

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**  
Département de Génie Electrique

**Thèse de Doctorat d'Etat en Electrotechnique**  
Option : Machines Electriques

**Yazid AIT GOUGAM**  
Ing., Magister ENP

## **Thème**

**Modèle inverse et minimisation des ondulations  
de couple des machines synchrones à aimants à fém  
et inductances non sinusoïdales**

Soutenue publiquement le 03 Juin 2007 devant le jury composé de :

M. S. HADDAD	Professeur	UMM Tizi-Ouzou	Président
M. R. IBTIOUEN	Professeur	ENP	Rapporteur
M. O. TOUHAMI	Professeur	ENP	Rapporteur
M. M.O. MAHMOUDI	Professeur	ENP	Examineur
M. S. MEKHTOUB	Maître de Conférences	ENP	Examineur
M. H. ZEROUG	Maître de Conférences	USTHB	Examineur
M. G. OLIVIER	Professeur	EPM Canada	Invité
M. M.BENHADDADI	Professeur CC.	EPM Canada	Invité
M. R. DEBAÏLI	PDG EDIEL EL-Achour		Invité

## Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein du Laboratoire de Recherche en Electrotechnique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, sous la direction de Monsieur Rachid Ibtouen, Professeur à l'ENP. Je tiens à le remercier pour la confiance qu'il m'a témoignée en acceptant de diriger ce travail. Sa disponibilité et ses encouragements durant de longues années m'ont été d'un grand apport pour l'aboutissement de ce travail.

Je exprime aussi, mes remerciements à Monsieur Omar Touhami, Professeur à l'ENP d'avoir co-dirigé cette thèse. Je tiens à le remercier vivement pour sa disponibilité et ses conseils.

Je remercie Monsieur Jean-Paul Louis, Professeur à l'ENS de Cachan pour son aide durant le stage que j'ai effectué au laboratoire Satie de l'ENS de Cachan. Sa contribution scientifique a été très fructueuse dans l'avancement de ce travail.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur Salah Haddad, Professeur à l'Université Mouloud Mameri de Tizi-Ouzou, pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de soutenance.

Que Messieurs Saïd Mekhtoub, Maître de Conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique, Mohand Oulhadj Mahmoudi, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique, et Hocine Zeroug, Maître de Conférences à l'USTHB trouvent, ici l'expression de ma profonde gratitude, pour avoir accepté d'examiner et critiquer cette thèse.

Que Messieurs, Guy Olivier, Professeur à l'Ecole Polytechnique de Montréal, Mohamed Benhaddadi, Professeur Chargé de Cours à l'Ecole Polytechnique de Montréal et Rachid Debaïli, PDG de l'Ediel d'El Achour, acceptent mes sympathiques sentiments pour être les invités d'honneur à l'examen de cette thèse.

Que les collègues du département Electrotechnique de l'USTHB, trouvent ici mes sincères sentiments de reconnaissance et pour la sympathique ambiance de travail.

## Sommaire

Introduction générale.....	1
<b>Chapitre 1: Techniques de minimisation des ondulations de couple des machines synchrones à aimants</b>	
1.1 Introduction.....	5
1.2 Action sur la structure.....	5
1.3 Action sur l'alimentation.....	6
1.3.1 Les méthodes de type boucle ouverte .....	6
1.3.1.1 Injection d'harmonique de courant.....	7
1.3.1.2 Calcul direct de la fém.....	9
1.3.1.3 Minimisation de la puissance réactive.....	10
a. Commande dans le repère de Concordia.....	10
b. Commande dans le repère de Park .....	11
1.3.1.4 Estimation de la fém.....	11
1.3.2 Les méthodes de type boucle fermée .....	12
1.3.2.1 Estimateur de couple par la méthode des moindres carrés.....	12
1.3.2.2 Estimateur de couple par une démarche de type modèle.....	12
1.3.2.3 Observateur de flux .....	13
1.3.2.4 Observateur de couple résistant.....	13
1.3.2.5 Observateurs de Gopinath.....	13
1.4 Minimisation des ondulations de couple des machines synchrones à aimants.....	13
à pôles lisses à distribution de champ non sinusoïdale	
1.5 Conclusion.....	17
<b>Chapitre 2: Modélisation des machines synchrones à aimants à pôles saillants à fém et inductances non sinusoïdales</b>	
2.1 Introduction.....	20
2.2 Transformation de Concordia et transformation de Park.....	21
2.2.1 Equations générales dans le repère abc.....	21
2.2.2 Transformation de Concordia.....	23
2.2.3 Transformation de Park.....	24

2.3 Repère de Park pour les machines synchrones à pôles saillants à répartition de champ sinusoïdale (MSRCS)	29
2.3.1 Courbes isocouples	31
2.3.2 Définition géométrique du repère Park	34
2.3.3 Contrôle du couple dans le repère de Park	37
2.4 Extension de la transformation de Park aux machines à pôles saillants à répartition de champ non sinusoïdale (MSRCNS)	37
2.4.1 Détermination des valeurs propres de la matrice $A(p\theta)$	38
2.4.2 Détermination des coordonnées du centre de l'hyperbole	39
2.4.3 Repère de Park étendu pour les machines MSRCNS	40
2.4.4 Contrôle du couple dans le repère de Park étendu	41
2.4.5 Détermination des courants de référence pour un fonctionnement optimal	42
2.5 Conclusion	45

### Chapitre 3: Application à un prototype de machine synchrone à aimants à fém et inductances non sinusoïdales

3.1 Introduction	48
3.2 Présentation et étude de la machine synchrone à aimants	48
3.2.1 Mesure des inductances propre et mutuelle	49
3.2.2 Relevé de la fém à vide	52
3.2.3 Développement en série de Fourier	55
3.2.4 Calcul de la matrice $A(p\theta)$ et de ses valeurs propres	58
3.2.5 Calcul de l'ondulation $\gamma(p\theta)$	60
3.3 Modèle optimal	61
3.3.1 Présentation de l'algorithme d'optimisation	61
3.3.1.1 Méthodes d'optimisation mathématique	62
3.3.1.2 Principe de la méthode SQP	63
3.3.2 Formes d'ondes optimales	64
3.4 Modèle suboptimal	66
3.4.1 Normalisation	67
3.4.2 Formulation du problème d'optimisation et modèle suboptimal	69
3.4.3 Formes d'ondes suboptimales	70
3.5 Comparaison des modèles	71
3.6 Conclusion	73

**Chapitre 4: Commande et mise en oeuvre expérimentale**

4.1 Introduction.....	77
4.2 Description de l'onduleur.....	77
4.2.1 Contrôle des courants par Hystérésis.....	79
4.2.2 Principe de la commutation par hystérésis.....	80
4.3 Modèle d'état de la machine synchrone à pôles saillants.....	82
4.3.1 Modèle de la machine synchrone à pôles saillants dans le repère de Park.....	82
4.3.2 Modèle d'état de la machine synchrone à répartition de champ non sinusoïdale... dans le repère de Park étendu	83
4.4 Stratégies de contrôle de couple de la machine synchrone à pôles saillants.....	84
4.4.1 Contrôle de couple sous hypothèse du premier harmonique.....	85
4.4.2 Contrôle dans le repère <i>abc</i> .....	88
4.4.3 Simulation numérique.....	90
4.5 Banc d'essais et étude Expérimentale.....	93
4.5.1 Description du banc expérimental.....	93
4.5.2 Caractéristiques de la machine synchrone à aimants.....	94
4.5.3 Résultats expérimentaux.....	95
4.6 Conclusion.....	96
Conclusion générale.....	99
Références bibliographiques.....	103

# Introduction Générale

## **Introduction Générale**

Les machines synchrones à aimants permanents sont fréquemment utilisées pour leurs performances en terme de rendement, de couples massique et volumique. Usuellement, l'étude de la commande de ces machines est effectuée avec l'hypothèse du premier harmonique pour laquelle les inductances propres et mutuelles des phases statoriques ainsi que le flux d'excitation varient sinusoïdalement en fonction de la position du rotor par rapport au stator.

Pour les machines synchrones à répartition sinusoïdale de champ, on opte généralement pour une modélisation dans le repère de Park. Ce repère conduit à des équations plus simples en vue de la commande [1,2] ou du dimensionnement [3]. Ainsi, pour avoir un couple sans ondulations, les courants dans les phases statoriques doivent être sinusoïdaux. Ces avantages cessent d'exister dans le cas de machines à répartition non sinusoïdale de champ, pour lesquelles les expressions des inductances propres et mutuelles ne sont plus des fonctions sinusoïdales de la position du rotor. En effet, en alimentant le moteur par des courants sinusoïdaux en régime permanent, il apparaît une ondulation de couple non négligeable, qui a pour conséquence l'apparition de vibrations mécaniques, de bruits acoustiques et de pertes supplémentaires [4,5].

La minimisation des ondulations de couple a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche [6,7,8,9,10]. Certaines solutions ont recours au calcul de courants optimaux à injecter, en régime permanent, pour chaque position du rotor. Il est donc nécessaire de disposer d'un modèle pour les machines synchrones à aimants à distribution de champ non sinusoïdale [11]. Des études ont été menées pour établir des modèles de machines synchrones à pôles lisses [12, 13,14] et de machines à réluctance variable [15,16].

Dans ce travail, nous présentons un modèle inverse pour la machine synchrone à aimants permanents à pôles saillants à répartition de champ non sinusoïdales. Ce modèle inverse est déduit des propriétés des courbes isocouples dans le repère de Concordia. Dans ce repère les courbes isocouples sont définies comme étant les lieux des points de coordonnées  $(i_\alpha, i_\beta)$  donnant un couple constant [15]. L'exploitation des courbes isocouples permet de définir un nouveau repère dans lequel nous choisissons une orientation privilégiée pour le vecteur courant de phase, conduisant à une minimisation des pertes par effet Joule dans la machine

pour un couple donné. En conséquence, la forme d'onde du courant optimal obtenue, permet également, de minimiser les ondulations de couple. Une commande suboptimale est également proposée. Cette technique, basée sur le modèle moyen de la machine, facilite la mise en œuvre expérimentale avec calculateur numérique

Ce travail est organisé comme suit,

Le premier chapitre vise à rappeler les différentes méthodes de minimisation des ondulations de couple pour les machines synchrones à aimants permanents.

Dans le chapitre deux, après rappel des transformations classiques de Concordia et de Park, nous avons procédé à la définition géométrique de cette dernière en se basant sur les courbes isocouples. Une extension de cette transformation pour les machines synchrones à aimants à distribution de champ et inductances non sinusoïdales est présentée.

Le chapitre trois est consacré à l'application de l'étude à un prototype de machine synchrone à aimants à pôles saillants à  $f_{em}$  et inductances non sinusoïdales. Les références optimales des courants sont obtenues après résolution d'un problème d'optimisation non linéaire. Un modèle suboptimal est également développé.

La simulation numérique des différents modèles ainsi que la validation expérimentale sur un banc d'essais à base d'un processeur de signaux numériques (DSP) fait l'objet d'un quatrième chapitre.



# Chapitre 1

Techniques de minimisation des ondulations  
de couple des machines synchrones à aimants

## **Techniques de minimisation des ondulations de couple des machines synchrones à aimants**

### **1.1 Introduction**

Les machines synchrones présentent une grande diversité de structures. Cette diversité porte beaucoup plus sur la structure du rotor car ces machines présentent en général un stator analogue à celui des machines synchrones ou asynchrones classiques. Elles sont classées en deux catégories : celles à fém sinusoïdales et celles à fém trapézoïdales. Aussi bien pour l'une que pour l'autre catégorie, ces machines sont sujettes à des ondulations de couple. Ces ondulations ont pour origine la reluctance qui résulte de l'interaction du flux magnétique rotorique (ou statorique) avec les variations angulaires de la reluctance statorique (ou rotorique). Cette composante ondulatoire du couple devient non négligeable dans le cas où la machine présente une saillance. En outre, les machines synchrones à forces électromotrices trapézoïdales sont également soumises à un couple ondulatoire supplémentaire communément appelé "couple de commutation".

Pour répondre aux exigences de maintes applications industrielles nécessitant des couples avec un minimum d'ondulations, plusieurs techniques de minimisation des composantes de couple indésirables ont été développées. Généralement, ces ondulations peuvent être réduites de deux façons: Soit, en agissant sur structure de la machine (bobinage, inclinaison d'encoche, nombre d'encoches par pôle et par phase fractionnaire...) ou bien, au niveau de l'alimentation. Par la suite, notre étude portera essentiellement sur cette dernière technique

### **1.2 Action sur la structure**

L'action au niveau de la conception même de la machine a pour but de tendre vers des caractéristiques idéales pour l'obtention d'un couple "lisse". Les machines synchrones à distribution de champ sinusoïdale se prêtent particulièrement bien à ces techniques. L'une des techniques les plus répandues pour ce type de machines consiste à couper en biais les encoches au stator. Cette obliquité permet de réduire les variations de reluctance vues par le champ rotorique délivré par les aimants. On peut également agir sur la répartition des enroulements. En effet, des enroulements à pas raccourcis permettent de réduire les harmoniques de couple d'ordre élevés avec, toutefois, une diminution du couple moyen [17]. Des enroulements à nombre fractionnaire d'encoches par pôle et par phase assurent également une bonne rejection des harmoniques de haute fréquence. Cependant ces techniques restent

difficilement applicables aux machines synchrones à aimants permanents et à fém trapézoïdales [18 19]. En effet, la première de ces méthodes a également pour incidence de réduire les harmoniques d'ordre élevé des fém. Aussi, appliquée à des machines à fém trapézoïdales, cette technique pourrait donner naissance à de nouveaux harmoniques de couple. Il semble donc difficile de s'affranchir des ondulations du couple pour une machine à fém trapézoïdales en jouant uniquement sur la conception de la machine.

### 1.3 Action sur l'alimentation

La seconde démarche consiste à optimiser les formes d'onde des courants statoriques pour une structure de machine donnée afin de générer un couple présentant une faible ondulation résiduelle. De nombreuses techniques de minimisation, principalement pour les machines à aimants permanents, sont présentées dans la littérature [8]. Parmi celles-ci, deux grandes catégories se distinguent, selon qu'elles nécessitent ou non la présence d'une boucle de courant.

#### 1.3.1 Les méthodes de type boucle ouverte

Le schéma bloc simplifié pour ce type de méthode est donné à la figure 1.1. Les formes d'ondes de courants sont définies à partir de fonctions préprogrammées suivant le point de fonctionnement. Généralement, une étude analytique est menée au préalable, les références en courant obtenues sont mémorisées dans des tables qui seront indexées en temps réel par la position rotorique. Une deuxième méthode consiste à calculer en temps réel les harmoniques de courant à ajouter au fondamental du courant de référence pour annuler les harmoniques de couple.

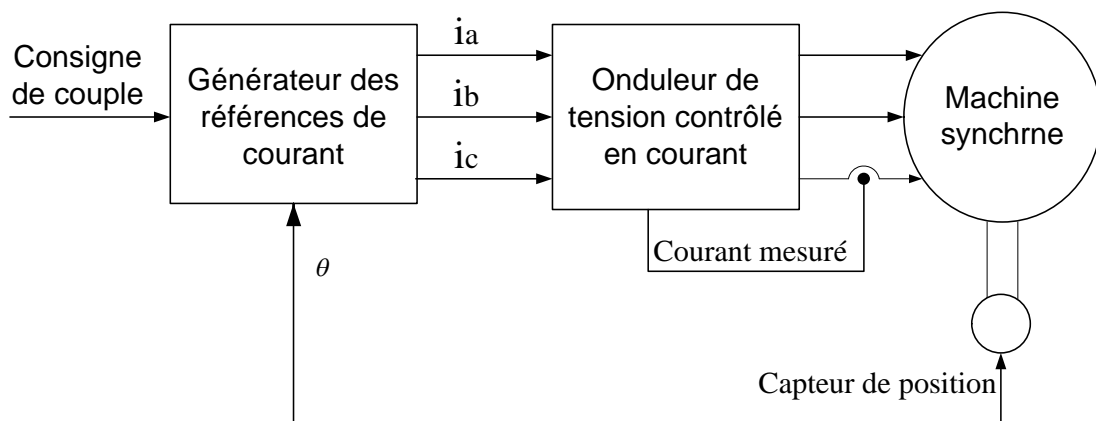


Fig.1.1 Schéma bloc simplifié de la commande en boucle ouverte

### **1.3.1.1 Injection d'harmonique de courant**

Une des techniques les plus anciennes consiste à injecter des harmoniques de courants prédéterminés [6,8]. Ces techniques reposent généralement sur une décomposition en série de Fourier sous forme de fonctions trigonométriques. On compense alors deux à quatre harmoniques de couple. Il existe plusieurs variantes, on citera les suivantes:

- Les formes optimales de courant sont déterminées analytiquement en se basant sur une double décomposition en série de Fourier sous forme trigonométrique (courant et fém). Pour supprimer un harmonique de couple, on détermine l'amplitude et la phase d'un harmonique de courant de façon à produire une composante de couple égale en amplitude mais en opposition de phase par rapport à la composante produite par tous les autres harmoniques de courant.

Considérons le cas d'une machine à fém trapézoïdales. L'expression du couple électromagnétique contenant les harmoniques jusqu'au rang 12 s'écrit :

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_6 \cdot \cos(6\theta) + \Gamma_{12} \cdot \cos(12\theta) \quad (1.1)$$

Où:

$$\begin{cases} \Gamma_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p}{\Omega} E_1 I_1 \\ \Gamma_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p}{\Omega} (E_5 + E_7) I_1 \\ \Gamma_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p}{\Omega} (E_{11} + E_{13}) I_1 \end{cases} \quad (1.2)$$

avec :  $E_k$  l'amplitude de l'harmonique de la fém de rang  $k$ ,  $I_1$  l'amplitude de l'harmonique du courant de rang  $k$ .

A titre d'exemple, on sait que l'harmonique 5 du courant interagit avec les harmoniques de rang 1 et 11 de la fém. On peut donc éliminer l'harmonique d'ordre 6 du couple par l'injection de cet harmonique de courant.

$$\begin{cases} \Gamma_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p}{\Omega} (E_1 I_1 + E_5 I_5) \\ \Gamma_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p}{\Omega} [(E_7 - E_5) I_1 + (E_{11} - E_1) I_5] \\ \Gamma_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p}{\Omega} [(E_{13} - E_{11}) I_1 + (E_{17} - E_7) I_5] \end{cases} \quad (1.3)$$

Il suffit d'égaliser à zéro l'harmonique 6 de couple pour avoir l'expression de l'harmonique 5 du courant à injecter:

$$I_5 = \frac{E_5 - E_7}{E_{11} - E_1} I_1 \quad (1.4)$$

On procède de la même manière pour les harmoniques supérieurs, afin d'obtenir les références de courant neutralisant le couple considéré.

Cette technique permet de réduire les ondulations de couple dues aux harmoniques de fém, cependant, le couple de détente n'est pas pris en compte au niveau de la compensation et la décomposition harmonique de la fém doit être connue avec précision. L'une des difficultés inhérentes à cette technique réside dans l'interaction des différents harmoniques de courant. En effet, lorsque l'on veut supprimer un second harmonique de couple, l'harmonique de courant qui est modifié peut faire apparaître la composante de couple préalablement supprimée. Pour surmonter ce problème, les auteurs proposent un algorithme interactif.

Des algorithmes plus complexes ont été envisagés qui introduisent un critère d'optimisation supplémentaire: la minimisation des pertes Joule. Ces techniques se basent, le plus souvent, sur une décomposition en série de Fourier sous forme de fonctions exponentielles complexes [19]. Certains auteurs tiennent également compte des inductances dans la génération des harmoniques de couple. Si les fém peuvent être obtenues expérimentalement dans le cas où la machine est déjà construite, il n'en est pas de même pour les inductances dont la détermination précise demande nécessairement des calculs de champ locaux. Certaines recherches [20] ont élaboré un modèle électromagnétique pour différents types de machines synchrones grâce à la méthode des éléments finis. A partir de ce modèle, il est alors possible de déterminer, pour une position et un couple donnés, l'amplitude optimale du courant de

phase à imposer ainsi que sa phase par l'intermédiaire d'une méthode itérative utilisant l'algorithme de Newton.

Toutes ces techniques nécessitent la connaissance précise du modèle. Comme les harmoniques de courant sont prédéterminés et qu'ils ne sont pas modifiés en temps réels, toutes ces commandes se font en boucle ouverte. Il est donc nécessaire de connaître de manière précise les caractéristiques de la machine. Par conséquent, ce genre de commande est très sensible aux variations des paramètres du moteur.

### **1.3.1.2 Calcul direct de la fém**

Certains auteurs [7] passent par un calcul direct de la fém pour calculer les formes de courant. Cette méthode est basée sur l'inversion de la fém afin d'obtenir un couple constant. Pour obtenir un couple constant égal à un couple de référence  $\Gamma_{ref}$ , il faut que les courants s'écrivent sous la forme:

$$\begin{cases} i_1(\theta) = a(\theta) \cdot \sin(\theta) \\ i_2(\theta) = a(\theta) \cdot \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ i_3(\theta) = a(\theta) \cdot \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{cases} \quad (1.5)$$

Où  $a(\theta)$  doit vérifier l'équation suivante:

$$a(\theta) = \frac{(\Gamma_{ref} - \Gamma_d(\theta))\Omega}{\sum_{j=1}^3 e_j \cdot \sin(p(\theta + \psi - 2(j-1)\pi/3)} \quad (1.6)$$

En associant aux équations ci-dessus, un critère d'optimisation, qui dans ce cas est la minimisation des pertes Joule, on obtient les références de courant suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} i_1 &= \frac{\Gamma_{ref} \Omega [2e_1(\theta) - e_2(\theta) - e_3(\theta)]}{e_1^2(\theta) + e_2^2(\theta) + e_3^2(\theta) - e_1(\theta)e_2(\theta) - e_1(\theta)e_3(\theta) - e_3(\theta)e_2(\theta)} \\ i_2 &= \frac{\Gamma_{ref} \Omega [2e_2(\theta) - e_1(\theta) - e_3(\theta)]}{e_1^2(\theta) + e_2^2(\theta) + e_3^2(\theta) - e_1(\theta)e_2(\theta) - e_1(\theta)e_3(\theta) - e_3(\theta)e_2(\theta)} \\ i_3 &= \frac{\Gamma_{ref} \Omega [2e_3(\theta) - e_2(\theta) - e_1(\theta)]}{e_1^2(\theta) + e_2^2(\theta) + e_3^2(\theta) - e_1(\theta)e_2(\theta) - e_1(\theta)e_3(\theta) - e_3(\theta)e_2(\theta)} \end{aligned} \right. \quad (1.7)$$

Cette méthode permet d'obtenir des résultats satisfaisants en simulation. Mais son efficacité est fortement dépendante de l'identification du couple de détente et des forces électromotrices. Ces grandeurs peuvent être directement mesurées ou calculées par éléments finis. De même, une procédure de calibrage pourrait être envisagée pour pallier la disparité paramétrique de construction. Cette calibration serait envisageable pour une application sur un nombre limité d'actionneurs. Cette technique généralise la méthode précédente en considérant tous les harmoniques de la fém. De plus, les ondulations dues au couple de détente sont prises en compte.

### 1.3.1.3 Minimisation de la puissance réactive

Une autre méthode consiste à déterminer les courants d'alimentation pour réduire les ondulations de couple tout en minimisant la puissance réactive. A partir de l'inversion de la fém écrite dans le repère diphasé, l'auteur calcule la forme des courants permettant de minimiser la valeur efficace du courant de référence, pour un couple constant [21]. Une méthode similaire développée à partir des grandeurs diphasées est aussi proposée [22,23]. Cette technique consiste à déterminer la forme des courants permettant d'obtenir un couple constant tout en minimisant le module du courant de référence.

#### a. Commande dans le repère de Concordia

Considérons une machine synchrone à aimants permanents et à pôles lisses. La machine considérée est couplée en étoile et son neutre est flottant. Par conséquent, la composante homopolaire du courant est nulle. Le couple s'exprime de la façon suivante:

$$\Gamma_e = p(e_\alpha \cdot i_\alpha + e_\beta \cdot i_\beta) / \Omega \quad (1.8)$$

A courant  $I$  donné, le couple sera maximal si les vecteurs fém et courant sont colinéaires, soit:

$$e_{\beta} \cdot i_{\alpha} - e_{\alpha} \cdot i_{\beta} = 0 \quad (1.9)$$

La relation (1.9) traduit l'annulation de la puissance réactive.

Les formes des courants de référence  $i_{\alpha ref}$ ,  $i_{\beta ref}$  sont imposées par les relations (1.8) et (1.9).

On obtient alors les expressions suivantes:

$$\begin{cases} i_{\alpha ref} = \frac{e_{\alpha}}{p \Omega (e_{\alpha}^2 + e_{\beta}^2)} \Gamma_{ref} \\ i_{\beta ref} = \frac{e_{\beta}}{p \Omega (e_{\alpha}^2 + e_{\beta}^2)} \Gamma_{ref} \end{cases} \quad (1.10)$$

### **b. Commande dans le repère de Park**

En utilisant la même démarche que précédemment, les courants des axes direct et en quadrature qui permettent d'optimiser le couple s'expriment comme suit:

$$\begin{cases} i_{dref} = \frac{e_d}{p \Omega (e_d^2 + e_q^2)} \Gamma_{ref} \\ i_{qref} = \frac{e_q}{p \Omega (e_d^2 + e_q^2)} \Gamma_{ref} \end{cases} \quad (1.11)$$

Ces deux lois de commande permettent de maximiser le couple tout en réduisant ses ondulations. De plus la commande dans le plan  $(d-q)$  assure le maintien du couple moyen à une valeur constante dans une gamme de vitesse plus étendue. Toutefois, l'inconvénient majeur de cette méthode réside dans le fait que les consignes de régulation présentent des harmoniques d'ordre élevé.

#### **1.3.1.4 Estimation de la fém**

Une autre approche consiste à calculer en temps réel les harmoniques de courant qu'il est nécessaire d'ajouter au fondamental du courant pour minimiser les ondulations de couple. La commande est réalisée dans le plan de Park [24]. L'algorithme proposé détermine les harmoniques de courant de rang 6 à injecter aux composantes, directe et en quadrature de



façon à minimiser les harmoniques de couple de rang 6 et 12. La détermination des courants harmoniques se fait à partir des harmoniques de flux qui sont eux-mêmes calculés grâce à l'estimation des composantes selon les axes  $d$  et  $q$  de la fém. La difficulté de la méthode réside dans l'estimation des composantes  $d$  et  $q$  de la fém.

### 1.3.2 Les méthodes de type boucle fermée

Les techniques de commande en boucle ouverte sont sensibles aux variations paramétriques. On leur préfère les techniques en boucle fermée, bien que plus complexe. Ce sont les techniques à base d'observateurs et d'estimateurs permettant de redéfinir à chaque instant le courant statorique à appliquer. Le schéma bloc pour ce type de commande est celui donné en figure 1.2. Il existe plusieurs types d'observateurs, on se limitera aux méthodes suivantes:

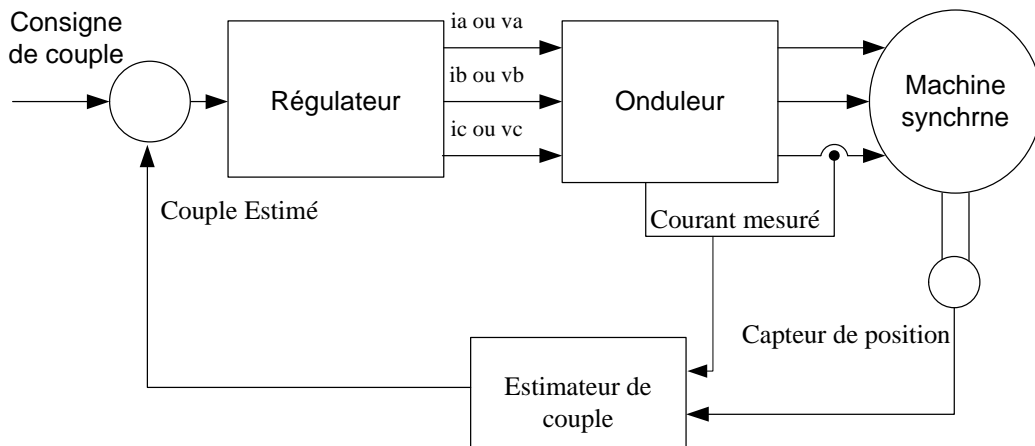


Fig.1.2 Schéma bloc simplifié de la commande en boucle fermée (estimation du couple)

#### 1.3.2.1 *Estimateur de couple par la méthode des moindres carrés*

C'est un estimateur avec étape de calibration et nécessite la connaissance de la résistance statorique et de l'inductance. Il ne tient pas compte de possible modification de flux. Son algorithme est assez complexe et nécessite beaucoup d'effort de programmation et des moyens informatiques lourds [25, 26, 27].

#### 1.3.2.2 *Estimateur de couple par une démarche de type modèle*

Il existe une autre approche basée sur une démarche modèle, associée à l'utilisation d'un régulateur proportionnel - intégral : le couple observé est donné par la sortie de l'intégrateur de ce modèle, l'entrée étant l'erreur entre la vitesse mesurée et son estimée [28].

### **1.3.2.3 Observateur de flux**

Le flux est estimé à partir d'un modèle de référence [25]. Le couple est calculé à partir de cette estimation et du courant mesuré. Cet algorithme permet de réduire les ondulations de couple dues aux harmoniques de fém. Le couple de détente n'est pas considéré. La difficulté de cette méthode réside dans la définition de la fonction permettant d'une part de garantir la stabilité de l'observateur et d'autre part de calculer la grandeur à estimer.

### **1.3.2.4 Observateur de couple résistant**

On utilise la mesure de la position ou de la vitesse ainsi que la consigne de courant pour reconstruire l'ensemble des perturbations sur le couple résistant. Le couple de détente ainsi que les ondulations de couple dues aux harmoniques de fém sont considérées dans la variable observée [28].

### **1.3.2.5 Observateur de Gopinath**

Une autre approche est basée sur l'observateur de Gopinath associé à une décomposition en série de Fourier afin d'estimer le couple de la machine [29]. Le but est de déterminer les composantes harmoniques de courant à associer au courant fondamental afin de compenser les composantes génératrices des pulsations de couple. L'application de cet algorithme nécessite la mesure de la vitesse et du courant et la connaissance préalable de la constante de couple. Cette constante est sensible à la température.

## **1.4 Minimisation des ondulations de couple des machines synchrones à aimants à pôles lisses à distribution de champ non sinusoïdale**

A côté des deux catégories de machines synchrones à aimants permanents: à fém sinusoïdales et à fém trapézoïdales, il existe des machines n'appartenant ni à l'une ni à l'autre de ces catégories. En effet, les techniques de fabrication de bobinage du stator ou de fabrication de rotor, aussi élaborées soient-elles, ne garantissent pas des formes de fém parfaites. Les machines synchrones avec ce type de fém sont appelées machines synchrones à distribution de champ non sinusoïdale. Pour ce type de machines, la transformation de Park de base n'est plus appropriée. Une autre transformation permet d'étendre cette transformation, à l'ensemble des machines synchrones à aimants permanents à pôles lisses, quelle que soit la forme de la fém [12, 13,14]. Cette extension de la transformation de Park, permet d'exprimer les équations

du moteur synchrone à aimants permanents montés en surface dans un nouveau repère qui n'est ni le repère du stator, ni celui du rotor. Ce nouveau repère permet de définir une orientation privilégiée pour le vecteur des courants de phases, orientation conduisant à une minimisation des pertes par effet Joule ainsi que des ondulations du couple.

Considérons l'expression du couple dans le repère de Concordia " $\alpha\beta$ ":

$$\Gamma = p \cdot (i_\alpha \cdot \Phi'_{r\alpha}(p\theta) + i_\beta \cdot \Phi'_{r\beta}(p\theta)) \quad (1.12)$$

avec  $\Phi'_{r\alpha}(p\theta)$  et  $\Phi'_{r\beta}(p\theta)$  sont les dérivées des flux rotoriques dans le repère de Concordia.

L'équation du couple (1.12) dans le repère de Concordia est une droite. Cette droite tourne dans le plan lorsque la position  $\theta$  change (Fig.1.3).

Un vecteur  $(x_\alpha \ x_\beta)^T$  appartient à cette droite s'il vérifie  $x_\alpha \cdot \Phi'_{r\alpha}(p\theta) + x_\beta \cdot \Phi'_{r\beta}(p\theta) = 0$ , c'est à dire s'il est orthogonal au vecteur  $(\Phi'_{r\alpha} \ \Phi'_{r\beta})^T$ .

