une opération très difficile.

Théorème 3.4 : [57]

Si le système commuté (3-8) est asymptotiquement stable sous une loi de commutation arbitraire, alors il existe une fonction de Lyapunov polyédrale monotoniquement décroissante le long de la trajectoire du système commuté.

Là le théorème est intéressant puisque la recherche de fonction de Lyapunov polyédrale est relativement très simple à mener et certaines méthodes de construction systématique déjà existent pour de telle fonction (Molchanov 89, Brayton 80, Polanski 2000, Yfoulis & Shorton 2004).

ii. Partition de l'espace des états :

En plus du caractère naturel du partage de l'espace des états des systèmes commutés, nous avons mentionné que la partition de l'espace des états permet d'exploiter les idées proposées dans les fonctions de Lyapunov multiples sans qu'on sache les trajectoires aux instants des commutations.

Les deux problèmes majeurs dans la partition de l'espace des états sont la construction des régions et l'assurance de la continuité de la fonction de Lyapunov multiple aux niveaux des surfaces de commutation. Dans nos travaux (chapitre 4), nous nous sommes inspirés des travaux de Steffan Pettersson [65] où nous avons supposé que toutes les partitions associées aux champs vecteurs peuvent être approximées par des régions coniques. Ces dernières facilitent la formulation de la question d'analyse des systèmes commutés linéaires affines, mais nous sommes confrontés à de grands problèmes dans la phase de synthèse lorsque les régions sont inconnues (à déterminer) nous allons y revenir au chapitre 4. D'autres types de partitions basées sur les approximations polytopique ou ellipsoïdale sont plus connus et largement utilisés par les célèbres Johansson & Rantzer ainsi que Morari & ses coéquipiers, les résultats de leurs formulations sont facilement manipulables aux surfaces des commutations (aux prix de certaines complexités géométriques). En effet, la géométrie des

régions est généralement très complexe, elle fait intervenir l'approximation d'une forme par une autre, maximisation de volumes ou l'inclusion d'une forme dans une autre, ces techniques sont largement investiguées en commande optimale et prédictive où les objectifs sont bien définies par des fonctions de coût.

Si on revient à notre système commuté simple " linéaire", la partition est comme suit :

$$\dot{x} = A_i x, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{pour tout } x \in \Omega_i. \quad (3-18)$$

Où les $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^n$ sont des régions de l'espace d'intérieurs disjoints tel que: $\bigcup_i \Omega_i = \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Les surfaces de commutation du mode i vers le j sont définies par l'intersection des deux bordures :

$$S_{i,j} \subseteq \partial\Omega_{i,j} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j. \quad (3-19)$$

Ces surfaces représentent généralement des hyperplans et sont telles que $S_{i,j} \neq \emptyset$ pour deux régions adjacentes. La partition est telle que la fonction de Lyapunov V constituée par la concaténation d'un ensemble de fonction de Lyapunov $V_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$V = \sum_1^m \alpha_i V_i, \quad \alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad V_i = x^t P_i x. \quad (3-20)$$

Dans la théorie de Lyapunov, les régions Ω_i sont caractérisées par :

$$\Omega_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x} A_i x \leq 0 \right\}. \quad (3-21)$$

En ce qui concerne le comportement des fonctions d'énergie aux niveaux des surfaces des commutations $S_{i,j}$, la description dépend de l'approche suivie, c'est là où interviennent les différentes définitions de la fonction de Lyapunov multiple de la section précédente. On peut exiger que V_i soit égale à V_j aux moments des commutations, $V_i \geq V_j$ ou même autoriser $V_i \leq V_j$ pour un certain temps, ou si on connaît $x(t)$ aux instants des commutations, utiliser par exemple la formule « complexe » de Decarlo.

Le plus naturel est de considérer $V_i \geq V_j$ lors de la transition du mode i vers j , c'est simple et conduit à la stabilité (stabilisation) du système commuté mais c'est très conservative. En effet, dans ce cas, on exige de l'énergie du mode i soit supérieur à celle du mode j qu'il ne lui est pas physiquement lié. Dans ce cas, nous avons :

$$\Omega_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V_i \geq V_j\}. \quad (3-22)$$

En supposant que les régions Ω_i et $\Omega_{i,j}$ peuvent être décrites (ou approximées) par des régions coniques, nous aurons :

$$\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t Q_i x \geq 0\}. \quad (3-23)$$

$$\Omega_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t Q_{i,j} x \geq 0\}. \quad (3-24)$$

L'application de la S-procédure [16] [65], nous obtenons les conditions de stabilité suivantes :

S'il existe des matrices $P_i^t = P_i > 0$ et des réels $\delta_i > 0, \delta_{i,j} > 0$ telle que :

$$\begin{cases} A_i^t P_i + P_i A_i + \delta_i Q_i \leq 0, & \forall i = 1, \dots, m \\ P_j - P_i + \delta_{i,j} Q_{i,j} \leq 0, & \forall i, j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (3-25)$$

Alors le système commuté est asymptotiquement stable.

Cette formulation simple et élégante est moins conservative que l'utilisation de fonction de Lyapunov commune, et contraint les \dot{V}_i d'être négative seulement dans les régions

d'activation des modes correspondants. Elle peut être facilement résolue par le LMI du Matlab. Cependant, les régions coniques se prêtent mal aux systèmes commutés affines et surtout lors de la synthèse où les régions sont inconnues, nous allons y revenir au chapitre 4.

Optimisation géométrique :

Dans beaucoup de cas la partition naturelle de l'espace d'état d'un système commuté est adoptée, elle est implicitement donnée par la définition du système. C'est le cas ci-dessus lorsque les surfaces de séparation sont définies par des hyperplans, les régions formées par l'intersection des hypersurfaces associés sont directement sous forme polyédrale. Cependant, en vertu de la remarque 3.4, bien que ces résultats soient globaux, si le système commuté linéaire provient de linéarisation autours de certains points singuliers, l'estimation de la région d'attraction devient nécessaire pour en assurer la validité des domaines d'approximation. Maximiser les volumes de ces régions d'invariance sous forme polyédrale est pratiquement impossible, on fait souvent recours à l'inclusion de ces régions dans des ellipsoïdes. En commande, la maximisation ou la minimisation de volume de régions convexes est souvent liée à la forme ellipsoïdale dont on sait manipuler [16].

Alors si plutôt les régions de notre système ci-dessus sont des polyèdres données par :

$$\mathcal{P}_i = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i^t x \leq 1\}. \quad (3-26)$$

Dont-on veut prouver l'invariance par rapport à l'ellipsoïde centré à l'origine.

$$\varepsilon_i = \{x \in \mathbb{R}^n | x^t R_i^{-1} x \leq 1\}. \quad (3-27)$$

L'ellipsoïde ε_i est contenu dans \mathcal{P}_i si et seulement si

$$\max\{a_i^t x | x \in \varepsilon_i\} \leq 1. \quad (3-28)$$

Ce qui est équivalent [16] à : $a_i^t R_i^{-1} a_i \leq 1, \forall i \in \mathbb{I}$, par suite nous avons la proposition suivante :

Proposition : [16]

Si l'optimisation convexe suivante :

$$\text{minimiser } \log \det R_i^{-1} \left| \begin{array}{l} R_i > 0 \\ R_i A_i^t + A_i R_i < 0 \\ a_i^t R_i a_i \leq 1 \end{array} \right.$$

a une solution, alors le système commuté $\dot{x} = A_i x$ est asymptotiquement stable avec une région d'attraction $\varepsilon_i = \{x \in \mathbb{R}^n | x^t R_i^{-1} x \leq 1\}$ dont le volume est maximum dans le polyèdre $\mathcal{P}_i = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i^t x \leq 1\}$.

3.4. Systèmes commutés linéaires affines par morceaux (PWA) :

Nos travaux qui visent essentiellement les convertisseurs d'énergie s'articulent automatiquement autour des systèmes PWA auxquels nous avons réservé le chapitre 4. En effet, la classe des systèmes PWA est d'extrême importance en électronique de puissance puisque la modélisation de la plupart des circuits à commutation conduit à ce modèle. D'autant plus toutes interconnexions de circuits contenant des saturations, des relais ou des composants à zones mortes se réduisent à l'étude de systèmes PWA. Plus généralement l'importance de cette classe de systèmes provient du fait que les modèles PWA représentent le meilleur approximant de tout autre phénomène non linéaire complexe [6] [35] [40].

Le système général affine par morceaux suivant, capture toute la classe des systèmes PWA :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i + \check{B}_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) + c_i + D_i u(t) \end{cases}, \quad i \in \mathbb{I} = \{1, \dots, m\} \ \& \ x \in \Omega_i. \quad (3-29)$$

Toutefois, nous ne pouvons parler des systèmes PWA sans citer l'approche générale proposée par M. Johansson et al et détaillée dans son fameux livre [40]. Ce livre qui constitue une extension de ses travaux de thèse et les résultats d'une série de publications de Rantzer et Johansson est actuellement la meilleure référence sur les systèmes PWA. Bien que nous avons essayé de mener nos travaux toute autrement, nous avons préféré dans ce chapitre panoramique présenter un bref résumé de ces précieux travaux. L'approche proposée et présentée ci-dessous, elle est essentiellement basée sur la continuité de fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux, voici un résumé de ce qui été présenté dans [40] :

Lorsque le système est autonome on obtient le système affine suivant :

$$\dot{x} = A_i x + b_i, \quad i \in \mathbb{I} = \{1, \dots, m\} \quad \text{pour tout } x \in \Omega_i \quad (3-30)$$

De même que précédemment, les $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^n$ sont des régions polyédrale fermées de l'espace d'intérieurs disjoints tel que: $\cup_i \Omega_i = \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Les surfaces de commutation $S_{i,j} \subseteq \Omega_{i,j} \subseteq \mathbb{R}^n$ du mode i vers le mode j sont définies par l'intersection des deux bordures :

$$S_{i,j} = \text{int}(\Omega_{i,j}) = \text{int}(\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j). \quad (3-31)$$

$\text{Int}(\cdot)$ et $\partial(\cdot)$ désignent respectivement l'intérieur d'un ensemble et sa bordure, $S_{i,j} \neq \emptyset$ pour deux régions adjacentes. Si nous nous intéressons à l'équilibre "isolé" au point $x_* = 0$, il n'y a aucune raison que tous les sous-systèmes possèdent ce point comme un équilibre commun.

Il est donc convenable de séparer les deux ensembles suivants :

$$\mathbb{I}_0 = \{i \in \mathbb{I} | b_i = 0\}. \quad (3-32)$$

$$\mathbb{I}_1 = \{j \in \mathbb{I} | 0 \notin \Omega_j\}. \quad (3-33)$$

Si les régions sont des polyèdres (convexes) fermés, elles peuvent être décrites par l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces i.e. pour chaque région Ω_i , il existe une matrice G_i et un vecteur g_i d'un coté, alors que les surfaces de commutation sont déjà décrites aussi par des hyperplans tel que :

$$\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n | G_i x + g_i \geq 0\}. \quad (3-34)$$

$$S_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^n | h_{i,j}^t x + g_{i,j} = 0\}. \quad (3-35)$$

Où l'inégalité \geq est appliquée par élément, afin d'éliminer le terme affine le changent de variable suivant a été adopté :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3-36)$$

Ce qui conduit à :

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_i \bar{x}, \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & b_i \\ 0_{1 \times n} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3-37)$$

Et la région Ω_i sera décrite dans cet espace augmenté par :

$$\Omega_i = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1} | \bar{G}_i \bar{x} \geq 0\}, \quad \bar{G}_i = [G_i \ g_i]. \quad (3-38)$$

Dans cet espace augmenté, le modèle général du système PWA (3-29) est décrit par :

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_i & | & \bar{B}_i \\ \hline \bar{C}_i & | & \bar{D}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_i & b_i] & | & [\check{B}_i] \\ \hline [0_{1 \times n} & 0] & | & [0_{1 \times m}] \\ \hline C_i & c_i & | & D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad \text{pour } \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1} | \bar{G}_i \bar{x} \geq 0\}. \quad (3-39)$$

Noter qu'une très grande simplification est obtenue lorsque s'il y a continuité des champs vecteurs aux surfaces de commutation.

Points d'équilibre :

La vérification si un sous-système possède un point d'équilibre dans sa région correspondante, est déterminé de la façon suivante :

$$x_i^{eq} = \{x | A_i x + b_i = 0, G_i x + g_i \geq 0\}. \quad (3-40)$$

Si la matrice A_i est inversible, l'obtention de ce point est facile. En effet, on aura à résoudre seulement :

$$x_i^{eq} = -G_i A_i^{-1} b_i + g_i \geq 0. \quad (3-41)$$

Si cet inéquation n'est pas vérifié pour un certain (G_i, g_i) c'est que le sous-système i n'a pas d'équilibre dans la région qu'on lui a associée.

Lorsque cet équilibre existe, on peut toujours le ramener à l'origine.

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} x - x_i^{eq} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -x_i^{eq} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x} = T \bar{x}. \quad (3-42)$$

Par la transformation $\bar{x} = T^{-1} \bar{z}$, on obtient un système PWA avec un équilibre à l'origine.

Mode glissant :

Comme nous l'avons déjà vu, on peut vérifier si le système possède un mode glissant attractif en faisant le test suivant :

Pour une surface de commutation $S_{i,j}$ incluse dans le domaine $\Omega_{i,j}$, $S_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^n | h_{i,j}^t x + g_{i,j} = 0\}$, nous avons un mode attractif pour des $x \in S_{i,j}$ telle que :

$$S_{i,j} = \{x \in \Omega_{i,j} | h_{i,j}^t (A_i x + b_i) < 0 \wedge h_{i,j}^t (A_j x + b_j) > 0\}. \quad (3-43)$$

Si $S_{i,j} \neq \emptyset$ alors le système admet un mode glissant attractif en tout $x \in S_{i,j}$. Cela peut se faire par le programme linéaire suivant :

Proposition [40] :

Si la solution optimale (x°, t°) du programme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } t \\ \text{Tel que} \\ \left[\begin{array}{c} G_i \\ G_j \\ -h_{i,j}^t A_i \\ h_{i,j}^t A_j \end{array} \right] x + \left[\begin{array}{c} g_i \\ g_j \\ -h_{i,j}^t b_i \\ h_{i,j}^t b_j \end{array} \right] \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ t \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Est obtenue pour $t^\circ > 0$, alors le système possède un mode glissant attractif sur $\Omega_{i,j}$.

Stabilité du système PWA :

En utilisant la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V_i(x) = \bar{x}^t \bar{P}_i \bar{x} = x^t P_i x + 2q_i^t x + r_i, \quad \bar{P}_i = \begin{bmatrix} P_i & q_i \\ q_i^t & r_i \end{bmatrix} \text{ et } \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3-44)$$

Notre fonction poly-quadratique de Lyapunov candidate sera de la forme :

$$V_i(x) = \begin{cases} x^t P_i x, & \text{pour } x \in \Omega_i \text{ et } i \in \mathbb{I}_0 \\ \bar{x}^t \bar{P}_i \bar{x}, & \text{pour } x \in \Omega_i \text{ et } i \in \mathbb{I}_1 \end{cases} \quad (3-45)$$

Pour assurer la continuité de $V(x)$ aux surfaces des commutations, il faut que :

$V_i(x) = V_j(x)$ pour tout $x \in S_{i,j} \neq \emptyset$, Or

$$S_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_{i,j}^t x + g_{i,j} = 0\}. \quad (3-46)$$

Pour cela, il devrait exister un $t_{i,j} \in \mathbb{R}^n$ et un $s_{i,j} \in \mathbb{R}$ telle que :

$$V_j(x) = V_i(x) + 2(h_{i,j}^t x + g_{i,j})(t_{i,j}^t x + s_{i,j}). \quad (3-47)$$

En dénotant par $\bar{h}_{i,j} = \begin{bmatrix} h_{i,j}^t \\ g_{i,j} \end{bmatrix}$ et $\bar{t}_{i,j} = \begin{bmatrix} t_{i,j}^t \\ s_{i,j} \end{bmatrix}$, on aura :

$$\bar{P}_j = \bar{P}_i + \bar{h}_{i,j} \bar{t}_{i,j}^t + \bar{t}_{i,j} \bar{h}_{i,j}^t. \quad (3-48)$$

Puisque chaque région introduit autant de fois cet égalité qu'elle a de bordure commune, il est très difficile de tester ces égalités pour un système PWA général. D'autant plus, très peu d'algorithmes de résolution prennent en charge les contraintes d'égalité.

Pour contourner ce problème, la notion de matrice de continuité suivante a été introduite :

Définition 3.7 [40] :

Une matrice $\bar{F}_i = [F_i \ f_i]$ est dite matrice de continuité pour la région Ω_i , si

$$\bar{F}_i \bar{x}(t) = \bar{F}_j \bar{x}(t), \quad x(t) \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j.$$

Si $\{\bar{F}_i\}$ a la propriété de zéro interpolation, alors $f_i = 0$ pour $i \in \mathbb{I}_0$.

Lemme [40] :

Si on suppose que les région Ω_i sont polyédriques et soit la matrice de continuité $\bar{F}_i \in \mathbb{R}^{p \times (n+1)}$, alors pour chaque matrice $T \in \mathbb{R}^{p \times p}$, la fonction scalaire suivante :

$$V(x) = \bar{x}^t \bar{F}_i^t T \bar{F}_i \bar{x} = \bar{x}^t \bar{P}_i \bar{x}, \quad \text{pour } x \in \Omega_i$$

est continue et poly-quadratique, si de plus \bar{F}_i a la propriété de zéro interpolation, alors il existe α et β positifs telle que :

$$\alpha \|x\|_2^2 < V(x) < \beta \|x\|_2^2$$

Remarque 3.7 :

Noter que pour une partition donnée $\{\Omega\}_{i \in I}$, la matrice de continuité n'est pas unique en général.

Pour la positivité de la fonction de Lyapunov proposée, une relaxation est utilisée de manière que la positivité doit être garantie seulement dans la région d'espace correspondante.

On cherchera un $\alpha > 0$ telle que :

$$V(x) > \alpha \|x\|_2^2, \quad \text{pour } x \in \Omega_i. \quad (3-49)$$

Pour cela la notion de région polyédrale de limitation a été introduite, elle est définie par :

Définition 3.8 [40] :

Une matrice $\bar{E}_i = [E_i \ e_i]$ est dite région polyédrale de limitation, si elle satisfait

$$\bar{E}_i \bar{x}(t) \geq 0, \quad \text{pour } x \in \Omega_i.$$

Si $\{\bar{E}_i\}$ a la propriété de zéro interpolation, alors $e_i = 0$ pour $i \in \mathbb{I}_0$.

En utilisant la S-procédure, on obtient le résultat suivant :

Lemme [40] :

Pour $\bar{P}_i^t = \bar{P}_i$ et $P_i^t = P_i$ et \bar{E}_i une région de limitation vérifiant la propriété de zéro interpolation, s'il existe des matrices W_i telle que :

$$\begin{aligned} P_i - E_i^t W_i E_i &> 0, & \text{pour } i \in \mathbb{I}_0 \\ \bar{P}_i - \bar{E}_i^t \bar{W}_i \bar{E}_i &> 0, & \text{pour } i \in \mathbb{I}_1 \end{aligned}$$

Alors il existe $\alpha > 0$ telle que : $V(x) > \alpha \|x\|_2^2$, pour $x \in \Omega_i$

En ajoutant la négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov, le résultat de stabilité exponentielle s'énonce par le théorème suivant :

Théorème 3.15 [40] :

Soient les matrices symétriques T , U_i et W_i telle que U_i et W_i n'ont pas d'entrées négatives.

$$\begin{aligned} P_i &= E_i^t T E_i, & \text{pour } i \in \mathbb{I}_0 \\ \bar{P}_i &= \bar{E}_i^t \bar{T} \bar{E}_i, & \text{pour } i \in \mathbb{I}_1 \end{aligned}$$

Vérifiant :

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} P_i - E_i^t W_i E_i &> 0 \\ A_i^t P_i + P_i A_i + E_i^t U_i E_i &< 0 \end{aligned} \right\} & \text{pour } i \in \mathbb{I}_0 \\ \left. \begin{aligned} \bar{P}_i - \bar{E}_i^t \bar{W}_i \bar{E}_i &> 0 \\ \bar{A}_i^t \bar{P}_i + \bar{P}_i \bar{A}_i + \bar{E}_i^t \bar{U}_i \bar{E}_i &< 0 \end{aligned} \right\} & \text{pour } i \in \mathbb{I}_1 \end{cases}$$

Alors toute trajectoire du système (3-30) $x(t) \in \cup_{i \in I} \Omega_i$ tend exponentiellement vers zéro.

Remarque 3.8 :

Toutes les techniques développées pour l'analyse de la stabilité ou l'étude de la stabilisation des systèmes commutés et basées sur l'existence de fonction de Lyapunov quadratique ou poly-quadratique ne fournissent que des conditions suffisantes. Pour une partition de l'espace d'états donnée et particulièrement pour les systèmes PWA, il est toute à fait naturel d'utiliser cette même partition pour les fonctions de Lyapunov pour l'analyse comme pour la synthèse (stabilisation). Cependant, ce choix n'est pas définitif, si on échoue de prouver la stabilité ou de pouvoir stabiliser le système, un affinement de la partition et des raffinements successifs chaque fois que c'est nécessaire permettent toujours d'arriver au but. Évidemment, ces raffinements se traduisent par l'association de plusieurs fonctions de Lyapunov au même mode. A l'exception des tentatives [40] [65] [70], cette tâche est très difficile et très peu de travail a été fait sur ce sujet d'autant moins sur l'automatisation du processus.

3.5. Stabilisation Quadratique :

Une question qualifiée de problème majeur est aussi importante sinon plus que celle de la stabilité des systèmes commutés, est l'étude de la stabilisation de ces systèmes. Cette étude consiste à savoir s'il existe une loi de commutation permettant de stabiliser le système, si oui, alors synthétiser cette loi de commutation. Ce problème correspond à la question C dans l'énumération précédente de Liberzon. En effet, le problème de synthèse i.e. les questions de stabilisation par commutations et/ou conceptions de multi-correcteurs stabilisants ont reçu plus d'investigation que la question de stabilité ; elles sont très prometteuses pour les applications des systèmes commutés qui intéressent le monde industriel. Beaucoup de résultats d'analyse de stabilité présentés précédemment peuvent être adaptés puis exploités

pour attaquer ces questions de stabilisation, nous n'allons pas revoir toutes les tentatives de stabilisation issue de l'extension de certains résultats d'analyse. La stabilisation des systèmes commutés qui nous intéresse est la stabilisation par commutation i.e. recherche de loi de commutation stabilisante, cette question est à distinguer de la recherche de correcteur approprié parmi ceux qui stabilisent le système i.e. c'est le cas particulier du problème de multicontrôleurs et la conception de superviseur.

De même que la stabilité, lorsque la question de stabilisation est investiguée à travers une fonction d'énergie quadratique, on parle de stabilisation quadratique, dont voici la définition [35] [79].

Définition 3.9 :

Le système commuté (3-8) est dit quadratiquement stabilisable, s'il existe une fonction définie positive $V(x) = x^t P x$, un $\varepsilon > 0$ et une loi de commutation $\sigma(t, x)$ tel que la dérivée $\dot{V}(x)$ le long de toutes les trajectoires de (3-8) vérifie :

$$\dot{V}(x) \leq -\varepsilon \|x\|^2. \quad (3-50)$$

D'une manière générale, pour un système non linéaire commandé (non autonome), on fait souvent référence à la version modifiée suivante du théorème (2-3) :

Théorème 3.16 :

S'il existe une fonction γ de classe \mathcal{K} et une fonction $V(x)$ continue, différentiable, définie positive et propre tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists u \in U \text{ tel que } \dot{V}(x, u) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \leq -\gamma(\|x\|)$$

Où $\dot{V}(x, u)$ est la dérivée de $V(x, u)$ dans la direction donnée par u , alors le système $\dot{x} = f(x, u)$ est globalement asymptotiquement stabilisable.

Stabilisation des systèmes commutés :

En dehors du cas trivial qu'un des sous-systèmes est stable; tout comme le cas de la stabilité, les premières tentatives de recherches de conditions de stabilisation quadratiques pour les systèmes commutés linéaires étaient basées sur les CQLF. A commencer par les travaux dans (W et Decarlo 94, 98) qui ont affirmé qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une paire de systèmes linéaires soit quadratiquement stabilisable, est l'existence de combinaison convexe stable pour les deux systèmes.

Théorème 3.17 :

Le système commuté : $\dot{x}(t) = A_i x(t)$, $i=1,2$, est quadratiquement stabilisable si et seulement s'il existe $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$, $i = 1,2$, tel que $A_{eq} = \sum_i \alpha_i A_i$ est Hurwitz.

Par conséquent, il existe $P^t = P > 0$ et $Q^t = Q > 0$ tel que :

$$\alpha x^t (A_1^t P + P A_1) x + (1 - \alpha) x^t (A_2^t P + P A_2) x = -x^t Q x$$

Les deux régions Ω_i , $i = 1,2$ définies ci-dessous sont chevauchées :

$$\Omega_i = \{x | x^t (A_i^t P + P A_i) x \leq -\varepsilon \|x\|^2\}$$

Et la loi de commutation $\sigma(x) = \operatorname{argmin}_i \{x^t (A_i^t P + P A_i) x\}$ stabilise le système.

Une généralisation aux systèmes commutés à plus de deux sous-systèmes a été proposée par Pettersson [65] en utilisant la stratégie de commutation de min projection, l'approche est applicable aux systèmes commutés non linéaires.

Théorème 3.18 : [66]

Le système commuté : $\dot{x}(t) = A_i x(t)$, est quadratiquement stabilisable s'il existe $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$, tel que $A_{eq} = \sum_i \alpha_i A_i$ est Hurwitz, alors le système est quadratiquement stabilisable par la loi de commutation de min-projection: $\sigma(x, t) = \operatorname{argmin}_i \{x(t)^t P A_i x(t)\}$.

Comme il est indiqué par ce théorème, la condition de l'existence de combinaison convexe stable pour un système commuté à plus de deux modes n'est que suffisante.

Ce sont les deux résultats de stabilisation à base de CQLF les plus exploités alors qu'une grande variété de résultats à base de fonction de Lyapunov quadratique multiple (MQLF) existe. Bien que ces dernières réduisent le conservatisme du CQLF mais les approches développées sont d'application moins directe et conduisent à des formulations BMI qui ne sont pas directement solvables. La difficulté de l'utilisation des MQLF dans la synthèse des SC est essentiellement due à la partition de l'espace d'états qui n'est à priori pas connue, ce qui augmente le nombre d'inconnus et on se limite généralement à l'utilisation de MQLF continues aux surfaces de commutation. De plus, dans le cas où les régions sont inconnues (à déterminer), le traitement du phénomène de glissement est très compliqué et la condition de recouvrement de l'espace d'états n'est pas facile à garantir. Bref, l'utilisation des MQLF dans la synthèse des systèmes SC n'est pas encore résolu et les approches développées sont loin d'être systématiques. Néanmoins, deux approches générales méritent d'être signalées, la première est celle de Pettersson [67] dans laquelle une extension du théorème 2.3 aux cas de la synthèse est proposée, les régions à synthétiser sont quadratiques. Nous nous sommes inspirés de cette approche dans nos travaux au chapitre 4 où nous allons proposer une méthode de stabilisation pratique pour les systèmes PWA. La seconde correspond à l'extension des résultats d'analyse des systèmes PWA dans les travaux de Johansson et Rantzer (section précédente) à la synthèse, l'application s'avère difficile vue que les matrices de continuité, d'identification et de limitation de régions sont inconnues dans ce cas, les régions à déterminer sont sous forme polyédrale. Les développements dans ces deux approches sont directement basés sur la théorie de Lyapunov et les MQLF, les résultats obtenus ne sont que suffisants. Un autre résultat aussi à base de MQLF, dont-on prétend que les conditions annoncées sont nécessaires et suffisantes, est proposé dans (Antsaklis 2007) voir [50], mais les preuves ainsi que la construction des matrices employées ne sont pas rigoureusement présentées ce qui limite son exploitation.

Enfin, nous signalons un résultat facilement vérifiable [74], malheureusement, il est seulement nécessaire et pas suffisante pour la stabilisation des systèmes SC :

Théorème 3.19 :

S'il existe une loi de commutation stabilisante pour le système commuté $\dot{x}(t) = A_i x(t)$, $i \in \mathbb{I}$, alors il existe un $k \in \mathbb{I}$ tel que au moins une des valeurs propres de $A_k + A_k^t$ est réelle négative.

Notez que toutes les approches développées pour la stabilisation des systèmes PWA sont applicables aux systèmes commutés linéaires SCL, il suffit de considérer un terme affine nul dans ces méthodes. C'est la réciproque qui n'est pas toujours valable. Réellement, les systèmes PWA nécessitent un traitement spécifique et nous avons vu dans l'approche de Johansson que les conditions de stabilité (donc aussi de stabilisation) sont différentes lorsque le terme affine est non nul. En effet, les formes quadratiques et par conséquent la stabilisation quadratique, ne permettent pas une grande flexibilité pour la manipulation d'expressions affines sans de réelle modification ou un changement de dimension de l'espace de travail. Un bon exemple d'extension des résultats de Decarlo (théorème 3-17) aux cas des systèmes PWA bimodale est présenté dans [12] [23]. Mais nous allons voir que cette extension n'est pas sans prix, vu que certaines hypothèses sont très restrictives, et par conséquent, l'extension présente de réel conservatisme.

Considérons le système affine (3-30), le système convexifié correspondant est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\sum_{i=1}^m \alpha_i A_i)x + (\sum_{i=1}^m \alpha_i b_i) \\ &= A_{moy}x + b_{moy}\end{aligned}\quad (3-51)$$

Si $0 < \alpha_i < 1$ et $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, alors le système ci-dessus représente le modèle moyen du système (3-30). Comme c'est déjà mentionné, il n'y a aucune raison que les sous-systèmes dans (3-30) aient un équilibre commun. Nous supposons qu'on désire stabiliser le système en un point x^* qui peut toujours se ramener à l'origine. En dehors du cas trivial i.e. $x^* \neq -A_i^{-1}b_i$, $\forall i=1, m$, la régulation autour de x^* ne peut être assurée que par commutation dont la fréquence augmente en s'approchant de x^* . Après un changement de variable $\bar{x} = x - x^*$, le problème se ramène à l'origine. Évidemment, lorsqu'on a $b_{moy} = 0$, la stabilité asymptotique de l'origine nécessite que A_{moy} soit Hurwitz, ce qui conduit à : $A_{moy}^t P + P A_{moy} = -Q$, $Q^t = Q > 0$ et $P^t = P > 0$, nous avons le théorème suivant [12] :

Théorème 3.20 :

Ayant le système (3-30), s'il existe des α_i avec $0 < \alpha_i < 1$ et $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ tel que:

$$\begin{cases} A_{moy} = \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i \text{ est Hurwitz} \\ b_{moy} = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i = 0 \end{cases}$$

Alors le système (3-30) est quadratiquement stabilisable en \bar{x} selon la définition (3-9).

Les résultats de ce théorème ne sont pas surprenants et peuvent être facilement démontré à partir de la stabilisation du système moyen sans terme affine. Bien que le théorème ne fournisse que des conditions suffisantes pour la stabilisabilité quadratique, ces résultats peuvent être très facilement exploitables pour la stabilisation des systèmes PWA. Toutefois, le problème majeur avec ce théorème est le grand conservatisme de ses conditions. En effet, les systèmes PWA sont des modèles généraux et exiger que $\sum_{i=1}^m \alpha_i b_i$ soit nul est très restrictive et n'a aucune justification pratique.

Ce théorème est accompagné d'une démonstration qui affirme la nécessité de ces conditions pour les systèmes PWA bimodales ($m=2$). Noter que la stabilisation des systèmes commutés bimodales ($m=2$) a une longue histoire en automatique. Il existe des méthodologies rigoureuses fournissant des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisation des systèmes PWA bimodale et surtout les méthodes géométriques dont les résultats ne sont généralement pas extensibles au cas général ($m>2$).

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons voulu évoquer tous les moyens d'analyse et techniques de synthèse utilisés pour en constituer un état de l'art sur les systèmes commutés ; hélas, la tâche est très difficile et loin d'être achevée vue la diversité des angles d'attaque et l'immense variété des techniques employées. Néanmoins, un tour d'horizon sur les techniques les plus connues et les résultats bien établis nous a permis de faire une présentation générale de ces systèmes.

Chapitre IV

**Stabilisation Pratique et observateur
Commuté pour les Systèmes Affines par
Morceaux
« Systèmes PWA »**

Introduction :

La majorité des systèmes physiques sont décrits par des modèles mathématiques non linéaires dont la commande n'est pas toujours possible. Historiquement, ce problème est abordé en commençant par une linéarisation de ces systèmes autour de certains points de fonctionnement. Les sous-systèmes linéaires obtenus possèdent généralement un terme affine et on obtient une approximation PWA du système non linéaire. Les domaines de validité de ces sous-systèmes sont généralement séparés par les forts non linéarités ou les discontinuités présentes dans le système d'origine. Les systèmes PWA ont une longue histoire en génie électrique dans la commande à relais et les éléments à saturation ou à zone morte ainsi que tous les circuits à commutation et en mécanique pour modéliser les systèmes à frottements. Les sous-systèmes appelés aussi modes d'un modèle PWA n'ont aucune raison de partager le même point d'équilibre, en effet certains sous-systèmes peuvent ne pas avoir d'équilibre du tout. Ce fait est une exception par rapport à l'abondante littérature sur la stabilité et la stabilisation des systèmes commutés autour d'équilibre commun (typiquement l'origine). Par conséquent, l'objectif de la régulation dans la plupart des applications des systèmes PWA, est de maintenir par commutation ces systèmes autour de certain point de fonctionnement désiré qui ne représente pas un équilibre commun. Évidemment, ce point ne peut pas être atteint, et de perpétuelles commutations sont nécessaires pour maintenir le système autour de ce point. Toutefois, en vertu du théorème de la densité en un temps infini [39], il est bien connu dans la théorie de la commande de ces systèmes que la convergence peut être assurée vers un point plus proche du point désiré mais (à notre connaissance) la distance n'a jamais été mathématiquement chiffrée et donc une erreur inconnue. En réalité, l'absence d'équilibre commun n'est pas le seul problème, la difficulté dans la commande des systèmes PWA provient aussi de la manipulation du terme affine. Ce dernier ne peut pas être représenté dans les formes quadratiques sans une augmentation de la dimension de l'espace dans lequel on travaille, ce qui fait perdre aux formes quadratiques leur avantage.

En s'aidant de la notion de stabilité pratique, nous allons proposer une méthode générale de stabilisation des systèmes PWA autour d'un point désiré qui ne représente pas un équilibre commun, mais en chiffrant exactement l'erreur de régulation commise cela ne peut se faire sans préciser exactement les coordonnées du point de convergence. Évidemment, l'objectif sera de minimiser au maximum cette erreur tout en utilisant des formulations mathématiques numériquement abordables. Les applications visées sont essentiellement la commande des convertisseurs DC-DC représentés par des systèmes PWA généralement de faible dimension ce qui rend les formulations BMI obtenus facilement abordables. La méthode est basée sur le retour d'états et a été initialement publiée dans [42].

En vue de compléter la méthode proposée et faciliter son application aux convertisseurs en minimisant le nombre de capteurs à implanter, un multi-estimateur des états du système PWA est présenté sans aborder les questions générales d'observabilité et de contrôlabilité. Cependant, la conception d'observateurs pour les systèmes commutés est constituée de deux parties, la première consiste à identifier le sous-système actif à un moment donné, et la deuxième doit pouvoir estimer l'état continu du sous-système actif. Le résultat est ce qu'on appelle un observateur hybride, ces derniers ont été l'objet de plusieurs travaux de recherche et la tâche la plus difficile est de connaître le mode actif à un moment donné [10]. Une étude approfondie de la question d'observabilité ainsi que la conception d'observateur hybride pour les systèmes hybrides commutés sort du cadre de notre travail, le lecteur intéressé peut se référer à [8][9][20][75]. Nous proposons un multi-estimateur adéquat à base de structure de Luenberger qui une fois associé à l'approche de commande proposée, le mode actif est reconnu. Le détail du multi-estimateur ainsi que les résultats de simulation de commande basée sur cet estimateur ont été publiés dans [43].

On notera que dans le cas de notre approche, les conditions que nous allons dégager ne sont pas des LMI mais plutôt des BMI abordables surtout lorsque les applications sont de faibles dimensions. En effet, nous ne disposons pas de logiciels spécialisés pour la résolution des BMI, la méthode de “gridding up” des variables scalaires a été appliquée pour pouvoir utiliser le toolbox LMI du Matlab.

