

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

Mémoire de magister

Option : Construction Mécanique.

Présenté par

Nacer HADIDI

Ingénieur d'Etat en Génie Mécanique.

*Contribution à la Modélisation et à la Commande
d'un robot bipède*

le 12/05/2010

Devant le jury :

Président : Saïd RECHAK, Prof, ENP

Promoteurs : Mohamed BOUAZIZ, M.C. ENP

Chawki MAHFOUDI, M.C. Univ. Larbi Ben M'Himdi, Oum El Bouaghi

Examineurs : Hachemi CHEKIREB, Prof, ENP

Abdelouaheb ZAATRI, Prof. Univ. Constantine

Krimo AZOUAOUI, Prof. USTHB

ملخص:

نهتم في هذه العمل بالتصميم و التحكم في الروبوت ذو الرجلين . حيث نتطرق بداية إلى دراسة مرجعية حول الروبوتات ذات الأرجل وخاصة الثنائية منها حيث نخصها أولا بإيجاد النموذج الهندسي المباشر و العكسي و بدراسة حركية للروبوت الثنائي الأرجل . نقوم بعد ذلك بتوليد المشية التي يتبعها الروبوت أثناء سيره و بمحاكاة للنموذج الهندسي نستطيع إيجاد النموذج الحركي و الديناميكي الخاص بالروبوت , حيث هذا الأخير يتم تعيينه بطريقتين هما : طريقة لاغرونج و الثانية طريقة نيوتن-اولير . بعد حصولنا على النموذج الديناميكي لهذا الروبوت نمر الى دراسة التوازن السكوني و الديناميكي للروبوت ثم نتطرق إلي التحكم بالفصل اللاخطي الديناميكي فيها . و في الأخيرة مجموعة من برامج محاكاة بينت فعالية العمل المنجز .

كلمات مفتاحيه : علم الآلية (الروبوتيك)، روبوت ثنائي الأرجل، تصميم، مولد السير، توازن الروبوت، التحكم في الروبوتات.

Résumé :

Le présent travail s'intéresse à la modélisation et à la commande d'un robot bipède. On y a présenté les modélisations géométriques directe et inverse, ainsi qu'une étude cinématique du robot. Ensuite, on a développé un générateur de trajectoire qui permet au bipède d'effectuer sa marche. Le calcul du modèle dynamique du robot à travers les deux formalismes Newton-Euler et Lagrange se suit par une étude de la stabilité par le biais de la méthode de Zero Moment Point, puis une implémentation d'une loi de commande par découplage non linéaire est présentée. Enfin, des simulations ont été effectuées dans le but de montrer les résultats de l'approche proposée.

Mots clés : robotique, robot bipède, modélisation, générateur de marche, stabilité, commande de robots.

Summary:

This work is about modelling and control of a biped robot. We present a direct and inverse geometrical modelling, as well a kinematic study of the robot. Then we develop a trajectory generator which makes it possible for the biped to plan its walk. The calculation of the dynamic model of the robot through the two formalisms: Newton Euler and Lagrange, is followed by a study of stability by the criteria of the Zero Moment point, an implementation of a control law by nonlinear decoupling is presented. These approaches are validated by simulations. We then finish by a conclusion and a presentation of perspectives.

Key words: Robotics, Biped Robot, metallization, walking generator, stability, Robots control.

إهداء

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

رَبِّ أَوْزَعْنِي أَنْ أَشْكُرَ نِعْمَتَكَ الَّتِي أَنْعَمْتَ عَلَيَّ وَعَلَىٰ وَالِدَيَّ وَأَنْ أَعْمَلَ

صَالِحًا تَرْضَاهُ وَأَدْخِلْنِي بِرَحْمَتِكَ فِي عِبَادِكَ الصَّالِحِينَ

أهدي هذا العمل، ثمرة سنين من الاجتهاد و المثابرة، إلى:

- من لم يهدأ لهم خاطر حتى و إن اشتد عظمي و بلغت حلمي، والديّ الكريمين، حفظهما بحفظه الحافظ و بارك في أعمارهما؛
- إلى الإخوة الأعزّاء، يجدون في هذه الكلمات كلّ التقدير و الشكر؛
- إلى الأخت الغالية؛
- إلى كل الأهل و الأقارب؛
- إلى الأستاذين التقديرين: ر. لعراضي و رضا لمدرسة الفوفيتنام بعين بسام و المحمدية، إلى كل الأشبال و إلى كل رياضي؛
- إلى كل الأصدقاء و أخص بالذكر منهم: ع. لعجالي، أبوزيدة، ع. عزّمو، س. مسعودي، ب. بلبايطه، س. جعفر،

إلى كل من نسيه قلبي و لم ينسه قلبي.

Remerciements

Louange à « ALLAH Le Tout Puissant » de m'avoir donné le courage ainsi que la force pour mener à bout ce modeste travail.

Je remercie Monsieur Mohamed BOUAZIZ, Maître Conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique, Alger, d'avoir bien voulu m'encadrer et pour toutes les idées et l'aide qu'il m'a procurées pendant toute la durée de ce mémoire, ainsi que pour son grand encouragement.

J'ai pu apprécier la disponibilité, les conseils ainsi que la gentillesse de mon deuxième directeur de mémoire, Monsieur Chawki MAHFAUDI, Maître de Conférences à l'université d'Oum El-Bouaghi. Je le remercie très sincèrement d'avoir bien voulu m'encadrer, diriger et m'accompagner pendant cette période. Je ne peux lui être que très reconnaissant.

Je tiens particulièrement à remercier vivement Monsieur Saïd RECHAK, Professeur à l'ENP, pour l'intérêt qu'il a porté au travail effectué en acceptant la présidence du jury.

Je tiens à présenter mes respectueux et vifs remerciements à Monsieur Abdelouahab ZAATRI, Professeur à l'université de Constantine, Monsieur Hachemi CHEKIREB, Professeur à l'ENP et Monsieur Krimo. AZOUAOUI, Professeur à l'USTHB, de m'avoir honoré en acceptant de faire partie du jury de soutenance.

Je ne peux oublier l'ensemble des personnes que j'ai côtoyées pendant mon cursus d'études, qu'elles trouvent ici mes remerciements les plus distingués. Je remercie également tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Enfin je ne pourrais terminer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble de mes enseignants, qu'ils trouvent ici, dans ces lignes, l'expression de ma profonde gratitude.

SOMMAIRE

Introduction générale	01
-----------------------	----

Chapitre I

Etude Bibliographique

I.1.	Introduction.....	04
I.2.	Etude biomécanique de la marche humaine.....	06
I.2.1.	Cycle de marche.....	07
I.2.1.1.	Phase simple support.....	07
I.2.1.2.	Phase double support.....	08
I.2.2.	Allure de course.....	08
I.2.3.	Le pas et ses caractéristiques.....	09
I.2.4.	Impact.....	09
I.3.	Définitions.....	09
I.4.	Travaux antérieurs.....	11
I.4.1.	Modèles existants	11
I.4.1.1.	Pour un modèle planaire (2D).....	11
I.4.1.2.	Pour un modèle tridimensionnel (3D).....	11
I.4.2.	Synthèse pour l'étude d'un robot bipède.....	14
I.4.2.1.	Modélisation.	14
a.	Modélisation géométrique.....	15
b.	Modélisation cinématique.....	15
c.	Modélisation dynamique.....	15
I.4.2.2.	Générateur de trajectoire.....	17
I.4.2.3.	Equilibre (stabilité).....	19
I.4.2.4.	Commande.....	22
I.5.	Quelques réalisations des robots bipèdes.....	24
I.5.1.	Robots bipèdes Honda.....	24
I.5.2.	Robot Wabian-2.....	26
I.5.3.	Humanoid Robotics Projects (HRP) (Kawada) , Japan.....	26
I.5.4.	Robots Bipèdes de MIT (Leg Laboratory).....	27
I.5.5.	Sony QRIO robot.....	27
I.5.6.	Toyota motor corporation -tokyo - (TMC).....	28
I.5.7.	Le Robot Bip2000, Français.....	28
I.6.	tableau récapitulatif des caractéristiques de quelques robots.....	30
I.7.	Conclusion.....	30

Chapitre II

Modélisation Géométrique

II.1.	Introduction.....	31
II.2.	Modèle bipède	32
II.2.1.	Schémas cinématique du robot.....	32
II.3.	Modélisation géométrique.....	33
II.3.1.	Principe de modélisation de Denavit-Hertenberg (DH).....	33
II.3.2.	Premier cheminement	33
II.3.2.1.	Les paramètres de D-H (1 ^{ière} chemin de modélisation).....	34
II.3.2.2.	Les différentes matrices de transformation.....	35
II.3.3.	Deuxième cheminement.....	36
II.3.3.1.	Les paramètres de D-H (2 ^{ième} chemin de modélisation).....	37
II.3.3.2.	Les différentes matrices de transformation.....	38
II.3.4.	Relations géométriques entre les deux formulations.....	39

II.3.5.	Troisième cheminement.....	40
II.3.5.1.	Les paramètres de D-H (3 ^{ième} chemin de modélisation).....	40
II.3.5.2.	Les différentes matrices de transformation.....	41
II.3.6.	Relations géométriques entre le premier et le troisième chemin de la modélisation	42
II.4.	Modèle géométrique direct (MGD).....	43
II.4.1.	Application au Bipède.....	43
II.4.2.	Récapitulation des calculs du MGD des deux cheminements.....	45
II.5.	Modèle géométrique inverse (MGI).....	45
II.5.1.	La méthode de Paul.....	46
II.5.2.	Application au robot.....	46
II.5.3.	MGI du premier chemin de modélisation géométrique.....	46
II.5.4.	MGI du deuxième chemin de modélisation géométrique.....	47
II.5.5.	MGI du troisième chemin de modélisation géométrique.....	52
II.6.	Simulations.....	53
II.7.	Conclusion.....	54

Chapitre III

Modélisation Cinématique

III.1.	Introduction.....	56
III.2.	Lois de composition des vitesses d'un point matériel.....	56
III.3.	Le modèle cinématique directe (MCD).....	57
III.3.1.	Calcul de la matrice Jacobienne de base.....	57
III.3.2.	Calcul de la matrice ${}^i J_n$	59
III.4.	Le MCD du bipède.....	59
III.4.1.	premier chemin de modélisation.....	59
III.4.2.	Jacobienne du troisième chemin de modélisation.....	62
III.5.	Modèle cinématique inverse (MCI).....	63
III.5.1.	Problème du calcul cinématique inverse.....	63
III.5.2.	Application au robot bipède.....	64
III.5.3.	Singularités du robot.....	66
III.6.	conclusion.....	67

Chapitre IV

Générateur de Trajectoire

IV.1.	Introduction.....	67
IV.2.	Hodographe de la marche.....	68
IV.3.	Trajectoire du pied oscillant.....	68
IV.3.1.	Simulation de la trajectoire du Pied en vole.....	71
IV.4.	La trajectoire de la Hanche.....	72
IV.4.1.	Simulation de la trajectoire de la hanche.....	75
IV.5.	Simulation du modèle géométrique inverse.....	76
IV.6.	Conclusion.....	79

Chapitre V

Modélisation Dynamique

V.1.	Généralités.....	80
V.1.1.	Introduction.....	80
V.1.2.	Etude des différents formalismes existants de la dynamique.....	80
V.1.3.	Propriété du modèle dynamique.....	80
V.2.	Calcul de Base de la dynamique.....	81
V.2.1.	Calcul de l'énergie cinétique.....	81
V.2.2.	Calcul de l'énergie potentielle.....	83

V.3.	Calcul itératif des couples nécessaires aux actionneurs.....	84
V.3.1.	Equation de Newton-Euler linéaire par rapport aux paramètres inertiels.....	84
V.3.1.1.	Forces et couples appliquées à un chaînon isolé du robot.....	85
V.3.1.2.	Exemple.....	86
V.3.2.	Equations dynamiques du robot.....	88
V.3.2.1.	Calcul des matrices A , D et Q de l'équation dynamique du robot.....	88
V.4.	Application au robot.....	89
V.4.1.	Phase de simple support (PSS).....	89
V.4.2.	Phase Transitoire (Phase d'impact) (PT).....	90
V.4.3.	Phase de double support (PDS).....	92
V.5.	Simulation.....	93
V.5.1.	Force de réaction.....	93
V.5.2.	Couples.....	94
V.6.	Conclusion.....	95

Chapitre VI

Etude de la Stabilité

VI.1.	Introduction.....	96
V.2.	Calcul du centre de masse du robot.....	97
VI.3.	Equilibre statique du robot.....	98
VI.3.1.	Les deux pieds sont confondus.....	98
VI.3.2.	Les deux pieds sont écartés par un pas.....	99
VI.4.	Etude dynamique de la stabilité.....	100
VI.4.1.	Point nul des moments (ZMP).....	100
VI.4.2.	Types de ZMP.....	101
VI.4.3.	Génération de la marche normale.....	102
VI.4.4.	Dérivation de l'équation de ZMP.....	102
VI.5.	Simulation.....	104
VI.6.	Conclusion	105

Chapitre VII

Etude de la Commande

VII.1.	Introduction.....	106
VII.2.	Equation de mouvement.....	106
VII.3.	Commande par découplage non linéaire dans l'espace articulaire.....	107
VII.4.	Commande dynamique prédictive.....	108
VII.5.	Simulation.....	110
VII.6.	Conclusion.....	114

VIII.	conclu générale et perspective.....	115
-------	-------------------------------------	-----

	Bibliographie	118
--	----------------------------	-----

Annexe.

Résultats symboliques du modèle dynamique

LISTE DES FIGURES.

N° figure	Titre	page
I.1	Classes des Robots (selon la mobilité).	05
I.2	Robot à roues et robot bipède face à un trou dans le sol.	05
I.3	Robot à roues et robot bipède face à un obstacle sur le sol.	05
I.4	Décomposition d'un cycle de marche.	06
I.5	Référence des plans pour le robot bipède	07
I.6	Phase d'un cycle de marche	07
I.7	Les différentes périodes de la phase double support.	08
I.8	Phase de vole d'une allure course.	08
I.9	Les caractéristiques du pas.	09
I.10	Type de la marche statique.	10
I.11	Type de la marche dynamique.	10
I.12	Trois cas typiques décrire le rapport entre ZMP et CP.	10
I.13	Schéma cinématique : Vue latérale et frontal du Bip2000.	12
I.14	Model of Biped Robot.	12
I.15	Structural limit.	12
I.16	Stable area of CoG.	12
I.17	Couples, forces du robot dans le plan sagittal.	14
I.18	Commande du robot dans le plan sagittal.	14
I.19	Plan Frontal.	14
I.20	Bloc commande utilisant la technique modified α – computed Torque.	14
I.21	Approximation du pendule inversé.	16
I.22	Robot bipède à 05 chainons	17
I.23	Modèle de marche et résultats en PSS	18
I.24	trajectoire de la hanche et du pied.	17
I.25	Détermine la hauteur de la hanche.	17
I.26	Simulation de la marche d'une PSS.	18
I.27	Traces de la marche.	18
I.28	Schéma de control (ZMP prévu).	20
I.29	Force externe agit sur le robot.	20
I.30	Expérience de la marche et relèvement des données.	21
I.31	Résultats de simulation	21
I.32	Catégorisation de la commande de la marche du robot bipède.	22
I.33	Modélisation d'un robot.	23
I.34	Arrangement conceptuel de la méthode proposée.	24
I.35	Schémas cinématiques des séries des robots bipèdes Japonais Honda.	25
I.36	Images d'une série de robots bipèdes Japonais Honda.	25
I.37	Honda robot ASIMO.	25
I.38	Robot Humanoïde Wabian-2.	26
I.39	Série des robots HRP.	27
I.40	Série des robots MIT.	27
I.41	Robot Sony QRIO.	28
I.42	Robot marcheur Toyota_1.	28
I.43	Robot Bip2000.	29
I.44	Pelvis de Bip2000 instrumenté (7 ddl).	29
I.45	Chevilles de Bip2000 instrumenté.	29
I.46	Système de transmission des genoux du robot Bip2000, composé d'une vis à Rouleaux et de biellettes.	29
I.47	Système de transmission des chevilles du robot Bip2000, composé de deux Ensembles vis à rouleaux/biellettes mis en parallèle.	29

II.1	Plans principaux servant à l'étude de la marche.	31
II.2	Modèle cinématique proposée.	32
II.3	Paramétrage proposé par Denavit – Hartenberg.	33
II.4	paramétrage géométrique (premier chemin).	34
II.5	paramétrage géométrique (deuxième chemin).	37
II.6	Relation géométrique entre 1 ^{ière} et 2 ^{ième} chemins de modélisation.	39
II.7	paramétrage géométrique (troisième chemin).	40
II.8	Relation géométrique entre 1 ^{ière} et 3 ^{ième} chemins de modélisation.	43
II.9	Passage des coordonnées opérationnelles aux coordonnées articulaires.	45
II.10	Détermination de la coordonnée articulaire : hanche-tronc.	52
II.11	Simulation du MGI (cas N° :01).	54
II.12	Simulation du MGI (cas N° :02).	55
III.1	Composition des vitesses (point matériel).	58
III.2	Influence du type de l'articulation sur le repère.	60
III.3.	Passage de vitesses opérationnelles aux vitesses articulaires	61
III.4	Exemples de configurations singulières.	
IV.1	Générateur de mouvement.	70
IV.2	Hodographe de la marche.	68
IV.3	Allures des positions du pied de vole ($x_p(t), y_p(t)$).	71
IV.4	Allures des vitesses du pied de vole.	71
IV.5	Trace de $\dot{x}_p(t)$ en fonction de $\dot{y}_p(t)$.	72
IV.6	Allures des positions de la hanche (PSS et PDS).	76
IV.7	Allures des vitesses de la hanche (PSS et PDS).	76
IV.8	Trace de $\dot{x}_h(t)$ en fonction de $\dot{y}_h(t)$.	76
IV.9	Trajectoire du robot.	77
IV.10	Simulation de MGI du robot(cas N°01).	78
IV.11	Simulation des coordonnées articulaires.	78
IV.12	Simulation de MGI du robot (cas N°02).	79
V.1	Composition des vitesses.	82
V.2	Repérage d'un chaînon (C_j).	84
V.3	Forces et couples agissent sur le corps C_j .	85
V.4	Chaîne dynamique ouverte.	87
V.5	Evolution des forces de réaction (sol-pied).	93
V.6	Couples : patte support.	94
V.7	Couples : patte de vole.	94
V.8	Couple hanche-tronc.	94
VI.1	Polygone de sustentation en simple et double support.	96
VI.2	Type de la marche dynamique.	96
VI.3	Schéma cinématique avec paramétrage géométrique.	97
VI.4	première configuration d'équilibre statique.	98
VI.5	Deuxième configuration d'équilibre statique.	99
VI.6	Personne qui commence à courir.	100
VI.7	ZMP trajectoire de référence dans le plan Sagittal.	101
VI.8	ZMP trajectoire de référence dans le plan Frontal.	101
VI.9	Type1 : ZMP fixe.	101
VI.10	Type 2 : ZMP naturel.	102
VI.11	Calcul de ZMP.	102
V.12	Géométrie des chaînons.	104
V.13	Allures de la stabilité.	105
VII.1	Schéma d'une commande dynamique prédictive.	109
VII.2	Schémas fonctionnels de commande du Robot dans l'espace articulaire.	109
VII.3	Coordonnées articulaires : -patte support-	110

VII.4.	Coordonnées articulaires : -patte de vole-	110
VII.5	Coordonnée articulaire : hanche-tronc	111
VII.6	Erreur sur les coordonnées articulaires -patte support-	111
VII.7	Erreur sur les coordonnées articulaires -patte vole-	111
VII.8	Erreur sur la coordonnée articulaire : hanche-tronc	111
VII.9	Vitesses des coordonnées articulaires -patte support-	112
VII.10	Vitesses des coordonnées articulaires -patte de vole-	112
VII.11	Vitesse de la coordonnée articulaire : hanche-tronc	112
VII.12	Erreur sur les vitesses articulaire -patte support-	113
VII.13	Erreur sur les vitesses articulaire -patte de vole-	113
VII.14	Erreur sur la vitesse articulaire : hanche-tronc	113

LISTE DES TABLEAUX.

N° tableau	titre	page
I.1	Values of Robot parameters.	12
I.2	Five distinct states for level walking.	13
I.3	Propriétés du robot	
I.4	Caractéristiques des quelques prototypes bipèdes.	30
II-1	Les paramètres de D-H de pied support (1 ^{ième} chemin de modélisation)	34
II-2	Les paramètres de D-H de pied de vole (1 ^{ième} chemin de modélisation)	34
II-3	Les paramètres de D-H de tronc (1 ^{ième} chemin de modélisation)	34
II-4	Les paramètres de D-H de premier mécanisme (2 ^{ième} chemin de modélisation)	37
II-5	Les paramètres de D-H de deuxième mécanisme (2 ^{ième} chemin de modélisation)	37
II-6	Les paramètres de D-H de pied support (3 ^{ième} chemin de modélisation).	40
II-7	Les paramètres de D-H de pied de vole (3 ^{ième} chemin de modélisation).	41
II-8	Les paramètres de D-H de tronc (3 ^{ième} chemin de modélisation).	41
II-9	Récapitulation des calculs de MGD de la hanche (1 ^{ière} et 2 ^{ième} chemin de modélisation).	45
II-10	Récapitulation des calculs de MGD de pied de vole (1 ^{ière} et 2 ^{ième} chemin de modélisation).	45
II-11	Récapitulation des calculs de MGD de tronc (1 ^{ier} et 2 ^{ième} chemin de modélisation).	45

NOMENCLATURE

q [rad]	Vecteur des variables articulaires
\dot{q} [rad/s]	Vecteur des vitesses articulaires
\ddot{q} [rad/s ²]	Vecteur des accélérations articulaires
X	Vecteur des coordonnées opérationnelles
$hg ; hd$ [m]	Respectivement les longueurs de la hanche gauche et la hanche droite par rapport au tronc.
$L_1 = L_{1g} = L_{1d}$ [m]	Longueur des tibias.
$L_2 = L_{2g} = L_{2d}$ [m]	Longueur de la jambe.
L_T [m]	Longueur du tronc.
L_p [m]	Longueur du pas.
$T_{j-1,j}$	Matrice de transformation homogène entre repère R_{j-1} et R_j ;
$A_{j-1,j}$	Matrice de rotation entre repère R_{j-1} et R_j .
U_o	Matrice de transformation homogène du repère final au repère absolu.
${}^j P_i = ({}^j P_{ix}, {}^j P_{iy}, {}^j P_{iz})$	coordonnées de l'articulation i exprimées dans le repère j .
R_0	Repère absolu.
$R_j (R_{j-1})$	Repère de l'articulation j ($j-1$).
θ_j [rad]	Angle de rotation de l'élément j .
$h_{h-\min}, h_{h-\max}$ [m]	Respectivement, hauteur minimale et maximale de la hanche.
h_p [m]	Élévation maximale du pied en vol.
$X_p (x_p, y_p)$ [m]	Coordonnée de pied en vole.
$X_h (x_h, y_h)$ [m]	Coordonnée de la hanche.
$x_h(t), y_h(t)$ [m]	Fonction polynomiale de la trajectoire de la hanche.
$(x_{hs}(t), y_{hs}(t))$ $(x_{hd}(t), y_{hd}(t))$ [m]	Fonctions polynomiales de la trajectoire de la hanche, respectivement, de la PSS et PDS.
$x_p(t), y_p(t)$ [m]	Fonction polynomiale de la trajectoire du pied en vol.
$x_{s0}, x_{d0} :$ [m]	Positions initiales de la hanche, respectivement, de la PSS et PDS.
x_{df} [m]	La position finale de la PDS.
V_{h1}, V_{h2} [m/s]	Vitesses initiales de la hanche, Respectivement, de la PSS et PDS.
γ_r [m/s ²]	Accélération relative.
γ_e [m/s ²]	Accélération d'entraînement.
γ_c [m/s ²]	Accélération de Coriolis.
$J(q)$	Matrice Jacobienne.
CM (CG)	Centre de masse (centre de gravité).
CP	Centre de pression.
E [J]	Energie cinétique total du system.
U [J]	Energie potentiel total du system.
$P_p = (P_{px}, P_{py}, P_{pz})$ [m]	Coordonnées opérationnelles du pied de vol exprimé dans R_0 .
$P_h = (P_{hx}, P_{hy}, P_{hz})$ [m]	Coordonnées opérationnelles de la hanche exprimé dans R_0 .
T_s [s]	Période de la PSS.

T_d [s]	Période de la PDS.
T_p [s]	Période d'un pas de marche
T_c [s]	Période d'un cycle de marche.
K	Nombre de pas.
Γ [N.m]	Vecteur des couples des actionneurs.
z_j	Vecteur unitaire suivant l'axe z_j .
F_j [N]	Résultante des forces extérieures agissant sur le corps C_j .
$F_{j-1,j}$ [N]	Force appliquée sur C_j par C_{j-1} à travers l'articulation $j-1$.
$F_{j,j+1}$ [N]	Force appliquée sur C_j par C_{j+1} à travers l'articulation $j+1$.
F_{sj}, F_{vj}	Paramètres de frottement sec et visqueux de l'articulation j
g [m/s ²]	Accélération de la pesanteur.
G_j	Centre de gravité du corps C_j .
I_{Gj} [m ⁴]	Tenseur d'inertie du corps C_j par rapport à un repère parallèle à R_j et d'origine G_j .
${}^j I_j$ [m ⁴]	Tenseur d'inertie du corps C_j par rapport au repère R_j .
I_3	Matrice d'identité (3*3).
\bar{I}_j	Matrice d'inertie globale du corps j de dimension (6*6).
$L_{j-1,j}$ [m]	Vecteur liant l'antécédent du repère R_j , et l'origine du repère R_j .
m_j [kg]	Masse du corps C_j .
md_j	Premier moment d'inertie du corps C_j autour de l'origine du repère R_j ,
M_j [N.m]	Moment extérieur autour du centre de gravité G_j .
$M_{j-1,j} (M_{j,j+1})$ [N.m]	Couple appliqué sur le chaînon C_j par le chaînon C_{j-1} (C_{j+1}) autour l'articulation j ($j+1$).
$d_{j,j} (d_j)$ [m]	Vecteur liant l'origine O_j de l'articulation (j) avec l'origine G_j du centre de masse du corps C_j .
$d_{j,j+1}$ [m]	Vecteur liant l'origine G_j du centre de masse avec l'origine O_{j+1} de l'articulation ($j+1$).
P_j [kg.m/s]	Quantité du mouvement du chaînon C_j , telle que : $P_j = m_j V_{Gj}$
H_j [m ⁴ rd/s]	Moment cinétique du corps C_j autour G_j : $H_j = I_{Gj} \omega_j$.
V_j [m/s]	Vitesse du point O_j .
\dot{V}_j [m/s ²]	Accélération du point O_j .
\bar{V}_j	Vecteur de dimension (6*1) regroupant les composants des éléments du torseur cinématique du corps C_j .
V_{Gj} [m/s]	Vitesse du centre de gravité du corps C_j .
$\gamma_{Gj} = \dot{V}_{Gj}$ [m/s ²]	Accélération du centre de gravité du corps.
ω_j [rad/s]	Vitesse de rotation du corps C_j .
$a_j = \dot{\omega}_j$ [rad/s ²]	Accélération de rotation du corps C_j .
$A(\theta)$	Matrice d'inertie du robot.

$\hat{A}(\theta)$	Estimation de $A(\theta)$.
$D(q, \dot{q})$	Vecteur de dimension $(n*1)$ représentant les couples et forces de Coriolis et forces centrifuge.
$\bar{D}(q, \dot{q})$	Vecteur de dimension $(n*1)$ représentant les couples et forces de coriolis, les forces centrifuges ainsi que les forces de gravité.
$\hat{\bar{D}}(q, \dot{q})$	Estimation de $\bar{D}(q, \dot{q})$.
$Q(q)$ [N]	Vecteur des forces et couples de gravité
Γ_j [N.m]	Couple transmis à l'articulation j .
$\ddot{\theta}(t), \dot{\theta}_d(t)$ et $\theta_d(t)$ [rad/s ²], [rad/s], [rad]	Respectivement, accélération, vitesse et position désirées dans l'espace articulaire.
K_v et K_p	Matrices des gains, diagonale définies positives de dimension $(n \times n)$
e, \dot{e}, \ddot{e}	Erreurs, respectivement : position, vitesse et accélération entre la valeur calculée et celle désirée.
σ_k	Coefficient binaire.
\times	Signe, représente le produit vectoriel.

ABREVIATIONS

PSS : phase Simple Support.

PDS : Phase Double Support.

MGD: Modèle Géométrique Direct.

MGI : Modèle Géométrique Inverse.

MCD : Modèle Cinématique Direct.

MCI : Modèle Cinématique Inverse.

MDD : Modèle Dynamique Direct.

MDI : Modèle Dynamique Inverse.

ddl : degré de liberté

$C(\theta_i)$: $\cos(\theta_i)$

$S(\theta_i)$: $\sin(\theta_i)$

INTRODUCTION

GENERALE



Introduction Générale.

Le développement de la science et de la technologie moderne est indissolublement lié à la fabrication des machines nouvelles destinées à rendre le travail de l'homme plus productif et plus facile à réaliser et à lui permettre d'étudier les lois de la nature et de la vie humaine. Toute machine a pour but de se substituer à l'homme afin de lui réduire l'effort physique et d'accroître le rendement. Quelquefois, la machine se substitue à l'homme non seulement dans son travail physique mais aussi dans ses fonctions intellectuelles.

D'une manière générale, on peut dire que les machines sont des dispositifs que l'homme crée pour découvrir et mettre à profit les lois de la nature, faciliter son travail physique et intellectuel. Ces dispositifs se substituent partiellement ou intégralement à son effort.