Si par analogie avec le cas sinusoïdal on choisit, l'axe " $q$ " dans la direction du vecteur  $(\Phi'_{r\alpha} \ \Phi'_{r\beta})^T$ , un repère orthonormé possible sera constitué du vecteur normé

$$u_q = \frac{1}{\Phi'} \begin{pmatrix} \Phi'_{r\alpha} \\ \Phi'_{r\beta} \end{pmatrix} \text{ pour l'axe } q$$

$$\text{et, du vecteur } u_d = \frac{1}{\Phi'} \begin{pmatrix} \Phi'_{r\beta} \\ -\Phi'_{r\alpha} \end{pmatrix}, \text{ pour l'axe } d.$$

$$\text{Avec } \Phi' = \sqrt{\Phi'^2_{r\alpha} + \Phi'^2_{r\beta}}$$

Ainsi, un vecteur  $\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix}$  sera transformé en un vecteur  $\begin{pmatrix} x_d \\ x_q \end{pmatrix}$  par la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\Phi'} \begin{pmatrix} \Phi'_{r\beta} & \Phi'_{r\alpha} \\ -\Phi'_{r\alpha} & \Phi'_{r\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d \\ x_q \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

A partir de (1.13), La transformation du vecteur  $\begin{pmatrix} \Phi'_{r\alpha} \\ \Phi'_{r\beta} \end{pmatrix}$  donne:

$$\begin{pmatrix} \Phi'_{rd} \\ \Phi'_{rq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi' \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

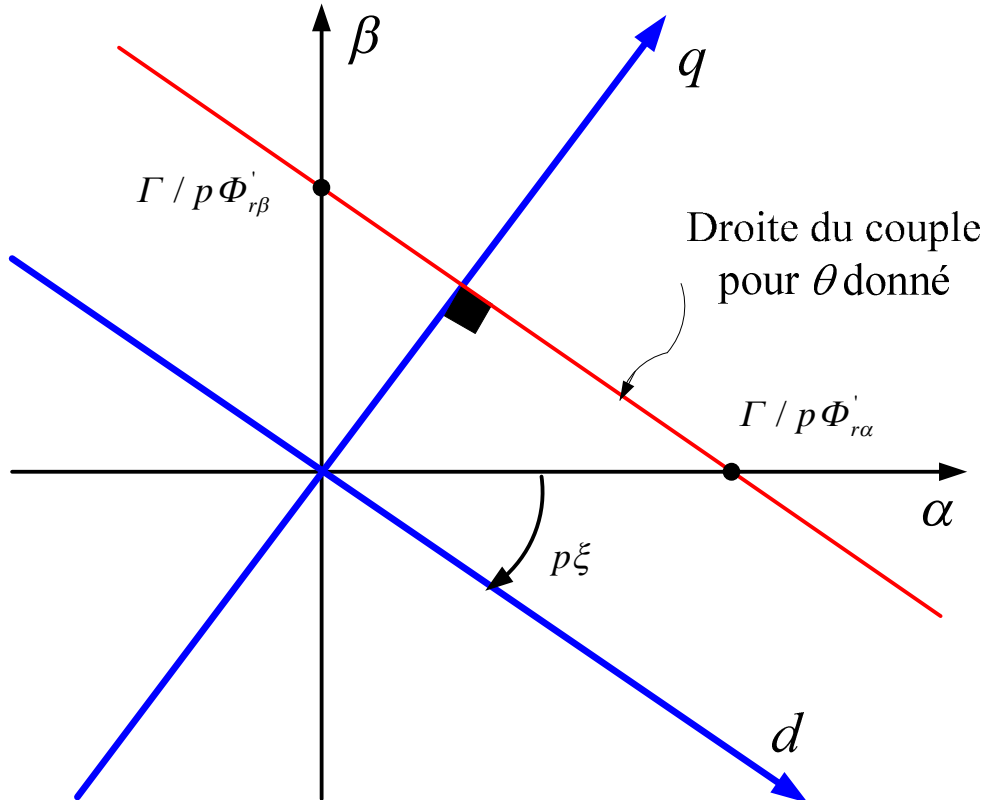


Fig.1.3 Repère de Park pour les machines à fêms sinusoïdales

Comme dans le cas sinusoïdal, la composante "d" du vecteur représentatif des variations du flux induit par les aimants du rotor dans les phases statoriques est nulle. On est ainsi passé, en restant dans le plan orthogonal à l'axe homopolaire, d'un repère orthonormé à un autre repère orthonormé. Le changement de repère effectué peut être défini comme une rotation d'un angle  $p\xi$ , soit:

$$\mathbf{R}(p\xi) = \begin{pmatrix} \cos(p\xi) & -\sin(p\xi) \\ \sin(p\xi) & \cos(p\xi) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Phi'} \begin{pmatrix} \Phi'_{r\beta} & \Phi'_{r\alpha} \\ -\Phi'_{r\alpha} & \Phi'_{r\beta} \end{pmatrix}$$

On en déduit que;

$$\sin(p\xi) = -\frac{\Phi'_{r\alpha}}{\Phi'}, \text{ et } \cos(p\xi) = \frac{\Phi'_{r\beta}}{\Phi'} \quad (1.15)$$

En posant  $p\xi = p\theta + \mu(\theta)$ , (1.15) devient:

$$\begin{cases} \sin(p\xi + \mu(\theta)) = -\frac{\Phi'_{r\alpha}}{\Phi'_{rq}} \\ \cos(p\xi + \mu(\theta)) = \frac{\Phi'_{r\beta}}{\Phi'_{rq}} \end{cases} \quad (1.16)$$

avec:

$$\Phi'_{rq} = \sqrt{\Phi'^2_{r\alpha} + \Phi'^2_{r\beta}}$$

On peut donc réécrire le système (1.13) sous la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = \mathbf{R}(p\theta + \mu(\theta)) \begin{pmatrix} x_d \\ x_q \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

$p\theta$  est la position électrique du rotor, qui fixe la position du premier harmonique de la variation du flux rotorique et  $\mu(\theta)$ , l'angle qui tient compte du caractère non sinusoïdal des forces contre-électromotrices, donc des autres harmoniques du flux.

Ainsi, la transformation de Park pour les machines synchrones à aimants permanents à pôles lisses et à fém non sinusoïdale est définie par la matrice suivante [14].

$$\mathbf{P}_{32}(p\theta + \mu(\theta)) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(p\theta + \mu(\theta)) & -\sin(p\theta + \mu(\theta)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(p\theta + \mu(\theta) - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(p\theta + \mu(\theta) - \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(p\theta + \mu(\theta) + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(p\theta + \mu(\theta) + \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Notons que pour  $\mu=0$ , on retrouve la transformation de Park classique. En utilisant cette nouvelle transformation, il est possible de calculer les courants optimaux à imposer dans les phases pour obtenir un couple de référence donné.

Cette transformation permet de retrouver les propriétés de la transformation de Park en ce qui concerne les consignes, et assure une compensation effective des ondulations de couple.

## **1.5 Conclusion**

Diverses techniques de minimisation des ondulations de couple ont été présentées. Ces techniques sont divisées en deux catégories, selon que la commande s'effectue en boucle ouverte (courant préprogrammé) ou en boucle fermée (observateurs, estimateurs, ...). Les commandes en boucle ouverte sont faciles à mettre en œuvre mais ne tiennent pas compte des variations paramétriques, alors que les commandes en boucle fermée, bien plus complexes, mais permettent, cependant, de considérer toutes les causes productrices d'ondulations. Toutes ces techniques sont destinées à des machines synchrones à fém idéalisées. Pour les machines à distribution de champ non sinusoïdale et particulièrement les machines synchrones à aimants permanents à pôles lisses, des solutions ont été proposées par l'extension de la transformation de Park. Cette extension assure la minimisation des pertes Joule et conduit à la minimisation des ondulations de couple. Le chapitre suivant sera consacré à l'étude de ce type d'extension pour les machines synchrones à aimants permanents à pôles saillants à fém et inductances non sinusoïdales.

## Chapitre 2

Modélisation des machines synchrones à aimants à  
fém et inductances non sinusoïdales

## Modélisation des machines synchrones à aimants à fém et inductances non sinusoïdales

### 2.1 Introduction

Les repères "naturels" ( $a, b, c$ ) offrent une modélisation de la machine synchrone à pôles saillants relativement complexe. Les équations des tensions mettent en évidence des couplages entre les phases statoriques qui compliquent le contrôle du couple. Pour les machines synchrones à répartition de champ sinusoïdale, on opte souvent pour une modélisation dans le repère de Park ( $d, q$ ). L'utilisation de ce repère conduit à des équations plus simples, le couple étant directement proportionnel à la composante en quadrature du courant. Pour avoir un couple sans ondulations, les courants dans les phases statoriques doivent être sinusoïdaux avec une fréquence adaptée à la vitesse de rotation. Ces propriétés n'existent plus dans le cas de machines à répartition de champ non sinusoïdale, où les expressions des inductances propres et mutuelles inductances ne sont plus des fonctions sinusoïdales de la position du rotor. En effet, si on alimente le moteur par des courants sinusoïdaux (en régime permanent) il apparaît une ondulation de couple susceptible d'être importante, ce qui a pour conséquence l'apparition de vibrations mécaniques, de bruits acoustiques et de pertes supplémentaires. L'alimentation sinusoïdale n'est pas optimale.

Dans ce chapitre, après un bref rappel des définitions des transformations de Concordia et de Park, nous établissons, dans une première partie, le modèle de Park de la machine synchrone à répartition de champ sinusoïdale et à pôles saillants déduit des propriétés des courbes isocouples exprimés dans le repère de Concordia. La seconde partie sera consacrée à la généralisation du modèle de Park au cas où la machine est à répartition de champ non sinusoïdale et où la matrice inductance est une fonction plus compliquée de la position du rotor. L'aspect théorique présenté dans cette étude s'inspire des travaux de G. Sturtzer [15] sur le modèle inverse des machines synchrones à réluctance variable.

Pour pouvoir effectuer cette étude, il est nécessaire d'adopter certaines hypothèses. Ces hypothèses classiques en commande des machines sont les suivantes:

- On néglige les phénomènes de saturation et l'hystérésis magnétique.
- On néglige les pertes dans le fer de la machine.



## 2.2 Transformation de Concordia et transformation de Park

### 2.2.1 Equations générales dans le repère abc

La structure générale idéalisée d'une machine synchrone triphasée à aimants permanents est représentée sur la figure 2.1 :

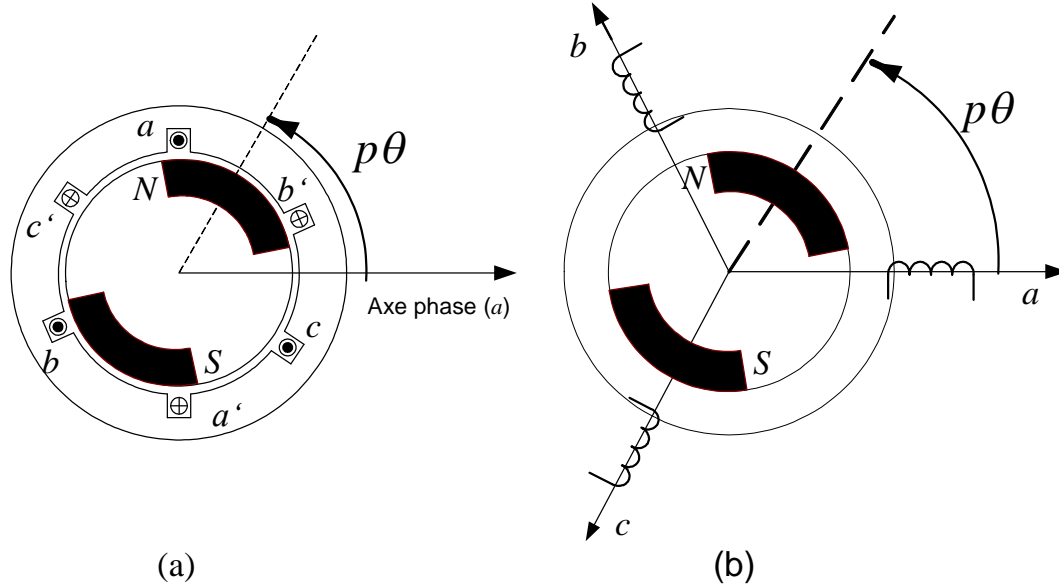


Figure 2.1: Structure idéalisée (a) et symbolique (b) d'une machine synchrone

D'après la loi d'Ohm, les tensions aux bornes des trois phases statoriques peuvent s'écrire, sous forme vectorielle :

$$\mathbf{v}_{abc} = R_s \mathbf{i}_{abc} + \frac{d}{dt} \Phi_{abc} \quad (2.1)$$

avec :

$$\mathbf{v}_{abc} = \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix}, \mathbf{i}_{abc} = \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix}, \Phi_{abc} = \begin{pmatrix} \Phi_a \\ \Phi_b \\ \Phi_c \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

où :

$i_a, i_b$  et  $i_c$  sont les courants dans les phases  $a, b, c$  respectivement.

$v_a, v_b$  et  $v_c$  sont les tensions simples aux bornes des phases statoriques  $a, b, c$  respectivement.

$R_s$  est la résistance d'une phase statorique.

$\Phi_a, \Phi_b$  et  $\Phi_c$  sont les flux totaux induits dans les phases  $a, b, c$  respectivement.

Les flux totaux  $\Phi_{abc}$  sont la somme des flux induits par les aimants dans les phases statoriques  $\Phi_{ra}$ ,  $\Phi_{rb}$ ,  $\Phi_{rc}$  et des flux induits par les courants statoriques dans ces phases  $\Phi_{sa}$ ,  $\Phi_{sb}$  et  $\Phi_{sc}$ , ils s'écrivent :

$$\Phi_{abc} = \Phi_{sabc} + \Phi_{rabc} \quad (2.3)$$

avec :

$$\Phi_{sabc} = \begin{pmatrix} \Phi_{sa} \\ \Phi_{sb} \\ \Phi_{sc} \end{pmatrix} = L(p\theta) \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \text{ et } \Phi_{rabc} = \begin{pmatrix} \Phi_{ra} \\ \Phi_{rb} \\ \Phi_{rc} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$L(p\theta)$  est la matrice des inductances propres et mutuelles des bobinages statoriques, elle s'écrit :

$$L(p\theta) = \begin{bmatrix} L_{aa}(p\theta) & M_{ab}(p\theta) & M_{ac}(p\theta) \\ M_{ba}(p\theta) & L_{bb}(p\theta) & M_{bc}(p\theta) \\ M_{ca}(p\theta) & M_{cb}(p\theta) & L_{cc}(p\theta) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

On écrit :

$$\Phi_{abc} = L(p\theta) \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi_{ra} \\ \Phi_{rb} \\ \Phi_{rc} \end{pmatrix}$$

L'équation aux tensions (2.1) peut-être développée comme suit:

$$\begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} = R_s \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} + L(p\theta) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} + \left( \frac{dL(p\theta)}{dt} \right) \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

où :

$$\begin{pmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{pmatrix} = \Omega \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Phi_a \\ \Phi_b \\ \Phi_c \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$e_a$ ,  $e_b$  et  $e_c$  : sont les f.c.e.m des phases  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

$\theta$  est la position instantanée du rotor et  $\Omega$  la vitesse de rotation égale à  $\frac{d\theta}{dt}$

L'équation (2.6) montre que l'équation aux tensions comprend un terme relatif à la chute de tension statorique et un terme traduisant la magnétisation de la machine. Les derniers termes modélisent la conversion électromécanique d'énergie qui provient des flux induits par les aimants.

L'expression du couple est tirée d'une formulation analytique de la coénergie magnétique  $W_{cm}$ , elle-même obtenue par des calculs de champs [1] :

$$\Gamma = \frac{\partial W_{cm}(i, \theta)}{\partial \theta} \quad (2.8)$$

Elle s'écrit:

$$\Gamma = \frac{1}{2} (i_a \ i_b \ i_c)^T \left( \frac{dL(p\theta)}{dt} \right) \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} + p \Omega (\Phi'_{ra} \ \Phi'_{rb} \ \Phi'_{rc})^T \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Où:

$$\begin{pmatrix} \Phi'_{ra} \\ \Phi'_{rb} \\ \Phi'_{rc} \end{pmatrix} = \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \Phi_{ra} \\ \Phi_{rb} \\ \Phi_{rc} \end{pmatrix}$$

### 2.2.2 Transformation de Concordia

La forme générale de cette transformation est la suivante:

$$\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} = (\mathbf{T}) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = (\mathbf{T}_{31}) \cdot x_0 + (\mathbf{T}_{32}) \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Où :

$$(\mathbf{T}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{T}_{31}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\mathbf{T}_{32}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Cette transformation est normée et conserve les expressions des puissances. Elle s'applique de manière identique aux tensions, aux courants et aux flux.

Dans notre travail, nous supposons que la machine est connectée en étoile, le point neutre n'étant pas accessible. Nous nous intéresserons désormais au seul système " $\alpha\beta$ ", par conséquent l'expression du couple dans le repère de Concordia s'écrit:

$$\Gamma = \frac{1}{2} (\mathbf{i}_\alpha \quad \mathbf{i}_\beta)^T \cdot (\mathbf{T}_{32})^T \cdot \left( \frac{dL(p\theta)}{d\theta} \right) \cdot (\mathbf{T}_{32}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_\alpha \\ \mathbf{i}_\beta \end{pmatrix} + (\Phi'_{r\alpha} \quad \Phi'_{r\beta})^T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_\alpha \\ \mathbf{i}_\beta \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Où:

$$\begin{pmatrix} \Phi'_{r\alpha} \\ \Phi'_{r\beta} \end{pmatrix} = \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \Phi_{r\alpha} \\ \Phi_{r\beta} \end{pmatrix}$$

### 2.2.3 Transformation de Park

La transformation de Park a pour but de simplifier le modèle de la machine en éliminant la dépendance vis-à-vis du temps et de l'espace. Cette transformation réalise une rotation autour de l'axe homopolaire et permet de passer d'un référentiel plan à un autre dans le même plan.

Un vecteur bidimensionnel  $\bar{x}$  dans le référentiel  $(\alpha, \beta)$  dont l'expression est donnée par:

$$\bar{x} = x_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + x_\beta \cdot \vec{u}_\beta \quad (2.13)$$

Peut-être représenté dans le repère de Park par la relation suivante:

$$\bar{x} = x_d \cdot \vec{u}_d + x_q \cdot \vec{u}_q \quad (2.14)$$

où  $\vec{u}_d$  et  $\vec{u}_q$  sont les vecteurs unitaires du référentiel  $(d, q)$  décalés d'un angle  $p\theta$  par rapport au référentiel  $(\alpha, \beta)$ .  $d$  représente l'axe direct et  $q$  l'axe en quadrature. La figure (2.2) représente les repères  $(\alpha, \beta)$  et  $(d, q)$  pour la machine synchrone.

On peut exprimer les composantes directe et en quadrature à partir des valeurs instantanées  $\vec{u}_\alpha$  et  $\vec{u}_\beta$  du système diphasé  $(\alpha, \beta)$  en utilisant rotation d'un angle  $p\theta$  :

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = \mathbf{R}(p\theta) \begin{pmatrix} x_d \\ x_q \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

La matrice de rotation est donnée par :

$$\mathbf{R}(p\theta) = \begin{pmatrix} \cos(p\theta) & -\sin(p\theta) \\ \sin(p\theta) & \cos(p\theta) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

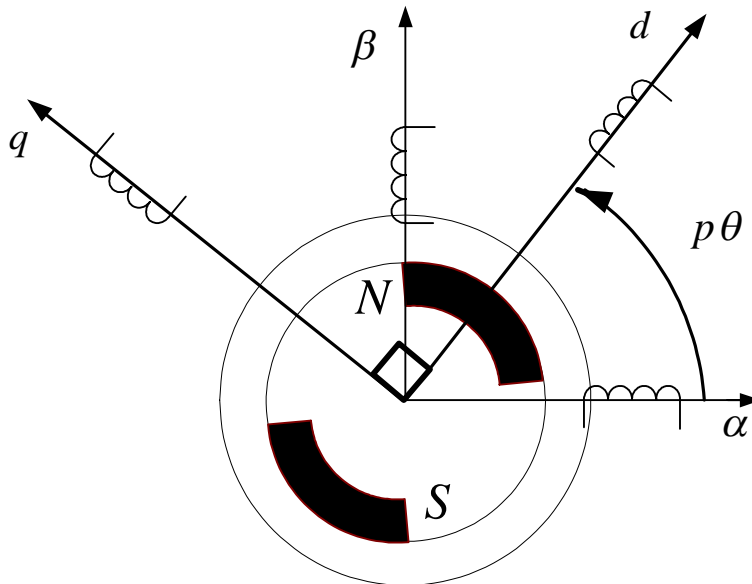


Figure 2.2: Transformation de Park de la machine synchrone à aimants permanents

Dans le cas d'une machine triphasée à répartition sinusoïdale du champ, la transformation de Park est rappelée ci-dessous.

$$\mathbf{P}_{32}(p\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(p\theta) & -\sin(p\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(p\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(p\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(p\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Cette transformation mathématique est orthogonale et possède une matrice inverse.

Sous l'hypothèse du premier harmonique, la matrice inductance  $\mathbf{L}(p\theta)$  d'une machine synchrone à aimants et à pôles saillants varie sinusoïdalement autour d'une valeur moyenne  $L_{S0}$  [30].

$$\mathbf{L}(p\theta) = \mathbf{L}_{s0} + \mathbf{L}_{s2}(p\theta) \quad (2.18)$$

avec :

$$\mathbf{L}_{s0} = \begin{pmatrix} L_{s0} & M_{s0} & M_{s0} \\ M_{s0} & L_{s0} & M_{s0} \\ M_{s0} & M_{s0} & L_{s0} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{L}_{s2}(p\theta) = L_{s2} \begin{pmatrix} \cos(2p\theta) & \cos 2(p\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos 2(p\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos 2(p\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos 2(p\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(2p\theta) \\ \cos 2(p\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(2p\theta) & \cos 2(p\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

où :

$L_{S0}$ ,  $L_{S2}$  et  $M_{S0}$  sont des termes constants non nuls qui dépendent de la machine.

Les flux produits par les aimants dépendent sinusoïdalement de la position, ils s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \Phi_{ra} \\ \Phi_{rb} \\ \Phi_{rc} \end{pmatrix} = \Phi_m \begin{pmatrix} \cos(p\theta) \\ \cos(p\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

L'application de la transformation de Concordia aux vecteurs flux totaux donne:

$$\mathbf{T}^T \cdot \Phi_{abc} = \mathbf{T}^T (\Phi_{sabc} + \Phi_{rabc}) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{T}^T \cdot \Phi_{sabc} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{L}_{S0} \cdot \mathbf{i}_{abc} + \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{L}_{S2}(p\theta) \cdot \mathbf{i}_{abc} \quad (2.23)$$

La transformation de Concordia est une transformation orthogonale qui diagonalise la matrice inductance  $\mathbf{L}(p\theta)$ , autrement dit, les colonnes de la matrice de Concordia sont des vecteurs propres de  $\mathbf{L}(p\theta)$ .

$\eta$  est une valeur propre de  $\mathbf{L}_{S0}$ , si  $\eta$  vérifie son équation caractéristique.

$$\det(\mathbf{L}_{S0} - \eta \cdot \mathbf{I}_2) = \det \begin{pmatrix} L_{S0} - \eta & M_{S0} & M_{S0} \\ M_{S0} & L_{S0} - \eta & M_{S0} \\ M_{S0} & M_{S0} & L_{S0} - \eta \end{pmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

Les valeurs propres sont ainsi déterminées par la résolution de l'équation caractéristique suivante :

$$(L_{S0} - M_{S0} - \eta) [\eta^2 - (2 \cdot L_{S0} + M_{S0}) + L_{S0}^2 + L_{S0} \cdot M_{S0} - 2 \cdot M_{S0}^2] = 0 \quad (2.25)$$

La matrice  $\mathbf{L}_{S0}$  admet deux valeurs propres:

Une racine double  $L_{S0} - M_{S0}$  et  $L_{S0} + 2 M_{S0}$ .

En effectuant la même démarche pour la matrice  $L_{S2}$ , on obtient les composantes de Concordia du vecteur flux induits totaux :

$$\begin{pmatrix} \Phi_{S0} \\ \Phi_{S\alpha} \\ \Phi_{S\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{S0} + 2M_{S0} & 0 & 0 \\ 0 & L_{S0} - M_{S0} & 0 \\ 0 & 0 & L_{S0} - M_{S0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_0 \\ i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} + \frac{3}{2} L_{S2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2p\theta) & \sin(2p\theta) \\ 0 & \sin(2p\theta) & -\cos(2p\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_0 \\ i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} + \Phi_m \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(p\theta) \\ \sin(p\theta) \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

L'expression du couple dans le repère de Park est alors donnée par l'expression ci-dessous:

$$\Gamma = p[(L_d - L_q)i_d + \Phi_m]i_q \quad (2.27)$$

avec :

$$L_d = L_{S0} - M_{S0} + \frac{3}{2} L_{S2} \quad (2.28)$$

$$L_q = L_{S0} - M_{S0} - \frac{3}{2} L_{S2} \quad (2.29)$$

Le couple est composé de deux termes, l'un dû à la saillance, appelé couple réluctant, qui se présente sous une forme quadratique par rapport aux courants  $i_d$  et  $i_q$ , et un autre terme, prépondérant, directement proportionnel à la composante  $i_q$  du courant.

Si l'on désire simplifier le modèle de la machine et obtenir une loi de commande linéaire, de la même forme que celle de la machine à courant continu, et simple à implanter, on ne considère que le second terme du couple. En effet, l'annulation de la composante "d" du courant statorique conduit à éliminer la contribution due à la saillance du rotor. Ceci revient à orienter le flux statorique en quadrature de flux rotorique. Cependant, cette simplification réduit de la valeur du couple qu'on est susceptible d'atteindre pour un courant maximal donné, tandis que, pour un couple donné, la puissance absorbée par la machine est plus élevée car les pertes Joule ne sont pas minimisées.



### 2.3 Repère de Park pour les machines synchrones à pôles saillants à répartition de champ sinusoïdale (MSRCS)

En négligeant la composante homopolaire du courant, l'expression du couple électromagnétique dans le repère  $(\alpha, \beta)$  de Concordia s'écrit:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{\alpha\beta}^T \cdot \mathbf{T}_{32}^T \cdot \frac{d\mathbf{L}(p\theta)}{d\theta} \cdot \mathbf{T}_{32} \cdot \mathbf{i}_{\alpha\beta} + \frac{d\Phi_{r\alpha\beta}(p\theta)^T}{d\theta} \cdot \mathbf{i}_{\alpha\beta} \quad (2.30)$$

où :

$$\Phi_{r\alpha\beta}(p\theta) = \begin{bmatrix} \Phi_{\alpha r}(p\theta) \\ \Phi_{\beta r}(p\theta) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{32}^T \cdot \Phi_{abc}(p\theta) \quad (2.31)$$

En régime sinusoïdal, les dérivées des composantes  $\Phi_{r\alpha}$  et  $\Phi_{r\beta}$  du flux s'expriment par:

$$\frac{d\Phi_{r\alpha}}{d\theta} = -p \sqrt{\frac{3}{2}} \Phi_m \cdot \sin(p\theta) \quad (2.32)$$

$$\frac{d\Phi_{r\beta}}{d\theta} = p \sqrt{\frac{3}{2}} \Phi_m \cos(p\theta) \quad (2.33)$$

L'expression du couple devient:

$$\Gamma = \frac{3}{2} p L_{s2} [(i_\beta^2 - i_\alpha^2) \cdot \sin(2p\theta) + 2i_\alpha i_\beta \cdot \cos(2p\theta)] + p \sqrt{\frac{3}{2}} \Phi_m [i_\beta \cos(p\theta) - i_\alpha \sin(p\theta)] \quad (2.34)$$

Le lieu géométrique des points de coordonnées  $i_\alpha$  et  $i_\beta$  tel que le couple  $\Gamma$  soit constant (courbes isocouples) est une conique [31], dont la forme générale de son équation est la suivante:

$$a(p\theta) \cdot i_\alpha^2 + 2 \cdot b(p\theta) \cdot i_\alpha \cdot i_\beta + c(p\theta) \cdot i_\beta^2 + d(p\theta) \cdot i_\alpha + e(p\theta) \cdot i_\beta + f = 0 \quad (2.35)$$

Où :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(p\theta) = -\frac{3}{2} p L_{s2} \sin(2 p \theta) \\ b(p\theta) = \frac{3}{2} p L_{s2} \cos(2 p \theta) \\ c(p\theta) = \frac{3}{2} p L_{s2} \sin(2 p \theta) \\ d(p\theta) = -\sqrt{\frac{3}{2}} p \Phi_m \sin(p \theta) \\ e(p\theta) = \sqrt{\frac{3}{2}} p \Phi_m \cos(p \theta) \\ f = -\Gamma \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Pour une position  $\theta$  donnée du rotor de la machine, l'équation de la conique peut se mettre sous la forme bilinéaire suivante :

$$\begin{bmatrix} i_\alpha & i_\beta & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a(p\theta) & b(p\theta) & \frac{d(p\theta)}{2} \\ b(p\theta) & c(p\theta) & \frac{e(p\theta)}{2} \\ \frac{d(p\theta)}{2} & \frac{e(p\theta)}{2} & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.37)$$

En fonction de la signature de la matrice  $A(p\theta)$ , donnée par (2.38), donc de son déterminant, l'équation (2.35) correspond soit à un cercle, à une hyperbole, à une ellipse ou à une parabole. La conique tourne dans son repère lorsque la position  $\theta$  du rotor de la machine change.

$$A(p\theta) = \begin{bmatrix} a(p\theta) & b(p\theta) \\ b(p\theta) & c(p\theta) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les deux valeurs propres de la matrice  $A(p\theta)$ , le déterminant de  $A$  est égal au produit de ses valeurs propres :  $\det(A(p\theta)) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ , on obtient :

- une ellipse si  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ ,
- une hyperbole si  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ ,
- une parabole si  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ .

Sous l'hypothèse du premier harmonique, les valeurs propres de la matrice  $A(p\theta)$  valent:

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2} \cdot p \cdot L_{S2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{3}{2} \cdot p \cdot L_{S2}$$

Les deux valeurs propres ne dépendent pas de la position  $\theta$ , elles sont égales et de signes opposés par conséquent leur produit est toujours négatif. La nature hyperbolique des courbes isocouples dans le cas de la machine synchrone à pôles saillants ne fait alors aucun doute.

### 2.3.1 Courbes isocouples

L'hyperbole ( $H$ ) de la figure 2.3 est tracée pour une position  $\theta$  donnée du rotor. Elle correspond aux lieux de points de fonctionnement de la machine à couple constant. Ces points sont obtenus pour différentes valeurs des courants  $i_\alpha$  et  $i_\beta$ . L'hyperbole est caractérisée par son axe focal  $AF(p\theta)$ , ses deux sommets  $S_1(p\theta)$ ,  $S_2(p\theta)$  et ses deux asymptotes  $A_{S1}(p\theta)$  et  $A_{S2}(p\theta)$ . On définit les angles suivants :

$\delta(p\theta)$  : angle entre asymptote et l'axe focal

$\nu(p\theta)$  : angle entre l'axe focal et l'axe des abscisses  $i_\alpha$  de Concordia.

$\gamma(p\theta)$  : angle entre l'axe focal et l'axe des ordonnées  $i_\beta$  de Concordia.

Les axes  $i_\alpha$  et  $i_\beta$  étant orthogonaux, ces angles satisfont la relation:

$$\nu(p\theta) = \gamma(p\theta) + \frac{\pi}{2} \tag{2.39}$$

En raison de la présence des termes  $d(p\theta)$  et  $e(p\theta)$ , dus à l'excitation de la machine, dans l'expression du couple (2.35), le centre de l'Hyperbole  $O'$  est décalé par rapport à l'origine du repère  $(\alpha, \beta)$ .