5.4.1 Stabilisation pratique et discussion des travaux antérieurs :

Nous avons déjà signalé dans l’introduction aux systèmes dynamiques que lorsqu’un système n’a pas d’équilibre ou ne converge pas, la notion de stabilisation du système par rapport à un ensemble de points devient intéressante. Nous référençons cette façon de voir les choses par stabilisation pratique. En effet, cette notion de stabilité par rapport à une région ou un ensemble de point n’est pas nouvelle, elle est liée à la ω -stabilité et aux ensembles ω -limites employés dans la conception de commande des systèmes non linéaires [31][64]. D’autres concepts de stabilité ou de stabilisation pratiques des systèmes commutés sont plutôt liés au domaine temporel et la notion de temps de séjour. La raison d’existence de ces notions est dû au fait que l’utilité d’un système physique est jugée par le comportement de celui-ci pendant un certain temps fini et non seulement par les propriétés globales conclues à partir de la théorie de Lyapunov. En effet, un système peut être asymptotiquement stable au sens de Lyapunov et inutilisable en pratique à cause des caractéristiques de son transitoire. D’autre part, un système instable au sens de Lyapunov, peut présenter des comportements acceptables pendant un intervalle de temps pré-spécifié. Ces idées ont conduit à la notion de stabilité (donc de stabilisation aussi) en un intervalle de temps fini pré-spécifié⁷, la stabilité en un temps fini ou infini engage indirectement aussi les régions de stabilité pour plus de détail voir [26][80] et les références citées dedans, une extension et une application directe des résultats de cette approche aux systèmes PWA a été proposée dans [46].

Afin de pouvoir situer nos travaux par rapport à ceux existants dans la littérature, nous allons brièvement exposer les deux principales (seules) approches de stabilisation pratique reconnues pour leurs applicabilités aux systèmes PWA, puis nous discutons leurs avantages et leurs inconvénients par rapport à l’approche que nous allons proposer.

4.1.1. Stabilisation pratique : approche de Zhai & Michel [46][78][80]

Dans ces travaux, et pour le système commuté suivant :

$$\dot{x} = f_{\sigma}(x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4-1)$$

$$\sigma(t) = i_k \in \mathbb{I} = \{1, 2, \dots, N\}, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \text{ et } t_{k+1} - t_k \geq T$$

Deux régions Ω_1 et Ω_2 sont considérées pour l’ensemble des conditions initiales et l’espace des états respectivement, ces régions ne contiennent pas nécessairement l’origine. Ils définissent leurs concept de stabilité pratique généralisé (GP-stabilité) par : lorsque l’état initial est dans Ω_1 , alors l’état du système reste toujours dans Ω_2 .

Définition 5.1 : [80]

Le système ci-dessus est pratiquement stable par rapport à $(\Omega_1, \Omega_2, t_0, T_f)$ où Ω_1, Ω_2 sont deux ensembles non vides de R^n tel que $\Omega_1 \subset \Omega_2$, si $x(t_0) \in \Omega_1 \Rightarrow x(t) \in \Omega_2, \forall t \in I = [t_0, t_0 + T_f)$.

Le problème est le suivant, étant donnés Ω_1, Ω_2, t_0 et T_f déterminer le temps de séjour $T > 0$ de façon que le système sans équilibre commun en (4-1) soit pratiquement stable par rapport à $(\Omega_1, \Omega_2, t_0, T_f)$, pour tout signal de commutation $\sigma(t)$ défini ci-dessus.

⁷ A ne pas confondre la notion de stabilité en un intervalle de temps fini et la stabilité en un temps fini habituellement appelé temps d’établissement.

Le problème est attaqué en utilisant des fonctions de Lyapunov multiples i.e. $V(x)$ est une concaténation de $V_{\sigma(t)} \in \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$, et on a le théorème suivant :

Théorème 5.1 : [46]

Soient Ω_1, Ω_2, t_0 et une constante T_f avec $\Omega_1 \subset \Omega_2$, le système (4-1) est pratiquement stable par rapport à $(\Omega_1, \Omega_2, t_0, T_f)$ et le signal de commutation $\sigma(t)$, s'il existe un temps de séjour $T > 0$ et des fonctions scalaires $V_{\sigma(t)}$ différentiables, définies positives et radialement non bornées dans Ω_2 et un réel positif $0 < \mu \leq 1$ tel que :

- i. $\dot{V}_i(x) \leq 0, \forall i \in S, \forall t \in I$ et $\forall x \in \Omega_2$.
- ii. $V_{i_{k+1}}(x(t_{k+1})) \leq \mu V_{i_k}(x(t_{k+1} - T)), \forall i_k, i_{k+1} \in \mathbb{I}, i_k \neq i_{k+1}, \forall t \in I$ et $x(t_{k+1}) \in \Omega_2$.

Une application de ces résultats aux systèmes PWA a été aussi présentée, le résultat est énoncé ci-dessous pour le système suivant :

$$\dot{x} = A_{\sigma}x(t) + b_{\sigma} \quad (4-2)$$

Où la définition des régions suivante a été adoptée :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \bigcap_1^N \Omega_{1_i}, \quad \Omega_{1_i} = \{x \in \mathbb{R}^n | (x - x_{ei})^t P_i (x - x_{ei}) + d_i < \alpha\} \\ \Omega_2 &= \bigcup_1^N \Omega_{2_i}, \quad \Omega_{2_i} = \{x \in \mathbb{R}^n | (x - x_{ei})^t P_i (x - x_{ei}) + d_i < \beta\} \end{aligned}$$

Avec $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, α, β deux scalaires positifs vérifiant : $\alpha < \beta$ et $d_i \geq 0$ alors que les équilibres des sous-systèmes sont donnés par $x_{ei} = -A_i^{-1}b_i$ si A_i non singulière.

Théorème 5.2 : [46]

Soient α, β, t_0 et T_f des réels donnés avec $\alpha < \beta$ et soient Ω_1, Ω_2 les deux régions définies ci-dessus avec $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Le système (4-2) est pratiquement stable par rapport à $(\Omega_1, \Omega_2, t_0, T_f)$ et le signal de commutation $\sigma(t)$, s'il existe un temps de séjour $T > 0$, des matrices définies positives $P_i, i \in \mathbb{I}$, des scalaires $0 \leq d_i < \alpha$ et un nombre positif μ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i^t P_i + P_i A_i < 0 \\ \left[\begin{array}{cc} e^{A_i^t T} P_j e^{A_i T} - \mu P_i & e^{A_i^t T} P_j \Delta x_{e_{ij}} \\ * & \Delta x_{e_{ij}}^t P_j \Delta x_{e_{ij}} + d_j - \mu d_i \end{array} \right] \\ \mu < \sqrt{\bar{N}(t_0, T_f)} \sqrt{\beta / \alpha} \end{array} \right.$$

$\forall i, j \in \mathbb{I}, i \neq j$ et $\bar{N}(t_0, T_f)$ est le nombre maximum de commutation dans l'intervalle de temps (t_0, T_f) et $\Delta x_{e_{ij}} = x_{ei} - x_{ej}$.

Ce théorème peut facilement être modifié pour servir à la question de stabilisation.

4.1.2. Stabilisation pratique : approche de Xuping Xu et Zhai [76] [77] :

Dans cette méthodologie, l'idée n'est pas très loin de la nôtre dans la mesure où l'approche utilise une définition de la stabilité (stabilisation) pratique explicitement fonction des régions et ne fait aucune allusion au temps de séjour. Un autre point commun avec notre approche, est que les régions de stabilité pratique sont aussi liées aux niveaux d'énergie du système. Cependant, la démarche suivie, les hypothèses faites sur le système PWA à stabiliser ainsi que la formulation du problème n'ont rien à voir avec l'approche que nous avons proposé. Faisons brièvement d'abord le point sur ce qui a été proposé dans ce contexte.

Nous rappelons d'abord les définitions de stabilité pratique qui ont été utilisées pour le même système commuté (4-1) et sous la même loi de commutation S :

Définition 5.2 (Stabilité ε -pratique) :

Soit le système commuté (4-1) sous la loi de commutation S , étant donné un $\varepsilon > 0$, le système est dit ε -pratiquement stable sous S , s'il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$x(0) \in B(0, \delta) \Rightarrow x(t) \in B(0, \varepsilon), \quad \forall t \geq 0$$

Définition 5.3 (Stabilisabilité ε -pratique) :

Le système commuté (4-1) est dit pratiquement stabilisable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une loi de commutation $S = S(\varepsilon)$ telle que le système est ε -pratiquement stable sous S .

D'après les définitions de l'attractivité pratique et la stabilisabilité pratique dans [76], nous pouvons dégager la définition de stabilisabilité asymptotique ε -pratique suivante :

Définition 5.4 (Stabilisabilité asymptotique ε -pratique) :

Ayant une région D autour de l'origine, le système commuté (4-1) est dit pratiquement asymptotiquement stabilisable si pour tout $\varepsilon > 0$ et $x(0) \in D$, il existe une loi de commutation $S = S(\varepsilon)$ et $T = T(x(0)) > 0$ telle que : $x(t) \in B(0, \varepsilon), \forall t \geq T$.

Si $D = \mathbb{R}^n$, alors le système commuté (4-1) est pratiquement globalement asymptotiquement stabilisable.

En résumé, d'après les remarques des auteurs dans [76], il devrait exister une loi de commutation S_0 qui permet de ramener la trajectoire issue de $x(0) \in D$ à $B(0, \delta)$ en un certain temps $T(x(0)) > 0$ et une autre loi de commutation S_1 qui permet de ramener la trajectoire vers $B(0, \varepsilon)$. Une concaténation de S_0 et une version retardée de S_1 permet de construire une loi de commutation S qui ramène directement la trajectoire en $B(0, \varepsilon)$ et on a le théorème suivant :

Théorème 5.3 : [76][77]

Supposons qu'il existe une fonction d'énergie $V(x)$ pour le système commuté (4-1), soit $\rho > 0$ donné et soit la région $\Omega_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq \rho\}$ bornée. Le système commuté (4-1) est pratiquement asymptotiquement stabilisable en Ω_ρ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

a. $\min_{i \in \mathbb{S}} \frac{\partial V}{\partial x} f_i(x) < 0$, pour $x \in \Omega_\rho - \{0\}$,

b. $0 \in \text{Int } C$ où $C = \text{co}\{f_i(0)\}, i \in \mathbb{I}$.

Si la condition en a est vérifiée pour $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, alors le système (4-1) est globalement pratiquement asymptotiquement stabilisable.

4.1.3. Comparaison des approches de stabilisation :

On notera d'abord que la première approche est plus générale dans la mesure où le point de fonctionnement désiré est seulement fonction des équilibres de chacun des modes. Cependant, l'application directe de la méthode nécessite que toutes les matrices A_i soient inversibles, mais le vrai conservatisme de la méthode (à notre avis) est l'utilisation du temps de séjour, la contrainte imposée par ce facteur aussi utile qu'elle soit n'est pas facilement exploitable pour certaines applications. Bien que la seconde approche soit plus référenciée pour la stabilisation pratique, son idée n'est pas nouvelle. En effet, la seconde approche représente une petite extension de la méthode vue précédemment (dernière section du chapitre 3) et introduite par Decarlo et al (2000) [23] et compléter par Bolzern (2004) [12]. L'apport de Xuping Xu et al [76][77] est l'introduction de régions de stabilité dans la démarche de Bolzern sans toutefois

lever le réel conservatisme présent dans la méthode initiale et que l'on a déjà signalé. Rappelons que ce conservatisme se manifeste par la condition b dans le théorème précédent, nous pensons que cette condition n'a aucune raison d'être en pratique. Dans la seconde approche, l'auteur a aussi fait une proposition d'algorithme numérique pour le calcul de la région d'attraction, réellement, cette tentative ne paraît pas facile à appliquer et nécessite de réelle investigation.

Indépendamment de ces travaux, nous avons proposé [42][43] une approche générale pour la stabilisation des systèmes commutés affines par morceaux PWA. Nous nous sommes inspirés seulement de la stabilité locale de Lyapunov et la démarche dans la méthode d'analyse et de synthèse de Steffan Pettersson [65] & [67] pour les systèmes commutés linéaires (non affines).

L'approche que nous avons proposée n'a pas de contraintes conservatrices telles que le temps de séjour [78][80] ou la condition en b du théorème précédent [76][77]. De plus, la formulation du problème dans notre approche est élégante et sous forme BMI abordable par certains logiciels. Encore plus, contrairement à toutes les autres approches, la méthodologie que nous avons suivie permet d'obtenir exactement les coordonnées du point de convergence autre que le point désiré, par conséquent la distance par rapport au point désiré et donc l'erreur est connue avec précision. Bref, encore incomplète, c'est une méthodologie qui nous paraît intéressante, nous l'avons aussi complétée par un multi-estimateur dont les erreurs convergent exponentiellement vers zéro.

5.4.1 Première variante de l'approche proposée : (approche 1) [42] :

Dans ce qui suit, la variable σ est remplacée par i et la variable t est omise du modèle (4-2) pour la clarté de l'exposé de la méthode, et le modèle affine considéré est le suivant :

$$\dot{x} = a_i x + b_i \quad (4-3)$$

En se basant sur la vieille pratique des ingénieurs qui consiste à chercher une loi de commande permettant d'amener la trajectoire du système de n'importe quel condition initiale x_0 vers un voisinage quantifiable $B(x_a, \varepsilon_a)$ centré en x_a et essayer de le maintenir autour ; nous avons défini la stabilisabilité pratique des systèmes commutés affines par morceaux comme suit :

Définition 5.5 : [42]

Le système (4-2) est globalement pratiquement asymptotiquement stabilisable en un point $x_a \in \mathbb{R}^n$, si pour tout scalaire $\varepsilon_p \geq \varepsilon_{pmin}$, il existe un ε_a avec $0 < \varepsilon_a \leq \varepsilon_p$ et une loi de commutation qui permet d'amener la trajectoire du système de n'importe quel point de départ $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vers $B(x_a, \varepsilon_a)$ et de le maintenir dans $B(x_a, \varepsilon_p)$ pour tout le temps future.

Précisément, l'objectif est de chercher cette loi de commutation dépendante de l'état et les scalaires $\varepsilon_p, \varepsilon_a$. Nous allons montrer que pour les systèmes PWA, le ε_p doit être supérieure à un certain minimum ε_{pmin} qu'on peut calculer avec précision.

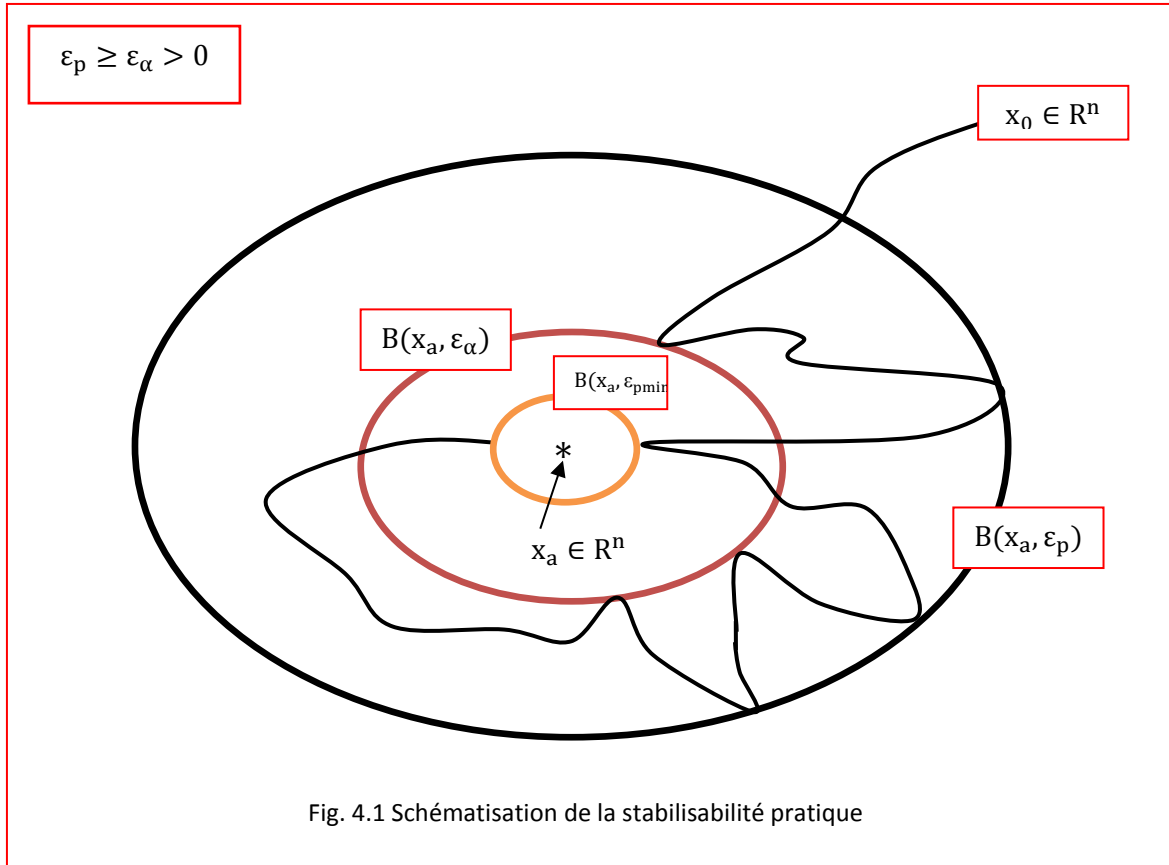
Pour les systèmes PWA sans équilibre commun, le choix du point de fonctionnement x_a se fait sans conservatisme selon l'équilibre du modèle moyen. Donc x_a doit être choisi parmi les points qui vérifient:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i (a_i x_a + b_i) = 0 \quad \text{avec } 0 \leq \alpha_i \leq 1 \text{ and } \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1. \quad (4-4)$$

Ce choix est justifié par l'emploi de modèle moyen particulièrement en circuiteries électriques et valable pour tous les systèmes PWA n'ayant pas un équilibre commun puisque c'est la configuration à énergie minimale du système global.

Nous pouvons élargir l'équilibre moyen à tous les points vérifiant :

$$\min_i (\sum_{i=1}^m \alpha_i (a_i x_a + b_i)) \quad \text{telle que } 0 \leq \alpha_i \leq 1 \text{ and } \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1. \quad (4-5)$$



Il est évident qu'on ne peut s'approcher de ce point sans commutations forcées et rapides, les commutations rapides ne sont pas désirables en général et nécessitent un traitement spécifique qu'on évoquera par la suite.

Pour ce problème de synthèse, nous associons à chaque sous-système i une région Ω_i d'activation, en considérant une partition de l'espace d'état en régions Ω_i , à condition que $\cup \Omega_i$ recouvre tout l'espace R^n . Dans ce cas, l'objectif sera de déterminer ces régions et la loi de commutation dépendante de l'état de façon que la commutation entre les modes éventuellement instables du système (4-3) résulte en un système global stable.

Sans perte de généralité, le problème à l'origine peut être considéré, le système (4-3) s'écrit :

$$\dot{x} = a_i x + B_i, \quad B_i = a_i x_a + b_i \quad (4-6)$$

Afin de faciliter la manipulation des formes quadratiques et la formulation LMI, nous adoptons le changement de variable suivant :

$$z = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4-7)$$

Ce qui conduit au système commuté linéaire ci-dessous, qu'on appellera système augmenté pour faire allusion à l'espace de représentation en dimension $(n+1)$.

$$\dot{z} = A_i z \quad \text{avec } A_i = \begin{bmatrix} a_i & B_i \\ 0_{1 \times n} & 0 \end{bmatrix} \text{ et } i \in I_m. \quad (4-8)$$

Finalement, notre problème de stabilisation se réduit à la stabilisation du système (4-8) au point :

$$z^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4-9)$$

Stabilisation quadratique [42]

Nous observons que nous n'avons pas besoin de considérer tout l'espace d'état augmenté de dimension $(n+1)$, puisque notre nouveau système (4-8) est défini seulement dans le domaine suivant :

$$\mathcal{X} = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} | z_{n+1} = 1\} \quad (4-10)$$

Malheureusement, nous allons voir que cette observation ne peut nous être très utile vue la difficulté de résolution des BMI (LMI) dans un domaine pareil.

Dans ce qui suit, nous allons essayer de développer une technique de synthèse systématique en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique commune. Cela en dégagant des conditions de stabilisation de notre système augmenté par rapport à une partition du domaine \mathcal{X} , nous allons voir que ceci n'est possible que par le passage à travers une partition de l'espace augmenté \mathbb{R}^{n+1} .

Soient Σ_i des régions quadratiques de l'espace \mathbb{R}^{n+1} , définies par:

$$\Sigma_i = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} | z^t Q_i z \geq 0\} \quad \text{avec } Q_i \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \text{ et } i \in \mathbb{I}. \quad (4-11)$$

Considérons la fonction suivante comme fonction candidate de Lyapunov pour notre système (4-8):

$$V_1(z) = z^t P_1 z \quad \text{avec } P_1 = \begin{bmatrix} 2p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & 0 \end{bmatrix} \text{ et } p = p^t > 0. \quad (4-12)$$

Où $z \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\alpha_p \in \mathbb{R}^n$.

Soit le domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ défini par :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n | x^t p x < \varepsilon_p\}. \quad (4-13-a)$$

Ce domaine a une extension dans le domaine \mathcal{X} , définie par :

$$\check{D} = \left\{ z \in \mathcal{X} \mid z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z < \varepsilon_p \right\}. \quad (4-13-b)$$

Puisque la fonction candidate de Lyapunov dans (4-12) n'est pas positive dans tout le domaine \mathcal{X} , nous allons essayer de prouver sa positivité seulement dans une partie de \mathcal{X} représenté par $\{\mathcal{X} - \check{D}\}$ et se contenter ainsi de la stabilisabilité pratique du système. Cependant, même dans ce sous-domaine $\{\mathcal{X} - \check{D}\}$ nous ne pouvons prouver directement la positivité de cette fonction ; la matrice P_2 suivante est utilisée comme intermédiaire pour la démonstration.

$$P_2 = \begin{bmatrix} p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & \varepsilon_p \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_p > 0. \quad (4-14)$$

Soit $\dot{V}_{1i}(z)$ la dérivée temporelle de $V_1(z)$ le long de la trajectoire du i ème sous-système dans (4-8) définie par :

$$\dot{V}_{1i}(z) = \frac{\partial V_1(z)}{\partial z} \frac{dz}{d\xi} \quad \text{avec } \frac{dz}{d\xi} = A_i z \text{ et } \xi \in \mathbb{R}^+ \quad (4-15)$$

Et on aura :

$$\dot{V}_{1i}(z) = z^t [A_i^t P_1 + P_1 A_i] z. \quad (4-16)$$

Stratégie de Contrôle des Commutations :

Dans cette approche, on associe à chaque sous-système i du système augmenté une région d'activation Σ_i . Cette région est définie de façon que la dérivée $\dot{V}_{1i}(z)$ de son sous-système associé soit négative dans cette région. Une des stratégies de contrôle des commutations bien connue par son caractère stabilisant est basée sur la sélection du sous-système ayant la plus grande décroissance de sa fonction de Lyapunov $V_1(z)$:

$$\sigma(z) = \operatorname{argmin}_{i \in I_m} \{\dot{V}_{1i}(z)\}. \quad (4-17)$$

Où $\sigma(z) = i$, est l'indice du mode à activer.

Nous référons à cette stratégie de contrôle des commutations stabilisantes par stratégie de contrôle de commutations de la plus grande pente.

Lemme 5.1 : [42]

S'il existe une matrice symétrique définie positive $p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices $Q_i \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, un vecteur $\alpha_p \in \mathbb{R}^n$ et un scalaire positive ε_p telle que:

$P_2 > 0$ et $\dot{V}_{1i}(z)$ est négative quand $z \in \Sigma_i$ et $i \in \mathbb{I}$ avec $\cup \Sigma_i = \mathbb{R}^{n+1}$, alors en utilisant la stratégie de contrôle de commutations de la plus grande pente, toutes les trajectoires du système (4-8) convergent vers le domaine \check{D} . Donc, le système est pratiquement asymptotiquement stabilisable au point $z^ \in \check{D}$ pour toute condition initiale $z_0 \in X$. ■*

Démonstration :

Précisant que $V_1(z^*) = 0$ et $z^* \in \check{D}$.

De (4-13-a) nous avons $x^t p x \geq \varepsilon_p$ pour tout $x \in \{\mathbb{R}^n - \check{D}\}$, ce qui se traduit dans le domaine X par:

$$z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \geq z^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_p \end{bmatrix} z \text{ pour tout } z \in \{X - \check{D}\}. \quad (4-18)$$

Donc $z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z - z^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_p \end{bmatrix} z \geq 0$ pour tout $z \in \{X - \check{D}\}$. Si $P_2 > 0$ (ceci est vérifiable comme un LMI) i.e. $z^t P_2 z > 0$ pour $z \in \mathbb{R}^{n+1}$, et puisque $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ alors pour tout $z \in X$, nous avons:

$$z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + z^t \begin{bmatrix} 0 & \alpha_p \\ \alpha_p^t & 0 \end{bmatrix} z + z^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_p \end{bmatrix} z > 0.$$

En ajoutant la quantité positive $(z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z - z^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_p \end{bmatrix} z)$ (positive pour $z \in \{X - \check{D}\}$) au terme à gauche, l'inégalité stricte reste valable pour $z \in \{X - \check{D}\}$ et nous obtenons:

$$V_1(z) = z^t \begin{bmatrix} 2p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & 0 \end{bmatrix} z > 0 \text{ pour tous } z \in \{X - \check{D}\}. \quad (4-19)$$

D'autre part, nous avons :

$$\dot{V}_{1i}(z) = z^t \begin{bmatrix} 2(a_i^t p + p a_i) & a_i^t \alpha_p + 2p B_i \\ 2B_i^t p + \alpha_p^t a_i & 2B_i^t \alpha_p \end{bmatrix} z. \quad (4-20)$$

Où $\dot{V}_{1i}(z^*) \neq 0$ pour $B_i \alpha_p \neq 0$.

Si $\dot{V}_{1i}(z) < 0$ pour $z \in \Sigma_i$ et $i \in \mathbb{I}$ avec $\cup \Sigma_i = \mathbb{R}^{n+1}$ (ceci est vérifiable comme un LMI) donc nous avons: $\dot{V}_{1i}(z) < 0$ pour tout $z \in X_i$ avec $X_i = (X - \check{D}) \cap \Sigma_i$ et

$$\cup \mathcal{X}_i = \cup \left((\mathcal{X} - \check{D}) \cap \Sigma_i \right) = (\mathcal{X} - \check{D}) \cap (\cup \Sigma_i) = (\mathcal{X} - \check{D}).$$

En résumant les résultats obtenus comme suit [42] :

- $V_1(z^*) = 0$ et $z^* \in \check{D}$.
- $V_1(z) > 0$ pour tout $z \in \{\mathcal{X} - \check{D}\}$.
- $\dot{V}_{1i}(z) < 0$ pour tout $z \in \mathcal{X}_i$ et $i \in \mathbb{I}$.
- $\cup \mathcal{X}_i = (\mathcal{X} - \check{D})$.

Bien sûr, cela veut dire qu'en utilisant la stratégie de contrôle des commutations de la plus grande pente, $V_1(z)$ converge vers \check{D} qui contient z^* et donc le système (4-8) est pratiquement asymptotiquement stabilisable en ce point. Ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 1 :

D'après la démonstration ci-dessus, $\cup \mathcal{X}_i = (\mathcal{X} - \check{D})$ est vérifiée si $(\mathcal{X} - \check{D}) \subseteq (\cup \Sigma_i)$ même si les régions Σ_i ne recouvrent pas tout l'espace augmenté \mathbb{R}^{n+1} mais ce fait ne peut être exploité. En effet, la seule condition mathématique disponible (qu'on peut exploiter comme LMI) pour la propriété de recouvrement, est l'existence de scalaires positives θ_i telle que $\sum_1^m \theta_i Q_i \geq 0$ qui est suffisante pour assurer le recouvrement de tout l'espace \mathbb{R}^{n+1} ($\cup \Sigma_i = \mathbb{R}^{n+1}$). Ce qui veut dire que la nécessité $\cup \Sigma_i = \mathbb{R}^{n+1}$ ou de sa condition suffisante $\sum_1^m \theta_i Q_i \geq 0$ dans (4-30) est une condition trop forte pour notre objectif.

Note d'application : [42]

Rappelons que la stabilisabilité pratique ne garantit pas qu'on puisse stabiliser au point désiré, nous pouvons seulement ramener la trajectoire du système dans un petit domaine \check{D} et le maintenir à l'intérieur. Ceci est largement suffisant tant que le point désiré est seulement un équilibre moyen (équilibre fictif). Cependant, pour de meilleure précision, une petite valeur de ε_p est souhaitable. Même s'il paraît qu'on peut choisir ε_p arbitrairement petit d'après $p > 0$, nous nous sommes limités à ε_p minimale qui assure $P_2 > 0$ et $\dot{V}_{1i}(z) < 0$. Normalement, si on savait résoudre les LMI dans \mathcal{X} alors on peut rendre ε_p extrêmement petit. Le recours de résoudre les LMI dans tout l'espace n'est pas sans prix, cela conduit à une surestimation de la valeur effective de ε_p et affecte légèrement les matrices obtenues. Heureusement, les résultants peuvent être améliorés en spécifiant un domaine de convergence plus petit dans \check{D} (voir Fig. 1). En effet, nous avons les implications suivantes :

$$\begin{cases} \dot{V}_{1i}(z) < 0, z \in \Sigma_i \\ \cup \Sigma_i = \mathbb{R}^{n+1} \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{V}_{1i}(z) < 0, z \in \mathcal{X}_i \\ \mathcal{X}_i = \mathcal{X} \cap \Sigma_i \wedge \cup \mathcal{X}_i = \mathcal{X} \end{cases} \implies \dot{V}_{1i}(z) < 0, z \in \check{D}$$

D'autant plus, $\min_z V_1(z)$ dans \check{D} est atteint en $z^{**} = \begin{pmatrix} x^{**} \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $x^{**} = \frac{-p^{-1}a_p}{2}$. Par conséquent, $V_1(z)$ a tendance à converger obligatoirement vers ce minimum sans pouvoir l'atteindre puisqu'à l'intérieur du domaine délimité par $V_1(z) = 0$, $V_1(z)$ n'est pas positive. Sachant que z^{**} est différent de z^* mais nécessairement très proche quand ε_p est petit.

Soit \check{D}_{α_0} le plus petit domaine centré en z^* et contient z^{**} , il est définie dans X par :

$$z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \leq z^{**t} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z^{**}, \text{ plus précisément, nous avons :}$$

$$\check{D}_{\alpha 0} = \left\{ z \in \mathcal{X} \mid z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \leq \frac{\alpha_p^t p^{-1} \alpha_p}{4} \right\}. \quad (4-22-a)$$

Ce domaine est une extension du domaine $D_{\alpha 0}$ défini dans \mathbb{R}^n par: $x^t p x \leq x^{**t} p x^{**}$, et nous avons:

$$D_{\alpha 0} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^t p x \leq \frac{\alpha_p^t p^{-1} \alpha_p}{4} \right\}. \quad (4-22-b)$$

Alors que le complément de Schur [16] permet de conclure directement à partir $P_2 > 0$ que $\alpha_p^t p^{-1} \alpha_p < \varepsilon_p$ donc $\check{D}_{\alpha 0} \subset \check{D}$ ou équivalentement $D_{\alpha 0} \subset D$.

Ce qui conduit à :

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{p \min} = \frac{\alpha_p^t p^{-1} \alpha_p}{4}. \quad (4-23)$$

Pour clarifier l'application de la méthode, nous allons faire une toute petite modification en proposant d'élargir le domaine $\check{D}_{\alpha 0}$ comme suit :

Puisque $\min_z V_1(z)$ est en z^{**} qui est sur la bordure de $\check{D}_{\alpha 0}$, il peut être pratique d'arrêter les commutations un peu avant d'atteindre ce domaine. Par exemple quand la trajectoire atteint le domaine $\check{D}_{\alpha 1}$ (qui peut aussi représenter une extension d'un certain domaine $D_{\alpha 1}$ de \mathbb{R}^n) définie par:

$$\check{D}_{\alpha 1} = \left\{ z \in \mathcal{X} \mid z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \leq \alpha_p^t p^{-1} \alpha_p \right\}. \quad (4-24)$$

Remarque 2 : [42]

Quand $\check{D}_{\alpha 1}$ est atteint, l'erreur maximum entre états i.e. distance entre z^* et le point atteint, peut être facilement calculé à partir de (4-24) une fois p et α_p sont obtenues, ce qui permet de préciser l'erreur commise.

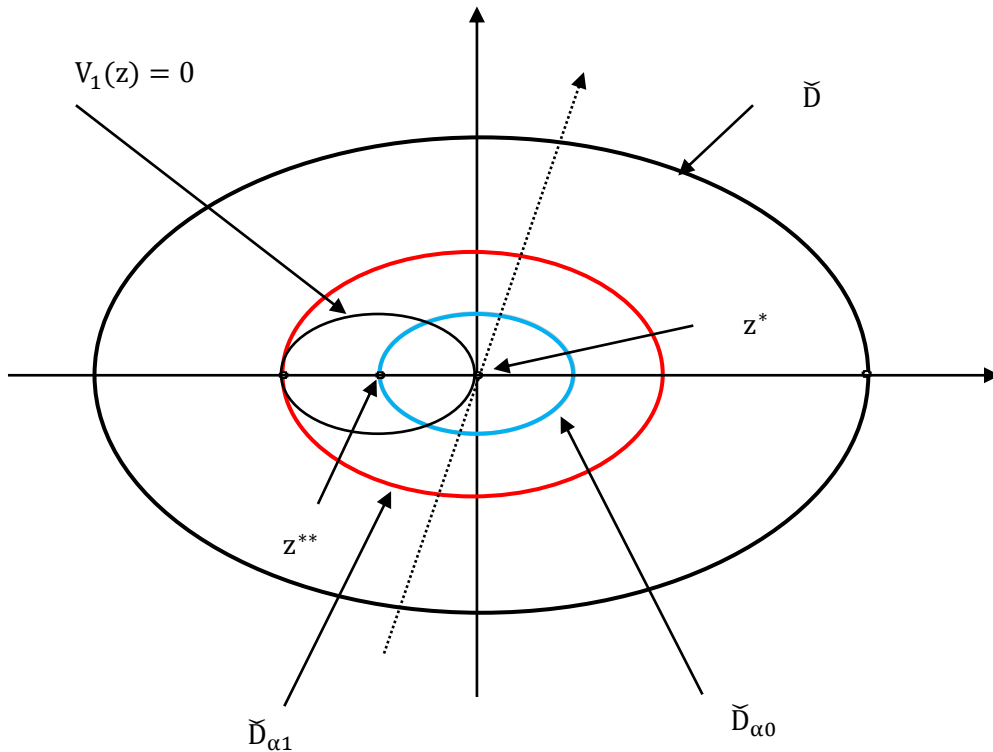


Figure 4.2. Construction simple en dimension deux (approche 1)

Remarque 3 : [42]

Un cas particulier mérite d'être clarifier, lorsqu'on impose dans la méthodologie ci-dessus $\alpha_p = 0$, on obtient les résultats suivants:

- $V_1(z^*) = 0$.
- $V_1(z) = z^t \begin{bmatrix} 2p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z > 0$ pour tout $z \in \{X - \bar{D}\}$ puisque $\varepsilon_p > 0$ et $z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \geq z^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_p \end{bmatrix} z$ dans $\{X - \bar{D}\}$.
- À partir de (4-20), nous constatons que l'élément en bas à droite dans $\dot{V}_{1i}(z)$ est égal à zéro, par conséquent pour vérifier $\dot{V}_{1i}(z) < 0$ pour $z \in \Sigma_i$ comme LMI, tous les éléments $((n+1), (n+1))$ dans Q_i doivent être nécessairement négatifs. Cela va automatiquement altérer la propriété de recouvrement autrement une stabilité asymptotique aurait pu être obtenue puisque le minimum de $V_1(z)$ dans X est en z^* et $V_1(z^*) = 0$, encore plus $\dot{V}_{1i}(z^*) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{I}$.