Parmi ces machines, on trouve les robots qui constituent un domaine de recherche attractif du fait qu'ils peuvent être autonomes et permettent de se substituer à l'être humain dans certaines de ses activités. On rencontre différents types :

- Robots manipulateurs
- Robots à pattes
- Robots à chenilles
- Robots à roues
- Robots ondulés

Notre étude porte sur les robots à deux pattes (robot marcheur bipède) qui présente une morphologie similaire à celle de l'être humain, et aussi un intérêt exceptionnel par rapport aux autres robots en raison de pouvoir s'adapter à l'environnement et à sa possibilité d'évoluer en terrains accidentés.

Le robot bipède est conçu pour accompagner l'homme dans ses activités personnelles ou professionnelles et intervenir dans les endroits dangereux, pollués et étroits. Il présente un espace de travail moins encombrant. Sa mobilité facilite l'imitation des différentes tâches d'un être humain.

Actuellement, un intérêt assez récent est manifesté par de nombreux chercheurs au développement en robotique et aux systèmes dits humanoïdes car ils présentent un avantage supplémentaire de pouvoir être impliqués dans les applications en biomécanique de la marche. Les expérimentations sur les robots bipèdes peuvent ainsi participer à une meilleure compréhension de la marche humaine et de ses pathologies, dans le but d'aider à la conception de prothèses et d'orthèses intelligentes. Les perspectives offertes par ce domaine de recherche sont très vastes pour des objectifs essentiels touchant notamment la biologie, l'industrie et l'aspect social (assistance de personnes malades). Ces robots suscitent un tel engouement dans la recherche en alliant des problèmes de modélisation, de génération de trajectoire et de commande.

L'idée de base est inspirée de la morphologie humaine. Le niveau actuel de la technologie permet d'envisager la réalisation des robots humanoïdes avec la possibilité de déplacement dans les endroits bien conditionnés, d'exécuter et manipuler quelques actions très simples.



Cependant de nombreux problèmes subsistent et restent encore à résoudre, tels que :

- Le système présente un nombre important de degré de liberté et forme un mécanisme complexe. Sa modélisation, sa stabilité et sa commande présentent en outre des contraintes majeures ;
- L'étude dans ce domaine étant relativement récente, des problèmes liés à la modélisation mathématique de la marche du robot reste à résoudre, d'autant plus lorsque le système est à géométrie complexe (mouvement des pattes, des bras, de la tête...etc).
- Le problème de la gestion globale et dynamique de la puissance est nécessaire
- La conception mécanique et l'emplacement des différentes instrumentations (moteurs de commande, réducteurs, capteurs...etc) s'effectuent dans un volume réduit
- Encore, le problème de l'autonomie décisionnelle constitue une difficulté majeure.

A l'exception des bipèdes, la plupart des robots maintiennent leur équilibre de façon stable durant leurs déplacements [1]. C'est un problème franchissant, car le bipède destiné à interagir avec les humains et leur environnement. Donc, chaque promenade de marche doit répondre au critère de stabilité édicté par M. Vukobratovic [02], qui s'appelle « zéro moment point ». En effet, il y a deux types de marche, statique et dynamique. La marche statique est un mouvement à vitesse réduite où le centre de masse de system est gardé dans le plan de sustentation délimité par le contour de (des) pied(s). D'autre part, la marche dynamique est un mouvement à grande vitesse où pendant certaine période de temps le centre de gravité est en dehors du plan support [03].

Cependant, la marche du robot bipède alternée entre la phase simple support (pieds en contact avec le sol) et la phase double support (deux pieds au sol), sa dynamique est régie par un système d'équations différentielles pour chaque phase. De plus, les impacts de pied terrestre avec le sol étant classiquement modélisés par des équations algébriques, des discontinuités apparaissent dans la dynamique due au non linéarité des équations. Il faut également noter que pour chaque allure (marche, saut, course), le robot possède un fonctionnement nominal distinct qui se traduit par une consommation énergétique différente [03].

Notre travail porte sur un robot bipède où l'on traitera les problèmes liés à la modélisation géométrique, cinématique et dynamique, à la génération de la trajectoire de marche, à la stabilité et à la commande de la marche. L'étude sera réalisée en simulation.

Le mémoire est organisé en sept chapitres.

Dans le premier, nous allons situer une étude bibliographique permettant la compréhension de l'histoire et la morphologie des robots bipèdes en citant des travaux antérieurs afin d'aborder notre problématique.

Au deuxième chapitre, nous exposons le principe de la modélisation géométrique appliquée sur un modèle bipède, la méthode à utiliser s'appelle : méthode Denavit-Hartenberg qui se base sur les matrices des transformations homogènes. La modélisation géométrique est établie en utilisant les modèles géométriques directs (MGD) et inverse (MGI).



Le troisième chapitre établit l'étude cinématique qui constitue la base pour le calcul de la matrice jacobienne qui servira pour le calcul des forces d'impact, les singularités et l'espace de travail atteignable.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude des trajectoires de la hanche et de la patte du robot.

Au cinquième chapitre, on étudie la dynamique. Nous présenterons les formalismes de la modélisation dynamique en vue de tirer les couples nécessaires que doivent fournir les actionneurs.

Dans le sixième chapitre, on examine le problème de la stabilité du robot étudié. Dans ce but, on utilise la méthode appelée « zéro moment point » qui s'appuie sur les résultats dynamiques (couples et forces) afin de simuler et établir les paramètres répondants au critère de la stabilité.

Le dernier chapitre est consacré à la commande par découplage non linéaire dans l'espace articulaire, afin de poursuivre les trajectoires imposées au robot.

Enfin, le mémoire est terminé par une conclusion générale et un annexe.

CHAPITRE I

ETUDE

BIBLIOGRAPHIQUE



I.1. Introduction.

La robotique était un rêve de l'homme et elle l'est toujours, car, c'est un ensemble de disciplines techniques (mécanique, électronique, automatique, informatique, etc.) articulées autour d'un objectif et d'un objet communs.

Au début des années de révolution industrielle et technologique du dix-neuvième siècle, la non maîtrise de ces disciplines techniques a classé la science de la robotique dans la case de la science – fiction (comme les techniques spatiale) [04]. Aujourd'hui, elle intéresse de nombreux chercheurs et se développe d'une façon importante. Elle trouve son origine dans une pièce théâtrale de l'auteur tchèque Capek, écrite en 1920, intitulée 'Les robots universels de Rossum'. Le mot, robot, est dérivé à partir du mot « robota », c'est un mot tchèque et aussi russe, signifiant le travail ou un travailleur. Dans la pièce de Capek, les robots sont des humanoïdes créés par Rossum et son fils, dans l'espoir qu'ils se mettent avec obéissance au service de l'homme [04], [05].

Mais la réalité des robots est bien antérieure à l'œuvre de Capek. Leurs inventeurs ne disposaient malheureusement pas de la discipline extraordinairement puissante que constitue l'électronique, pour le contrôle des processus qu'ils imaginaient et le traitement de l'information correspondante [05].

On serait toutefois partial si on oubliait de faire référence à l'œuvre de Isaac Asimov dont certains livres sont maintenant disponibles dans des collections de poche. Les robots imaginés par Asimov dans les années 1940 sont des machines conçues de manière à réaliser son travail en toute sécurité. Il concrétise cette notion dans trois lois de la robotique dont la validité est largement reconnue [06] :

1. un robot ne peut porter atteinte à un être humain. Le robot doit au contraire toujours agir en sorte que la sécurité de l'être humain soit assurée;
2. un robot doit toujours obéir à l'homme, sauf s'il devait pour cela transgresser la première loi;
3. un robot doit toujours veiller à sa propre sécurité, sauf s'il devait pour cela transgresser les deux lois précédentes.

Avec le développement et la maîtrise des sciences technologiques telles que les sciences de la mécanique, l'électronique, l'automatique et l'informatique, les robots prennent une place privilégiée dans l'industrie et connaissent un développement intense grâce aux efforts des chercheurs. En raison de leur intérêt attractif et séduisant, des associations ont été mises en place pour établir la science de la robotique seulement. En 1956, une société, UNIMATION, a été créée en U.S.A. pour seul domaine d'activité, la robotique. Elle a installé le premier robot industriel dans une entreprise de métallurgie en 1961. En 1972, soit 16 ans après sa fondation et après avoir investi 12 millions de dollars, UNIMATION a réalisé ses premiers bénéfices en produisant de vrais robots industriels. Cette année 1972 a aussi vu l'apparition du premier robot « tout électrique », commercialisé par la firme suédoise A.S.E.A. (maintenant A.B.B.). Mais ce que l'on peut appeler l'ère de la robotique ne s'est engagée que fin des années 70 et début des années 80 [04].

Ce mythe des robots qui était largement entretenu comme science-fiction a peut être ralenti l'introduction des robots dans les processus de production, notamment par une crainte de menace sur l'emploi des hommes. Sans doute, les premiers robots étaient trop axés sur l'universalité des fonctions et orientés vers le remplacement de l'homme. Ce dernier s'est alors senti menacer dans son travail. Cette crainte, le prix élevé des premiers robots industriels et un certain manque de fiabilité, ont incontestablement freiné le développement des robots pendant des années.

Pas loin d'aujourd'hui, l'émergence de plusieurs pays dans l'industrie, la maîtrise de la technologie de pointe et le changement accéléré de l'économie mondiale présentent une concurrence mobilisant l'ensemble aux fabrications des machines autonomes, dont les différents types des robots. Encore, les scientifiques de ce domaine continuent leurs recherches d'évolution et d'innovation des autres types des robots dont leurs origines sont inspirées, parfois, des être vivants.



Aujourd'hui, les robots peuvent être classés selon leurs attributs de mobilité comme l'indique la figure ci-dessous.

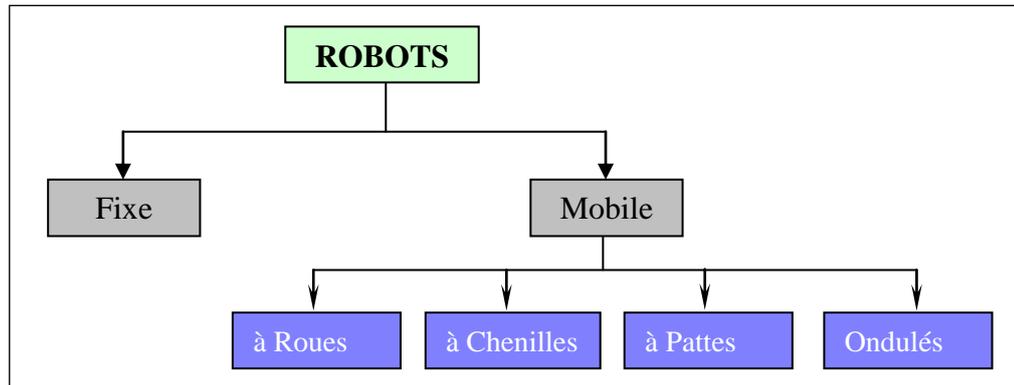


Fig I.1 : Classes des Robots (selon la mobilité) [06]

La classe des robots fixes est dominée par les bras-manipulateurs. Ils sont orientés généralement vers l'industrie. En revanche, les robots mobiles se caractérisent principalement par une base mobile qui permet au robot de se déplacer librement [08]. À la différence des bras manipulateurs, les robots sont la plupart du temps utilisés dans des applications de service, avec l'exigence des possibilités de l'autonomie de mouvement [06].

Dans la classe des robots mobiles, les robots à pattes peuvent évoluer sur des terrains accidentés et inaccessibles aux autres types de robots à roues ou à chenilles, comme le montre les figures I.2 et I.3. Les pattes sont mieux adaptées aux environnements où il y aura des obstacles (ouvertures, tranchés...). C'est pourquoi, il existe actuellement une activité importante dans le développement des systèmes locomoteurs à pattes tels que les robots hexapodes, quadrupèdes, tétrapodes, bipèdes et même monopodes, etc.

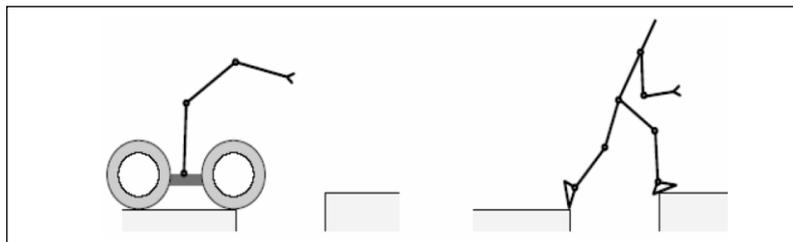


Fig I.2 : Robot à roues et robot bipède face à un trou dans le sol [03]

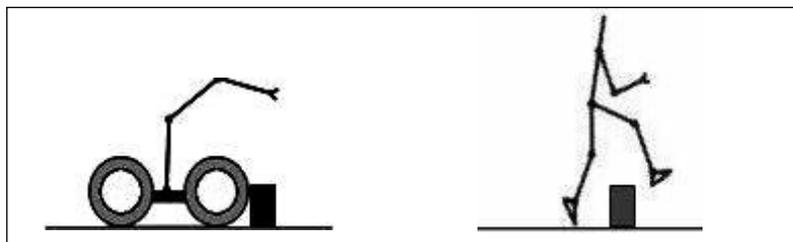


Fig I.3 : Robot à roues et robot bipède face à un obstacle sur le sol

Les robots humanoïdes partagent les mêmes environnements que les humains. Du point de vue de la robotique, il est difficile d'affirmer qu'un robot effectuant les tâches de l'homme doit absolument être de forme humaine. Les avions, par exemple, n'ont pas l'apparence des oiseaux. Plus généralement, les tâches auxquelles un certain robot est destiné déterminent sa forme idéale [07].



Il faut donc se demander ce que l'on attend d'un robot pour pouvoir en déterminer l'apparence la plus adaptée. L'automobile a constitué l'industrie la plus lourde du XXe siècle parce qu'elle satisfaisait le mieux le désir des hommes de se déplacer librement sur des grandes distances, de manière autonome, et à des vitesses « raisonnables ». De la même manière, nous devons nous demander *quels désirs le robot doit-il satisfaire* ? Nous désirons que les robots réalisent les tâches qui nous ennuient, et qu'ils soient en même temps des compagnons aimables dotés de capacités de communication. Pour satisfaire convenablement ces fonctions, les caractéristiques des robots humanoïdes pourraient être les suivantes [07] :

- 1- les robots humanoïdes doivent pouvoir travailler dans l'environnement humain tel qu'il est;
- 2- les robots humanoïdes doivent pouvoir utiliser les outils des humains tels qu'ils sont;
- 3- les robots humanoïdes doivent être de forme humaine.

Le robot bipède semble alors être inspiré de l'homme. Son rôle d'imiter la marche et les tâches humaines lui permet de se substituer à ce dernier, et être utilisé surtout dans les endroits dangereux, etc. Ceci est considéré parmi les raisons plus motivante d'activer la recherche sur les robots humanoïdes.

Afin que les robots humanoïdes puissent interagir avec l'homme, une des conditions principales que devrait avoir le robot bipède est la capacité d'exécuter la locomotion interactive. Il devrait pouvoir produire un modèle de marche en ligne selon son environnement physique [08].

Aujourd'hui, on trouve des dizaines de réalisations des robots bipèdes. On peut citer, par exemple, au Japon, ASIMO de Honda, DTS et QRIO de Sony, et en France, BIP2000, etc.

Comme les PC dans des vieilles périodes, le prix du robot diminue graduellement. On dit que bientôt viendra le temps où chaque famille va avoir un robot [09].

I.2. Etude biomécanique de la marche humaine.

La marche bipède est un mode de locomotion pendant lequel le marcheur possède toujours au moins un pied au sol (figure I.4), ce qui donne naissance à une alternance de phases, phases simple appui (un seul pied au sol) et phases double appui (deux pieds au sol). Cette alternance n'implique pas pour autant qu'un mouvement de marche soit répétitif, et l'on peut même noter qu'il est d'autant moins quand le terrain est accidenté.

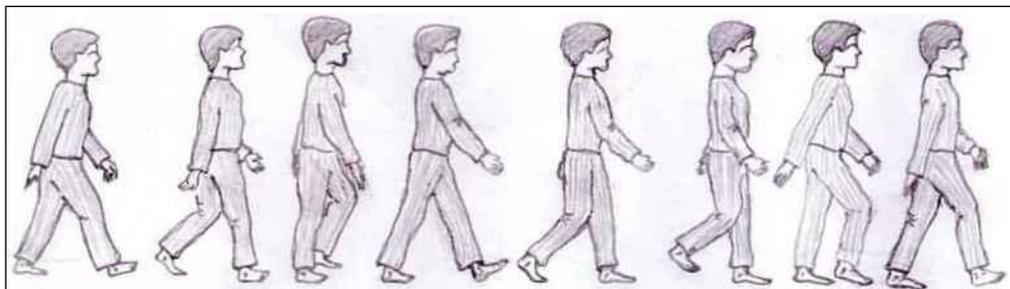


Fig I.4 : Décomposition d'un cycle de marche [03]

Si l'on observe le mouvement de la marche en trois plans différents dans l'espace (Figure I.5), la marche humaine a lieu principalement dans le plan sagittal, mais de nombreux mouvements apparaissent également dans chacun des autres plans, déhanchement, déplacement latéral et rotation du bassin qui ne doivent pas être négligés, car, ils améliorent considérablement la fluidité du mouvement. Remarquons de même la diversité des contacts qui sont établis avec le sol, mettant en jeu parfois la totalité d'un pied, parfois uniquement son talon ou ses orteils, ceci permet une meilleure



absorption des chocs et une plus grande extension des pattes qui participent également à une meilleure fluidité du mouvement.

La notion de fluidité n'est pas anodine. Elle divulgue une certaine économie d'énergie de mouvement. C'est une caractéristique qui est attribuée généralement à tout mouvement humain ou animal. Un ensemble de principes énergétiques simples commande en effet les mouvements de marche et permettent une réduction substantielle de la dépense d'énergie [03]. Une telle économie d'énergie présente un intérêt considérable pour un robot marcheur, dont l'autonomie conditionne fortement les capacités de déplacement et d'intervention.

Les humains sont les marcheurs bipèdes très accomplis. En effet, dans la classe des créatures bipède, la marche humaine représente la solution la plus appropriée. C'est un avantage d'examiner la structure du corps humain avant de prendre une mesure pour la phase de conception d'un robot de marche anthropomorphe. En outre quelques aspects importants du processus de la marche humaine seront discutés.

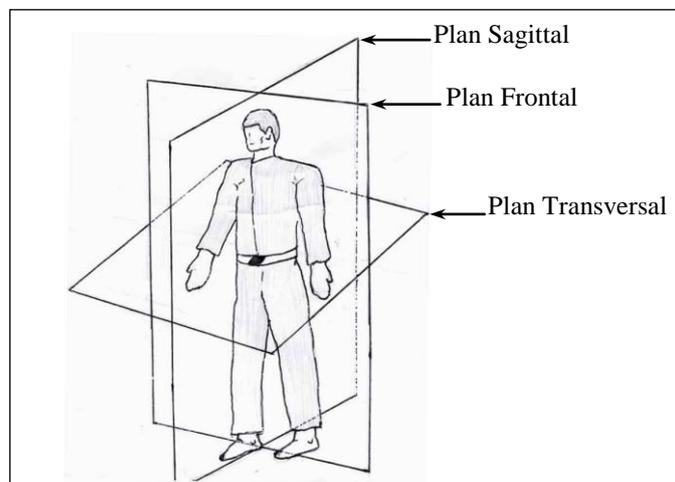


Figure I.5 : Référence des plans pour le robot bipède [03].

I.2.1. Cycle de marche.

Lorsque l'on désire étudier la marche du point de vue biomécanique, on imagine un modèle cyclique du mouvement qui est répété sans arrêt, pas après pas. Ainsi, les descriptions de la marche sont normalement condensées en un seul cycle. On admet l'hypothèse que les cycles suivants sont tous identiques sachant bien que cette hypothèse n'est pas tout à fait correcte, mais reste une approximation raisonnable. La figure I.6 illustre un cycle de marche pour un être humain [11].

Habituellement, par convention, un cycle débute lorsque le pied de référence -le pied droit- entre en contact avec le sol.

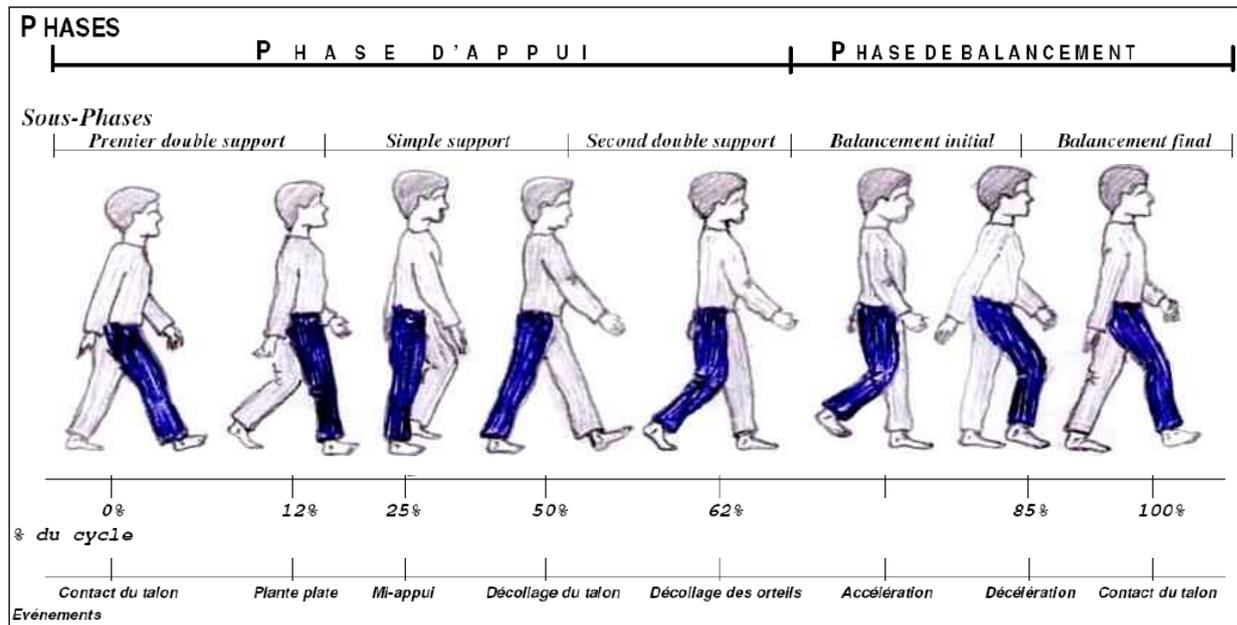


Fig. I.6: Phase d'un cycle de marche [11]

Le cycle de marche se décompose en deux phases principales:

I.2.1.1 Phase simple support

Durant la phase simple support, un seul pied est en contact avec le sol tandis que le second pied effectue un mouvement de balancement vers l'avant. Cette phase est subdivisée en trois sous-phases [12] :

- **L'accélération** commence dès que le pied quitte le sol et que le marcheur active les muscles fléchisseurs de la hanche pour accélérer la jambe vers l'avant.
- **Le milieu de balancement** a lieu lorsque le pied passe juste sous le corps.
- **La décélération** décrit l'action des muscles qui ralentissent la jambe et stabilisent le pied par anticipation du prochain contact du talon avec le sol.

I.2.1.2 Phase double support

Le double support est une phase de la marche durant laquelle les deux pieds sont en contact avec le sol. Sa durée T_d est plusieurs fois inférieure à la durée de la phase simple support T_s . Comme le montre la figure I.7, cette phase peut être divisée en cinq sous-phases [13]:

- L'attaque du talon** initialise le cycle de marche et représente le moment où le centre de gravité du corps est au plus bas ;
- Le pied à plat au sol** apparaît lorsque le pied repose sur toute sa longueur;
- Mi-appui** (appui monopodal) dans cette sous-phase de la marche, la mise en charge pendant l'appui unilatéral est progressive. Le pied supporte le poids du corps et il se produit une poussée nécessaire à l'accélération verticale du centre de gravité.
- Le décollage du talon** se produit lorsque le talon perd le contact avec le sol et la poussée est engendrée par les muscles, ce qui entraîne le fléchissement plantaire de la cheville.
- Le décollage des orteils** termine la phase double support dès que le pied quitte le sol.

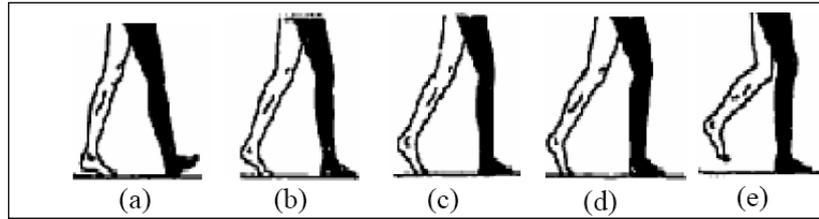


Fig I.7 : Les différentes périodes de la phase double support

I.2.2. Allure de course

La course est une allure où les deux pieds ne sont pas en contact avec le sol en même temps pendant une durée T_{vol} (figure I.8). De ce fait, une allure de course est complètement différente d'une allure de marche.



Fig I.8 : Phase de vol d'une allure de course

I.2.3. Le pas et ses caractéristiques

Un autre type d'information pouvait aider à l'étude du mouvement de la marche. Il est fourni par le pas qui représente deux appuis successifs du pied lors de la marche. Il se caractérise par : (Figure 1.9).

- **Longueur du pas** : C'est la distance qui sépare les deux appuis successifs. On la mesure du talon au talon. La longueur du pas dépend avant tout de la dimension des leviers osseux.
- **Vitesse** : Elle est le produit de la longueur du pas par leur nombre, en un temps déterminé. Dans la plupart des cas, la longueur du pas augmente avec la cadence mais, on peut voir des cadences rapides avec des pas très courts.
- **Largeur du pas** : Elle se mesure en prenant la distance entre les lignes de progression d'un talon à l'autre. Sa moyenne est de 6 cm chez un être humain de taille normale en terrain plat. L'élan latéral aura donc à faire réaliser à chaque pas un transfert de droite à gauche et de gauche à droite de 12 cm au centre de gravité pour que celui-ci devienne portant alternativement.
- **Angle du pas** : Il s'agit de l'angle que forme le pied avec la ligne de progression. Il est normalement de 15° .

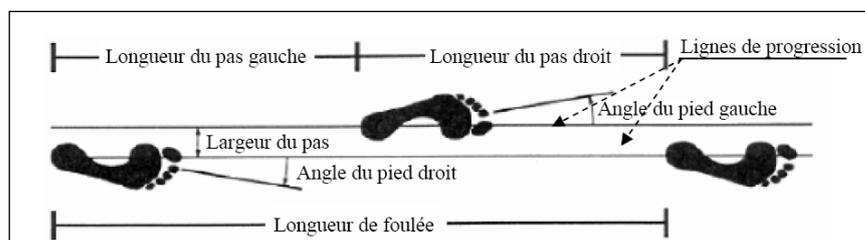


Fig 1.9 : Caractéristiques du pas [13]



I.2.4. Impact

Que ce soit au cours d'une marche ou d'une course, les pieds se posent sur le sol à une vitesse non nulle. Le fait que le pied ne puisse en aucun cas pénétrer dans le sol nécessite que sa vitesse soit instantanément déviée, ce qui se traduit par un impact du pied sur le sol. Lors de la marche l'impact peut se produire en contact du talon avec le sol à la fin de la phase de balancement qui est aussi le début de la phase de double support. L'impact se produit pendant une durée infinitésimale. Il engendre des forces impulsionnelles et provoque des discontinuités au niveau des vitesses articulaires.

I.3. Définitions

Nous jugeons utile de rappeler quelques définitions de base utilisées en robotique.

Chaînon : c'est un élément rigide d'un mécanisme.

Mécanisme : ensemble des chaînons forment entre eux des liaisons (prismatique, cylindrique ou rotoïde).

Centre de masse (CM) : Un point auquel la masse distribuée entière d'un objet agit.

Polygone de sustentation : Le polygone formé sur la terre par le pied (pieds) qui est (sont) en contact avec la terre.

Longueur de pas: La distance entre deux positions successives des deux pieds.

Phase simple support : L'intervalle de temps dans lequel seulement un pied supporte le corps entier.

Phase double support : L'intervalle de temps dans lequel les deux pieds supportent le corps entier.

Marche statique : c'est le modèle de marche pendant lequel le CM doit être inclus dans le polygone de sustentation à tout moment suivant l'indication de la figure I.10.

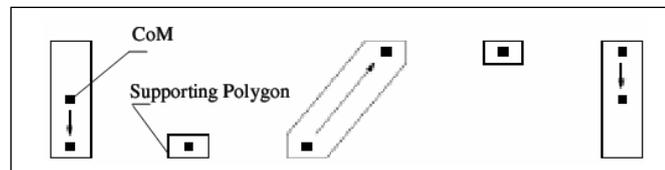


Fig I.10 : type de la marche statique.

Marche dynamique : c'est le modèle de marche pendant lequel il y a des périodes où le CM peut être à l'extérieur du polygone de sustentation (voir figure I.11).

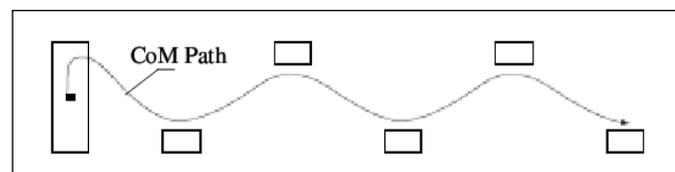


Fig I.11: type de la marche dynamique

Point nul des moments (ZMP): est le point sur la terre où la somme des moments dus aux forces actives est égal à zéro.

$$\sum_1^n \vec{M}_{/P_{zmp}} = \vec{0} .$$



Centre de Pression (CP): il est défini comme un point au sol où la résultante de la force de réaction au sol agit [14].

Relation entre le ZMP et CP :

Une fois que cette force résultante pendant le mouvement de locomotion est équilibrée avec toutes les forces actives (par exemple Coriolis, inertie, pesanteur, centrifuges), ce point temporaire devient le ZMP, c'est-à-dire, si et seulement si, la marche est dynamiquement stable, le Centre de Pression et les ZMP sont alors identiques [15].