Les coordonnées du centre  $O'$  par rapport à l'origine  $O$ , sont calculées à partir de:

$$i'_{\alpha O} = -\frac{\begin{vmatrix} d & b \\ e & c \end{vmatrix}}{\det(A)}, \quad i'_{\beta O} = -\frac{\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix}}{\det(A)} \tag{2.40}$$

Ces quantités valent dans le cas de la machine à répartition de champ sinusoïdale :

$$i'_{\alpha O} = -\frac{\Phi_m}{\sqrt{6L_{s2}}} \cos(p\theta) \quad (2.41)$$

$$i'_{\beta O} = -\frac{\Phi_m}{\sqrt{6L_{s2}}} \sin(p\theta) \quad (2.42)$$

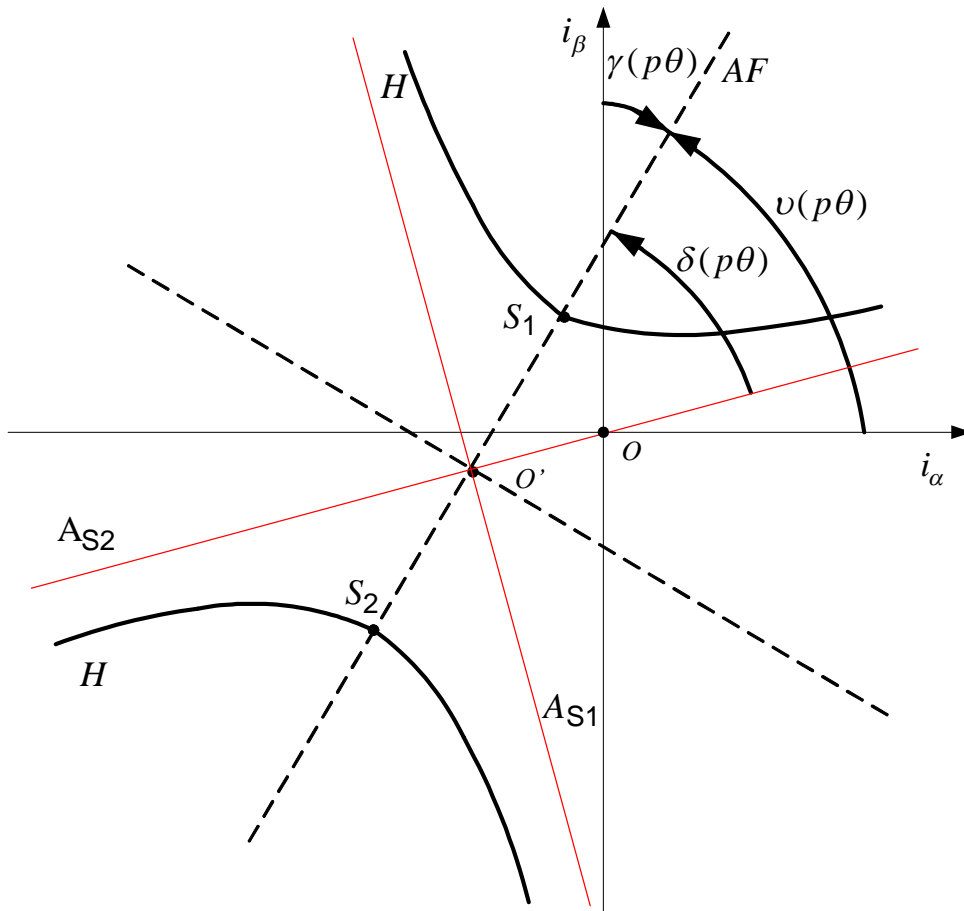


Figure 2.3: Courbes isocouples à  $\theta$  donné pour une machine synchrone à pôles saillants

Les équations (2.41) et (2.42) mettent en évidence que, lorsque le rotor tourne, la trajectoire décrite par le centre  $O'$  de l'hyperbole est un cercle centré sur l'origine  $O$  du repère de Concordia. Par ailleurs une des deux asymptotes passe par l'origine.

Les asymptotes sont calculées dans un repère de centre  $O'$ , elles correspondent au cas particulier où le couple électromagnétique est nul. Ces asymptotes sont définies par les équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} i'_{\beta 1,2} = \frac{-b(p\theta) \pm \sqrt{b(p\theta)^2 - a(p\theta).c(p\theta)}}{c(p\theta)} (i_\alpha + i'_{\alpha 0}) - i'_{\beta 0} \quad \text{si } c(p\theta) \neq 0 \\ i'_\beta = -\frac{a(p\theta)}{2b(p\theta)} (i_\alpha + i'_{\alpha 0}) - i'_{\beta 0} \quad \text{si } c(p\theta) = 0 \end{array} \right. \quad (2.43)$$

L'hyperbole ( $H$ ) a été obtenue pour un couple électromagnétique positif. Dans le cas où le couple est négatif, les points de fonctionnement sont situés sur l'hyperbole conjuguée dont l'axe focal est perpendiculaire à l'axe focal  $AF$ . Par ailleurs, les asymptotes restent inchangées. Pour différentes valeurs de couple, on obtient une famille d'hyperboles ayant les mêmes asymptotes. Les sommets de ces hyperboles sont situés sur l'axe focal et se déplacent en s'éloignant du centre lorsque le couple augmente (figure 2.4).

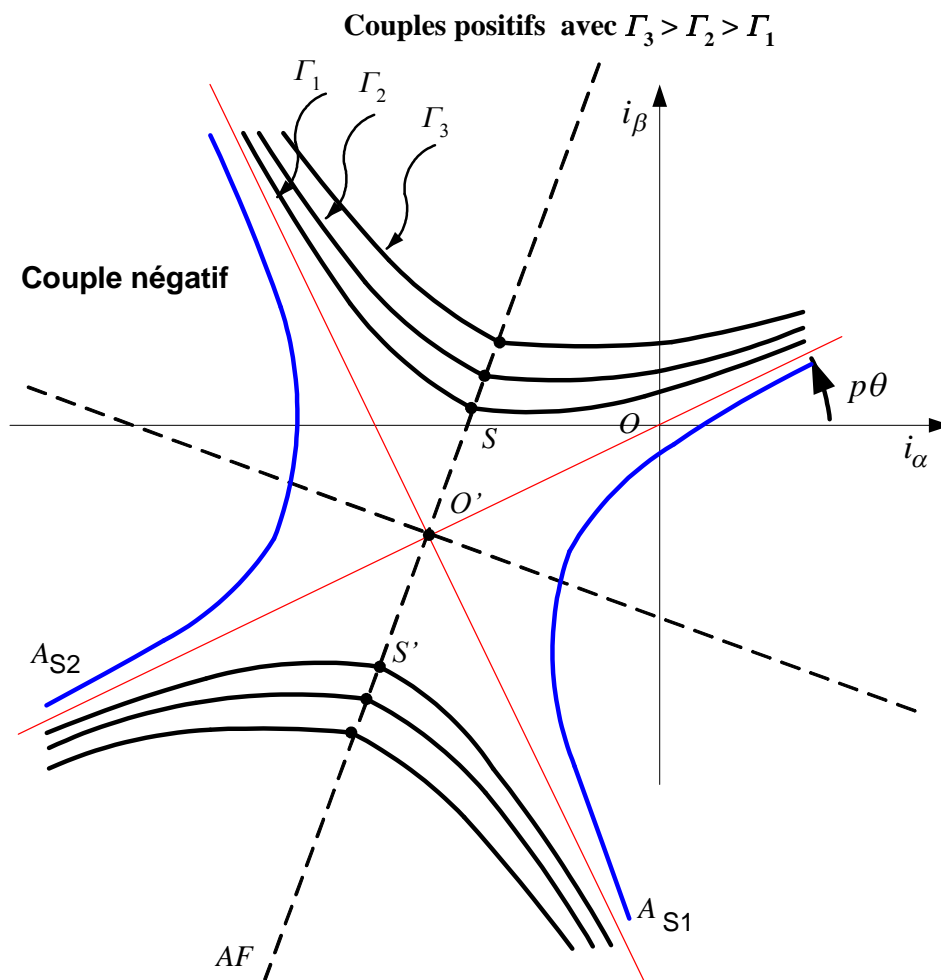


Figure 2.4 : Famille de courbes isocouples pour une position  $\theta$  donnée

### 2.3.2 Définition géométrique du repère Park

Nous désirons nous placer dans un repère orthogonal  $(\alpha', \beta')$ , dont l'axe des ordonnées est confondu avec l'axe focal de l'hyperbole. Ce repère est tourné d'un angle  $\gamma(p\theta)$  par rapport au repère  $(\alpha, \beta)$  de Concordia (figure 2.5). Connaissant les coordonnées du centre  $O'$  par rapport à  $O$ , nous effectuons, d'abord, un changement de variable en posant dans l'équation (2.35):

$$i_x = i_\alpha - i_{\alpha 0} \quad (2.44)$$

$$i_y = i_\beta - i_{\beta 0} \quad (2.45)$$

Après substitution dans (2.35), nous obtenons l'équation suivante :

$$a(p\theta) i_x^2 + 2b(p\theta) i_x i_y + c(p\theta) i_y^2 + f + \frac{1}{2} \{d(p\theta) i_{\alpha 0} + e(p\theta) i_{\beta 0}\} = 0 \quad (2.46)$$

Afin de déterminer l'angle  $\gamma(p\theta)$ , nous effectuons un changement de repère en exprimant le couple dans un repère lié à l'axe focal en utilisant une rotation. Le terme entre accolades, dû à l'excitation, ne dépendant pas des courants  $i_x$  et  $i_y$ , par conséquent la rotation ne concerne que le terme restant.

Ce changement de repère est réalisé avec la matrice de rotation suivante:

$$\mathbf{R}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Le vecteur courant  $\begin{pmatrix} i'_\alpha \\ i'_\beta \end{pmatrix}$  dans le repère lié à l'axe focal est obtenu par la transformation suivante:

$$\begin{pmatrix} i_x \\ i_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i'_\alpha \\ i'_\beta \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

En remplaçant  $i_x$  et  $i_y$  dans l'équation (2.46) à partir de (2.48), le terme entre accolades n'étant pas pris en considération, on trouve:

$$\begin{aligned}
 & i_{\alpha}'^2 [a(p\theta) \cos^2(\gamma) + c(p\theta) \sin^2(\gamma) + 2b(p\theta) \sin(\gamma) \cos(\gamma)] + \\
 & i_{\beta}'^2 [c(p\theta) \cos^2(\gamma) - a(p\theta) \sin^2(\gamma) - 2b(p\theta) \sin(\gamma) \cos(\gamma)] + \\
 & 2 i_{\alpha}' i_{\beta}' [(c(p\theta) - a(p\theta)) \sin(\gamma) \cos(\gamma) + b(p\theta) \cos(2\gamma)] + f = 0
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Dans le cas d'une hyperbole d'axe focal confondu avec l'axe des ordonnées, le terme rectangle est nul, d'où l'expression de l'angle  $\gamma(p\theta)$

$$\tan(2\gamma(p\theta)) = \frac{2b(p\theta)}{a(p\theta) - c(p\theta)} \tag{2.50}$$

En remplaçant  $a(p\theta)$ ,  $b(p\theta)$  et  $c(p\theta)$  par leurs valeurs données en (2.36) on trouve :

$$\begin{aligned}
 \tan(2\gamma(p\theta)) &= -\frac{\cos(2p\theta)}{\sin(2p\theta)} \\
 \text{soit :} \\
 \gamma(p\theta) &= p\theta - \frac{\pi}{4}
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

En remplaçant dans l'équation (2.39):

$$v(p\theta) = p\theta + \frac{\pi}{4} \tag{2.52}$$

On en déduit l'angle  $\delta$ , qui vaut :

$$\delta = \frac{\pi}{4}$$

Nous remarquons que l'angle entre l'asymptote et l'axe focal ( $\delta$ ) ne dépend pas de la position  $p\theta$  et il est égal à  $\frac{\pi}{4}$  par conséquent, le lieu des courbes isocouples dans le cas d'une machine synchrone à aimants permanents MSRCS correspond à une hyperbole équilatère figure 2.5.

Le passage du repère lié à l'axe focal de l'hyperbole équilatère vers le repère orthogonal de Concordia est obtenu par la matrice de rotation suivante:

$$\begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(p\theta - \frac{\pi}{4}) & -\sin(p\theta - \frac{\pi}{4}) \\ \sin(p\theta - \frac{\pi}{4}) & \cos(p\theta - \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i'_\alpha \\ i'_\beta \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Par conséquent, nous retrouvons les coordonnées du repère de Park classique à partir d'une rotation d'un angle de  $\pi/4$ .

$$\begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \\ -\sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i'_\alpha \\ i'_\beta \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

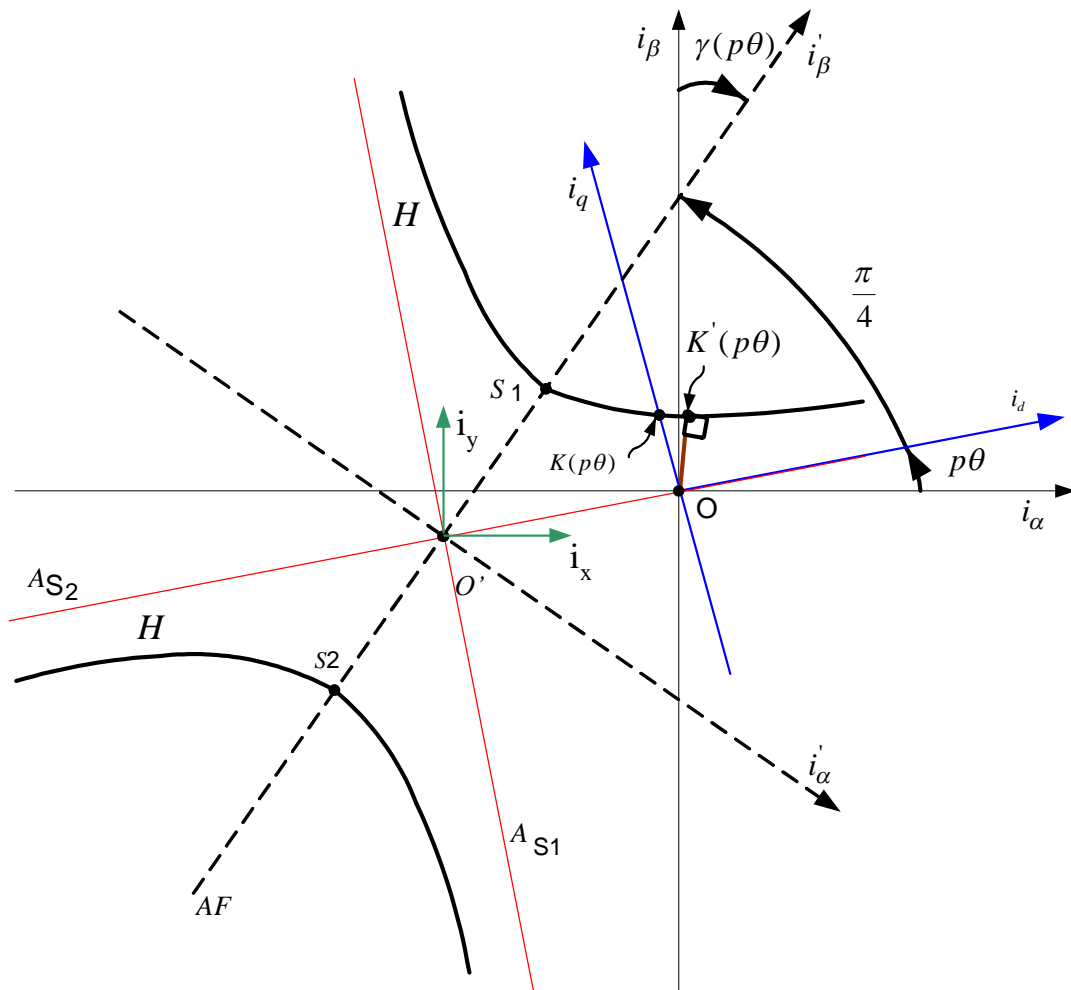


Figure 2.5 : Repère de Park pour moteur synchrone à aimants à pôles saillants à fém sinusoïdales



**Interprétation:**

Lorsque le rotor tourne, l'hyperbole ( $H$ ), solidaire du système d'axes  $O'\alpha'\beta'$ , décrit une trajectoire circulaire autour de l'origine du repère de Concordia. L'asymptote  $A_{S1}$  passe par l'origine  $O$  du repère de Concordia. L'axe  $d$  du repère de Park est confondu avec cette asymptote, il est décalé d'un angle  $p\theta$  par rapport à l'axe  $i_\alpha$ , lui même décalé d'un angle  $\gamma(p\theta) + \frac{\pi}{2}$  par rapport à l'axe focal de l'hyperbole. Le repère de Park est un repère orthogonal par conséquent l'axe  $q$  est perpendiculaire à l'axe  $d$ . Le repère de Park correspond donc aux asymptotes dans le cas de machines synchrones à aimants à fém sinusoïdales, il tourne au synchronisme par rapport au repère de Concordia [32].

Le repère lié aux asymptotes étant indépendant du signe du couple électromagnétique de la machine par conséquent cette étude est valable aussi bien pour les valeurs positives et négatives du couple.

**2.3.3 Contrôle du couple dans le repère de Park**

L'examen des courbes isocouples montre qu'il existe une infinité de solutions donnant un couple constant. Le point  $K'$  correspond au point de fonctionnement optimal avec les pertes Joule minimisées. Il s'agit du point de la courbe isocouple le plus proche de l'origine. Sa détermination nécessite la résolution d'un problème d'optimisation. Si l'on désire simplifier la commande et avoir un couple proportionnelle à la composante " $q$ " du courant, le point  $K$  est alors choisi. Dans ce cas le couple réductant n'est pas pris en considération, et les pertes Joule ne sont pas minimisées. Pour les machines synchrones sinusoïdales avec une faible saillance, le fonctionnement en ce point n'augmente pas de manière importante les pertes Joule et les performances d'une commande classique sont acceptables [33].

**2.4 Extension de la transformation de Park aux machines synchrones à pôles saillants à répartition de champ non sinusoïdale (MSRCNS)**

Afin de généraliser l'étude et de déterminer une extension de la transformation de Park applicable aux machines MSRCNS, nous suivons les mêmes étapes de calcul, effectuées pour les machines MSRCNS et à pôles saillants. La matrice inductance est considérée comme une fonction quelconque de la position. Cette matrice étant symétrique par conséquent la matrice

$$T_{32}^T \cdot \frac{dL(p\theta)}{d\theta} \cdot T_{32}, \text{ l'est également.}$$

avec :

$$\mathbf{L}(p\theta) = \begin{bmatrix} L_{aa}(p\theta) & M_{ab}(p\theta) & M_{ac}(p\theta) \\ M_{ba}(p\theta) & L_{bb}(p\theta) & M_{bc}(p\theta) \\ M_{ca}(p\theta) & M_{cb}(p\theta) & L_{cc}(p\theta) \end{bmatrix}$$

Nous gardons la forme générale des flux dans le repère de Concordia, que nous rappelons ci-dessous :

$$\Phi_{ra\beta}(p\theta) = \begin{bmatrix} \Phi_{ra}(p\theta) \\ \Phi_{rb}(p\theta) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{32}^T \cdot \Phi_{abc}(p\theta)$$

Posons :

$$\mathbf{A}(p\theta) = \begin{pmatrix} a(p\theta) & b(p\theta) \\ b(p\theta) & c(p\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{T}_{32}^T \cdot \frac{d\mathbf{L}(p\theta)}{d\theta} \cdot \mathbf{T}_{32} \quad (2.55)$$

Comme nous l'avons précisé précédemment, la nature de la conique est définie à partir de la matrice  $\mathbf{A}(p\theta)$ . Nous déduisons les coefficients de cette matrice en fonction des inductances propres et mutuelles de la machine [34] :

$$\begin{cases} a(p\theta) = \frac{1}{3} \frac{d}{d\theta} \left( L_{aa}(p\theta) + \frac{L_{bb}(p\theta) + L_{cc}(p\theta)}{4} - M_{ab}(p\theta) - M_{ac}(p\theta) + \frac{M_{bc}(p\theta)}{2} \right) \\ b(p\theta) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{L_{cc}(p\theta) - L_{bb}(p\theta)}{2} + M_{ab}(p\theta) - M_{ac}(p\theta) \right) \\ c(p\theta) = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{L_{aa}(p\theta) + L_{cc}(p\theta)}{4} - \frac{M_{bc}(p\theta)}{2} \right) \end{cases} \quad (2.56)$$

#### 2.4.1 Détermination des valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}(p\theta)$

Les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}(p\theta)$  sont déterminées à partir du calcul du déterminant suivant:

$$\text{Det}(\mathbf{A}(p\theta) - \lambda \cdot \mathbf{I}_2) = 0 \quad (2.57)$$

La résolution de l'équation caractéristique aboutit aux deux valeurs propres suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_1(p\theta) = \frac{(a(p\theta) + c(p\theta)) + \sqrt{(a(p\theta) + c(p\theta))^2 - 4(a(p\theta) \cdot c(p\theta) - b(p\theta)^2)}}{2} \\ \lambda_2(p\theta) = \frac{(a(p\theta) + c(p\theta)) - \sqrt{(a(p\theta) + c(p\theta))^2 - 4(a(p\theta) \cdot c(p\theta) - b(p\theta)^2)}}{2} \end{cases} \quad (2.58)$$

avec  $\lambda_1(p\theta) \cdot \lambda_2(p\theta) < 0$  dans le cas d'une hyperbole.

### 2.4.2 Détermination des coordonnées du centre de l'hyperbole

Les coordonnées du centre  $O'$  de l'hyperbole par rapport à l'origine  $O$  du repère de Park sont obtenues par la résolution du système suivant :

$$2 \begin{pmatrix} a(p\theta) & b(p\theta) \\ b(p\theta) & c(p\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{\alpha 0} \\ i_{\beta 0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{d\Phi_{r\alpha}}{d\theta} \\ \frac{d\Phi_{r\beta}}{d\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Les coordonnées  $i_{\alpha 0}(p\theta)$  et  $i_{\beta 0}(p\theta)$  du centre  $O'$  par rapport à  $O$  sont :

$$\begin{pmatrix} i_{\alpha 0} \\ i_{\beta 0} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\lambda_1(p\theta)\lambda_2(p\theta)} \begin{pmatrix} b(p\theta)\frac{d\Phi_{r\beta}}{d\theta} - c(p\theta)\frac{d\Phi_{r\alpha}}{d\theta} \\ b(p\theta)\frac{d\Phi_{r\alpha}}{d\theta} - a(p\theta)\frac{d\Phi_{r\beta}}{d\theta} \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

En raison de la forme non sinusoïdale des forces contres électromotrices, le centre de l'hyperbole, décrit une trajectoire quelconque mais fermée autour de l'origine du repère de Concordia.

De la même manière que précédemment, nous déterminons l'angle  $\gamma(p\theta)$  par la relation:

$$\tan(2\gamma(p\theta)) = \frac{2 \cdot b(p\theta)}{a(p\theta) - c(p\theta)}$$

Ici l'angle  $\gamma(p\theta)$  dépend du contenu harmonique de la matrice inductance de la machine et varie en fonction de la position  $p\theta$ . Il en résulte une ondulation autour de  $(p\theta - \pi/4)$ . Rappelons toutefois que l'ondulation est nulle dans le cas d'une variation sinusoïdale des inductances.

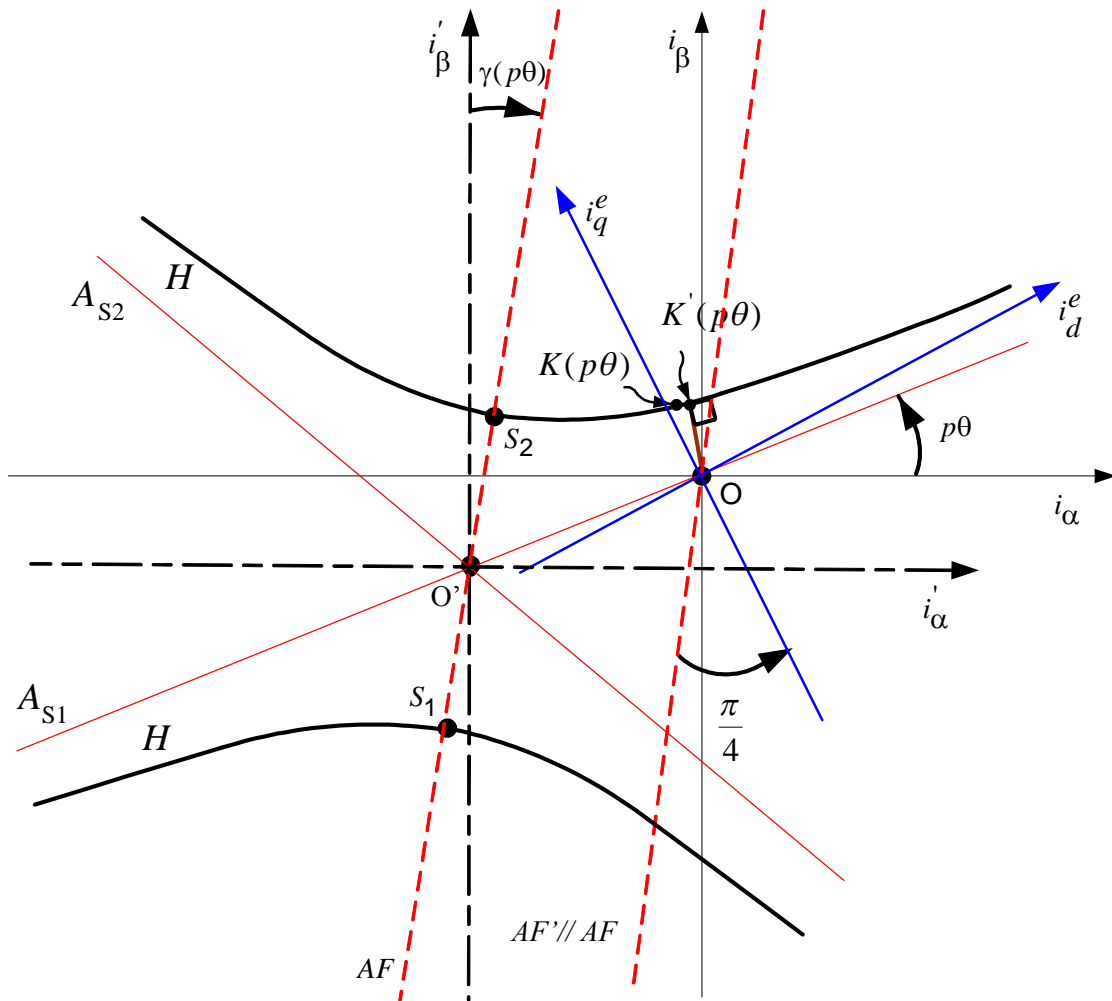


Figure 2.6 : Repère de Park pour moteur synchrone à aimants à fém et inductances non sinusoïdales.

### 2.4.3 Repère de Park étendu pour les machines MSRCNS

Nous avons vu que le repère de Park dans le cas des machines synchrones à pôles saillants (MSRCS) correspondait aux asymptotes d'une l'hyperbole. Ces asymptotes sont décalées de  $\frac{\pi}{4}$  par rapport à l'axe focal étant donné que l'hyperbole est équilatère. L'extension de ce

résultat aux machines synchrones à pôles saillants (MSRCNS) doit tenir compte de la nature non sinusoïdale des inductances et des fém de la machine. Les calculs développés dans ce chapitre nous ont permis d'exprimer le contenu harmonique des inductances de la machine à travers l'angle  $\gamma(p\theta)$  et de montrer que les formes non sinusoïdales des fém agissent sur la trajectoire du centre de l'hyperbole par rapport à l'origine du repère de Concordia. Il s'ensuit une trajectoire complexe de l'axe focal des courbes isocouples se traduisant par une oscillation d'un angle  $\gamma(p\theta)$  pour une position  $\theta$  donnée du rotor et évoluant selon une trajectoire fermée autour du repère de Concordia lorsque le rotor tourne. Il est donc judicieux de construire le repère de Park étendu en partant d'une référence fixe indépendante des formes d'ondes des inductances et fém de la machine. Cette référence correspond à l'axe focal. On choisit alors l'axe  $i_q^e$  décalé de  $\frac{\pi}{4}$  par rapport à l'axe  $AF'$  (parallèle à l'axe focal  $AF$ ), correspondant au repère lié aux asymptotes dans le cas d'une machine sinusoïdale. Cet axe étant décalé d'un angle  $\gamma(p\theta)$  par rapport à l'axe  $i_\beta$ . L'axe  $i_d^e$  étant décalé de  $-\frac{\pi}{2}$  par rapport à l'axe  $i_\beta$ . Le repère étendu ( $d^e q^e$ ) ainsi obtenu correspond au repère de Park étendu. Ce repère est valable pour les valeurs positives et négatives du couple électromagnétique [34, 35].

#### 2.4.4 Contrôle du couple dans le repère de Park étendu

Le fonctionnement au point  $K$  (figure 2.6), correspond à la transposition au cas des machines non sinusoïdales, de la stratégie de commande des machines sinusoïdales, qui consiste à annuler la composante "d" du courant et à avoir un couple proportionnel à la composante q. Ce type de commande ne peut que donner des résultats peu satisfaisants en terme d'ondulation de couple et de pertes Joule. Il est donc plus judicieux de travailler au point de fonctionnement  $K'$ , minimisant les pertes Joule et tenant compte du couple réactif de la machine. La solution pour ce point de fonctionnement nécessite la résolution d'un problème d'optimisation au moyen de techniques d'optimisation mathématique. Mathématiquement, ce problème peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\text{Minimiser: } R_S (i_d^{e2} + i_q^{e2}) \quad \text{sous contrainte : } \Gamma = \Gamma_{\text{ref}} \quad (2.61)$$

### 2.4.5 Détermination des courants de référence pour un fonctionnement optimal

Afin de déterminer les références optimales de courant pour un fonctionnement à couple donné, il est important de les exprimer en fonction des valeurs propres établies précédemment.

La matrice  $A(p\theta)$ , définie précédemment, peut s'écrire sous la forme :

$$A(p\theta) = \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} \frac{a(p\theta) + c(p\theta)}{2} + b(p\theta) & \frac{c(p\theta) - a(p\theta)}{2} \\ \frac{c(p\theta) - a(p\theta)}{2} & \frac{a(p\theta) + c(p\theta)}{2} - b(p\theta) \end{pmatrix} \mathbf{R}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad (2.62)$$

que l'on réécrit :

$$A(p\theta) = \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[ \frac{a(p\theta) + c(p\theta)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b(p\theta) & \frac{c(p\theta) - a(p\theta)}{2} \\ \frac{c(p\theta) - a(p\theta)}{2} & -b(p\theta) \end{pmatrix} \right] \mathbf{R}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad (2.63)$$

On vérifie que le second terme de l'expression entre crochets peut s'exprimer en fonction de l'angle  $\gamma(p\theta)$  :

$$\begin{cases} \sin(2\gamma(p\theta)) = \frac{-b(p\theta)}{\sqrt{(b(p\theta))^2 + \frac{(c(p\theta) - a(p\theta))^2}{4}}} \\ \cos(2\gamma(p\theta)) = \frac{c(p\theta) - a(p\theta)}{2\sqrt{(b(p\theta))^2 + \frac{(c(p\theta) - a(p\theta))^2}{4}}} \end{cases} \quad (2.64)$$

Soit :

$$\begin{cases} -b(p\theta) = \sin(2\gamma(p\theta)) \sqrt{(b(p\theta))^2 + \frac{(c(p\theta) - a(p\theta))^2}{4}} \\ c(p\theta) - a(p\theta) = 2\cos(2\gamma(p\theta)) \sqrt{(b(p\theta))^2 + \frac{(c(p\theta) - a(p\theta))^2}{4}} \end{cases} \quad (2.65)$$

En remplaçant dans la matrice  $A(p\theta)$ , on obtient l'équation:

$$A(p\theta) = \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[ \frac{a(p\theta) + c(p\theta)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\lambda_2(p\theta) - \lambda_1(p\theta)) \begin{pmatrix} -\sin(2\gamma(p\theta)) & \cos(2\gamma(p\theta)) \\ \cos(2\gamma(p\theta)) & \sin(2\gamma(p\theta)) \end{pmatrix} \right] \mathbf{R}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad (2.66)$$

On peut réécrire cette matrice en faisant apparaître ses valeurs propres, ayant les relations suivantes :

$$\begin{cases} -2b(p\theta) = \sin(2\gamma(p\theta)) (\lambda_2(p\theta) - \lambda_1(p\theta)) \\ c(p\theta) - a(p\theta) = \cos(2\gamma(p\theta)) (\lambda_2(p\theta) - \lambda_1(p\theta)) \end{cases} \quad (2.67)$$

avec :

$$\begin{cases} (\lambda_2(p\theta) - \lambda_1(p\theta)) = \sqrt{(a(p\theta) - c(p\theta))^2 + 4b(p\theta)^2} \\ (\lambda_2(p\theta) + \lambda_1(p\theta)) = \frac{a(p\theta) + c(p\theta)}{2} \end{cases} \quad (2.68)$$

Finalement, la matrice  $A(p\theta)$  peut se factoriser sous la forme suivante:

$$A(p\theta) = \frac{1}{2} \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{4}\right) \left[ (\lambda_2(p\theta) + \lambda_1(p\theta)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (\lambda_2(p\theta) - \lambda_1(p\theta)) \mathbf{R}(\gamma(p\theta)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{R}(-\gamma(p\theta)) \right] \mathbf{R}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad (2.69)$$

Le couple est obtenu en remplaçant (2.69) dans l'équation (2.30) :

$$\Gamma = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{\alpha\beta}^T \mathbf{R}\left(\gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4}\right) \left[ (\lambda_2(p\theta) + \lambda_1(p\theta)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (\lambda_2(p\theta) - \lambda_1(p\theta)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \mathbf{R}\left(-\left(\gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4}\right)\right) \mathbf{i}_{\alpha\beta} + \frac{d\Phi_{r\alpha\beta}(p\theta)^T}{d\theta} \cdot \mathbf{i}_{\alpha\beta}$$

Les composantes du courant dans le repère de Park étendu sont obtenues à partir d'une rotation de  $\gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4}$  par rapport à l'axe focal de la courbe isocouple, soit par :

$$\begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \end{pmatrix} = \mathbf{R}(-\gamma(p\theta)) \mathbf{R}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

Dans le repère de Park étendu, le couple s'exprime alors :

$$\Gamma = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{dq}^e{}^T \left[ (\lambda_2(p\theta) + \lambda_1(p\theta)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (\lambda_2(p\theta) - \lambda_1(p\theta)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \mathbf{i}_{dq}^e + \frac{d\Phi_{ra\beta}(p\theta)}{d\theta} \cdot \mathbf{R}\left(\gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4}\right) \mathbf{i}_{dq}^e \quad (2.71)$$

Que l'on peut également écrire sous la forme finale :

$$\Gamma = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{dq}^e{}^T \left[ (\lambda_1(p\theta) + \lambda_2(p\theta)) \begin{pmatrix} (\lambda_1(p\theta) + \lambda_2(p\theta)) & (\lambda_2(p\theta) - \lambda_1(p\theta)) \\ (\lambda_2(p\theta) - \lambda_1(p\theta)) & (\lambda_1(p\theta) + \lambda_2(p\theta)) \end{pmatrix} \right] \mathbf{i}_{dq}^e + \frac{d\Phi_{ra\beta}(p\theta)^T}{d\theta} \cdot \mathbf{R}\left(\gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4}\right) \mathbf{i}_{dq}^e \quad (2.72)$$

Enfin, les références optimales des courants pour un fonctionnement à couple sans ondulations avec minimisation des pertes Joules sont obtenues après résolution du problème d'optimisation avec contrainte suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } R_s \cdot (i_d^{e2} + i_q^{e2}) \\ \text{Sous contrainte} \\ \Gamma_{ref} = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{dq}^e{}^T \left[ (\lambda_1(p\theta) + \lambda_2(p\theta)) \begin{pmatrix} (\lambda_1(p\theta) + \lambda_2(p\theta)) & (\lambda_2(p\theta) - \lambda_1(p\theta)) \\ (\lambda_2(p\theta) - \lambda_1(p\theta)) & (\lambda_1(p\theta) + \lambda_2(p\theta)) \end{pmatrix} \right] \mathbf{i}_{dq}^e + \frac{d\Phi_{ra\beta}(p\theta)^T}{d\theta} \cdot \mathbf{R}\left(\gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4}\right) \mathbf{i}_{dq}^e \end{array} \right. \quad (2.73)$$



## **2.5 Conclusion**

L'étude basée sur les courbes isocouples dans le repère de Concordia, nous a permis de disposer d'un modèle inverse pour l'analyse des machines synchrones à aimants permanents. Ce modèle nous a conduit à définir une extension de la transformation Park pour les machines à aimants permanents à fém et inductances non sinusoïdales. Aucune hypothèse n'est faite sur les formes d'ondes des forces électromotrices et des inductances de la machine hormis la saturation magnétique supposée négligeable. Cette approche, basée sur le modèle exact de la machine synchrone, permet de calculer les références des courants adéquates pour la minimisation des pertes Joule statoriques et la neutralisation effective des ondulations du couple électromagnétique. L'application des résultats de cette étude sur un prototype de machine synchrone à aimants permanents à fém et inductances non sinusoïdales fera l'objet du chapitre suivant.