En appliquant le lemme précédent au système augmenté (4-8) où $V_1(z)$ a été utilisé pour dégager les conditions de stabilisation, le résultat est énoncé par le théorème suivant :

Théorème 4.4 : [42]

S'il existe des matrices symétriques q_i , une matrice symétrique définie positive p , des vecteurs $\alpha_p \in \mathbb{R}^n, \alpha_{q_i} \in \mathbb{R}^n$, des scalaires positifs $\gamma, \delta_i, \theta_i, \varepsilon_p$ et des scalaires β_{q_i} tel que pour tout $i \in \mathbb{I}$, l'optimisation suivante:

Min ε_p telles que :

- 1) $\begin{bmatrix} p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & \varepsilon_p \end{bmatrix} > 0$.
- 2) $\begin{bmatrix} 2(\alpha_i^t p + p \alpha_i) + \delta_i q_i + \gamma I_n & \alpha_i^t \alpha_p + 2p B_i + \delta_i \alpha_{q_i} \\ 2B_i^t p + \alpha_p^t \alpha_i + \delta_i \alpha_{q_i}^t & 2B_i^t \alpha_p + \delta_i \beta_{q_i} \end{bmatrix} < 0$.
- 3) $\sum_{i=1}^m \theta_i \begin{bmatrix} q_i & \alpha_{q_i} \\ \alpha_{q_i}^t & \beta_{q_i} \end{bmatrix} \geq 0$.

Conduit à une solution avec un ε_p très petit, alors en utilisant la stratégie de contrôle des commutations de la plus grande pente, toutes les trajectoires du système (4-8) convergent vers le domaine :

$$\bar{D}_{\alpha 1} = \left\{ z \in X \mid z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \leq \alpha_p^t p^{-1} \alpha_p \right\}.$$

Ainsi, le système est pratiquement asymptotiquement stabilisable au point $z^ \in \bar{D}_{\alpha 1}$ à partir de n'importe quelle condition initiale $z_0 \in \mathcal{X}$. ■*

Note :

Quand la minimisation de ε_p n'est pas formulée, l'utilisateur peut imposer une borne supérieur très petite ε_0 sur ε_p et le théorème s'énonce ainsi comme suit :

Théorème 4.5 : [42]

S'il existe des matrices symétriques q_i , une matrice symétrique définie positive p , des vecteurs $\alpha_p \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_{qi} \in \mathbb{R}^n$, des scalaires positifs γ , δ_i , θ_i , ε_p et des scalaires β_{qi} tel que pour tout $i \in \mathbb{I}$, les BMI suivant:

- 1) $\varepsilon_p < \varepsilon_0$.
- 2) $\begin{bmatrix} p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & \varepsilon_p \end{bmatrix} > 0$.
- 3) $\begin{bmatrix} 2(\alpha_i^t p + p \alpha_i) + \delta_i q_i + \gamma I_n & \alpha_i^t \alpha_p + 2p B_i + \delta_i \alpha_{qi} \\ 2B_i^t p + \alpha_p^t \alpha_i + \delta_i \alpha_{qi}^t & 2B_i^t \alpha_p + \delta_i \beta_{qi} \end{bmatrix} < 0$.
- 4) $\sum_1^m \theta_i \begin{bmatrix} q_i & \alpha_{qi} \\ \alpha_{qi}^t & \beta_{qi} \end{bmatrix} \geq 0$.

Ont une solution pour un petit ε_0 , alors en utilisant la stratégie de contrôle des commutation de la plus grande pente, toutes les trajectoires du système (4-8)) convergent vers le domaine :

$\check{D}_{\alpha 1} = \{z \in X \mid z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \leq \alpha_p^t p^{-1} \alpha_p\}$. Ainsi, le système est pratiquement asymptotiquement stabilisable au point $z^* \in \check{D}_{\alpha 1}$ à partir de n'importe quelle condition initiale $z_0 \in X$.

Démonstration : [42]

L'objectif est bien sure de chercher pour le système (4-8), les régions Σ_i et la fonction de Lyapunov $V_1(z)$ comme définies dans (4-11) & (4-12), nous avons :

$$V_1(z) = z^t P_1 z \text{ and } \Sigma_i = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid z^t Q_i z \geq 0\}. \quad (4-25)$$

Avec les structures de matrices suivantes :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & 0 \end{bmatrix} \text{ et } Q_i = \begin{bmatrix} q_i & \alpha_{qi} \\ \alpha_{qi}^t & \beta_{qi} \end{bmatrix}; P_1, Q_i \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

Noter que $V_1(z^*) = 0$.

Le système augmenté (4-8) est quadratiquement pratiquement asymptotiquement stabilisable, si les conditions suivantes sont vérifiées :

S'il existe une fonction scalaire $V_1(z)$, un scalaire γ positif et des régions X_i telle que:

- 1) $V_1(z) > 0$ pour tout $z \in \{X - \check{D}\}$.
- 2) $\dot{V}_{1i}(z) \leq -\gamma z^t z$ pour tout $z \in X_i, i = 1, m$. (4-26)
- 3) $X_1 \cup X_2 \dots \dots \cup X_m = (X - \check{D})$.

Puisque ces conditions ne conduisent pas à une formulation BMI dans le domaine $\{X - \check{D}\}$, En utilisant notre lemme précédent, nous remplaçons la première condition par $P_2 > 0$ et nous résolvons la seconde condition dans Σ_i au lieu de X_i . La troisième condition est satisfaite si $\cup \Sigma_i = \mathbb{R}^{n+1}$ qui est vérifiable par l'existence de $\theta_i > 0$ telle que $\sum_1^m \theta_i Q_i \geq 0$, (voir remarque importante).

En utilisant la S-procédure [16], nous obtenons les LMI solvables suivantes (BMI abordable) :

S'il existe des matrices symétriques Q_i , des matrices symétriques définies positives P_1 , P_2 et des scalaires positifs γ , δ_i , θ_i telle que :

- 1) $P_2 > 0$.
- 2) $A_i^t P_1 + P_1 A_i + \delta_i Q_i + \gamma \check{I} \leq 0, i = 1, m$. (4-27)
- 3) $\sum_1^m \theta_i Q_i \geq 0$

$$\text{Où } \check{I} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } P_2 = \begin{bmatrix} p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & \varepsilon_p \end{bmatrix}.$$

Alors le système augmenté (4-8) est pratiquement asymptotiquement stabilisable au point z^* sous une loi de contrôle des commutations basée sur la plus grande pente.

En vue d'utiliser le toolbox LMI du Matlab, il est nécessaire de développer les conditions obtenues. En particulier, nous remplaçons les inégalités non-strictes par des autres strictes. Sachant que [16] lorsqu'il y a solution aux inégalités strictes il y aura solution aux inégalités non-strictes alors que la réciproque n'est pas vraie.

1) La première condition est donnée par :

$$\begin{bmatrix} p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & \varepsilon_p \end{bmatrix} > 0. \quad (4-28)$$

Cette condition est implémentée avec minimisation de ε_p ou une spécification d'une petite borne supérieure ε_0 .

2) la seconde condition est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} a_i^t & 0 \\ B_i^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \delta_i \begin{bmatrix} q_i & \alpha_{qi} \\ \alpha_{qi}^t & \beta_{qi} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} < 0. \quad \forall i = 1, m.$$

Donc par :

$$\begin{bmatrix} 2(a_i^t p + p a_i) + \delta_i q_i + \gamma I_n & a_i^t \alpha_p + 2p B_i + \delta_i \alpha_{qi} \\ 2B_i^t p + \alpha_p^t a_i + \delta_i \alpha_{qi}^t & 2B_i^t \alpha_p + \delta_i \beta_{qi} \end{bmatrix} < 0. \quad (4-29)$$

3) La troisième condition est donnée par :

$$\sum_1^m \theta_i \begin{bmatrix} q_i & \alpha_{qi} \\ \alpha_{qi}^t & \beta_{qi} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \theta_i > 0. \quad (4-30)$$

Puisque cette condition est par définition non-strictes et que toutes les matrices Q_i doivent être disponibles pour sa satisfaction. Une solution consiste à satisfaire cette condition pour chaque résolution sans l'inclure dans les LMI. Dans ce cas, une faisabilité marginale est largement suffisante, mais il n'y aura aucune garantie d'obtenir une solution qui satisfait cette condition. Réellement, cette condition est trop forte pour notre objectif. Toutefois, lorsqu'elle est satisfaite on aura $\cup X_i = (X-\check{D})$ c'est exactement ce qu'on a besoin. Ce test de recouvrement postérieur est (nécessaire) et suffisant pour palier cette difficulté. Nécessaire dans le sens où si cette condition est incluse dans les LMI, il est impossible d'obtenir une faisabilité stricte.

Enfin, nous affirmons que, si les conditions (4-28) et (4-29) sont satisfaites pour tous z et nous avons un test de recouvrement postérieurement positif, alors toutes les trajectoires du système (4-8) convergent au domaine \check{D} . d'après les développements dans la note d'application, \check{D} est remplacé par un domaine plus petit $\check{D}_{\alpha 1}$. Ce sont les résultats de la stabilisation pratique proclamés dans le théorème 5.5. Ceci termine la démonstration. ■

Remarque 4 :

On notera qu'à partir d'un état discret donné, certaines configurations peuvent ne pas être visitées puisque les commutations ne sont possibles qu'entre régions adjacentes. Deux régions Σ_i et Σ_j sont adjacentes si leur intersection n'est pas vide i.e. $cl\Sigma_i \cap cl\Sigma_j \neq \emptyset$. Soit $S_{i,j} \subset cl\Sigma_i \cap cl\Sigma_j$ représente la surface de commutation lors du passage du mode i vers le mode j et cl dénote la fermeture d'une région. Pour tout $i \in \mathbb{I}$ les dérivées de Lyapunov $\check{V}_{1i}(z)$ s'annulent

lorsque les états du système atteignent les bordures de leurs régions ; alors que dans notre cas de synthèse, on s'attend à ce que ces régions soient éventuellement chevauchées. Par conséquent, les commutations peuvent se produire en des points autres que ceux de $S_{i,j}$.

En général, sans l'utilisation de temps de séjour ou une hysteresis (voir stratégie de contrôle), il peut y avoir un problème aux niveaux des surfaces de commutation causé par l'apparition du phénomène de glissement. Comme c'est déjà mentionné, ce phénomène est rencontré lorsque la trajectoire du système atteint la surface de commutation en un point x^0 et en ce point les (deux) champs vecteurs pointent vers cette surface. Le remplacement de ce comportement par une dynamique équivalente selon la combinaison convexe de Filipove n'est pas possible dans notre cas de synthèse. En effet, le problème est très compliqué puisqu'on ne peut savoir quelles régions vont être adjacentes et donc le test de présence du mode glissant attractif (Proposition : 3.3) est pratiquement impossible dans ce cas. D'autant plus, aucune prédiction n'est possible pour ces surfaces de commutations si les régions peuvent être chevauchées. Évidemment, cela est dû au fait que les régions ne sont pas connues en avance et doivent être plutôt déterminé par la procédure de synthèse.

Bien qu'on ait opté pour la formulation LMI, celle-ci facilite énormément l'inclusion de toutes autres conditions supplémentaires, le problème général reste sans issue. Néanmoins, ce problème peut être résolu efficacement dans le cas de systèmes commutés à deux modes, cela en insérant explicitement dans les LMI des conditions qui excluent ce phénomène. Pour le cas général, nous devons nous contenter de l'utilisation d'un certain hysteresis aux niveaux des surfaces des commutations.

Stratégie pratique de contrôle des commutations : [42]

Lorsque la stratégie de contrôle des commutations est basée sur la sélection du sous-système ayant la plus grande pente (négative) associée à sa fonction d'énergie, on obtient une grande satisfaction en pratique si on arrête de commuter une fois $\check{D}_{\alpha 1}$ est atteint et on redémarre les commutations lorsque la trajectoire du système essaye de sortir du domaine \check{D} . Cette stratégie limite la fréquence des commutations lorsqu'on s'approche du point désiré. Toutefois, quand ε_p est très petit, il n'y a pas de différence significative entre les deux domaines $\check{D}_{\alpha 1}$ et \check{D} par conséquent, l'indésirable phénomène de glissement peut apparaître. En effet, à cause de la nature de la stratégie de commutation, ce phénomène peut même apparaître plus loin du point désiré.

Pour le cas de synthèse de loi de commutation dépendante de l'état, une possibilité qui s'offre à nous, est de faire appel à la technique d'utilisation d'hystérésis. Elle consiste à imposer une borne supérieure sur la dérivée de Lyapunov du mode actif : $\max(\dot{V}_{1i}(z)) = -\varepsilon z^t z$ avec $\varepsilon > 0$ et autoriser la commutation seulement lorsque la dérivée $\dot{V}_{1i}(z)$ associée au mode actif atteint cette nouvelle borne. Cette technique est combinée avec la stratégie de contrôle des commutations pratique pour exclure ce phénomène.

Il est tout à fait raisonnable dans le cas de synthèse avec une fonction de Lyapunov commune d'autoriser les régions d'être chevauchées et particulièrement si une partition de l'espace des états est déjà prévue. Car si on suppose qu'il n'y a pas de sauts d'états et si les intérieures de régions sont disjointes, il est évident que l'utilisation d'hystérésis va obligatoirement conduire à l'activation de mode instable et cela quel que soit la stratégie de commutation. En particulier dans notre méthode de stabilisation pratique, lorsqu'on démarre les commutations (si le domaine \check{D} est atteint avec certain mode active), on doit choisir parmi les sous-systèmes qui ne sont pas forcément dissipative dans la région du mode actif. Ce problème n'apparaît pas si les régions sont chevauchées, mais un autre problème crucial sera rencontré i.e. la non unicité de la séquence de commutation ce qui complique énormément l'observabilité du système. De toute façon, nous n'avons rien imposé dans les LMI pour que

ces régions soient disjointes. Noter que le chevauchement de régions seul n'exclue pas l'apparition de commutations rapides. En effet, lorsqu'on arrête les commutations ($\bar{D}_{\alpha 1}$ atteint), l'énergie du mode actif peut augmenter (pour un certain temps court) permettant à la trajectoire d'atteindre \bar{D} . Ceci est toujours le cas lorsqu'on désire forcer (par commutation) la trajectoire de rester proche d'un point de fonctionnement qui ne représente pas un équilibre commun.

La stratégie de contrôle des commutations de min projection [66] basée sur la sélection du mode dont le champ vecteur pointe vers le point d'équilibre moyen a été aussi appliquée dans notre approche. Les résultats de simulation obtenus présentent de très bonnes performances.

4.3. Deuxième variante de l'approche proposée [43] :

Nous allons voir une deuxième variante étroitement liée à la première, dans cette dernière nous avons utilisé une matrice $P_2 (= \begin{bmatrix} p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & \varepsilon_p \end{bmatrix}, \varepsilon_p > 0)$ intermédiaire en (4-14) juste pour prouver la positivité de la fonction candidate de Lyapunov i.e. $P_1 (= \begin{bmatrix} 2p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & 0 \end{bmatrix})$ et $p = p^t > 0$ en (4-12). Ce passage était obligatoire pour pouvoir utiliser une fonction d'énergie $V_1(z) = z^t P_1 z = z^t \begin{bmatrix} 2p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & 0 \end{bmatrix} z$ qui assure $V_1(z^*) = 0$. Rappelons qu'une fonction d'énergie (de Lyapunov) doit être définie positive donc $V_1(0) = 0$ et puisque z^* est considéré comme étant l'origine de l'espace d'état augmenté \mathcal{X} dans lequel on a travaillé, alors nous avons opté pour une structure de la matrice P_1 (donc de la fonction d'énergie $V_1(z)$) qui assure $V_1(z^*) = 0$. Nous pensons que toute cette acrobatie n'était pas vraiment nécessaire, l'idée est la suivante :

Puisque l'équilibre moyen n'est qu'une notion mathématique, l'énergie d'un système physique (réel) décrit par un modèle PWA ne peut jamais être nulle en un tel point fictive. Alors que dans la théorie de Lyapunov, le choix de la fonction d'énergie peut être crucial pour la stabilité et la stabilisation du système étudié. Pourquoi doit-on donc respecter la règle de Lyapunov ($V(0)=0$) dans ce cas? Réellement, nous pensons que pour stabiliser de tels systèmes, la meilleure façon est de choisir une fonction d'énergie qui ne s'annule pas en ce point d'équilibre moyen qui n'est pas un équilibre réel du système physique. Toutefois, lorsqu'on veut s'approcher de ces points, nous préférons atteindre (par commutation) ce voisinage avec le minimum d'énergie possible pour obtenir de bons résultats et réduire le nombre de commutations. D'autant plus, nous devons pouvoir maintenir la trajectoire du système plus près de ces points, cela n'est possible que grâce à des commutations forcées et rapides.

L'approche que nous allons proposer est plus directe et demande moins d'efforts de calcul que celle de la variante précédente [42], nous allons suivre la même démarche pour la stabilisation pratique. Comme dans la première approche et pour le même système (4-8), nous gardons la même formulation et la même notation mais en utilisant directement une fonction de Lyapunov candidate qui ne s'annule pas en z^* , nous allons aussi utiliser la même stratégie de contrôle des commutations.

Pour une matrice symétrique définie positive $p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et un scalaire positif ε_p , soit la fonction $V(z)$ une fonction candidate de Lyapunov pour le système (4-8) et Σ_i les régions quadratiques où le mode i doit être activé.

$$V(z) = z^t P z \text{ et } \Sigma_i = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} | z^t Q_i z \geq 0\}. \quad (4-31)$$

$$\text{Où } P = \begin{bmatrix} p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & \varepsilon_p \end{bmatrix}, Q_i = \begin{bmatrix} q_i & \alpha_{qi} \\ \alpha_{qi}^t & \beta_{qi} \end{bmatrix}, i \in \mathbb{I} \text{ avec } P, Q_i \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \text{ et } p, q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Noter que maintenant nous avons :

$$V(z^*) = \varepsilon_p \neq 0. \quad (4-32)$$

Et soient les domaines D et \tilde{D} définis comme précédemment par (4-13-a) & (4-13- b) :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t p x < \varepsilon_p\} \text{ et } \tilde{D} = \left\{z \in \mathcal{X} \mid z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z < \varepsilon_p\right\}.$$

De même pour la dérivée temporelle le long de la trajectoire du ième sous-système, nous avons :

$$\dot{V}_i(z) = z^t [A_i^t p + p A_i] z. \quad (4-33)$$

Théorème 5.6 : [43]

S'il existe des matrices symétriques q_i , une matrice symétrique définie positive p , des vecteurs $\alpha_p \in \mathbb{R}^n, \alpha_{qi} \in \mathbb{R}^n$, des scalaires positifs $\gamma, \delta_i, \theta_i, \varepsilon_p$ et des scalaires β_{qi} tel que pour tout $i \in \mathbb{I}$, les BMI suivantes:

- 1) $\varepsilon_p < \varepsilon_0$.
- 2) $\begin{bmatrix} p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & \varepsilon_p \end{bmatrix} > 0$.
- 3) $\begin{bmatrix} \alpha_i^t p + p \alpha_i + \delta_i q_i + \gamma I_n & \alpha_i^t \alpha_p + 2p B_i + \delta_i \alpha_{qi} \\ 2B_i^t p + \alpha_p^t \alpha_i + \delta_i \alpha_{qi}^t & 2B_i^t \alpha_p + \delta_i \beta_{qi} \end{bmatrix} < 0$.
- 4) $\sum_1^m \theta_i \begin{bmatrix} q_i & \alpha_{qi} \\ \alpha_{qi}^t & \beta_{qi} \end{bmatrix} \geq 0$.

Ont une solution pour un petit ε_0 , alors en utilisant la stratégie de contrôle des commutation basée sur la plus grande pente, toutes les trajectoires du système (4-8)) convergent vers le domaine :

$$\tilde{D}_0 = \left\{z \in \mathcal{X} \mid z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \leq \frac{(\alpha_p^t p^{-1} \alpha_p + \varepsilon_p)}{2}\right\}.$$

Ainsi, le système est pratiquement asymptotiquement stabilisable au point $z^ \in \tilde{D}_0$ à partir de n'importe quelle condition initiale $z_0 \in \mathcal{X}$. ■*

Démonstration : [43]

La même démarche de démonstration que celle du théorème 5.5 est suivie.

Noter que $z^* \in \tilde{D}$. pour assurer une stabilisation quadratique pratique du système augmenté (4-8), nous devons vérifier les conditions suivantes :

S'il existe une fonction scalaire $V(z)$, un scalaire positif γ et des régions \mathcal{X}_i telles que:

- 1) $V(z) > 0$, pour tout $z \in \{\mathcal{X} - \tilde{D}\}$.
- 2) $\dot{V}_i(z) \leq -\gamma z^t z$, pour tout $z \in \mathcal{X}_i, i=1, m$. (4-34)
- 3) $\cup \mathcal{X}_i = (\mathcal{X} - \tilde{D})$.

Comme c'est déjà mentionné, la troisième condition ne peut s'exprimer par des LMI dans $\{\mathcal{X} - \tilde{D}\}$ et puisque $(\mathcal{X} - \tilde{D}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, nous allons utiliser l'espace d'état augmenté \mathbb{R}^{n+1} et les résultats obtenus seront valides dans $(\mathcal{X} - \tilde{D})$.

En effet, quand $V(z) > 0$ dans \mathbb{R}^{n+1} , donc elle est positive dans $(\mathcal{X} - \tilde{D})$. D'autres parts, si $\dot{V}_i(z) < 0$ pour tout $z \in \Sigma_i$ avec $\cup \Sigma_i = \mathbb{R}^{n+1}$ donc $\dot{V}_i(z) < 0$ pour tout $z \in \mathcal{X}_i$ où $\mathcal{X}_i = (\mathcal{X} - \tilde{D}) \cap \Sigma_i$ avec :

$$\cup \mathcal{X}_i = \cup \left((\mathcal{X} - \tilde{D}) \cap \Sigma_i \right) = (\mathcal{X} - \tilde{D}) \cap (\cup \Sigma_i) = (\mathcal{X} - \tilde{D}) \cap \mathbb{R}^{n+1} = (\mathcal{X} - \tilde{D}).$$

La troisième condition satisfaite si $\cup \Sigma_i = \mathbb{R}^{n+1}$ qui est vérifiable par l'existence de $\theta_i > 0$ telle que $\sum_1^m \theta_i Q_i \geq 0$. Les conditions précédentes deviennent :

- 1) $V(z) > 0$, for all $z \in \mathbb{R}^{n+1}$.
- 2) $\dot{V}_i(z) \leq -\gamma z^t z$, for $z \in \Sigma_i$, $i=1,m$. (4-35)
- 3) $\cup \Sigma_i = \mathbb{R}^{n+1}$.

Par application de la S-procédure [16], nous obtenons les BMI abordables suivante:

S'il existe des matrices symétriques Q_i , une symétrique matrice définie positive P et des scalaires positifs γ , δ_i , θ_i telle que pour tout $i=1,m$:

- 1) $P > 0$.
- 2) $A_i^t P + P A_i + \delta_i Q_i + \gamma \check{I} < 0$ (4-35)
- 3) $\sum_1^m \theta_i Q_i \geq 0$.

$$\text{Où } \check{I} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n^t & 0 \end{bmatrix}, 0_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & \varepsilon_p \end{bmatrix}.$$

Toutes les trajectoires du système (4-8) convergent vers le domaine \check{D} sous la loi de commutation basée sur la plus grande pente et le système est pratiquement asymptotiquement stabilisable au point $z^* \in \check{D}$ à partir de n'importe quelle condition initiale $z_0 \in \mathcal{X}$.

Comme précédemment, les conditions précédentes sont exprimées par les inégalités strictes suivantes :

- 1) $\begin{bmatrix} p & \alpha_p \\ \alpha_p^t & \varepsilon_p \end{bmatrix} > 0$.
- 2) $\begin{bmatrix} a_i^t p + p a_i + \delta_i q_i + \gamma I_n & a_i^t \alpha_p + p B_i + \delta_i \alpha_{qi} \\ B_i^t p + \alpha_p^t a_i + \delta_i \alpha_{qi}^t & 2 B_i^t \alpha_p + \delta_i \beta_{qi} \end{bmatrix} < 0$. (4-36)
- 3) $\sum_1^m \theta_i \begin{bmatrix} q_i & \alpha_{qi} \\ \alpha_{qi}^t & \beta_{qi} \end{bmatrix} \geq 0$, $\theta_i > 0$.

Cette fois ci, le minimum de $V(z)$ dans \mathcal{X} est en $z^{**} = \begin{pmatrix} x^{**} \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $x^{**} = -p^{-1} \alpha_p$, il est donné par :

$$V_{\min}(z) = V(z^{**}) = \varepsilon_p - \alpha_p^t p^{-1} \alpha_p. \quad (4-37)$$

Là aussi, z^{**} est différent de z^* mais proche quand ε_p est petit. De la première condition, on tire $\varepsilon_p > \alpha_p^t p^{-1} \alpha_p$. Le plus petit domaine centeré en z^* qui contient z^{**} est (voir figure ci-dessous) inclu dans \check{D} , il est défini dans \mathcal{X} par: $z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \leq z^{**t} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z^{**}$. Si on dénote par \check{D}_α ce domaine, nous avons :

$$\check{D}_\alpha = \left\{ z \in \mathcal{X} \mid z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \leq \alpha_p^t p^{-1} \alpha_p \right\}, \check{D}_\alpha \subset \check{D}. \quad (4-38)$$

Ce domaine est aussi une extension d'un domaine $D_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ défini par :

$$D_\alpha = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^t p x < \alpha_p^t p^{-1} \alpha_p \}.$$

On aura dans ce cas :

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{p \min} = \alpha_p^t p^{-1} \alpha_p. \quad (4-39)$$

Remarque 5 : [43]

Nous constatons que cette deuxième variante est plus directe et demande moins d'efforts de calcul que la première. Toutefois, les résultats obtenus dans la première variante sont plus précises puisqu'elle a fini par trouver un $\varepsilon_{pmin} = \frac{\alpha_p^t p^{-1} \alpha_p}{4}$ donc plus petit.

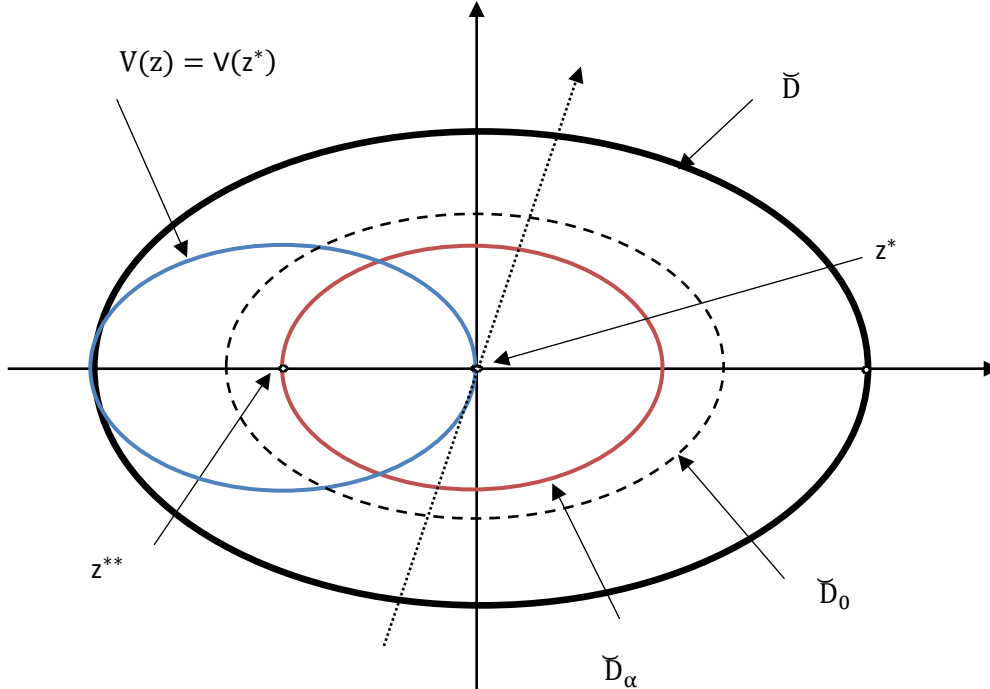


Figure 4.3. Construction simple en dimension deux (approche 2)

Puisque $V(z) > 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\dot{V}_i(z) < 0$ pour $z \in \Sigma_i$ avec $\cup \Sigma_i = \mathbb{R}^{n+1}$, alors $\dot{V}_i(z) < 0$ pour $z \in \mathcal{X}_i$, $i \in I_m$ avec $\mathcal{X}_i = \mathcal{X} \cap \Sigma_i$ et $\cup \mathcal{X}_i = \mathcal{X}$. Ce qui permet de conclure que $V(z) > 0$ et $\dot{V}_i(z) < 0$ dans \check{D} . donc $V(z)$ converge obligatoirement à $V_{min}(z)$. ce minimum en z^{**} est sur la bordure de \check{D}_α , et on peut arrêter les commutations un peu plutôt; par exemple quand la trajectoire atteint un certain domaine \check{D}_0 tel que $\check{D}_\alpha \subset \check{D}_0 \subset \check{D}$. on peut le choisir égal à:

$$\check{D}_0 = \left\{ z \in \mathcal{X} \mid z^t \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z \leq \frac{(\alpha_p^t p^{-1} \alpha_p + \varepsilon_p)}{2} \right\} \quad (4-40)$$

C'est la fin de la démonstration. ■

Note sur la simulation :

Vu que la valeur numérique obtenue par la résolution des LMI de la quantité $\alpha_p^t p^{-1} \alpha_p$ est toujours très faible dans les deux variantes pour un ε_0 de l'ordre de 10^{-5} . Il n'y a pas une différence⁸ significative entre les deux valeurs ε_{pmin} obtenues par les deux variantes et on a:

$$\frac{\alpha_p^t p^{-1} \alpha_p}{4} \cong \alpha_p^t p^{-1} \alpha_p \quad (4-41)$$

Lorsqu'on a repris les deux exemples de convertisseurs précédents, la simulation montre que les résultats de stabilisation pratique ne peuvent se distinguer. Nous n'avons pas voulu alourdir le manuscrit par des courbes presque identiques, nous allons les voir indirectement dans la présentation des résultats du multi-estimateur d'états dans la section suivante.

⁸ Malgré qu'on a utilisé la même notation p dans les deux variantes, p n'a pas la même valeur après résolution des LMI pour le même exemple.

4.4. Observateur hybride :

La majorité des résultants de stabilisation des systèmes commutés et en particulier ceux des systèmes affines par morceaux PWA sont basés sur l'idée de retour d'états où une complète connaissance de l'état du système est nécessaire. Cependant en pratique, la totalité des états du système n'est généralement pas disponible, c'est le cas des exemples de convertisseurs d'énergie que nous avons vu. En effet pour ces circuits, les tensions aux bornes des capacités ne sont pas toujours accessibles aux mesures ce qui nécessite leurs estimations. Le problème d'estimation représente un autre domaine d'intérêt pour les systèmes hybrides et commutés, ce problème a reçu un grand intérêt et plusieurs investigations ont été faites ces dernières décennies. Une étude approfondie de cette question sort du cadre de notre travail, néanmoins nous allons proposer une technique simple d'estimation des états d'un système PWA, qui une fois associée à notre approche de commande permet de surmonter le problème d'implantation des capteurs. Des définitions et des résultats précis d'observabilité et de conception d'observateurs hybrides peuvent être trouvés dans [9] [20] [75]. Il est bien connu que les propriétés générales d'observabilité et/ou de contrôlabilité des systèmes commutés peuvent être gagnées ou perdues par commutation [10]. Plus encore, plusieurs travaux de recherches montrent qu'il n'y a aucune chance de dégager des résultats d'observabilité simples à partir des propriétés d'observabilité des modes individuels. Parmi les premières propositions concrètes pour la conception d'observateur hybride asymptotique se trouve dans [2] et [9]. Dans [2], la synthèse d'observateur hybride a été formulée sous forme LMI lorsque le mode actif est connu. Une extension de la méthode au cas général lorsque le mode actif est inconnu, est présentée dans [9]. Une autre approche générale d'estimation des états qui est applicable aux systèmes PWA, est considérée dans [29] où un test d'observabilité efficace est proposé au prix d'un certain effort de calcul (l'utilisation des MIQP et MPP). Une méthode d'estimation partielle des états a été aussi nécessaire pour achever la commande à retour de sortie dans [70].

4.4.1. Multi-estimateur pour les systèmes commutés [43] :

Dans cette section, nous allons présenter un multi-estimateur simple basé sur l'extension de l'observateur de Luenberger.

Généralement, trois principales difficultés sont rencontrées dans l'observabilité des systèmes commutés :

- Localisation du mode actif.
- L'estimation de l'état continu avec ou sans réinitialisation.
- Mise à jour des états estimés lors des commutations

Les deux dernières difficultés sont étroitement, liées lorsqu'il y a réinitialisation, la dernière doit fournir une méthode adéquate pour la mise à jour des états estimés lorsqu'il y a un changement du mode de l'observateur. Ce fait est nécessaire pour assurer la convergence de l'erreur globale d'estimation. La première difficulté est liée à la loi de commutation et le chemin de séquence suivi qui peut être très compliquée voir impossible dans certains cas. à l'exception de quelques propositions [9][75], cette question de reconnaissance du mode actif est encore dans ses premières phases théoriques.

Cependant, en associant le multi-observateur à l'approche de commande proposée, le mode discret actif est déterminé par la méthode de contrôle des commutations. Par exemple dans le cas des convertisseurs, si un signal de contrôle approprié est utilisé pour sélectionner le mode de l'observateur à partir de celui du circuit, alors le mode actif convenable est à chaque instant disponible sans aucun retard temporel. De ce fait, lorsqu'on considère que les

systèmes commutés sans sauts, la synthèse de l'observateur se réduit donc au calcul des gains du multi-observateur qui assurent la convergence des erreurs.

Les dynamiques continues du pseudo- observateur de Luenberger sont données par:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = a_i \hat{x} + b_i + L_i(s - \hat{s}). \\ \hat{s} = C_i \hat{x}. \end{cases} \quad (4-42)$$

Où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, est le vecteur des états estimés et L_i sont les gains du multi-observateur.

Si on associe à chaque erreur individuelle une région de l'espace $\bar{\Omega}_i$ de façon que ces dernières recouvrent tout l'espace \mathbb{R}^n . Alors, les dynamiques de l'erreur d'estimation sont données par :

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (4-43)$$

Qu'on peut exprimer par :

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (a_i - L_i C_i) \tilde{x}, \text{ pour } \tilde{x} \in \bar{\Omega}_i \quad (4-44)$$

Avec $\bar{\Omega}_i = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n | \tilde{x}^t \bar{q}_i \tilde{x} \geq 0\}$.

Noter bien que ces erreurs d'estimation sont aussi gouvernées par un système commuté ; par conséquent, il n'est pas suffisant de stabiliser chaque mode d'erreur à part. Similairement à ce qui a été fait dans la stabilisation, nous allons utiliser une pseudo-fonction de Lyapunov commune en faisant une partition de l'espace des erreurs.

En utilisant la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$\bar{v}(\tilde{x}) = \tilde{x}^t \bar{p} \tilde{x} \text{ avec } \bar{p} = \bar{p}^t > 0. \quad (4-45)$$

Pour $\tilde{x} \in \bar{\Omega}_i$, la dérivée temporelle le long de la trajectoire du ième mode d'erreur est donnée par:

$$\dot{\bar{v}}_i(\tilde{x}) = \tilde{x}^t (a_i^t \bar{p} + \bar{p} a_i - C_i^t L_i^t \bar{p} - \bar{p} L_i C_i) \tilde{x}. \quad (4-46)$$

La précision de l'estimation des états dans (4-42) est confirmée par la convergence des erreurs correspondantes en (4-43), cette convergence est à son tour, établit par la stabilité à l'origine du système commuté en (4-44).

Le théorème suivant résume les conditions de stabilité au sens de Lyapunov pour le système commute en (4-44).

Théorème 5.7:

S'il existe des matrices symétriques \bar{q}_i , une matrice symétrique définie positive \bar{p} , des vecteurs W_i et des scalaires positifs $\bar{\gamma}$, $\bar{\mu}_i$, $\bar{\theta}_i$ telle que pour tout $i \in \mathbb{I}$, la BMI suivante:

- 1) $\bar{p} > 0$.
- 2) $a_i^t \bar{p} + \bar{p} a_i + \bar{\mu}_i \bar{q}_i + \bar{\gamma} I_n - C_i^t W_i^t - W_i C_i \leq 0$.
- 3) $\sum_1^m \bar{\theta}_i \bar{q}_i \geq 0$.

Est faisable, alors toutes les erreurs du système (4-44) convergent asymptotiquement vers zéro et les gains du multi-observateur sont donnés par: $L_i = \bar{p}^{-1} W_i$. ■

Ce théorème affirme indirectement que les états estimés en (4-42) représentent une bonne estimation des états de notre système, et donc peuvent être utilisé dans la commande à retour d'états du système.