Les deux concepts CP et ZMP étant distincts, le schéma ci-dessous illustre les cas typiques décrivant le rapport entre eux :

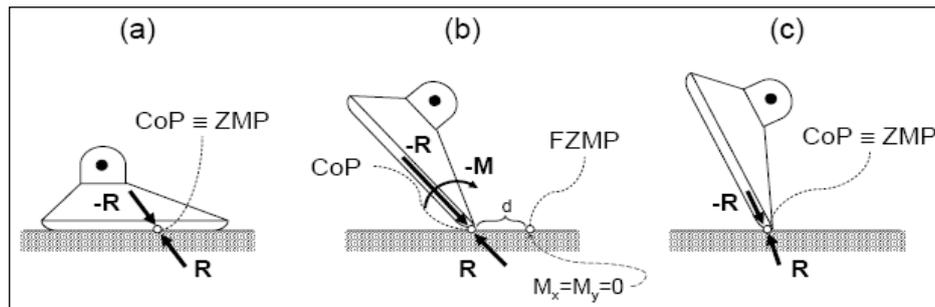


Fig I.12 : Trois cas typiques décrivent le rapport entre ZMP et CP : (a) Marche dynamiquement stable, (b) Marche instable, ZMP n'existe pas et le point temporaire au sol de force de réaction est CP ; le point où le $M_x = M_y = 0$ est en dehors le polygone de sustentation (FZMP). Le système tournera autour du bord de pied et tombera, (c) Equilibre dynamique à la pointe du pied [13].

I.4. Travaux antérieurs.

I.4.1. Modèles bipèdes existants.

Un robot humanoïde est l'incorporation des capacités de manipulation, locomotives, clairvoyantes, communicatives et cognitives dans un artificiel de corps semblable à celui d'un humain. Il devrait posséder des qualifications en exécutant des mouvements avec un certain degré d'autonomie, et peut être avantageusement déployé comme agents pour effectuer des tâches dans divers environnements [09].

La technologie de fabrication d'un robot présente un domaine où interagit plusieurs disciplines et un savoir faire dans plusieurs domaines, à savoir la conception, la construction mécanique, le génie électronique, le génie automatique, ... etc.

D'après notre recherche bibliographique, nous avons constaté de nombreux travaux sur les robots marcheurs à deux pattes ces dernières années. Beaucoup de chercheurs ont effectué des travaux touchant les différentes technologies de pointes relatives aux robots bipèdes. On remarque que chaque robot bipède a son schéma cinématique qui se distingue par le nombre de degré de libertés, c'est à dire le nombre de chaînons. Certaines études considèrent le modèle bipède plan (2D), d'autres, le modèle bipède tridimensionnel (3D). Nous en citons par exemple :

I.4.1.1. Pour un modèle bipède plan (2D)

R. Zhang et autres [16] ont étudié un modèle planaire à 5 chaînons et à 5 ddl. On trouve aussi ce modèle chez T-T. Lee, P.L. Jeng et W.A. Gruver [17] qui ont étudié une méthode de planification de la trajectoire du robot et sa commande. P.Naseradin et coauteurs [16], Y. Hurmuzlu et coauteurs [18] ont étudié un modèle plan à sept chaînons et à sept ddl. Dans ces deux derniers l'articulation au niveau de la cheville est prise en compte, par contre dans le premier la cheville n'est pas considérée. H. Wang, T-T. Lee, et W. A. Gruver [19] ont considéré un modèle plan à 3 chaînons ayant 3 ddl au



niveau de la hanche. Ils ont développé l'architecture de réseau neurologique pour commander la marche du robot bipède. Le contrôleur neurologique est basé sur une structure hiérarchisée des réseaux neurologiques artificiels qui sont entraînés par l'apprentissage supervisé.

Des prototypes ont été réalisés pour la compréhension et le développement des robots bipède. Les premières recherches sur les robots bipèdes au LEGLAB du MIT se sont intéressées à la marche sagittale. Ainsi, parmi les premiers prototypes bipèdes réalisés, on trouve le prototype *Spring Turkey* ensuite le prototype *Spring Flamingo*. Aussi, En Europe, il existe un prototype bipède semblable à ces deux derniers mais sans pieds, c'est le prototype *RABBIT* qui a été conçu et réalisé par un groupe de chercheurs de huit laboratoires français dans le cadre de deux projets CNRS successifs:

- Programme de Recherches Coordonnées/Groupe De Recherche (PRC/GdR) «Commande de robot à pattes» de 1997 à 2001,
- Programme interdisciplinaire de recherche Robotique et Entités Artificielles (ROBEA) «Commande pour la marche et la course d'un robot bipède» de 2001 à 2004.

I.4.1.2. Pour un modèle bipède tridimensionnel (3D).

P. Sardain coauteurs [20] ont étudié la corrélation entre la conception technologique et le comportement dynamique du Bip2000 qui a été réalisé en France. Il comporte 15 ddl (figure I.13).

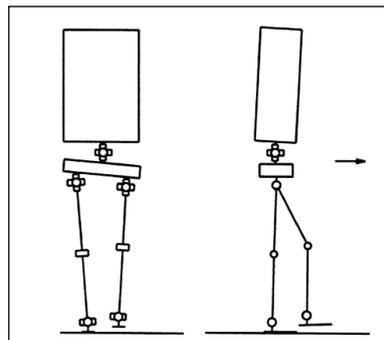


Fig I.13 : Schéma cinématique : vue latérale et frontale du Bip2000[20]

M. Morisawa & K. Ohnishi. [21] ont étudié une commande hybride dynamique de robot bipède dans la surface de sustentation afin de réaliser une marche robuste, cependant, le mouvement du système est limité par la force de contact entre le système et l'environnement. Par conséquent, il a été nécessaire de commander le couple autour du ZMP pour avoir une marche stable. Aussi, une distance entre les deux pattes devrait être commandée. En conséquence, une commande hybride dynamique est présentée pour découpler le CG et le mouvement relatif de la patte. De ce fait, ils proposent une commande hybride dynamique basée sur le découplage d'accélération. Alors le mouvement s'adaptant sur un terrain accidenté peut être réalisé.

T. Tsuji & K. Ohnishi [22] ont étudié un modèle bipède en 3D ayant 6 ddl dans le plan sagittal et 4 ddl dans le plan frontal. Ils appliquent le mode inverse du pendule à la commande du robot bipède afin de prévoir une trajectoire en temps réel. Bien que la marge de stabilité du robot bipède soit très étroite en raison de sa limite structurale, le point virtuel de sustentation (VSP) est un nouvel indicateur de commande du robot bipède qui est suggéré en vue d'élargir sa marge de stabilité. Des paramètres de marche ont pu être ajustés par l'arrangement du VSP sans changer d'autres paramètres.

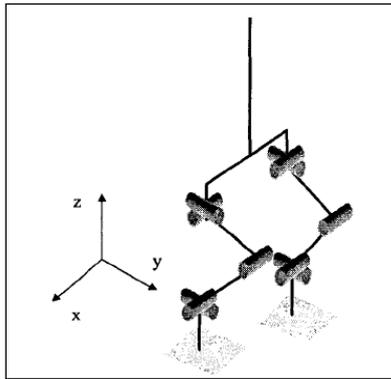


Fig I.14 : Modèle du robot bipède

	Mass (kg)	Length (m)	CoG from upper joint (m)
Trunk	15.0	0.40	0.200
Waist joint link	2.6	0.00	-0.020
Upper link of leg	3.5	0.30	0.126
Lower link of leg	3.4	0.30	0.095
Ankle joint link	2.6	0.00	-0.020
Foot link	2.0	0.12	0.023

Tab I.1 : Parameters du robot [22]

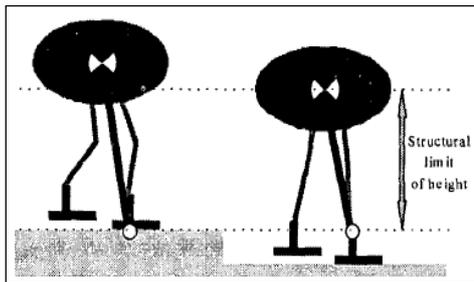


Fig I.15 : limite structurale[22]

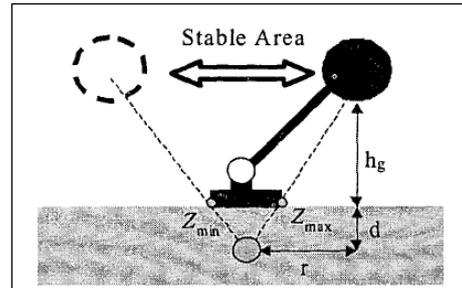


Fig I.16 : surface stable de CG [22]

P.L. Jeng, T-T. Lee, W.A. Gruver. [23] ont effectué une autre étude d'un robot bipède à 5 chaînons et possédant 5 ddl dans le plan sagittal et 2 ddl dans le plan frontal. Ils ont traité le problème de la génération de trajectoire sur les deux plans principaux (sagittal et frontal) en se basant sur l'interpolation polynomiale. Ils ont étudié trois cas de marche dans le plan sagittal tel qu'on trouve des polynômes pour la génération de la marche dans un terrain plan, et les deux autres cas, des polynômes pour la descente et la montée des escaliers. Pour la marche dans le plan frontal, ils ont utilisé deux fonctions de cosinus et sinus hyperboliques, chaque fonction avec deux constantes déterminés à partir des conditions de la marche, l'une de la patte support et l'autre de celle en vol. Pour le cas de la marche dans le plan sagittal, chaque cas possède ses cinq fonctions polynomiales. En effet, l'interpolation est faite par rapport aux articulations. La période (T) de simple support est subdivisée en cinq phases distinctes, chacune prend 1/5 T.

L'équation de mouvement du robot est : $A(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta)\dot{\theta} + D(\theta) = D\tau$

avec : $\theta = [\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5]^T$, $\tau = [\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5]^T$

$\theta_i(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + C_4 t^4 + C_5 t^5 + C_6 t^6$, $i=1,2,3,4,5$.

Le Tronc est considéré fixe en position verticale.

Le tableau suivant donne les cinq phases de la période T et les polynômes correspondants dans le cas de marche sur un *terrain plan* :

t/T	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
θ_2^*	30°	27°	20°	10°	-2°	-30°
θ_3^*	-30°	-28°	-15°	0°	-25°	-30°
θ_5^*	30°	34°	35°	32°	25°	30°
θ_4^*	30°	20°	10°	-5°	-12°	-30°

Tab I.2 : Cinq états distincts de la marche sur plan horizontal [23]



$$\begin{aligned} \theta_1^*(t) &= -11636.44t^6 + 4735.214t^5 - 4599.166t^4 + 1479.343t^3 - 29.553t^2 + 50.602t - 30 \\ \theta_2^*(t) &= 2400.941t^6 - 5816.643t^5 + 4648.869t^4 - 1290.199t^3 - 23.653t^2 - 22.686t + 30 \\ \theta_4^*(t) &= 9360.494t^6 - 21347.696t^5 + 15633.343t^4 - 3617.335t^3 - 109.492t^2 + 22.686t + 30 \\ \theta_5^*(t) &= -6776.785t^6 + 15574.645t^5 - 11445.075t^4 - 2606.189t^3 + 70.578t^2 - 29.553t + 30 \end{aligned}$$

Les trajectoires du robot dans le plan frontal de la patte support et de la patte en vol sont respectivement :

$$\theta_1^*(t) = b_1 \sin h \frac{wt}{2} + b_2 \cos h \frac{wt}{2} \quad \text{et} \quad \theta_2^*(t) = d_1 \sin h \frac{wt}{2} + d_2 \cos h \frac{wt}{2}$$

Avec : $\theta_1^*(t)$, $\theta_2^*(t)$ satisfaits les conditions limites.

Puis, ils ont étudié une commande adaptative pour le plan sagittal et une commande de marche pour le plan frontal en utilisant la technique modified α -computed Torque (voir l'architecture de la commande de marche).

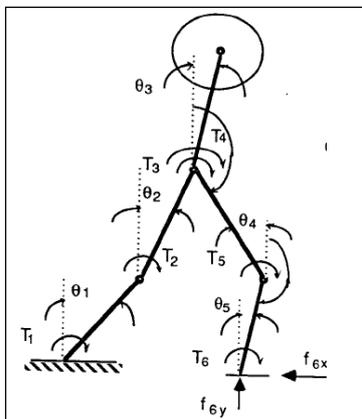


Fig I.17 : Couples, forces du robot dans le plan sagittal [23]

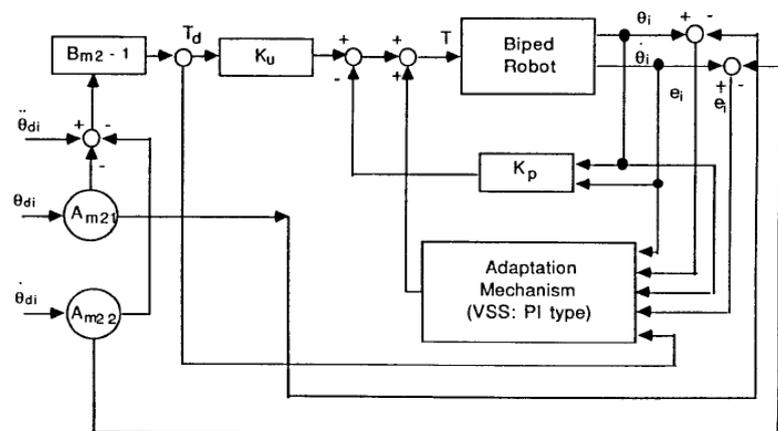


Fig I.18 : Commande du robot dans le plan sagittal [23]

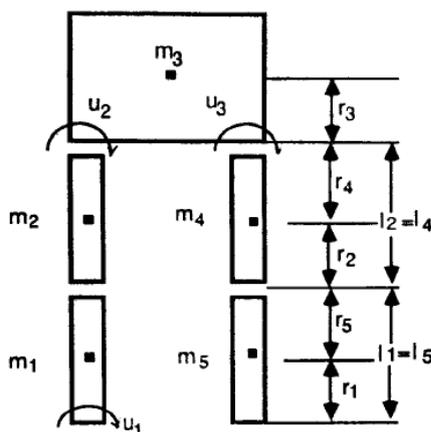


Fig I.19 : Plan Frontal [23]

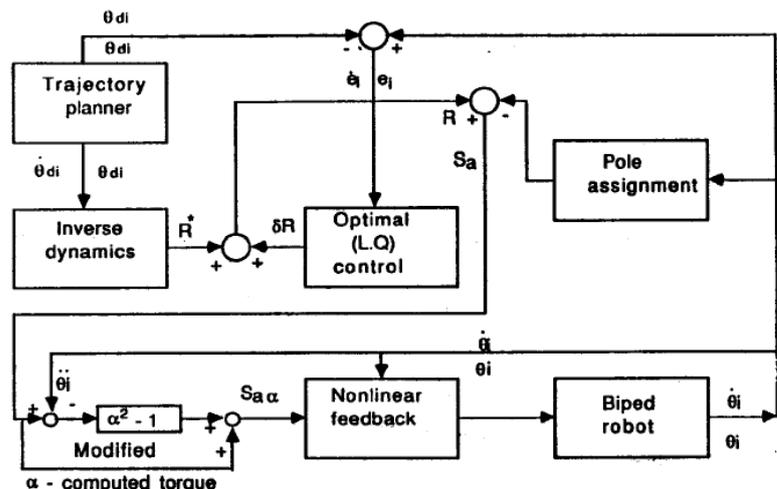


Fig I.20 : Bloc commande utilisant la technique modified α -computed Torque [23]

I.4.2. Synthèse pour l'étude d'un robot bipède.

Nous voulons dans cette section récapituler un ensemble des travaux antérieurs répartis selon les étapes d'étude des robots bipèdes.



I.4.2.1. Modélisation.

La conception de la commande des robots nécessite le calcul de certains modèles mathématiques, tels que [24] :

1. le modèle géométrique direct et inverse qui exprime la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement ;
2. les modèles cinématique direct et inverse qui expriment la vitesse de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires du mécanisme et inversement ;
3. les modèles dynamiques définissent les équations du mouvement du robot. Ils permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercés par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.

a. Modélisation géométrique :

La modélisation géométrique s'exprime par les équations d'état du robot qui permettent de définir les positions des organes mobiles du robot. Plus la structure géométrique du robot est compliquée plus que les équations d'états deviennent encombrantes et coûteuses en calculs.

Parfois, quand le robot a une simple structure [05], [6], la modélisation géométrique se fait directement par projection dans le repère absolu. D'autre part, lorsque le robot possède une structure constituée par un nombre important de degrés de liberté, il sera souhaitable ou bien inévitable d'utiliser l'un des principes de modélisation qui utilisent des matrices de transformations homogènes, parmi lesquelles celle de Denavit-Hartenberg [24].

b. Modélisation cinématique :

Comme tous les robots, la modélisation cinématique d'un robot bipède est dérivée directement à partir du modèle géométrique. L'humain, cinématiquement, est le modèle le plus complet.

Souvent, les robots présentent des configurations singulières qu'on ne peut pas les modéliser qu'à travers l'inversion de la matrice jacobienne obtenue par le modèle cinématique inverse (MCI). En effet, l'intérêt de calcul de la matrice jacobienne demeure important, mais, parfois le calcul de son inverse présente des contraintes et ne se fait qu'à travers des méthodes analytiques ou parfois numériques. Les références [25], [26], [27], [28] décrivent quelques méthodes du calcul de l'inverse de la matrice Jacobienne.

c. Modélisation dynamique :

C'est une analyse basée essentiellement sur l'application des lois de la dynamique.

R. Laurence [29] emploie la méthode de Kane. Elle est appelée aussi forme Lagrangienne du principe d'Alembert (ou principe de travail virtuel). L'avantage de cette formulation est de ne pas recourir à l'écriture des forces internes de réaction comme lors d'une formulation avec la seconde loi de Newtons, et de ne pas recourir aussi au calcul des dérivées des énergies potentielles et cinétiques comme la formulation Euler-Lagrange. Le nombre des équations d'état nécessaires à la description de mouvement est minimal, néanmoins cette formulation ne permet pas de distinguer les termes d'inerties, de ceux de la gravité, et de ceux dus aux forces centripètes. De même, la commande n'apparaît pas explicitement, mais uniquement à travers des forces engendrées sur le corps.

M. Katsuyuki, M. Toshimasa, O. Kiyoshi [30] ont approximé le robot comme un pendule inversé de longueur égale à celle des pattes. Sa masse est supposée concentrée sur la patte support à une hauteur en rapport avec le centre de gravité du robot. En admettant que le mouvement du robot ait lieu dans les deux plans, latéral et sagittal, ils ont fait, par l'approche de similitude, une analyse du pendule dans un repère cartésien en développant les équations génératrices de la marche du robot.

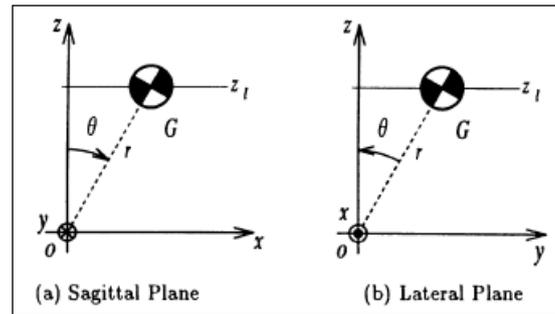


Fig I.21 : Approximation du pendule inversé [30]

La trajectoire appliquée est évaluée par corrélation avec la situation du point nul des moments calculé en-avant. Ainsi, la faisabilité du mouvement est déterminée.

Le mouvement est réalisé dans les deux plans, plan sagittal x - z et le plan latéral y - z . Sachant que dans la marche naturelle, le mouvement dans le plan latéral est faible, le mouvement est considéré principalement dans le plan sagittal. Donc, le mouvement du robot dû essentiellement aux forces appliquées dans le plan sagittal, et les forces engendrés dans le plan latéral sont considéré comme des forces externes perturbantes.

Pour le centre de gravité, G , dans le plan sagittal, on peut écrire :

$$M\ddot{P} = (J^T)^{-1} \tau + M g \quad \text{I-01}$$

Sachant :

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} x \\ z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{I-02}$$

$$j = \frac{dP}{d\theta} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\theta} & \frac{dz}{d\theta} & \frac{d\theta}{d\theta} \end{bmatrix}^T \quad \text{I-03}$$

M est la masse, I le moment d'inertie, g l'accélération de gravité, τ le couple de rotation par rapport à l'origine.

En multipliant les deux membres de l'équation I-01 par la matrice Jacobienne transposée, on obtient :

$$m \frac{dx}{d\theta} \ddot{x} + m \frac{dz}{d\theta} \ddot{z} + I \ddot{\theta} = \tau - m \frac{dz}{d\theta} g \quad \text{I-04}$$

et en posant :

$$x = r \sin \theta \quad z = r \cos \theta$$

$$\text{On aura : } \frac{dx}{d\theta} = r \cos \theta = z \quad \text{et} \quad \frac{dz}{d\theta} = -r \sin \theta = -x$$

L'équation I-04 devient alors :

$$m(z \ddot{x} - x \ddot{z}) + I \ddot{\theta} = \tau + mgx \quad \text{I-05}$$

Similairement avec le plan sagittal, l'équation qui régit le mouvement du robot dans le plan latéral est :

$$-m(z \ddot{y} - y \ddot{z}) + I \ddot{\theta} = \tau - m g y \quad \text{I-06}$$



En imposant dans les équations (I-05) et (I-06) des contraintes limitant la hauteur du centre de gravité à une valeur constante $z=z_1$, et considérant le mouvement de ce point comme uniforme, $\theta=0$, on introduit la condition nécessaire et suffisante du mouvement libre du pendule, $r=0$, on obtient :

$$\ddot{x} - \frac{g}{z_1} x = 0 \tag{I-07}$$

$$\ddot{y} - \frac{g}{z_1} y = 0 \tag{I-08}$$

z_1 : est la hauteur de la patte support.

Les solutions de l'équation (I-07) et (I-08) sont :

$$x(t) = \frac{V_{x0}}{\alpha} \sinh(\alpha t) \tag{I-09}$$

$$y(t) = \frac{V_{y0}}{\alpha} \sinh(\alpha t) \tag{I-10}$$

Avec :

$$\alpha = \sqrt{\frac{g}{z_1}} \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = V_{x0}$$

$$y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = V_{y0}$$

Le principe de modélisation de la marche dynamique du robot comme un pendule inversé a un avantage, mais exige un travail mécanique lors de la transition d'une patte pendulaire à l'autre patte [30].

Une étude a été faite par Meta & all 1984, pour un robot bipède à 5 ddl dans le plan sagittal, elle est rapportée dans le document de M. Hackel [31]. Le vecteur des couples est calculé par la méthode dynamique inverse [31] dont la forme générale de l'équation dynamique est la suivante:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + D_1(\theta)\dot{\theta}^2 + D_2(\theta)\dot{\theta} + G(\theta) = \tau \tag{I-11}$$

	Corps entier	Membre inférieur	Membre supérieur	Membre inférieur+piéd
Moment d'inertie [kg m ²]	0.19	0.014	0.002	0.017
CM à travers la liaison inférieur [m]	0.3	0.09	0.1	0.136
CM à travers la liaison supérieur [m]	0.0	0.11	0.104	0.136
Masse de chaînon [kg]	12	2.39	3.89	4.09

Tab I.3 propriétés du robot: [31]

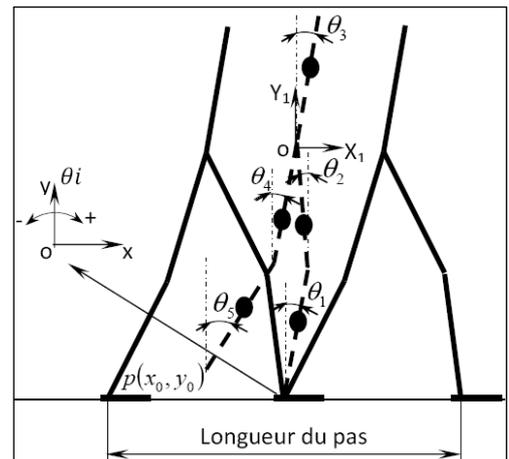


Fig I.22 : robot bipède à 05 chaînons [31]

La marche du robot est définie par les trajectoires des angles articulaires qui sont prédéterminés par des fonctions polynomiales dont leur ordre est déterminé à travers le nombre des contraintes imposées pour chaque articulation. A chaque position intermédiaire donnée P (x_p, z_p), leur temps de dépassement t_p est déterminé. Ces contraintes sont les paramètres dérivatifs de la marche stable. Basé sur le nombre de contraintes, l'ordre du polynôme en fonction du temps pour $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ est 3, 3, 7, 6, 6 respectivement.



La simulation est faite pour un pas de marche sans tenir compte des effets d'impact pied-sol et de la phase de double support (voir figure I.23).

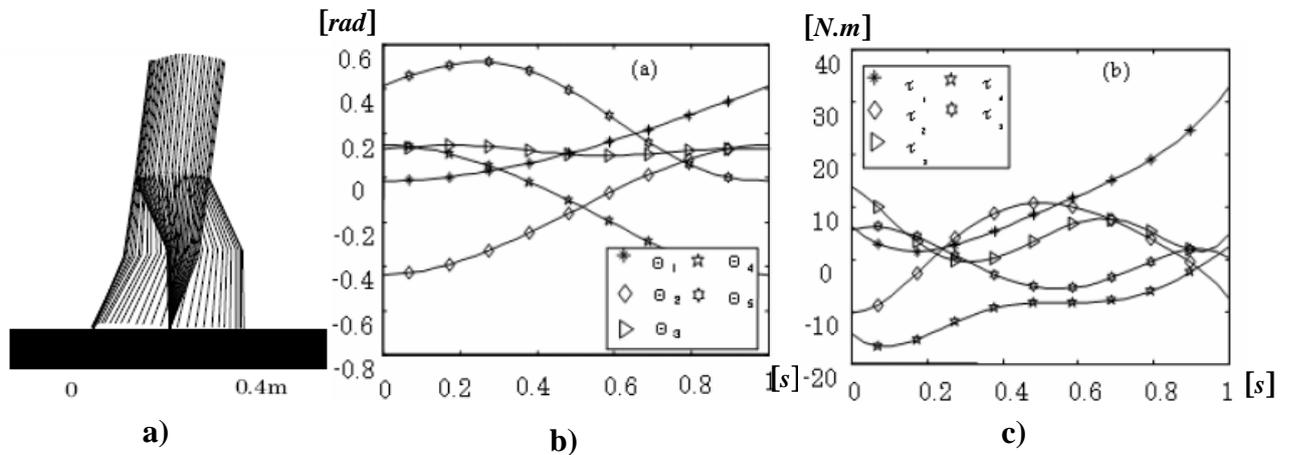


Fig. I.23 : modèle de marche et résultats en PSS. **a).** Simulation d'un pas de marche **b).** Graphes des angles articulaires. **c).** Graphes des couples. [31]

I.4.2.2. Générateur de trajectoire.

Beaucoup de recherche sont concentrées sur le générateur de trajectoire des robots marcheurs. Généralement la mobilité du robot bipède est définie par les deux trajectoires principales, l'une de la hanche et l'autre du pied en vol.

Dans [08], [11] et [16], les deux trajectoires sont prédéterminées par des fonctions polynomiales, c'est-à-dire, le robot doit marcher dans les endroits bien structurés. Par conséquent, on trouve des recherches avancées [14], [15], par exemple, basaient sur le principe de la logique flou dont le but où le robot devrait être souple et pourrait se déplacer dans des endroits encombrants par son autonomie, mais avec une condition de conserver sa stabilité en ligne.

Une étude d'un robot bipède qui peut affronter les escaliers est étudiée par R. Zhang et P. Vadakepat [32]. L'algorithme produit des modèles de marche avec la marge stable désirée et la vitesse de marche en employant des polynômes cubique permettent de générer la trajectoire de la hanche et celle du pied en vol (figure I.24). Aussi, une loi de commande est dérivée pour contrôler la marche du robot. Le RoboSapien, un robot bipède de 12 ddl, est construit afin d'appliquer et vérifier l'algorithme de marche.

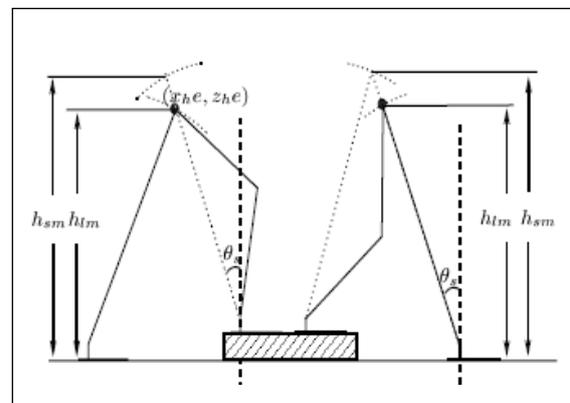
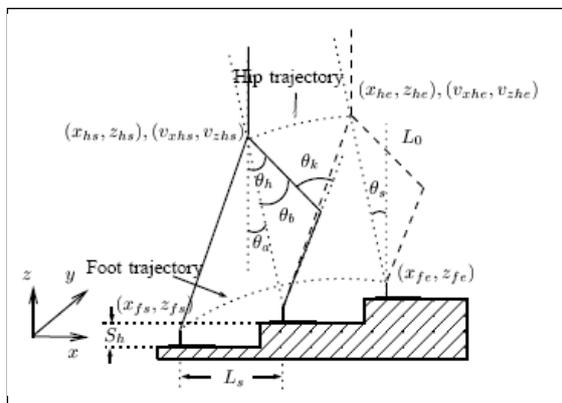


Figure I.24 : trajectoire de la hanche et du pied [32]. **Figure I.25 :** détermination la hauteur de la hanche [32]



Les deux trajectoires principales régissant le mouvement du robot sont celle de la hanche et du pied oscillant. Elles sont définies dans le plan (o, x, z) par des fonctions polynomiales cubiques. Les deux polynômes utilisés sont de la forme :

$$x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \quad \text{I-12}$$

$$z(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3$$

Les coefficients $(a_0, a_1, a_2 \text{ et } a_3)$ et $(b_0, b_1, b_2 \text{ et } b_3)$ seront déterminés directement à partir des conditions initiales et finales d'un pas du robot.