## Chapitre 3

Application à un prototype de machine synchrone  
à aimants à fém et inductances non sinusoïdales

## Application à un prototype de machine synchrone à aimants à fém et inductances non sinusoidales

### 3.1 Introduction

Le modèle inverse établi dans le chapitre précédent peut être détaillé en effectuant le développement en série de Fourier de la matrice inductance. Cela permet de préciser les caractéristiques liées aux harmoniques et de développer des expressions exploitables dans l'étude de la machine synchrone à aimants permanents non sinusoidale.

Dans ce chapitre, nous formulons le problème d'optimisation établi au chapitre précédent pour un prototype de machine synchrone à aimants permanents non sinusoidale réalisé au laboratoire SATIE de l'ENS de Cachan [36,37]. Ensuite, nous présentons l'algorithme de la méthode numérique d'optimisation ainsi que les résultats des calculs. Enfin, nous proposons un modèle simplifié (suboptimal) afin de faciliter l'implantation sur calculateur numérique de la commande dans le repère de Park étendu.

### 3.2 Présentation et étude de la machine synchrone

Pour valider le modèle inverse développé précédemment, nous avons utilisé la machine synchrone dont le rotor est représenté sur la figure 3.1:

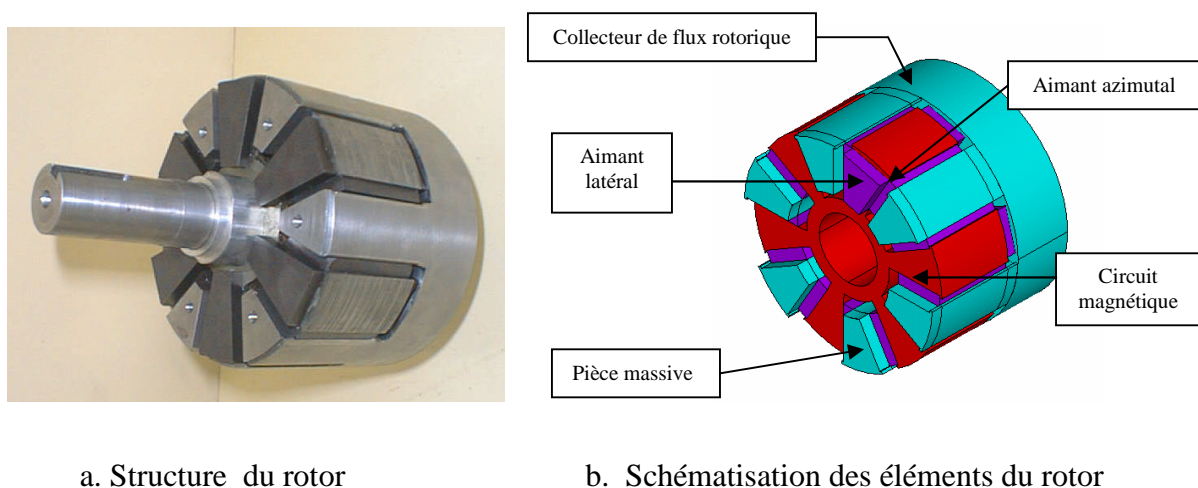


Figure 3.1 : Rotor de la machine synchrone à aimants permanents

Il s'agit d'une machine synchrone à aimants permanents à concentration de flux avec bobinage auxiliaire d'excitation. Dans notre étude, la bobine auxiliaire d'excitation ne sera pas alimentée, cependant les effets dus à la structure double excitation sont pris en compte du fait de leurs influences sur les formes d'ondes d'inductances et de fém. Ce sera donc le modèle d'une machine synchrone à aimants permanents à pôles saillants.

### **3.2.1 Mesure des inductances propre et mutuelle**

Les tests expérimentaux sont effectués sur un pas polaire et à une fréquence de 50Hz. Les mesures sont réalisées à l'aide du procédé illustré sur la figure 3.2, avec un pas angulaire de  $0,65^\circ$ . Pour chaque position du rotor, la valeur instantanée de l'inductance propre est obtenue en alimentant une phase de la machine par une tension sinusoïdale (la phase "a" dans ce cas, les deux autres phases étant ouvertes) et on relève le courant qui y circule à l'aide d'un Ampèremètre. L'inductance propre est donnée par la relation :

$$L_{aa} = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\left(\frac{V_a}{I_a}\right)^2 - R_s^2} \quad (3.1)$$

où :

$V_a$  est la tension d'alimentation de la phase  $a$  et  $I_a$  le courant dans la phase  $a$ .

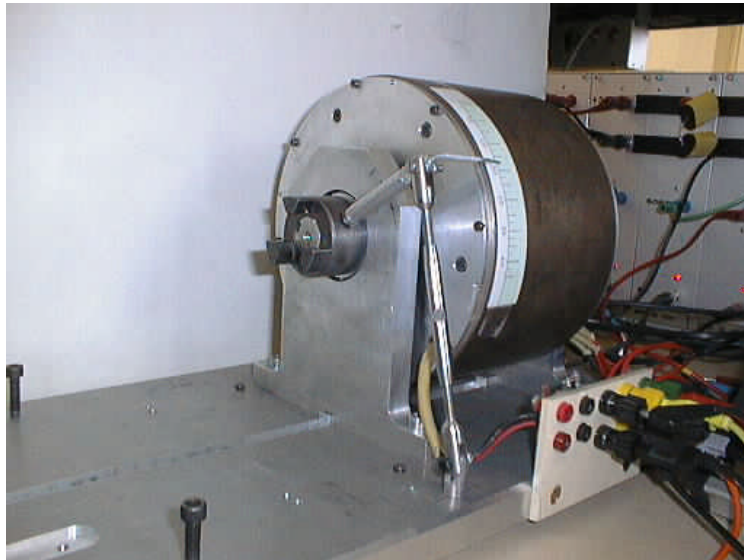
La mutuelle inductance, mesurable à partir de la relation (3.2), est obtenue, en injectant un courant dans la phase "c". Un voltmètre est placé aux bornes de la phase "b" pour la mesure de la tension. Cet essai est effectué avec la phase "a" ouverte.

$$M_{bc} = \frac{1}{2\pi f} \frac{V_b}{I_c} \quad (3.2)$$

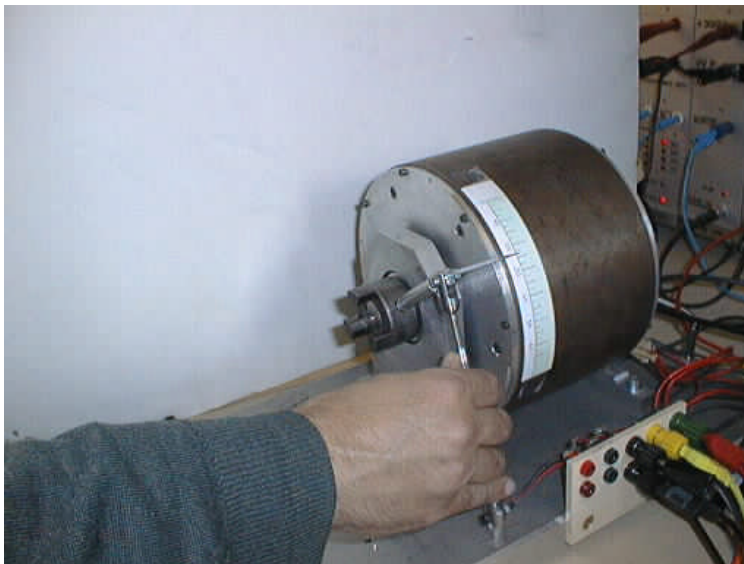
Où :

$V_b$  est la tension d'alimentation de la phase  $b$  et  $I_c$  le courant dans la phase  $c$

Pour minimiser les effets de la saturation magnétique sur la valeur des inductances et pouvoir réaliser des mesures à l'arrêt, nous effectuons les essais pour une faible valeur du courant.



a. Dispositif de mesure



b. Mesure de l'angle

Figure 3.2 : dispositif de mesure des inductances

Les résultats des mesures sont donnés sur la figure 3.3. Nous avons, également, fait apparaître sur cette figure le tracé (en trait discontinu) de la décomposition harmonique des inductances  $L_{aa}(p\theta)$  et  $M_{bc}(p\theta)$  en se limitant aux harmoniques inférieurs à l'ordre 10. Au delà de ce rang, les amplitudes des harmoniques sont très faibles. Les spectres de l'inductance propre et de la mutuelle inductance sont donnés sur la figure 3.4. Le tableau 3.1 correspond aux valeurs des coefficients de la décomposition en série de Fourier de ces inductances.

Les expressions des inductances  $L_{aa}(p\theta)$  et  $M_{23}(p\theta)$  pour les harmoniques considérés s'écrivent:

$$L_{aa}(p\theta) = 10^{-3} \cdot [7.865 - 1.695 \cos(2p\theta) - 0,926 \cos(4p\theta) + 0.15 \cos(8p\theta)] \quad (3.3)$$

$$M_{bc}(p\theta) = 10^{-3} \cdot [-1,185 - 0,78 \cos(2p\theta) - 0,04 \cos(4p\theta) + 0.066 \cos(8p\theta)] \quad (3.4)$$

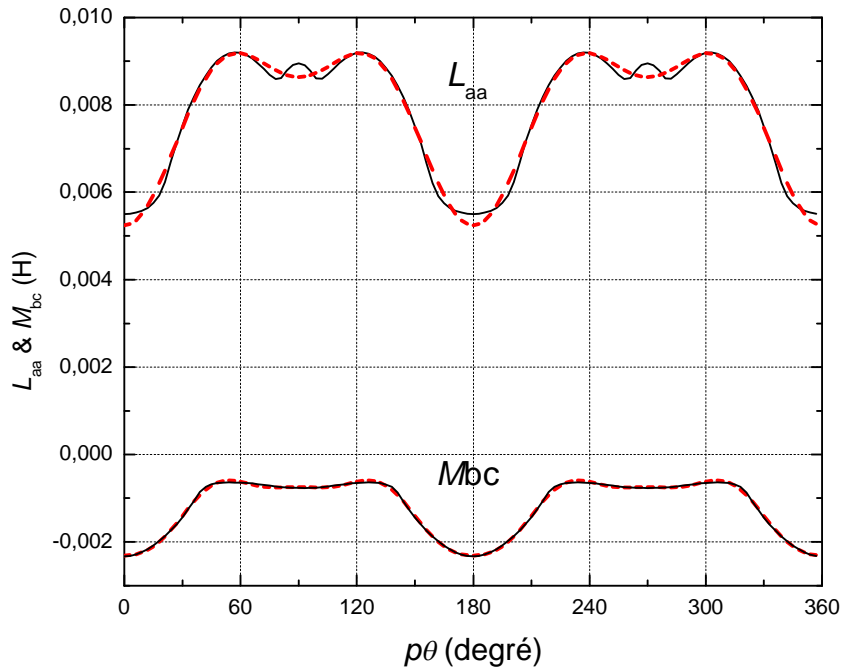


Figure 3.3: relevés expérimentaux des inductance en fonction de la position

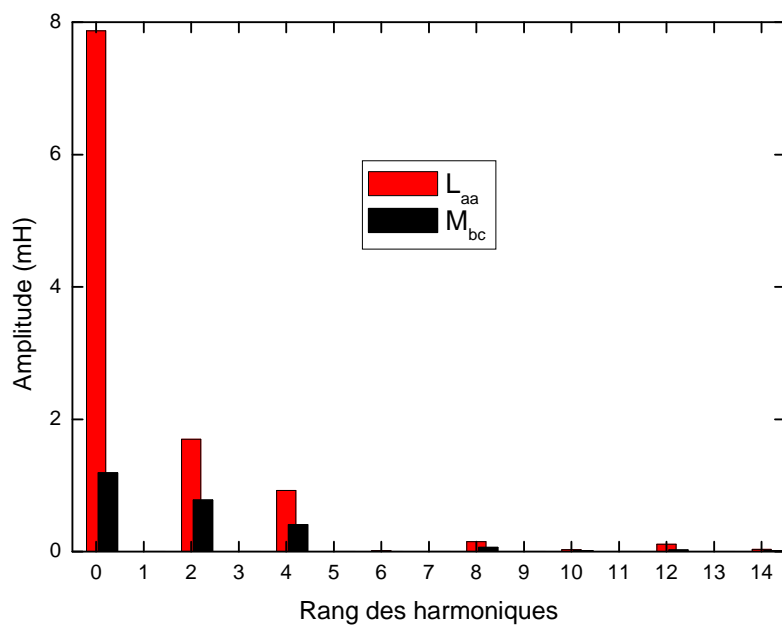


Figure 3.4: Décomposition spectrale de l'inductance propre et mutuelle inductance

Tableau 3.1: Amplitudes des harmoniques de l'inductance propre et de la mutuelle inductance

Rang des harmoniques		0	2	4	6	8	10	12	14
$L_{aa}$		$L_{S0}$	$L_{S2}$	$L_{S4}$	$L_{S6}$	$L_{S8}$	$L_{S10}$	$L_{S12}$	$L_{S14}$
	Amplitude (mH)	7.865	-1.696	-0.926	0.019	0.153	0.032	0.113	-0.037
$M_{bc}$		$M_{S0}$	$M_{S2}$	$M_{S4}$	$M_{S6}$	$M_{S8}$	$M_{S10}$	$M_{S12}$	$M_{S14}$
	Amplitude (mH)	-1.185	-0.78	-0.041	-0.004	0.066	0.0157	-0.0256	-0.016

On note que lorsque l'on modélise la machine au sens du premier harmonique, les inductances propres et mutuelles des enroulements statoriques sont représentées par un terme constant et un terme de rang 2. Le rapport de l'harmonique de rang 2 de l'inductance mutuelle sur l'harmonique de même rang de l'inductance propre est égal à 1  $\left( \frac{M_{S2}}{L_{S2}} = 1 \right)$  et le rapport de leurs valeurs moyennes,  $\frac{M_{S0}}{L_{S0}}$  vaut  $-0.5$  lorsque les fuites sont négligées [38]. Les valeurs expérimentales de ces rapports calculées à partir du tableau (3.1) sont:

$$\frac{M_{S2}}{L_{S2}} = 0.46 \quad \frac{M_{S0}}{L_{S0}} = -0.15$$

Nous constatons que ces résultats ne correspondent pas aux résultats théoriques prévus par le modèle du premier harmonique [39]. En effet, les harmoniques de rang 4 pour les deux inductances  $L_{aa}$  et  $M_{bc}$  présentent des valeurs non négligeables par rapport aux harmoniques de rang 2. Ce qui montre les limites du modèle du premier harmonique.

### 3.2.2 Relevé de la fém à vide

Le relevé de la fém. à vide est obtenu en entraînant la machine synchrone, fonctionnant en générateur, par un moteur auxiliaire lui imposant une rotation à vitesse constante. Le résultat de la mesure est donné sur la figure 3.5. On notera la nature non sinusoïdale de cette fém. Compte tenu des conditions de symétrie auquel satisfont les fém, son développement en série de Fourier ne contient pas de termes paires (figure 3.6). Le tableau 3.2, donne les amplitudes normalisées (ramenées à la valeur du fondamental) des différents harmoniques contenus dans la fém. d'une phase de la machine jusqu'à l'ordre 14. Pour des raisons de symétrie évidentes liées à la structure triphasée de la machine, les fém dans les deux autres phases sont identiques à la phase relevée mais décalées de  $\pm \frac{2\pi}{3}$ .

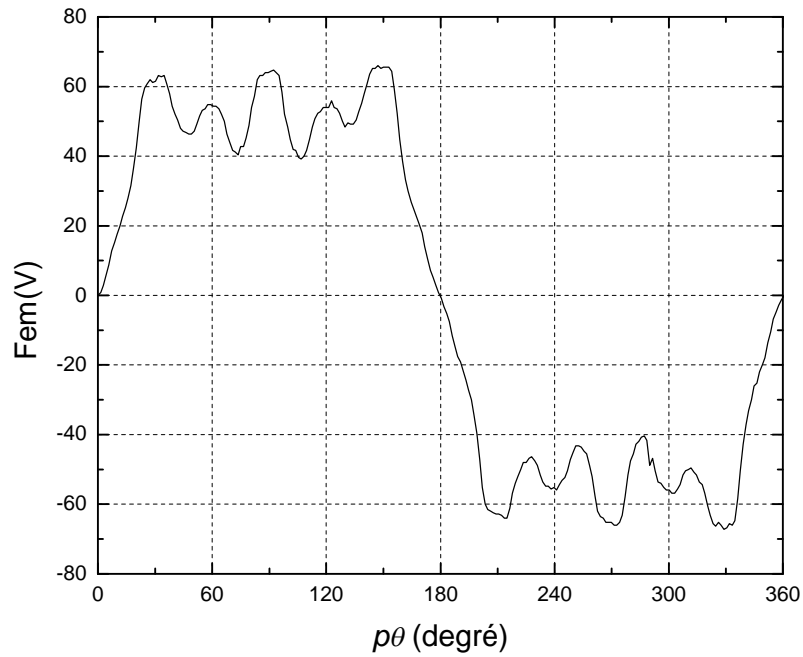


Figure 3.5 : relevé de la fém. à vide dans la phase a

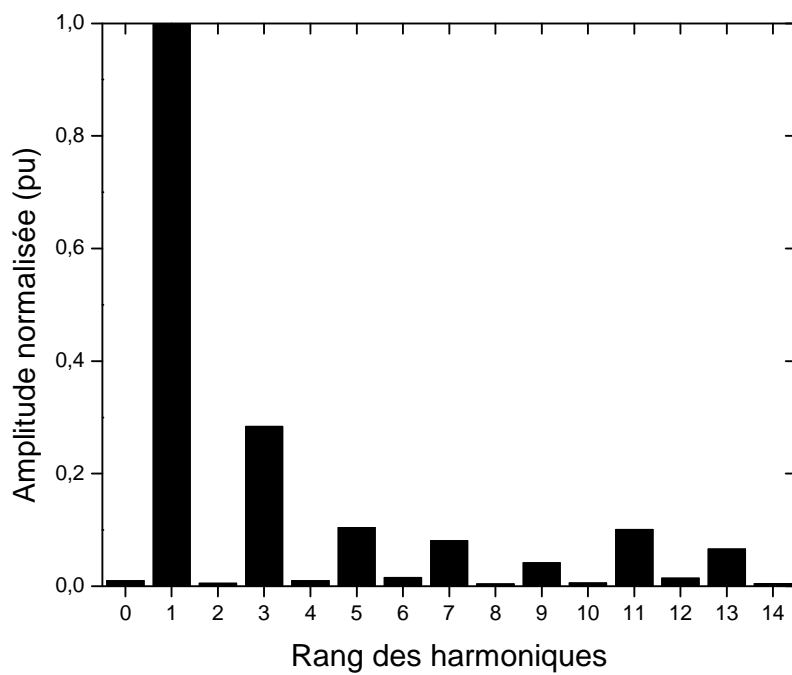


Figure 3.6: Décomposition spectrale de la fém. à vide. valeurs normalisées par rapport au fondamental

Tableau 3.2: amplitudes relatives des harmoniques de la fém

Rang	1	3	5	7	9	11	13
Amplitude (pu)	1	0.283	0.104	0.081	0.042	0.10	0.066



Les figures 3.7 et 3.8 montrent que les formes d'ondes des dérivées des flux  $\Phi'_{r\alpha}$  et  $\Phi'_{r\beta}$  par rapport à  $p\theta$  ne sont pas sinusoidales. Elles correspondent aux fcém de la machine dans le repère de Concordia

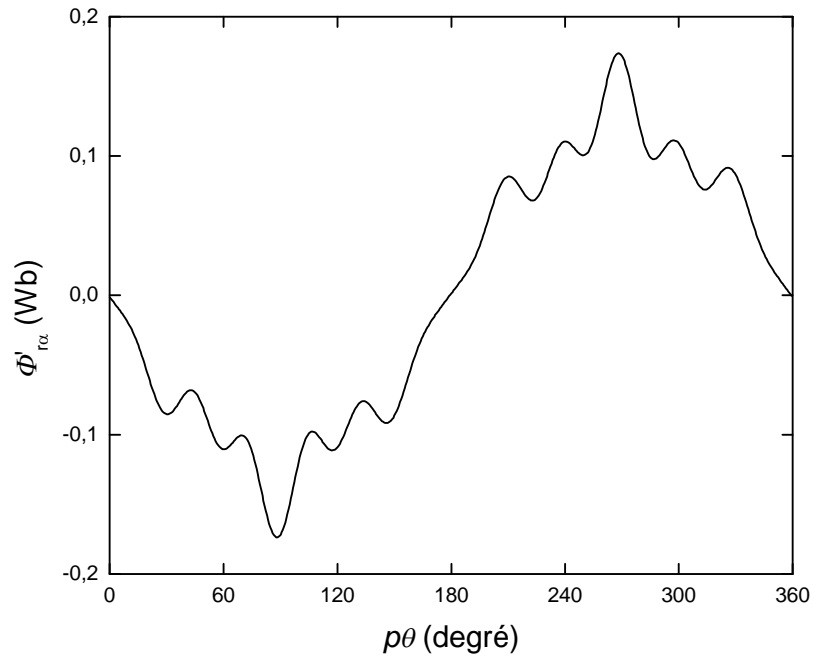


Figure 3.7 : Dérivée du flux induit par les aimants selon l'axe " $\alpha$ "

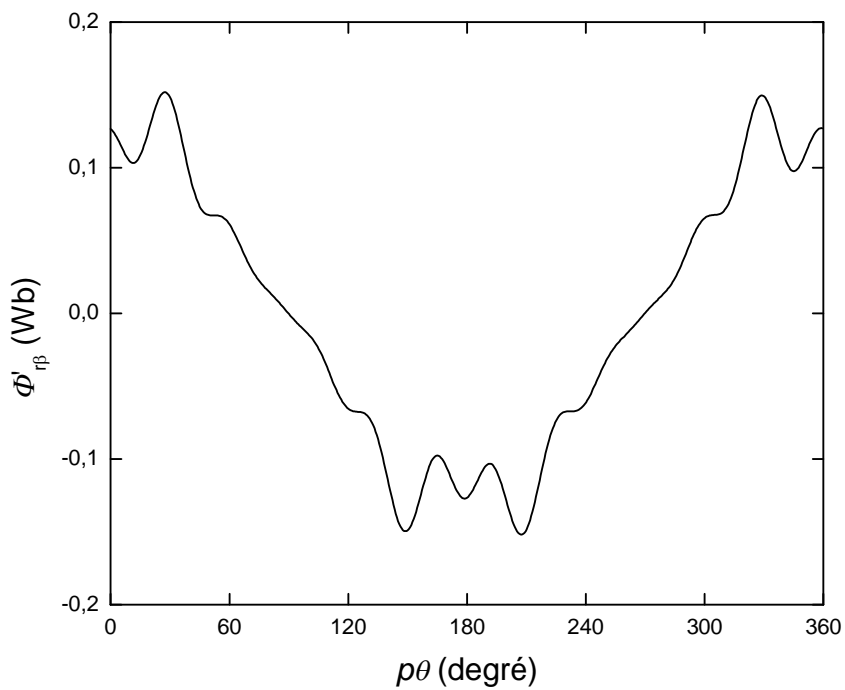


Figure 3.8 : Dérivée du flux induit par les aimants selon l'axe " $\beta$ "

Le tracé de la figure 3.9 montre l'évolution dans le plan  $(\alpha, \beta)$  de l'extrémité du vecteur représentatif du flux induit par les aimants dans les phases statoriques. La courbe superposée, en traits discontinus, représente ce même vecteur lorsque la fém est parfaitement sinusoïdale. Cette figure montre également que le module de ce vecteur est constant dans le cas des machines sinusoïdales et varie avec la position dans le cas de machines non sinusoïdales.

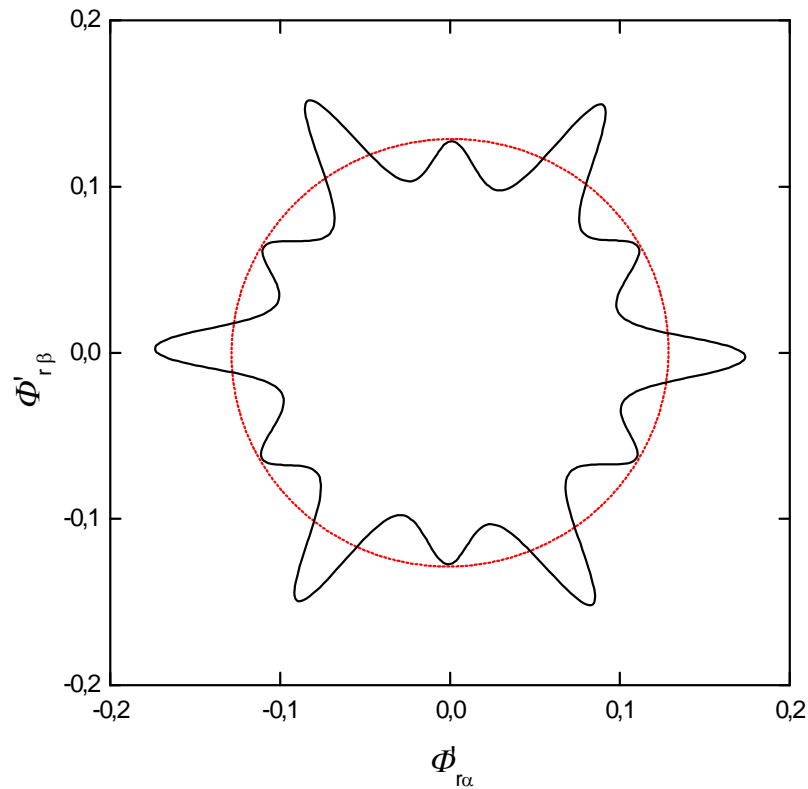


Figure 3.9: Evolution dans le plan  $\alpha\beta$  du vecteur représentatif du flux induit par les aimants dans les phases statoriques

### 3.2.3 Développement en série de Fourier

Lorsque les formes d'onde des inductances propres et des inductances mutuelles ne sont pas sinusoïdales et que la machine est symétrique, les expressions de ces inductances peuvent se mettre sous la forme de séries de Fourier en cosinus, comportant que des harmoniques pairs, en plus de la valeur moyenne [39] :

$$L_{aa}(p\theta) = L_0 + \sum_{n=1}^{\infty} L_{2(3n-2)} \cdot \cos((3n-2) \cdot 2p\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} L_{2(3n-1)} \cdot \cos((3n-1) \cdot 2p\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} L_{2(3n)} \cdot \cos(3n \cdot 2p\theta)$$

$$\begin{aligned}
 L_{bb}(p\theta) &= L_0 + \sum_{n=1}^{\infty} L_{2(3n-2)} \cdot \cos\left((3n-2) \cdot 2p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} L_{2(3n-1)} \cdot \cos\left((3n-1) \cdot 2p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} L_{2(3n)} \cdot \cos((3n) \cdot 2p\theta) \\
 L_{cc}(p\theta) &= L_0 + \sum_{n=1}^{\infty} L_{2(3n-2)} \cdot \cos\left((3n-2) \cdot 2p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} L_{2(3n-1)} \cdot \cos\left((3n-1) \cdot 2p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} L_{2(3n)} \cdot \cos((3n) \cdot 2p\theta)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
 M_{ab}(p\theta) &= M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M_{2(3n-2)} \cdot \cos\left((3n-2) \cdot 2p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{2(3n-1)} \cdot \cos\left((3n-1) \cdot 2p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} M_{2(3n)} \cdot \cos((3n) \cdot 2p\theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{ac}(p\theta) &= M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M_{2(3n-2)} \cdot \cos\left((3n-2) \cdot 2p\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{2(3n-1)} \cdot \cos\left((3n-1) \cdot 2p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} M_{2(3n)} \cdot \cos((3n) \cdot 2p\theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{bc}(p\theta) &= M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M_{2(3n-2)} \cdot \cos((3n-2) \cdot 2p\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{2(3n-1)} \cdot \cos((3n-1) \cdot 2p\theta) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} M_{2(3n)} \cdot \cos((3n) \cdot 2p\theta)
 \end{aligned}$$

avec  $L_0 > 0$  ;  $M_0 < 0$  ; les signes des autres constantes sont fonction du rang de leur harmonique et décroissent lorsque ce dernier augmente.

L'alimentation de la machine par des courants périodiques quelconques produira un champ magnétique qui sera la somme d'un champ tournant en sens direct dû aux harmoniques d'inductances de rangs  $(3n-2)$ , en sens inverse du précédent, dû aux harmoniques d'inductances de rangs  $(3n-1)$  et d'un champ homopolaire dû aux harmoniques de rang  $(3n)$ .

Les coefficients de la matrice  $A(p\theta)$  sont définis à partir des dérivées des coefficients de la matrice inductance par rapport à la position  $\theta$ . Après calcul on trouve:

$$a(p\theta) = -\frac{1}{2} \left[ \sum_{n_o} L_{v_{2n_o}} \cdot 2pn_o \cdot \sin(2pn_o \cdot \theta) + \sum_{n_d} L_{v_{2n_d}} \cdot 2pn_d \cdot \sin(2pn_d \cdot \theta) + \sum_{n_i} L_{v_{2n_i}} \cdot 2pn_i \cdot \sin(2pn_i \cdot \theta) \right]$$

$$b(p\theta) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{n_d} L_{v_{2n_d}} \cdot 2pn_d \cdot \cos(2pn_d \cdot \theta) - \sum_{n_i} L_{v_{2n_i}} \cdot 2pn_i \cdot \cos(2pn_i \cdot \theta) \right] \quad (3.6)$$

$$c(p\theta) = -\frac{1}{2} \left[ \sum_{n_o} L_{v_{2n_o}} \cdot 2pn_o \cdot \sin(2pn_o \cdot \theta) - \sum_{n_d} L_{v_{2n_d}} \cdot 2pn_d \cdot \sin(2pn_d \cdot \theta) - \sum_{n_i} L_{v_{2n_i}} \cdot 2pn_i \cdot \sin(2pn_i \cdot \theta) \right]$$

avec :

$$L_{v_{2n_d}} = M_{2(3n-2)} + \frac{L_{2(3n-2)}}{2} \quad L_{v_{2n_i}} = M_{2(3n-1)} + \frac{L_{2(3n-1)}}{2} \quad L_{v_{2n_o}} = L_{2(3n)} - M_{2(3n)}$$

$$n_d = 3n - 2, \quad n_i = 3n - 1, \quad n_o = 3n \quad \text{et } n \in \mathbb{N}^*$$

Nous remarquons que le coefficient  $b(p\theta)$  est indépendant de la composante homopolaire et qu'en l'absence de celle-ci, les coefficients  $a(p\theta)$  et  $c(p\theta)$  sont de même module et de signes opposés. Enfin, tous les coefficients sont indépendants de la valeur moyenne des inductances propres et des mutuelles. Nous en déduisons alors l'expression de l'angle  $\gamma(p\theta)$  défini par la relation (2.50), qui s'écrit :

$$\tan(2 \cdot \gamma(p\theta)) = \frac{\sum_{n_i} L_{v_{2n_i}} \cdot 2pn_i \cdot \cos(2pn_i \cdot \theta) - \sum_{n_d} L_{v_{2n_d}} \cdot 2pn_d \cdot \cos(2pn_d \cdot \theta)}{\sum_{n_i} L_{v_{2n_i}} \cdot 2pn_i \cdot \sin(2pn_i \cdot \theta) + \sum_{n_d} L_{v_{2n_d}} \cdot 2pn_d \cdot \sin(2pn_d \cdot \theta)} \quad (3.7)$$

L'angle  $\gamma(p\theta)$  utilisé dans la matrice de rotation est indépendant des termes de rang  $n_0$ .