Remarque 6 :

Nous n'avons pas besoin de spécifier la stratégie de contrôle des commutations, puisque la commutation est imposée par l'approche de contrôle i.e. ici c'est un cas d'analyse de stabilité et non pas une opération de synthèse comme l'approche précédente.

Démonstration du théorème :

Puisque les erreurs d'estimations sont aussi gouvernées par un système commuté (4-44) ; nous cherchons donc la stabilité de l'erreur globale i.e. stabilité du système (4-44). En utilisant $\bar{v}(\tilde{x})$ comme fonction candidate commune de Lyapunov, à partir de la théorie de Lyapunov pour la stabilité, nous affirmons que si :

- 1) $\bar{v}(\tilde{x}) > 0$ pour $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$
 - 2) $\dot{\bar{v}}_i(\tilde{x}) \leq -\bar{\gamma}\tilde{x}^t\tilde{x}$ pour $\tilde{x} \in \bar{\Omega}_i$
 - 3) $\cup \bar{\Omega}_i = \mathbb{R}^n$
- (4-47)

Alors le système (4-44) est stable à l'origine $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ i.e. les erreurs d'estimation en (4-43) convergent asymptotiquement à zéro.

- Aucun problème avec la première condition, elle exige l'existence de $\bar{p} = \bar{p}^t > 0$ pour $\bar{v}(\tilde{x}) = \tilde{x}^t\bar{p}\tilde{x}$.
- La deuxième condition nécessite la satisfaction de :

$$\tilde{x}^t(a_i^t\bar{p} + \bar{p}a_i - C_i^tL_i^t\bar{p} - \bar{p}L_iC_i)\tilde{x} \leq -\bar{\gamma}\tilde{x}^t\tilde{x} \text{ pour } \tilde{x} \in \bar{\Omega}_i. \quad (4-48)$$

En éliminant les contraintes de régions par la S-procédure, nous obtenons:

$$a_i^t\bar{p} + \bar{p}a_i + \bar{\mu}_i\bar{q}_i + \bar{\gamma}I_n - C_i^tL_i^t\bar{p} - \bar{p}L_iC_i \leq 0 \text{ pour } \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$$

A cause des produits $L_i^t\bar{p}$ et $\bar{p}L_i$, ceci est une inéquation matricielle non linéaire NMI qui ne peut être abordée. Faisons le changement de variable suivant :

$$W_i = \bar{p}L_i \quad (4-49)$$

Alors la seconde condition devient linéaire par rapport aux inconnus, elle est donnée par :

$$a_i^t\bar{p} + \bar{p}a_i + \bar{\mu}_i\bar{q}_i + \bar{\gamma}I_n \leq C_i^tW_i^t + W_iC_i, \text{ pour } \gamma, \mu_i > 0. \quad (4-50)$$

- La troisième condition représente la propriété de recouvrement des régions $\bar{\Omega}_i$, qui est satisfaite s'il existe des scalaires $\bar{\theta}_i$ telle que $\sum_1^m \bar{\theta}_i \bar{q}_i \geq 0$ quand les régions $\bar{\Omega}_i$ sont données par : $\bar{\Omega}_i = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n | \tilde{x}^t \bar{q}_i \tilde{x} \geq 0\}$.

Enfin nos conditions en (4-47) peuvent être réécrites comme suit:

- 1) $\bar{p} > 0$
 - 2) $a_i^t\bar{p} + \bar{p}a_i + \bar{\mu}_i\bar{q}_i + \bar{\gamma}I_n \leq C_i^tW_i^t + W_iC_i, \text{ pour } \gamma, \mu_i > 0$
 - 3) $\sum_1^m \bar{\theta}_i \bar{q}_i \geq 0 \text{ for } \theta_i > 0$
- (4-51)

Lorsqu'on inclue ces conditions BMI dans les BMI de contrôle de notre approche, s'il y a solution qui conduit aux inconnues \bar{p}, \bar{q}_i et W_i , alors les erreurs d'estimation en (4-42) convergent asymptotiquement à zéro et les gains du multi-estimateurs sont recalculés à partir de (4-49) comme suit:

$$L_i = \bar{p}^{-1}W_i. \quad (4-52)$$

Ce qui termine la démonstration du théorème. ■

4.5. Exemples illustratifs :

Les exemples les plus simples qui sont généralement traités dans la littérature des systèmes commutés sont à deux modes mais ces derniers représentent un cas particulier qui ne permet pas de mettre en valeur une approche générale. D'autant plus, certaines techniques employées pour prendre en charge de tels systèmes sont spécifiques et ne sont pas extensibles aux cas général, les approches géométriques sont de bons exemples.

4.5.1. Exemple de systèmes théorique à deux modes :

Considérons l'exemple de système PWA bimodal suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ -\rho & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 - \rho \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^2, \rho \in (0,1)$$

À stabiliser en un équilibre moyen : $x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Une application directe de notre méthode pour cet exemple théorique à deux modes de fonctionnement (2^1), conduit à de très bons résultats voir figures (Fig.4. 4-5) ci-dessous. La convergence de la trajectoire vers la balle qui entoure le point désiré est nette, nous constatons qu'on ne peut déceler la différence entre la convergence vers le point de fonctionnement de la convergence vers la balle $B(x_a, \varepsilon_a)$ à cause de la très faible valeur de ε_p . Mais le zoom de ces résultats Fig.4. 7-8 montre bien que la convergence se fait toujours à la balle qui entoure le point z^{**} .

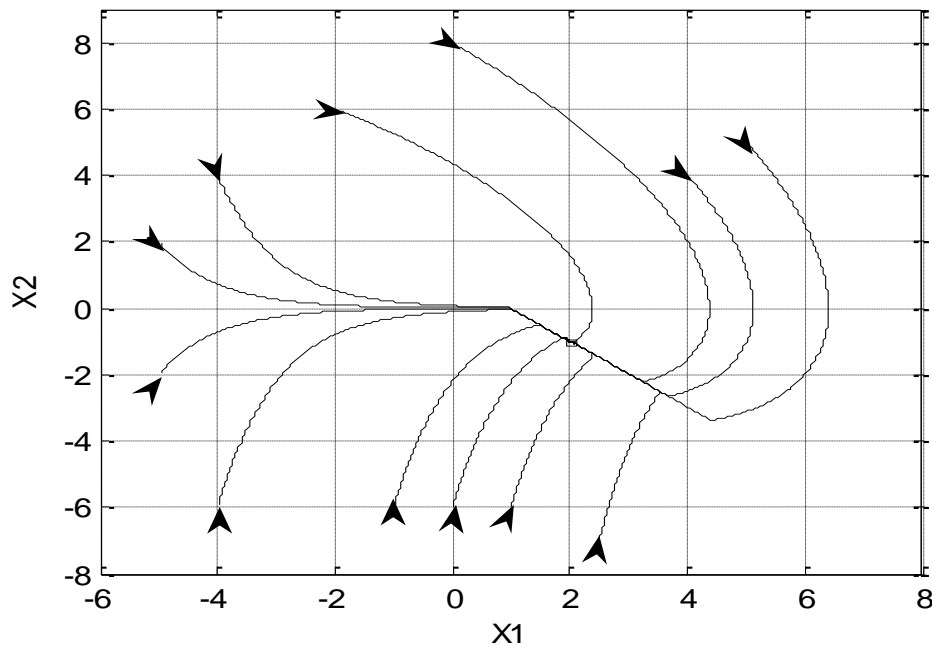
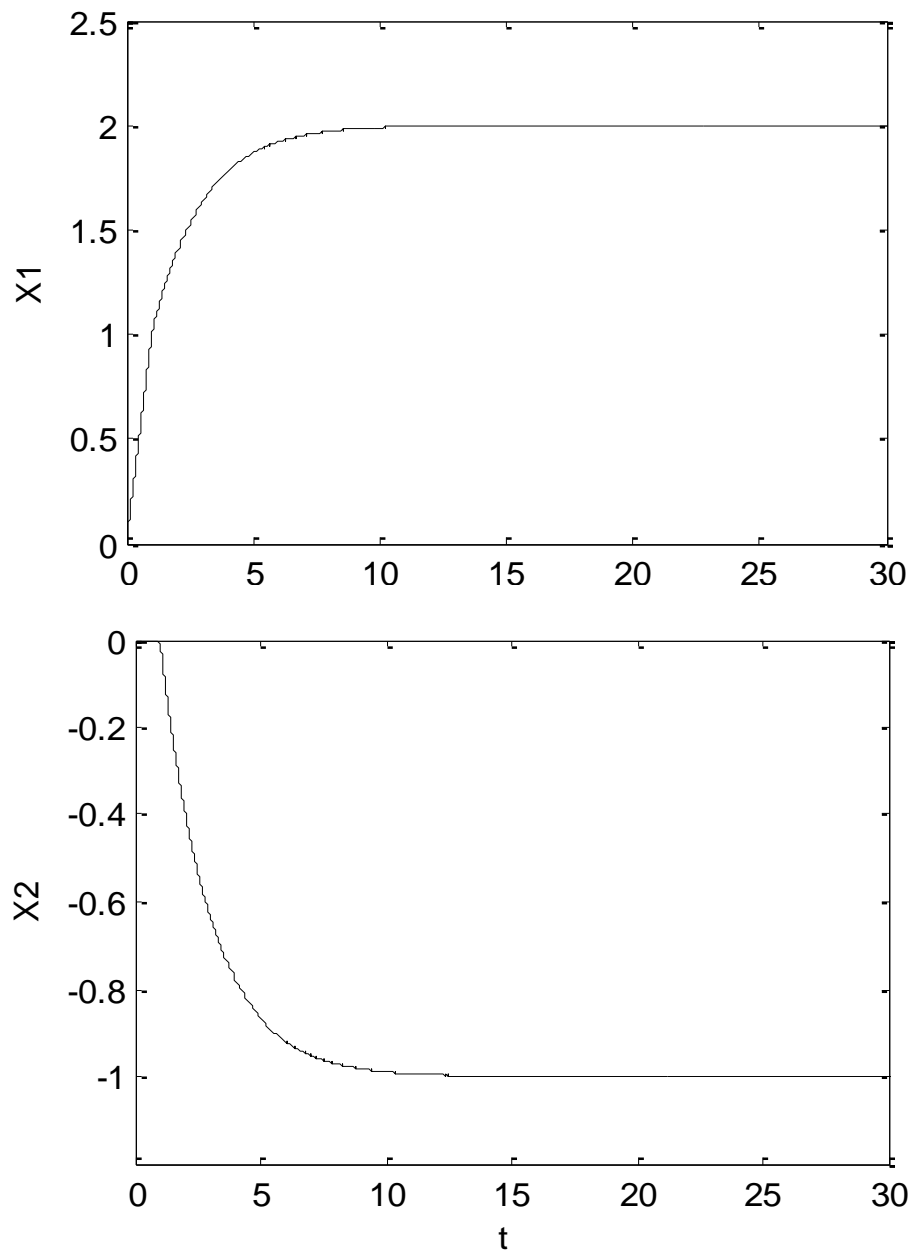


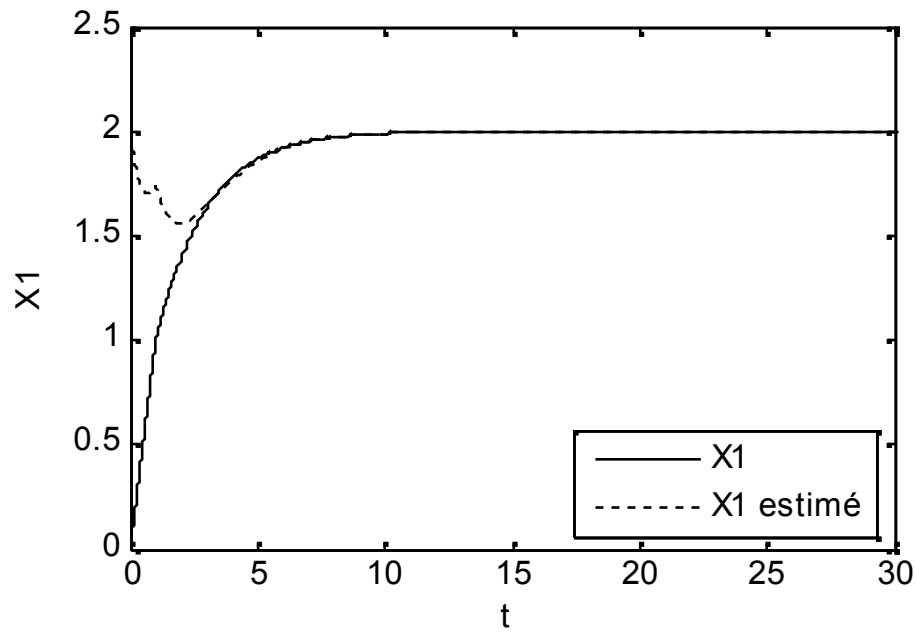
Fig. 4.4. Exemple théorique : Différentes exécutions (trajectoires) à partir de différentes conditions initiales.



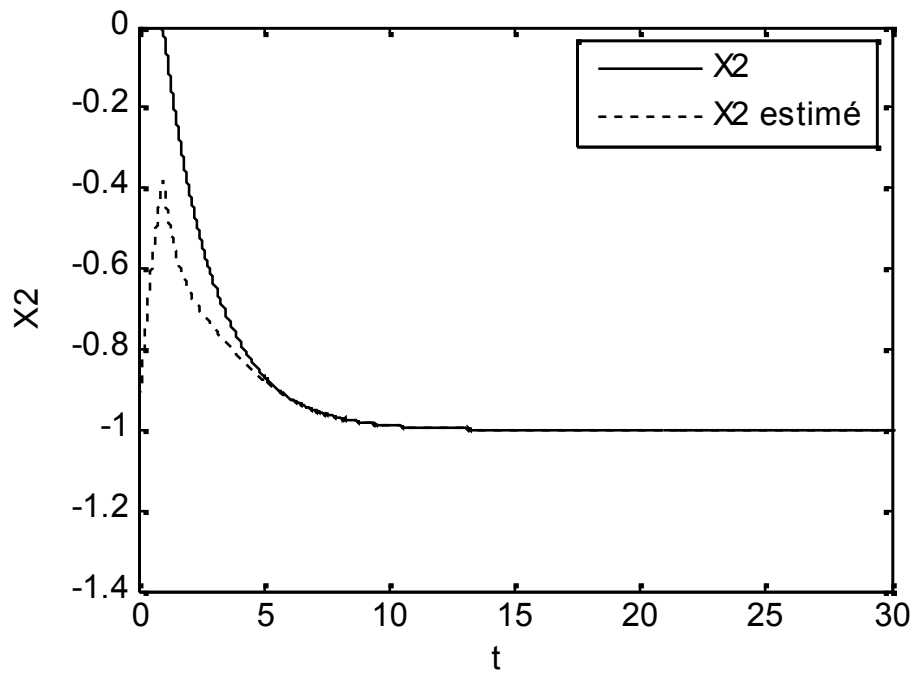
(b)

Fig. 4.5. Évolutions des états $X1$ & $X2$ en fonction du temps sous l'approche de stabilisation à partir de conditions initiales nulles.

Alors que la Fig.4.6 représente un test en boucle ouverte de l'observateur, où on constate une convergence (vers zéro) rapide des erreurs d'estimation même pour le pire cas lorsque le système et l'observateur ne démarrent pas de la même condition initiale ; ce qui confirme bien la bonne qualité de cette estimateur simple et son habilité à piloter le système.

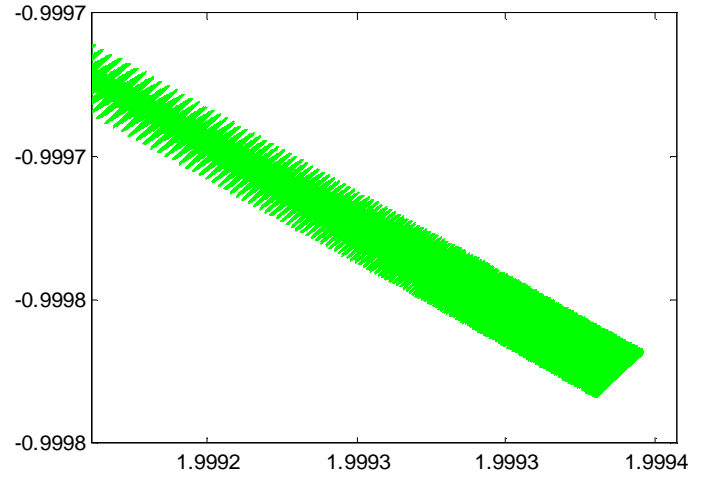
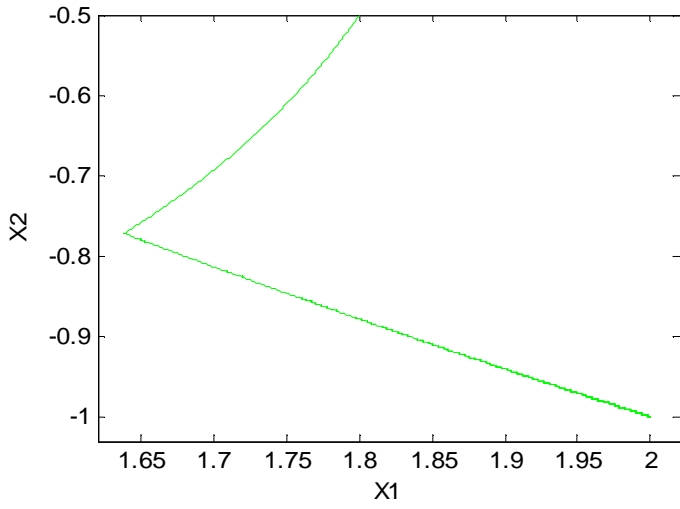


(a)

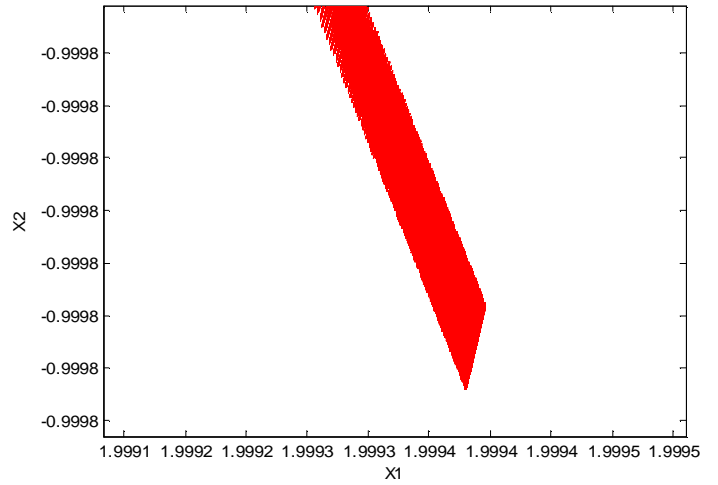
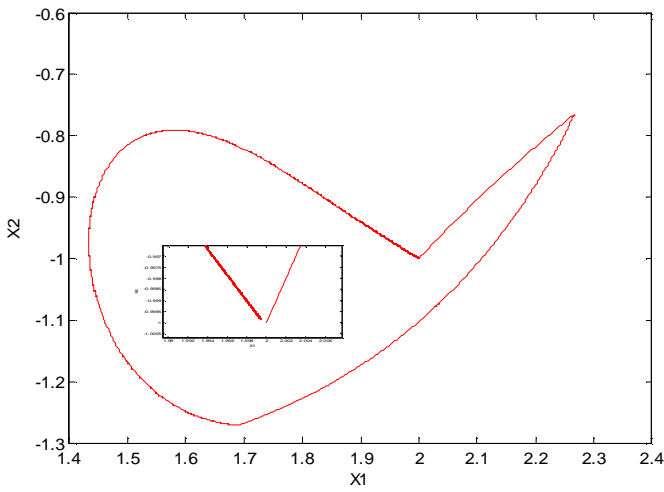


(b)

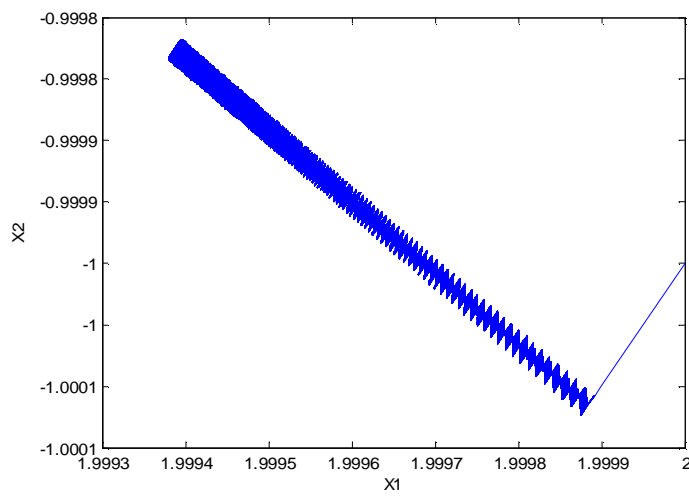
Fig. 4.6 : Courant d'inductance et son estimé en (a), tension de sortie et son estimé en (b); avec des conditions initiales du convertisseur différentes de celles de l'observateur.



(a)

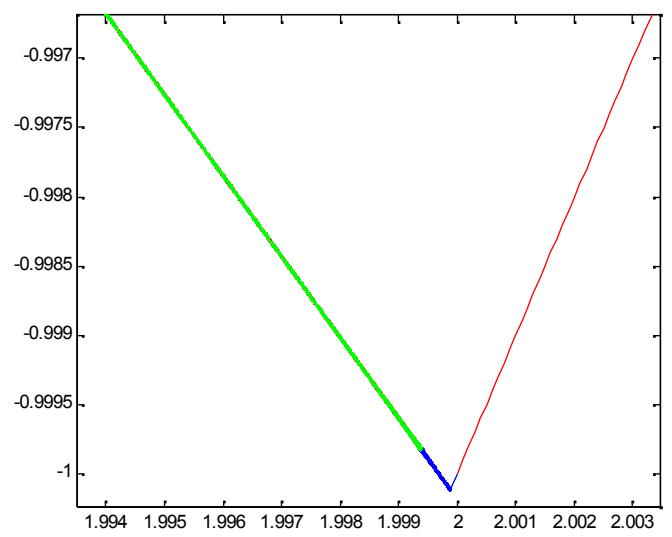
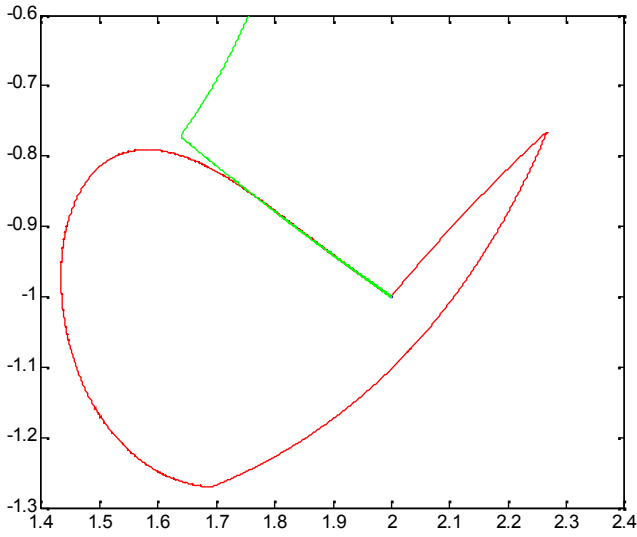


(b)

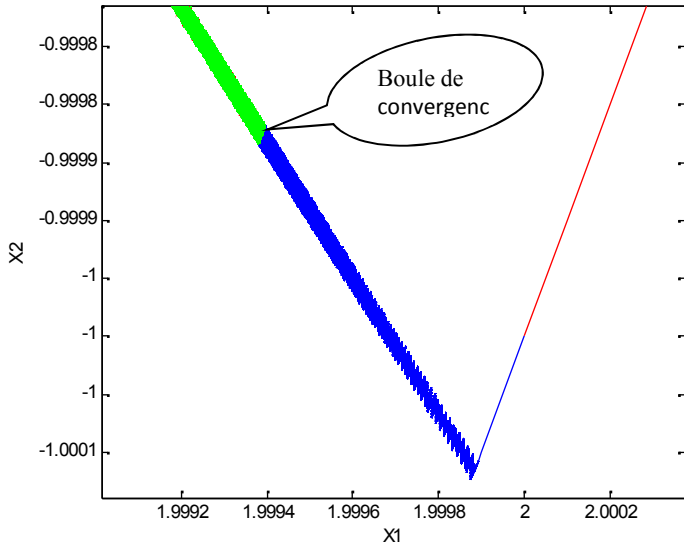


(c)

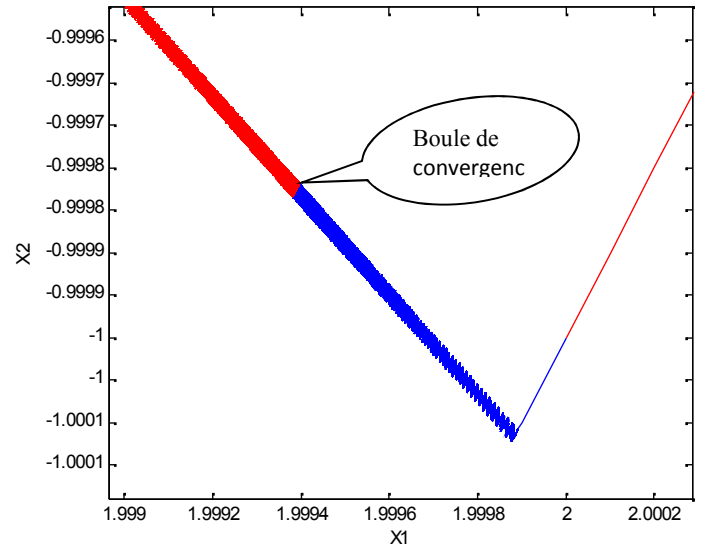
Fig. 4.7. Différentes trajectoires et leurs zoom sous l'approche de stabilisation : (a) Stabilisation sans l'utilisation de l'observateur, (b) Stabilisation basée sur l'observateur lorsque ce dernier démarre de condition initiale différente de celle du système et en (c) l'observateur et le système démarrent de la même condition initiale z^* .



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.8. En (a) superposition des trois exécutions de la Fig. 4.7 et le zoom correspondant, en (b) superposition des Figures Fig. 4.7-(a) & Fig. 4.7-(c), en (c) superposition des Figures Fig. 4.7-(b) & Fig. 4.7-(c).

La Figure 4.8 ci-dessus montre que la stabilisation au point Z par l'intermédiaire du système augmenté conduit toujours à une convergence vers la même boule autour de Z lorsque l'application de notre approche à retour d'états est basée sur les états estimés ou ceux du système et ceci quelles que soient les conditions initiales. Pour une stabilisation basée sur notre multi-estimateur et à partir de conditions initiales nulles, une optimisation en se fixant une borne supérieure de γ_p moins petite (diminution de la précision) permet de mettre en évidence l'effet des commutations et le travail à une fréquence de commutations constante voir Fig 4.9. Pour mieux visualiser les oscillations autour de Z , il suffit de démarrer de l'intérieur de la boule de convergence comme le montre la Figure 4.10. Une confirmation de ces résultats aux systèmes à plus de deux modes est concrétisée par l'exemple 2 suivant.

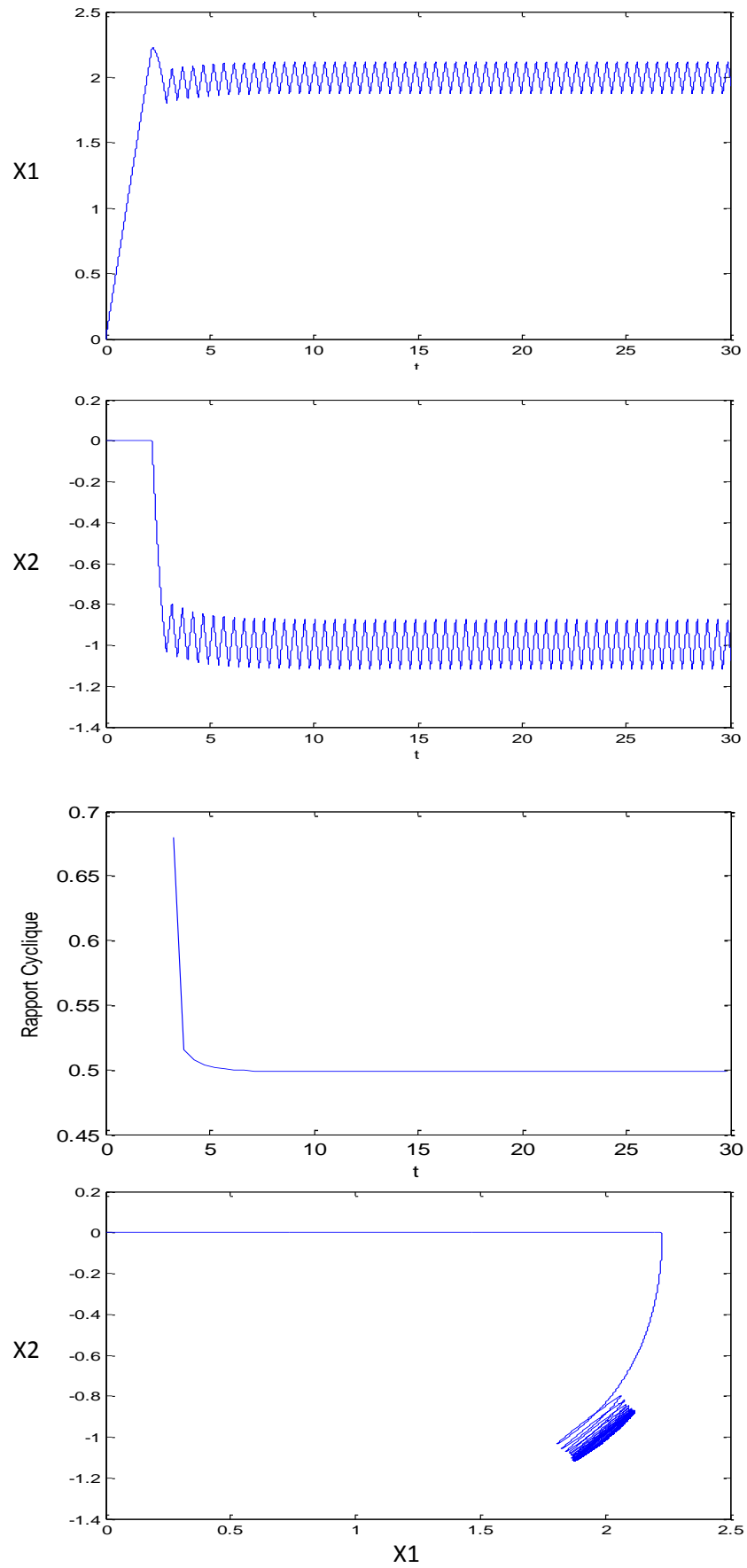


Fig. 4.9. Exécution à une très faible précision pour des conditions initiales nulles.

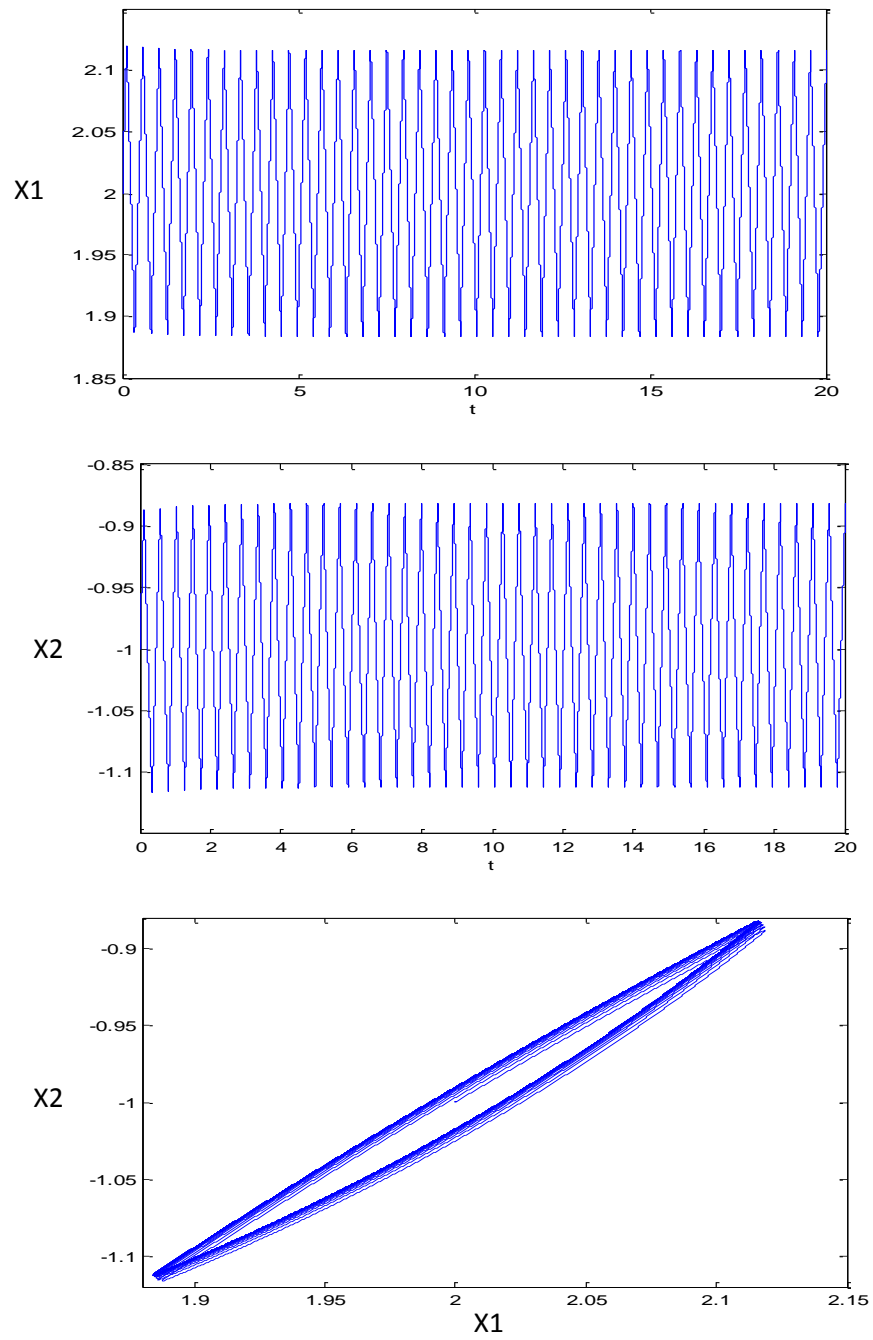


Fig. 4.10. Exécution à une très faible précision en démarrant de condition initiale à l'intérieur de la balle de convergence.

4.5.2. Exemple de systèmes à saturation (à trois modes):

Considérons l'interconnexion générale de système LTI SISO à retour et satisfaisant les équations de dynamiques linéaires suivantes [J. Gonçalves]:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Si le correcteur de l'asservissement est un dispositif à saturation comme indiqué dans la figure ci-après :

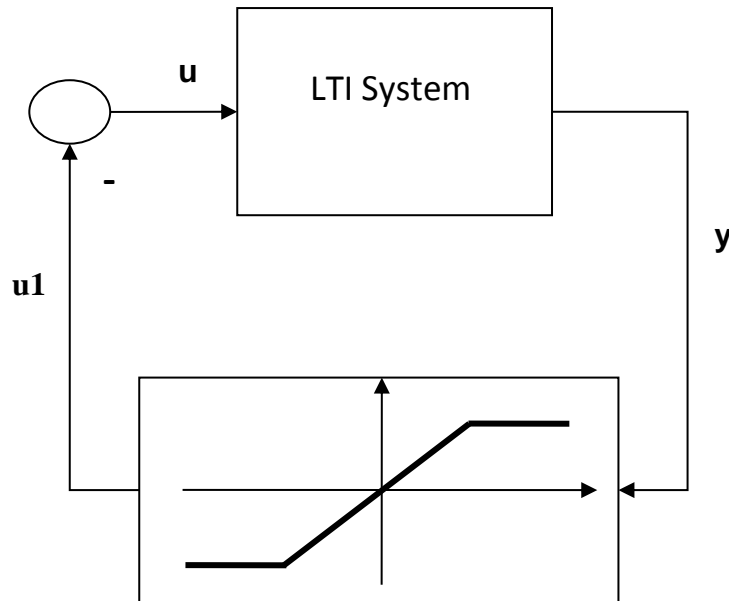


Fig. 4.11 Système asservi à saturation

Où le signal de commande obéit aux règles suivantes pour des constantes $u_0, d > 0$:

$$u(t) = \begin{cases} -u_0 & \text{si } y(t) > d \\ -\frac{u_0}{d}y(t) & \text{si } |y(t)| \leq d \\ u_0 & \text{si } y(t) < -d \end{cases}$$

Nous obtenons un système à saturation qui appartient à la classe de systèmes fortement non linéaires ; ces systèmes peuvent exhiber des comportements extrêmement complexes. Certains peuvent être chaotiques ; d'autres peuvent posséder plusieurs équilibres isolés ou un cycle limite, ou même certaines combinaisons de ces comportements.