La figure I.26 représente une simulation de la Phase de Simple Support:

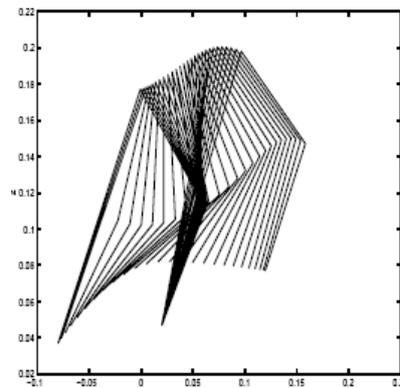


Figure I.26 : simulation de la marche d'une PSS en montant un escalier [32]

Arthur D. Kuo [33] a défini les six causes déterminantes de la marche en faisant une étude comparative avec la théorie qui utilise l'analogie d'un pendule inversé. Ils sont les facteurs cinématiques de la marche proposés pour réduire au minimum le coût énergétique de locomotion. L'analogie de pendule inversé suppose que la patte support se comporte comme un pendule définissant un arc de cercle dont le centre est la cheville du pied support (figure I.27).

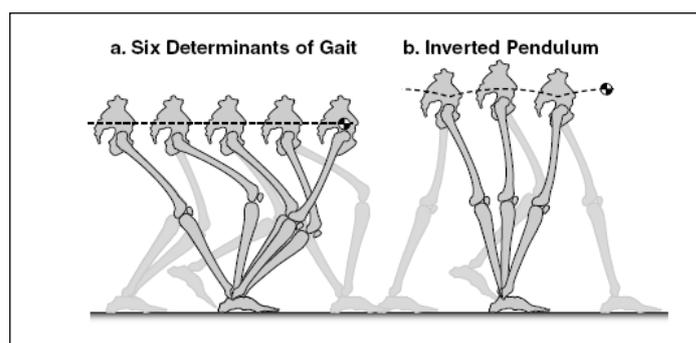


Fig I.27 : Allures de la marche [33]

Les six causes déterminantes de la marche sont :

Réduction du déplacement vertical du centre de la masse (CM) ; Centre de masse enclavé au niveau de la hanche ; Flexion du genou ; Rotation du pelvis autour de la verticale ; A la fin du pas, la patte terrestre doit être droite et l'avance sans recule (marche continue).

Ces causes déterminantes de la marche ont été pratiquement acceptées comme un fait pendant les 50 années précédentes [33]. Elles apparaissaient dans des manuels cliniques et scientifiques importants sans être soumises à l'essai expérimental. Les expériences récentes prouvent que trois des causes



déterminantes - flexion de genou du PSS (le Gard et Childress, 1999), rotation du pelvis autour l'axe verticale de la hanche (Kerrigan et Riley, Lelas, et Della Croce, 2001) et l'avance sans recule (le Gard et Childress, 1997) - contribuent réellement à la locomotion du robot. D'autres expériences examinent les théories que les humains dépensent une énergie plus métabolique en réduisant le déplacement vertical de CM comparé à leur marche normale (Gordon, Ferris, et Kuo, 2003 ; Ortega et Farley, 2005).

On expose cette littérature pour voir l'importance de la conception de la trajectoire du robot bipède. En effet, la trajectoire contribue directement au comportement physique du robot, tels que : la dépense ou gain d'énergie, la souplesse du robot, la stabilité, etc.

I.4.2.3. Equilibre (stabilité).

L'équilibre est un point clé de tous les objets debout: maintien et/ou locomotion. En robotique, le critère de l'équilibre ou la stabilité s'explique par le type de robot à étudier, par exemple, dans les robots à base fixe (bras manipulateur), la stabilité ne pose aucun problème, car le robot sera attaché par une force plus grande à la résultante des forces exercées sur le robot, aussi, dans les robots à chenille et/ou à roues, le problème de la stabilité ne génère pas beaucoup d'effort. Dans le cas des robots à pattes, où le robot a une structure géométrique plus équilibrée, par exemple un robot à six pattes (hexapodes), le problème de la stabilité est moins épuisant; par contre, on constate que la stabilité s'impose plus profondément dans les robots à deux pattes (robot humanoïde). Les références [34], [35], [36] présentent des études sur ce problème.

On trouve que la trajectoire du pied en vol et celle de la hanche conditionnent directement la stabilité du robot et se sont les deux facteurs importants qui l'affectent [34], [37], [38].

Comme on verra par la suite dans l'analyse de la marche bipède, on rappelle que, pratiquement, il y a deux types de marches qui seront considérées pour la position du Centre de Gravité du robot par rapport à son polygone de sustentation: *la marche statique* et *la marche dynamique* [39].

La marche statique : est constatée quand le centre de gravité (CG) du robot est resté à l'intérieur du polygone de sustentation. Elle se réalise avec des vitesses réduites.

La marche dynamique : ce type de marche provient quand le centre de gravité (CG) n'est plus à l'intérieur du polygone de sustentation.

Dans le premier type de marche du robot, la stabilité est vérifiée en gardant le centre de masse dans le centre de sustentation, mais dans le second type il y a un critère de stabilité défini par Vukobratovic, M. [16], il sert au critère de stabilité à la dynamique des objets multi-corps qui s'écrit dans la majorité des documents sous l'abréviation ZMP et signifie en anglais « Zero Moment Point », c'est à dire le point nul des moments autour de laquelle la somme de tous les couples appliqués est égal à zéro.

Chevallereau et al. [40] ont étudié la stabilité dynamique en utilisant une définition de la référence de trajectoire avec un coût d'énergie minimale.

Takanishi et al. [41], Shih et al. [42], Hirai et al. [43], et Dasgupta et al [44] ont considéré la stabilité dynamique du robot dont le processus de marche est basé sur la méthode de point nul des moments (ZMP).

P-N. Mousavi, A.Bagheri. [33] ont fait une étude d'un robot bipède à 7 degrés de liberté dont la stabilité est vérifiée par le critère de ZMP. Ils ont pris en compte les deux types de stabilité de la marche, statique et dynamique. D'après leur article, la position et la hauteur de la hanche ne sont pas les seuls paramètres dérivatifs de la stabilité, mais aussi on doit tenir en compte la rotation du tronc comme paramètre essentiel de la stabilité.



Beaucoup de recherches proposent une trajectoire prédéterminée de ZMP. Un ZMP fixe, typiquement au centre de la semelle dans la phase de simple support [27], [30], et un ZMP mobile qui change de mode périodique d'un pied à l'autre en phase double support [45], [46]. Ce type de la locomotion d'une trajectoire de ZMP prédéterminée à des inconvénients, car la locomotion du robot devient inconfortable, surtout dans le cas d'un terrain de travail accidenté ou encombré. Le maintien de la trajectoire prédéterminée de ZMP n'est pas souhaitable puisqu'il aurait comme conséquence la locomotion instable (Jong H.P [36]). L'humain est capable de changer son ZMP convenablement et l'adapter à la nature du terrain, de façon à assurer sa stabilité. La locomotion humaine n'aura jamais une trajectoire de ZMP fixe à tout le moment, généralement, mobile dans le sens de la marche avec une stabilité maximale. En se basant de cette vue, Jong H.P. [36] a utilisé la technique de la logique floue. Il a réalisé un algorithme pour produire la trajectoire désirée de ZMP tout en assurant la stabilité du corps. L'application est effectuée par simulation pour un robot bipède à 7 ddl. Pour la simplicité, l'arrangement de la commande est simulé seulement dans le plan sagittal.

S. Kajita, et autres [47] ont conçu un générateur de modèle de marche défini par des angles communs de référence avec des paramètres de marche donnés, par exemple, la vitesse moyenne, la longueur de pas, etc. En même temps, le générateur de modèle calcule un Zéro-Moment Point prévu qui est dynamiquement compatible au mouvement de référence.

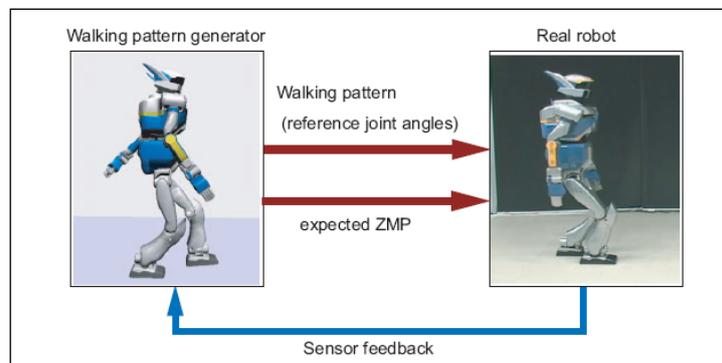


Fig I.28 : schéma de control (ZMP prévu) [47]

La référence de trajectoire prévue pour ZMP peut être séparée comme suivant :

$$(ZMP_{prévu}) = P^{ref} + P^{aux}$$

Le premier composant p^{ref} comporte les paramètres globaux de la marche du robot en conditions normales, telles que, la vitesse moyenne et la longueur de pas... etc. sachant que la stabilité du robot doit être vérifiée en suivant cette trajectoire de référence (p^{ref}).

Le deuxième composant p^{aux} est un terme supplémentaire qui peut être changé en temps réel. On peut employer le ZMP auxiliaire (p^{aux}) comme un moyen de compensation et correction ajouté au premier composant p^{ref} répondant à une marche stable du robot. Donc, le p^{aux} doit répondre à tout imprévu afin de réaliser la marche stable, par exemple :

une force externe horizontale f agit sur le robot au centre de masse (CM).

f est équivalent avec le ZMP auxiliaire par :

$$P^{aux} = -f z_h / M g$$

Avec :

M : masse du robot,

z_h : la hauteur de CM

g : l'accélération de pesanteur.

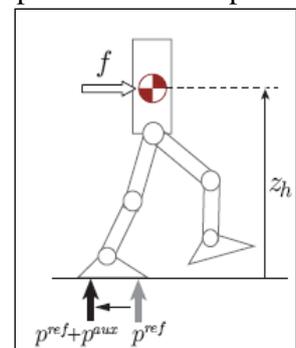


Fig I.29 : force externe agissant sur le robot



En effet, le robot peut supporter l'effet de cette force externe sans qu'il soit renversé en employant cette équation.

P. Sardain et G. Bessonnet [48] présentaient une étude basée sur des résultats expérimentaux concernant l'évolution des forces de contact pieds-sol obtenues à partir d'un marcheur humain portant les pieds de robot comme chaussures. D'abord, les expériences sont effectuées sur une terre plate afin de déterminer l'influence des chaussures métalliques lourdes et rigides sur la marche du robot Bip2000. En second lieu, l'évolution des forces de contact est étudiée tout en marchant sur des plans parallèles avec différentes altitudes (les escaliers). Le but est de présenter et analyser des données expérimentales à l'évolution des forces de contacts terre- pieds et le concept de CoP-ZMP. Chaque pied pèse 1,8 kg, l'être humain pèse 96 kg qui correspond au poids du Bip2000.

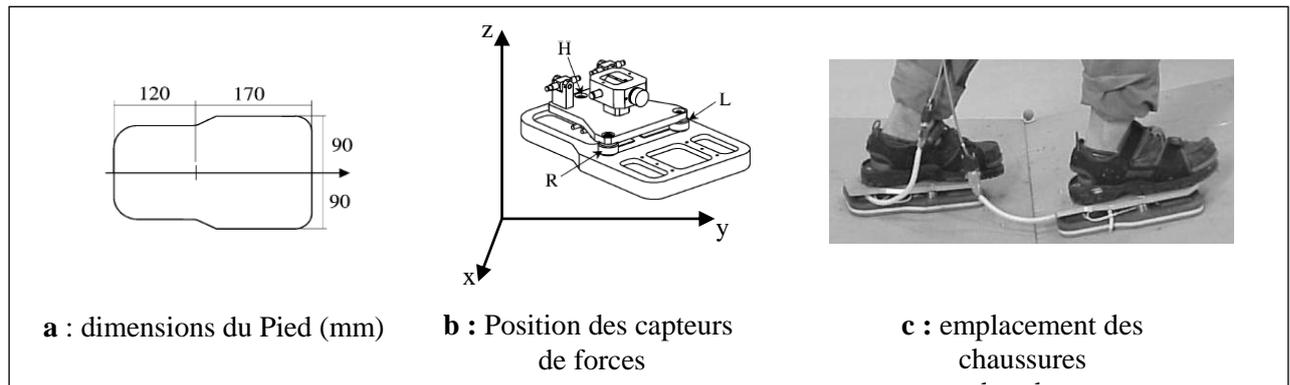


Fig I.30 : Expérience de la marche et relèvement des données [48]

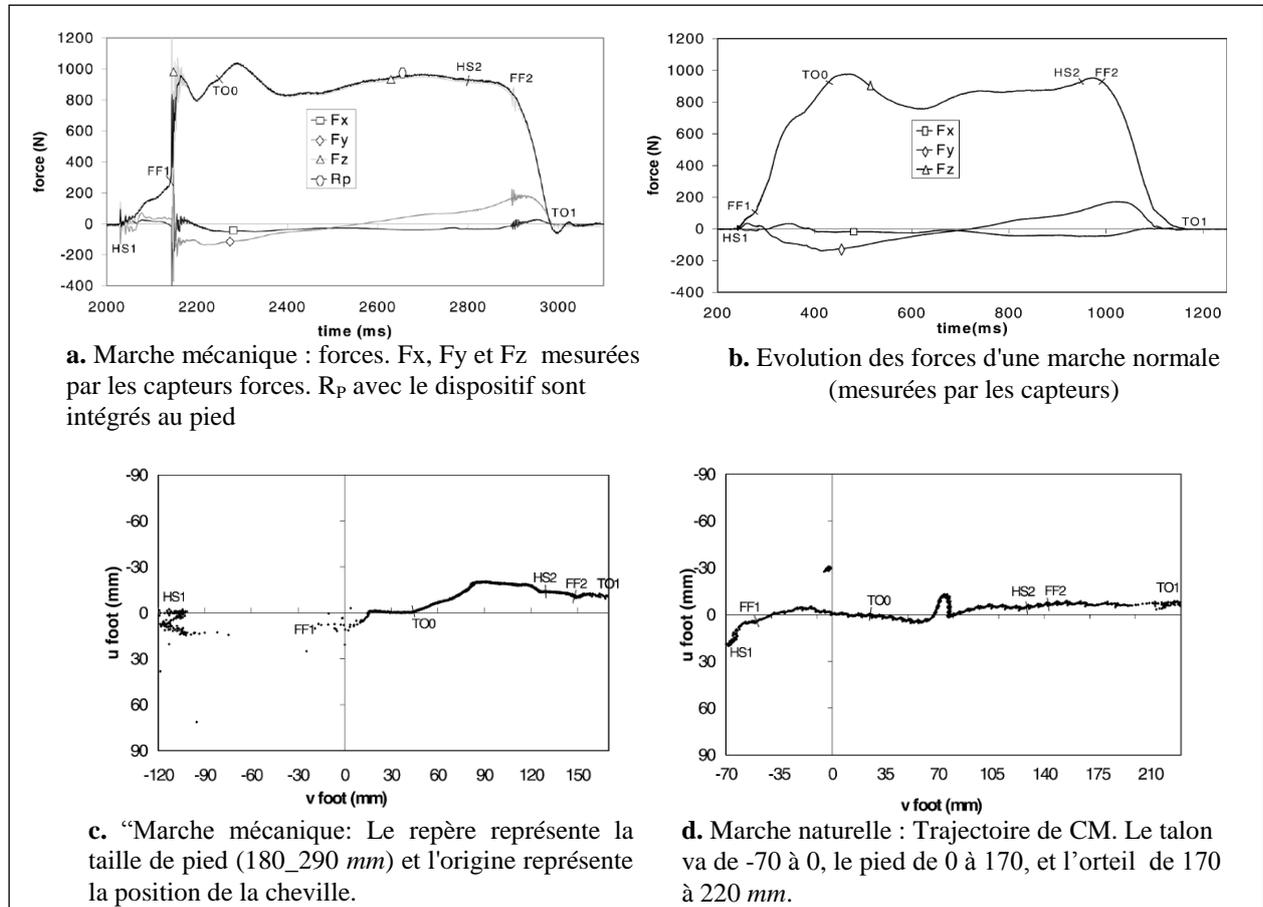


Fig I. 32 : résultats de simulation



L'analyse approfondie des données de force a montré encore plus de similitudes. De légères modifications sont mises en application pour améliorer le comportement des pieds courants du Bip2000. En premier lieu, le caoutchouc courant fixé sous la semelle est remplacé par un matériel plus mou, et en second lieu, le talon du pied est modifié en donnant un profil courbé du bord arrière de la semelle. Néanmoins, concevant un vrai pied anthropomorphe serait une perspective plus passionnante.

Remarque : c'est un travail développé entre laboratoires Français, LMS et INRIA Rhône-Alpes.

I.4.2.4. Commande.

Depuis 1987, des chercheurs avaient travaillé à l'adaptabilité d'environnement d'un robot bipède, telle que la capacité de marcher sous une force externe inconnue, et pour marcher sur un terrain inégal comme escaliers ou pentes.[49].

Commande de marche

Divers invariants ont été extraits à partir de la structure de marche. Dans l'état d'équilibre, la marche est symétrique et périodique. Le cycle de marche peut être divisé en pas qui eux-mêmes sont divisés en étapes. Chaque cycle se compose d'appuis simples et doubles. Les paramètres de déplacement changent également avec les caractéristiques d'environnement telles que des obstacles, des escaliers, des appuis d'étroit (faisceaux)... L'objectif du mouvement influence également la démarche; pour couvrir efficacement une longue ou courte distance, les paramètres de marche tels que la longueur de pas et la vitesse sont différents. Pour une vitesse donnée de progression, un humain choisit une marche réduisant au minimum une fonction de coût [06].

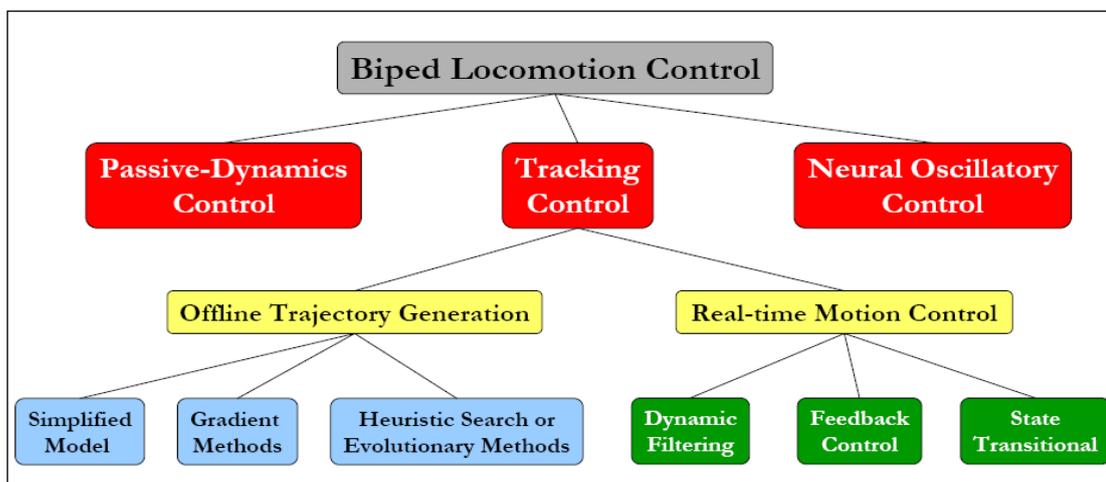


Fig I.32 : Catégorisation de la commande de la marche du robot bipède [15]

La première catégorie, tracking control methods (terme utilisé par : Kajita et al., 2003; Nakanishi *et al.*, 2003; Sugihara, 2004), de commande consiste à poursuivre une trajectoire dans lequel le problème de locomotion bipède est séparé dans une conception de modèle de trajectoire de référence et un contrôleur de stabilisation. Certains emploient le terme compensation [15].

Plusieurs chercheurs ont également combiné la génération de mouvement par la manipulation de ZMP avec les modèles inversés d'un pendule. S.Kajita et autres [50] ont suggéré le mode linéaire de pendule inversé (LIPM) et généré des trajectoires de centre de gravité (CG) en utilisant la linéarisation stricte de l'équation de mouvement. Dans une autre étude, ils se sont prolongés au 3D LIPM (S.Kajita et autres [51]) et présentent une nouvelle méthode d'une génération d'un modèle de marche bipède en employant une commande prévisionnelle du point nul de moment (ZMP). D'abord,



la dynamique du robot bipède est modélisée comme chariot courant sur une table qui donne une représentation commode pour traiter ZMP (voir figure I.33).

C'est une méthode conventionnelle de génération d'un modèle de marche basé sur ZMP, et le problème de commande sera formalisé comme conception d'un ZMP dépitsté par le servo-contrôleur.

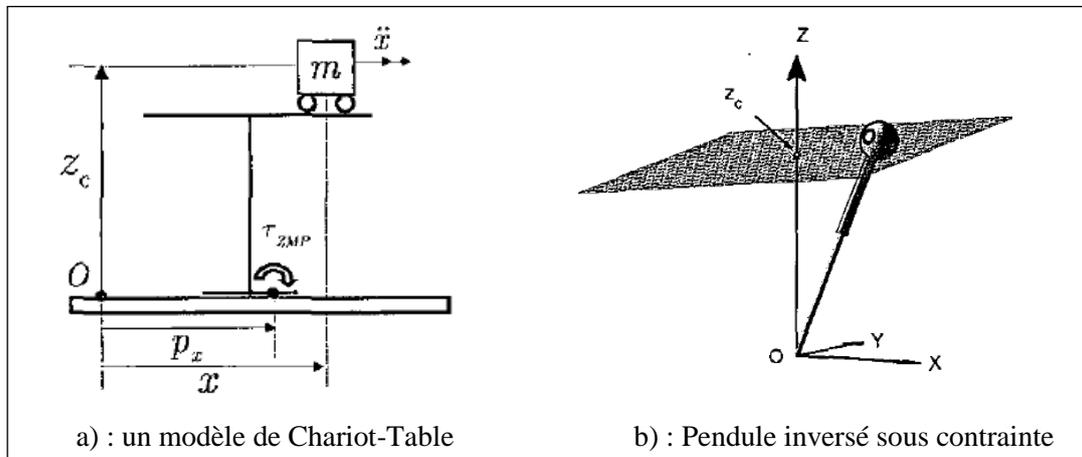


Fig I.33 : Modélisation d'un robot [49]

Minakata et autres [52] ont présenté le mode virtuel de pendule inversé (VIPM) et l'ont employé pour varier la longueur de pas et la vitesse de marche du robot « *bird-like walking* » en temps réel.

Autre méthodes de contrôle en ligne ont été établies par plusieurs chercheurs. M.Joo Er, Y.Zhou and C-J.Chien [53] ont proposé une méthode de génération de mouvement en ligne satisfaisant la condition de la stabilité dynamique du robot (ZMP). Ils ont utilisé Dynamic Fuzzy Q-Learning-DFQL qui permet d'identifier l'environnement, puis transmettre l'information au contrôleur DFQL qui commande les deux paramètres de la hanche (vitesse et position). C'est la méthode améliorée par rapport à celle qui était proposée par L.Jouffe dite Fuzzy Q-Learning-FQL, car la simulation des résultats montre que le DFQL donne une stabilité dynamique plus forte en comparaisant avec le FQL.

M. Takahashi et autres [54] proposent une méthode de conception systématique de commande d'une stratégie en employant l'algorithme génétique. Elle est étudiée sur un modèle bipède planaire à cinq chaînons. La méthode proposée consiste à concevoir un Générateur de Modèle Centrale (Central Pattern Generator CPG) pour la locomotion des pattes et le contrôle d'attitude du Torse. Le contrôleur de CPG répond aux changements environnementaux par l'entraînement mutuel des activités oscillantes du CPG et du corps. En utilisant l'interaction entre le torse et les pattes, le robot bipède peut marcher sur le sol avec des vitesses considérablement appropriées lui permettant de s'adapter avec l'environnement. Shan et Al ont proposé cette méthode (CPG) pour un robot bipède basé sur l'algorithme génétique à objectifs multiples; aussi, Taga a appliqué la méthode avec un contrôleur CPG pour un robot bipède à 8 ddl.

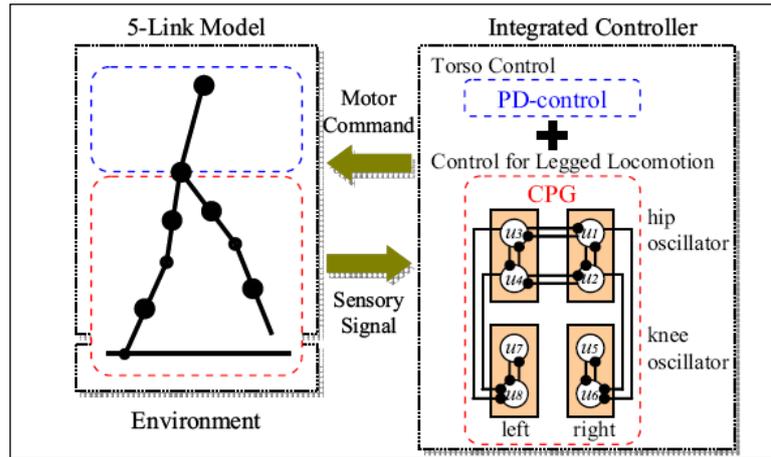


Fig I.34 : L'arrangement conceptuel de la méthode proposée. [52] .

J-H. Park et Y-K. Rhee. [55] ont établi la commande d'un robot bipède à 7 ddl dans le plan sagittal. Ils proposent une méthode en considérant le mouvement du tronc pour planifier une trajectoire désirée du ZMP ; celle-ci étant réalisée en ligne par un algorithme de la Logique Floue selon la position de la hanche et la patte oscillante.

Commander le processus.

Les étapes successives impliquées dans le procédé de commande de la marche peuvent être récapitulées comme suit : génération d'une idée de déplacement au niveau du système nerveux central (CNS); transmission des signaux correspondant à la marche aux muscles par l'intermédiaire du cordon médullaire; contraction des muscles impliqués dans la locomotion; régulation des forces et des couples de l'articulation par le système nerveux central sur la base de l'information du capteur. L'efficacité de cette chaîne dépend fortement des capacités perceptives du système humain [56].

Anticipation et prévision.

L'efficacité d'un mouvement dépend de la capacité de prévoir ses conséquences. Cependant, puisque il existe un retard entre l'émission et la réception d'information par le système nerveux, il n'est pas possible de savoir instantanément l'orientation exacte du corps dans son environnement, seulement une évaluation est disponible. C'est pourquoi le cerveau emploie les modèles internes du corps, de l'environnement et de leurs interactions, qui permettent de prévoir les conséquences des actions produites [56].

L'anticipation est possible grâce à la capacité des capteurs de mesure des variations rapides (capture d'objets, mesure de forces ou moments...). Quand une action est lancée, le cerveau fait des prétentions sur l'état des capteurs. Le contrôleur compare la prévision et l'accomplissement mesuré et corrige le mouvement au besoin.

I.5. Quelques réalisations des robots bipèdes.

Dans le champ des robots marcheurs bipèdes, on constate un accroissement aux recherches plus prépondérant dans ces dernières années. Nous allons citer brièvement quelques réalisations.

I.5.1. Robots bipèdes Honda.

Le groupe Honda a commencé son innovation des robots bipèdes depuis l'année 1980. Le développement a comporté dix générations des prototypes, appelées E0 à E6 et P1 à P3, ils sont coûtés des dizaines de millions de dollars. Un des premiers modèles de robot que Honda a mis au



point, le P1 en 1993, était capable de marcher sur deux pattes de façon équilibrée. C'était tout un défi. Il y a eu d'autres modèles, le P2 et le P3 avec certaines améliorations.

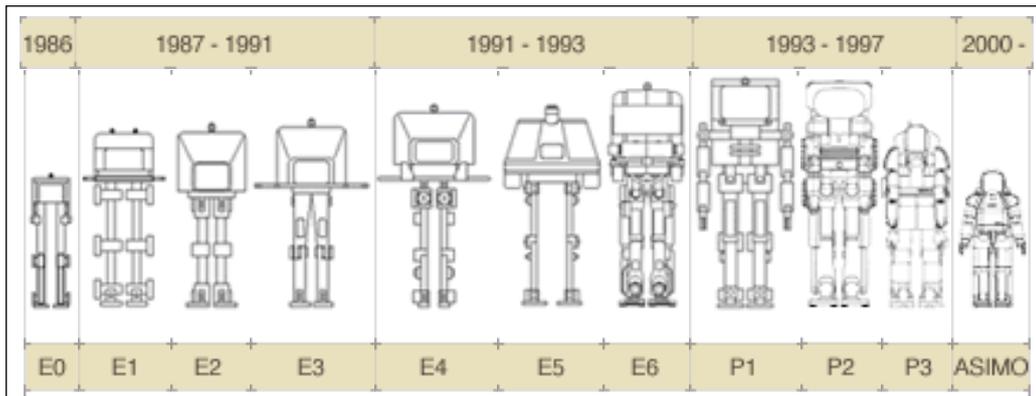


Fig I.35 : Schémas cinématiques des séries des robots bipèdes Japonais Honda

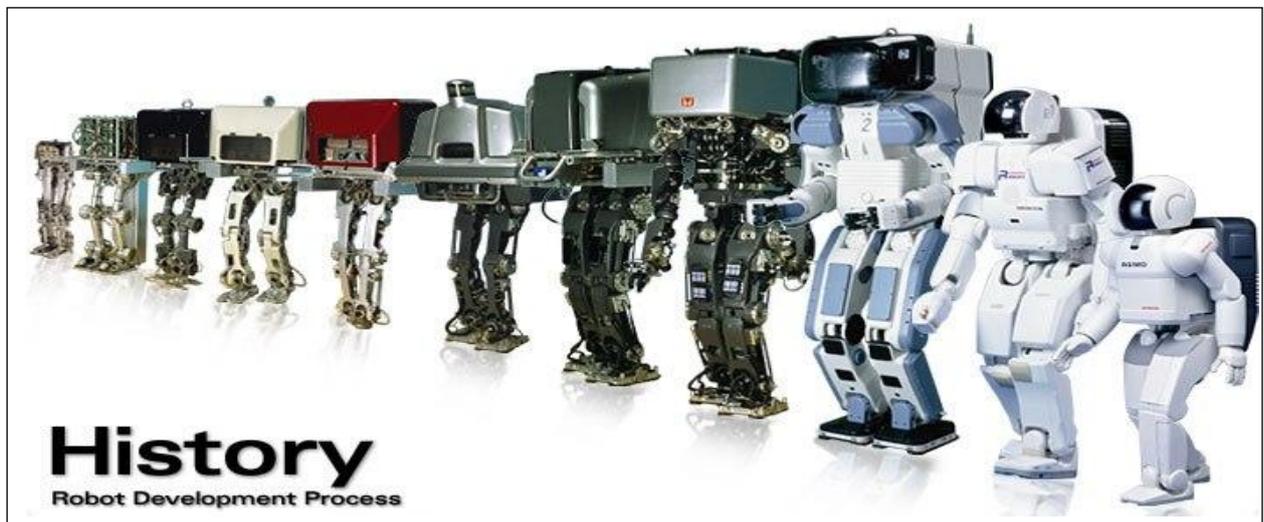


Fig I.36 : Images d'une série de robots bipèdes Japonais Honda

Le prototype P2 pesait 210 kg et mesurait 182 cm. Le P3, sorti l'année suivante, en 1997, avait considérablement gagné en légèreté et compacité : 130 kg pour 160 cm. Son autonomie est de quinze minutes et les transmissions d'information se font par internet. P3 conduisit au développement de l'ASIMO actuel.