Après calculs, les valeurs propres  $\lambda_1(p\theta)$  et  $\lambda_2(p\theta)$  de la matrice  $\mathbf{A}(p\theta)$ , définies par (2.62), se réécrivent comme suit :

$$\lambda_1(p\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{n_0} L_{v_{2n_0}} \cdot 2 \cdot p \cdot n_0 \cdot \sin(2 \cdot p \cdot n_0 \cdot \theta) - p \cdot \sqrt{\Lambda_1 + \Lambda_2 - 2\Lambda_3} \quad (3.8)$$

$$\lambda_2(p\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{n_0} L_{v_{2n_0}} \cdot 2 \cdot p \cdot n_0 \cdot \sin(2 \cdot p \cdot n_0 \cdot \theta) + p \cdot \sqrt{\Lambda_1 + \Lambda_2 - 2\Lambda_3} \quad (3.9)$$

avec :

$$A_1 = \sum_{n_d} \sum_{n_{d'}} L_{v_{2nd}} \cdot L_{v_{2nd'}} \cdot n_d \cdot n_{d'} \cdot \cos(2p(n_d - n_{d'}) \cdot \theta)$$

$$A_2 = \sum_{n_i} \sum_{n_{i'}} L_{v_{2ni}} \cdot L_{v_{2ni'}} \cdot n_i \cdot n_{i'} \cdot \cos(2p(n_i - n_{i'}) \cdot \theta)$$

$$A_3 = \sum_{n_d} \sum_{n_i} L_{v_{2nd}} \cdot L_{v_{2ni}} \cdot n_d \cdot n_i \cdot \cos(2p(n_d + n_i) \cdot \theta)$$

En raison de la présence du terme en racine carrée dans les expressions des valeurs propres, le spectre des valeurs propres est plus riche en harmoniques que celui des matrices  $A(p\theta)$  et  $L(p\theta)$ . Par conséquent, le spectre des courants de référence, qui dépend des valeurs propres, sera plus riche en harmonique que celui de la matrice inductance.

### 3.2.4 Calcul de la matrice $A(p\theta)$ et de ses valeurs propres

Les coefficients de la matrice  $A(p\theta)$ , calculés à partir de (3.6), valent :

$$\begin{cases} a(p\theta) = -\frac{1}{2} [L_{v_6} 6p \sin(6p\theta) + L_{v_2} 2p \sin(2p\theta) + L_{v_4} 4p \sin(4p\theta) + L_{v_8} 8p \sin(8p\theta)] \\ b(p\theta) = \frac{1}{2} [L_{v_2} 2p \cos(2p\theta) - L_{v_4} 4p \cos(4p\theta) + L_{v_8} 8p \cos(8p\theta)] \\ c(p\theta) = -\frac{1}{2} [L_{v_6} 6p \sin(6p\theta) - L_{v_2} 2p \sin(2p\theta) - L_{v_4} 4p \sin(4p\theta) - L_{v_8} 8p \sin(8p\theta)] \end{cases} \quad (3.10)$$

avec:

$$L_{v_2} = M_2 + \frac{L_2}{2} = -1.6 \cdot 10^{-3} \quad (H)$$

$$L_{v_4} = M_4 + \frac{L_4}{2} = -0.5 \cdot 10^{-3} \quad (H)$$

$$L_{v_8} = M_8 + \frac{L_8}{2} = 0.14 \cdot 10^{-3} \quad (H)$$

A partir des équations (2.62) et (3.10), on calcule les valeurs propres de la matrice  $A(p\theta)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(p\theta) = -\sqrt{\frac{L_{V2}^2 + 4L_{V4}^2 + 16L_{V8}^2 + 8L_{V2}^2 L_{V8}^2 \cos(6p\theta) - 4L_{V2}^2 L_{V4}^2 \cos(6p\theta)}{-16L_{V4}^2 L_{V8}^2 \cos(12p\theta)}} \\ \lambda_2(p\theta) = \sqrt{\frac{L_{V2}^2 + 4L_{V4}^2 + 16L_{V8}^2 + 8L_{V2}^2 L_{V8}^2 \cos(6p\theta) - 4L_{V2}^2 L_{V4}^2 \cos(6p\theta)}{-16L_{V4}^2 L_{V8}^2 \cos(12p\theta)}} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Les valeurs propres données par (3.11) dépendent de la position  $p\theta$ . Elles sont égales et de signes opposés, leur produit est alors négatif ( $\lambda_1(p\theta) \cdot \lambda_2(p\theta) < 0$ ). Par conséquent, la courbe isocouple dans le cas de la machine synchrone est une hyperbole. Nous avons représenté sur la figure 3.10, l'évolution des valeurs propres  $\lambda_1(p\theta)$   $\lambda_2(p\theta)$  en fonction de la position. Nous constatons que ces valeurs propres évoluent selon des formes sinusoidales avec une période égale à un pas polaire.

Les valeurs propres permettent, donc, de définir la nature des courbes isocouples dans le cas des machines synchrones à pôles saillantes. Par ailleurs, elles peuvent constituer un outil pour établir les règles de dimensionnement dans le cas des machines synchrones. A ce titre, nous pouvons citer les travaux de T.J.E. Miller [40], mettant en évidence l'emploi de ces valeurs propres dans le dimensionnement des machines à réluctance variable.

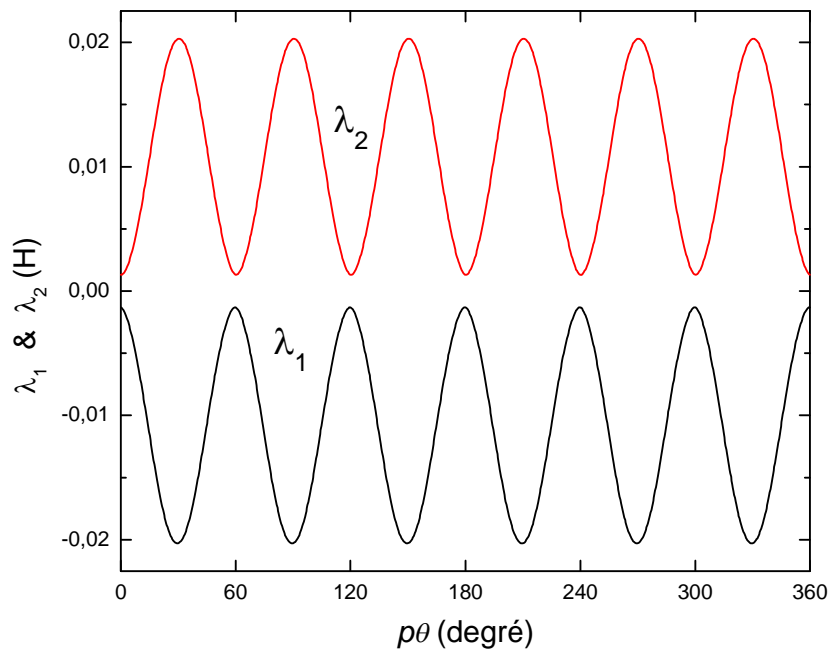


Figure 3.10 : Evolution des valeurs propres en fonction de la position  $p\theta$

### 3.2.5 Calcul de l'ondulation $\gamma(p\theta)$

A partir de (2.53) et (3.10), l'angle  $\gamma(p\theta)$  s'écrit :

$$\tan(2 \cdot \gamma(p\theta)) = \frac{-L_{V2} p \cos(2p\theta) + 2L_{V4} p \cos(4p\theta) - 4L_{V8} p \cos(8p\theta)}{L_{V2} p \sin(2p\theta) + 2L_{V4} p \sin(4p\theta) + 4L_{V8} p \sin(8p\theta)} \quad (3.12)$$

La figure 3.11 représente l'évolution de l'angle  $\gamma(p\theta)$  en fonction de la position ainsi que son ondulation autour  $(p\theta - \frac{\pi}{4})$ . Cette ondulation atteint un maximum de  $\pm 8\%$  en raison de l'importance des valeurs relatives de  $L_{V4}$  et  $L_{V8}$  devant celle de  $L_{V2}$ , soit 30% et 8% respectivement.

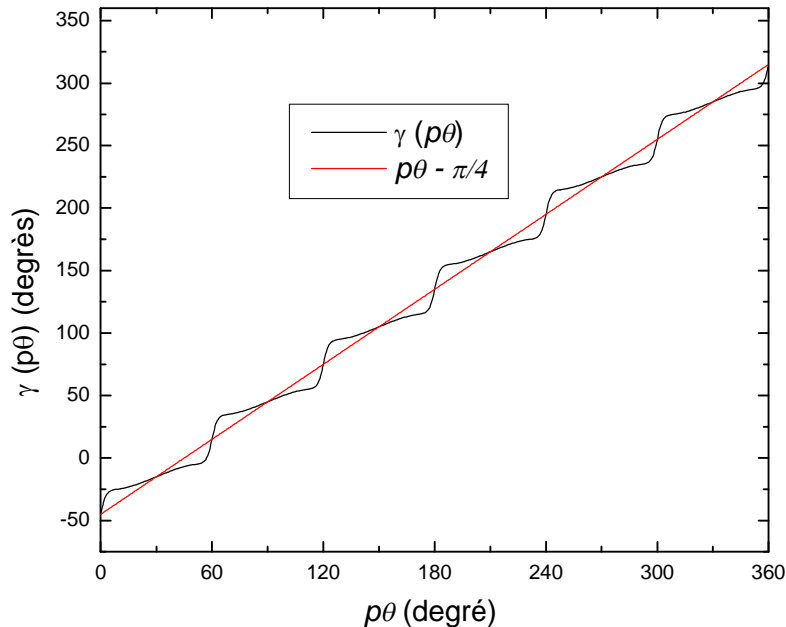


Figure 3.11 : évolution de l'ondulation de  $\gamma(p\theta)$

Nous avons vu au chapitre 2, que le centre de l'hyperbole  $O'$  était décalé par rapport au centre  $O$  du repère de Concordia. Ce décalage est dû à la présence des termes d'excitation dus aux flux produit par les aimants. La figure 3.12 représente les coordonnées du centre calculées à partir de (2.40). Le centre  $O'$  de l'hyperbole se déplace autour du centre  $O$  du repère de Concordia selon une trajectoire fermée.

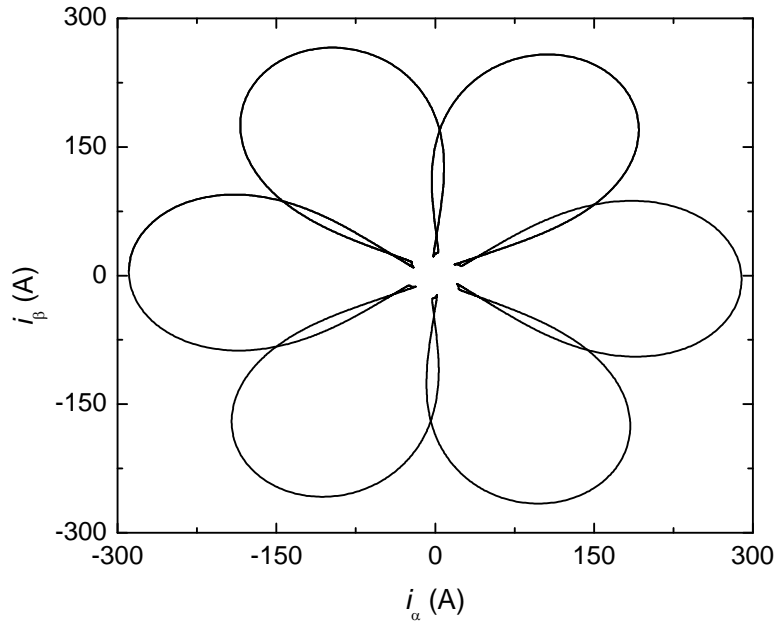


Figure 3.12: Evolution des coordonnées du centre de l'hyperbole par rapport à l'origine  $O$

### 3.3 Modèle optimal

#### 3.3.1 Présentation de l'algorithme d'optimisation

Les courants optimaux permettant d'avoir un couple de référence constant et minimisant les pertes Joule statoriques sont déterminés numériquement par la résolution du problème d'optimisation non linéaire rappelé ci-dessous:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } R_s \cdot (i_d^e{}^2 + i_q^e{}^2) \\ \text{Sous contrainte} \\ \Gamma_{ref} = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{dq}^e{}^T \begin{bmatrix} (\lambda_1(p\theta) + \lambda_2(p\theta)) & (\lambda_2(p\theta) - \lambda_1(p\theta)) \\ (\lambda_2(p\theta) - \lambda_1(p\theta)) & (\lambda_1(p\theta) + \lambda_2(p\theta)) \end{bmatrix} \mathbf{i}_{dq}^e + \frac{d\Phi_{r\alpha\beta}(p\theta)^T}{d\theta} \cdot \mathbf{R} \left( \gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \mathbf{i}_{dq}^e \end{array} \right.$$

Dans ce qui suit, nous rappelons brièvement le principe de quelques méthodes d'optimisation dont on peut trouver des développements plus complets dans la littérature [41]. On s'intéressera, tout particulièrement, à la méthode de programmation quadratique.



### **3.3.1.1 Méthodes d'optimisation mathématique**

Selon leurs manières de recherche du minimum, les méthodes d'optimisation peuvent être classées en [41,42,43] :

- Méthodes stochastiques
- Méthodes déterministes sans calcul de dérivée.
- Méthodes déterministes avec calcul de la dérivée première et/ ou seconde.

Les problèmes d'optimisation sont nombreux. Chaque problème est associé à une ou plusieurs méthodes numériques permettant de le résoudre. On distingue deux types de problèmes : les problèmes sans contraintes et ceux avec contraintes, qui peuvent être de type égalité, inégalité ou mixte.

La formulation mathématique générale d'un problème d'optimisation non linéaire est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x) \\ x \\ \text{soumis à} \\ g_i(x) = 0 \quad i = 1 \dots m \\ h_j(x) \leq 0 \quad j = 1 \dots n \end{array} \right.$$

où  $f(\mathbf{x})$  est la fonction objectif,  $\mathbf{x}$  est le vecteur à plusieurs variables,  $g_i(\mathbf{x})$  est la fonction de  $m$  contraintes d'égalité et  $h_j(\mathbf{x})$  est la fonction à  $n$  contraintes d'inégalité.

Parmi les méthodes de résolution des problèmes d'optimisation sans contraintes, on citera :

- Méthode d'ordre zéro : Relaxation.
- Méthode d'ordre un : Gradient (pseudo conjugué).
- Méthode d'ordre deux : Newton, quasi-Newton.
- Méthode de projection : Bregman.

Toutes ces méthodes sont des techniques d'optimisation locales. Elles sont basées sur une procédure itérative qui consiste à partir d'un point initial et à choisir une direction de recherche (dite de descente). Un pas de déplacement est calculé par une procédure approximative de minimisation unidirectionnelle, dite " line-search ", elle constitue la base de

tout algorithme de descente. Le processus itératif est répété jusqu'à ce qu'un minimum local soit atteint. Enfin, un test de convergence permet l'arrêt du processus.

Pour les problèmes d'optimisation avec contraintes et lorsque celles-ci sont linéaires, les problèmes sont reformulés en une séquence de sous problèmes dont les solutions seront basées sur les méthodes de minimisation sans contraintes présentées ci-dessus.

En optimisation non linéaire avec contraintes, on distingue trois types de méthodes : les méthodes directes, primales et duales. Parmi les méthodes directes, on trouve entre autres les méthodes de changement de variables. Les méthodes primales sont adaptées aux cas de contraintes linéaires; ce sont toutes les méthodes des gradients projetés ou des gradients réduits, ... etc. Parmi les méthodes duales on trouve entre autre les méthodes Lagrangiennes et les méthodes de pénalisation. Il existe, aussi, les méthodes combinant les approches primales et duales, elles permettent de résoudre approximativement les conditions de Kuhn-Tucker; la méthode d'optimisation quadratique (SQP) est une méthode robuste elle est, également, la plus utilisée. C'est cette méthode qui sera considérée dans le présent travail.

### **3.3.1.2 Principe de la méthode SQP**

Le principe de la méthode SQP, repose sur la re-formulation itérative du problème en un problème de programmation quadratique au moyen d'une approximation quadratique du Lagrangien de la fonction objectif et d'une linéarisation des contraintes. Le sous-programme obtenu est ensuite résolu pour chaque itération. La solution trouvée à l'itération k correspond à la direction de recherche.

En considérant le Lagrangien du problème :

$$Lag(\mathbf{x}, \rho, \mu) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \rho_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(\mathbf{x}) \quad (3.13)$$

Où :  $\rho_i$  et  $\mu_i$  sont les multiplicateurs de Lagrange.

Le sous problème d'optimisation à l'itération k est alors formulé :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(\mathbf{x}_k) + \nabla^T f(\mathbf{x}_k) \delta \mathbf{x}_k + \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}_k^T \mathbf{W}_k \\ & g_i(\mathbf{x}_k) + \nabla^T g_i(\mathbf{x}_k) \cdot \delta \mathbf{x}_k = 0 \\ & h_j(\mathbf{x}_k) + \nabla^T h_j(\mathbf{x}_k) \cdot \delta \mathbf{x}_k = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec  $W_k$  l'approximation Hessienne du Lagrangien

$$W_k = \nabla \nabla Lag(\mathbf{x}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\mu}) \quad (3.15)$$

L'algorithme de la méthode SQP se présente comme suit [43,44]:

1. Initialisation du problème
2. Evaluation de la fonction objectif et des contraintes.
3. Evaluation des gradients de la fonction objectif et des contraintes.
4. Résolution du sous problème quadratique.
5. Vérification des conditions d'arrêt ; si vérifiées : une solution est trouvée sinon:
  - a- Estimation du Hessien
  - b- Estimation des paramètres de Lagrange et Kuhn-Tucker.
  - c- Estimation de la direction de la descente.
  - d- Estimation de la longueur de pas  $\delta \mathbf{x}_k$ .
  - e- Calcul du nouveau point  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \delta \mathbf{x}_k$
6. Retour à l'étape 2.

Figure 3.13 : Algorithme SQP

### 3.3.2 Formes d'ondes optimales

Ce paragraphe présente les résultats de la résolution numérique par la méthode SQP du problème optimal exposé précédemment. La résolution est effectuée pour un couple de référence de 3 Nm. La figure 3.14 représente la forme d'onde de courant optimal dans la phase "a", qui permet de minimiser les pertes par effet Joule. Les courants dans les deux autres phases de la machine (*b* et *c*), sont déduites de la phase "a" par un décalage de  $\pm \frac{2\pi}{3}$ .

La figure 3.15 représente la forme d'onde du couple électromagnétique. Nous constatons que le couple est quasiment constant donc dépourvu d'ondulations. En effet, le zoom effectué sur la même figure révèle de très faibles ondulations autour de la valeur moyenne.

Nous avons, également, représenté sur les figures 3.16 et 3.17, les composantes  $i_d^e$  et  $i_q^e$  du courant dans le repère de Park étendu. Les courants obtenus dans ce repère évoluent en fonction de la position du rotor de la machine.

Enfin, ces résultats sont obtenus pour un point de fonctionnement de la machine. La recherche des autres points de fonctionnements optimaux nécessite l'exécution du programme d'optimisation pour chaque valeur de couple de référence. La difficulté à trouver une relation entre le couple de référence et les courants optimaux nous conduit à adopter une technique de tabulation lors d'une mise en œuvre expérimentale de la commande optimale.

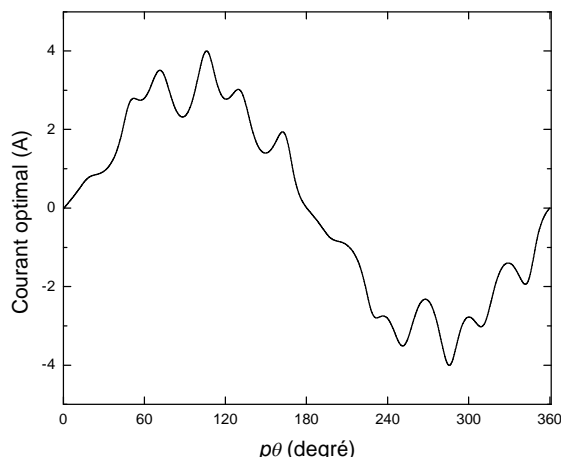


Figure 3.14: Forme d'onde du courant optimal

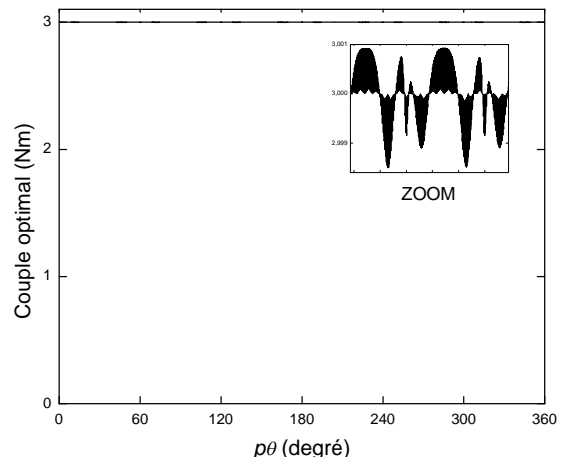


Figure 3.15: Couple optimal

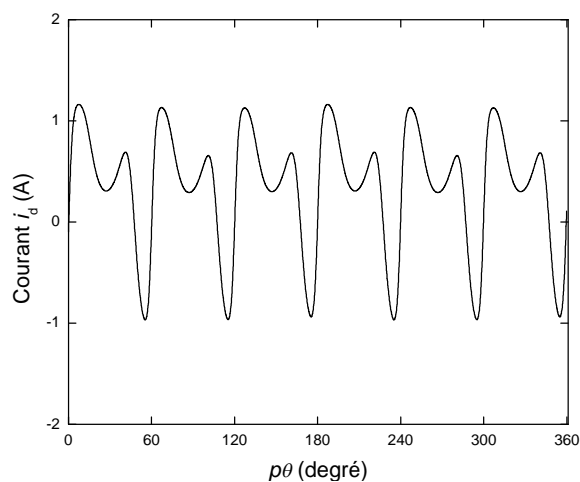


Figure 3.16: Courant selon l'axe "d<sup>e</sup>"

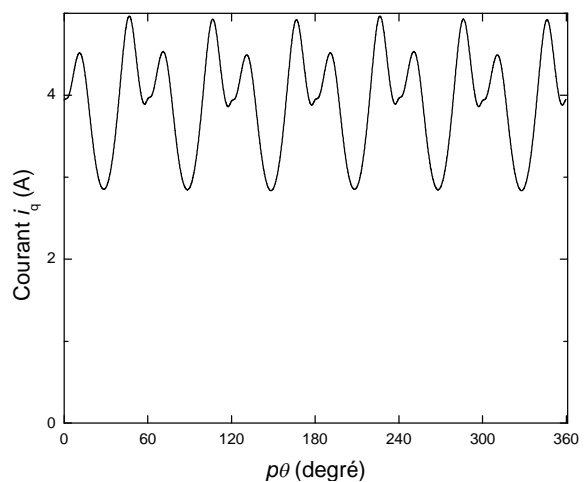


Figure 3.17: courant selon l'axe "q<sup>e</sup>"

### 3.4 Modèle suboptimal

La génération des formes d'onde optimales des courants dans le repère de Park étendu nécessite l'utilisation d'un calculateur de très haute performance. En effet, pour pouvoir travailler sur l'ensemble des points de fonctionnement de la machine, il faudrait stocker dans des tables les courants optimaux calculés pour plusieurs valeurs de couple. Une table supplémentaire est, par ailleurs, nécessaire pour la génération de l'angle  $\gamma(p\theta)$  du repère de Park étendu. On pourrait envisager de réduire le nombre de tables et de ne stocker que quelques valeurs de couple. Dans ce cas, la transition entre deux points de fonctionnement peut être réalisée par approximation linéaire. Les points de fonctionnement entre deux valeurs de couple tabulées, issues de l'approximation, ne correspondraient plus aux valeurs optimales, de plus les transitoires apparaissant au points de transition généreraient des pulsations de couple, si le pas choisi n'est pas adéquat.

Dans ce qui suit, nous proposons, une solution calculée à partir du modèle moyen du couple. Le but recherché est d'arriver à réduire le nombre de table pour l'ensemble des points de fonctionnement de la machine. On se fixe comme objectif de construire un modèle suboptimal dont les performances ne seraient pas trop éloignées du modèle optimal et qui seraient supérieures à celles du modèle conventionnel de Park pour la machine synchrone à pôles saillants. En outre, le modèle suboptimal facilite l'implantation de la commande sur calculateur numérique en vue d'une mise en œuvre expérimentale [45].

L'expression (2.73) du couple d'une machine synchrone à pôles saillants dans le repère de Park étendu peut-être développé de la façon suivante:

$$\Gamma = \frac{1}{2} (\lambda_1(p\theta) + \lambda_2(p\theta)) i_d^{e2} + \frac{1}{2} (\lambda_1(p\theta) + \lambda_2(p\theta)) i_q^{e2} + (\lambda_2(p\theta) - \lambda_1(p\theta)) i_d^e i_q^e + \Phi'_{rq} i_d^e + \Phi'_{rd} i_q^e \quad (3.16)$$

avec :

$$\Phi'_{rd}(p\theta) = \Phi'_{r\alpha} \cos(\gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4}) + \Phi'_{r\beta} \sin(\gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4}) \quad (3.17)$$

$$\Phi'_{rq}(p\theta) = \Phi'_{r\beta} \cos(\gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4}) - \Phi'_{r\alpha} \sin(\gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4}) \quad (3.18)$$

Correspondants aux dérivées des flux selon les axes  $d^e$  et  $q^e$ . Leurs développements en série de Fourier s'écrivent :

$$\Phi'_{rd}(p\theta) = \Phi'_{rd0} + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi'_{rdi}(p\theta) \quad (3.19)$$

$$\Phi'_{rq}(p\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi'_{rqi}(p\theta) \quad (3.20)$$

Sachant que la moyenne de la dérivée du flux sur l'axe "q" est nulle.

$$\Phi'_{rq0} = 0$$

En passant aux valeurs moyennes, le couple se réécrit :

$$\Gamma_0 = [(\lambda_{20} - \lambda_{10})i_{d0}^e + \Phi'_{rd0}]i_{q0}^e \quad (3.21)$$

Avec

$$\begin{cases} \lambda_{10} = -p\sqrt{L_{v2}^2 + 4L_{v4}^2 + 16L_{v8}^2} \\ \lambda_{20} = p\sqrt{L_{v2}^2 + 4L_{v4}^2 + 16L_{v8}^2} \end{cases} \quad (3.22)$$

### 3.4.1 Normalisation

Introduisons les valeurs de bases suivantes [46] :

$$i_b = \frac{\Phi'_{rd0}}{\lambda_{20} - \lambda_{10}} \quad (3.23)$$

$$\Gamma_b = p\Phi'_{rd0} \cdot i_b = p \cdot \frac{\Phi'_{rd0}{}^2}{\lambda_{20} - \lambda_{10}} \quad (3.24)$$

Les valeurs normalisées s'écrivent :

$$i_{dn}^e = \frac{i_{d0}^e}{i_b}, \quad i_{qn}^e = \frac{i_{q0}^e}{i_b}, \quad \Gamma_n = \frac{\Gamma_0}{\Gamma_b} \quad (3.25)$$

Après substitution, nous obtenons l'expression normalisée du couple:

$$\Gamma_n = i_{qn}^e \cdot (1 - i_{dn}^e) \quad (3.26)$$

Pour la minimisation des pertes Joule statoriques nous considérons le carré du module de la valeur normalisée du courant statorique donné par l'équation suivante :

$$|i_n^e|^2 = i_{dn}^{e2} + i_{qn}^{e2} \quad (3.27)$$

Pour un couple donné, le minimum de ce courant est obtenu par la différentiation de l'équation (3.16). Les solutions obtenus pour  $i_{dn}^e$  et  $i_{qn}^e$  sont données respectivement par les équations :

$$\Gamma_n = \sqrt{i_{dn}^e \cdot (i_{dn}^e - 1)^3} \quad (3.28)$$

$$\Gamma_n = i_{qn}^e \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 + 4 \cdot i_{qn}^{e2}}}{2} \right) \quad (3.29)$$

La relation liant les courants  $i_{dn}^e$  et  $i_{qn}^e$  est obtenue en combinant les équations (3.28) et (3.29), d'où il vient:

$$i_{dn}^e = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 + 4 i_{qn}^{e2}}}{2} \quad (3.30)$$

### 3.4.2 Formulation du problème d'optimisation et modèle suboptimal

Le problème d'optimisation du couple moyen avec minimisation des pertes Joule statoriques est obtenu en résolvant numériquement les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser : } i_{dn}^e{}^2 + i_{qn}^e{}^2 \\ \text{Sous contrainte} \\ i_{qn}^e \cdot (1 - i_{dn}^e) - \Gamma_n = 0 \end{array} \right. \quad (3.31)$$

L'algorithme de la figure 3.13, est encore utilisé pour la résolution du problème d'optimisation (3.31) dont la solution conduit au résultat présenté sur la figure 3.18. L'examen de cette figure, montre que la relation entre le couple et le courant  $i_{qn}^e$  est non linéaire. D'après l'équation (3.16), cela est dû à la prise en compte du couple réactant. En commande optimale de couple, la composante  $i_{dn}^e$  n'est plus négligée, elle varie selon une loi parabolique. Cette composante augmente en valeur absolue lorsque le couple augmente. En outre, on notera une plus forte variation avec la composante  $i_{qn}^e$ . L'essentiel du couple électromagnétique, appelé couple utile, étant produit par cette dernière.

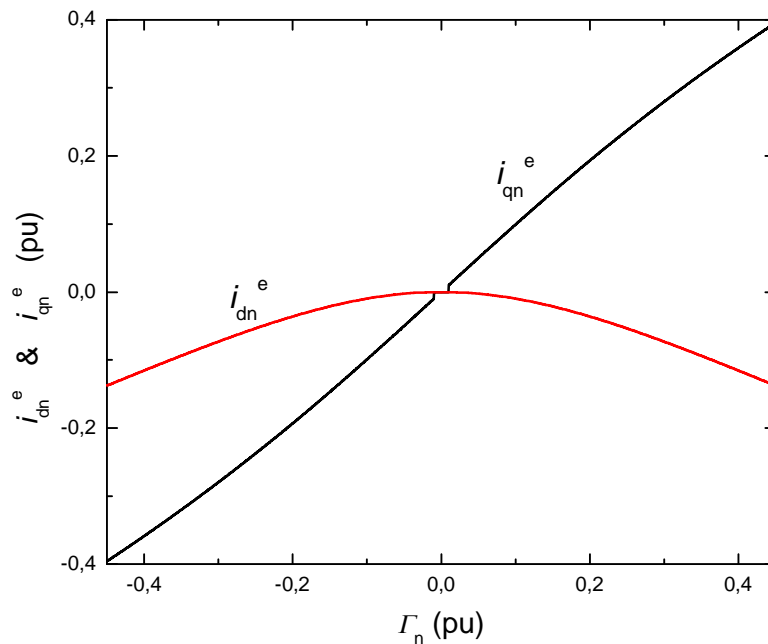


Figure 3.18 : Couple en fonction des courants  $i_{dn}^e$  et  $i_{qn}^e$  (valeurs normalisées)



Il est maintenant possible de trouver des relations mathématiques liant les courants  $i_{dn}^e$  et  $i_{qn}^e$  au couple électromagnétique en procédant à des interpolations polynomiales. Les polynômes d'interpolation entre les valeurs normalisées du couple et des courants  $i_{dn}^e$  et  $i_{qn}^e$  sont donnés, respectivement par les équations suivantes :

$$i_{dn}^e = -0.912\Gamma_n^2 + 1.2\Gamma_n^4 \quad (3.32)$$

$$i_{qn}^e = \Gamma_n - 0.55\Gamma_n^3 \quad (3.33)$$

Les courants suboptimaux instantanés  $i_{d\_sub}^e$  et  $i_{q\_sub}^e$  sont obtenus selon le schéma de la figure 3.19. Le passage aux valeurs instantanées s'effectue en substituant aux valeurs moyennes de la dérivée du flux  $\Phi'_{rd0}$  (3.19) et des valeurs propres (3.32), leurs valeurs instantanées. Le couple électromagnétique qui en résulte est donné par l'équation suivante:

$$\Gamma^* = \frac{\lambda_2(p\theta) - \lambda_1(p\theta)}{p\Phi'_{rd0}(p\theta)} \cdot \Gamma_{ref} \quad (3.34)$$

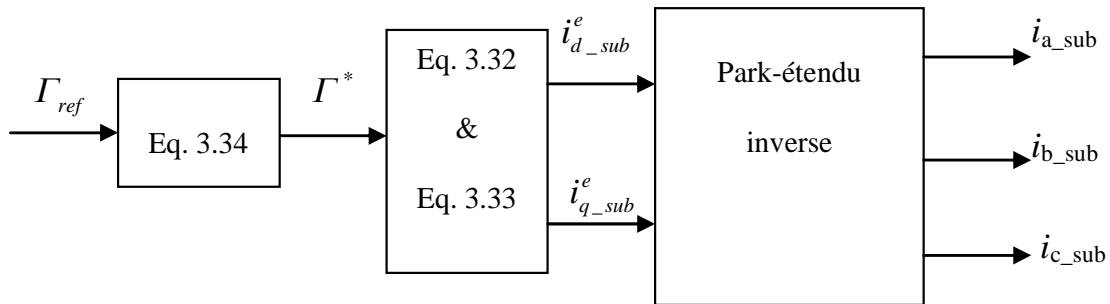


Figure 3.19 : Génération des références des courants suboptimaux

### 3.4.3 Formes d'ondes suboptimales

Dans ce paragraphe sont exposés les résultats de la résolution numérique du problème suboptimal. La valeur du couple de référence est prise égale à 3 Nm. La figure 3.20 correspond à la référence de courant suboptimal de la phase "a". Le couple suboptimal est donné sur la figure 3.21. Cette figure montre que la fréquence des ondulations dominantes du

couple est égale à six fois la fréquence des grandeurs électriques. De plus, nous remarquons que ces ondulations sont égales à 5% de la valeur moyenne. Les courants suboptimaux  $i_{d\_sub}^e$  et  $i_{q\_sub}^e$  sont donnés par les figures 3.22 et 3.23, respectivement. Tous ces courants sont des fonctions de la position  $p\theta$ .