Comme il a été discuté dans [32], ce système est symétrique autour de l'origine et a une solution unique pour toute condition initiale. Dans l'espace des états, cette saturation introduit trois régions chacune avec sa propre dynamique, ces régions sont séparées par deux surfaces de commutations constituées d'hyperplans de dimension $(n - 1)$: $S_{1,2} = \{x \in \mathbb{R}^n | Cx = \pm d\}$. Ces régions peuvent être approximées par des régions coniques dans notre approche ou directement optimisées. Nous avons le système commuté PWA correspondant suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - Bu_0, & \text{pour } x \in \Omega_1 \\ \dot{x} = (A - \frac{u_0}{d}BC)x, & \text{pour } x \in \Omega_2 \\ \dot{x} = Ax + Bu_0, & \text{pour } x \in \Omega_3 \end{cases} \quad \text{Avec} \quad \begin{cases} \Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | Cx > d\} \\ \Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | |Cx| \leq d\} \\ \Omega_3 = \{x \in \mathbb{R}^n | Cx < -d\} \end{cases}$$

Une profonde investigation des comportements de ce système sort du cadre de notre travail, elle est étroitement liée à l'examen des valeurs propres de la matrice $(A - \frac{u_0}{d}BC)$. En effet, c'est ce qui permet de dégager les conditions ainsi que les régions d'espace à partir desquelles le système va asymptotiquement converger vers l'origine, vers un cycle limite ou même diverger voir [32] pour plus de détail. Toutefois, la plupart des approches échouent de stabiliser ce système à l'origine qui représente bien un équilibre moyen pour le système PWA.

Exemple numérique : Oscillateur de Goodwin du troisième ordre

Cet exemple est pris de [71] comme un système à saturation avec

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}, u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } d = \frac{1}{9} \text{ de façon que le système PWA résultant est:}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & -9/2 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ pour l'origine, nous avons: } x_1=0, x_2=0, x_3=0.$$

Contrairement à certaines approches qui ont échoué pour ce même exemple, notre méthodologie "complète" de commande et d'observation permettent facilement de le prendre en charge et le stabiliser à l'origine : comme le montrent les figures de simulation ci-dessous. En effet, selon les critères de Gonçalves l'origine n'est même pas localement stable.

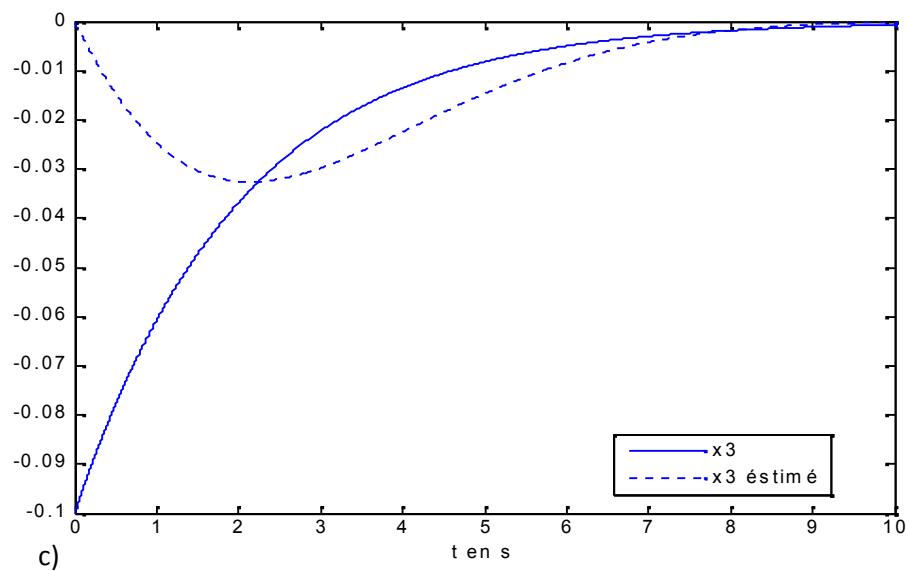
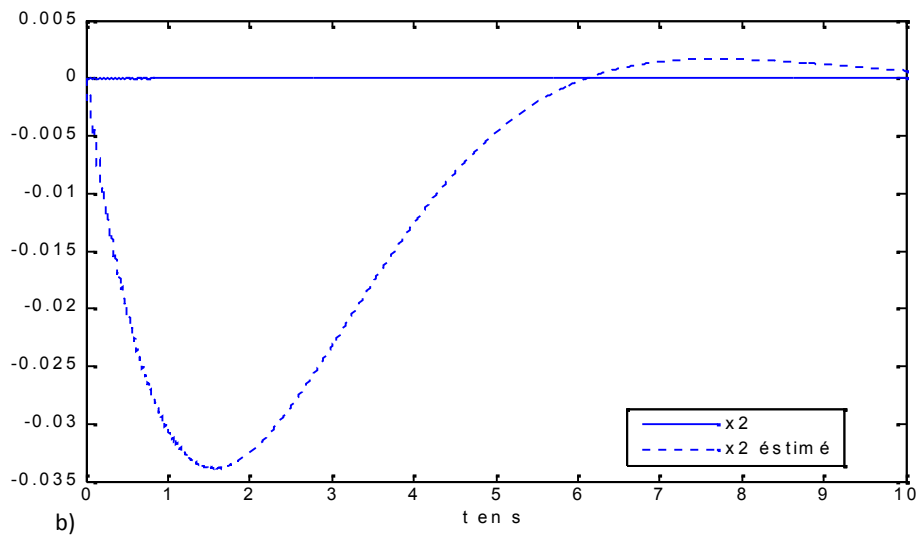
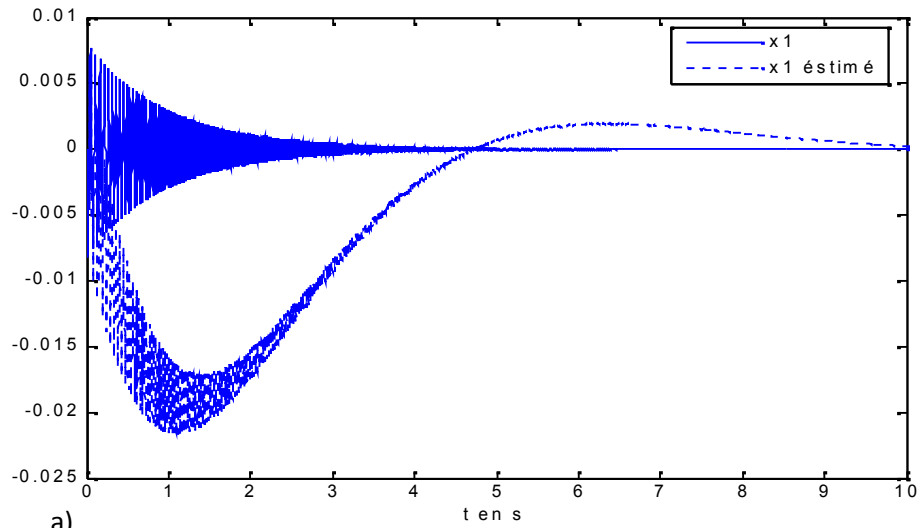


Fig. 4.12 Stabilisation des états à l'origine et leurs estimés correspondants pour des conditions initiales du système différentes de celles du multi-observateur.

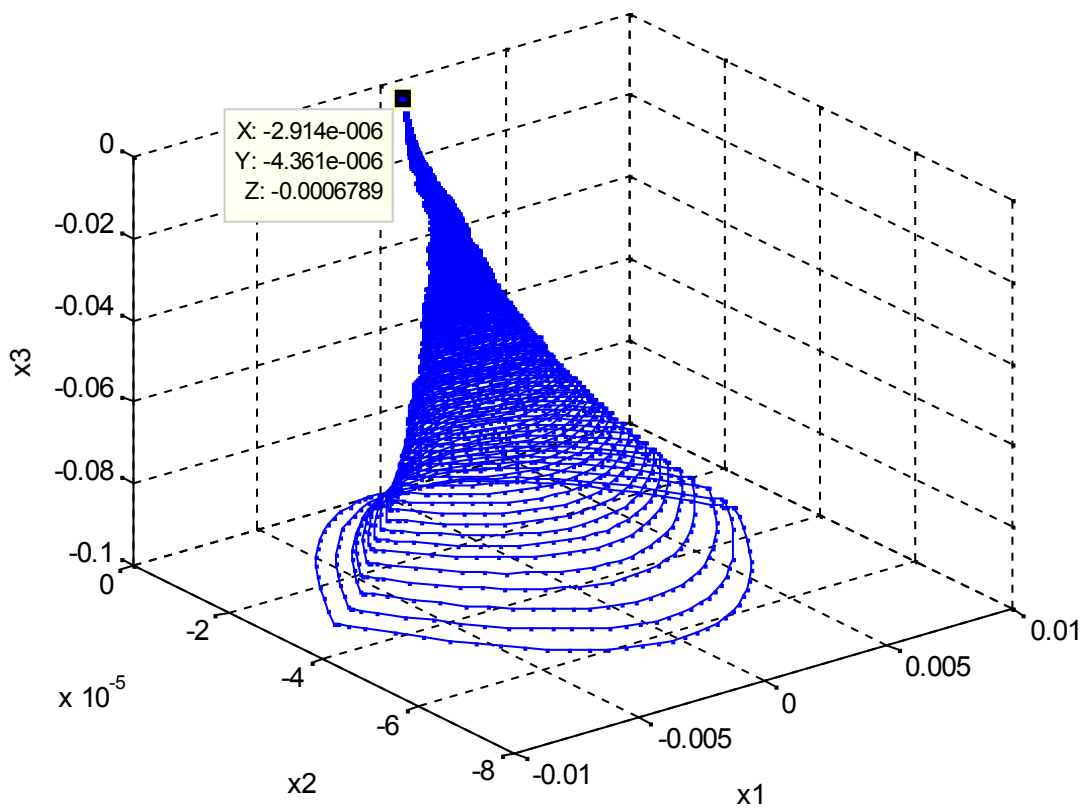


Fig. 4.13 Trajectoire du système à saturation sans l'utilisation de l'observateur et à partir de conditions initiales nulles

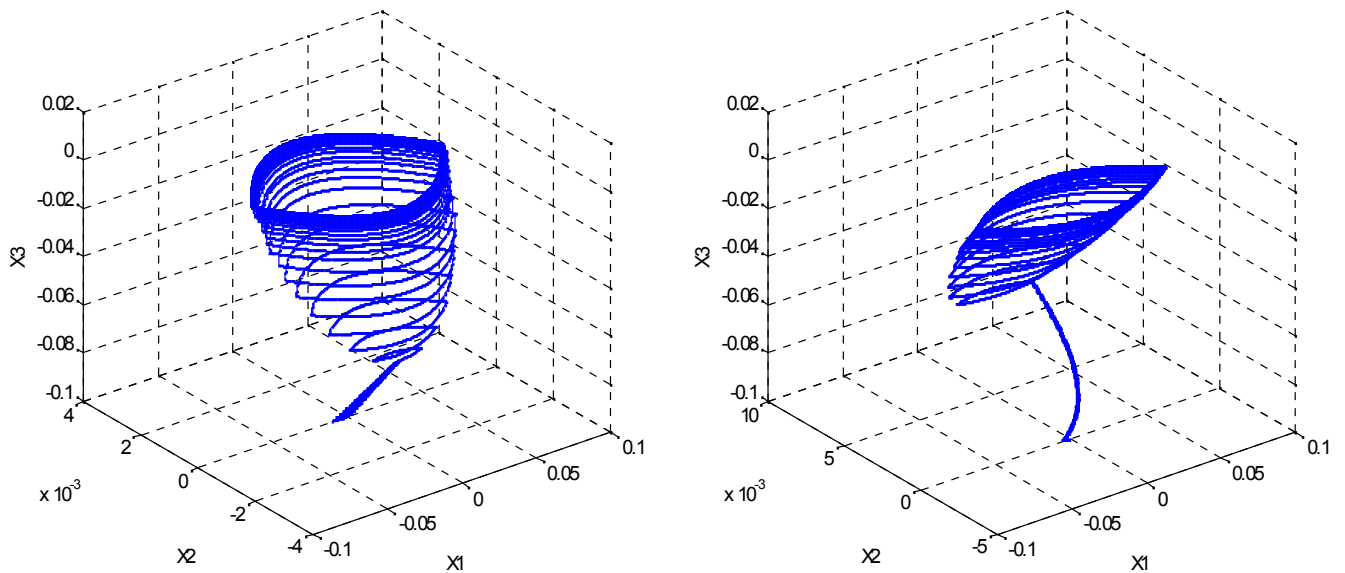


Fig. 4.14 Passage en cycle limite pour une commande basée sur les sorties du système en (a) et commande basée sur les sorties du multi-observateur en (b).

Conclusion :

Une approche générale de stabilisation pratique ainsi qu'un multi-observateur parfaitement adaptées aux systèmes affines par morceaux (PWA) ont été développées. Les deux variantes de commande proposées dans cette approche constituent une méthode systématique pour la recherche de conditions suffisantes pour la stabilisation pratique autour de point de fonctionnement qui ne représente pas un équilibre commun pour les systèmes PWA. La plupart des méthodes de commande utilisées jusqu'à maintenant ont reconnu que les trajectoires de ces systèmes ne peuvent converger vers le point de fonctionnement désiré mais plutôt à un certain voisinage de ce dernier sans toutefois chiffrer la distance par rapport au point désiré. L'approche que nous avons proposé calcule exactement les coordonnées du point de convergence et par suite fournit l'erreur commise avec une très grande précision. En plus de cette nouveauté, notre approche nous paraît simple et directe et surtout moins conservatrice par rapport aux méthodes proposées, son applicabilité au cas général des systèmes PWA constitue une contribution non négligeable et fournit une raison pour la continuité de la recherche dans cette direction. En effet, les bons résultats de simulation obtenus pour les deux exemples de systèmes PWA et en particulier celui du système à saturation (complexe) sont très prometteurs pour la commande par commutations ainsi que pour le multi-estimateur développé, ce qui confirme le bon sens des démarches mathématiques et des justificatifs théoriques fournis. L'observateur développé ne requiert pas un temps de maintien (séjour) dans les modes comme c'est le cas des approches existantes.

Chapitre V

Application en Électronique de Puissance

« Convertisseurs d'énergie DC/DC à commutations »

5. Convertisseurs d'énergie DC/DC à commutations

5.1. Présentation générale :

Depuis l'apparition des circuits intégrés électroniques, les concepteurs ont eu besoin de sources de puissance plus fiables pour alimenter les différents étages des montages électroniques. En effet, le besoin de sources de puissance éventuellement avec différents niveaux de tension et la nécessité de circuits de conversion entre niveaux, a gardé le problème de conception de ces sources un sujet de recherche scientifique et technologique toujours d'actualité. Si les théories de la génération et de la conversion d'énergie sont actuellement bien établies, les techniques de conception des circuits associées (et donc aussi les composants utilisés) ne cessent de se développer pour répondre aux performances requises. Évidemment, la miniaturisation donc le poids, le rendement et la fiabilité sont des recommandations générales pour la conception de tels circuits car ces dispositifs sont couramment embarqués sur les ordinateurs, les téléphones portables et les appareils photo ...etc. Leurs principes de conception passent obligatoirement par les phases de modélisation et de simulation/validation des modèles obtenus, elles sont généralement associées aux développements de techniques de commande adéquates.

Historiquement, la génération de niveaux de tension était une technique électronique très simple dont la réalisation est basée sur le contrôle de la dissipation d'énergie pour obtenir une sortie régulée indépendamment de la source et des variations de la charge. Cette technique a conduit à la conception de circuits régulateurs linéaires (série ou parallèle) moins chers mais avec un rendement très faible à cause des éléments dissipatifs employés et particulièrement lorsque de larges tensions d'entrées sont utilisées pour en extraire de petites valeurs de tensions régulées. En effet, en plus de la simplicité, les régulateurs linéaires fournissent une tension de sortie moins bruitée à cause de l'absence de commutations. Cependant, la nécessité de radiateur d'évacuation de la puissance dissipée et éventuellement de transformateur volumineux font augmenter son prix et limiter sa miniaturisation bien que le problème de rendement puisse être grandement amélioré si le courant d'alimentation du régulateur est pris comme une petite fraction du courant de sortie.

Les systèmes à découpage ou convertisseurs à commutations utilisent le contrôle du rapport cyclique d'éléments de commutation pour passer/bloquer le flux d'énergie et achever ainsi la régulation théoriquement sans perte de puissance. Ils doivent cependant inclure des filtres et des composants de stockage pour lisser les grandeurs de tension et de courant découpées et pour éliminer les effets d'harmoniques indésirables. De ce fait, le découpage reste une opération relativement coûteuse du fait de la présence de ces filtres.

Pour atteindre de meilleurs rendements dans les convertisseurs à commutations, les composants actifs utilisés doivent présenter relativement de faibles chutes de tension à l'état passant et de faibles capacités parasites. Dans les faibles puissances, le transistor MOSFET règne en maître. En effet, sa grille présente un faible niveau de seuil de déclenchement, ce qui permet de minimiser l'énergie perdue dans la commande.

Durant ces dernières décennies, de grandes avancées ont marqué les domaines de la conception et de la fabrication des semi-conducteurs de puissance. En revanche, l'intégration des composants réactifs n'a pas subi le même sort, du fait de la difficulté d'obtenir des composants capables de supporter de fortes contraintes de courant-tension avec la mise en œuvre de matériaux magnétiques et diélectriques requise pour les valeurs des inductances et des capacités. Ces problèmes ne se posent généralement pas pour les faibles puissances, du fait que les calibres en courant et en tension sont faibles et de la réduction des valeurs des éléments inductifs et capacitifs bénéficiant de la haute fréquence de découpage.

L'utilisation des convertisseurs DC/DC à commutations présente beaucoup d'avantages par rapport à celle de leurs homologues linéaires tels que :

- Le fonctionnement à haute fréquence de commutation qui permet de réduire le volume de l'inductance nécessaire et éventuellement du transformateur employé.
- Ils peuvent abaisser ou augmenter la tension d'entrée en inversant leurs polarités.
- Ils peuvent fonctionner pour une large gamme de tension d'entrée.
- Et évidemment un meilleur rendement.

Sans toutefois oublier la présence d'harmoniques indésirables en entrée et en sortie comme effet des commutations ce qui complique énormément la technique de commande associée. Les topologies usuelles les plus utilisées de convertisseurs DC/DC à commutations (qui peuvent être isolés ou non) auxquelles nous avons appliqué notre approche de commande et d'observation sont les suivantes :

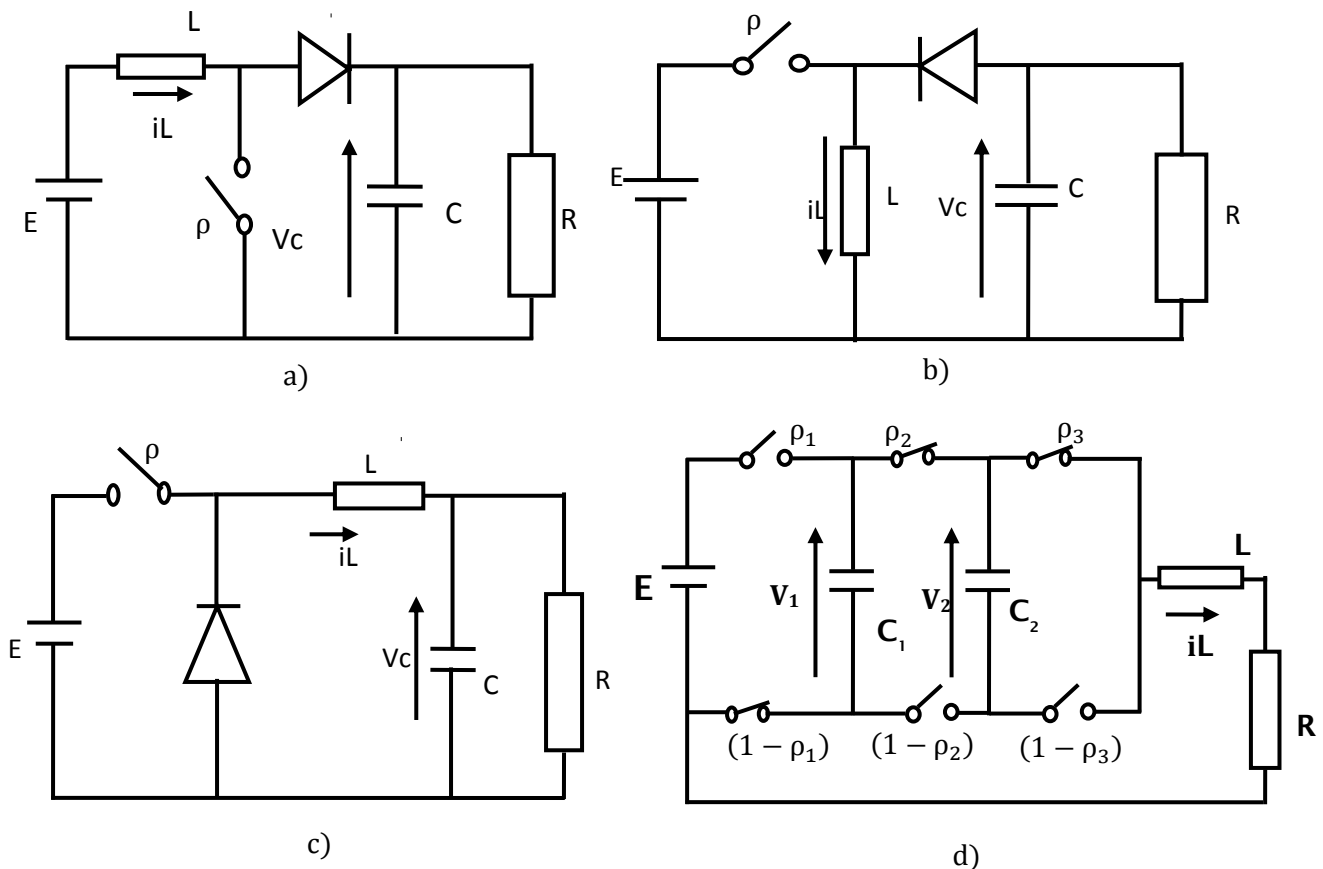


Fig. 5.1 Topologies usuelles de convertisseurs à commutations, Boost en a), Buck-Boost en b), Buck en c) et le convertisseur multicellulaire en d).

Il n'est pas difficile de mener l'opération de la modélisation de tous ces circuits et obtenir finalement les modèles de systèmes affines par morceaux (PWA) objet de notre travail. En effet, la modélisation directe permet d'écrire explicitement les équations de ces circuits à topologies variables sous la forme de systèmes multi-affines (à commutations) et bénéficier ainsi de l'utilisation des outils puissants développés pour ces derniers et notamment l'approche proposée dans cette thèse. Toutefois, pour le cas général, les méthodes systématiques sont privilégiées. Vu que ces circuits font partie de la classe de systèmes physiques à commutations, ils peuvent être pris en charge dans la phase de modélisation par les approches de modélisation énergétique. Bien que nos travaux de thèse ne couvre pas la modélisation de ces circuits, autrement dit celle-ci ne figurait pas dans nos objectifs, nous allons faire une petite présentation de la méthode de modélisation Hamiltonienne commandé par port (formulation PCH).

5.2. Approche de modélisation énergétique :

Le concept d'énergie est l'un des outils fondamentaux interdisciplinaire pour décrire les comportements des systèmes physiques de façon systématique en se basant sur le principe de conservation de celle-ci. Les méthodes de modélisation énergétiques Lagrangienne et Hamiltonienne en sont les exemples les plus utilisées en mécanique et génie électrique.

Historiquement, les variables associées à un élément physique ont été classés en deux catégories ; les variables qui peuvent être décrites en termes de différence et mesurables entre deux points sont appelées variables d'effort notées $pe(t)$ ex : Force, Tension, Température, Pression..Etc. Les variables correspondantes, appelées aussi variables de flux notées $pf(t)$ sont mesurables en un point ex : Vitesse, Courant, Débit de fluide..Etc.

La puissance instantanée de l'élément physique auquel sont associées ces deux variables est à tout moment donnée par leurs produit : $p(t) = pe(t) \times pf(t)$.

Les techniques de décomposition des systèmes physiques et la représentation graphique des flux d'énergie ont conduit au développement de plusieurs méthodes de modélisation énergétiques telle que celle des Bonds Graph.

La combinaison des modèles à structure réseaux avec la formulation Hamiltonienne conduit au formalisme de modélisation de systèmes Hamiltoniens commandés par port, elle permet la représentation de système dynamique sous la forme d'un réseau d'échange d'énergie. Ce type de modélisation permet de couvrir un large domaine de systèmes physiques et en particulier celui des convertisseurs d'énergie électrique.

Modèle de systèmes Hamiltoniens :

Par analogie aux systèmes Lagrangiens, dans la formulation Hamiltonienne, les équations d'Euler-Lagrange sont plutôt écrites en fonction de la position et de la quantité de mouvement généralisée où une fonction d'énergie totale $H(q, p)$ est définie à la place de la fonction Lagrangienne $L(q, \dot{q})$.

Le vecteur d'états dans la formulation Hamiltonienne est donnée par $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.

Pour les systèmes mécaniques simples sans dissipation, on a le système Hamiltonien suivant :

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) + F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n \\ I_n \end{bmatrix} F \quad (1)$$

Où 0_n et I_n sont les matrices nulle et unité d'ordre n et $H(q, p)$ est la fonction de l'énergie totale appelée fonction Hamiltonienne.

Le bilan de forces mis en jeu dans l'équation d'Euler-Lagrange est associé en génie électrique aux lois de Kirchhoff où les flux dans les inductances et les charges de capacités sont pris comme variables d'états.

En effet, considérons un circuit électrique constitué de n_c éléments capacitifs avec une fonction d'énergie totale $H_c(q)$ et n_L éléments inductifs avec une fonction d'énergie totale $H_L(p)$ où $q \in \mathbb{R}^{n_c}$ et $p \in \mathbb{R}^{n_L}$.

Le circuit est alors un système Hamiltonien défini sur l'espace des variables d'énergie du circuit $x = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ et muni d'une structure géométrique définie par la matrice de structure $J(p, q) \in \mathbb{R}^{(n_c+n_L) \times (n_c+n_L)}$ et engendré par la fonction Hamiltonienne $H(q, p)$ tel que :

$$H(x) = H_c(q) + H_L(p) \Leftrightarrow \dot{x} = J(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} = J(q, p) \begin{bmatrix} \frac{\partial H(x)}{\partial q} \\ \frac{\partial H(x)}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Où la matrice de structure $J(x)$ peut être déduite à partir des lois de Kirchhoff appliquées au circuit et la fonction Hamiltonienne représente l'énergie totale accumulée dans les éléments de stockage inductifs et capacitifs.

Modèles Hamiltoniens à port :

La modélisation des systèmes Hamiltonien Commandé par Port (PCH) est une généralisation des systèmes Hamiltoniens à des systèmes ouverts. Elle consiste à décomposer le système en sous-systèmes en définissant le flux des échanges énergétiques par identification des endroits auxquels les éléments échangent de l'énergie, le système est ensuite complété en connectant aux ports du système Hamiltonien les éléments qui n'accumulent pas d'énergie pour obtenir un réseau d'échange d'énergie. Où des variables, $pf_i(t)$ dénotant la variable de flux associée au port i et $pe_i(t)$ sa variable d'effort sont utilisées. De la même façon, une paire de variables d'énergie est associée aux ports d'interconnexion

Définition : Un système Hamiltonien commandé par port sur R^n est défini par une matrice de structure $J(x)$ antisymétrique de dimension $(n \times n)$, une fonction Hamiltonienne $H(x) : R^n \rightarrow R$, une matrice d'entrée $g(x)$ de dimension $(n \times m)$ et les équations dynamiques :

$$\begin{cases} \dot{x} = J(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u \\ y = g(x)^t \frac{\partial H}{\partial x}(x) \end{cases}$$

Où x est le vecteur des variables d'énergie et $(u, y) \in R^{m \times m}$ sont les variables de puissance associées aux ports d'interconnexion du système.

S'il y a conservation de l'énergie dans les systèmes considérés, la condition d'antisymétrie de la matrice d'interconnexion est donnée par : $J(x) = -J(x)$.

Dans le cas de système à dissipation d'énergie, les éléments dissipatif d'énergie peuvent être connectés à un des ports, si nous désignons par u_R et y_R les variables de puissance aux ports auxquels sont connectés les éléments résistifs, nous aurons dans ce cas :

$$g(x)u = [g(x) \quad g_R(x)] \begin{bmatrix} u \\ u_R \end{bmatrix}.$$

Par suite :

$$\begin{cases} \dot{x} = J(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u + g_R(x)u_R \\ y = g(x)^t \frac{\partial H}{\partial x}(x) \\ y_R = g_R(x)^t \frac{\partial H}{\partial x}(x) \end{cases} \quad (3)$$

Dans le cas où les éléments résistifs sont linéaires, la relation entre les variables de flux et d'effort est exprimée par [Buisson] :

$$pe_R = -Spf_R, \quad S = S^t \geq 0$$

Ce qui conduit à la définition de système Hamiltonien commandé par port avec dissipation suivante [14] :

Définition : Un système Hamiltonien commandé par port avec dissipation sur R^n est défini par une matrice de structure $J(x)$ antisymétrique de dimension $(n \times n)$, une matrice symétrique positive $R(x)$, une fonction Hamiltonienne $H(x) : R^n \rightarrow R$, une matrice d'entrée $g(x)$ de dimension $(n \times m)$ et les équations dynamiques :

$$\begin{cases} \dot{x} = (J(x) - R(x)) \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u \\ y = g(x)^t \frac{\partial H}{\partial x}(x) \end{cases}$$

avec $R(x) = g_R^t(x) S g_R(x)$, $R(x) = R^t(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Systèmes à commutations :

Les méthodes de modélisation par Bond Graphs et la formulation PCH qui ont été largement appliquées aux systèmes physiques continus, ont été aussi développées et adaptées aux systèmes physiques à commutations et en particulier les convertisseurs d'énergie DC/DC [13][14]. Où les commutations entre modèles sont représentées sur le graphe de liaisons par des commutateurs eux même modélisés par des sources d'effort ou de flux.

Plus généralement, il a été montré [13][14] à l'aide de la modélisation sous forme de Bonds Graph et la formulation PCH compatible avec l'énergie du système utilisé, que pour les systèmes physiques à commutations dont les commutateurs sont idéaux, les équations sont affines en la commande et la formulation PCH est donnée par :

$$\dot{y} = (J(\rho) - R(\rho))x + g(\rho)u \quad (5)$$

Où ρ est un vecteur de mode Boolien, il décrit les configurations on/off des interrupteurs. $u \in \mathbb{R}^m$ represent la source d'énergie qui est constante dans notre cas, $y \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'états de dimension égale au nombre des éléments de stockage. Les variables d'états sont les variables énergétiques (flux d'inductance, charge de la capacité). $x \in \mathbb{R}^n$ est le co-vecteur d'états, co-variables d'états sont les co-variables d'énergie correspondantes (courants, tensions). Dans le cas d'éléments de stockage linéaires, la relation entre ces deux vecteurs est donnée par: $x = Fy$ où F est une matrice symmetrique définie positive. Dans le cas simple, F est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs inverses des inductances ou des capacités [15], [59].

$g(\rho)$ est la matrice de puissance d'entrée.

$R(\rho) > 0$ représente la partie dissipative de l'énergie dans le circuit.

$J(\rho) = -J(\rho)^t$ correspond au flux de puissance dans le circuit.

Rappelons que dans ce cas, les variables et co-variables d'états sont globalement définies, et par conséquent, il n'y a ni sauts ni réinitialisation de ces quantités [15].

Pour cette classe de systèmes, il a été montré [15] que les trois matrices $J(\rho)$, $R(\rho)$ et $g(\rho)$ peuvent être mises sous la forme affine suivante:

$$\begin{aligned} R(\rho) &= R_0 + \sum_1^k \rho_i R_i \\ g(\rho) &= g_0 + \sum_1^k \rho_i g_i \\ J(\rho) &= J_0 + \sum_1^k \rho_i J_i \end{aligned} \quad (6)$$

Où k est le nombre de paires d'interrupteur physiques et ρ_i sont les composantes de ρ .

En remplaçant ces quantités dans (2), le modèle affine suivant est obtenu [15]:

$$\dot{x} = a(\rho)x + b(\rho) \quad \text{avec } \rho \in \{0,1\}^k. \quad (7)$$

Pour un circuit de k paires d'interrupteurs physiques, nous aurons un système commuté de 2^k modes de fonctionnement qui peuvent être imposés par la configuration des interrupteurs. A titre de vérification pour les circuits idéals Boost et Buck-Boost, nous obtenons les modèles suivants :

$$\begin{aligned} \text{Boost idéal: } J(\rho) &= \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix}, R(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{pmatrix}, g(\rho) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & 1/C \end{pmatrix}, \\ \text{Buck-Boost idéal: } J(\rho) &= \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ \rho & 0 \end{pmatrix}, R(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{pmatrix}, g(\rho) = \begin{pmatrix} 1-\rho \\ 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & 1/C \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

Par conséquent, le problème de commande de ces circuits peut être investigué au moyen du modèle PWA général et abstrait : $\dot{x} = A_i x + b_i$.

5.3. Méthode de modélisation explicite exacte pour les convertisseurs DC/DC :

Alternativement, il est facile de démontrer que la modélisation exacte de tous ces circuits permet aussi d'aboutir à ces modèles de systèmes affines par morceaux (PWA) objet de notre travail. En effet, l'écriture explicite des équations pour ces circuits à topologie variable sous la forme de systèmes multi-affines (à commutations) permet d'utiliser les outils puissants développés pour ces derniers et notamment l'approche proposée dans cette thèse.

5.3.1. Topologies à un seul commutateur :

En se plaçant dans des conditions de fonctionnement idéalisées pour ces convertisseurs i.e. Où la source continue E est à résistance interne négligeable, aucune dissipation énergétique n'est considérée dans l'inductance L ni dans la capacité C , les caractéristiques de la diode D sont supposées idéales sans chute de tension aux bornes en mode de conduction et commute exactement à un niveau de tension égal à zéro et un courant d'inductance toujours positif. L'interrupteur commandé est représenté par une variable Booléenne $\rho=0$ lorsqu'il est fermé et $\rho=1$ lorsqu'il est ouvert. Les trois premiers convertisseurs seront représentés par des systèmes PWA bimodales (en excluant donc le mode de conduction discontinue) à titre d'exemple les équations du Buck-Boost idéal (Fig 5.1.c) sont les suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mode1 : } (\rho = 0) \\ \left\{ \begin{array}{l} L \frac{di_L}{dt} = E \\ C \frac{dv_c}{dt} = -\frac{vc}{R} \end{array} \right\} \\ \text{Mode2 : } (\rho = 1) \\ \left\{ \begin{array}{l} L \frac{di_L}{dt} = vc \\ C \frac{dv_c}{dt} = -i_L - \frac{vc}{R} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{x} = A_i x + b_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} i = 1 \text{ pour } \rho = 0 \\ i = 2 \text{ pour } \rho = 1 \end{cases}$$

Et on obtient le modèle PWA suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}; b_1 = \begin{bmatrix} E/L \\ 0 \end{bmatrix} \\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. ;$$

5.3.2. Topologie à plusieurs commutateurs (convertisseur multicellulaire):

L'inconvénient majeur des convertisseurs à un seul commutateur ou interrupteur est que ce dernier (typiquement un MOSFET) doit être capable de bloquer une haute tension (de l'ordre du double de la tension d'entrée) et particulièrement, lorsqu'il est alimenté par un courant alternatif redressé. En effet, les convertisseurs à un seul commutateur ne représentent pas la bonne solution pour les convertisseurs de puissance aussi parce que le commutateur doit être traversé par un fort courant. Pour se faire, d'autres topologies à plus d'un commutateur peuvent être utilisées. Le convertisseur multicellulaire (figure ci-dessous) en fonctionnement hacheur donc pour lequel une puissance (courant & tension) de sortie est bien précisée en est un bon exemple.