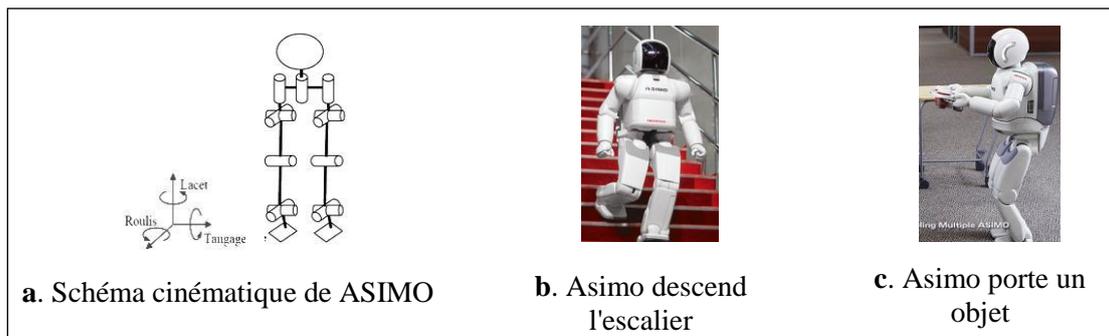


Fig I.37 : Honda robot ASIMO



Le dernier robot ASIMO (ce qui signifie en anglais "Advanced Step in Innovative MObility) est beaucoup moins lourd que ses précédents, il pèse 43 kg et se déplace plus facilement. ASIMO conçu avec une hauteur de 1,2 m et 34 degrés de liberté, est capable de marcher à une vitesse de 0,3 m/s. Il peut monter et descendre les escaliers comme il peut marche dans un terrain plat [35], ce qui permet d'effectuer des tâches tout comme un humain. A noter que le groupe Honda est bien avancé en technologies de robotique. Son nouveau robot humanoïde ASIMO peut agir de façon autonome et assurer un service ininterrompu aux employés de bureau.

I.5.2. robot Wabian-2.

Au Japon, l'université de *Waseda* travaille depuis les années 70 sur les robots humanoïdes. En 2000, elle a créé le *Humanoid Robotics Institute* afin de travailler sur tous les aspects de la communication homme/robot, notamment à travers l'élaboration d'une tête humanoïde permettant une communication enrichie avec l'être humain. Le dernier humanoïde marcheur de cette université est Wabian-2 (WAseda BIpedal humANoid 2) (figure I.38). Ce robot a pour vocation la simulation de mouvements humains; son système de locomotion possède des redondances comme le montre la figure I.38.a. Ces redondances sont utiles dans certains cas particuliers. Les principales caractéristiques de ce robot sont données dans le tableau I.1.

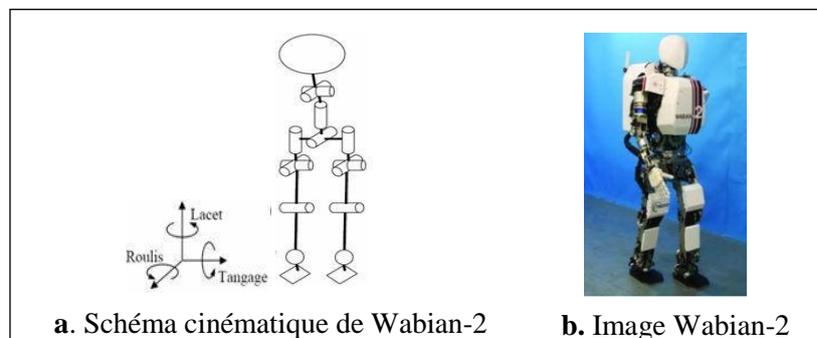


Fig I.38 : robot Humanoïde Wabian-2

I.5.3. Projets des robots Humanoïdes (HRP) Japan

On trouve aussi, des séries des robots humanoïdes réalisés par la compagnie HRP. Comparé à l'ASIMO, le HRP peut s'allonger et se soulever encore, il accomplit ceci avec un joint flexible de torse, se pliant plutôt que tournant comme vu dans le nouveau modèle ASIMO. La conception des pattes permet à une patte d'être mise devant l'autre. Le robot peut marcher sur une planche étroite ou dans des espaces très étroits.



Fig I.39 : Série des robots HRP

Le HRP_3P mesure 154 cm de hauteur, a 30 ddl et pèse 58 kg.



I.5.4. Robots bipèdes de MIT (Leg Laboratory).

Certains bipèdes sont inspirés des oiseaux avec les pattes qui se plient dans le sens inverse des genoux de l'être humain, comme le spring-Turkey et le Flamingo-Spring du MIT, voir figure I.40.

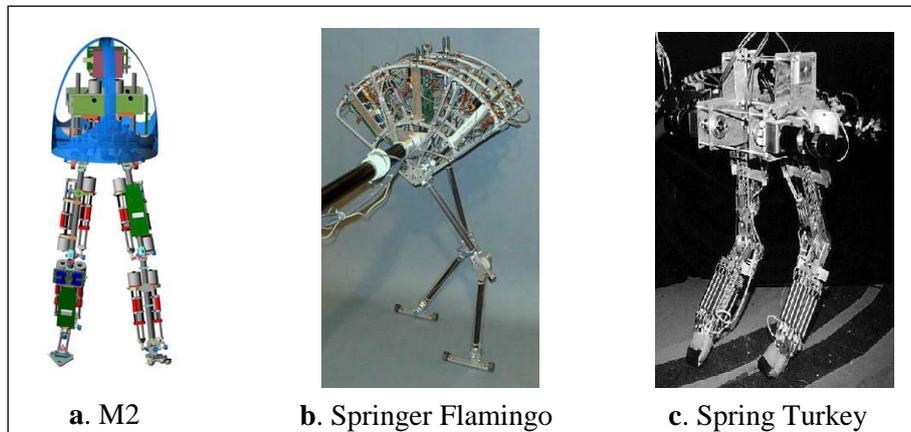


Fig I.40 : Série des robots MIT

Le Springer-Turkey (1994-1996) est un robot bipède capable de marcher sur un terrain plat. Ce robot a été développé comme plate-forme expérimentale pour la mise en œuvre des applications (commande). Ses moteurs actionneurs sont placés dans son corps supérieur, la puissance étant transmise aux joints par l'intermédiaire des courroies. Il pèse presque 10 kg et a une hauteur de 60 cm.

Le Springer Flamingo est un robot bipède planaire ayant 6 degrés de liberté. Il a été développé au laboratoire de patte de MIT par co-fondateur Jerry Pratt de Yobotics. Le Springer Flamingo est capable de marche à une vitesse de 1.25 m/s.

Le M2 ayant 12 degrés de liberté. C'est un bipède tridimensionnel, développé au laboratoire de patte de MIT par co-fondateur Dan Paluska de Yobotics.

I.5.5. Sony QRIO robot.

Sony Corporation a développé un petit robot bipède marcheur « SDR » (3X et 4Xprototype). En synchronisant les mouvements de 24 articulations sur son corps, il peut effectuer les mouvements de base tels que la marche et le changement de direction, aussi, il peut se lever et maintenir son équilibre sur une patte pour donner un coup de pied à une boule, et peut danser. Sa stabilité de la marche est réalisée par le principe du point nul des moments (ZMP).

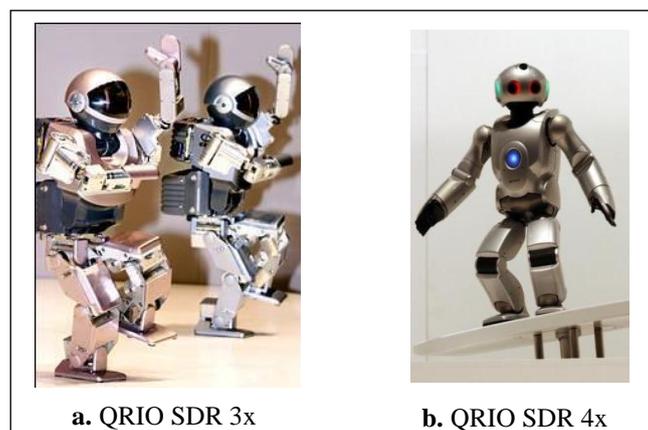


Fig I.41 : robot Sony QRIO



Le SDR (3X ou 4X) emploie deux processeurs de type RISC. Des informations **sont** recueillies par une caméra digitale de type CCD qui aide le robot à renseigner sur son environnement et à identifier jusqu'à 10 objets. Il a 58cm de hauteur et marche avec une vitesse de 2.4km/h.

I.5.6. Toyota motor corporation -Tokyo - (TMC):

TMC, a annoncé un ensemble des projets pour développer des robots collaborateurs conçus pour fonctionner comme aides personnel. Le robot marcheur Toyota_1, figure 1.40, ayant 120 cm de longueur et pèse 35 kg. Il peut utiliser ses mains pour effectuer une large variété de tâches. Comme tous les robots, la compagnie Toyota utilise la même théorie de stabilisation - ZMP- qui se traduit pratiquement par la commande du robot à l'aide des capteurs de position et de forces.



Fig I.42 : Robot marcheur Toyota_1

I.5.7. Le Robot Bip2000, Français.

Le robot bipède BIP2000 développé conjointement entre l'INIRA-Rhone-Aples et le Laboratoire de Mécanique des Solide (LMS) (laboratoires de recherche français) est de taille humaine de 1,80m et un poids de 96 kg, comporte deux pattes, un pelvis et un tronc. Il est pourvu de 15 axes motorisés autorisant une restitution réaliste et efficace des allures et postures de la marche humaine. Cette mobilité permet au robot de marcher sur un sol horizontal ou légèrement incliné, de monter et descendre des escaliers, de tourner, et aussi d'adopter un certain nombre de postures anthropomorphes. Les systèmes de puissance et de commande sont embarqués dans le tronc du bipède. Il est équipé des capteurs internes (position) et externes (force de contact).

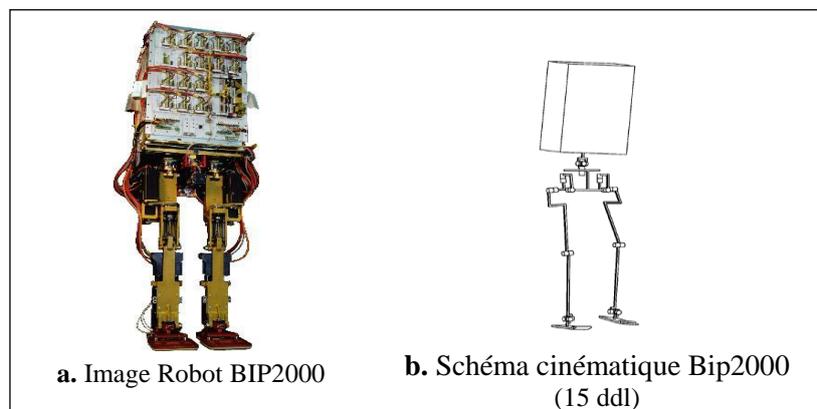


Fig I.43 : Robot Bip2000



Les schémas suivants illustrent l'architecture constitutionnelle du robot BIP2000.

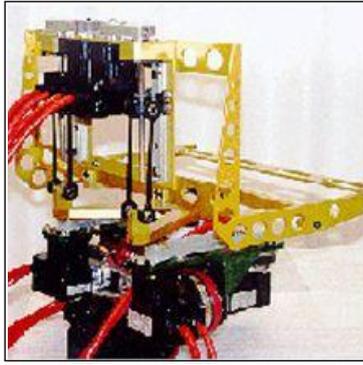


Fig I.44 : Pelvis instrumenté (7 ddl).



Fig I.45 : cheville instrumentée

Ensuite, une géométrie de système de transmission au niveau de la cheville et du genou.

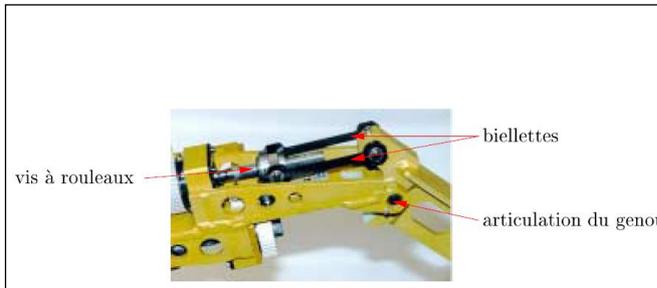


Fig I.46 : Système de transmission des genoux du robot Bip2000, composé d'une vis à rouleaux et de bielles

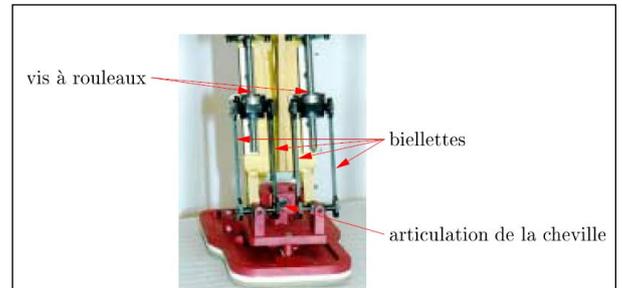


Fig I.47 : Système de transmission des chevilles du robot Bip2000, composé de deux ensembles vis à rouleaux/bielles mis en parallèle.

I.6. Tableau récapitulatif des caractéristiques de quelques robots

Le tableau I.4 présente quelques-uns des prototypes développés depuis une dizaine d'années.



Désignation	Poids (kg)	Taille (cm)	DDL	Vitesse de marche maximale (km/h)	Année
WL12 R III	100	170	8	-	1985
WABIAN	107	166	43	0.7	1995
Spring Flamingo	14*	120	6	2.35	1996
P2	210	180	14	-	1996
Sasuke	2.5	38.5	22	-	1996
P3	130	160	14	2	1997
RABBIT	40*	142.5	4	5.4	1999
Pino (ERATO)	4.5	70	26	-	1999
ASIMO (I)	52	120	26	1.6	2000
H6	55	137	35	-	2000
JOHNNIE	40*	180	17	2.4	2001
HRP-2P	58	154	30	2	2002
SDR-4X	6.5	58	38	1.2	2002
HRP-2	60	160	30	2.5	2003
ASIMO (II)	54	130	34	3	2004
WABIAN-2	64.5	153	41	0.75	2004
Toyota partner robot	35	120	-	-	2004
ASIMO (III)	54	130	34	2.7	2005

Tab -I.4- : Caractéristiques des quelques prototypes bipèdes [11]

I.7 Conclusion.

En robotique, le robot bipède prend une place privilégiée dès la fin du 20^{ième} siècle. De nombreuses recherches sont effectuées et des dizaines de robots bipèdes sont réalisés. A l'heure actuelle, la recherche continue encore, car on cherche des modèles s'inspirant directement de la morphologie du corps humain.

Des difficultés majeures confrontent le sujet de recherche sur ce type de robots. En effet, le robot humanoïde comporte un nombre important de degrés de liberté, c'est-à-dire un nombre d'articulations élevé dans un volume réduit, ce qui présente un système mécanique très encombré où la pose de ses instrumentations sera une contrainte délicate. Un robot robuste attire l'attention au problème de la corrélation entre la dynamique, la commande et la stabilité en temps réel.

La construction d'un robot marcheur anthropomorphe pose de grandes difficultés car, elle fait appel à tous les aspects constitutionnels afin de trouver la solution optimale qui synchronise les réponses adéquates pour assurer sa commande, sa stabilité, son énergie (dynamique), etc.

CHAPITRE II

MODELISATION

GOMETRIQUE



II.1. Introduction.

La conception et la commande des robots nécessitent des modélisations mathématiques. La modélisation géométrique des robots existe depuis dizaines d'années avec un développement particulièrement important dans les années 1980 [57]. Il existe de nombreux outils et formalismes mettant au point la modélisation des robots. Il faut toutefois noter que la grande majorité des ouvrages sur la robotique ne prennent en compte que l'étude de la modélisation des robots sériels, car se sont les plus utilisés et les mieux maîtrisés dans le monde industriel.

Dans ce chapitre, on décrit la constitution des robots, les matrices de transformation homogène et les méthodes de calcul du modèle géométrique direct et inverse. Ensuite, on présente des applications numériques argumentées par des figures de simulation illustrant des mouvements du robot.

Les roboticiens cherchent toujours à concevoir un robot bipède qui peut être capable de faire un maximum des tâches en imitant l'homme, car le modèle idéal est sans doute l'être humain qui reste toujours l'exemple pour la conception d'un modèle bipède plus proche de lui. De ce fait, on s'est inspiré de la marche humaine pour extraire le modèle mathématique qui régit le mouvement, sachant que la locomotion humaine présente des systèmes dynamiques extrêmement complexes, du fait de ([57], [58]) :

- l'aspect de la complexité mécanique structurale ;
- l'aspect de la complexité du système de commande.

Les humains marchent suivant une synchronisation complexe des forces musculaires, des articulations, et des commandes neurales. Pour les robots à deux pattes, la marche est à programmer compte tenu de plusieurs paramètres : nombre d'articulations, loi de mouvement, stabilité, etc. On doit alors commencer à définir la nature de la marche bipède pour pouvoir traiter les autres questions.

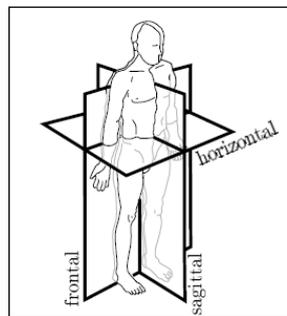


Fig II.1 : Les plans principaux servant à l'étude de la marche

La marche bipède est un mode de locomotion pendant lequel le marcheur possède toujours au moins un pied au sol, ce qui donne naissance à une alternance de phases, phase simple support (PSS) pour laquelle un seul pied est au sol, et phase double support (PDS) pour laquelle deux pieds sont au sol. Un pas de marche se compose donc de ces deux phases. La PSS commence dès que le pied arrière quitte le sol et se termine dans un temps T_s quand ce dernier retrouve le sol. La PDS commence juste à la fin de la PSS et se termine dans un temps T_d juste au commencement de la PSS [16]. En tout, un pas de marche sera défini par les deux phases dans un temps T_p . Egalement, un cycle de marche sera défini par l'alternance des deux pas successifs dans un temps T_c . Cette alternance n'implique pas pour autant qu'un mouvement de marche soit répétitif, et l'on peut même noter qu'il est d'autant moins que le terrain est accidenté.

L'étude bibliographique montre qu'on trouve, aujourd'hui, de nombreuses réalisations de robots bipèdes, chacun possède sa propre structure et sa loi de commande. Comme on l'a signalé, avant la réalisation, il faut passer par le choix du modèle à étudier, puis à sa modélisation.



II.2. Modèle bipède.

L'établissement de la modélisation mathématique d'un robot bipède inclut le développement de schéma cinématique de la structure et le développement des équations géométriques, cinématiques et dynamiques du mouvement. Pour étudier ce système et ses mouvements, des simplifications et suppositions sont exigées.

Dans cette étude, le modèle bipède est considéré comme un mécanisme plan constitué par cinq chaînons rigides formant cinq articulations cylindriques. Le corps supérieur du modèle plan, qui inclut la tête, le bras et le tronc est considéré comme un pendule inversé rigide massif qui se connecte avec la hanche par une articulation cylindrique. Le mouvement d'oscillation des bras et le mouvement entre le thorax et le bassin sont ignorés. Les deux membres inférieurs du robot sont connectés avec la hanche par deux articulation cylindrique; chaque patte se compose de deux chaînons rigidement massifs : jambe et tibias qui sont relié l'un à l'autre par des articulations cylindrique. Les pieds sont considérés sans masse. Les deux genoux se plient seulement dans une direction.

Le mouvement du bipède est supposé dans le plan sagittal défini par l'axe vertical et la direction de locomotion qui est perpendiculaire à cet axe.

Une fois les simplifications établies et le schéma cinématique accepté, la définition des paramètres variables géométriques seront déterminés à travers la modélisation géométrique et par le biais de la méthode de Paul. Les équations de mouvement seront employées comme base pour décrire le mouvement du modèle bipède afin de caractériser ses propriétés constitutionnelles (moteurs, accouplement et réducteurs de vitesses...) et pour le développement de l'algorithme de commande.

II.2.1. Schéma cinématique du robot.

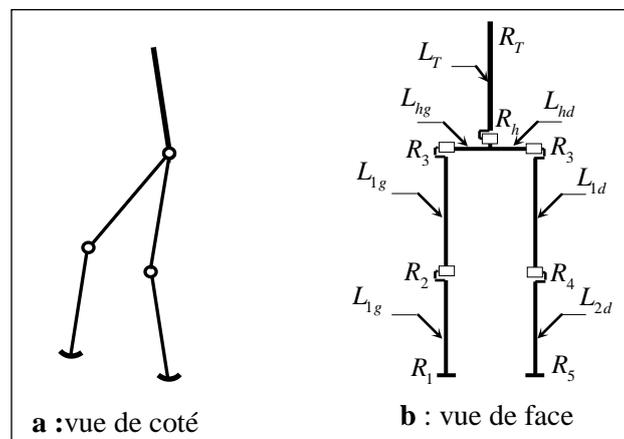


Fig II.2 : Modèle cinématique proposé

Le mouvement du robot est réalisé dans le plan sagittal. On peut admettre l'hypothèse suivante [59] : les liaisons au niveau de la hanche sont des liaisons mortes ; c'est-à-dire, on considère que les articulations au niveau de la hanche se réalisent au même point (plan) ($L_{hg} = L_{hd} = 0$);

II.3. Modélisation géométrique.

II.3.1. Principe de modélisation de Denavit-Hertenberg (DH).

La matrice de transformation définissant le repère R_j dans le repère R_{j-1} est donnée par :

$$T_{j-1,j} = Rot(z, \theta_j) Tran(x, L_j) Trans(z, r_j) Rot(x, \alpha_j)$$

Tel que :



- θ_j : angle entre les axes x_{j-1} et x_j correspondant à une rotation autour de z_{j-1}
- d_j : distance entre les axes x_{j-1} et x_j le long de z_{j-1}
- L_j : distance entre les axes z_{j-1} et z_j le long de x_j
- α_j : angle entre les axes z_{j-1} et z_j correspondant à une rotation autour de x_j

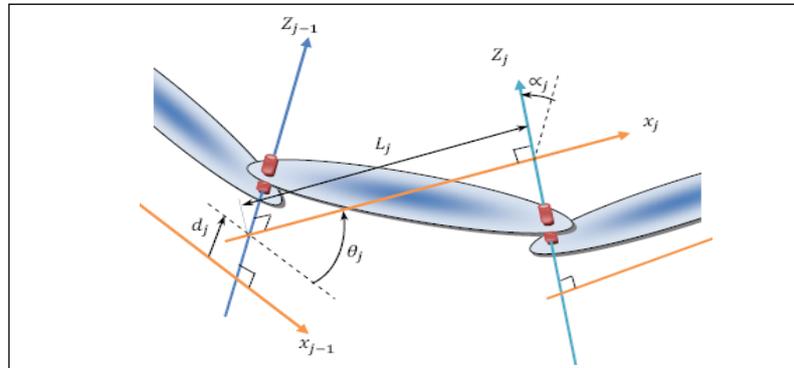


Fig II.3 : Paramétrage proposé par Denavit - Hartenberg

$$\begin{aligned}
 T_{j-1,j} &= \begin{bmatrix} c\theta_j & -s\theta_j & 0 & 0 \\ s\theta_j & c\theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_j \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_j & -s\theta_j & 0 \\ 0 & s\theta_j & c\theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \cdot \sin \theta_i & \sin \alpha_i \cdot \cos \theta_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cdot \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cdot \cos \theta_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{I-01}
 \end{aligned}$$

En se basant sur ce principe de modélisation, trois chemins de modélisation géométrique peuvent être définis.

II.3.2. Premier cheminement.

On fixe un repère au niveau de la hanche, puis on exprime ce repère dans le repère absolu qui est lié au mouvement de la hanche. Ce repère est dépendant de la trajectoire de la hanche.

Nous avons trois sous-systèmes à étudier : patte support, patte en vol et le tronc. On exprime le mouvement des différents paramètres géométriques dans le repère de la hanche, afin de les redéfinir dans le repère absolu. On a un mouvement composé par rapport au repère absolu. (Voir figure II.4).

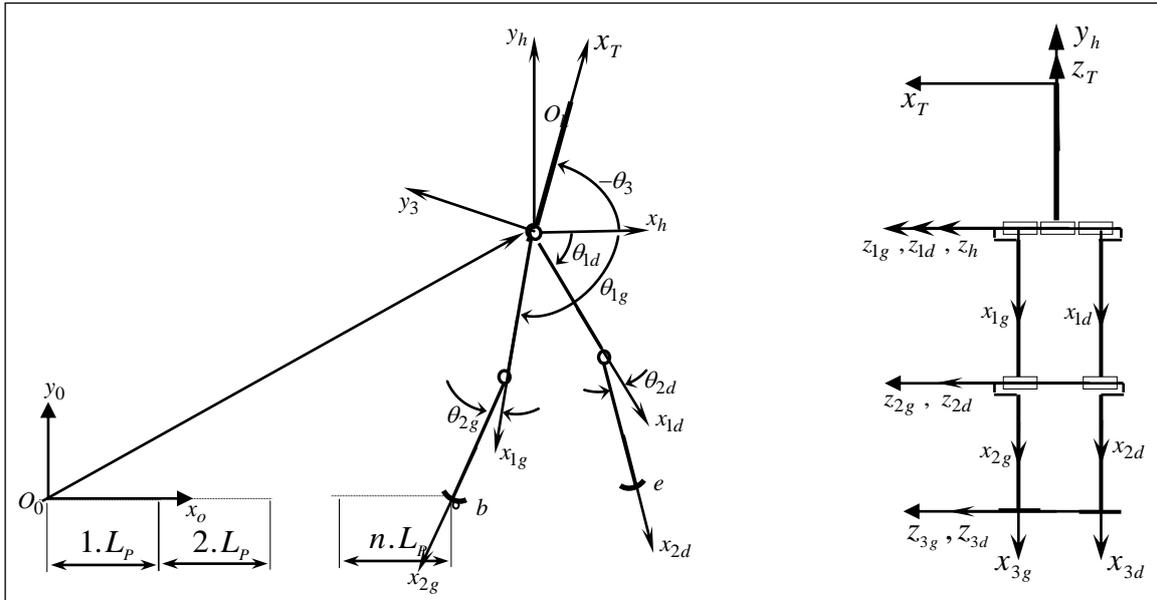


Fig II.4 : paramétrage géométrique (premier chemin)

Dans ce cas, la hanche est considérée comme une plate forme mobile, sa position est donnée directement par sa trajectoire.

II.3.2.1. Les paramètres de D-H

1) Patte support : tableau [II-1]

o_j (repère)	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
o_0	0	0	0	0	0
o_{1g}	0	0	0	θ_{1g}	L_{hg}
o_{2g}	0	0	L_{1g}	θ_{2g}	0
o_{3g}	0	0	L_{2g}	0	0

2) Patte en vol : tableau [II-2]

o_j (repère)	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
o_0	0	0	0	0	0
o_{1d}	0	0	0	θ_{1d}	L_{hd}
o_{2d}	0	0	L_{1d}	θ_{2d}	0
o_{3d}	0	0	L_{2d}	0	0

3) Tronc : tableau [II-3]

o_j (repère)	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
o_0	0	0	0	θ_3	0
o_T	0	0	L_3	0	0



II.3.2.1. Les différentes matrices de transformation.

1. Matrice de passage du repère absolu à celui lié à la hanche :

$${}^0T_h = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & x_h(t) \\ 1 & 1 & 0 & y_h(t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-02})$$

Tel que : $x_{h(t)}$ et $y_{h(t)}$ sont les coordonnées de la hanche, c'est-à-dire la trajectoire qui va suivre la hanche.