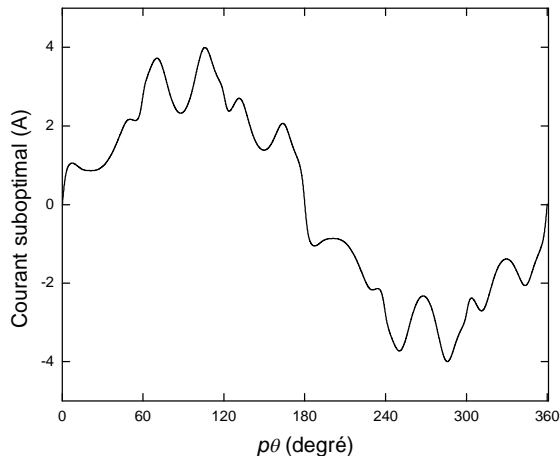


Figure 3.20 : Courant de phase

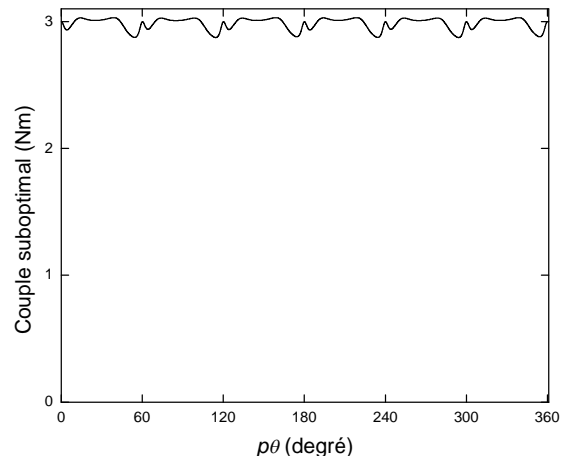


Figure 3.21: Couple électromagnétique

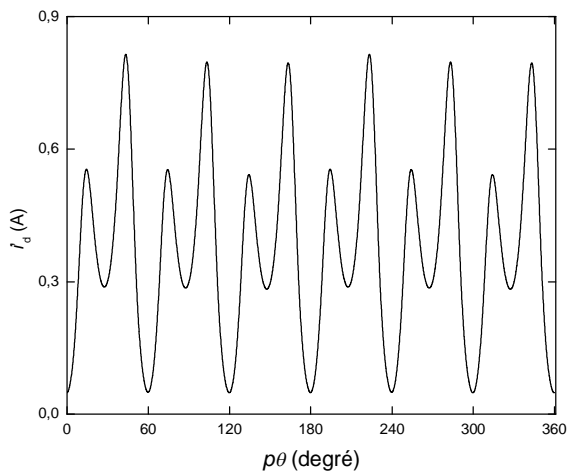


Figure 3.22: Courant selon l'axe "d<sup>e</sup>"

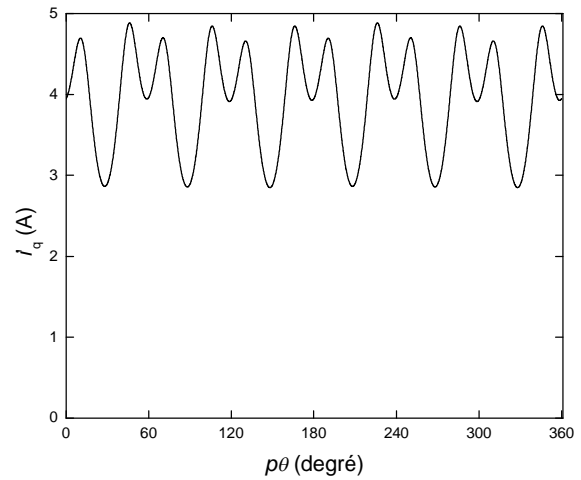


Figure 3.23: Courant selon l'axe "q<sup>e</sup>"

### 3.5 Comparaison des modèles

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats de la comparaison des deux modèles précédents pour des références de couple de 3 Nm. Les références pour la phase "a", du courant optimal et du courant suboptimal sont comparées sur la figure 3.24. La figure 3.25 représente les composantes sur l'axe "d<sup>e</sup>" des courants optimal et suboptimal.

Nous remarquons que la composante de courant produite par le modèle suboptimal est positive et de plus faible valeur que celle du modèle optimal. Le courant  $i_{de}$  du modèle optimal est de signe variable. On peut en déduire que la présence de la composante négative dans ce courant assure une meilleure neutralisation des ondulations de couple. Les composantes d'axe " $q^e$ " du courant suboptimal et du courant optimal ont des allures pratiquement identiques (figure 3.26). L'essentiel du couple électromagnétique étant fourni par cette composante dont le signe détermine celui du couple. Par ailleurs, nous constatons que les pertes Joule instantanées minimisées sur un cycle de rotation de la machine sont identiques pour les deux techniques (figure 3.27). La similitude des courbes des pertes Joule minimisées est due à la similitude des composantes d'axe " $q^e$ " des courants pour les deux modèles. La contribution des composantes d'axe " $d^e$ " pour ces modèles étant négligeables.

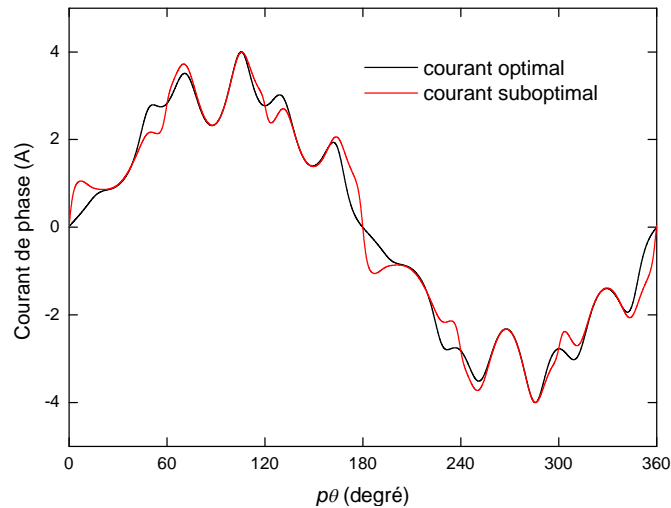


Figure 3.24: Courant de phase

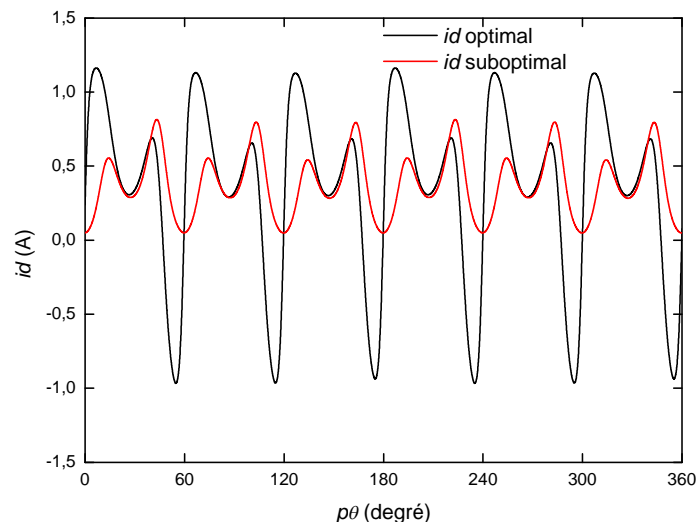


Figure 3.25: Courant selon l'axe "d"

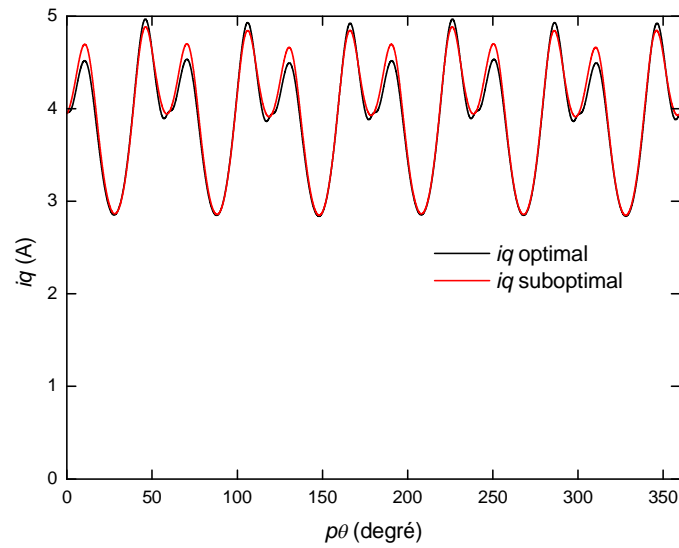


Figure 3.26: Courant selon l'axe "q"

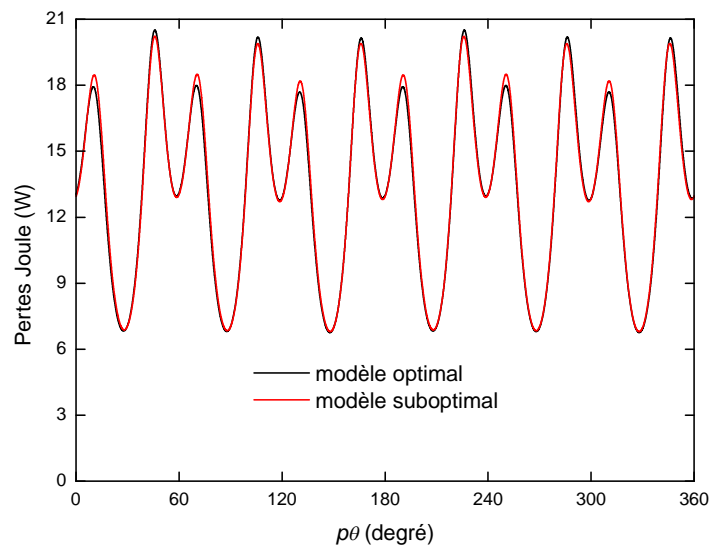


Figure 3.27: Pertes Joule

### 3.6 Conclusion

Ce chapitre a conduit à l'élaboration de deux modèles pour la commande en couple de la machine synchrone avec minimisation des pertes joules et des ondulations de couple. Le modèle optimal, bien que permettant une parfaite compensation des ondulations de couple, exige de disposer de moyens informatiques lourds pour l'implantation lors de la mise en œuvre expérimentale. En effet, la génération des références des courants optimaux nécessite

le recours à la tabulation de l'ensemble des points de fonctionnement de la machine. Le modèle suboptimal est bien adapté pour une commande par ordinateur numérique. Ses performances acceptables sont inférieures au modèle optimal. Le choix entre ces deux modèles résulte d'un compromis entre les performances d'un contrôle fin du couple et les moyens informatiques exigés. Dans le chapitre suivant on procédera à la validation expérimentale de cette étude sur un banc d'essais expérimental muni d'une carte de commande numérique à base d'un processeur DSP.

# Chapitre 4

Commande et mise en oeuvre expérimentale

## Commande et mise en œuvre expérimentale

### 4.1 Introduction

Lors de l'étude d'un système électrotechnique il est souvent utile de se doter d'un modèle de simulation permettant de restituer le comportement dynamique de l'ensemble commande convertisseur machine. Ce modèle doit permettre, d'une part, d'explorer rapidement les performances du système en menant des études paramétriques, d'orienter et de vérifier un plan d'expérience mené sur des prototypes, d'autre part.

Dans ce chapitre, après rappels du modèle mathématique de l'onduleur de tension et du modèle d'état de la machine synchrone dans le repère de Park, nous établissons le modèle d'état de la machine synchrone à aimants et à pôles saillants dans le repère de Park-étendu. Ensuite, et après avoir rappeler les stratégies de contrôle de couple de la machine synchrone, nous présentons la structure de commande en couple avec minimisation des pertes Joule statoriques pour la machine synchrone, en se limitant au repère "abc". Nous complétons cette étude par la présentation des résultats de la simulation numérique de la commande de couple. Nous terminons ce chapitre par la présentation du dispositif expérimental puis nous exposons les résultats expérimentaux des commandes optimales de couple dans le repère de Park étendu que nous comparons aux résultats du modèle suboptimal et classique.

### 4.2 Description de l'onduleur

Dans les applications de faibles et moyennes puissances, le moteur synchrone est alimenté par l'intermédiaire d'un onduleur triphasé de tension [46, 47]. L'onduleur peut-être commandé en pleine onde ou en modulation de largeur d'impulsions. Dans notre étude, on souhaite imposer une forme de courant optimale dans les trois enroulements de la machine. Nous allons nous intéresser, tout particulièrement, à un onduleur de tension contrôlé en courant. La technique de régulation à hystérésis sera choisie en raison de sa simplicité de réalisation et de sa robustesse.

L'alimentation de la machine synchrone à aimants permanents est réalisée à travers un onduleur de tension contrôlé en courant dont le schéma de principe est représenté sur la figure 4.1:

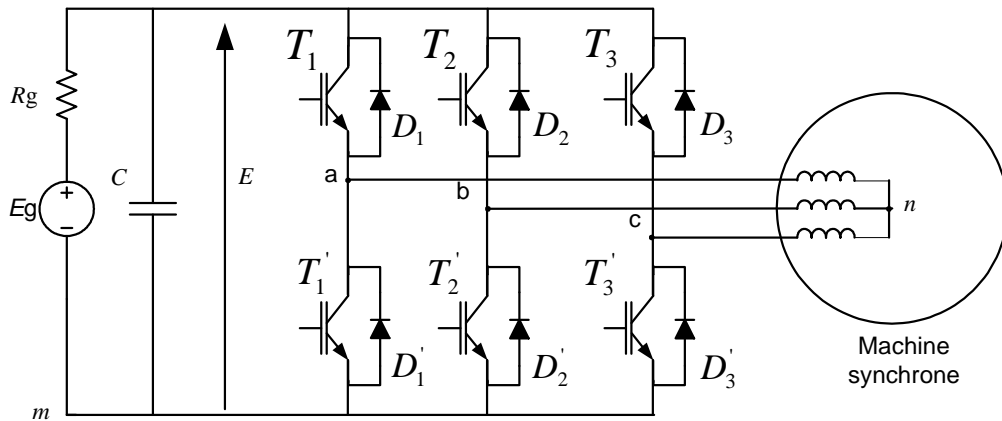


Figure 4.1: Schéma de principe

On considère que la machine est connectée en étoile avec neutre isolé. En tête du convertisseur, nous assimilerons l'alimentation (redresseur et filtre) à une source de tension continue parfaite. On désigne par  $T_j$  et  $T'_j$  la paire d'interrupteurs commandés du bras. Ces interrupteurs sont shuntés en anti-parallèle par des diodes de récupération  $D_j$  et  $D'_j$

Pour modéliser l'onduleur, nous supposons que son fonctionnement est idéal, par conséquent:

- La commutation des interrupteurs électroniques est instantanée.
- La chute de tension directe aux bornes de ces interrupteurs est négligeable.

Nous définissons la fonction logique de connexion suivante:

$$S_j = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } T_j \text{ est On et } T'_j \text{ est Off} \\ 0 & \text{lorsque } T_j \text{ est Off et } T'_j \text{ est On} \end{cases}$$

Nous pouvons écrire les tensions composées en faisant intervenir l'état des interrupteurs  $T_j$  et  $T'_j$ :

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_{an} - V_{bn} = (S_1 - S_2) E \\ V_{bc} &= V_{bn} - V_{cn} = (S_2 - S_3) E \\ V_{ca} &= V_{cn} - V_{an} = (S_3 - S_1) E \end{aligned} \tag{4.1}$$



D'après la loi des nœuds nous pouvons écrire:

$$i_a + i_b + i_c = 0 \quad (4.2)$$

En sommant les tensions:

$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0 \quad (4.3)$$

Nous en déduisons les relations suivantes:

$$\begin{pmatrix} V_{an} \\ V_{bn} \\ V_{cn} \end{pmatrix} = \frac{E}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Nous pouvons donc établir la table de vérité qui donne les valeurs des tensions  $V_{an}$ ,  $V_{bn}$  et  $V_{cn}$  pour chaque séquence de commutation.

Tableau 4.1 Séquences de commutation de l'onduleur

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$V_{an}$	$V_{bn}$	$V_{cn}$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	$-E/3$	$-E/3$	$2E/3$
0	1	0	$-E/3$	$2E/3$	$-E/3$
0	1	1	$-2E/3$	$E/3$	$E/3$
1	0	0	$2E/3$	$-E/3$	$-E/3$
1	0	1	$E/3$	$-2E/3$	$E/3$
1	1	0	$E/3$	$E/3$	$-2E/3$
1	1	1	0	0	0

#### 4.2.1 Contrôle des courants par Hystérésis

La technique de contrôle des courants par hystérésis est l'une des techniques les plus utilisées pour l'alimentation des machines à courant alternatif en raison de sa robustesse et sa simplicité de mise en œuvre [48,49,50]. Cette méthode est basée sur la commande des interrupteurs de l'onduleur de telle sorte que la variation du courant dans chaque phase de la

machine soit inscrite à l'intérieur d'une bande ( $\pm h$ ) autour des références des courants désirées.

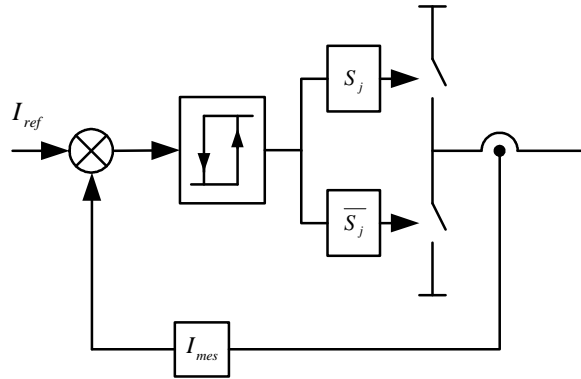


Figure 4.2 Régulateur à hystérésis

### 4.2.2 Principe de la commutation par Hystérésis

L'onduleur de tension ne peut fournir qu'un nombre fini de vecteurs tensions. Chaque vecteur correspond à une séquence de commutation. La représentation de ces vecteurs dans le plan complexe est donnée par la figure 4.3.a. Le vecteur tension résultant  $v(t)$ , correspondant aux tensions phases – neutre instantanées à la sortie de l'onduleur, est défini par:

$$V(t) = 2/3 * (V_a + aV_b + a^2 V_c) \quad \text{avec } a = e^{j(2\pi/3)} \quad (4.5)$$

Le vecteur courant est défini de la même manière, sa représentation dans le plan complexe est donnée par la figure 4.3.b.

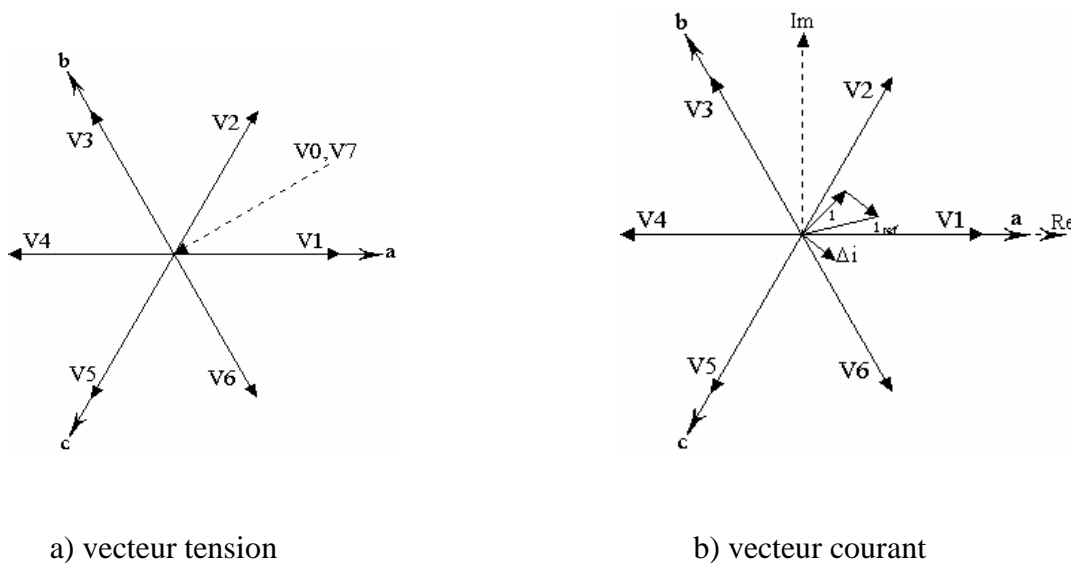
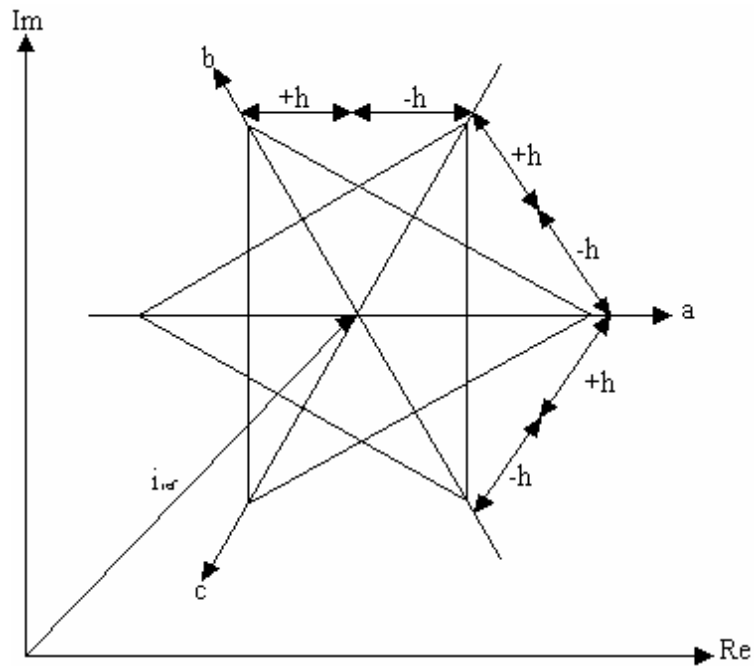


Figure 4.3: Représentation dans le plan complexe



a) Phase "a"

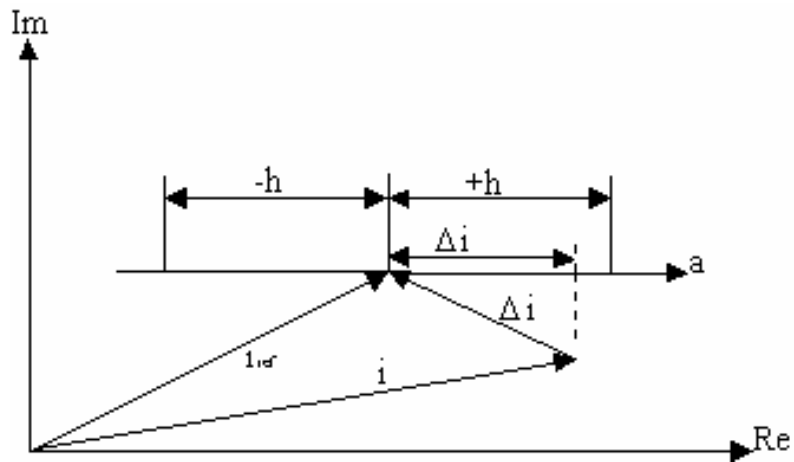
b) Phases *a, b, c*

Figure 4.4: Diagramme de commutation pour la stratégie de contrôle par Hystérésis

Les erreurs de courant pour chaque phase sont données par la projection du vecteur  $\Delta i$  sur l'axe de chaque phase (figure 4.4.a). Les interrupteurs de l'onduleur sont commutés à chaque fois que cette projection atteint une valeur égale à l'hystérésis du comparateur. La combinaison des limites de la bande à hystérésis pour chaque phase définit le diagramme de commutation qui se déplace en fonction du vecteur courant de référence (figure 4.4.b).

### 4.3 Modèle d'état de la machine synchrone à pôles saillants

#### 4.3.1 Modèle d'état de la machine synchrone à pôles saillants dans le repère de Park

Les équations aux tensions de la machine synchrone dans le référentiel de Park sont obtenues en appliquant la transformation de Park à l'équation aux tensions (2.1) définie au chapitre 2, elles s'écrivent:

$$v_d = R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - p \Omega L_q i_q \quad (4.6)$$

$$v_q = R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + p \Omega L_d i_d + p \Omega \Phi'_{rq} \quad (4.7)$$

L'équation mécanique relative aux parties mobiles de l'ensemble machine synchrone- charge est donnée par:

$$\Gamma = \Gamma_r + \frac{J}{p} \frac{d\Omega}{dt} + f_v \Omega \quad (4.8)$$

$\Gamma$  est le couple électromagnétique,  $\Gamma_r$  le couple résistant,  $J$  l'inertie totale de la machine chargée et  $\Omega$  la vitesse de rotation.

Les équations (4.6), (4.7) et (4.8) conduisent au modèle d'état de la machine synchrone dans le repère de Park :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_d}{dt} = (v_d - R_s i_d + p \Omega L_q i_q) / L_d \\ \frac{di_q}{dt} = (v_q - R_s i_q - p \Omega L_d i_d - p \Omega \Phi'_{rq}) / L_q \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{p}{J} (\Gamma - \Gamma_r - f_v \Omega) \end{array} \right. \quad (4.9)$$

### 4.3.2 Modèle d'état de la machine synchrone à aimant à répartition de champ non sinusoïdale dans le repère de Park étendu

En appliquant la transformation de Concordia à l'équation électrique relative aux variables statoriques (2.1) définie au chapitre 2, il vient:

$$\begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{pmatrix} = R_s \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{32}^T \frac{d}{dt} \left[ \mathbf{L}(p\theta) \mathbf{T}_{32} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} \right] + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Phi_\alpha \\ \Phi_\beta \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Le repère de Park étendu est obtenu à partir d'une rotation de  $\gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4}$  par rapport à l'axe focal de l'hyperbole, Les transformations pour les courants et tensions sont données par les relations ci-dessous:

$$\begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \end{pmatrix} = \mathbf{R} \left( \gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4} \right)^T \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} = \mathbf{R} \left( \gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4} \right) \begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$\begin{pmatrix} v_d^e \\ v_q^e \end{pmatrix} = \mathbf{R} \left( \gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4} \right)^T \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{pmatrix} = \mathbf{R} \left( \gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4} \right) \begin{pmatrix} v_d^e \\ v_q^e \end{pmatrix}$$

La matrice de rotation vérifie la relation suivante:

$$\mathbf{R} \left( \gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4} \right)^T \mathbf{R} \left( \gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En pré-multipliant (4.10) par la matrice de rotation  $\mathbf{R} \left( \gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4} \right)^T$ , il vient:

$$\begin{pmatrix} v_d^e \\ v_q^e \end{pmatrix} = R_s \begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \end{pmatrix} + \mathbf{R} \left( \gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4} \right)^T \mathbf{T}_{32}^T \frac{d}{dt} \left[ \mathbf{L}(p\theta) \cdot \mathbf{T}_{32} \cdot \mathbf{R} \left( \gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4} \right) \begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \end{pmatrix} \right] + \mathbf{R} \left( \gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4} \right)^T \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Phi_\alpha \\ \Phi_\beta \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Posons:

$$\mathbf{Z}(\gamma(p\theta)) = \begin{pmatrix} Z_{11}(p\theta) & Z_{12}(p\theta) \\ Z_{21}(p\theta) & Z_{22}(p\theta) \end{pmatrix} = \mathbf{R}\left(\gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4}\right)^T \cdot \mathbf{T}_{32}^T \cdot \mathbf{L}(p\theta) \cdot \mathbf{T}_{32} \cdot \mathbf{R}\left(\gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.13)$$

Le développement de cette équation donne:

$$Z_{11}(p\theta) = L_1(p\theta) \cos^2(\gamma(p\theta)) + 2L_2(p\theta) \cos(\gamma(p\theta)) \sin(\gamma(p\theta)) + L_3(p\theta) \sin^2(\gamma(p\theta))$$

$$Z_{22}(p\theta) = L_1(p\theta) \sin^2(\gamma(p\theta)) - 2L_2(p\theta) \cos(\gamma(p\theta)) \sin(\gamma(p\theta)) + L_3(p\theta) \cos^2(\gamma(p\theta))$$

$$Z_{12}(p\theta) = L_2(p\theta) (\cos^2(\gamma(p\theta)) - \sin^2(\gamma(p\theta))) + (L_3(p\theta) - L_1(p\theta)) \cos(\gamma(p\theta)) \sin(\gamma(p\theta))$$

En remplaçant dans l'équation (4.12) on aboutit à l'expression suivante:

$$\begin{pmatrix} v_d^e \\ v_q^e \end{pmatrix} = R_s \begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \end{pmatrix} + \mathbf{Z}(\gamma(p\theta)) \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \end{pmatrix} + \frac{d\mathbf{Z}(\gamma(p\theta))}{dt} \begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \end{pmatrix} + \frac{d\gamma(p\theta)}{dt} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{Z}(\gamma(p\theta)) \cdot \begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \end{pmatrix} + \mathbf{R}\left(\gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4}\right)^T \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Phi_\alpha \\ \Phi_\beta \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

L'équation d'état dans ce repère s'écrit:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \end{pmatrix} = \mathbf{Z}(\gamma(p\theta))^{-1} \cdot \left[ \begin{pmatrix} v_d^e \\ v_q^e \end{pmatrix} - R_s \begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \end{pmatrix} - \frac{d\mathbf{Z}(\gamma(p\theta))}{dt} \begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \end{pmatrix} + \frac{d\gamma(p\theta)}{dt} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{Z}(\gamma(p\theta)) \begin{pmatrix} i_d^e \\ i_q^e \end{pmatrix} + \mathbf{R}\left(\gamma(p\theta) + \frac{\pi}{4}\right)^T \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Phi_\alpha \\ \Phi_\beta \end{pmatrix} \right] \quad (4.15)$$

La matrice  $\mathbf{Z}(\gamma(p\theta))$  est une matrice non orthogonale, par conséquent les équations obtenues dans le repère de Park étendu sont fortement couplées. L'équation (4.15) met en évidence la dépendance par rapport à la position, sa résolution nécessite l'emploi de méthodes d'intégration numérique (Euler, Runge-Kutta) où l'inverse de la matrice  $\mathbf{Z}(\gamma(p\theta))$  est évaluée à chaque itération.

#### 4.4 Stratégies de contrôle de couple de la machine synchrone à pôles saillants

L'autopilotage de la machine synchrone à aimants permanents impose que la fréquence d'alimentation, délivrée par le convertisseur statique, soit rigoureusement liée à la vitesse de rotation. Dans ces conditions, les interrupteurs du convertisseur statique doivent être

commandés suivant une loi fonction de la position du rotor, de manière à imposer le courant ou la tension en amplitude et en phase afin d'assurer un contrôle rigoureux du couple [52]. Le dispositif électromécanique ainsi constitué est une machine synchrone autopilotée parce qu'elle définit elle-même sa fréquence d'alimentation. Les stratégies de contrôle du couple sont de deux types : par réglage du courant ou de la tension. Elles sont effectuées soit dans le repère réel lié au stator (abc), soit dans le repère de Park lié au rotor. Nous nous limitons à la stratégie de contrôle de couple par réglage de courant, pour sa simplicité de réalisation et sa large utilisation en pratique.