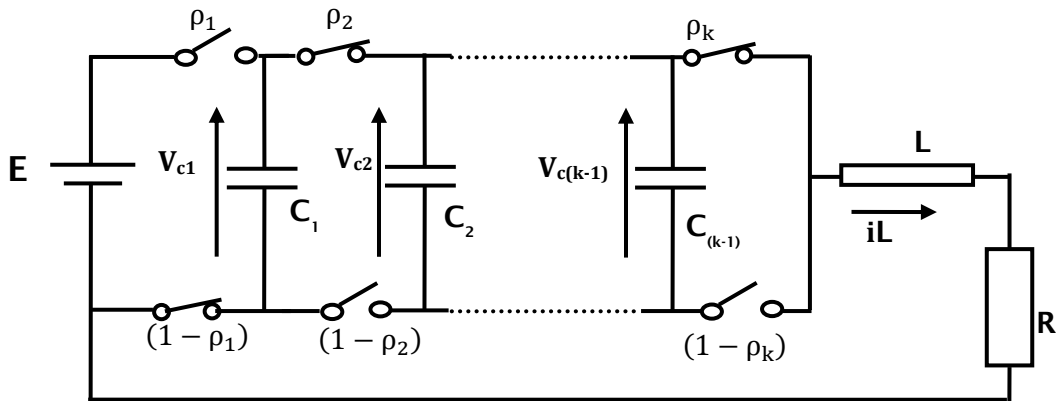


Fig. 5.2 Topologie du Convertisseur multicellulaire

En notant par V_{c_i} la tension aux bornes de la capacité C_i , $\forall i=1,(k-1)$. Le système est constitué de $2k$ commutateurs fonctionnant par paires; pour chaque paire j , une commande ρ_j est appliquée à l'interrupteur en haut de la cellule j et son complément $\bar{\rho}_j$ à celui en bas de la même cellule.

Toujours en se plaçant dans de conditions idéalisées i.e. interrupteurs parfaits, source et composants aussi parfaits et la convention $\rho_j=1$ lorsque l'interrupteur j (du haut de la cellule j) est fermé et $\rho_j=0$ lorsqu'il est ouvert.

Ils existent plusieurs façons de mener l'opération de modélisation des convertisseurs multicellulaires, néanmoins le modèle instantané suivant permet d'obtenir directement le modèle d'états et sert de référence pour expliquer le fonctionnement du convertisseur.

$$\begin{cases} \dot{i}_L = -\frac{R}{L}i_L + \frac{E}{L}\rho_1 + \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{k-1}V_{c_j}(\rho_{j+1} - \rho_j) \\ \dot{V}_{c_j} = \frac{i_L}{C_j}(\rho_j - \rho_{j+1}) \\ y = (1 \ 0 \ \dots \ 0)x \end{cases} ; \quad j = 1, k-1 \text{ et } x = \begin{bmatrix} i_L \\ V_{c1} \\ \vdots \\ V_{c(k-1)} \end{bmatrix}.$$

Le modèle peut être mis directement sous la forme de système à commutations :

$$\dot{x} = a(\rho)x + b(\rho), \text{ avec}$$

$$a(\rho) = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{\rho_2 - \rho_1}{L} & \dots & \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{L} \\ \frac{\rho_1 - \rho_2}{C_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \frac{\rho_{k-1} - \rho_k}{C_{k-1}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, b(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\rho_1 E}{L} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} i_L \\ V_{c1} \\ \vdots \\ V_{c(k-1)} \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{pmatrix}.$$

D'autre part, la méthode du Bonds Graph et la formulation PCH conduit aux résultats suivants :

$$J(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & \rho_2 - \rho_1 & \dots & \rho_k - \rho_{k-1} \\ \rho_1 - \rho_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \rho_{k-1} - \rho_k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, R(\rho) = \begin{pmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, g(\rho) = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{C_{k-1}} \end{pmatrix}.$$

5.3.3. Commande des convertisseurs multicellulaires:

Afin de sécuriser le fonctionnement du convertisseur i.e. pas de surtensions aux niveaux des interrupteur et réduire les harmoniques en sortie, un bon conditionnement du convertisseur multicellulaire est nécessaire, il requiert donc un niveau de tension stable pour chacune des capacités flottantes. Cela dépend évidemment des éléments du système et des valeurs de tension et du courant désirées en sortie.

Commande en boucle ouverte :

Plusieurs techniques de commande ont été employées pour la stabilisation des tensions intermédiaires des convertisseurs multicellulaires. Les plus classiques sont des stratégies à boucle ouverte qui consistent à réaliser un équilibrage « naturel » par MLI (Modulation en Largeur d'Impulsion) pour un rapport cyclique fixé et décalé de $2\pi/k$ sur chaque cellule, cette technique a l'inconvénient de nécessiter un long temps d'équilibrage et un problème avec les convertisseurs à nombre de cellules paire. Une amélioration du temps d'équilibrage a été obtenue par l'adjonction carrément de circuits d'équilibrage utilisant un filtre RLC série en parallèle avec la charge afin d'amplifier les harmoniques permettant l'équilibrage naturel des tensions. Toutefois, l'équilibrage en boucle ouverte présente des réponses très oscillatoires et n'a aucune garantie de robustesse. Néanmoins, en plus de sa simplicité, il a l'avantage de ne pas avoir besoin des tensions intermédiaires ce qui évite la complication des observateurs.

Commande en boucle fermée :

Pour des raisons de robustesse et d'assurance de rapidité d'équilibrage, les techniques de commande des convertisseurs multicellulaires les plus avancées ont été appliquées en boucle fermée. En conséquence, une nécessité de disposer de toutes les tensions intermédiaires pour achever l'opération de commande à retour ce qui rend le développement de multi-observateur indispensable pour l'estimation de ces dernières. En plus des méthodes de régulation classique, une multitude d'approches et techniques avancées ont été développées pour commander les convertisseurs multicellulaires à base des modèles instantanés, moyens ou linéarisés. Pour en citer seulement les plus connues, la méthode stabilisante du Supélec est

basée sur le modèle Bonds Graph et la formulation PCH est très intéressante, simple et demande moins d'efforts de calcul. La méthode la plus intéressante du point de vue dynamique d'équilibrage et utilisation du modèle instantané, est celle de la commande par mode glissant. Les approches à commande prédictive ou optimale sont moins simples et demandent plus de calcul pour la mise en œuvre.

Approche Pratique de commande à base d'observateur commuté:

Nous avons développé dans le chapitre précédent une approche pratique complète de commande et d'observation par commutations pour les systèmes commutés PWA de façon générale. L'approche a bien prouvé son efficacité sur le plan commande/ observation et nous pensons qu'elle est parfaitement adaptée aux convertisseurs DC/DC dont nous allons voir les différentes applications. Aucune contrainte de temps de séjour des modes n'est supposée ni pour la commande ni pour l'observateur.

Points de fonctionnement :

Nous avons bien précisé que les convertisseurs à découpage constituent de meilleurs exemples de systèmes à commutations affines (Systèmes PWA). De ce fait la caractéristique essentielle de ces derniers s'applique i.e. les sous-systèmes (modes) n'ont aucune raison de posséder un équilibre commun. Alors que l'objectif principal de la commande de ces circuits consiste à stabiliser leurs sorties (les variables d'états) à un point référentiel représentant un point de fonctionnement désiré. Si ce point ne représente pas un équilibre commun et doit être atteint par commutations (dans notre cas), ces dernières doivent être forcées et rapides en se rapprochant de l'objectif.

Le choix de ces points de fonctionnement n'est pas arbitraire, ils doivent être minutieusement choisis parmi les configurations à énergie minimale. Évidemment, la première solution qui vient à l'esprit est de faire appel au modèle moyen du moins sur une période lorsqu'on désire imposer un cycle limite. Pour la méthode des Bonds Graph et la formulation PCH dont nous nous sommes inspirés du modèle à utiliser, les points vérifiant l'équilibre moyen ont été obtenus en égalisant à zéro l'équation (2) comme suit :

$$0 = (J(\rho_0) - R(\rho_0))x + g(\rho_0)u \quad (9)$$

Où dans ce cas, ρ_0 est un vecteur de mode dont les composantes ρ_{0i} sont les rapports cycliques, donc ρ_{0i} doivent être compris entre 0 et 1. Quoique, nous avons préféré utiliser notre idée de calculer les points vérifiant l'équilibre moyen d'un système PWA abstrait à partir de l'expression (4) plus adaptée à la formulation LMI (voir section 4.2).

5.4. Application de notre approche de commande/observation pratique aux convertisseurs DC/DC :

Ces circuits à commutations représentent de très bons exemples de systèmes commutés, les modèles mathématiques utilisés sont des systèmes commutés affines par morceaux PWA i.e. $\dot{x} = a(\rho)x + b(\rho)$ avec $\rho \in \{0,1\}^k$ où k est le nombre de paires de commutateurs travaillant en dualité. Les tests de robustesse de la méthode de commande pour ces circuits concernent essentiellement les irrégularités de la source de tension E et la variation de la charge supposée résistive. Les résultats de simulation pour les exemples de convertisseurs DC-DC considérés (systèmes PWA) sont directs et confirment la qualité des deux approches de stabilisation proposées ainsi que la convergence rapide des erreurs d'estimation du multi-observateur. Ainsi, les deux méthodes de stabilisation que nous avons proposée constituent de réelles approches d'applications générales pour tous les systèmes PWA. Nous notons aussi que dans le cas où une borne supérieur ε_0 est définie par l'utilisateur pour imposer un max sur ε_p , les matrices obtenues par la résolution des LMI ne sont pas uniques et dépendent du choix de ε_0 .

Afin de donner un sens pratique à nos résultats par rapport à ceux obtenus dans [53] & [59] ; nous avons choisi les mêmes exemples d'application de convertisseurs non idéals et nous avons effectué les mêmes tests de performances recommandés dans le fameux rapport HYCON [59]. Ce rapport est dédié au pouvoir d'utilisation des techniques de systèmes hybrides pour la conception de circuits en électronique de puissance de hautes performances.

Rappelons que la conférence HYCON est une rencontre spéciale et limitée à des groupes participants qui sont parmi les plus expérimentés en Europe dans les convertisseurs à commutations et ont une réputation mondiale, les affiliations de ces groupes sont données dans le tableau suivant :

Centre de recherche/ Université	Affiliations	Dirigeants de Groupes
ETH	Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Swiss Federal	M. Morari
KTH	Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden	U. Jönsson
LTH	Lund Institute of Technology, Lund, Sweden	A. Rantzer & R. Johansson
CRAN	Research Center for Automatic, Nancy, France	Pierre. Riedinger
SUPELEC	Laboratory of hybrid systems, Supelec, Rennes, France	Jean Buisson

Tableau 5.1. Affiliations des groupes participants dans HYCON

5.4.1 Exemple du convertisseur Buck non idéal :

Chacun de ces groupes de recherche a proposé plus d'une seule méthode de contrôle pour les convertisseurs DC-DC à commutations. L'approche du centre CRAN est basée sur le modèle continu du système commuté, leur méthode associe les techniques de commande optimale et l'analyse de fonctions de sensibilité pour régler les paramètres du contrôleur. En collaboration avec le CNRS (Centre National pour la Recherche Scientifique, Paris, France), ils proposent aussi des méthodes prédictive et à mode glissant pour ce circuit. Les membres du groupe ETH se sont focalisés sur les deux classes de systèmes associés i.e. le modèle hybride en temps discret : Mixed Logical Dynamic (MLD) et les systèmes PWA. Ils utilisent une commande obtenue de la minimisation d'une fonction de coût sur horizon fini objet de contraintes des modèles MLD ou PWA et des contraintes physiques sur les variables à manipuler. Afin d'assurer la faisabilité du problème, ils ont prévu de résoudre le problème d'optimisation offline sur tout l'espace d'états en utilisant la programmation multiparamétrique pour une loi de commande à retour d'état paramétré sur tout l'espace d'état. Le point de départ pour les gens du KTH est une classe de systèmes en modulation de largeurs d'impulsion où les dynamiques commutent périodiquement dans un ordre donné entre deux champs vecteurs affines. La topologie standard du convertisseur Buck opérant à fréquence de commutation fixe fait partie de cette classe. Ils se sont basés essentiellement sur le système bouclé pour prendre en considération les fluctuations de la charge et/ou la source. Pour cela, ils ont dégagés des équivalents aux critères LQ et H_∞ standards. Toutefois, le critère résultant de leur modèle échantillonné est fortement non linéaire et des approximations semblent être nécessaires pour dégager l'algorithme de synthèse correspondant à ces deux critères. La méthodologie de LTH considère le système linéaire périodique variant dans le temps obtenu par linéarisation. Pour des longues transitoires et/ou des fortes perturbations, il n'est pas suffisant de considérer ces modèles linéarisés. Pour cela, des systèmes commutés linéaires et PWA sont utilisés, une commande optimale du système linéaire périodique est appliquée et une relaxation de la programmation dynamique est utilisée pour optimiser les

séquences de commutation pour la modulation de largeurs d'impulsions. Ils ont adressé aussi le problème d'observation pour palier le problème d'inaccessibilité de la tension aux bornes de la capacité. Les travaux de Supelec se sont plutôt focalisés sur les convertisseurs Boost et Buck-Boost.

Selon leurs conclusions certifiées et notre observation, les différentes approches proposées dans ce report [59] ont montré des performances très bonnes, comparables et fortement liées. Certaines d'entre elles sont basées sur les modèles discrets et échantillonnés où certaines commandes complexes et certains pré-calculs sont nécessaires pour les applications réelles. Toutefois, les résultats reportés dans HYCON constituent une très bonne référence sur les différentes méthodes applicables aux convertisseurs DC-DC. Par conséquent, les mêmes performances globales présentées dans ce rapport peuvent être considérées comme une orientation certifiée pour la recherche académique. Nous nous sommes limités dans la comparaison au même circuit non idéal du convertisseur Buck suivant.

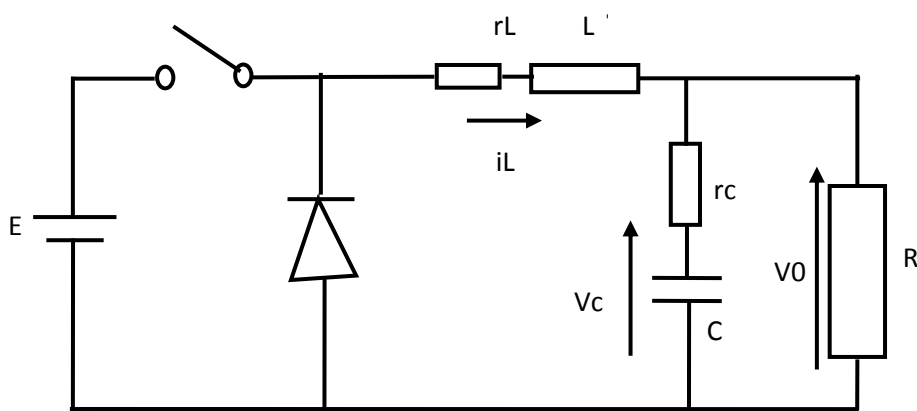


Fig. 5.3 : Circuit électrique du convertisseur Buck non idéal

Le modèle PWA du convertisseur Buck est donné par:

$$\dot{x} = Ax + b_i, i = 1,2$$

$$\text{Avec } A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_L} (r_L + \frac{R r_c}{R+r_c}) & -\frac{1}{x_L} \frac{R}{R+r_c} \\ \frac{1}{x_c} \frac{R}{R+r_c} & -\frac{1}{x_c} \frac{1}{R+r_c} \end{bmatrix}, b_i = \begin{pmatrix} \rho E / x_L \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} i_L \\ V_c \end{pmatrix}.$$

Les valeurs des paramètres du circuit sont normalisées en par-unité sont $E=1.8$ p.u; $x_c=70/2\pi$ p.u; $x_L=3/2\pi$ p.u; $r_c=0.005$ p.u; $r_L=0.05$ p.u; $R=1$ p.u et le point désiré est caractérisé par $V_0=1$ p.u; $i_{L0}=1$ p.u.

Dans ce cas nous avons $V_0 = \frac{R r_c}{R+r_c} i_L + \frac{R}{R+r_c} V_c$ et ρ est une variable Booléenne (0 ou 1) qui dénote l'état ouvert/fermé du commutateur.

Les résultats de simulation obtenus pour différentes exécutions selon les valeurs de ε_p et selon l'utilisation ou non d'une hystérésis sont représentés dans les figures 5.4 où les performances observées ne sont pas toute à fait satisfaisants. En effet, pour une optimisation à une faible précision Fig.5.4-a il n'y a pas de dépassement mais nous avons un temps d'établissement de la tension de sortie très long et une grande variabilité du rapport cyclique ; une association d'hystérésis en contrôle des commutations permet d'améliorer ces facteurs indicateurs en présence de dépassement voir Fig.5.4-b. Les figures montrent qu'en essayant

d'améliorer le temps d'établissement de la tension en sortie (par augmentation de la précision dans l'optimisation) en l'absence de limitation de courant de démarrage, le résultat est un très grand dépassement. Évidemment, ces indices de performances peuvent être grandement améliorés une fois un maximum du courant d'inductance est prévu, ce dernier résultat Fig.5.4-c a été retenu pour la comparaison.

D'autres parts, on notera que d'après les multiples tests de robustesse (résultats non reportés), nous remarquons que dans notre approche les modestes fluctuations de la source de tension n'ont aucun effet sur la régulation de la sortie. Alors qu'une sensibilité remarquable par rapport à la variation de la charge est observée. De toute façon en pratique, une boucle de régulation est généralement utilisée pour compenser les variations de la charge.

Le tableau de comparaison ci-dessous, comporte les critères de performances recommandées dans le rapport HYCON [59] et les valeurs correspondantes présentées par les participants dans ce même rapport. Bien que l'approche proposée n'est pas encore complète, et certaines améliorations de cette version préliminaire sont prévues avant son implémentation, la comparaison montre que nos résultats ne sont pas très loin de ceux des groupes professionnels.

Performances (critères) Méthodes	Fréquence de commutation en régime permanent	Rapport Cyclique en régime permanent	Limitation du courant de démarrage à $i_{L_{max}} = 3p.u$	Dépassement dans le courant d'inductance $(\frac{i_{L_{max}}}{i_{L_0}})$	Temps d'établissement pour la tension de sortie	Robustesse vis à vis des fluctuations de la source	Robustesse vis à vis des fluctuations de la charge
Méthodes présentées à HYCON Da51	Constante	Constant à 0.58	Oui	3-3.5	7-10 s	Bonne	Bonne
Notre approche proposée	Quasi-Constant	Quasi-Constant à 0.58	Non	$\cong 5$	14 s	Bonne	Médiocre

Tableau 5.2. Tableau de Comparaison pour le BUCK

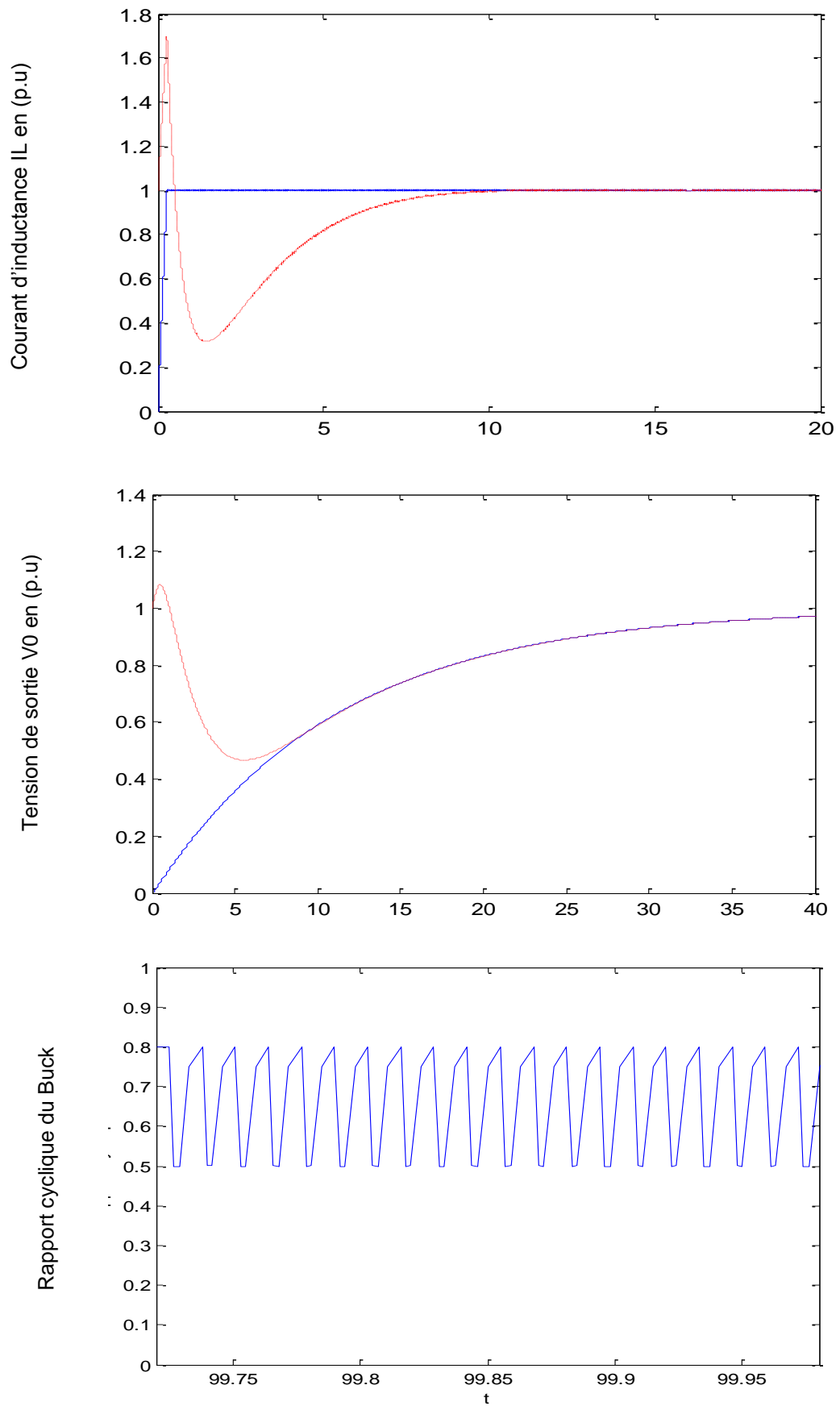


Fig. 5.4-a : Courant d'inductance i_L (a), tension de sortie V_0 (b) et le rapport cyclique en (c) pour le Buck à partir de conditions initiales nulles.

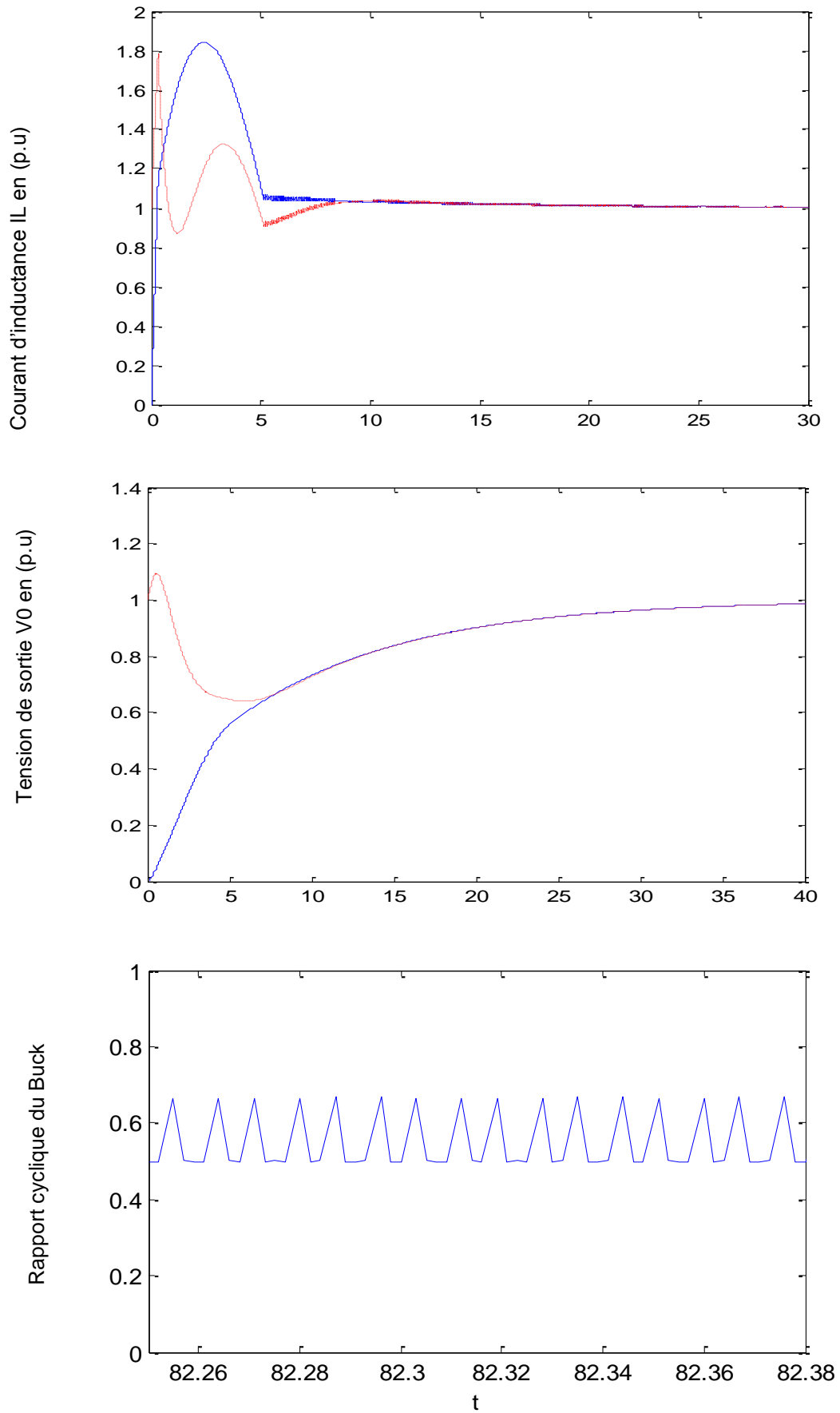
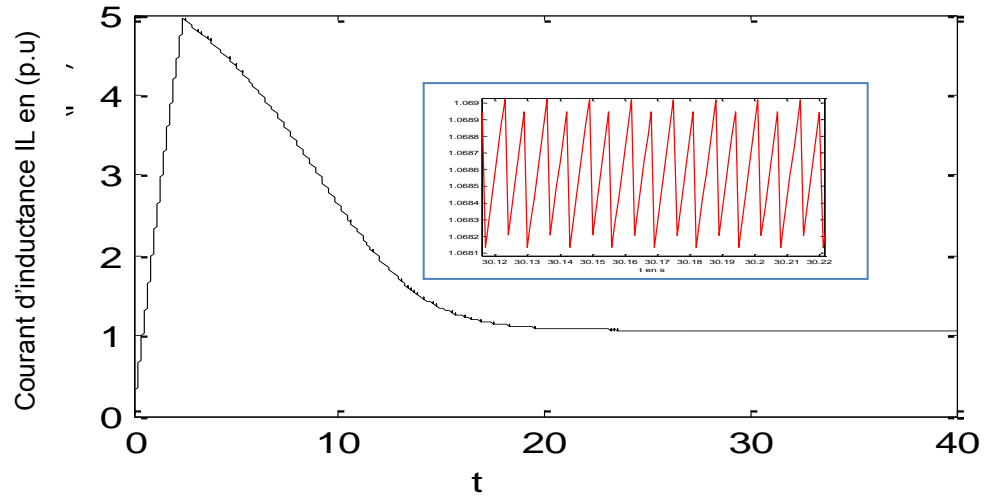
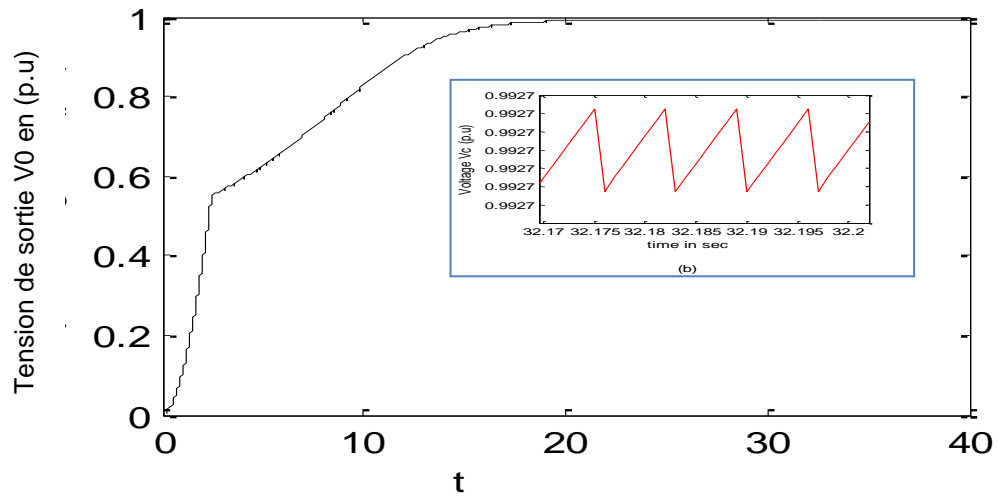


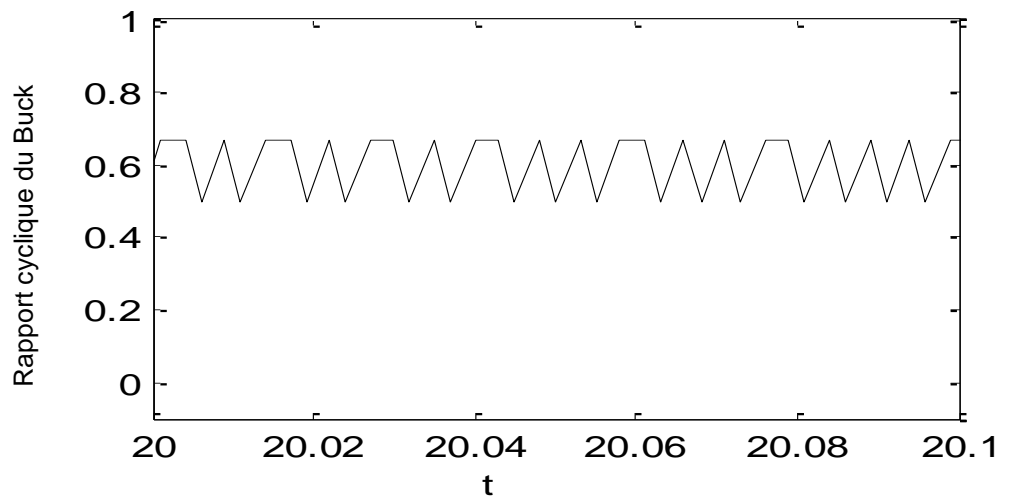
Fig. 5.4-b: Courant d'inductance i_L (a), tension de sortie V_0 (b) et le rapport cyclique en (c) pour le Buck à partir de conditions initiales nulles.



(a)



(b)



(c)

Fig. 5.4-c : Courant d'inductance i_L (a), tension de sortie V_0 (b) et le rapport cyclique en (c) pour le Buck à partir de conditions initiales nulles.

5.4.2. Exemple du Convertisseur Boost non idéal [59]:

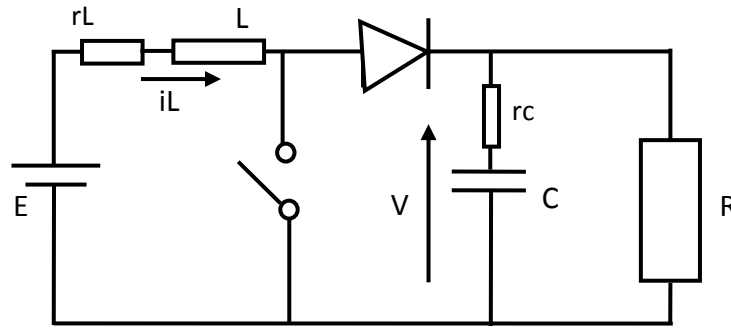


Fig. 5.5 Circuit électrique du convertisseur Boost non idéal.

Le modèle PWA du convertisseur BOOST est donné par :

$$\dot{x} = A_i x + b_i, i = 1,2$$

$$\text{Avec } A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{x_L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_c} \frac{1}{R+r_c} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_L} (r_L + \frac{R r_c}{R+r_c}) & -\frac{1}{x_L} \frac{R}{R+r_c} \\ \frac{1}{x_c} \frac{R}{R+r_c} & -\frac{1}{x_c} \frac{1}{R+r_c} \end{bmatrix}, b_i = \begin{pmatrix} E/x_L \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix}.$$

Comme dans le rapport du HYCON [59], les valeurs des paramètres du circuit sont normalisées en par-unité sont $E=0.75$ p.u.; $x_c=70/2\pi$ p.u.; $x_L=3/2\pi$ p.u.; $r_c=0.005$ p.u.; $r_L=0.05$ p.u.; $R=1$ p.u et le point désiré est caractérisé par $V_{0ref}=1$ p.u.

Dans ce cas nous avons $v_0 = \rho \frac{R r_c}{R+r_c} i_L + \frac{R}{R+r_c} v_C$ et ρ est une variable Boolienne (0 ou 1) qui dénote l'état ouvert/fermé du commutateur.

Évidemment, l'objectif principal est de réguler la tension de sortie v_0 à la valeur référentielle V_{0ref} malgré les fluctuations de la source E et les variations de la charge résistive R . Pour cela, des techniques similaires que précédemment ont été proposées par les mêmes groupes participants (Tableau 5-1) pour ce circuit élévateur où le SUPELEC a bien participé avec deux contributions remarquables toutes les deux sont liées au principe de Lyapunov. La première étant basée sur la fameuse technique énergétique exploitant l'expression de l'énergie du circuit ; la méthode est bien connue sous le nom de technique stabilisante, elle présente une grande simplicité d'application. La seconde utilise la notion de dissipativité du système, celui-ci est constitué d'éléments interconnectés considéré comme des transformateurs d'énergie. La formulation PCH a été utilisée comme point de départ pour les deux méthodes.

Les résultats obtenus lors de l'application de notre approche de commande/observation sur ce circuit non idéal sont représentés dans les Fig 5.6-7, ils sont parfaitement comparables à ceux reportés dans le rapport du HYCON [59], néanmoins, le problème de robustesse vis-à-vis des variations de la charge persiste. Cela confirme bien que l'approche proposée nécessite plus de travail sur la question de robustesse des systèmes bimodal.