2. Patte support :

$${}^HT_{1g} = \begin{bmatrix} C(\beta_{1g}) - S(\beta_{1g}) & 0 & 0 \\ S(\beta_{1g}) & C(\beta_{1g}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_{hg} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-03})$$

$${}^{1g}T_{2g} = \begin{bmatrix} C(\beta_{2g}) - S(\beta_{2g}) & 0 & L_{1g} \\ S(\beta_{2g}) & C(\beta_{2g}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-04})$$

$${}^{2g}T_{3g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_{2g} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-05})$$

3. patte en vol:

$${}^HT_{1d} = \begin{bmatrix} C(\beta_{1d}) - S(\beta_{1d}) & 0 & 0 \\ S(\beta_{1d}) & C(\beta_{1d}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_{hd} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-04})$$

$${}^{1d}T_{2d} = \begin{bmatrix} C(\beta_{2d}) - S(\beta_{2d}) & 0 & L_{1d} \\ S(\beta_{2d}) & C(\beta_{2d}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-05})$$

$${}^{2d}T_{3d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_{2d} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-06})$$



4. Tronc :

$${}^h T_T = \begin{bmatrix} C(\beta_i) & -S(\beta_i) & 0 & 0 \\ S(\beta_i) & C(\beta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{II-07}$$

$${}^t T_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_T \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{II-09}$$

II.3.3. Deuxième cheminement

On procède au calcul à partir du pied support, dans ce cas, on a deux mécanismes : le premier mécanisme est représenté par les deux pattes, tel que, le contact pied-sol est considéré comme une liaison cylindrique, donc le sous-système représente une chaîne ouverte simple. Le deuxième mécanisme est constitué de la patte support et du tronc.

Par la similitude géométrique, on va construire les matrices de transformation entre repères à partir du repère attaché au pied support. Ces repères seront exprimés dans le repère absolu (O, x₀, y₀).

Pour la construction de ces matrices, on admet l'hypothèse suivante (voir figure II.3) : La rotation due au moteur de la hanche de la patte support sera substitué théoriquement par la rotation de la patte en vol.

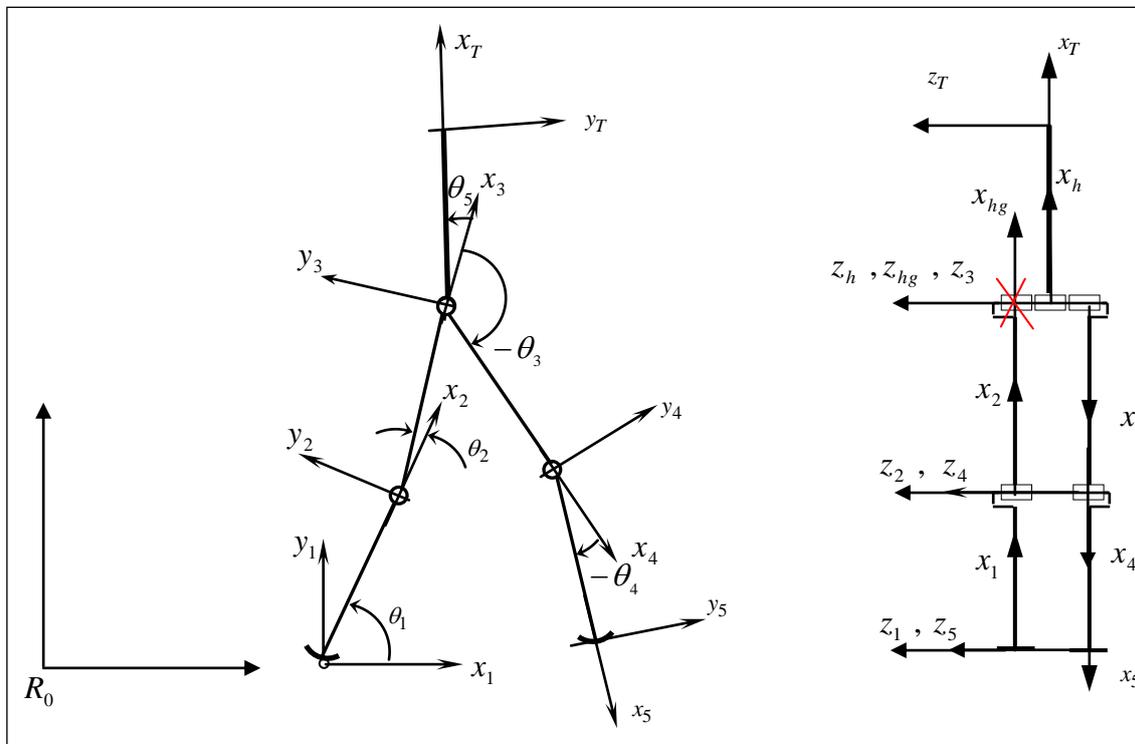


Fig II.5 : paramétrage géométrique(deuxième chemin)



On formule aisément les différentes matrices de transformation entre repères. On commence le calcul à partir du pied support.

On a la relation vectorielle suivante:

$$\overrightarrow{O_0O_3} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_3} \quad (\text{II-12-a})$$

$\overrightarrow{O_0O_1}$: est la distance parcourue par le robot, sachant que par hypothèse le mouvement est plan et est dans le plans sagittal, donc :

$$\overrightarrow{O_0O_1} = n.L_p \quad (\text{II-12-b})$$

Où L_p : est la longueur du pas.

II.3.3.1. Paramètres de D-H

1. Premier mécanisme : tableau [II-4]

Il comprend la patte gauche, la hanche et la patte droite.

j	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
o_0	0	0	0	0	0
o_1	0	0	$n.L_p$	θ_1	0
o_2	0	0	L_1	θ_2	0
o_3	0	0	L_2	θ_3	L_h
o_4	0	0	L_2	θ_4	0
o_5	0	0	L_1	0	0

2. Deuxième mécanisme : tab [II-5]

Il comprend la patte gauche et le tronc.

j	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
o_0	0	0	0	0	0
o_1	0	0	$n.L_p$	θ_1	0
o_2	0	0	L_1	θ_2	0
o_3	0	0	L_2	θ_t	L_{hg}
o_t	0	0	L_t	0	0

II.3.3.2. Les différentes matrices de transformation.

• Premier mécanisme :

Les matrices de transformation homogène du premier mécanisme sont celles qui expriment la transformation entre les repères à partir du repère absolu au repère attaché au pied de vol (R_5).

a. Matrice de passage du repère absolu à celui lié au pied support :

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} C(\theta_1) & -S(\theta_1) & 0 & n.L_p \\ S(\theta_1) & C(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-13})$$



b. Matrice de passage du repère de pied support à celui du genou de la patte support :

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} C(\theta_2) - S(\theta_2) & 0 & L_1 \\ S(\theta_2) & C(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-14})$$

c. Matrice de passage du repère du genou à celui de la hanche de la patte support

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} C(\theta_3) - S(\theta_3) & 0 & L_2 \\ S(\theta_3) & C(\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-15})$$

d. Matrice de passage du repère de la hanche de la patte oscillante à celui du genou de la patte en vol

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} C(\theta_4) - S(\theta_4) & 0 & L_2 \\ S(\theta_4) & C(\theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-16})$$

e. Matrice de passage du repère du genou en vol à celui du pied en vol:

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-17})$$

- **Deuxième mécanisme :**

Les matrices de transformation du deuxième mécanisme sont celles qui définissent le passage à partir du repère absolu au repère attaché au Tronc (R_T).

a. Matrice de passage du repère absolu à celui du pied support:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} C(\theta_1) - S(\theta_1) & 0 & n.L_p \\ S(\theta_1) & C(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-18})$$

b. Matrice de passage du repère du pied support à celui du genou:

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} C(\theta_2) - S(\theta_2) & 0 & L_1 \\ S(\theta_2) & C(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-19})$$



c. Matrice de passage du repère du genou à celui du côté hanche de la patte support:

$${}^2T_h = \begin{bmatrix} C(\theta_5) & -S(\theta_5) & 0 & L_2 \\ S(\theta_5) & C(\theta_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-20})$$

d. Matrice de passage du repère de la hanche au repère du tronc:

$${}^3T_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_T \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-21})$$

II.3.4. Relations géométriques entre les deux formulations.

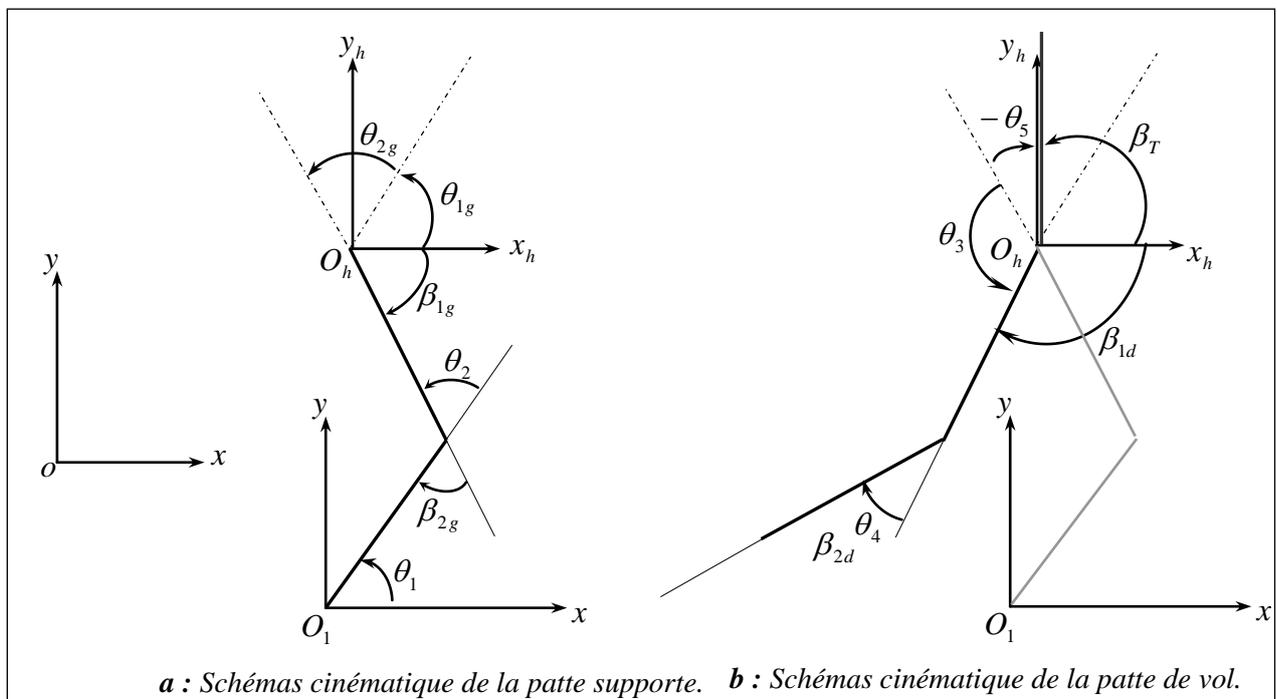


Fig II.6 : relation géométrique entre 1^{ière} et 2^{ième} cheminement de modélisation

D'après la figure II-6, on a :

$$\begin{aligned} \beta_{1g} &= -180 + (\theta_1 + \theta_2) \\ \beta_{2g} &= \theta_2 \\ \beta_{1d} &= -\theta_3 + (\theta_1 + \theta_2) \\ \beta_{2d} &= \theta_4 \end{aligned} \quad (\text{II-22})$$

Si l'on suppose que le tronc reste dans la position verticale, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \beta_T &= \frac{\pi}{2} \\ \theta_5 &= (\theta_1 + \theta_2) - \beta_T \end{aligned} \quad (\text{II-23})$$



II.3.5. Troisième cheminement.

Dans cette modélisation on prend en compte la rotation de la liaison virtuelle liant le repère absolu avec le repère attaché à la hanche. On applique le principe de la modélisation de D-H de façon à ce que chaque mécanisme soit exprimé indépendamment des autres (patte support, patte en vol et tronc), figure II.7.

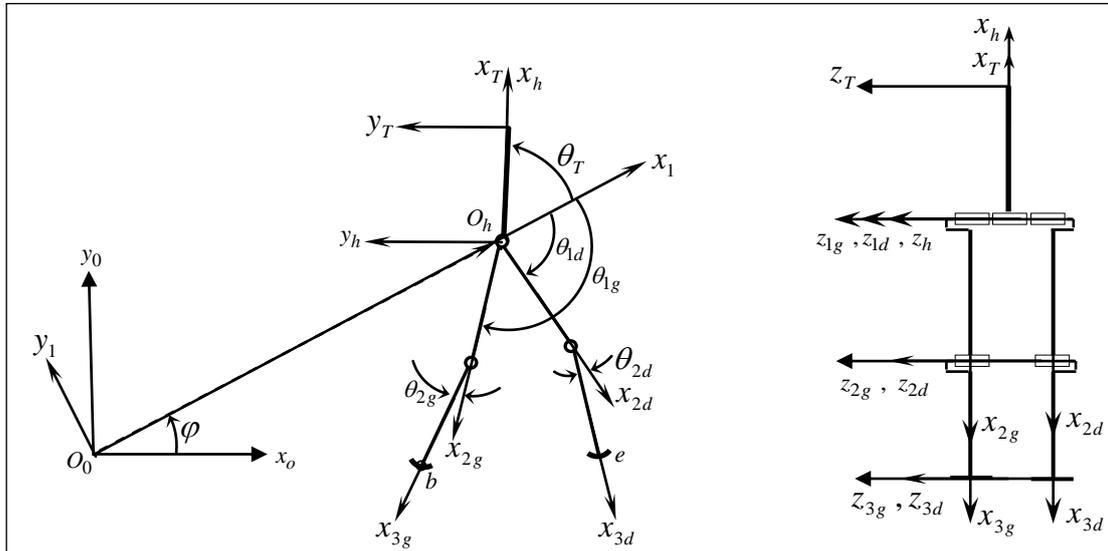


Fig II.7 : paramétrage géométrique(troisième chemin).

II.3.5.1. Paramètres de D-H

a. pied au sol : tab [II-6]

o_j (repère)	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
o_0	0	0	0	φ	0
o_{1g}	0	0	tr	θ_{1g}	0
o_{2g}	0	0	L_{1g}	θ_{2g}	0
o_{3g}	0	0	L_{2g}	0	0

b. pied en vol : tab [II-7]

o_j (repère)	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
o_0	0	0	0	φ	0
o_{1d}	0	0	tr	θ_{1d}	L_{hd}
o_{2d}	0	0	L_{1d}	θ_{2d}	0
o_{3d}	0	0	L_{2d}	0	0

c. tronc : tab [II-8]

o_j (repère)	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
o_0	0	0	0	φ	0
o_h	0	0	tr	θ_T	0
o_T			L_T	0	



II.3.5.2. Les différentes matrices de transformation.

1. Patte support :

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} C(\varphi) & -S(\varphi) & 0 & 0 \\ S(\varphi) & C(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-24})$$

$${}^1T_{1g} = \begin{bmatrix} C(\theta_{1g}) & -S(\theta_{1g}) & 0 & tr \\ S(\theta_{1g}) & C(\theta_{1g}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-25})$$

$${}^{1g}T_{2g} = \begin{bmatrix} C(\theta_{2g}) & -S(\theta_{2g}) & 0 & L_{1g} \\ S(\theta_{2g}) & C(\theta_{2g}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-26})$$

$${}^{2g}T_{3g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_{2g} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-27})$$

2. patte en vol:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} C(\varphi) & -S(\varphi) & 0 & 0 \\ S(\varphi) & C(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-28})$$

$${}^1T_{1d} = \begin{bmatrix} C(\theta_{1d}) & -S(\theta_{1d}) & 0 & tr \\ S(\theta_{1d}) & C(\theta_{1d}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-29})$$

$${}^{1d}T_{2d} = \begin{bmatrix} C(\theta_{2d}) & -S(\theta_{2d}) & 0 & L_{1d} \\ S(\theta_{2d}) & C(\theta_{2d}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-30})$$

$${}^{2d}T_{3d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_{2d} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-31})$$



3. Tronc :

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} C(\varphi) & -S(\varphi) & 0 & 0 \\ S(\varphi) & C(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{II-32}$$

$${}^1T_H = \begin{bmatrix} C(\theta_T) & -S(\theta_T) & 0 & tr \\ S(\theta_T) & C(\theta_T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{II-33}$$

$${}^H T_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_T \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{II-34}$$

II.3.6. Relations géométriques entre le premier et le troisième chemin de modélisation.

D'après la figure II.8, on peut tirer les relations géométriques entre le premier et troisième cheminement de la modélisation comme suit :

$$\theta_2 = \theta_{2g}$$

$$\theta_4 = \theta_{2d}$$

$$\theta_1 = \theta_{1g} + \varphi - \theta_{2g}$$

$$\theta_5 = -180 - \theta_T - \theta_{1g}$$

$$\theta_3 = 180 + \theta_{1g} + \theta_{1d} + 2\theta_T$$

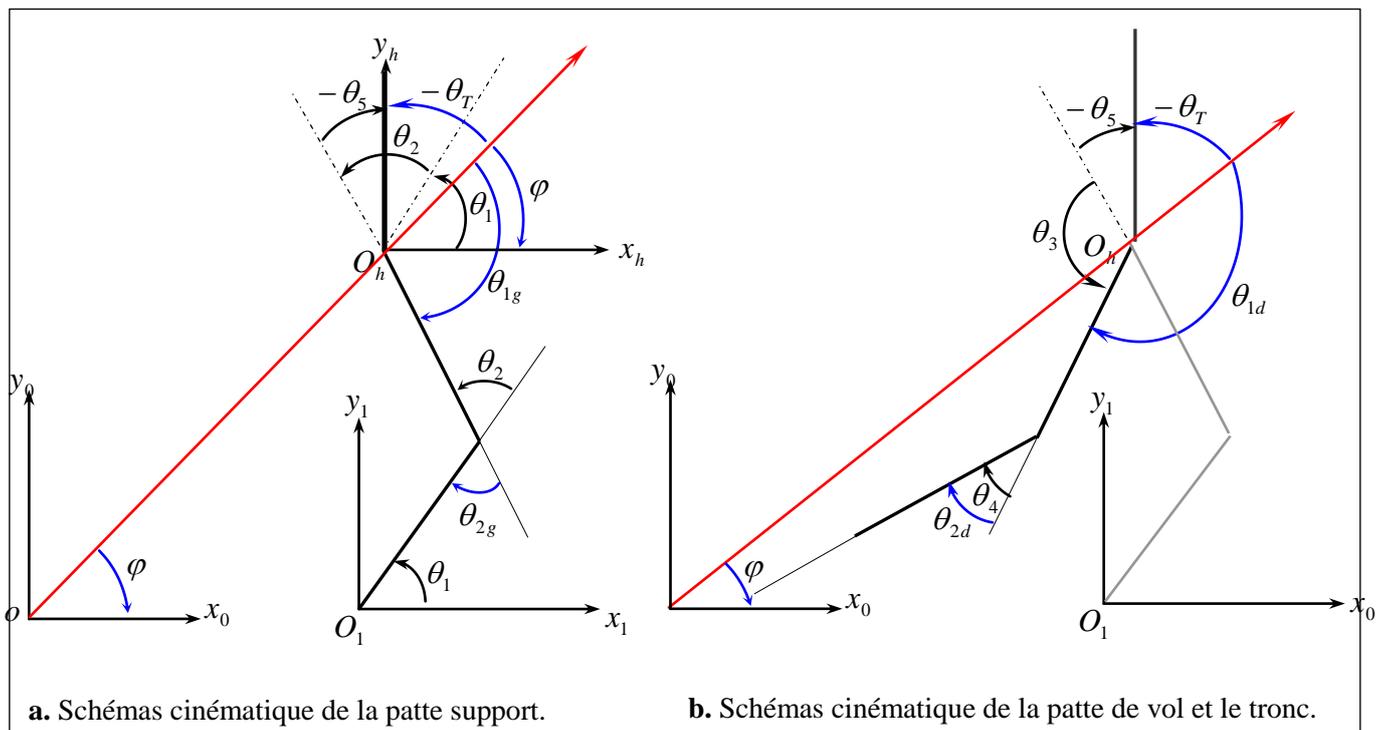


Fig II.8 : relation géométrique entre 1^{ier} et 3^{ième} cheminement de modélisation



II.4. Modèle géométrique direct (MGD).

Le modèle géométrique direct (MGD) est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal, c'est à dire les coordonnées opérationnelles du robot, en fonction de ses coordonnées articulaires. Dans le cas d'une chaîne ouverte simple, il peut être représenté par la matrice de passage 0T_n :

$${}^0T_n = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n) \quad (\text{II-20})$$

Le MGD du robot peut aussi être représenté par la relation :

$$X = F(q)$$

q : Vecteur des variables articulaires telles que :

$$q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$$

Les coordonnées opérationnelles sont définies par :

$$X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$$

Et aussi peut être représenté par les éléments de la matrice 0T_n :

$$X = [P_x \ P_y \ P_z \ s_x \ s_y \ s_z \ n_x \ n_y \ n_z \ a_x \ a_y \ a_z]$$

II.4.1. Application au bipède.

Nous choisissons le premier cheminement de la modélisation pour l'application du MGD sur le robot.

a)- Pour la Hanche:

A partir des relations (II-13,14 et 15), on écrit la matrice de transformation définissant la hanche (R_3) dans le repère absolu (R_0) :

$${}^0T_h = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3.$$

$${}^0T_h = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & n.S_L + L_{g2} \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_{g1} \cos \theta_1 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & L_{g2} \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_{g1} \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-21})$$

En définitif, à chaque position articulaire de la patte support ($\theta_1 + \theta_2$), la position de la hanche sera donnée par le vecteur colonne suivant :

$${}^0T_h[1,4] = \begin{bmatrix} n.S_L + L_{g2} \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_{g1} \cos \theta_1 \\ L_{g2} \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_{g1} \sin \theta_1 \\ L_h \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b)- Pour le pied droit (en vol) :

Il possède les mêmes matrices de transformation mais en tenant compte du changement des paramètres suivant :

$$L_{hg} \equiv L_{hd} \approx 0, \quad L_{g1} \equiv L_{d1} = L_1, \quad L_{g2} \equiv L_{d2} = L_2$$



$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & L_2 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & L_2 \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & L_1 \cos \theta_4 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 & 0 & L_1 \sin \theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

La matrice de transformation du pied oscillant exprimé dans le repère R_3 est :

$${}^3T_5 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3 + \theta_4) & -\sin(\theta_3 + \theta_4) & 0 & L_2 \cos(\theta_3 + \theta_4) + L_1 \cos \theta_3 \\ \sin(\theta_3 + \theta_4) & \cos(\theta_3 + \theta_4) & 0 & L_2 \sin(\theta_3 + \theta_4) + L_1 \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_{hd} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-22})$$

Pour obtenir le MGD du pied de vol exprimé dans le repère absolu, on doit multiplier l'égalité (II-23) par les matrices de transformations homogènes ${}^0T_1, {}^1T_2, {}^2T_3$

c)- Pour le tronc:

De même que pour la patte oscillante, on veut exprimer le tronc dans le repère attaché au pied support, donc, il dépend des paramètres (θ_1 et θ_2).

A partir des relations (II-13, 14,15 et 18), on écrit la matrice de transformation définissant le tronc (R_T) dans le repère absolu (R_0).

II.4.2. Récapitulation des calculs de MGD des deux cheminements (1^{ière} et 2^{ième}).

A. Vecteur position de la hanche du MGD :

Tab II-9

	A travers le repère R_H	A travers le repère R_1
P_{hx}	$x_h(t)$	$S_L + L_{g2}C(\theta_1 + \theta_2) + L_{g1}C\theta_1$
P_{hy}	$y_h(t)$	$L_{g2}S(\theta_1 + \theta_2) + L_{g1}S\theta_1$
P_{hz}	0	0

B. Vecteur position du pied en vole du MGD :

Tab II-10

	A travers le repère R_H	A travers le repère R_1
P_{Px}	$x_h(t) + L_2C(\beta_{1d}) + L_1C(\beta_{1d} + \beta_{2d})$	$n.S_L + L_1(C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + C\theta_1) + L_2(C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + C(\theta_1 + \theta_2))$
P_{Py}	$y_h(t) + L_2S(\beta_{1d}) + L_1S(\beta_{1d} + \beta_{2d})$	$L_1(S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + S\theta_1) + L_2(S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + S(\theta_1 + \theta_2))$



P_{pz}	0	0
----------	---	---

C. Vecteur position du tronc du MGD :

Tab II-11

	A travers le repère R_H	A travers le repère R_1
P_{tx}	$x_h(t) + L_T C(\beta_T)$	$n.L_p + L_1 C\theta_1 + L_2 C(\theta_1 + \theta_2) + L_T C(\theta_5)$
P_{ty}	$y_h(t) + L_T S(\beta_T)$	$L_1 S\theta_1 + L_2 S(\theta_1 + \theta_2) + L_T S(\theta_5)$
P_{tz}	0	0

II.5. Modèle géométrique inverse (MGI).

Le modèle géométrique inverse (MGI) d'un robot permet de calculer les coordonnées articulaires correspondantes à une situation donnée de l'organe terminal.

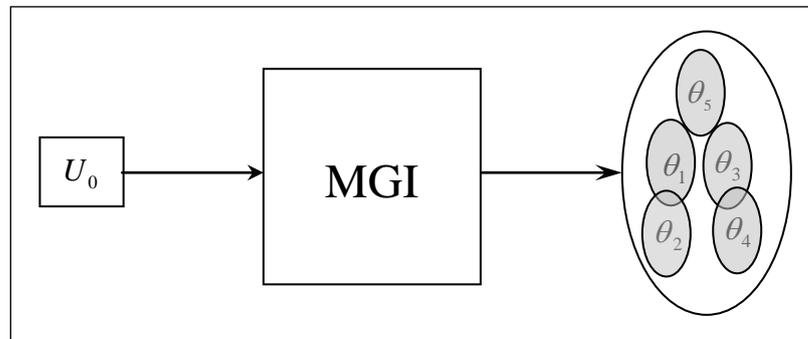


Fig. II.9 : Passage des coordonnées opérationnelles aux coordonnées articulaires.

Il existe différentes méthodes pour le calcul du MGI :

- ☞ la méthode de Paul qui traite séparément chaque cas particulier et convient pour la plupart des robots industriels ;
- ☞ La méthode de Pieper qui permet de résoudre le problème pour les robots à six degrés de liberté possédant trois articulations rotoïdes d'axe concourants ou trois articulations prismatiques ;
- ☞ La méthode générale de Raghavon et Roth, donnant la solution générale des robots à six articulations à partir d'un polynôme de degré au plus égal à 16.

Le MGI est utilisé pour générer les valeurs de $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ et θ_5 , il est défini par la formule :

$$[q] = f^{-1}[X].$$

II.5.1. La méthode de Paul.

Soit un mécanisme du robot dont la matrice de transformation de l'organe terminal est donnée par :

$${}^0T_n = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n)$$

Soit U_0 la situation désirée, telle que :



$$U_0 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & 0 & p_x \\ s_y & n_y & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II-23})$$

On cherche à résoudre le système suivant :

$$U_0 = {}^0 T_1(q_1) {}^1 T_2(q_2) \dots {}^{n-1} T_n(q_n) \quad (\text{II-24})$$

Pour trouver les solutions de l'équation (II-24), Paul a proposé une méthode qui consiste à multiplier successivement les deux membres de l'équation (II-24) par les matrices ${}^i T_{j-1}$ pour j variant de 1 à $n-1$, opération qui permet d'isoler et d'identifier l'une après l'autre les variables articulaires que l'on cherche.

II.5.2. Application au robot.

II.5.2.1. MGI du premier chemin de modélisation géométrique.

Patte supporte (patte gauche)

En identifiant les deux matrices suivantes : l'une qui définit les positions et les orientations de la position désirée du pied support (organe terminal) et l'autre obtenue à travers le calcul du MGD.

$$\begin{bmatrix} s_x & n_x & 0 & p_{Ps,x} \\ s_y & n_y & 0 & p_{Ps,y} \\ 0 & 0 & 1 & p_{Ps,z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(\beta_{1g} + \theta_{2g}) - S(\beta_{1g} + \beta_{2g}) & 0 & L_{g2} C(\beta_{1g} + \beta_{2g}) + L_{g1} C(\beta_{1g}) + x_h(t) \\ S(\beta_{1g} + \beta_{2g}) & C(\beta_{1g} + \beta_{2g}) & 0 & L_{g2} S(\beta_{1g} + \beta_{2g}) + L_{g1} S(\beta_{1g}) + y_h(t) \\ 0 & 0 & 1 & L_{hg} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par le biais de la méthode de Paul, après identification on obtient :

$$C(\theta_2) = \frac{\left(\left(\frac{L_p}{2} - P_{h,x} \right)^2 + P_{h,y}^2 + L_1^2 + L_2^2 \right)}{2L_1 L_2}$$

$$\theta_2 = \text{atan2} \left(-\sqrt{1 - (C(\theta_2))^2}, C(\theta_2) \right).$$

$$S(\theta_1) = \frac{\left(-K_2 \left(\frac{L_p}{2} - P_{h,x} \right) - K_1 P_{h,y} \right)}{K_1^2 + K_2^2} ; \quad C(\theta_1) = \frac{\left(K_1 \left(\frac{L_p}{2} - P_{h,x} \right) - K_2 P_{h,y} \right)}{K_1^2 + K_2^2}$$

Avec : $K_1 = L_1 + L_2 C(\theta_2)$ et $K_2 = L_2 S(\theta_2)$.

$$\theta_1 = \text{atan2} (S(\theta_1), C(\theta_1))$$

Patte de vol (patte droite)

Soit l'identification suivante (la même que celle de la patte support) :



$$\begin{bmatrix} s_x & n_x & 0 & p_{p_v,x} \\ s_y & n_y & 0 & p_{p_v,y} \\ 0 & 0 & 1 & p_{p_v,z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(\beta_{1d} + \theta_{2d}) - S(\beta_{1d} + \beta_{2d}) & 0 & L_{d2} C(\beta_{1d} + \beta_{2d}) + L_{d1} C(\beta_{1d}) + x_h(t) \\ S(\beta_{1d} + \beta_{2d}) & C(\beta_{1d} + \beta_{2d}) & 0 & L_{d2} S(\beta_{1d} + \beta_{2d}) + L_{d1} S(\beta_{1d}) + y_h(t) \\ 0 & 0 & 1 & L_{hd} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par le biais de la méthode de Paul et après identification, on obtient :

$$C(\theta_{2d}) = \frac{((P_{p,x} - P_{h,x})^2 + (P_{p,y} - P_{h,y})^2 - L_1^2 - L_2^2)}{2L_1 L_2}$$

$$\theta_{2d} = \text{atan2} \left(-\sqrt{1 - (C(\theta_{2d}))^2}, C(\theta_{2d}) \right).$$

$$S(\theta_{1d}) = \frac{(-K_3(P_{p,y} - P_{h,y}) - K_4(P_{p,x} - P_{h,x}))}{K_3^2 + K_4^2}; \quad C(\theta_{1d}) = \frac{(K_4(P_{p,y} - P_{h,y}) + K_3(P_{p,x} - P_{h,x}))}{K_3^2 + K_4^2}$$

$$\text{Avec : } K_3 = L_1 + L_2 C(\theta_{2d}) \quad \text{et} \quad K_4 = L_2 S(\theta_{2d}).$$

$$\theta_{1d} = \text{atan2} (S(\theta_{1d}), C(\theta_{1d}))$$

Pour cela, il faut définir la fonction atan2, qui permet d'associer l'unique angle $-\pi \leq \theta_i \leq \pi$ tel que $\theta_i = \text{atan2}(\sin \theta_i, \cos \theta_i)$.