#### 4.4.1 Contrôle de couple sous l'hypothèse du premier harmonique

Le diagramme vectoriel d'une machine synchrone à pôles saillants en régime moteur est donné par la figure suivante :

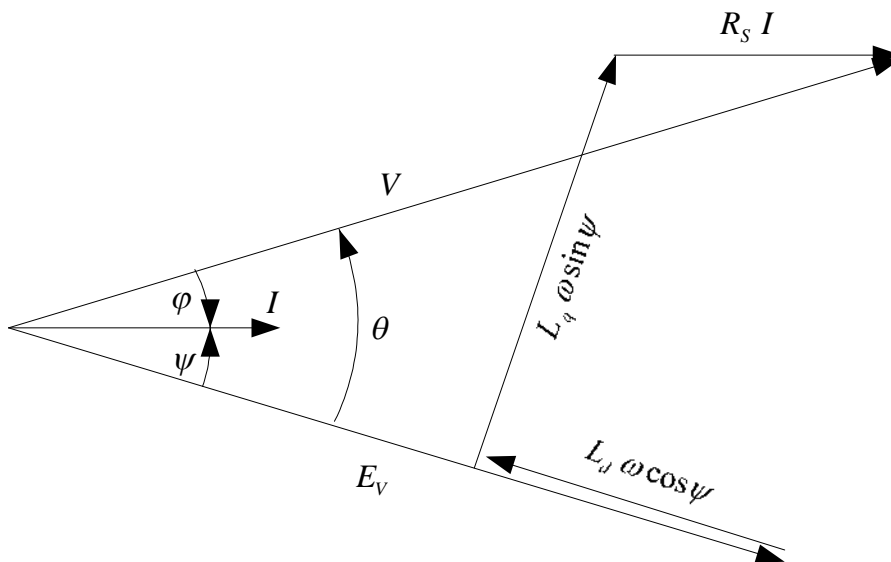


Figure 4.5 : Diagramme vectoriel du moteur synchrone à pôles saillants

Ce diagramme est obtenu avec les hypothèses énoncées au chapitre 2. En supposant que les grandeurs électromagnétiques de la machine sont sinusoïdales, les composantes de la tension au stator s'écrivent :

$$\begin{cases} V \sin \theta = R_s I \sin \psi - L_q \omega I \cos \psi \\ V \cos \theta = R_s I \cos \psi + L_d \omega I \sin \psi + E_v \end{cases} \quad (4.16)$$

La puissance absorbée par la machine est définie par :

$$P = 3V I \cos \varphi = 3V I (\cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta) \quad (4.17)$$

En remplaçant les expressions (4.16) dans (4.17), nous aurons l'expression de la puissance en fonction des courants statoriques uniquement :

$$P = 3R_s I^2 + \frac{3}{2}(L_d - L_q) \omega I^2 \sin 2\psi + 3I E_v \cos \psi \quad (4.18)$$

Si les pertes fer sont négligeables, le couple électromagnétique aura pour expression :

$$\Gamma = \frac{3P}{2} \left[ \frac{1}{2}(L_d - L_q) I^2 \sin 2\psi + \frac{E_v}{\omega} I \cos \psi \right] \quad (4.19)$$

Puisque la fém à vide  $E_v$  est constante, et si le courant statorique est choisi comme grandeur de réglage, le couple électromagnétique ne dépend pas de la vitesse. La figure (4.6) représente les courbes d'évolution du couple en fonction de  $\psi$  et en prenant le courant statorique comme paramètre.

Pour un fonctionnement optimal [53,54], nous devons limiter les pertes Joule dans la machine. Ce fonctionnement consiste à imposer une valeur donnée du couple avec un courant minimal. Ces points de fonctionnement optimaux correspondent, en régime permanent, au maximum de chaque courbe de la figure 4.6. Ces points peuvent être obtenus en posant  $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$  dans l'expression (4.19). Dans ce cas, l'angle optimal  $\psi_{opt}$  correspondant au couple maximal qui, en prenant le courant comme paramètre, sera donné par :

$$\psi_{opt} = \text{Arcsin} \left[ \frac{\frac{E_v}{\omega} - \sqrt{\left(\frac{E_v}{\omega}\right)^2 + 8I^2(L_d - L_q)^2}}{4(L_d - L_q)I} \right] \quad (4.20)$$



A partir des équations (4.19) et (4.20) nous pouvons tracer les courbes de variation de  $I$  en fonction de l'angle de calage optimal  $\psi$  (figure 4.7). Enfin, nous pouvons établir la loi de variation du couple optimal en fonction du courant calculé à partir de l'angle de calage optimal. Cette loi est donnée par la figure 4.8.

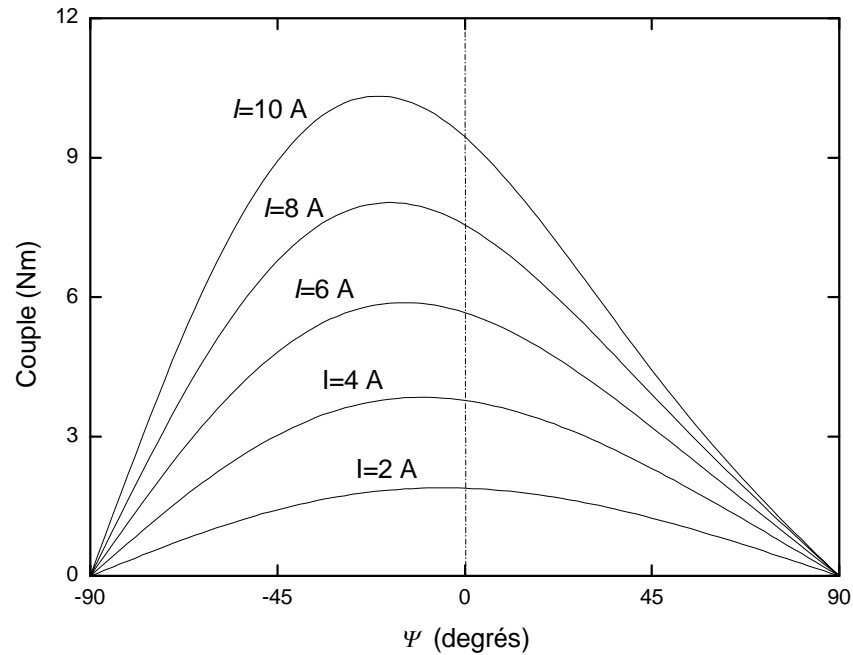


Figure 4. 6 Evolution du couple en fonction de l'angle  $\Psi$  pour différents courants

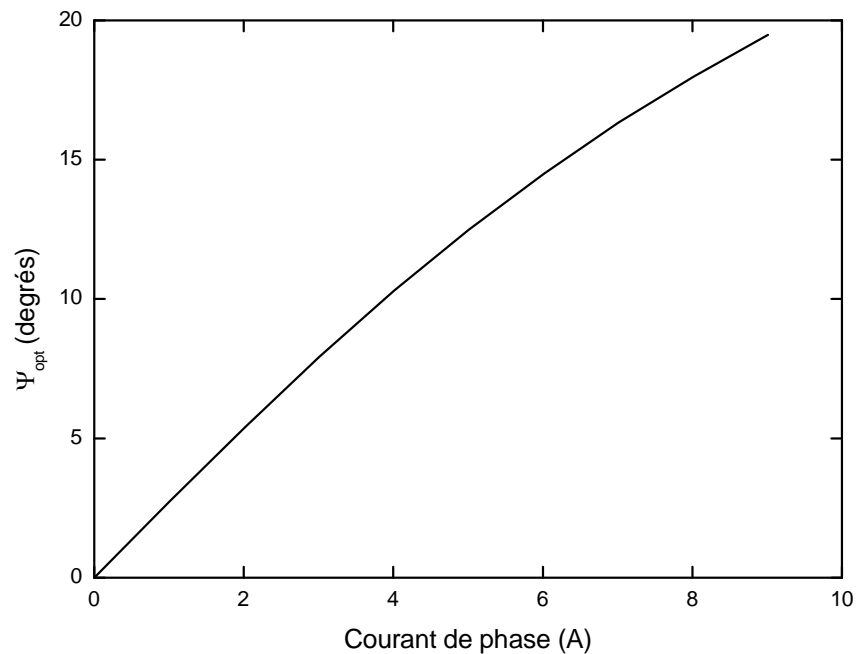


Figure 4. 7 Evolution de l'angle  $\Psi_{opt}$  en fonction du courant de phase

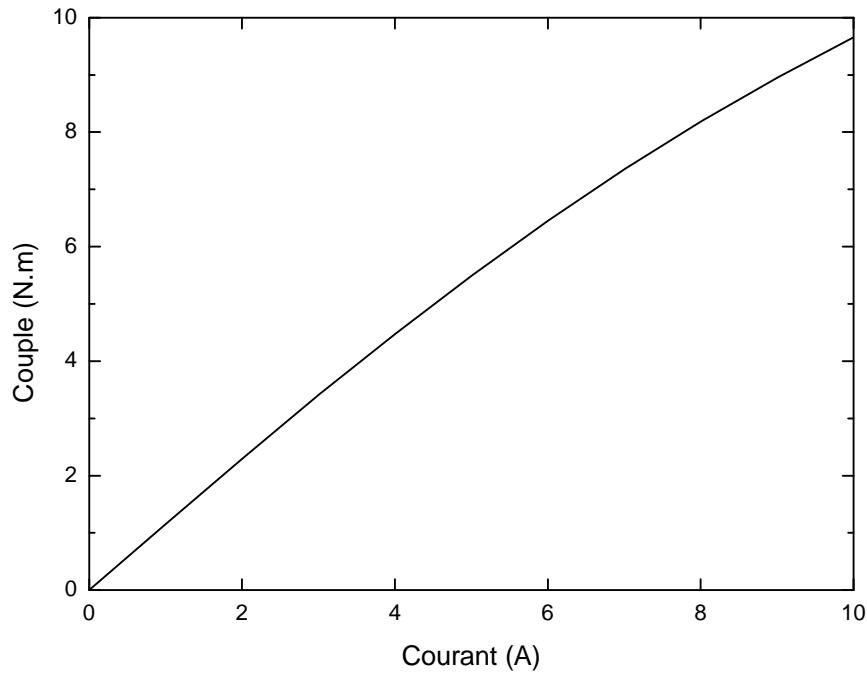


Figure 4.8 : Evolution du couple en fonction du courant pour  $\psi_{opt}$

#### 4.4.2 Contrôle dans le repère *abc*

Il existe deux schémas pour la commande "*abc*" de la machine synchrone, soit avec régulateur à Hystérésis (figure 4.9) ou en utilisant la modulation de largeur d'impulsions (figure 4.10). Pour la commande en couple de la machine synchrone avec régulateur à Hystérésis, on choisit une consigne de couple de référence pour laquelle les consignes des courants optimaux sont calculées à partir des équations (4.19) et (4.20). Ces consignes de courant sont ensuite comparées aux courants mesurés sur les phases correspondantes. Un contrôle à hystérésis avec une bande de largeur adéquate, choisie en fonction des possibilités en commutation du convertisseur ainsi que des pertes tolérées, permet de fournir les signaux de commande de l'onduleur de tension.

Si l'on désire opter pour un schéma de commande utilisant la modulation de largeur d'impulsions, des régulateurs, souvent de type PI, sont nécessaires pour corriger les écarts entre les références des courants calculées et les courants mesurés. Des blocs de compensation des  $f_{cm}$  sont souvent associés à cette commande. Des tensions de référence sont alors calculées et injectées dans le bloc de génération de la technique de modulation choisie.

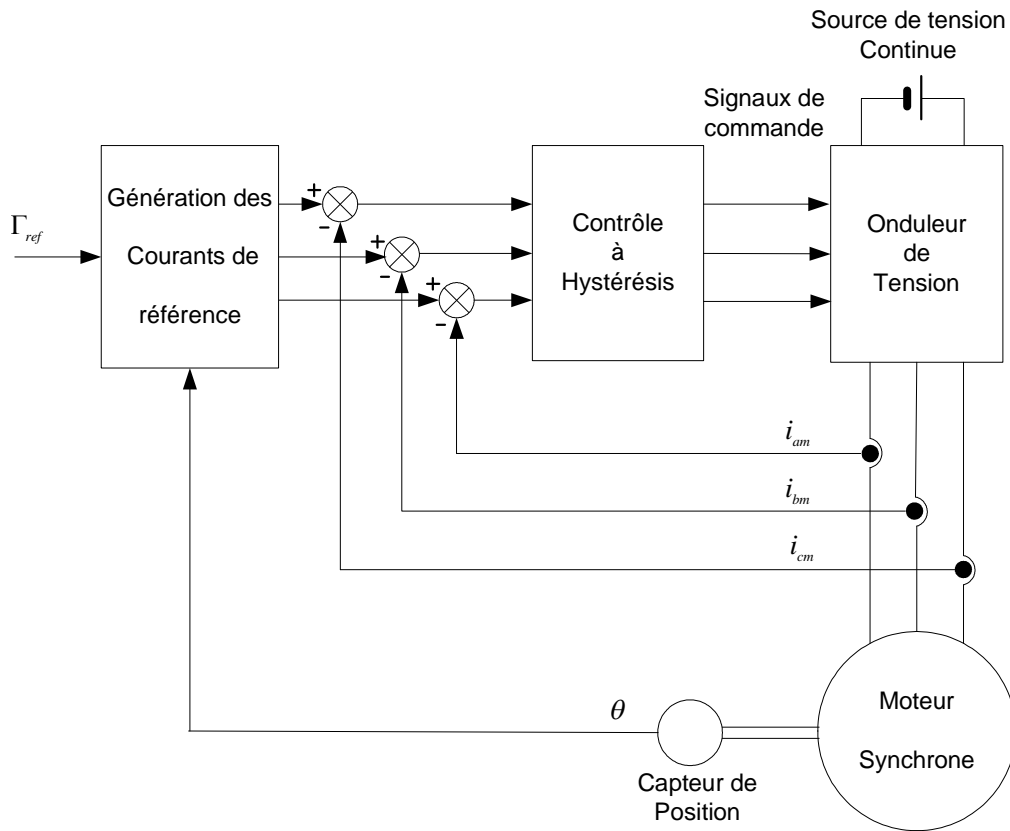


Figure 4.9 : Commande "abc" de la machine synchrone avec régulateur à Hystérésis

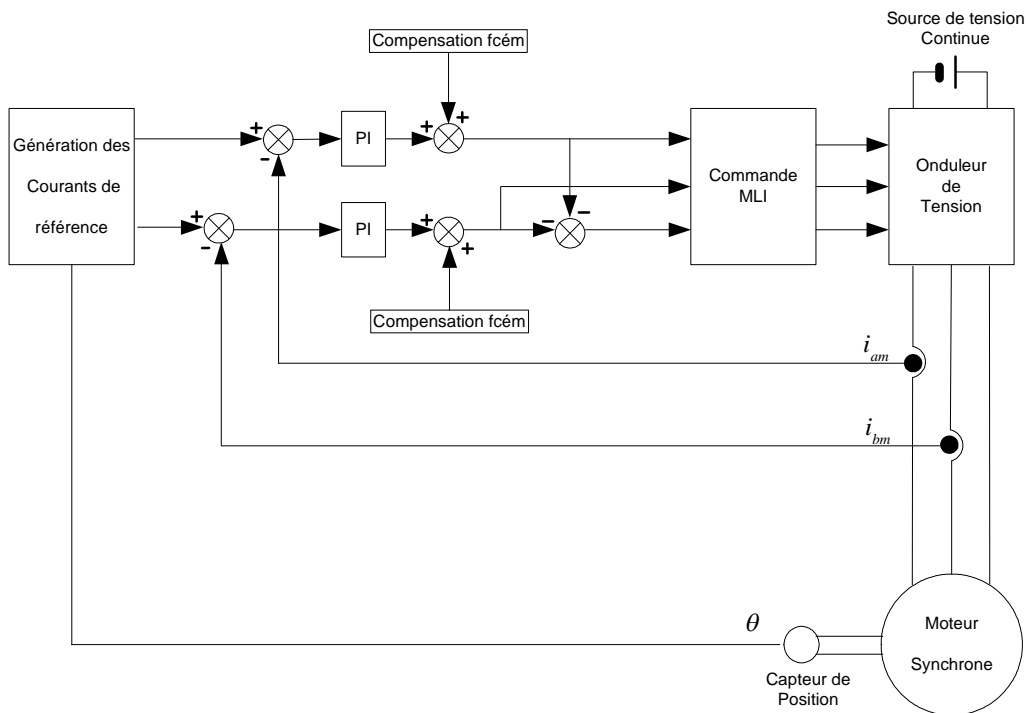


Figure 4.10 : Commande abc de la machine synchrone avec MLI

### 4.4.3 Simulation Numérique

Les résultats de la simulation numérique de la commande en couple de la machine synchrone à aimants permanents sont présentés sur les figures ci-dessous. Ces résultats sont issus de modèles développés sous Matlab.

Les figures 4.11 à 4.14 correspondent au modèle sinusoïdal, de Fig.4.15 à Fig.4.18 au modèle Optimal et de Fig. 4.19 à Fig. 4.22 pour le modèle suboptimal. La structure de la commande choisie est celle donnée sur la figure 4.9. Cette structure est la même pour les trois modèles, il suffit de modifier le bloc de génération des références de courant, selon que l'on envisage une commande classique, optimale ou suboptimale.

Avec le modèle du premier harmonique, le courant optimal minimisant les pertes Joule et permettant d'obtenir un couple de 3 Nm dans le cas de la machine étudiée est naturellement sinusoïdal (figure 4.11). Les harmoniques de rangs supérieurs n'étant pas pris en compte, le couple électromagnétique instantané (figure 4.12) présente une ondulation de couple importante, supérieure ici à 20% par rapport au couple moyen. Les courants selon les axes " $d$ " et " $q$ ", (Fig.4.13 et Fig. 4.14), sont constants avec des oscillations autour d'une valeur moyenne. Ces oscillations sont essentiellement dues à la technique de modulation choisie. On notera une valeur moyenne nulle pour le courant d'axe " $d$ ". Ce résultat, qui correspond à la commande optimale (pertes Joule minimales), dans le cas machine synchrone à pôles lisses et à fém sinusoïdale. Ce type de commande conduit dans le cas de la machine à pôles saillants à fém non sinusoïdale à de fortes ondulations de couple, comme il a été montré sur la figure 4.12. Le courant optimal de la figure 4.15 est de forme non sinusoïdale et adapté aux formes de la fém et des inductances propres et mutuelles, c'est-à-dire à la géométrie de la machine étudiée. Les ondulations de couple (figure 4.16), obtenu à l'aide du modèle optimal, sont pratiquement négligeables par rapport à celles issues du modèle classique. La faible ondulation résiduelle est due à la non prise en compte des harmoniques de rangs supérieurs dans le modèle présenté. Les figures 4.17 et 4.18, montrent, les allures des courants selon les axes " $d$ " et " $q$ ", respectivement. Les ondulations qui y apparaissent sont dues à la nature non sinusoïdale du courant de référence.

La figure 4.19, montre l'allure du courant suboptimal. Ce courant à une forme proche du courant issu du modèle optimal. Le couple électromagnétique (Fig.4.20), a une forme comparable à celle du couple suboptimal. Les courants sur les axes " $d$ " et " $q$ ", sont présentés sur les figures 4.21 et 4.22, respectivement. On note, une forte oscillation pour le courant d'axe " $d$ " comparée à la même composante du modèle suboptimal.

a- *Modèle Premier harmonique*

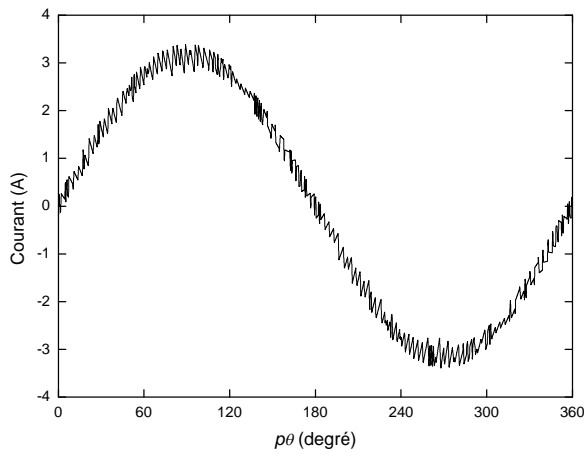


Fig. 4.11 Courant de phase

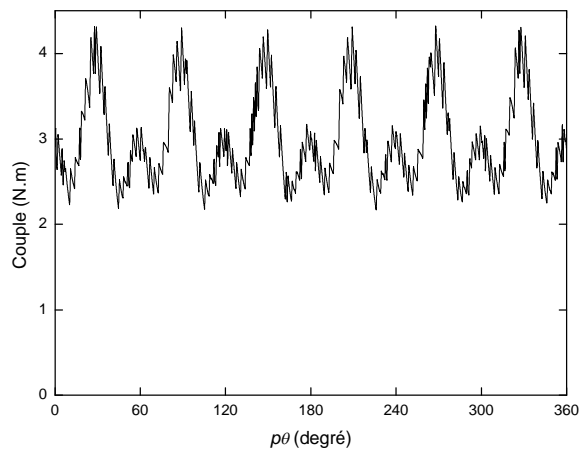


Fig. 4.12 Couple électromagnétique

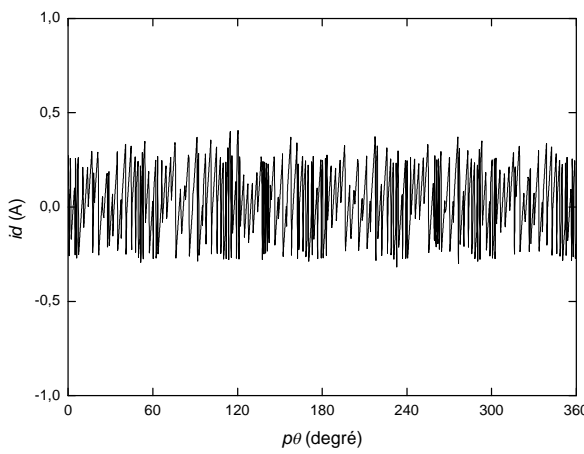


Fig. 4.13 Courant selon l'axe *d*

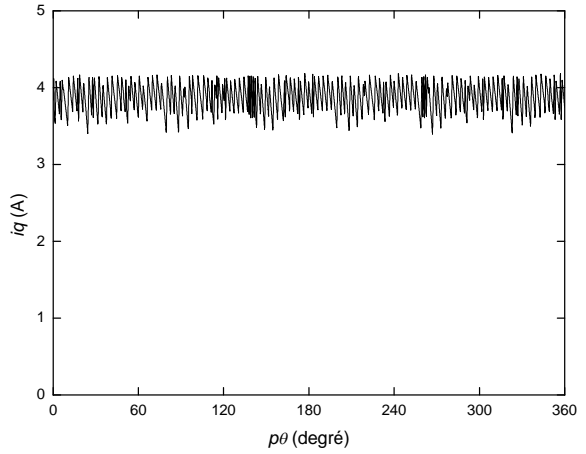


Fig. 4.14 Courant selon l'axe *q*

b- *Modèle Optimal*

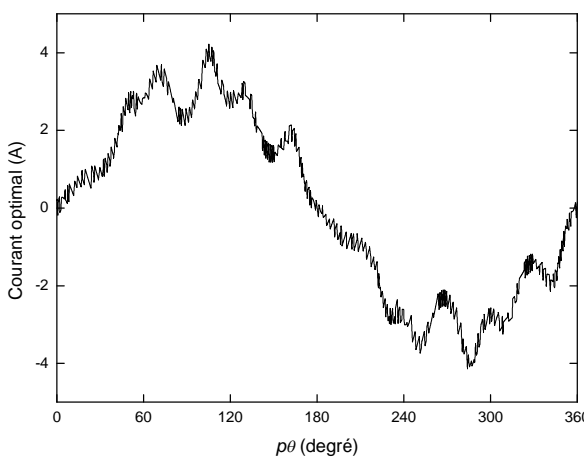


Fig. 4.15 Courant de phase

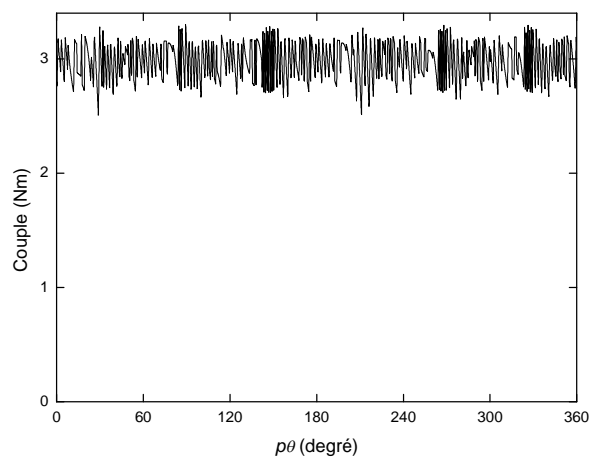


Fig. 4.16 Couple optimal

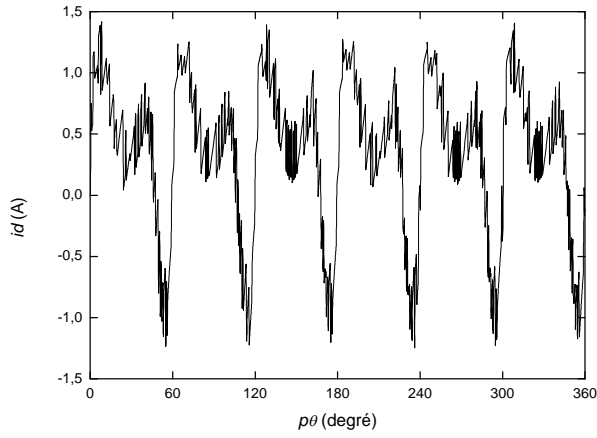


Fig. 4.17 Courant selon l'axe  $d^e$

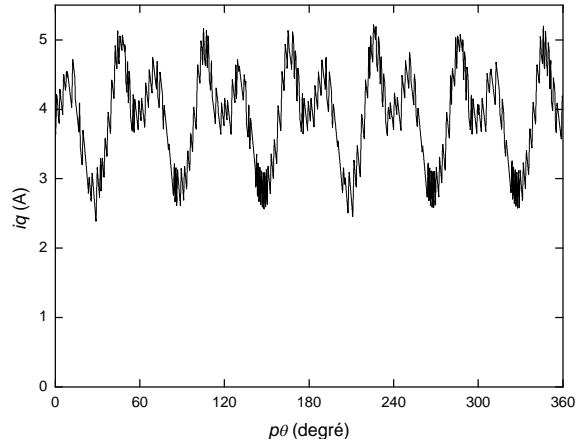


Fig.4.18 Courant selon l'axe  $q^e$

*c- Modèle Suboptimal*

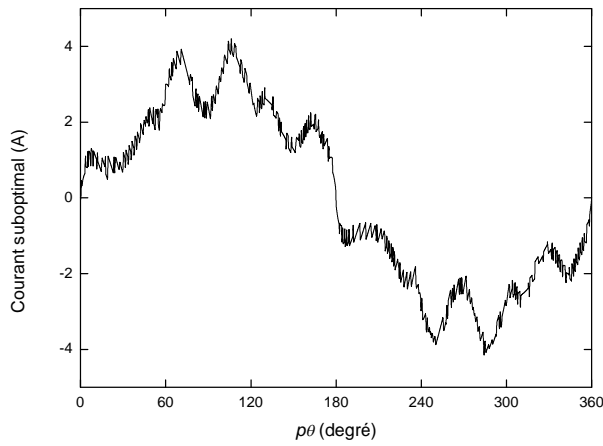


Fig. 4.19 courant de phase

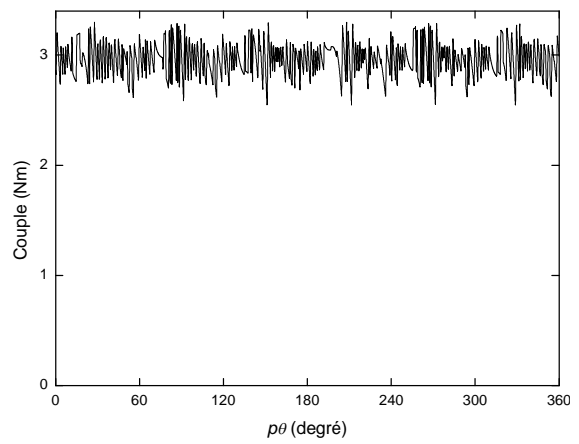


Fig. 4.20 Couple suboptimal

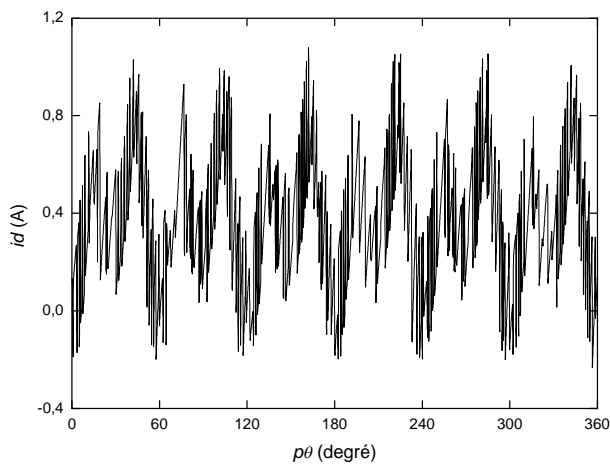


Fig.4.21 Courant selon l'axe  $d^e$

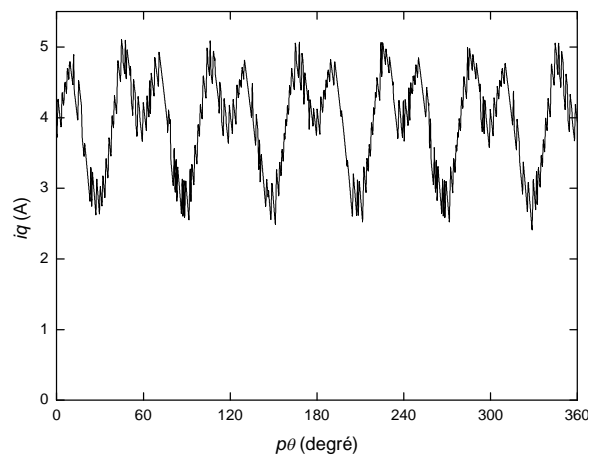


Fig.4.22 Courant selon l'axe  $q^e$

## 4.5 Banc d'essais et étude Expérimentale

Après avoir établi les modèles d'état dans les repères de Park classique et étendu pour la machine synchrone à aimants ainsi que les différentes lois de commande, nous présentons, dans ce qui suit, le banc d'essai utilisé [36], pour tester les méthodes de commande proposées et valider les résultats obtenus par simulation numérique.

### 4.5.1 Description du banc expérimental

Le schéma synoptique du banc expérimental ainsi que sa photo sont données respectivement sur les Figures 4.23 et 4.24. Le système expérimental est constitué d'une machine synchrone à aimants permanents à pôles saillants et à fém non sinusoïdale, alimentée par un onduleur de tension contrôlé en courant. La charge est constituée d'un alternateur débitant sur un pont à diodes. Ce dernier étant relié à un rhéostat. L'onduleur est composé de trois bras de ponts constitué chacun de deux IGBT (1200V, 30A, 20kHz) et de deux diodes montées en anti-parallèle avec les transistors. Les IGBT sont associés à des modules de commande gérant les temps morts et la protection contre les courts-circuits. Les signaux de commande des IGBT sont issus d'une carte DS1102 de chez dSPACE, à base d'un processeur dédié au traitement du signal, le TMS320C31 de Texas Instruments et de plusieurs convertisseurs analogiques-numériques et numériques-analogiques.