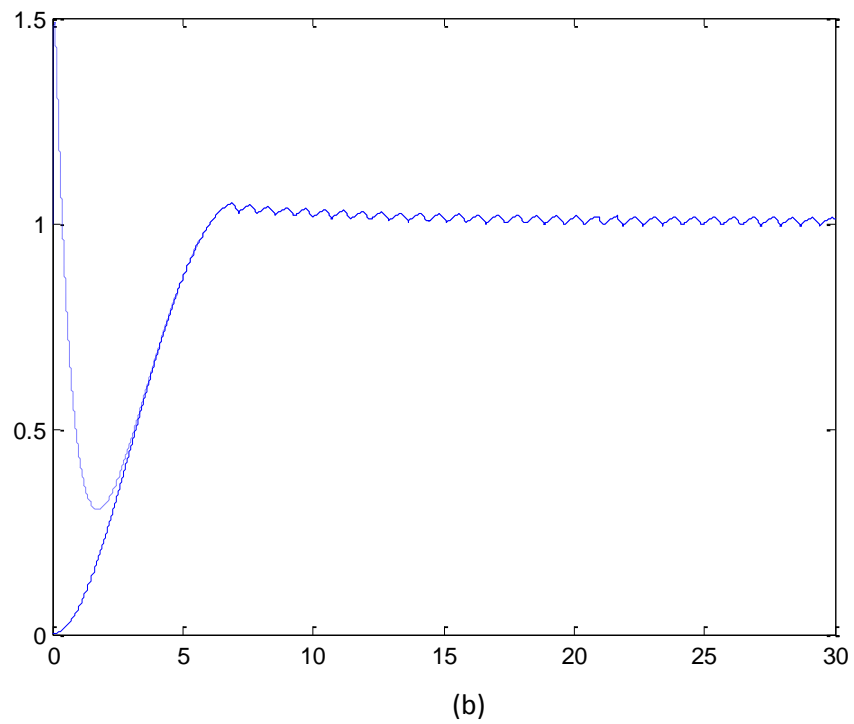
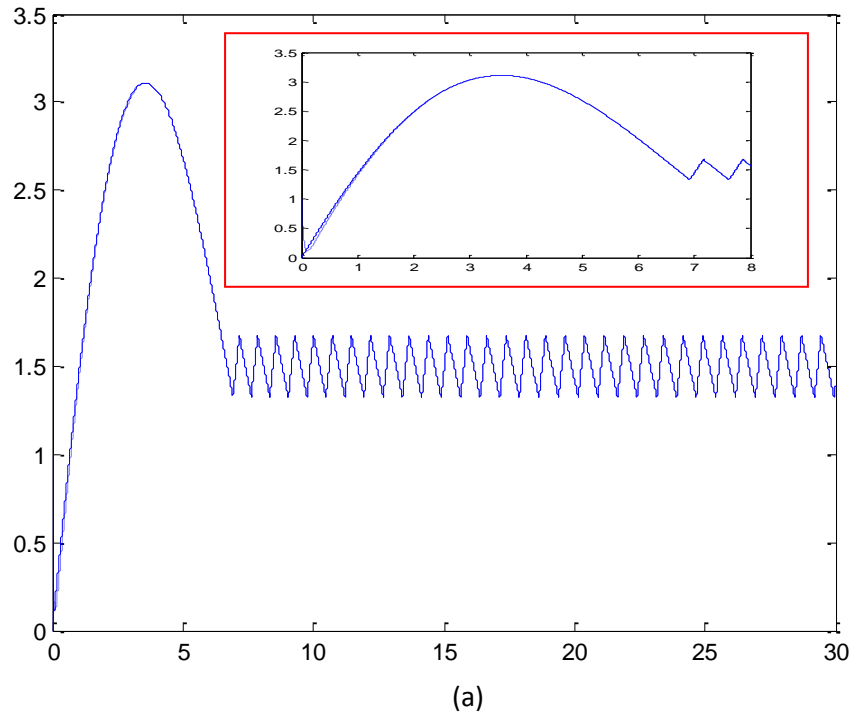


Fig. 5.6 : Courant d'inductance et son estimé en (a), tension de sortie et son estimé en (b); avec des conditions initiales du système différentes de celles de l'observateur (test en boucle ouverte de l'observateur).

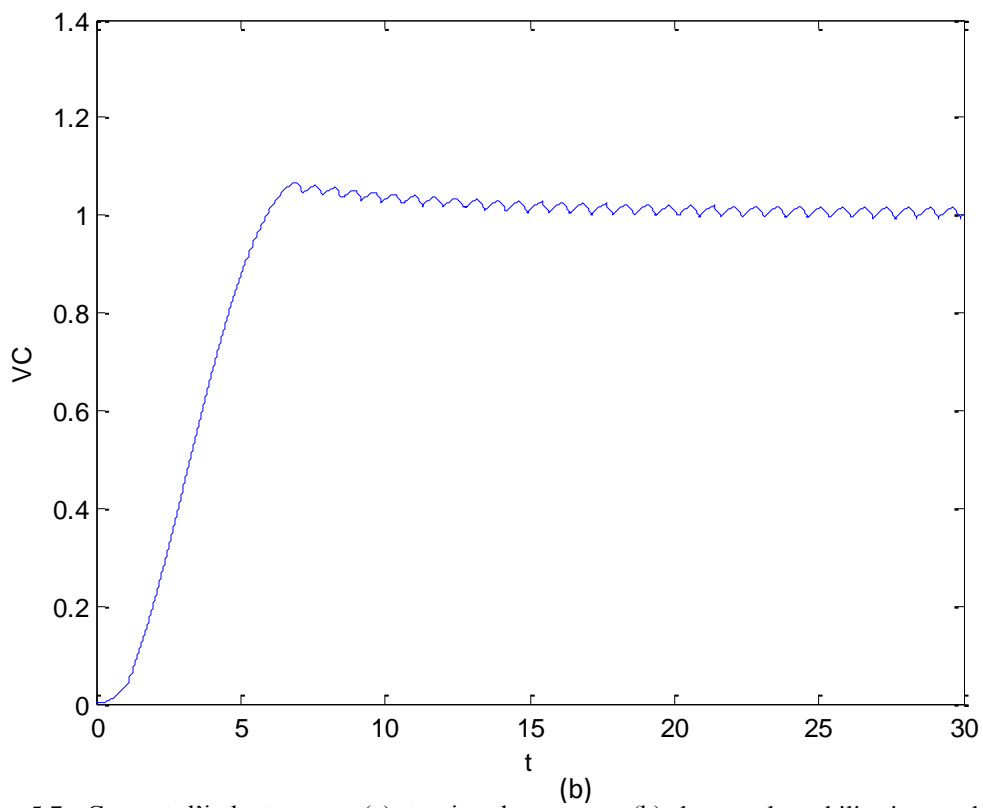
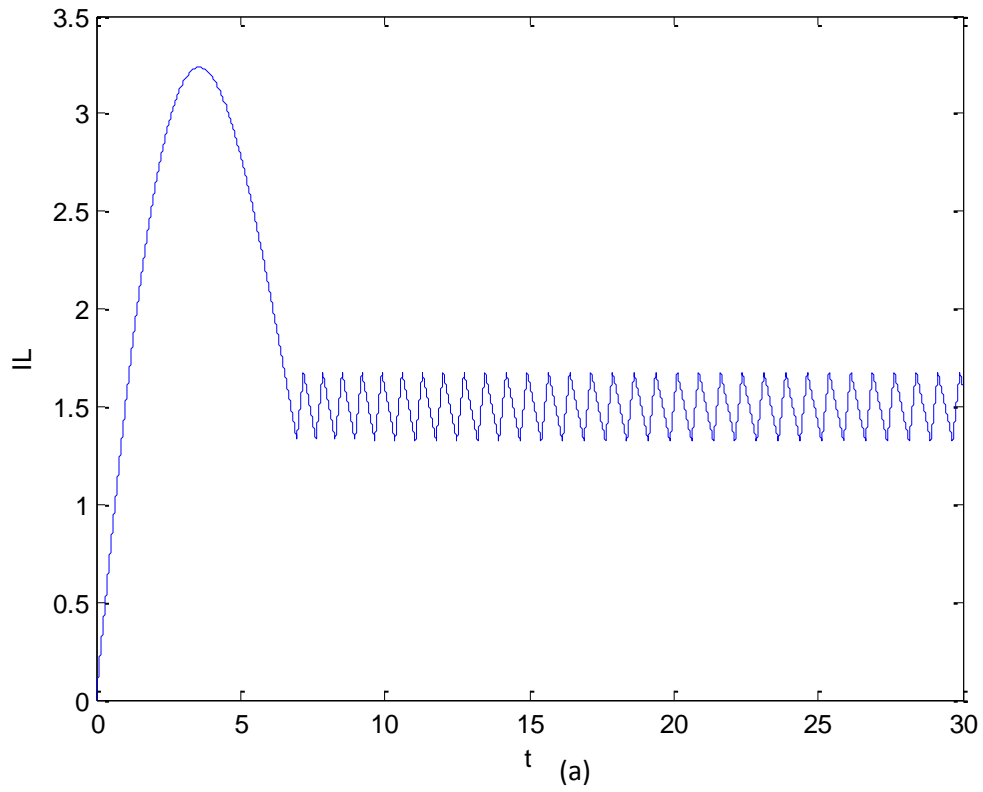


Fig. 5.7 : Courant d'inductance en (a), tension de sortie en (b); lorsque la stabilisation est basée sur les états estimés (test en boucle fermée de l'observateur).

5.5. Analyse des exemples de convertisseurs étudiés :

Les exemples de circuits Boost et Buck considérés, sont bien conçus et repris à partir des exemples d'applications dans la référence [59]. Néanmoins, certains aspects d'analyse liés aux paramètres des convertisseurs et leurs modes de fonctionnement sont brièvement discutés dans le paragraphe suivant.

Usuellement, dans la conception des convertisseurs DC/DC à commutations, à partir d'une tension de sortie désirée et de la nature de la source d'énergie disponible, une gamme de fréquence de commutation et des valeurs nominales pour la tension d'entrée et la charge sont suggérées [27]. En pratique, ces valeurs nominales peuvent varier, des fluctuations de la source de tension et de la charge respectivement de $\pm 20\%$ et de 0 à 100% sont prévues.

En général, ces convertisseurs sont caractérisés par trois modes de fonctionnements valides, chacun est associé à des dynamiques continues linéaires et certaines contraintes résultantes de la topologie utilisée. En particulier, la variable de contrôle (rapport cyclique) est limitée entre zéro et un, le courant d'inductance (dans le mode continu) doit être non négatif. D'autres contraintes additionnelles peuvent être imposées, telles que les mesures de sécurité, limitation du courant de mise sous tension ou des contraintes pour garantir des commutations douces.

Cependant, en pratique on préfère toujours, un courant d'inductance avec le minimum d'ondulation afin d'éviter la saturation magnétique, une charge qui ne dépend pas du rapport de conversion pour éviter sa régulation, de façon que le troisième mode correspondant au mode discontinu est à écarter [27][59]. Par suite, seulement deux modes de fonctionnements sont considérés pour de tels circuits. Ce qui peut être achevé par un choix approprié des valeurs de L et C pour forcer le fonctionnement en mode de conduction continu CCM. L'étage LC constitue un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = 1/2\pi LC$ qui doit être choisie suffisamment petite devant la fréquence de commutation de façon que seulement la composante continue puisse passer. Dans le cas où l'inductance et la capacité sont idéales, le filtre élimine les harmoniques des commutations sans perte de puissance. Ainsi, le convertisseur produit une tension continue dont l'amplitude est contrôlable par le rapport cyclique.

Le calcul mathématique [55] permet de trouver la valeur critique (limite) de l'inductance qui sépare les deux modes de conduction :

$$\begin{cases} L \geq L_{\text{critique}} & \text{pour (CCM).} \\ L < L_{\text{critique}} & \text{pour (DCM).} \end{cases}$$

Par exemple en se référant au circuit Boost idéal, pour $T_s = 1/f_s$ avec f_s fréquence de commutation, P_{in} puissance d'entrée, E et V sont respectivement les tensions d'entrée et de sortie ; la valeur critique de l'inductance est donnée par [55]:

$$L_{\text{critique}} = \frac{(E)^2 T_s}{2P_{\text{in}} V} \left(1 - \frac{E}{V}\right)$$

Dans ce cas, la conception exige que le convertisseur fonctionne en CCM pour toutes les conditions de travail, donc la condition $L \geq L_{\text{critique}}$ doit être satisfaite. À partir de l'expression ci-dessus, on remarque que pour ce type de convertisseur, la plus grande valeur de L_{critique} est obtenue lorsque la valeur de P_{in} est minimale et celle de E est maximale, cette valeur représente le pire cas pour le fonctionnement en CCM.

Cependant, dans notre méthode de stabilisation pratique la fréquence de commutation ne peut être prédéterminée. Une sélection de valeur moyenne estimée pour f_s qui peut être grande conduit à une petite valeur pour T_s ce qui permet une large gamme pour le choix de l'inductance L et favorise le mode CCM pour ce convertisseur i.e. il est donc possible de

choisir une petite valeur de L (ce qui réduit le coût du convertisseur) en opérant toujours en mode CCM. Une fois L choisie, une valeur de C peut être déduite.

On doit noter que l'approche proposée peut être classée comme méthode à fréquence de commutation fixe. Une fréquence de commutation variable est considérée comme un inconvénient pour les convertisseurs DC-DC spécialement à cause des interférences électromagnétique EMI [27][53]. Comme c'est déjà mentionné, nous n'avons pas d'accès direct au rapport cyclique et la fréquence de commutation ne peut être prédéterminée ni postérieurement calculée. Néanmoins, selon les résultats de simulation, en régime établi, les deux exemples de convertisseurs fonctionnent à un rapport cyclique quasi-constant et une fréquence de commutation moyenne presque constante. Par conséquent cet effet indésirable est fortement réduit.

Exemple 5.2 : convertisseur multicellulaire ($k=2$)

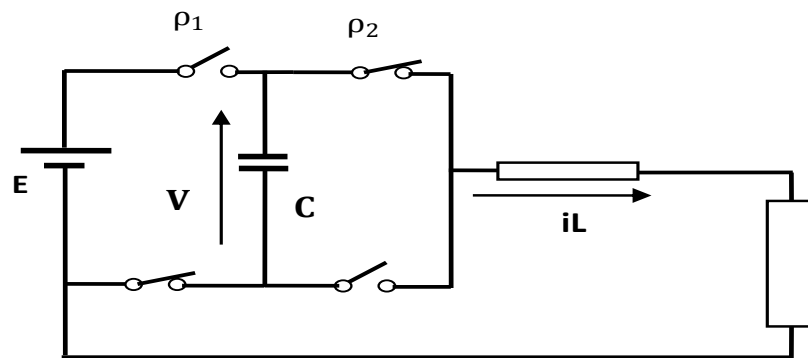


Fig. 5.8. Circuit Simplifié électrique du convertisseur à deux cellules

$$a(\rho) = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{\rho_2 - \rho_1}{L} \\ \frac{\rho_1 - \rho_2}{C_1} & 0 \end{pmatrix}, b(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\rho_1 E}{L} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} iL \\ V_C \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}$$

$E=1500V$, $R=10\Omega$, $L=0.001H$, and $C_1=C_2=0.00004F$.
Selected reference: $iL_0=60A$, $V_{C0}=E/2=750V$.

Notre approche est parfaitement adaptée au contrôle et observation des convertisseurs multicellulaires (à plus de deux modes). Contrairement aux systèmes bimodaux, elle présente de très bonnes performances de robustesse vis-à-vis des fluctuations de la source et de la charge pour les circuits multicellulaires.

Les résultats de simulation représentés dans la figure 5.9 montrent bien que l'approche de commande permet de stabiliser la tension flottante V_C et le courant iL au point désiré avec une grande précision. La même figure ci-dessous confirme aussi la bonne qualité du multi-estimateur où une convergence rapide des erreurs d'estimation est observée. D'autre part, nous avons représenté dans la figure 5.10 les trajectoires du système (V_C , iL) obtenues en boucle fermée d'abord pour l'approche de commande seule c.à.d. sans l'utilisation de l'observateur fig 5.10-a puis celle du convertisseur lorsque la stabilisation est basée sur les états estimés fig 5.10-b ; et enfin l'habilité du multi-estimateur de piloter le système même dans le pire cas où celui-ci démarre de condition initiale différente de celle du convertisseur fig 5.10-c.

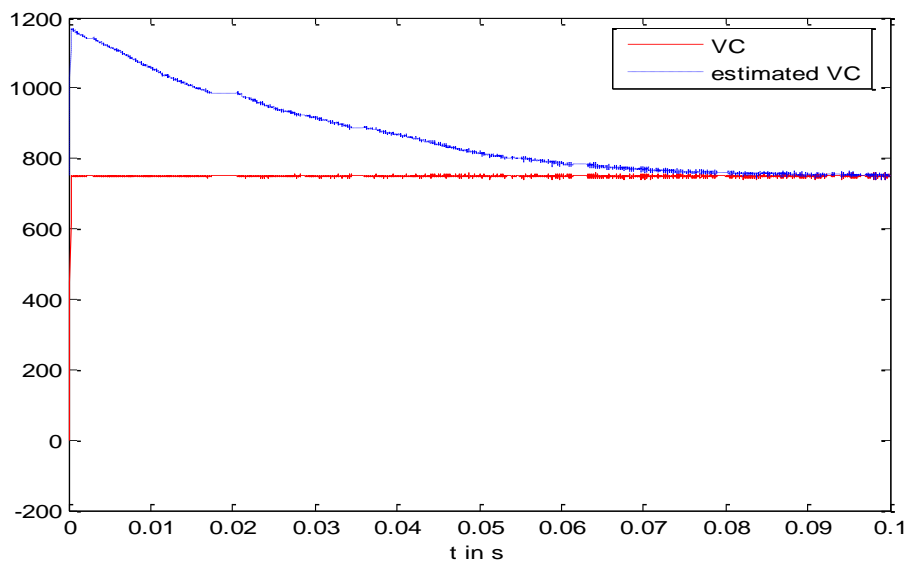
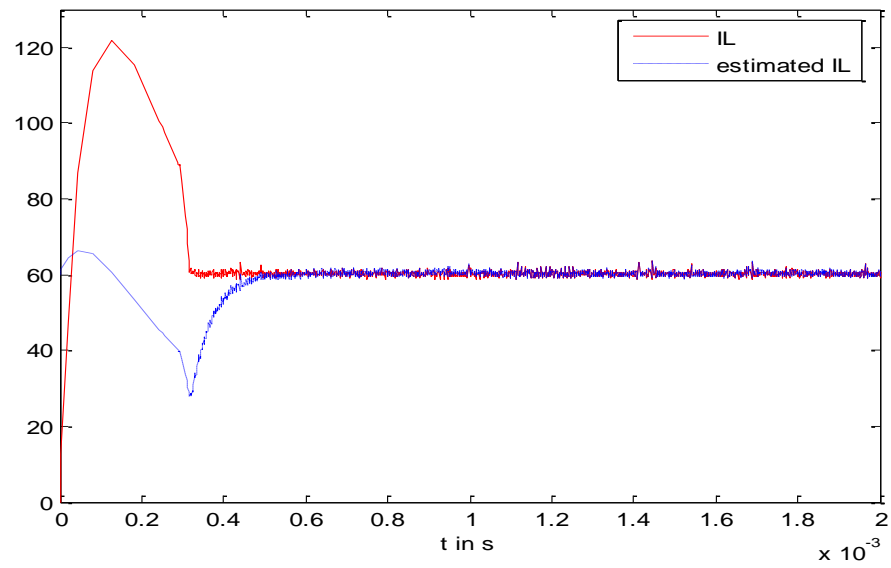


Fig. 5.9. Courant d'inductance et son estimé en (a), tensions VC et son estimé en (b) pour des conditions initiales nulles.

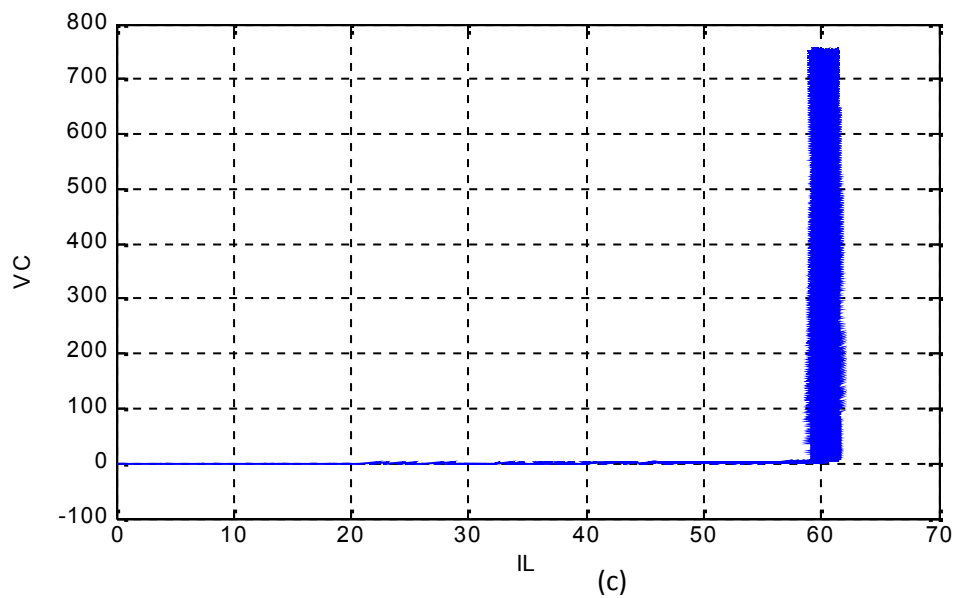
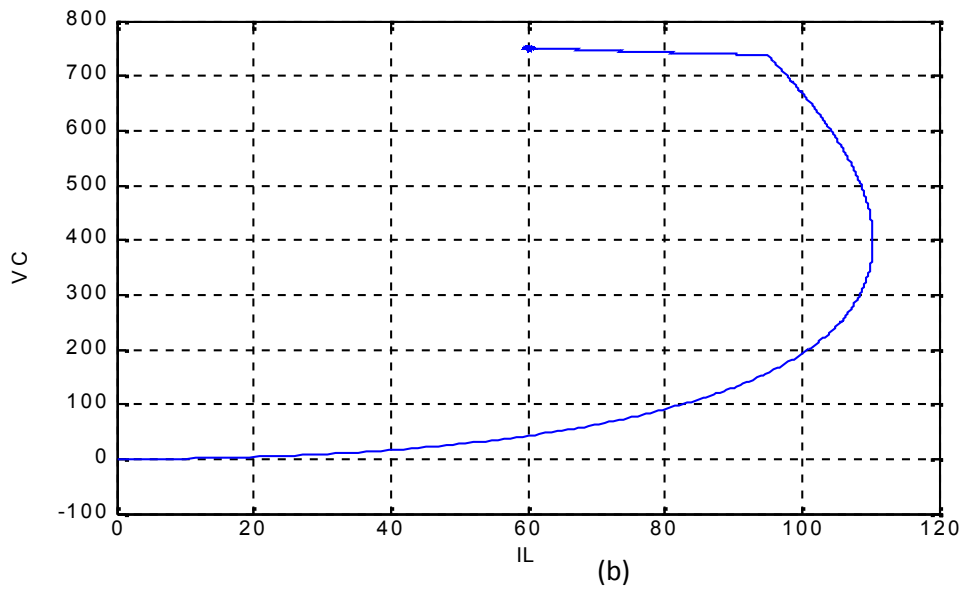
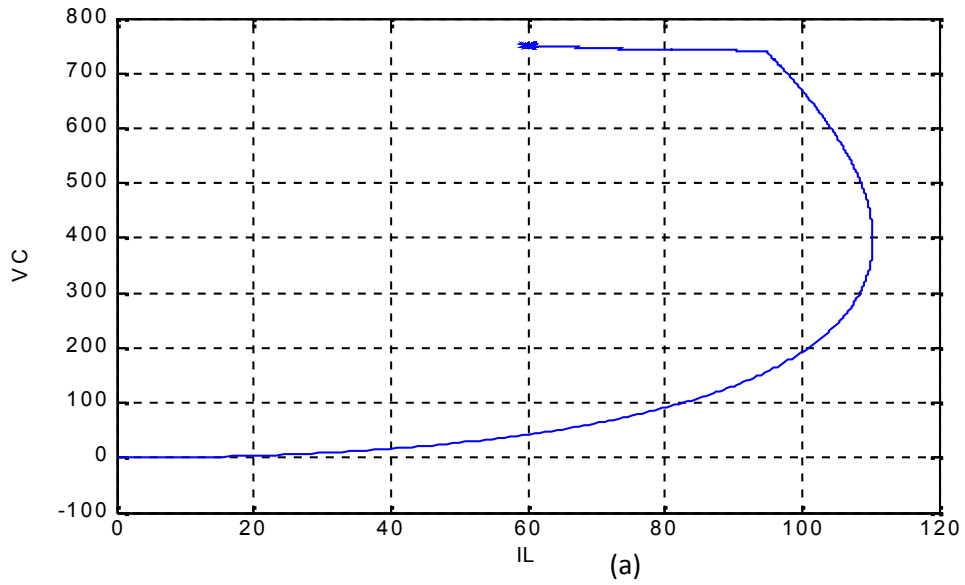


Fig. 5.10 : Trajectoire de la sortie du convertisseur bicellulaire sans l'utilisation d'observateur (a), stabilisation à base du multi-estimateur lorsque les deux systèmes partent de la même condition nulle en (b) et en (c) lorsque le convertisseur part de zéro alors que l'observateur part du point désiré $(60 \ 750)^t$.

Exemple 5.2 : convertisseur multicellulaire (k=3) [59]

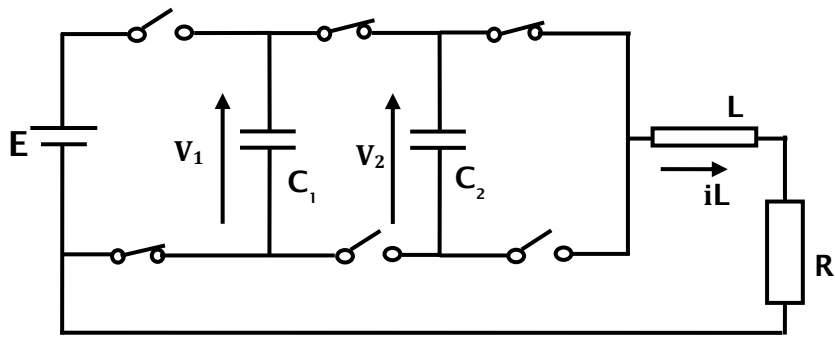


Fig. 5.11. Circuit Simplifié électrique du convertisseur multicellulaire.

$$a(\rho) = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{\rho_2 - \rho_1}{L} & \frac{\rho_3 - \rho_2}{L} \\ \frac{\rho_1 - \rho_2}{C_1} & 0 & 0 \\ \frac{\rho_2 - \rho_3}{C_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, b(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\rho_1 E}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} iL \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}.$$

$R=20\Omega$, $E=90V$, $L=0.075H$, and $C_1=C_2=0.001F$.

Le point de fonctionnement sélectionné est donné par: $iL_0=2A$, $V_{10}=E/3$, $V_{20}=2E/3$.

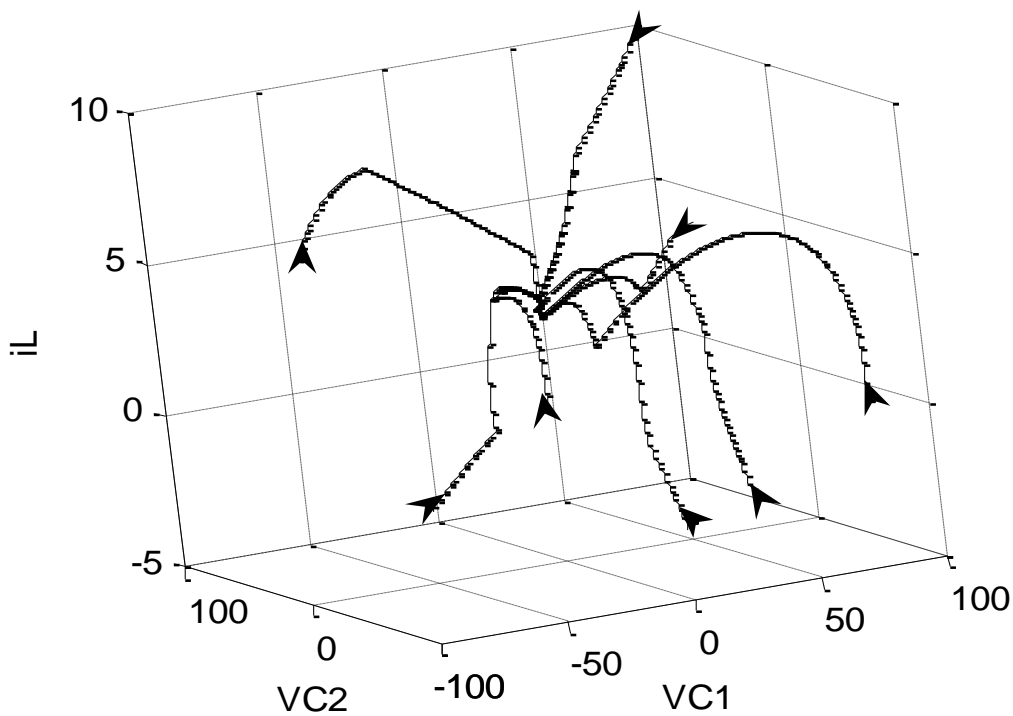


Fig. 5.12. Courant d'inductance iL en fonction des tensions v_1 et v_2 pour différentes conditions initiales

Ce circuit possède 8 modes ($2^3 = 8$) de fonctionnement, à chaque combinaison des commutateurs $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}$ correspond une configuration du circuit i.e. un mode de fonctionnement.

Les régions déterminées sont coniques et éventuellement chevauchées, on notera aussi que nous avons seulement une faisabilité marginale pour le recouvrement de l'espace d'état (voir Remarque importante). De très bons résultats de simulation sont présentés ci-dessous où la figure. 5-12 représente un ensemble d'exécutions de l'algorithme de régulation à partir de différentes conditions initiales. La figure. 5-13, montre la précision de la régulation au point de fonctionnement désiré à partir de conditions initiales nulles. Sachant que le voisinage de tous les points admissibles (points vérifiant l'équilibre moyen) est atteint avec une bonne précision. Noter que pour cette exemple, l'ensemble des points admissibles est caractérisé par un courant maximum $i_{L_{\max}} = E/R = 4.5A$ et un choix arbitraire pour les tensions V_1 et V_2 . Ces résultats confirment que l'approche proposée est intéressante pour le cas général des systèmes commutés affines par morceaux PWA. Pour les faibles valeurs du courant de référence, de grandes variations de la charge résistive et de la tension source n'affectent pas les sorties du convertisseur voir figure 5-14. Cependant, lorsque la valeur du courant de référence sélectionnée est élevée, la variation du courant due à celle de la charge est visible sans toutefois que les tensions soient perturbées (restent inchangées) et par suite une bonne régulation en présence de perturbations de charge et de source d'alimentation. Par exemple,

lorsque nous avons sélectionné un point de référence de $\begin{pmatrix} 4 \\ 80 \\ 30 \end{pmatrix}$ avec des perturbations limitées à $\pm 50\%$ de R et E, les tensions ne sont pas affectées mais évidemment le courant change en conséquence voir figure 5-15 où nous avons reporté seulement la courbe du courant.

Les performances du multi-estimateur sont aussi réaffirmées pour les systèmes PWA à plus de deux modes. En effet, les résultats de simulation pour les convertisseurs multicellulaires, sont impeccables pour le test en boucle ouverte/ fermée du multi-estimateur si les deux systèmes partent de la même condition initiale (voir figure 5-16). Cependant, la situation est un peu différente pour le test en boucle ouverte du pire cas i.e. lorsque le système et l'observateur ne démarrent pas des mêmes conditions initiales, une erreur d'estimation constante persiste (voir figure 5-17). Néanmoins, si les deux systèmes partent de conditions initiales proches, l'erreur d'estimation en boucle ouverte reste très faible et elle est surtout réduite en boucle fermée voir (figure 5-18).

En pratique, l'utilité du multi-estimateur est d'éviter les mesures difficiles (ou impossibles) et son rôle principal est de fournir ces informations à la boucle de retour, si on veut que le multi-estimateur développé soit irréprochable même pour le pire cas, un procédé de réinitialisation (RESET) simultanée des deux système peut être prévu

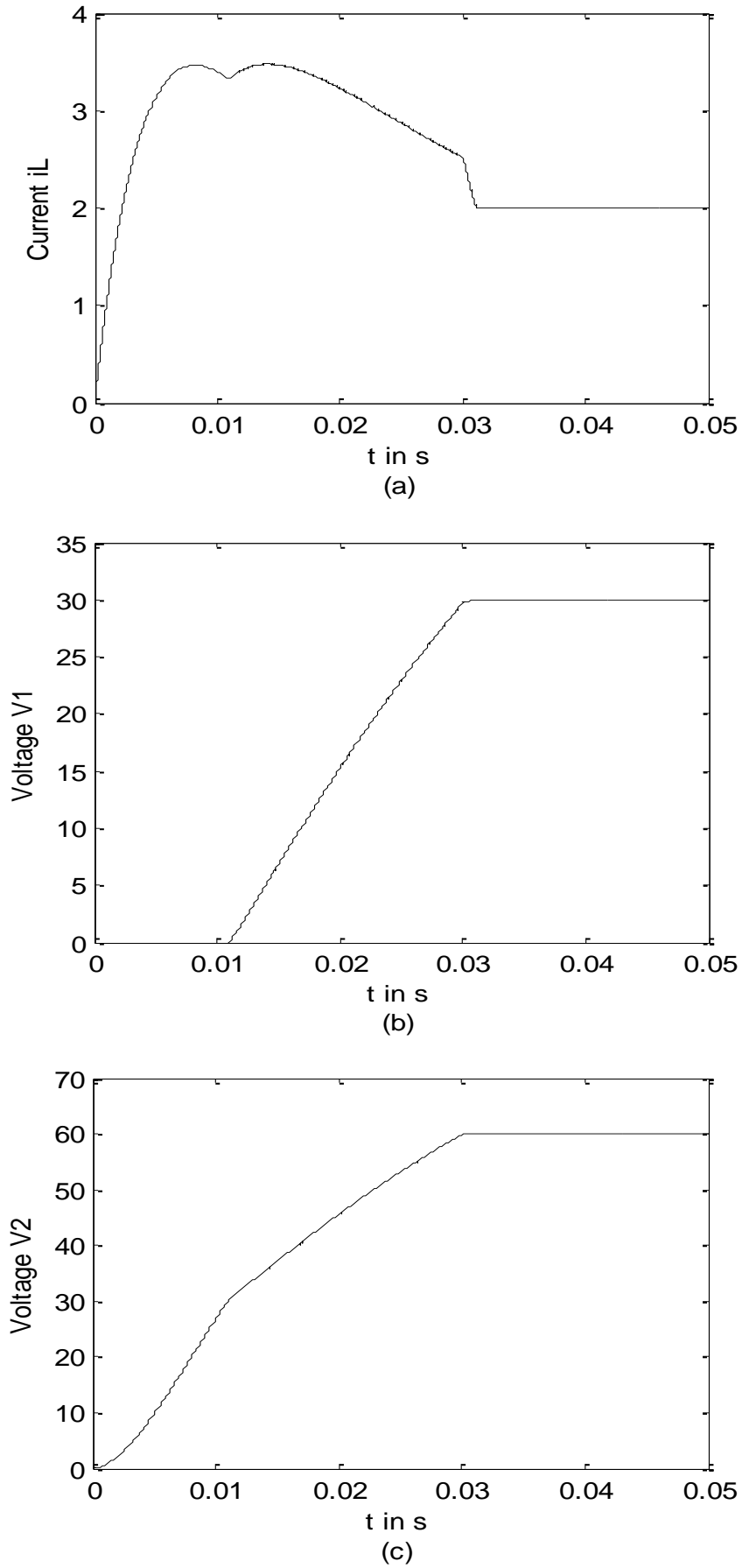


Fig. 5.13. Courant d'inductance (a), tensions v_1 (b) et v_2 (c) pour des conditions initiales nulles.

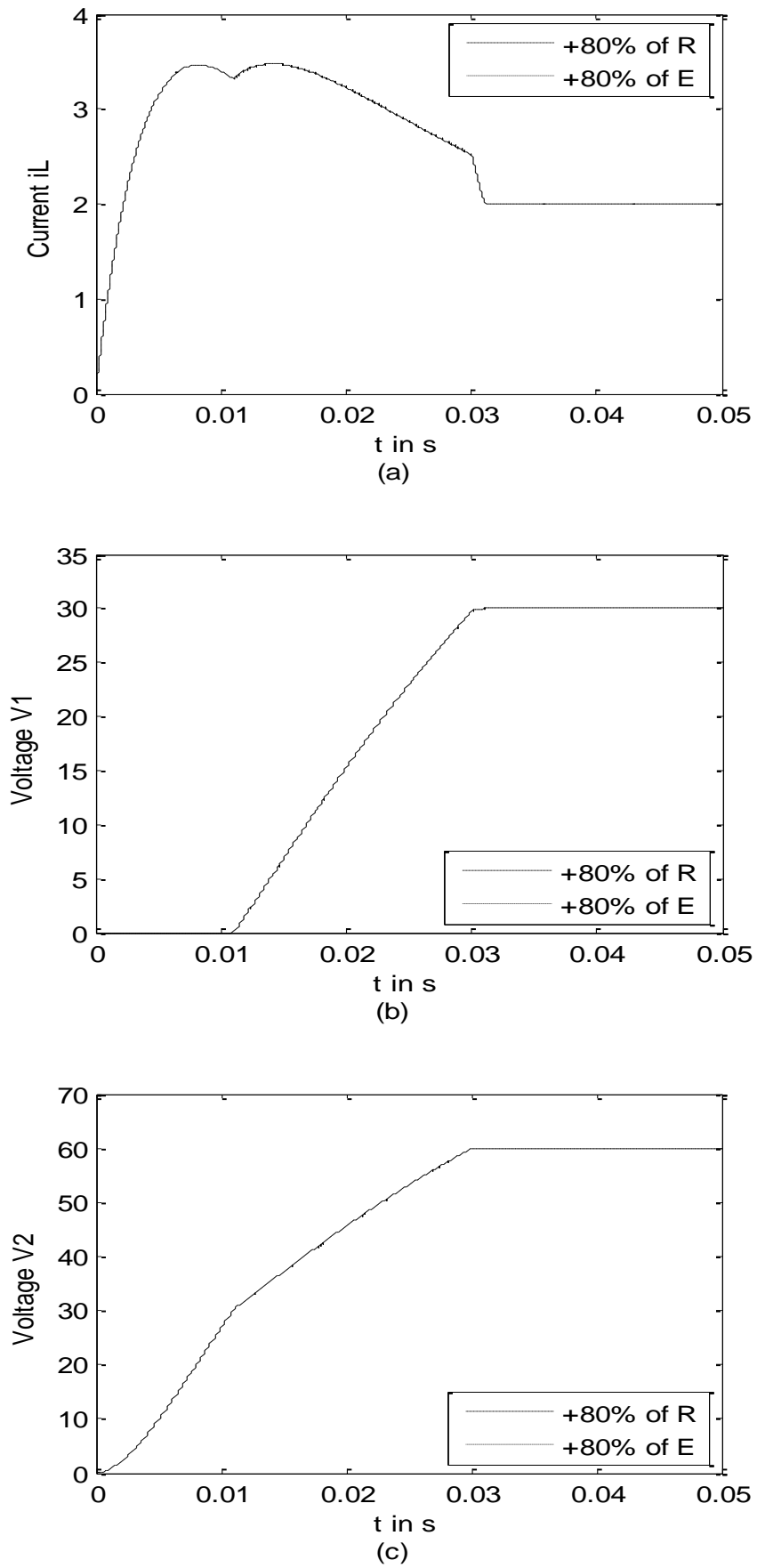


Fig. 5.14 : Des variations de (+80% à $t=0.035$) sur E & R sans effet sur le courant et les tensions.