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \text{atan}(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \text{sign}(y)(\pi - |\text{atan}(y/x)|) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \\ \text{sign}(y)\pi/2 & \text{si } x = 0, y \neq 0 \end{cases}$$

On peut aussi définir cette fonction par la relation suivante :

$$\text{atan2}(y, x) = 2 \text{atan} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right)$$

Tronc

Le tronc est supposé maintenu en position verticale, donc :

$$\theta_t = \frac{\pi}{2}.$$

II.5.2.2. MGI du deuxième cheminement de modélisation géométrique.

a)- pour la hanche :

Soit l'identification suivante :

$$\begin{bmatrix} s_x & n_x & 0 & p_{h,x} \\ s_y & n_y & 0 & p_{h,y} \\ 0 & 0 & 1 & p_{h,z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) - \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & L_{g2} \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_{g1} \cos \theta_1 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & L_{g2} \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_{g1} \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & L_{hg} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par identification des éléments (3-4) des deux membres, on obtient directement :

$$L_{hg} = P_z$$



L'identification des éléments (1-4) et (2-4) conduit aux solutions suivantes :

$$\theta_2 = \text{atan2} \left[\pm \sqrt{1 - (C(\theta_2))^2}, C(\theta_2) \right] \quad (\text{II-25})$$

$$\theta_1 = \text{atan2} [S(\theta_1), C(\theta_1)]$$

Avec :

$$C(\theta_2) = \frac{P_{h,x}^2 + P_{h,y}^2 - (L_{g1})^2 - (L_{g2})^2}{2 \cdot L_{g1} \cdot L_{g2}}; \quad S(\theta_1) = \frac{B1 \cdot P_{h,y} - B2 \cdot P_{h,x}}{(B1)^2 + (B2)^2}; \quad C(\theta_1) = \frac{B1 \cdot P_{hh,x} + B2 \cdot P_{h,y}}{(B1)^2 + (B2)^2}$$

$$B1 = L_{g1} + L_{g2} \cdot C(\theta_2); \quad B2 = L_{g2} \cdot S(\theta_2)$$

D'après la simulation, on adopte les solutions suivantes :

$$\theta_2 = \text{atan2} \left[+ \sqrt{1 - (C(\theta_2))^2}, C(\theta_2) \right]$$

$$\theta_1 = \text{atan2} [S(\theta_1), C(\theta_1)]$$

b)- Pied en vol :

Cherchant les solutions θ_3 et θ_4 :

Pour cela, nous exprimons les coordonnées du pied en vol dans le repère attaché au pied support.

On a vu que le système possède quatre variables articulaires ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et θ_4). Les deux premières variables (θ_1, θ_2) sont déjà calculées au MGI de la hanche.

D'après le MGD du pied oscillant, on a calculé le produit matriciel suivant :

$${}^0T_1(\theta_1) * {}^1T_2(\theta_2) * {}^2T_{hd} * {}^{hd}T_3(\theta_3) * {}^3T_4(\theta_4)$$

Si la trajectoire à suivre par le pied de vol est prédéfinie, les coordonnées de position de ce dernier seront alors connues. Soit $\{P_p\}$ son vecteur position défini par :

$$\{P_p\} = \begin{Bmatrix} P_{p,x} \\ P_{p,y} \\ P_{p,z} \end{Bmatrix}$$

Avec :

$$P_{p,x} = L_{d2} [C\theta_{12}(C\theta_4 C\theta_3 - S\theta_4 S\theta_3) + S\theta_{12}(C\theta_4 S\theta_3 - S\theta_4 C\theta_3)] + L_{d1} [C\theta_{12} C\theta_3 - S\theta_{12} S\theta_3] + P_{h,x} \quad (\text{II-26-a})$$

$$P_{p,y} = L_{d2} [S\theta_{12}(C\theta_4 C\theta_3 - S\theta_4 S\theta_3) + C\theta_{12}(C\theta_4 S\theta_3 + S\theta_4 C\theta_3)] + L_{d1} [S\theta_{12} C\theta_3 + C\theta_{12} S\theta_3] + P_{h,y} \quad (\text{II-26-b})$$

$$P_{p,z} = L_h \quad (\text{II-26-c})$$

Avec : L_{d1} =longueur de la jambe en vol.
 L_{d2} =longueur du Tibias en vol.

En multipliant les équations (I-26-a) et (I-26-b) par $S\theta_3$ et $C\theta_3$ respectivement, on trouve :

$$(L_{d2} S\theta_{12}) S\theta_4 - (L_{d2} C\theta_{12}) C\theta_4 = (\Delta P_x) C\theta_3 + (\Delta P_y) S\theta_3 + (L_{d1} C\theta_{12}) \quad (\text{II-27-a})$$



$$(L_{d2}S\theta_{12})C\theta_4 + (L_{d2}C\theta_{12})S\theta_4 = (\Delta P_X)S\theta_3 - (\Delta P_Y)C\theta_3 - (L_{d1}S\theta_{12}) \quad (\text{II-27-b})$$

Avec :

$$\Delta P_X = P_{h,x} - P_{p,x}$$

$$\Delta P_Y = P_{h,y} - P_{p,y}$$

En élevant au carré et en additionnant les deux équations membre à membre, on trouve une équation en θ_3 .

$$B_1S\theta_3 + B_2C\theta_3 = B_3 \quad (\text{II-28})$$

Avec :

$$B_1 = 2(L_{d1}C\theta_{12}\Delta P_Y - L_{d1}S\theta_{12}\Delta P_X)$$

$$B_2 = 2(L_{d1}C\theta_{12}\Delta P_X + L_{d1}S\theta_{12}\Delta P_Y)$$

$$B_3 = (L_{d2} - L_{d1})^2 (C\theta_{12})^2 + (L_{d2} - L_{d1})^2 (S\theta_{12})^2 - (\Delta P_X)^2 - (\Delta P_Y)^2$$

Nous avons quatre solutions appropriées à l'équation (II-28) qui se présentent :

1. si $B_1 = 0$, $B_2 \neq 0$ et $B_3 \neq 0$

$$C\theta_3 = \frac{B_3}{B_2}$$

$$\Rightarrow \theta_3 = \text{atan2}\left(\pm \sqrt{1 - (C\theta_3)^2}, C\theta_3\right)$$

$$\Rightarrow \theta_3 = \text{atan2}\left(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{B_3}{B_2}\right)^2}, \frac{B_3}{B_2}\right)$$

2. si $B_2 = 0$, $B_1 \neq 0$ et $B_3 \neq 0$

$$S\theta_3 = \frac{B_3}{B_1}$$

$$\Rightarrow \theta_3 = \text{atan2}\left(S\theta_3, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{B_3}{B_1}\right)^2}\right)$$

3. si $B_2 \neq 0$, $B_1 \neq 0$ et $B_3 = 0$

$$\theta_3 = \text{atan2}(-B_2, B_1)$$

$$\theta_3' = \theta_3 + 180^\circ$$

Remarque :

Si $B_1 = B_2 \Rightarrow$ la configuration du robot est singulière.

4. si $B_2 \neq 0$, $B_1 \neq 0$ et $B_3 \neq 0$

On écrit :

$$B_2C\theta_3 = B_3 - B_1S\theta_3$$

En élevant au carré, on aura :



$$B_2^2 (C\theta_3)^2 = B_2^2 (1 - (S\theta_3)^2) = B_3^2 - 2B_3 B_1 S\theta_3 + B_1^2 (S\theta_3)^2$$

C'est une équation qui peut être considérée du second ordre en $S\theta_3$.

Un raisonnement similaire conduit aussi à une équation du second ordre en $C\theta_3$.

La résolution de ces deux équations donne :

$$\begin{cases} S\theta_3 = \frac{B_1 B_3 + \varepsilon B_2 \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - B_3^2}}{B_1^2 + B_2^2} \\ C\theta_3 = \frac{B_2 B_3 - \varepsilon B_1 \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - B_3^2}}{B_1^2 + B_2^2} \end{cases} \quad (\text{II-29})$$

Avec :

$$\varepsilon = \pm 1$$

Le système a deux solutions si : $B_1^2 + B_2^2 \geq B_3^2$. Dans ce cas, on aura :

$$\theta_3 = \text{atan2}(S\theta_3, C\theta_3) \quad (\text{II-30})$$

La variable θ_3 étant connue, on peut déterminer θ_4 en résolvant le système d'équations suivant, tel que :

$$D_1 S\theta_4 + D_2 C\theta_4 = D_3 \quad (\text{II-31-a})$$

$$E_1 S\theta_4 + E_2 C\theta_4 = E_3 \quad (\text{II-31-b})$$

Avec :

$$\begin{aligned} D_1 &= L_{d2} S\theta_{12}, \quad D_2 = -L_{d2} C\theta_{12}; \\ E_1 &= L_{d2} C\theta_{12}, \quad E_2 = L_{d2} S\theta_{12}; \\ D_3 &= (\Delta P_X) C\theta_3 + (\Delta P_Y) S\theta_3 + (L_{d1} C\theta_{12}) \\ E_3 &= (\Delta P_X) S\theta_3 - (\Delta P_Y) C\theta_3 - (L_{d1} S\theta_{12}) \end{aligned}$$

En multipliant l'équation (II-31-a) par E_2 et l'équation (II-31-b) par D_2 , on obtient :

$$S\theta_4 = \frac{D_3 E_2 - E_3 D_2}{D_1 E_2 - E_1 D_2} \quad \text{si} \quad D_1 E_2 - E_1 D_2 \neq 0$$

$$\text{avec :} \quad D_3 E_2 - E_3 D_2 = L_{d2} (\Delta P_X (S\theta_{12} C\theta_3 + C\theta_{12} S\theta_3) + \Delta P_Y (S\theta_{12} S\theta_3 - C\theta_{12} C\theta_3))$$

$$D_1 E_2 - E_1 D_2 = L_{d2}^2$$

En multipliant maintenant les deux équations (I-31-a) et (I-31-b) par E_1 et D_1 respectivement, on trouve :

$$C\theta_4 = \frac{E_3 D_1 - D_3 E_1}{D_1 E_2 - E_1 D_2}$$

Avec :

$$E_3 D_1 - D_3 E_1 = -L_{d1} L_{d2} - L_{d2} \cdot \Delta P_Y (S\theta_{12} C\theta_3 + C\theta_{12} S\theta_3) + L_{d2} \cdot \Delta P_X (S\theta_{12} S\theta_3 + C\theta_{12} C\theta_3)$$

Finalement :

$$\theta_4 = \text{atan2}(S\theta_4, C\theta_4) \quad (\text{II-32})$$



La condition $D_1 E_2 - E_1 D_2 \neq 0$ signifie que les deux équations du système (II-31) sont indépendantes. Dans le cas contraire, on choisit une des deux équations et on la résout.

Dans le cas fréquent où D_2 et E_1 sont nuls, on se ramène à un système d'équations :

$$\begin{cases} D_1 S\theta_4 = D_3 \\ E_2 C\theta_4 = E_3 \end{cases} \Rightarrow \theta_4 = \text{atan2}\left(\frac{D_3}{D_1}, \frac{E_3}{E_2}\right)$$

c)- Le Tronc :

Le tronc interconnecté avec la hanche par une articulation rotoïde définie par θ_T qui est dépendante des articulations de la patte support (θ_1 et θ_2). On a :

$${}^1T_2(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & L_{g1} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & L_{g1} \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_3(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & L_{g2} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & L_{g2} \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3T_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_{hg} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^hT_T(\theta_T) = \begin{bmatrix} \cos \theta_T & -\sin \theta_T & 0 & L_T \cos \theta_T \\ \sin \theta_T & \cos \theta_T & 0 & L_T \sin \theta_T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solution de MGI du tronc :

Dans cette chaîne cinématique, on a trois paramètres variables ($\theta_1, \theta_2, \theta_T$). Les deux variables (θ_1 et θ_2) sont déjà calculées lors du MGI de la hanche, donc il ne reste qu'à déterminer le troisième paramètre θ_T (Voir le schéma).

On a :

$$\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_T) = \frac{(x_T - x_h)}{L_T}$$

$$\Rightarrow \theta_T = \text{Arccos}\left(\frac{(x_T - x_h)}{L_T}\right) - (\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{II-33})$$



Avec :

$$S(\theta_1) = \frac{(L_1 + L_2 C(\theta_2))(-P_{p,x} S(\varphi) + P_{p,y} C(\varphi)) - L_2 S(\theta_2)(P_{p,x} C(\varphi) + P_{p,y} S(\varphi) - tr)}{(L_1 + L_2 C(\theta_2))^2 + (L_2 S(\theta_2))^2}$$

$$C(\theta_1) = \frac{(L_1 + L_2 C(\theta_2))(P_{p,x} C(\varphi) + P_{p,y} S(\varphi) - tr) + L_2 S(\theta_2)(-P_{p,x} S(\varphi) + P_{p,y} C(\varphi))}{(L_1 + L_2 C(\theta_2))^2 + (L_2 S(\theta_2))^2}$$

Sachant que :

$P_{x,p}$ et $P_{y,p}$ sont les position désirées de chaque pied.

L'angle du tronc est défini par :

$$\theta_T = \text{atan2}(S(\theta_T), C(\theta_T))$$

Avec :

$$S(\theta_T) = \frac{(P_{t,x} - tr C(\varphi))(L_t S(\varphi)) - (P_{t,y} - tr S(\varphi))L_t C(\varphi)}{-L_t^2}$$

$$C(\theta_T) = \frac{(P_{t,y} - tr S(\varphi))(-L_t S(\varphi)) - (P_{t,x} - tr C(\varphi))L_t C(\varphi)}{-L_t^2}$$

II.6. Simulations.

La simulation du calcul analytique du modèle géométrique inverse (MGI) est effectuée en utilisant le Logiciel Matlab. Elle permet de comparer les résultats de calculs analytiques obtenus suivant les trois chemins de modélisation.

1.cas 1 :

Soient les trajectoires de la hanche et de pied de vol qui s'expriment par les fonctions suivantes (trajectoires linéaires) :

$$X_h : \begin{cases} x_h(t) = 0.12 + 0.22t \\ y_h(t) = 0.63 \end{cases}$$

$$X_p : \begin{cases} x_p(t) = 0.45t \\ y_p(t) = 0.1t \end{cases}$$

Avec : X_h et X_p sont les trajectoires de la hanche et du pied de vole respectivement.

Paramètres de simulation :

$$0 \leq t \leq T_p$$

$$L_1 = 0.36 \text{ m}$$

$$L_2 = 0.32 \text{ m}$$

$$L_t = 0.35 \text{ m}$$

$$T_p = 1.6 \text{ s}$$

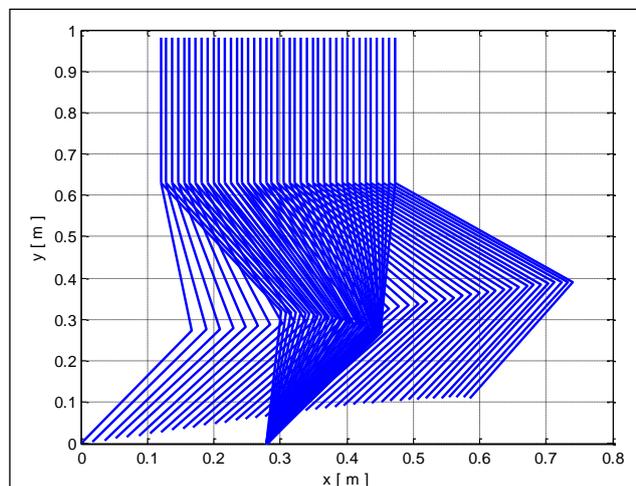


Fig II.11 : Simulation du MGI (cas N° :01)



2.cas 1 :

Changeons les trajectoires, telles que, celles de $y_h(t)$ et $y_p(t)$ soient des fonctions paraboliques définies comme suit :

$$X_h : \begin{cases} x_h(t) = 0.12 + 0.2t \\ y_h(t) = 0.60 + 0.06t^2 \end{cases}$$

$$X_p : \begin{cases} x_p(t) = 0.45t \\ y_p(t) = 0.0625t^2 \end{cases}$$

Paramètres de simulation :

$$L_1 = 0.36 \text{ m}$$

$$L_2 = 0.32 \text{ m}$$

$$L_t = 0.35 \text{ m}$$

$$T_p = 1.6 \text{ s}$$

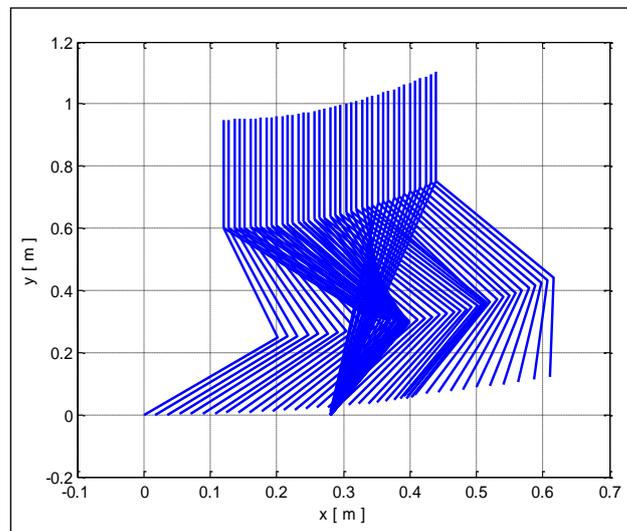


Fig II.12 : Simulation du MGI (cas N° :02)

II.7. Conclusion.

Dans ce chapitre, on définit les paramètres géométriques du robot par différentes techniques en se basant sur la méthode de Paul qui utilise le MGD et le MGI. La modélisation géométrique est fondée sur le principe de transformation des matrices homogènes, dit Denavit-Hartenberg.

Le calcul du MGD exprime les coordonnées de l'espace articulaire en fonction des coordonnées de l'espace opérationnel. Le MGI exprime le problème inverse

Des simulations de marche du robot sont effectuées afin de vérifier les résultats de calcul des variables articulaires (θ_i ; $i = 1, 2, 3, 4, 5$) obtenus par la formulation analytique. On trouve que les trois chemins de modélisation donnent des configurations identiques.

CHAPITRE III

MODELISATION

CINEMATIQUE



III.1. Définition.

La cinématique est l'étude des mouvements des corps sans se préoccuper des causes qui les provoquent.

III.2. Lois de composition des vitesses d'un point matériel

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux vitesses et accélérations des chaînons. On traitera la cinématique des points de l'ensemble du corps, généralement le centre de gravité, ou celui de l'articulation (j) qu'on peut considérer comme un mouvement d'un point matériel.

Soient :

$R_0(O_0, x_0, y_0, z_0)$: Référentiel considéré fixe ;

$R_j(O_j, x_j, y_j, z_j)$: Référentiel considéré mobile par rapport à R .

Soit ω_j le vecteur rotation instantané du repère

$R_j(O_j, x_j, y_j, z_j)$ par rapport au repère fixe

$R_0(O_0, x_0, y_0, z_0)$. La position du mobile $j+1$ dans le repère R_0 est donnée par la relation vectorielle :

$$O_0O_{j+1} = O_0O_j + O_jO_{j+1}$$

En dérivant cette relation par rapport au temps, on peut écrire :

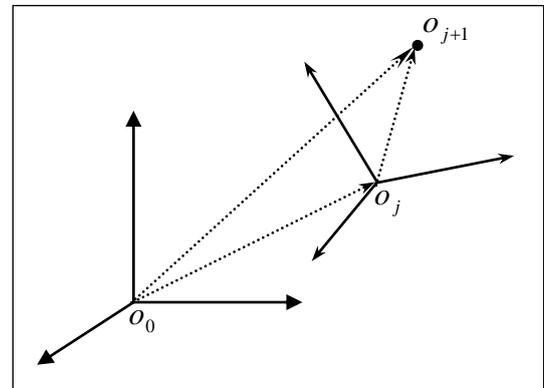


Fig III.1 : composition des vitesses

$$\left[\frac{d(O_0O_{j+1})}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d(O_0O_j)}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d(O_jO_{j+1})}{dt} \right]_{R_0} \quad (\text{III-01})$$

Or, on sait que :

$$\left[\frac{d(O_jO_{j+1})}{dt} \right]_{R_0} = \underbrace{\left[\frac{d(O_jO_{j+1})}{dt} \right]_{R_j}}_{V_r} + \omega_j \times (O_jO_{j+1})$$

La relation (III-01) s'écrit alors :

$$\left[\frac{d(O_0O_{j+1})}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d(O_jO_{j+1})}{dt} \right]_{R_j} + \left[\frac{d(O_0O_j)}{dt} \right]_{R_0} + \omega_j \times (O_jO_{j+1})$$

Soit : $V_r = \left[\frac{d(O_jO_{j+1})}{dt} \right]_{R_j}$ (vitesse relative)

$$V_a = {}^0V_{j+1} = V_r + \frac{d}{dt}(O_jO_{j+1}) + \omega_j \times (O_jO_{j+1}) \quad (\text{III-02})$$

Remarque : Cette relation peut s'écrire : $V_a = V_r + V_e$



Avec : $V_e = \frac{d}{dt}(o_j o_{j+1}) + \omega_j \times (o_j o_{j+1})$

la vitesse d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse absolue de (o_{j+1}) supposé fixe dans le référentiel R_j : $V_r = 0$.

En dérivant par rapport au temps, dans le référentiel R_0 , la relation (III-02), on obtient :

$$\frac{dV_a}{dt} = \frac{d^0 V_{j+1}}{dt} = \left[\frac{d^2(o_j o_{j+1})}{dt^2} \right]_{R_0} + \left[\frac{dV_r}{dt} \right]_{R_0} + \omega_j \times \left[\frac{d(o_j o_{j+1})}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d\omega_j}{dt} \right]_{R_0} \times (o_j o_{j+1}) \quad (\text{III-03})$$

$$\text{Avec :} \quad \left[\frac{d(o_j o_{j+1})}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d(o_j o_{j+1})}{dt} \right]_{R_j} + \omega_j \times (o_j o_{j+1})$$

$$\text{Et} \quad \gamma_r = \left[\frac{dV_r}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{dV_r}{dt} \right]_{R_j} + \omega_j \times V_r$$

La relation (III-03) s'écrit alors :

$$\gamma_a = \gamma_r + \underbrace{\left[\frac{d^2}{dt^2}(o_j o_{j+1}) \right] + \omega_j \times (\omega_j \times (o_j o_{j+1})) + \dot{\omega}_j \times (o_j o_{j+1})}_{\gamma_e} + \underbrace{2\omega_j \times V_r}_{\gamma_c}$$

Avec :

γ_r : Accélération relative ;

γ_e : Accélération d'entraînement ;

γ_c : Accélération Coriolis.

III.3. Modèle cinématique directe (MCD).

Le MCD d'un robot, décrit les vitesses des coordonnées opérationnelles en fonctions des vitesses articulaires, il est noté :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q}$$

Où :

$J(q)$ Désigne la matrice Jacobienne $[m \times n]$ qui est fonction des variables articulaires q .

III.3.1. Calcul de la matrice Jacobienne de base

On peut obtenir la matrice jacobienne par une méthode de calcul direct fondée sur la relation entre les vecteurs vitesse de translation et de rotation V_n et ω_n du repère R_n et les vitesses articulaires \dot{q}_n . Cette matrice jacobienne s'écrit sous la forme :

$$\overline{V}_n = \begin{bmatrix} V_n \\ \omega_n \end{bmatrix} = J_n \dot{q} \quad (\text{III-04})$$

D'une façon analogue, on peut faire le calcul jacobien de l'influence que produit l'articulation d'ordre k de la chaîne sur le repère terminal R_n . En effet, cette articulation de vitesse \dot{q}_k induit sur R_n les vitesses V_{kn}, ω_{kn} qu'on peut déterminer aisément.

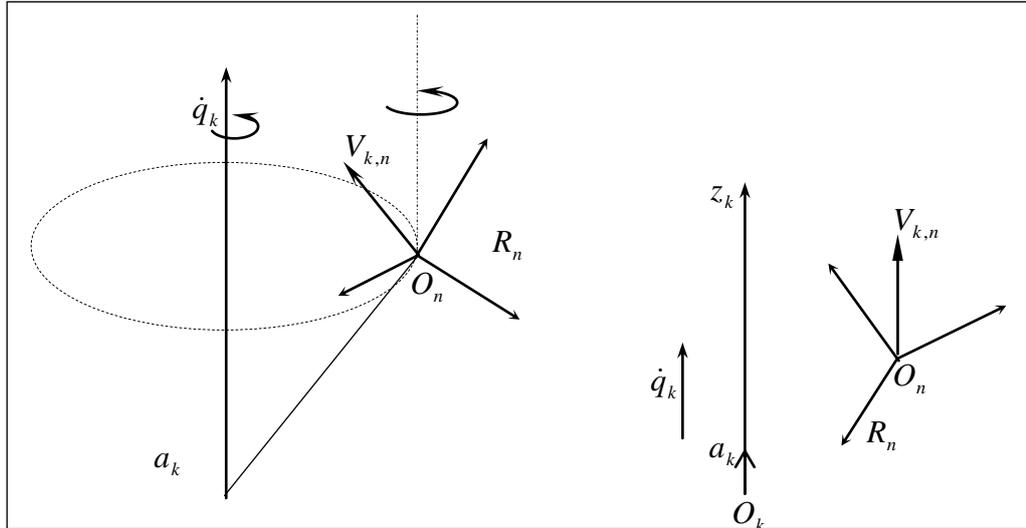


Figure III.2 : Influence du type de l'articulation sur le repère terminal.

Soient : $L_{k,n}$: le vecteur d'origine O_k et d'extrémité O_n .
 σ_k : Coefficient binaire.

Les vecteurs $V_{k,n}$ et $\omega_{k,n}$ s'écrivent :

$$\begin{cases} V_{k,n} = [\sigma_k a_k + \overline{\sigma}_k (a_k \times L_{k,n})] \dot{q}_k \\ \omega_{k,n} = \overline{\sigma}_k a_k \dot{q}_k \end{cases}$$

- Dans le cas d'une articulation prismatique $\sigma_k = 1$ et $\overline{\sigma}_k = 0$. On a alors :

$$\begin{cases} V_{k,n} = a_k \dot{q}_k \\ \omega_{k,n} = 0 \end{cases}$$

- Dans le cas d'une articulation rotoïde $\sigma_k = 0$ et $\overline{\sigma}_k = 1$, ce qui donne :

$$\begin{cases} V_{k,n} = (a_k \times L_{k,n}) \dot{q}_k \\ \omega_{k,n} = a_k \dot{q}_k \end{cases}$$

En appliquant le théorème de composition des vitesses; on peut sommer toutes les contributions élémentaires de chaque articulation afin d'obtenir les vecteurs finaux des vitesses de translation et de rotation V_n et ω_n du repère terminal par :

$$\begin{cases} V_n = \sum_{k=1}^n V_{k,n} = \sum_{k=1}^n [\sigma_k a_k + \overline{\sigma}_k (a_k \times L_{k,n})] \dot{q}_k \\ \omega_n = \sum_{k=1}^n \omega_{k,n} = \sum_{k=1}^n \overline{\sigma}_k a_k \dot{q}_k \end{cases} \quad \text{(III-05)}$$

En identifiant les relations (III-04) et (III-05), la matrice Jacobienne exprimée dans le repère R_n , noté J_n , s'écrit :

$$J_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 a_1 + \overline{\sigma}_1 (a_1 \times L_{1,n}) & \dots & \sigma_n a_n + \overline{\sigma}_n (a_n \times L_{n,n}) \\ \overline{\sigma}_n a_1 & \dots & \overline{\sigma}_n a_n \end{bmatrix} \quad \text{(III-06)}$$



III.3.2. Calcul de la matrice ${}^i J_n$

La matrice Jacobienne, peut être exprimée aussi dans le repère de base R_0 que dans le repère de l'organe terminal R_n . Elle peut être projetée dans un repère R_i intermédiaire.