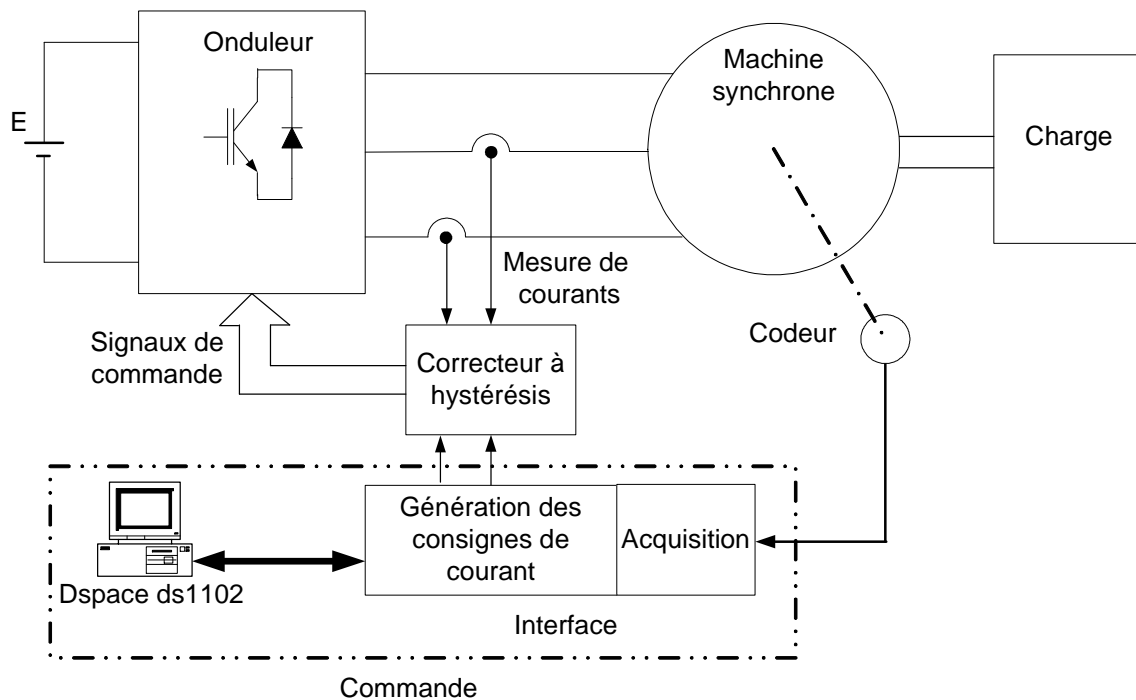


Figure 4.23 : Schéma du banc expérimental

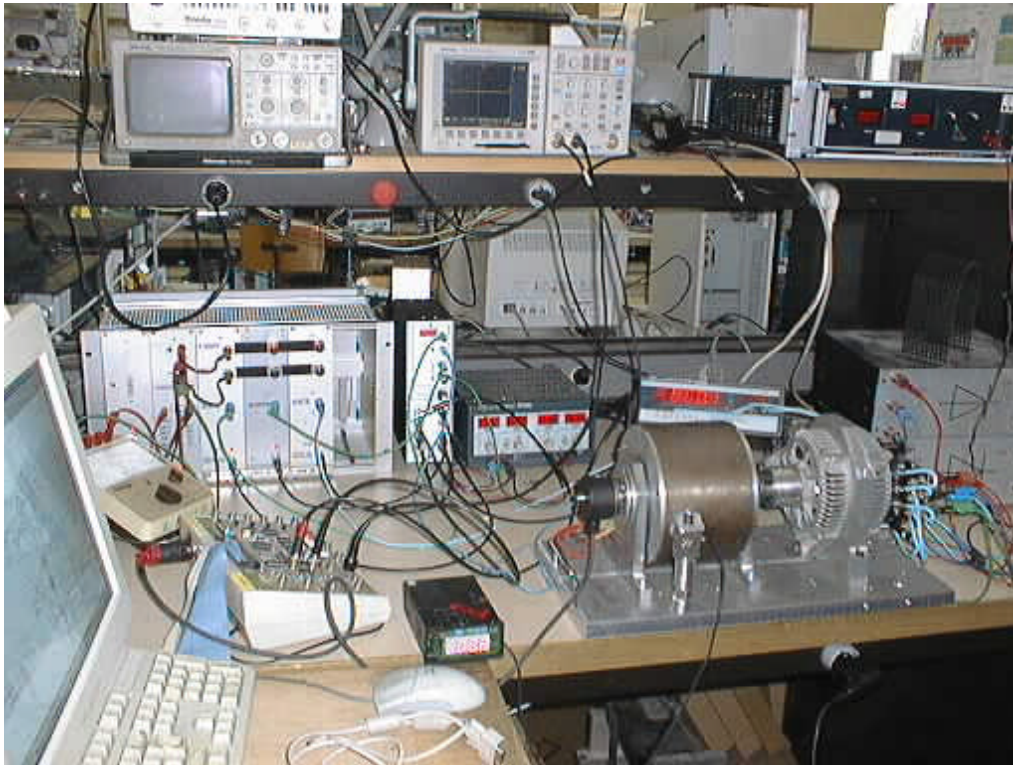


Figure 4.24: Banc d'essais de la commande de la machine synchrone à aimants permanents

La position rotorique est fournie par un codeur incrémental ayant une résolution de 1024 points par tour. La position rotorique est repérée au début de la manipulation par un calage sur la fém. Les signaux issus du capteur sont envoyés sur l'interface pour codeur prévu sur la carte DS1102.

La machine étant couplée en étoile avec neutre isolé, la mesure de deux courants de phase seulement est suffisante. Deux sondes à effet Hall de type module LEM permettent la mesure de ces courants, qui sont envoyés après traitement, sur les convertisseurs analogiques-numériques de 16 bits intégrés à la carte DS1102.

#### 4.5.2 Caractéristiques de la machine synchrone à aimants permanents

La machine synchrone utilisée présente les caractéristiques suivantes [36]:

- Tension d'alimentation :  $V_n = 220V$
- Nombre de paires de pôles :  $p = 6$
- Vitesse de rotation :  $N_n = 2000 \text{ tr/mn}$
- Puissance nominale :  $P_n = 4 \text{ kW}$
- Courant nominal :  $I_n = 10A$
- Résistance d'une phase statorique:  $R_S = 0.83 \Omega$



### 4.5.3 Résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux sont présentés sur les figures 4.25 à 4.30. Nous pouvons, dores déjà, constater la similitude des formes d'ondes des courants de phase mesurés, pour les trois modèles, (Fig. 4.25, Fig. 4.27 et Fig. 4.29), avec ceux de la simulation numérique, (Fig. 4.11, Fig. 4.15 et Fig. 4.19). Par ailleurs, les formes des couples électromagnétiques issues des trois modèles présentent des différences notables. En effet, l'ondulation  $\Delta\Gamma/\Gamma_{\text{ref}}$  du couple obtenu avec le modèle sinusoïdal est de 40% (Fig.4.26). Elle est de l'ordre de 20%, pour le modèle suboptimal (Fig. 4.28) et elle présente la plus faible valeur (15%) pour le modèle optimal (Fig. 4.30). La subsistance d'ondulations dans les formes d'ondes du couple optimal et suboptimal, obtenus expérimentalement, est essentiellement due à la non prise en considération, lors de l'étude, des effets des harmoniques générés par le convertisseur ainsi qu'au couple de détente. Hormis ces deux effets, l'on peut considérer que les résultats sont satisfaisants, ce qui valide le modèle proposé et l'approche mathématique adoptée.

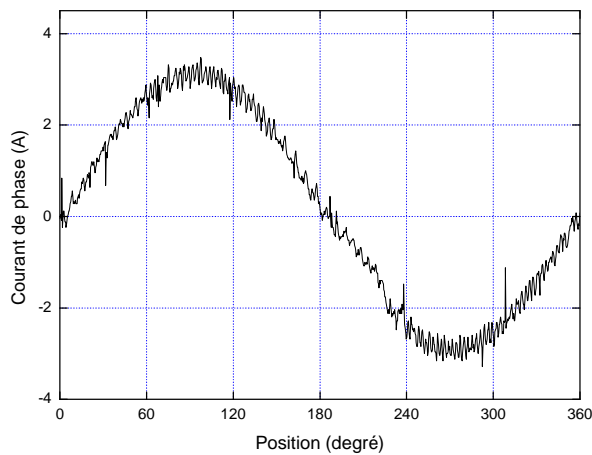


Fig. 4.25: Courant sinusoïdal

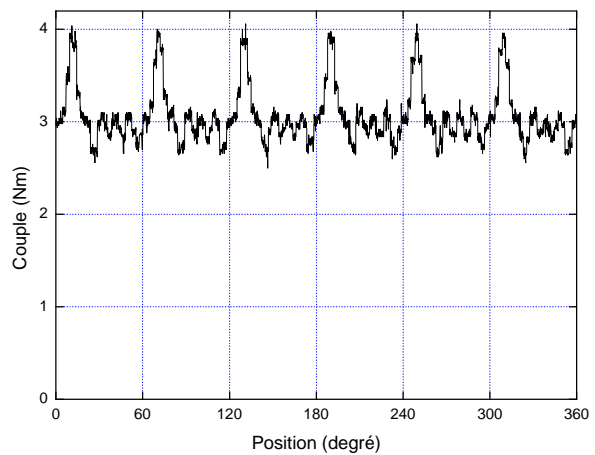


Fig. 4.26: Couple électromagnétique

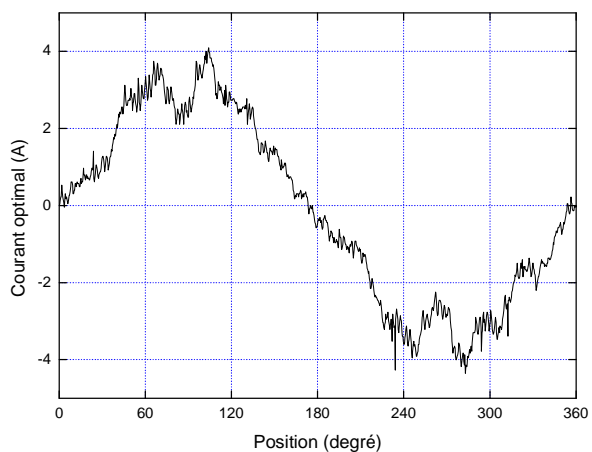


Fig. 4.27: Courant optimal

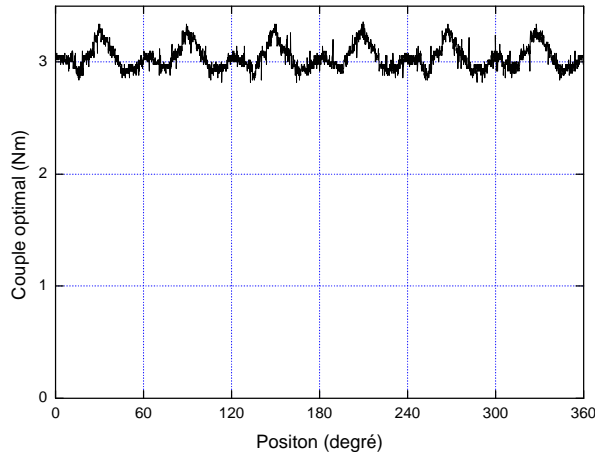


Fig. 4.28: Couple optimal

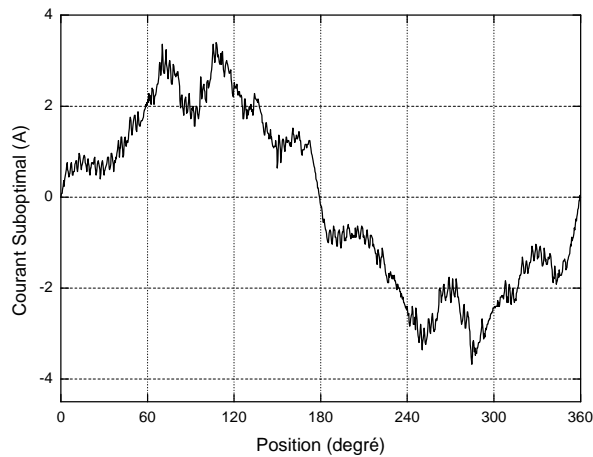


Fig. 4.29: Courant suboptimal

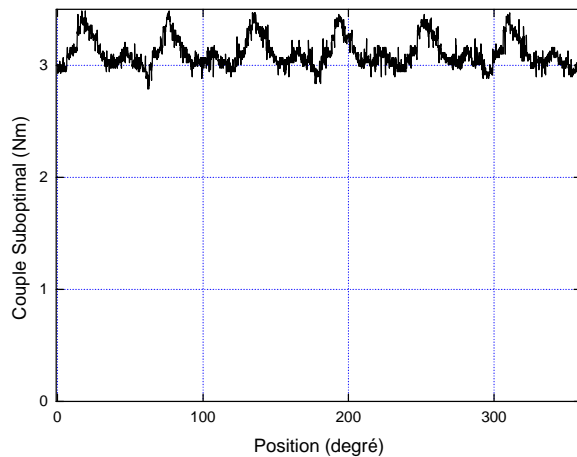


Fig. 4.30: Couple suboptimal

#### 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, après rappel des lois de commande de couple de la machine synchrone, nous avons développé le modèle d'état de la machine synchrone à aimants permanents à pôles saillants à fém et inductances non sinusoïdales. Après, la simulation numérique des trois types de commande en couple de la machine synchrone, à savoir, la commande optimale classique, la commande optimale dans le repère de Park étendu et enfin la commande suboptimale, nous avons procédé à la validation expérimentale sur un banc d'essais à base d'un processeur DSP. Il a été montré qu'une réduction effective des ondulations du couple était possible par les approches proposées comparativement au modèle classique. Les ondulations subsistantes, constatées sur les résultats expérimentaux, proviennent des erreurs dues au suivi de consignes, aux harmoniques introduits par le convertisseur et au couple de détente, négligé dans le modèle proposé. Rappelons, enfin, que malgré la supériorité des performances du modèle optimal sur celles du modèle suboptimal, ce dernier est plus adapté pour une mise en œuvre expérimentale en raison de la simplicité de son algorithme.

## Conclusion Générale

## **Conclusion générale**

Ce travail a porté sur la modélisation des machines synchrones à aimants permanents à fém et inductances non sinusoïdales. Une extension de la transformation de Park pour ces machines est présentée et des algorithmes de commande sont proposés.

Dans le premier chapitre nous avons effectué une synthèse des techniques de minimisation des ondulations de couple des machines synchrones à aimants permanents à fém idéalisées (sinusoïdales et trapézoïdales). Nous avons également rappelé les travaux effectués sur la machine synchrone à aimants montés en surfaces lorsque la fém est de forme quelconque.

Le deuxième chapitre a été consacré à l'introduction de la commande des machines synchrones à fém et inductances non sinusoïdales, moyennant une extension de la transformation de Park. Cette nouvelle transformation, découle des propriétés isocouples de la machine dans le repère de Concordia. Nous avons d'abord, tenu, à mettre en évidence cette démarche d'étude en introduisant la représentation géométrique de la transformation de Park classique et à déduire les propriétés de cette transformation en commande des machines. Nous avons constaté, que les lieux géométriques du repère de Park classique correspondaient aux asymptotes d'une hyperbole équilatère. Il était donc aisé de déduire les références optimales du courant pour la commande en couple de la machine. La commande optimale pour ces machines correspond à un fonctionnement à pertes Joule minimales. Nous avons, ensuite, procédé à l'extension de cette étude aux cas de machines synchrones à fém et inductances non sinusoïdales. Nous avons vu qu'en l'absence d'excitation, les lieux des courbes isocouples se situent sur une hyperbole, qui n'est plus équilatère et qui tournait autour de son centre lorsque le rotor tourne. La nature non sinusoïdale de la fém, consiste en une translation du centre de l'hyperbole. La recherche des formes d'ondes optimales, en vue de minimiser les pertes Joules et les ondulations de couple, conduisait à un problème d'optimisation non linéaire avec contrainte égalité.

Le chapitre trois, a porté sur l'application des résultats de l'étude appliqués à un prototype de machine synchrones à pôles saillants à fém et à inductances non sinusoïdales. Nous avons procédé à l'identification des paramètres de la machine et à l'établissement des expressions analytiques des inductances et des fém puis à leurs développements en série de Fourier. Nous

nous sommes toutefois limité aux harmoniques de la fém et des inductances les plus significatifs. A l'issue de cette étude, les références des courants optimaux ont été déterminées après résolution d'un problème d'optimisation. La méthode SQP (sequential quadratic programming) a été choisie, en raison de ses qualités en terme de précision et de convergence. Les références optimales du courant obtenues, se présentent sous forme d'expressions complexes en cas d'une implémentation sur un calculateur numérique. Une méthode d'optimisation suboptimale a été proposée. Cette méthode, basée sur le modèle moyen du couple, conduit à la formulation des références des courants sous formes de fonctions polynomiales. Les performances obtenues avec ce modèle sont satisfaisantes du point de vue ondulations de couple. En effet, ces ondulations sont de 20% par rapport au couple moyen contre 13% pour le modèle optimal alors qu'elles atteignent les 40% avec le modèle classique.

Le dernier chapitre, est essentiellement destiné à la mise en oeuvre expérimentale des différentes techniques étudiées. Après la modélisation, du convertisseur et l'établissement du modèle d'état de la machine synchrone à fém et inductances non sinusoïdales, nous avons tenu à rappeler brièvement les lois classiques de commande de couple pour les machines synchrones à aimants permanents. Nous avons procédé à la simulation numérique des différents types de commande (classique, optimale et suboptimale) ainsi qu'à la comparaison de leurs performances. Une étude expérimentale vient achever ce chapitre. Les résultats obtenus, sur un banc d'essais muni d'un processeur de traitement de signaux numériques, valident les résultats de la simulation et justifient l'approche proposée.

Ainsi, nous disposons d'un outil permettant de calculer les références optimales de courant pour n'importe quelle machine synchrone quelques soit ses formes d'ondes de fém ou d'inductances. Par ailleurs, des progrès restent encore à faire au niveau de la modélisation. En effet, il serait important de considérer l'influence de la saturation des tôles du stator, particulièrement au niveau des dents. Si ce phénomène n'est pas forcément facile à intégrer dans un modèle, la connaissance de la limite au delà de laquelle il ne peut plus être négligé serait utile. La prise en compte du couple de détente dans le modèle pourrait nous permettre de définir des entraînements plus performants. Sa neutralisation pourrait améliorer les performances des moteurs synchrones, particulièrement au niveau des ondulations de couple.

# Bibliographie

## Références Bibliographiques

- [1] J. P. Louis, Modèles pour la Commande des Actionneurs Electriques, Hermès, Lavoisier 2004, Chapitre 3-8.
- [2] D. Grenier, G. Sturtzer, D. Flieller, J.-P. Louis, Modèles pour la Commande des Actionneurs Electriques, 3 (Hermès, Lavoisier, 2005).
- [3] F. Chabot, "Méthode de Synthèse de Machines Synchrones devant Fonctionner à Puissance Constante sur une Large Plage de Vitesse," Jeunes Chercheurs en Génie Electrique, JCGE, vol. 1, no.1, pp. 247 - 250, Nov. 1998.
- [4] J. Holtz, L. Springob, "Identification and Compensation of Torque Ripple in High-Precision Permanent Magnet Motor Drives," IEEE Trans.Ind. Electron., vol.43, no.2, pp.309-320, Apr. 1996
- [5] S. Clénet, H. Javadi, Y. Lefèvre, S. Astier, M. Lajoie-Mazenc, "Theoretical and Experimental Studies of the Effects of the Feeding Currents on the Magnetic Origin of Permanent Magnet Machines", IEEE Trans. On Magnetic, vol.31, no.3, pp 1837-1842,May 1995.
- [6] E. Favre, L. Cardoletti, M. Jufer, "Permanent-Magnet Synchronous Motors : A Comprehensive Approach to Cogging Torque suppression," IEEE. Trans. Ind. Applicat., vol.29, no.6, pp.1141-1149, Nov./Dec. 1993.
- [7] S. Clénet, Y. Lefèvre, N. Sadowski, S. Astier, M. Lajoie-Mazenc, "Compensation of Permanent Magnet Motors Torque Ripple by Means of Current Supply Waveshapes Control Determined by Finite Element Method," IEEE Tans. On Magnetic, vol.29, no.2, pp.2019- 2023, March 1993.
- [8] T.M.Jahns, W.L.Soong, "Pulsating torque minimization techniques for permanents magnet AC motors drives-A review," IEEE Trans. On Indus. Electron. vol.43, no2, April 1996.
- [9] F. Colamartino, C. Marchand, A. Razek," Estimation and minimisation of electromagnetic torque ripple in a buried permanent magnet synchronous motor," ICEM'94, Paris, France, 5-8 Sept. pp.715-719, 1994.
- [10] S.K. Yala, Identification et compensation des sources d'ondulation de couple dans la commande des moteurs synchrones à aimants permanents montés en surface, Thèse de Doctorat, Université catholique de Louvain, Belgique, 1999.
- [11] X. Z. Liu, G. C. Verghese, J. H. Lang, M. K. Onder, "Generalizing the Blondel-Park transformation of electrical machines: necessary and sufficient conditions," IEEE Trans. On Circuits and Syst., vol.36, n°8, pp. 1058-1067, Aug. 1989.
- [12] D. Grenier et J. P. Louis, "Modelling for Control of a Non-Sinewave Permanent Magnet Synchronous Drive by an Extension of the Park's Transformation," IMACS TC1 Proc., pp. 681-684, Montréal Juillet 1993.
- [13] D. Grenier, S. Yala, J.P. Louis, "Définition d'Extensions de la Transformation de Park pour la Commande de Moteurs Synchrones à Aimants Permanents Montés en Surface," European Journal of Physics, vol. 1, pp. 233-246, 1998.
- [14] D.Grenier, Modélisation et stratégies de commande de machines synchrones à aimants permanents à forces contre-électromotrices non-sinusoïdales, Thèse de Doctorat, ENS de Cachan, France, 1994.

- [15] G. Sturtzer, D. Flieller, J.P. Louis, "Mathematical and Experimental Method to Obtain the Inverse Modelling of Non Sinusoidal and saturated Synchronous Reluctance Motors," *IEEE Trans. Energy Conv.*, vol. 18, n°4, pp.494-500, Dec. 2003.
- [16] G. Sturtzer, D. Flieller, J.-P. Louis, "Reduction of torque undulation and extension of the Park's transformation applied to non-sinusoidal saturated synchronous motors," *Mathematics and Computers in Simulation*, Special issue: Modelling and Simulation of Electric Machines, Converters and Systems - Edited by L. Dessaint, K. Al- Haddad, vol. 63, Issues 3-5, pp. 297- 305, 17 November 2003.
- [17] B. Nogarede, M. Lajoie-Mazenc, "Torque ripple minimization methods in sinusoidal fed permanent magnet synchronous machines," *Proc. IEE conf. Elec. Machines & Drives*, pp. 41-45, Sept. 1991.
- [18] E.C. Andersen, J. Xie and C. Topfer, "A Sheerin-wave generator for operation in deep bore hole," *IEEE Trans. Ind. Applicat.*, vol. 28, no. 2, pp. 434-440, Mar/Apr. 1992.
- [19] C. Chan, J. Jiang, G. Chen, X. Wang, and K. Chau, " A novel polyphase multipole square-wave permanent magnet motor drive for electric vehicles," *IEEE Trans. Ind. Applicat.* vol. 30, no 5, pp.1258-1266, Sept./Oct. 1994.
- [20] D.C. Hanselman, "Minimum torque ripple, maximum efficiency excitation of brushless permanent magnet motors," *IEEE Trans. Indus. Electron.*, vol.41, no.3, pp.292-300, June 1994.
- [21] P. L. Capman, S. D. Sudhoff., C. A. Whitcomb, "Optimal Current control strategies for surface-mounted permanent-magnet synchronous machine drives," *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 2000.
- [22] T. S. Low, T. H. Lee, K. J. Tseng, and K. S. Lock , "Servo Performance of a BLDC Drive with instantaneous torque control," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 28, no. 2, pp 455-462, March-April 1992.
- [23] C. Marchand, F. Colamartino, A. Razek, "Torque minimisation in permanent magnet synchronous servo drive," *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 14, no. 3, September 1998.
- [24] K.Y. Cho, J.D. Bae, S.K. Chung, and M.Y. Youn, "Torque harmonics minimization in permanent magnet synchronous motor with back EMF estimation," *IEE Proc. Elec. Power Applicat.*, vol 141, no.6, 1994, pp. 323-330.
- [25] S. K. Chung, H. Kim, "A new instantaneous torque Control of PM synchronous motor for high-performance direct drive application," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 13, no. 3, May 1998.
- [26] T. S. Low, T. H. Lee, K.J. Tseng and K.S. Lock, " Strategy for the instantaneous torque control of permanent magnet brushless DC drives," *IEE Proc.*, vol.137, pt. B, no. 6, Nov.1990, pp.355-363.
- [27] B. Le Pioufle, "Comparison of speed nonlinear control strategies for the synchronous servomotor," *Electric Machines and Power Systems*, vol. 21, no. 2, March-April 1993, pp.151-169.
- [28] L. Gasc, M. Fadel, S. Astier, L. Calegari, "Load torque observer for minimising torque ripple in PMSM," in *Electrical Machines and Systems, ICEMS*, Vol. 2, pp. 473-476, 2003.
- [29] N. Matsui, T. Makino, and H. Satoh, "Auto-compensation of torque ripple of DD Motor by torque observer," *IEEE Ind. Applicat. Soc. Annu. Meet.*, Dearborn, MI, Sept.1991, pp.305-311.



- [30] C. Delécluse, D. Grenier, "A measurement method of the exact variations of the self and mutual inductances of a buried permanent magnet synchronous Motor and its application to the reduction of torque ripples," AMC'98, Coimbra, 1998, pp.191-197.
- [31] M.Balabane, M.Duflo, M. Frisch, D. Guegan, Géométrie, Math en kit 1, Vuibert Université, Chapitre 1, 1981.
- [32] D. Flieller, Etude de systèmes électrotechniques non linéaires échantillonnés, application à la modélisation et à la commande de machines à reluctance variable à double saillance. Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6, Octobre 1995.
- [33] D. Diallo, G. Champenois, H. Daffix, "On line adjustment of the torque angle for the torque optimization and diagnosis purposes in anisotropics PSMS," IECON Hawaiï, pp.887-890, 1993.
- [34] Y. Ait-Gougam, L. Vido, J.-P. Louis, R. Ibtouen, O. Touhami, M. Gabsi, M. Lecrivain, "Modèle Inverse et Minimisation des Ondulations de Couple des Machines Synchrones à Aimants à FEM et Inductances Non- Sinusoïdales," Electrotechnique du Futur (Congrès EF), Grenoble, 14-15 septembre, 2005.
- [35] Y. Ait-Gougam, R. Ibtouen, O. Touhami, J.-P. Louis, M. Gabsi, "Inverse Modelling and Pulsating Torque Minimization of Salient Pole Non-sinusoidal Synchronous Machines," Electric Power Systems Research, Elsevier 2007 (In press, proof EPSR\_2490).
- [36] Y. Amara, Contribution à la conception et à la commande des machines synchrones à double excitation. Thèse de Doctorat, Université Paris XI, 2001.
- [37] L. Vido, Etude d'actionneurs électriques à double excitation destinés au transport. Dimensionnement de structures synchrones, Thèse de Doctorat, ENS de Cachan, 2005.
- [38] T. Lubin, Modélisation et commande de la machine synchrone à réluctance variable. Prise en compte de la saturation magnétique. Thèse de Doctorat, Groupe de Recherche en Electrotechnique et Electronique de Nancy, 2002.
- [39] J. Lesenne, F. Notelet, G. Segulier, Introduction à l'électrotechnique approfondie, Technique et Documentation, pp. 1-94, 1981.
- [40] T.J.E. Miller, Brushless Permanent-Magnet and Reluctance Motor Drives, Oxford : Clarenton Press, 1989.
- [41] M.Miniou, Programmation Mathématiques, Théorie et Algorithmes, Ed. Dunod, Paris 1983.
- [42] M.Bounekhla, Contribution à l'identification paramétrique de la machine asynchrone, Thèse de Doctorat d'Etat en génie électrique, ENP, Mai 2004.
- [43] L. Hadjout, Dimensionnement de machines synchrones à aimants montés sur la surface, Thèse de Doctorat d'Etat en génie électrique, ENP, Décembre 2006.
- [44] A. Mitsiouk, S. Negny, A. Hait, J.-M. Le Lann, S. Avdoshin, "Optimisation des systèmes dynamiques hybrides," 5<sup>e</sup> congrès des doctorants de l'école doctorale systèmes, EDSYS'04, Institut National Polytechnique de Toulouse.
- [45] Y.Ait-Gougam, R. Ibtouen, O. Touhami, J.-P. Louis, "Extended Park Model for Torque Ripples Minimization of a PM-Synchronous Machine," International Review of Electrical Engineering (IREE), vol.1, n°1, pp.219-228, March-April. 2006.

- [46] T.M. Jahns, G.B. Kliman, and T.W. Newman, "Interior permanent-magnet synchronous motors for adjustable-speed drives," *IEEE. Trans. Ind. Applications*, vol. 22, no. 4, pp.738-747, 1986.
- [47] J.-P. Louis, C. Bergmann, " Commande numérique des ensembles convertisseurs machines," *Revue Générale de l'Electricité*, no.5, pp.124-133, Mai 1992.
- [48] M.O.Mahmoudi et Y.Aït gougam, " Etude comparative entre diverses stratégies de modulation de largeur d'impulsions pour onduleur de tension alimentant un moteur asynchrone," *Special issue of A.J.O.T., Proceedings of 2end C.E.A.*, vol.1, Nov.29-30, Algiers 1994.
- [49] M. Lajoie-Mazenc, P. Viarouge, *Alimentation des machines synchrones, Techniques de l'ingénieur*, D3630.
- [50] Y.Benbouazza, Y.Ait gougam et R.Ibtiouen: " Commande vectorielle sans capteur mécanique d'une PMSM alimentée par onduleur de tension contrôlé en courant," *SPEECT'99, Oujda Maroc*, Mai 1999.
- [51] M. Lajoie-Mazenc, C. Villanueva, J. Hector, "Study and implementation of hysteresis controlled inverter of a permanent magnet synchronous machine," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 1A-21, n°2, March/April 1985.
- [52] P.F. Seixas, *Commande numérique d'une machine synchrone autopilotée, Thèse de Doctorat de l'INP, Toulouse*, Juillet 1988.
- [53] T.M. Jahns, G.B. Kliman, and T.W. Neumann, " Interior permanent magnet motor for adjustable speed drives," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. IA-22,pp.738-747, July./Aug. 1986.
- [54] S. Morimoto, Y. Tong, Y. Takeda, and T. Hirasha, "Loss minimization control of permanent magnet synchronous motor drives," *IEEE Ind. Electron*, vol.41, no.5, Oct. 1994.

**ملخص -** إن نمذجة الماكينات الجيبية تتم عادة باستعمال المعلم الكلاسيكي "لبارك". في هذا العمل نقدم النموذج العكسي للماكينة المتزامنة ذات المغناطيس الدائم والأقطاب البارزة حيث التدفق والذاتيات المغناطيسية غير جيبية. هذا النموذج العكسي مستنتج من خواص بيانات العزوم المغناطيسية في معلم "كونكورديا". هذا يسمح بتعريف معلم جديد أين يتم اختيار توجيه مميز لشعاع تيار الطور، هذا يؤدي إلى تقليص ضياعات الماكينة بمفعول جول من أجل عزم مزدوجة معين. ونتيجة لذلك، فإن شكل موجة التيار المحصل عليها يسمح أيضا بتقليص تموجات عزم المزدوجة. طريقة التحكم تحت المثلى قد اقترحت. هذه الطريقة، المبينة على النموذج المتوسط للماكينة، تسهل الإستعمال التطبيقي بواسطة حاسوب رقمي. النتائج المتحصل عليها حسابيا قد تم التحقق منها تطبيقيا على هيكل تجريبي مبني على عقل إلكتروني لتحليل الإشارة. كل النتائج معروضة في هذه المذكرة تبين فعالية الطريقة المقترحة.

**الكلمات الرئيسية :** الماكينة المتزامنة ذات المغناطيس الدائم، النموذج العكسي، تقليص تموجات العزم، تحقيق الامتلية.

**Résumé –** *La modélisation des machines à courant alternatif est souvent réalisée en utilisant le repère classique de Park. Nous présentons un modèle inverse pour la machine synchrone à aimants permanents à pôles saillants à répartition de flux et inductances non sinusoïdales. Ce modèle inverse est déduit des propriétés des courbes isocouples dans le repère de Concordia. Cela permet de définir un nouveau repère dans lequel nous choisissons une orientation privilégiée pour le vecteur courant de phase, conduisant à une minimisation des pertes par effet Joule dans la machine pour un couple donné. En conséquence, la forme d'onde du courant optimal obtenue, permet également de minimiser les ondulations de couple. Une commande suboptimale est également proposée. Basée sur le modèle moyen de la machine, elle facilite la mise en œuvre expérimentale avec calculateur numérique. Les résultats de la simulation numérique ainsi que la validation expérimentale sur un banc d'essai à base d'un processeur de traitement de signal (DSP) sont présentés.*

**Mots clés:** *Machine synchrone à aimants permanents, modèle inverse, minimisation des ondulations de couple, optimisation.*

**Abstract –** *AC motor mathematical models are usually obtained using classical d-q transformation. A new inverse modeling for synchronous motors is presented. This modeling is based on the constant torque curves properties in the Concordia's reference frame. It takes into consideration the non-sinusoidal character of magnetic field distribution, self and mutual inductances with respect to the angular rotor position. Torque control, in the extended Park referential, is achieved by two chief methods of current minimization. The first one uses the optimal current that yields a constant instantaneous torque while minimizing copper losses and the second uses the sub-optimal current based on mean torque calculation. In this case, current reference and torque reference are expressed by polynomial function after normalization. The functions optimizing the mean torque are easy to implement and minimize both copper losses and torque ripples. Simulation and experimental results on DSP-based test bed are presented and shows the efficiency of the proposed method.*

**Keywords:** *Synchronous Machines, Permanent Magnets, Inverse Modeling, Torque Ripples, Optimization.*