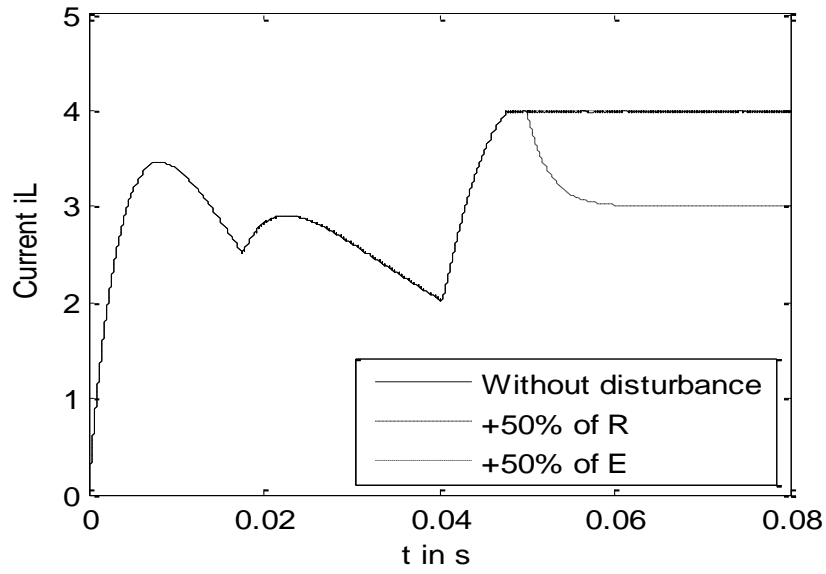


Fig. 5.15 : Courant d'inductance pour des variations de 50% de E&R(à t=0.05 pour une référence de $\begin{pmatrix} 4 \\ 80 \\ 30 \end{pmatrix}$).

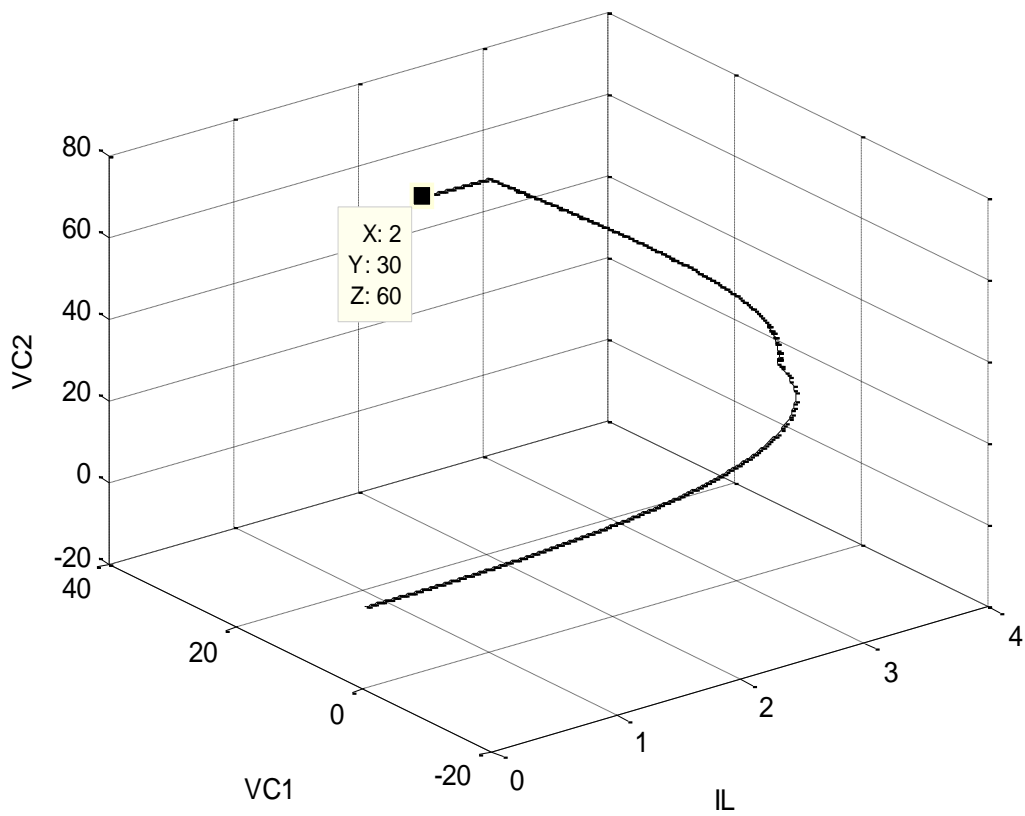


Fig. 5.16 : Sorties du convertisseur multicellulaire commandé à base du multi-estimateur pour les mêmes conditions initiales nulles (test en boucle fermée).

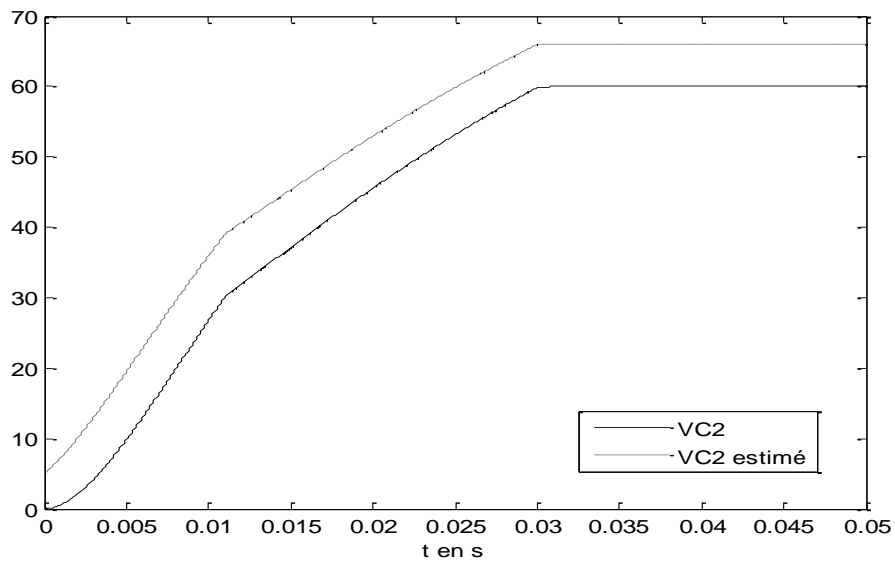
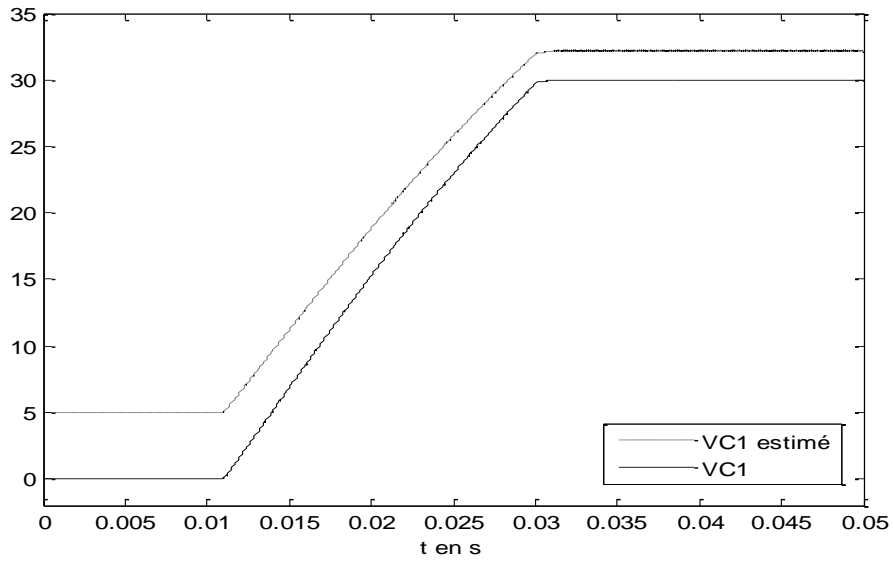
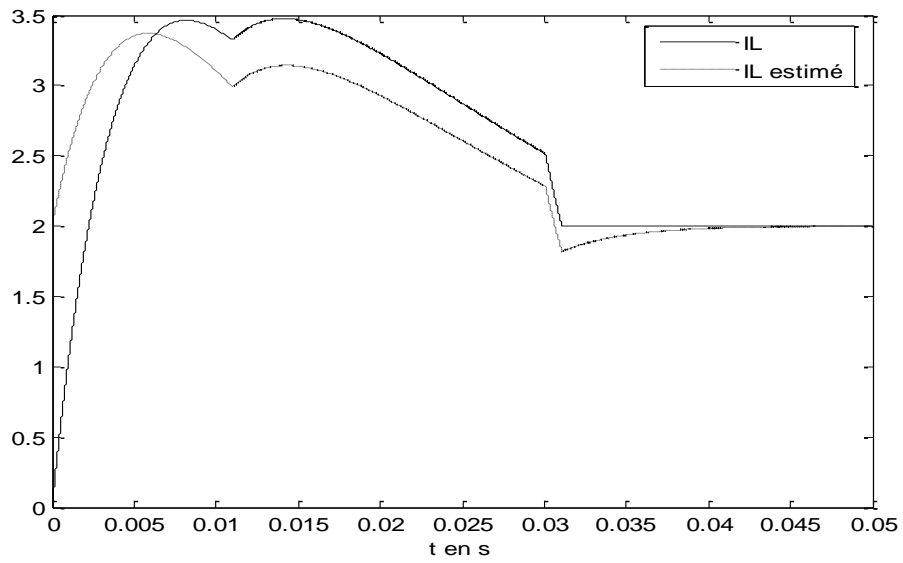


Fig. 5.17 : Sorties du convertisseur multicellulaire /multi-estimateur pour différentes conditions initiales (test en boucle ouverte)

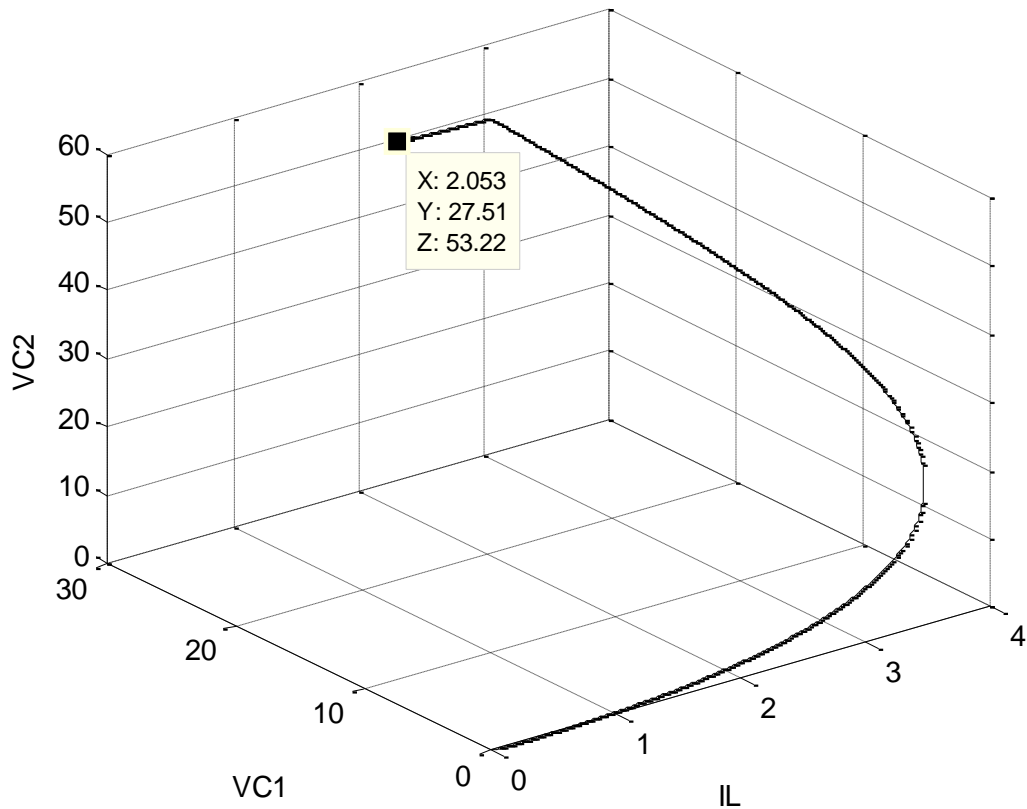


Fig. 5.18 : Trajectoire de la sortie du convertisseur multicellulaire commandé à base du multi-estimateur lorsque les deux systèmes partent de conditions initiales différentes

5.8. Conclusion :

Dans ce chapitre d'applications, on notera d'abord que la simulation de plusieurs autres exemples de convertisseurs (résultats non reportés) n'a décelé aucune anomalie par rapport aux résultats présentés. En effet, les bons résultats de simulation obtenus pour des exemples théoriques variés sont très prometteurs pour la commande par commutations ainsi que pour le multi-estimateur développé, ce qui confirme le bon sens des démarches mathématiques et justificatifs théoriques fournis. En ce qui concerne l'application de la méthodologie aux convertisseurs DC/DC, les bons résultats ne doivent pas être altérés par le dépassement du courant d'inductance dans le régime transitoires et la prolongation du temps de réponse du Buck non idéal (voir figure 5.4-c). Ces paramètres peuvent être facilement réglés par l'insertion (dans les LMI) de contrainte de limitation du courant de mise sous tension. Le seul problème réel que nous avons retenu pour les convertisseurs, est celui de la robustesse des topologies à un seul commutateur, en effet, ces circuits sont très sensibles aux variations de la charge et la méthode doit être travaillée davantage pour une éventuelle amélioration. Dans le pire cas une boucle de régulation externe peut être utilisée.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

CONCLUSION GÉNÉRALE

Il est bien connu que les systèmes PWA constituent la classe des systèmes commutés la plus importante en pratique pour des raisons déjà évoquées. Les récentes investigations liées à ces systèmes se sont concentrées essentiellement sur l'obtention de modèles PWA et le développement de toolbox adapté (Huggland, Morari,...) ainsi que sur l'amélioration des algorithmes de résolution associés sans toutefois de réel progrès dans les approches de commande et d'observation. Cela est peut-être dû aux difficultés inhérentes à ce genre de systèmes. À parts, les travaux de Michael Johansson et les tentatives de Decarlo et Bolzern, très peu de méthodologies sont d'application générale d'autant moins pour les méthodes de stabilisation pratique à l'exception bien sûr de celle de Xuping Xu. C'est de ce côté-là que provient l'intérêt de nos travaux de thèse, par conséquent une contribution aussi infime qu'elle soit doit être considérée.

Nos travaux ont conduit au développement d'une approche générale de stabilisation pratique des systèmes affines par morceaux (PWA). Les deux variantes proposées dans cette approche constituent une méthode systématique pour la recherche de conditions suffisantes pour la stabilisation pratique autour de point de fonctionnement qui ne représente pas un équilibre commun pour les systèmes PWA. Le caractère systématique de la méthodologie lui permet une applicabilité on-line. L'extension de la théorie de Lyapunov à ces systèmes nous a permis de contourner le problème généralement rencontré lors de l'augmentation de la dimension de l'espace d'états. Cette augmentation de l'espace de travail nous paraît nécessaire à cause de la présence du terme affine dans les systèmes PWA qui complique énormément la manipulation des formes quadratiques. Toutes les méthodes de commande utilisées jusqu'à maintenant ont reconnu que les trajectoires de ces systèmes ne peuvent converger vers le point de fonctionnement désiré mais plutôt à un certain voisinage de ce dernier sans toutefois chiffrer la distance par rapport au point désiré. L'approche que nous avons proposé calcule exactement les coordonnées du point de convergence et par suite fournit l'erreur commise avec une très grande précision. En plus de cette nouveauté, notre approche nous paraît simple et directe et surtout moins conservative par rapport aux méthodes proposées. Cependant, nous avons rencontré quelques difficultés dans le traitement du phénomène du mode glissant éventuellement généré par la stratégie utilisée pour le contrôle des commutations. En général, nous pensons que ce problème est sans issue dans le cas de la synthèse des systèmes PWA, puisqu'il faut déterminer toutes les régions adjacentes en utilisant toutes les combinaisons possibles d'adjacence pour des régions ainsi que pour une loi de commutation toutes inconnues. Nous avons déjà signalé que ce phénomène ne peut être traité que dans le cas bimodal, par conséquent, l'utilisation de l'hystérésis pour le cas général est justifiée en cas où le balancement entre les deux balles de stabilité pratique ne suffit pas de limiter la fréquence de commutation. Nous avons aussi rencontré un autre problème purement mathématique dans le recouvrement de tous l'espace augmenté juste utile par les régions à synthétiser, en effet, puisque nous avons synthétisé une partition du domaine juste utile « \mathcal{X} » qui représente un sous domaine de l'espace augmenté \mathbb{R}^{n+1} , alors que le seul moyen disponible pour assurer le recouvrement de ce domaine est d'utiliser une condition plus forte qui assure le recouvrement de tous l'espace \mathbb{R}^{n+1} . Cela nous a posé un grand problème de faisabilité des LMI « BMI » développés, nous nous sommes contentés de faisabilité marginale dans ce cas. En effet, plusieurs problèmes théoriques ou purement mathématiques non résolus dans les systèmes commutés (PWA) et hybrides restent inabordables, nous avons eu par exemple un autre problème dans la formulation LMI des conditions permettant d'imposer les comportements cycliques. L'utilisation de l'approche proposée à la stabilisation par commutations à des points de fonctionnement représentant les points d'équilibre moyen pour

des circuits de conversion DC/DC simplifiés (à composants parfaits) a conduit à de très bons résultats de simulation. L'application à des circuits de conversion DC/DC plus réalistes (à composants non parfaits) a conduit à de bonnes performances et comparables à celles obtenues par les groupes experts du domaine. En effet, L'applicabilité de la méthodologie proposée en électronique de puissance a montré une grande efficacité et en particulier pour tous les exemples de convertisseurs multicellulaires. Nous signalons l'importance de la notion de points à énergie minimale utilisé en tant que points de fonctionnements possibles pour la stabilisation par commutations de tels circuits.

L'applicabilité de l'approche de commande proposée au cas général des systèmes PWA à plusieurs dynamiques (plus de deux) est un grand avantage de la méthodologie suivie. D'autant plus, la méthodologie a été enrichie par un observateur commuté adéquat qui a démontré son efficacité de piloter tous les systèmes PWA et notamment les convertisseurs multicellulaires. En effet, la convergence des erreurs d'estimation est garantie en boucle fermée même pour le pire cas de conditions initiales différentes mais proches. Par conséquent, les résultats d'estimation et/ou de commande basée sur l'observateur sont très excellents et garantis si une réinitialisation synchrone est prévue pour les deux systèmes. L'avantage de notre observateur commuté est l'absence de contrainte conservatrice tel que le temps de séjour, ce dernier représente une contrainte majeure dans toutes les méthodes d'estimation des tensions intermédiaires des convertisseurs multicellulaires. Des résultats préliminaires sont aussi obtenus pour la stabilisation autour des (points du voisinage) points d'équilibre moyen, ce problème n'a jamais été traité pour les systèmes PWA et sa formulation mathématique nécessite une réelle justification théorique. Nous pensons aussi à une implémentation sur DSP de nos algorithmes afin de faciliter leurs utilisations en tant que systèmes embarqués. Ce sont les extensions futures sur lesquelles nous travaillons pour compléter l'approche proposée avant de l'essayer sur des exemples de convertisseurs réels. Noter que les performances liées aux dépassements du courant d'inductance dans le régime transitoires (voir figure 5.4-c) et la prolongation du temps de réponse peuvent être facilement améliorées par l'insertion (dans les LMI) de contrainte de limitation du courant de mise sous tension.

BIBLIOGRAPHIES

Bibliographie :

- [1] M. Ahmadi, H. Mojallali, R. Wisniewski, R. I. Zamanabadi : Robust stability analysis of nonlinear switched systems with Filippov solutions. In: 7th IFAC symposium on robust control design. Aalborg, Denmark; 2012.
- [2] A. Alessandri, P. Coletta: Switching observers for continuous-time and discrete time linear systems, In Proc. of the ACC., Arlington, Virginia, 2516–2521, 2001.
- [3] R. Alur, C. Courcoubetis, T. Henzinger, & P.H. Ho: Hybrid Automata: An Algorithmic Approach to the Specification and Verification of Hybrid Systems. Pages 209–229 of: Hybrid Systems. Lecture Notes in Computer Science, vol. 736, 1993, Springer
- [4] Antoine Girard. Analyse Algorithmique des Systèmes Hybrides. thèse Phd, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 2004.
- [5] J. Aubin, A. Cellina: Differential Inclusions: Set-Valued Maps And Viability Theory, Number 364 in Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [6] S. Azuma, J. Imura, T. Sugie, Lebesgue piecewise affine approximation of nonlinear systems, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 4 (2010) 92-102.
- [7] A. Bacciotti. Stabilization by means of state space depending switching rules. Systems & Control Letters, 53(3-4), pp. 195–201, 2004.
- [8] Babaali, M.: Switched linear systems: Observability and observers, PhD Thesis, Georgia Institute of Technology, School of Engineering, USA, 2004.
- [9] Balluchi, A.; Benvenuti, L.; Di Benedetto, M. D.; Sangiovanni-Vincentelli, A. L.: Design of observers for hybrid systems, Lect. Notes in Computer Science, 2289, 76-89, 2002.
- [10] A. Bemporad, G. Ferrari-Trecate, M. Morari, Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems, IEEE Transaction on Automatic Control, 45, 2000, 1864–1876.
- [11] F. Blanchini. Nonquadratic Lyapunov functions for robust control. Automatica, 31(3):451-461, 1995.
- [12] P. Bolzern, W. Spinelli, Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point, in: Proceedings of the American control conference, 2004, pp.3890–3895.
- [13] J. Buisson, H. Cormerais, and P. Richard, “Analysis of the bond graph model of hybrid physical systems with ideal switches,” Journal of Systems and Control Engineering, vol. 216, no. 11, pp. 47–72, 2002.
- [14] J. Buisson, H. Cormerais, M. Zainea, H. Gueguen, and E. Godoy. Formal approach to compute hybrid automata model for linear physical systems with switches. In Proceedings of the 2004 IEEE Conference on Computer Aided Control Systems Design, volume 1, pages 47–52, Taipei, Taiwan, 2004.
- [15] J. Buisson, H. Cormerais, P.Y. Richard: On the stabilisation of switching electrical power converters, In Hybrid Systems: Computation and Control, ser. LNCS, M. Morari and L. Thiele, Eds. Springer, 3414, 184–197, (2005).
- [16] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, H. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM studies in applied mathematics. SIAM, Philadelphia, P.A. 1994.
- [17] S. Boyd and L. Vandenberghe. Convex optimization with engineering applications. Lecture Notes, Information Systems Laboratory. Stanford University, 2001.
[http : //www. stanford. edu/class/ee364](http://www.stanford.edu/class/ee364)

- [18] M. S. Branicky. General hybrid dynamical systems: Modeling, analysis, and control. In R. Alur, T. Henzinger, and E. D. Sontag, editors, *Hybrid Systems III Verification and Control: Lecture Notes in Computer Science*, volume 1066, pages 186–200. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [19] P. Collins: Generalized hybrid trajectory spaces, In *Proc. 17th Int. Symp. Mathematical Theory of Networks and Systems*, Kyoto Japan, P. 2101-2109.
- [20] P. Collins, J. H. van Schuppen: Observability of Piecewise-Affine Hybrid Systems, In *Hybrid Systems: Computation and Control*, In *Lecture Notes in Computer Science*, R. Alur and G. J. Pappas, Eds., vol. 2293, Springer-Verlag, 265-279, 2004.
- [21] J. Cortes. Discontinuous Dynamical Systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 28(3), 36–73, 2008.
- [22] W.P. Dayawansa and C.F. Martin. A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(4), pp. 751–760, apr. 1999.
- [23] R. DeCarlo, M. Branicky, S. Pettersson, B. Lennartson, Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems, in: *Proceedings of the IEEE*. 88 (7), 2000 1069–1082.
- [24] De Schutter, W.P.M.H. Heemels, *Modeling and Control of Hybrid Systems*, Lecture Notes of the DISC Course October 2006, Delft Center of Systems and Control, Delft University of Technology, Mekelweg 2, 2628 CD Delft, The Netherlands, <http://www.dsc.tudelft.nl>
- [25] Didier. Henrion. *Stabilité des Systèmes linéaires incertains à commande contrainte*, thèse Phd, Institut National des sciences appliquées Toulouse, France, 1999.
- [26] Emmanuel Moulay. *Une Contribution À L'étude De La Stabilité en temps Fini et de la stabilisation*. thèse Phd, l'université des sciences et technologie de Lille, France, 2005
- [27] R. Erickson and D. Maksimovic. *Fundamentals of Power Electronics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, second edition, 2001.
- [28] Mme Fatima El Guezar, *Modélisation Et Simulation Des Systèmes Dynamiques Hybrides Affines Par Morceaux: Exemples En Électronique De Puissance*, thèse Phd, l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 2009.
- [29] Ferrari-Trecate, G.; Mignone, D.; Morari, M.: Moving horizon estimation for hybrid systems, *IEEE Trans A.C.*, 47, 1663-1676, 2002.
- [30] L. Fridman and A. Levant. Sliding modes of higher order as a natural phenomenon in control theory. In F. Garofalo and L. Glielmo, editors, *Robust Control via Variable Structure & Lyapunov Techniques*, volume 217 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 107–133. Springer Verlag, 1996.
- [31] R. Goebel, R.G. Sanfelice, and A.R. Teel. Hybrid dynamical systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 29(2), pp. 28–93, 2009.
- [32] J.M. Goncalves, *Constructive Global Analysis of Hybrid Systems*, Massachusetts Institute of Technology, Phd thesis 2000.
- [33] J.M. Goncalves, A. Megretski, MA. Dahleh, Global analysis of piecewise linear systems using impact maps and surface Lyapunov functions. *IEEE Transaction on Automatic Control* 2003;48(12):2089–106.
- [34] Guy Cohen. *Convexité Et Optimisation*. École Nationale des Ponts et Chaussées et INRIA, Edition 2000 & correction 2006.
- [35] A. Hassibi, S. Boyd, Quadratic Stabilization and Control of Piecewise-Linear Systems, in: *Proceedings of the American Control Conference*, 1998, pp.3659-3664.
- [36] J. Hespanha, Stabilization through hybrid control, in *UNESCO Encyclopedia of Life Support Systems*, 2004, www.ece.ucsb.edu/~hespanha/.../6-43-28-7-hy-stab.pdf

- [37] Ye, Hui, Michel, Anthony, & Hou, Ling. 1998. Stability Theory for Hybrid Dynamical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4), 461–474.
- [38] J. I. Imura and A. van der Schaft. Characterization of well posedness of piecewise linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(9):1600-1619, 2000.
- [39] B. Ingalls, E. D. Sontag, and Y. Wang. An infinite-time relaxation theorem for differential inclusions. In *Proceedings of the 2002 American Mathematical Society*, volume 131, pages 487–499.
- [40] M. Johansson, *Piecewise Linear Control Systems: A Computational Approach*, ser. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, M. Thoma and M. Morari, Eds. Springer-Verlag, 284, 2003.
- [41] Julie MÉLIN. Synthèse de lois de commande pour les systèmes à commutations avec contraintes de performances. Phd thèse, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2011.
- [42] D. Kamri, R. Bourdais, J.Buisson, C. Larbes: Piecewise-Affine systems Practical Stabilization: A BMI Approach, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 6, 859–870, 2012.
- [43] D. Kamri, C. Larbes: Observer Based Control for DC/DC converters: Practical Switching Control, *Arab Journal of Science and Engineering (AJSE)*, Arab J Sci Eng (2014), 39, 4089–4102.
- [44] Khalil Al-Shammari, *Filippov's Operator And Discontinuous Differential Equations*, Mathematic Phd thesis 2006, Louisiana State University, USA.
- [45] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., second edition, 1996.
- [46] R. Kuiava, R.A, Ramos, H.R. Pota, L.F.C. Alberto: Practical Stability of Continuous-Time Switched Systems Without a Common Equilibria and Governed by a Time-Dependent Switching Signal, 9th IEEE International Conference on Control and Automation, Santiago, Chile, 2011.
- [47] F. Lamnabhi-Lagaregue, *HandBook of Hybrid Systems Control*, édité by JUNE LUNZE Ruhr-Universität Bochum, Germany 2009.
- [48] J. Leth, Rafael Wisniewski. On formalism and stability of switched systems. *J. Control Theory Appl.* 2012 10 (2) 176–183, DOI 10.1007/s11768-012-0138-3.
- [49] Liberzon, A.S. Morse, Basic problems in stability and design of switched systems, *IEEE Control Systems Magazine* 19 (5) 59–70. 1999.
- [50] Vu, Linh, & Liberzon, Daniel. 2005. Common Lyapunov Functions for Families of Commuting Linear Systems. *Systems and Control Letters*, 54, 405–416.
- [51] H.Lin, P.J. Antsaklis,: Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of Recent Results, *IEEE Trans A.C.*, 54, 2, 308-322, (2009).
- [52] J. Lygros, K.H. Johansson, S. N. Simic, J. Zhang, S. Sastry: Dynamical properties of hybrid automata, *IEEE Transactions on Automatic Control*,48(1) :2–17, 2003.
- [53] S. Mariéthoz and al, Comparison of Hybrid Control Techniques for Buck and Boost DC-DC Converters, *IEEE Transaction on Control systems technology*, 18 (5), 2010 1126 –1145.
- [54] A. N. Michel and B. Hu. Towards a stability theory of general hybrid dynamical systems. *Automatica*, 35:371–384, 1999.
- [55] Mohammad Ahmed: Sliding mode control for switched mode power supplies, PhD Thesis, Lappeenranta University of Technology, Finland, 2004.
- [56] Mohamed Abdallah Trabelsi, *Modélisation et Commande des Systèmes Physiques à Topologie Variable : Application au Convertisseur Multicellulaire*. Phd thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2009.

- [57] A. P. Molchanov and E. S. Pyatnitskii. Lyapunov functions that specify necessary and sufficient conditions for absolute stability of nonlinear systems III. *Automation and Remote Control*, 47:620–630, 1986.
- [58] A.P. Molchanov and Y.S. Pyatnitskiy. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. *Systems and Control Letters*, 13(1) :59–64, 1989.
- [59] Morari, M.; Buisson, J.; de Schutter, B.; Papafotiou, G.: Report on the assessment of hybrid control methods for electric energy management problems, HYCON Deliverable, Tech. Rep. IST contract number 511368, 2006, http://control.ee.ethz.ch/hycon/downloads/free/HYCON_D4a51.pdf
- [60] E.M. Navarro-Lopez: Hybrid modeling of a discontinuous dynamical system including switching control. Available at : <http://www.staff.cs.manchester.ac.uk/~navarro/papers/enavarro-chaos09.pdf>
- [61] Yu. Nesterov and A. Nemirovsky. Interior-point polynomial methods in convex programming, volume 13 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, June 1994.
- [62] Y. Nesterov. *Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course*, volume 87 of *Applied Optimization*. Kluwer, Boston, 2004.
- [63] P. Peleties and R. DeCarlo, Asymptotic stability of m-switched systems using lyapunov-like functions, in *Proc. of the 1991 ACC*, 1991, pp. 1679–1684.
- [64] N. Petit et P. Rouchon, *Automatique : Dynamique et Contrôle des Systèmes*, Polycopier de cours, Centre d’automatique et systèmes, unité mathématique et systèmes, Mines ParisTech, Février 2009.
- [65] S. Pettersson, *Analysis and design of hybrids systems*, PhD Dissertation, Chalmers University, Goteborg Sweden, 1999.
- [66] S. Petterson and B. Lennartson. Stabilization of hybrid systems using a minprojection strategy. In *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, pages 223–228, Arlington, USA, june 2001.
- [67] Pettersson, S.: Synthesis of switched linear systems, In *Proc.42nd IEEE conf. Decision control*, Maui, HW, USA, 5283-5288, 2003.
- [68] Prajna, Stephen, & Rantzer, Anders. 2005. On the Necessity of Barrier Certificates. In: *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*. IFAC.
- [69] P. Riedinger. *Contribution à la commande des systèmes complexes*. HDR de l’Institut National Polytechnique de Lorraine. France, 2010.
- [70] L. Rodrigues, S. Boyd, Piecewise Affine slab systems using convex optimization, *Systems and Control Letters*. 54 (2005) 835-853.
- [71] A.A. Salinas-Varela, G.B. Stan, M.J. Gonçalves, Global Asymptotic Stability of the Limit Cycle in Piecewise Linear versions of the Goodwin Oscillator, Department of Engineering, University of Cambridge, 2008. Available at : www.bg.ic.uk/research/g.stan/IFAC2008.pdf.
- [72] C. Scherer and S. Weiland. *Linear matrix inequalities in control*. DISC courses, Lecture Notes, 1999. Compilation November 2004.
- [73] R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff, and C. King. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Rev.*, 49(4) :545–592, 2007.
- [74] Z. Sun, Stabilizability and insensitivity of switched linear systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 49, no. 7, pp. 1133–1137, Jul. 2004.
- [75] Vidal, R.; Chiuso, A.; Soatto S.; Sastry, S.: Observability of linear hybrid systems, *Hybrid Systems, Computation and Control*, Springer–Verlag, 2623, LNCS, Berlin Heidelberg, 526-539, 2003.
- [76] X. Xu and G. Zhai. Practical stability and stabilization of hybrid and switched systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 50(11) :1897–1903, 2005.

- [77] X. Xu, G. Zhai, and S. He. On practical asymptotic stabilizability of switched affine systems. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, pages 196–208, 2008.
- [78] G. Zhai and A.N. Michel. On practical stability of switched systems. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3488–3493, december 2002.
- [79] G. Zhai, H. Lin, & P. Antsaklis. 2003. Quadratic Stabilizability of Switched Linear Systems with Polytopic Uncertainties. *International Journal of Control*, 76(7), 747–753.
- [80] G. Zhai, Anthony N. Michel. Generalized Practical Stability Analysis Of Discontinuous Dynamical Systems. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, V(14),N(1), pp. 5– 12, 2004, Vol. 14, No. 1.
- [81] Zhang, K. H. Johansson, J. Lygeros, and S. Sastry. Zeno hybrid systems. *Intern. J. Robust Nonlinear Control*, 11:435-451, 2001.
- [82] Zhendong, S.; Ge, S. Shuzhi.: Analysis and synthesis of switched linear control systems, *Automatica*, 41, 181 – 195, 2005.
- [83] Zhendong, S.; Ge, S. Shuzhi.: *Switched Linear Systems: Control and Design*, Springer, 2005.