La matrice Jacobienne notée ${}^i J_n$ de dimension $(6 \times n)$ s'écrit :

$${}^i J_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 {}^i a_1 + \overline{\sigma_1} ({}^i a_1 \times {}^i L_{1,n}) & \dots & \sigma_n {}^i a_n + \overline{\sigma_n} ({}^i a_n \times {}^i L_{n,n}) \\ \overline{\sigma_1} {}^i a_1 & \dots & \overline{\sigma_n} {}^i a_n \end{bmatrix}$$

En remarque que :

$${}^i a_k \times {}^i L_{k,n} = {}^i A_k {}^k a_k {}^k L_{k,n}$$

Avec :

${}^i A_k$: Matrice d'orientation (3×3) du repère R_k dans le repère R_i ;

$${}^k a_k = [0 \quad 0 \quad 1]^T \quad \text{et} \quad {}^k L_{k,n} = {}^k P_k = [{}^k P_{nx} \quad {}^k P_{ny} \quad {}^k P_{nz}]$$

On calcul alors le k^{ieme} colonne de la matrice Jacobienne, noté ${}^i J_{n,k}$ projetée dans le repère R_i par la formule :

$${}^i J_{n,k} = \begin{bmatrix} \sigma_1 {}^i a_k + \overline{\sigma_1} (-{}^k P_{ny} {}^i s_k + {}^k P_{nx} {}^i n_k) \\ \overline{\sigma_1} {}^i a_k \end{bmatrix} \quad i = 0, \dots, n \quad ; \quad k = 1, \dots, n$$

Où :

${}^i s_k, {}^i n_k, {}^i a_k$: sont respectivement les vecteurs colonnes de la matrice ${}^i A_k$

${}^k P_{nx}, {}^k P_{yx}, {}^k P_{zx}$: sont respectivement la première et la deuxième composantes du vecteur ${}^k P_n$ qui représente la quatrième colonne de ${}^k T_n$ calculée précédemment par le MGD.

III.4. Le MCD du bipède

III.4.1. premier cheminement de modélisation

a) Pied Oscillant :

Le calcul de la matrice jacobienne, notée ${}^0 J_{pv}$, qui exprime le pied oscillant dans le repère R_0 (attaché au pied support) est de dimension $[6 \times 5]$.

$${}^0 \dot{X}_{pv} = \begin{bmatrix} {}^0 V_{pv,x} \\ {}^0 V_{pv,y} \\ {}^0 V_{pv,z} \\ {}^0 \omega_{pv,x} \\ {}^0 \omega_{pv,y} \\ {}^0 \omega_{pv,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0 J_{pv,(1,1)} & {}^0 J_{pv,(1,2)} & {}^0 J_{pv,(1,3)} & {}^0 J_{pv,(1,4)} \\ {}^0 J_{pv,(2,1)} & {}^0 J_{pv,(2,2)} & \dots & {}^0 J_{pv,(2,4)} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ {}^0 J_{pv,(6,1)} & {}^0 J_{pv,(6,2)} & \dots & {}^0 J_{pv,(6,4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad \text{(III-07)}$$

En séparant cette Jacobienne en deux sous matrices notées : ${}^0 J_{V_{pv}}$ et ${}^0 J_{\omega_{pv}}$ telles que :

☞ La sous matrice ${}^0 J_{V_{pv}}$ de haut, est une matrice d'ordre $[3 \times 4]$, permet de calculer le vecteur vitesse de translation ${}^0 V_{pv}$ du pied du robot de la jambe oscillante dans le repère R_0 .



$${}^0V_{pv} = \begin{bmatrix} {}^0V_{pvx} \\ {}^0V_{pvy} \\ {}^0V_{pvz} \end{bmatrix} = [{}^0JV_{pv}] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix}$$

☞ La sous matrice ${}^0J\omega_{pv}$ de bas, est une matrice de dimension $[3 \times 4]$, permet de calculer le vecteur vitesse de rotation ${}^0\omega_{pv}$ du pied de la jambe oscillante dans le repère.

$${}^0\omega_{pv} = \begin{bmatrix} {}^0\omega_{pvx} \\ {}^0\omega_{pvy} \\ {}^0\omega_{pvz} \end{bmatrix} = [{}^0J\omega_{pv}] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix}$$

Les éléments de la matrice Jacobienne ${}^0J_{pv}$ sont les suivant:

$$col({}^0J_{pv})(1) = \begin{Bmatrix} -L_{d1}S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - L_{g1}S(\theta_1) - L_{d2}S(\theta_1 + \theta_3 + \theta_4) - L_{g2}S(\theta_1 + \theta_4) \\ L_{d1}C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + L_{g1}C(\theta_1) + L_{d2}C(\theta_1 + \theta_3 + \theta_4) + L_{g2}C(\theta_1 + \theta_4) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$col({}^0J_{pv})(2) = \begin{Bmatrix} -L_{d1}S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - L_{d2}S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - L_{g2}S(\theta_1 + \theta_2) \\ L_{d1}C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + L_{d2}C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + L_{g2}C(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$col({}^0J_{pv})(3) = \begin{Bmatrix} -L_{d1}S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - L_{d2}S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ L_{d1}C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + L_{d2}C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$col({}^0J_{pv})(4) = \begin{Bmatrix} -L_{d1}S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ L_{d1}C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



b) Eléments de la Jacobienne de la hanche $[6 \times 3]$:

$$col({}^0 J_h)(1) = \begin{Bmatrix} -L_{g1}S(\theta_1) - L_{g2}S(\theta_1 + \theta_2) \\ L_{g1}C(\theta_1) + L_{g2}C(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$col({}^0 J_h)(2) = \begin{Bmatrix} -L_{g2}S(\theta_1 + \theta_2) \\ L_{g2}C(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$col({}^0 J_h)(3) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c) Eléments de la Jacobienne du tronc $[6 \times 4]$:

$$col({}^0 J_T)(1) = \begin{Bmatrix} -L_{g1}S(\theta_1) - L_{g2}S(\theta_1 + \theta_2) - L_T S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_T) \\ L_{g1}C(\theta_1) + L_{g2}C(\theta_1 + \theta_2) + L_T C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_T) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$col({}^0 J_T)(2) = \begin{Bmatrix} -L_{g2}S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_T) - L_T S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_T) \\ L_{g2}C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_T) + L_T C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_T) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$col({}^0 J_T)(3) = \begin{Bmatrix} -L_T S(\theta_1 + \theta_2 + \theta_T) \\ L_T C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_T) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} ; \quad col({}^0 J_T)(4) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



III.4.2. Jacobienne du deuxième cheminement de modélisation.

Dans ce calcul, on a les matrices Jacobiennes des trois mécanismes (patte gauche, patte droite et tronc). Mathématiquement, la jacobienne des deux pattes est la même.

- ❖ Eléments de la matrice Jacobienne ${}^0 J_{\text{pied}}$ ou $({}^0 J_4)$: matrice d'ordre $[6 \times 4]$

$$\text{col}({}^0 J_{\text{pied}})(1) = \left\{ \begin{array}{c} -L_1 S(2\varphi + \theta_1 + \theta_2) - L_2 S(2\varphi + \theta_1) - tr S(2\varphi) \\ + L_1 C(2\varphi + \theta_1 + \theta_2) + L_2 C(2\varphi + \theta_1) + tr C(2\varphi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}$$

$$\text{col}({}^0 J_{\text{pied}})(2) = \left\{ \begin{array}{c} -L_1 S(\varphi + 2\theta_1 + \theta_2) - L_2 S(\varphi + 2\theta_1) - tr S(\varphi + \theta_1) \\ + L_1 C(\varphi + 2\theta_1 + \theta_2) + L_2 C(\varphi + 2\theta_1) + tr C(\varphi + \theta_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}$$

$$\text{col}({}^0 J_{\text{pied}})(3) = \left\{ \begin{array}{c} -L_1 S(\varphi + \theta_1 + 2\theta_2) - L_2 S(\varphi + \theta_1 + \theta_2) \\ + L_1 C(\varphi + \theta_1 + 2\theta_2) + L_2 C(\varphi + \theta_1 + \theta_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}$$

$$\text{col}({}^0 J_{\text{pied}})(4) = \left\{ \begin{array}{c} -L_1 S(\varphi + \theta_1 + \theta_2) \\ + L_1 C(\varphi + \theta_1 + \theta_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}$$

- ❖ Eléments de la matrice Jacobienne $({}^0 J_{\text{tronc}})$: matrice d'ordre $[6 \times 3]$

$$\text{col}({}^0 J_{\text{tronc}})(1) = \left\{ \begin{array}{c} -L_t S(2\varphi + \theta_t) - tr S(2\varphi) \\ + L_t C(2\varphi + \theta_t) + tr C(2\varphi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}$$



$$col({}^0 J_{tronc})(2) = \begin{Bmatrix} -L_r S(\varphi + 2\theta_r) - tr S(\varphi + \theta_r) \\ + L_r C(\varphi + 2\theta_r) + tr C(\varphi + \theta_r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$col({}^0 J_{tronc})(3) = \begin{Bmatrix} -L_r S(\varphi + \theta_r) \\ + L_r C(\varphi + \theta_r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

III.5. Modèle cinématique inverse (MCI)

Le modèle cinématique a défini la trajectoire qui serait obtenue comme résultat de différentes positions angulaires des couples articulaires. Donc, il est devenu impératif que les rotations angulaires soient connues afin de pouvoir définir la cinématique exigée des organes terminaux. Il conduit au MCI, dans lequel les vitesses de l'organe terminal sont les paramètres d'entrée et les vitesses articulaires sont les paramètres de sortie.

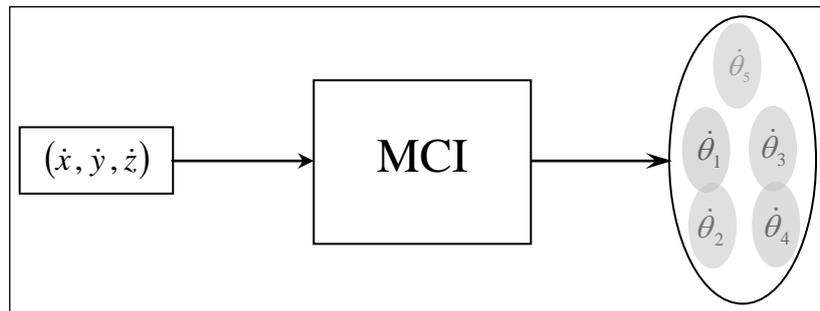


Fig III.3. Passage de vitesses opérationnelles aux vitesses articulaires

Le MCI d'un robot permet de calculer à partir d'une configuration q donnée les vitesses articulaires \dot{q} qui assurent au repère terminal une vitesse opérationnelle \dot{X} imposée, il est calculé par la relation :

$$\dot{q} = J(q)^{-1} \dot{X} \quad (\text{III-08})$$

Le calcul du MCI revient au calcul inverse de la matrice Jacobienne $J(q)^{-1}$ (ou J^{-1}) du robot. Dans le cas régulier où la matrice Jacobienne est carrée d'ordre n est son déterminant est non nul, son inversion est simple; par contre, dans le cas où la matrice $J(q)$ est de dimension $(n \times m)$ (matrice rectangulaire), il est nécessaire de procéder avec des méthodes mathématiques pour déterminer sa matrice inverse.

III.5.1. Problème de calcul cinématique inverse.

Comme la matrice J n'est pas carrée, son inverse n'est pas une matrice unique et son calcul ne peut pas être systématique. On se trouve alors confronté au problème de calcul de la *cinématique inverse*. Il existe plusieurs méthodes de résolution de la Jacobienne inverse.



- ✓ La méthode de l'inverse généralisée
- ✓ La méthode : Ajout de $(n-m)$ contraintes supplémentaires.
- ✓ La méthode : Pseudo-inverse
- ✓ La méthode : pseudo-inverse amortie...etc.

a. Méthode de l'inverse généralisée

La méthode de l'inverse généralisé (ou pseudo-inverse) d'une matrice A qui n'est pas nécessairement carrée, conduit à une matrice A^+ satisfaisant les conditions :

- $A.A^+$ et $A^+.A$ sont Hermétien ;
- $A.A^+A = A$;
- $A^+.A.A^+ = A^+$

Formule de calcul de l'Inverse Généralisée

Les processus suivants seront assurés pour n'importe quelle inverse généralisée de A :

Etape 1 :

Matrice Normale :

La transposé Hermétien d'une matrice A , noté A^H est la transposé complexe conjugué de A .

$$A^H = A^{-T}$$

La matrice A est dite normale si :

$$A.A^H = A^H.A$$

Matrice Hermétien :

A , est une matrice Hermétien si elle égale sa transposé Hermétien, c'est à dire :

$$A = A^H$$

La matrice Hermétien est toujours normale, par ce que :

$$A.A^H = A.A = A^H.A$$

b. La méthode : Ajout de $(n-m)$ contraintes supplémentaires.

L'approche présentée dans ce paragraphe consiste à ajouter un vecteur de coordonnées opérationnelles X , un vecteur de $(n-m)$ coordonnées supplémentaires linéairement indépendantes entre elles. Ces relations peuvent traduire des contraintes physiques sur le robot, soit des contraintes liées à son environnement ou tout simplement des relations entre différentes positions articulaires du robot. Elles s'écrivent sous la forme générale suivante:

$$X_C = F(q) \quad \text{(III-09)}$$

Dans cette expression X_C est un vecteur de dimension $[(n-m) \times 1]$, et $F(q)$ c'est une fonction vectorielle en q . Le modèle cinématique associé à ces équations supplémentaires s'écrit :

$$\dot{X}_C = J_F \dot{q} \quad \text{(III-10)}$$

où $J_F = \frac{\partial F(q)}{\partial q}$ de dimension $[(n-m) \times n]$ représente la jacobienne de $F(q)$. A partir du modèle cinématique direct (III-04) du robot et de l'équation (III-10), on définit la Jacobienne en introduisant une matrice J_a de dimension $[n \times n]$ et un nouveau vecteur de vitesses \dot{X}_a tels que :



$$\dot{X}_a = J_a \dot{q} \quad (\text{III-11})$$

Avec :

$$\dot{X}_a = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{X}_C \end{bmatrix} \text{ et } J_a = \begin{bmatrix} J \\ J_F \end{bmatrix}.$$

III.5.2. Application au robot bipède.

a. MCI de la hanche.

La hanche est définie par le vecteur des vitesses opérationnelles \dot{X}_h et le vecteur des vitesses articulaires \dot{q}_h tels que :

$$\dot{q}_h = J_h^{-1} \dot{X}_h$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = [J_h^{-1}] \begin{bmatrix} V_{h,x} \\ V_{h,y} \\ 0 \end{bmatrix},$$

avec :

$$J_h = \begin{bmatrix} -L_{g1}S(\theta_1) - L_{g2}S(\theta_1 + \theta_2) & -L_{g2}S(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ L_{g1}C(\theta_1) + L_{g2}C(\theta_1 + \theta_2) & L_{g2}C(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sa forme réduite est :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_{g1}S(\theta_1) - L_{g2}S(\theta_1 + \theta_2) & -L_{g2}S(\theta_1 + \theta_2) \\ L_{g1}C(\theta_1) + L_{g2}C(\theta_1 + \theta_2) & L_{g2}C(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{h,x} \\ V_{h,y} \end{bmatrix}$$

donc la Jacobienne est une matrice carrée inversible :

$$J_h^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2)}{L_{g1} \cos(\theta_2)} & -\frac{L_{g1} \cos(\theta_1) + L_{g2} \cos(\theta_1 + \theta_2)}{L_{g1} L_{g2} \cos(\theta_2)} \\ \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{L_{g1} \cos(\theta_2)} & -\frac{L_{g1} \sin(\theta_1) + L_{g2} \sin(\theta_1 + \theta_2)}{L_{g1} L_{g2} \cos(\theta_2)} \end{bmatrix}$$

b. MCI du Pied de vol

Sa forme réduite donne une matrice de dimension $[2 \times 4]$, son inverse devra être calculé par l'une des méthodes d'inversion.

En premier lieu, on a fait une simulation à l'aide du logiciel Matlab en utilisant la méthode d'inverse généralisé. On a remarqué que le calcul ne converge pas aux bons résultats. On a alors procédé à la deuxième méthode utilisant (n-m) contraintes supplémentaires), c'est-à-dire, dans le cas de notre robot bipède, on ajoute deux contraintes pour rendre la matrice similaire à une matrice carrée d'ordre $[4 \times 4]$.

Première contrainte:

$$x_p(t) - x_h(t) = L_{2d} \cos(2\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) + L_{1d} \cos(2\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4))$$



Deuxième contrainte :

$$y_p(t) - y_h(t) = L_{2d} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + L_{1d} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

De la relation (III-4), on trouve :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) - \dot{x}_h(t) \\ \dot{y}_p(t) - \dot{y}_h(t) \end{bmatrix} = [J_F] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix},$$

avec :

$$J_F = \begin{bmatrix} -L_{2d}S\left(\sum_{i=1}^3 \theta_i\right) - L_{1d}S\left(\sum_{i=1}^4 \theta_i\right) & -L_{2d}S\left(\sum_{i=1}^3 \theta_i\right) - L_{1d}S\left(\sum_{i=1}^4 \theta_i\right) & -L_{2d}S\left(\sum_{i=1}^3 \theta_i\right) - L_{1d}S\left(\sum_{i=1}^4 \theta_i\right) & -L_{1d}S\left(\sum_{i=1}^4 \theta_i\right) \\ +L_{2d}C\left(\sum_{i=1}^3 \theta_i\right) + L_{1d}C\left(\sum_{i=1}^4 \theta_i\right) & L_{2d}C\left(\sum_{i=1}^3 \theta_i\right) + L_{1d}C\left(\sum_{i=1}^4 \theta_i\right) & L_{2d}C\left(\sum_{i=1}^3 \theta_i\right) + L_{1d}C\left(\sum_{i=1}^4 \theta_i\right) & +L_{1d}C\left(\sum_{i=1}^4 \theta_i\right) \end{bmatrix}$$

La relation recherchée s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{x}_p(t) - \dot{x}_h(t) \\ \dot{y}_p(t) - \dot{y}_h(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P \\ J_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad \text{avec : } [J_a] = \begin{bmatrix} J_P \\ J_F \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P \\ J_F \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{x}_p(t) - \dot{x}_h(t) \\ \dot{y}_p(t) - \dot{y}_h(t) \end{bmatrix}$$

c. MCI du tronc.

Le tronc est supposé resté dans la position verticale, son modèle cinématique inverse est le même que celle de la hanche.

III.5.3. Singularités du robot

Il existe un problème majeur de la cinématique inverse, lié aux singularités. Selon la configuration du robot, il existe des cas où la matrice Jacobienne ne peut pas être inversée. Ces configurations sont appelées configurations singulières. Des exemples sont donnés à la figure III.4 [07].

Dans le cas d'une configuration singulière, l'équation III.8 ne peut pas être résolue. Nous ne pouvons donc pas effectuer les calculs décrits dans la section III.5 et obtenir une solution acceptable. Dans ces cas, il devient impossible de déplacer l'organe terminal dont la branche présente une singularité, et le robot est tout simplement impossible à commander [07].

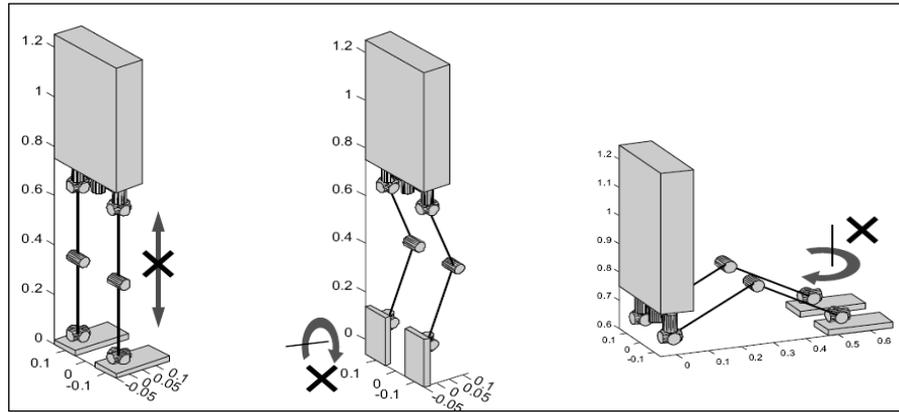


Figure III.4 : Exemples de configurations singulières. Pour ces configurations, il existe des directions inaccessibles à l'extrémité du segment (montrées par les flèches).

Dans ces cas, la Jacobienne ne peut pas être inversée [07]

Commander un robot qui est entré en configuration singulière est un sujet de recherche toujours d'actualité. L'approche couramment utilisée consiste à rester éloigné de ces singularités. La configuration illustrée par la figure III.4.a avec les genoux droits, constitue une singularité. Il est donc préférable de commencer un mouvement avec les jambes légèrement pliées [07].

III.6. Conclusion.

Dans ce chapitre, on a étudié le problème de la cinématique du robot bipède. L'étude cinématique comporte les deux modèles, le modèle cinématique directe (MCD) et le modèle cinématique inverse (MCI). Le modèle cinématique du robot est présenté pour les trois sous-systèmes : la patte support, la patte en vol et le tronc.

Le calcul du MCI est basé essentiellement sur le calcul de l'inverse de la matrice jacobienne. Quand cette dernière est d'ordre $[n \times n]$ ou n'est pas singulière (son déterminant n'est pas nul), son inversion est facile, mais dans le cas où elle d'ordre $[n \times m]$ ou singulière, le calcul de son inverse fait appel à des méthodes numérique ou analytique permettant d'éviter le problème de singularité.

CHAPITRE VI

GENERATEUR

DE

TRAGECTORIE



IV.1. Introduction.

La génération de trajectoire du robot bipède est une partie importante qui doit être définie préalablement par son modèle mathématique. Elle est considérée dans les deux phases de cycle de marche, phase simple support (PSS) et phase double support (PDS).

La trajectoire du robot bipède est définie par les deux trajectoires à suivre, celle du pied oscillant et celle de la hanche, ce qui a l'avantage de découpler le robot bipède en trois sous ensembles, le tronc et les deux membres inférieurs, ainsi, de simplifier sensiblement le problème.

Les deux trajectoires sont approximées par des fonctions en fonction du temps avec des coefficients constants déterminés à partir des conditions géométriques et physiques de la marche du robot de façon à assurer la continuité et la répétitivité de la marche et la stabilité du robot. Un pas de marche se compose de deux phases principales PSS et PDS. La PSS est caractérisée par une patte support pivotante sur le sol et l'autre oscillante. Elle commence dès que la patte oscillante quitte le sol et se termine quand elle le recontacte dans un temps T_s . Pour la PDS, les deux pattes sont en contact avec le sol et le corps supérieur avance doucement dans une période de temps notée T_d . Au pas suivant, les rôles de la patte oscillante et de la patte support sont intervertis; le cycle complet de marche étant défini par la succession des deux pas [16].

Les trajectoires compatibles de la hanche et de la patte oscillante doivent satisfaire les conditions géométriques et physiques du robot.

De point de vue de la marche humaine, il est préférable que le tronc reste dans la position verticale.

La marche du robot bipède est prédéfinie par la trajectoire imposée dans l'espace opérationnel qui est évidemment défini selon le mode de la marche du robot. Ceci n'aura lieu qu'à travers le MGI permettant de transformer chaque point de la trajectoire en coordonnées articulaires correspondantes.

Le principe de la génération du mouvement est schématisé ci-dessous (figure IV.1)

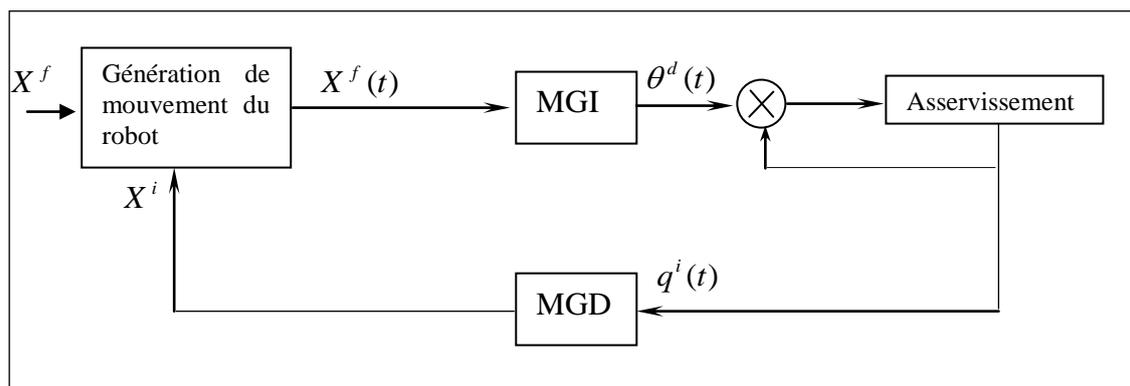


Fig IV.1 : Générateur de mouvement [1]

IV.2. Hodographe de la marche.

La figure ci-dessous montre un schéma du robot avec l'allure des deux trajectoires principales prédéfinies.

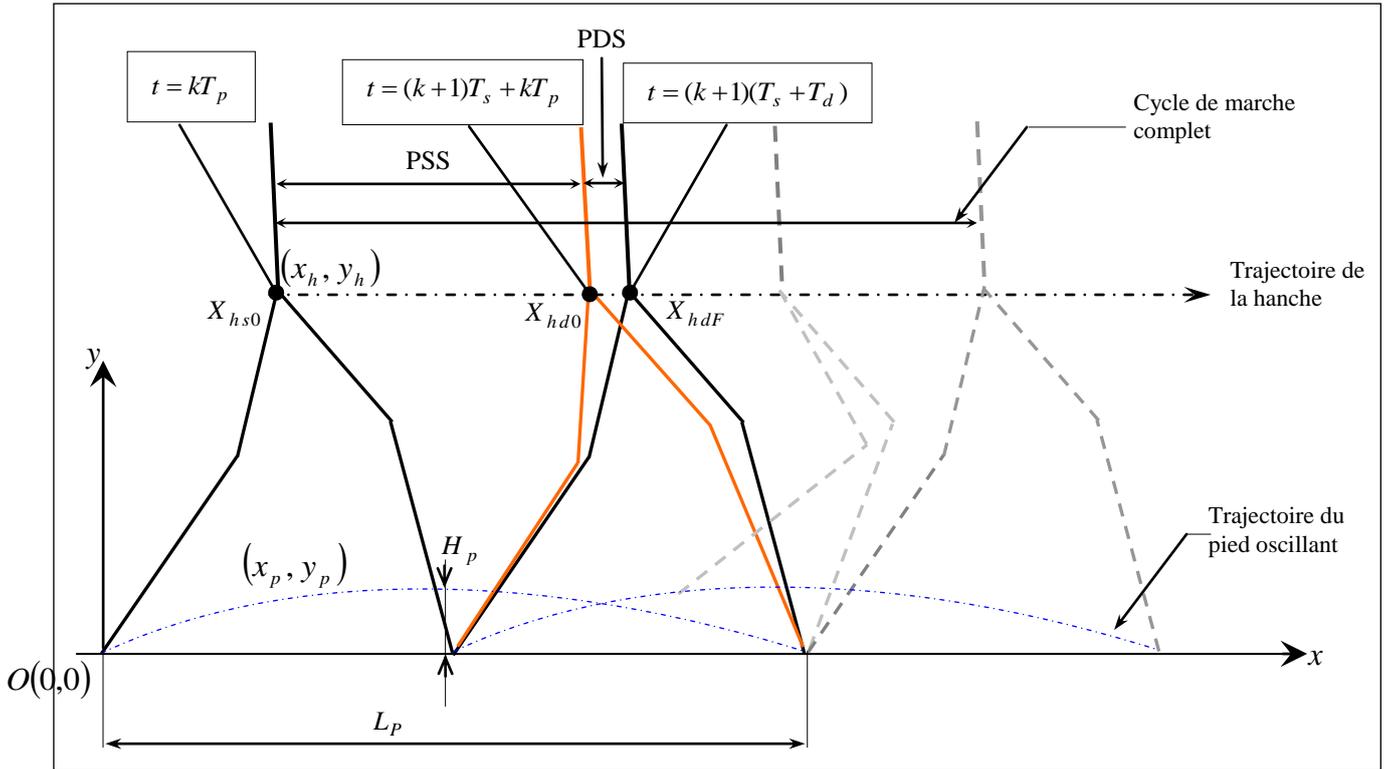


Figure IV.2 : Hodographe de la marche

IV.3. Trajectoire du pied oscillant.

La trajectoire du pied de la patte oscillante durant la PSS est un facteur important dans la marche bipède. Nous allons chercher les équations de contraintes qui peuvent être employées pour déterminer les coefficients du système d'équations régissant la trajectoire du membre oscillant.

Soient les vecteurs : $X_{ps}(t) : \{x_{ps}(t), y_{ps}(t)\}$ et $X_{pd}(t) : \{x_{pd}(t), y_{pd}(t)\}$; $\{x_{ps}(t), y_{ps}(t)\}$ et $\{x_{pd}(t), y_{pd}(t)\}$ désignent ses coordonnées exprimées dans le repère absolu. On utilise des fonctions polynomiales d'ordre trois et cinq pour $x_{ps}(t)$ et $y_{ps}(t)$ respectivement.

La phase double support représente 20% de la phase simple support [63].

1. Phase simple support (PSS).

$$X_{ps} : \begin{cases} x_{ps}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \\ y_{ps}(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + b_4t^4 + b_5t^5 \end{cases} \quad (k-1).T_s \leq t \leq k.T_s \quad (IV-01)$$

$$k = 1 \dots n$$

2. Phase double support (PDS).

$$x_{pd}(t) = k L_p \quad (IV-02)$$

$$\text{Avec : } T_s + kT_p \leq t \leq (k+1)T_p$$

$$y_{pd}(t) = 0 \quad (IV-03)$$

$$\text{Avec : } T_s + kT_p \leq t \leq (k+1)T_p$$



On va définir les différentes conditions géométriques et physiques afin de déterminer les coefficients $(a_i \text{ et } b_j, i=1..3, j=1..5)$ des deux équations $x_p(k.t)$ et $y_p(k.t)$ sachant que le cycle de marche est défini par les quatre paramètres suivants :

L_p : Longueur de pas,

T_s : Période de pas pour la PSS,

H_m : Hauteur maximale du pied oscillant,

S_m : Abscisse correspondante à H_m ,

Condition géométrique :

La patte oscillante doit quitter le sol au début du pas et y revenir à la fin du pas. On a alors à développer les équations suivantes :

$$y_p((k-1).T_s) = 0 \quad k = 1..n \quad (\text{IV-04})$$

$$y_p(k.T_s) = 0 \quad k = 1..n \quad (\text{IV-05})$$

Soulèvement maximal du pied oscillant

Soit T_m le temps correspondant à la coordonnée (H_m, S_m)

Pour que la patte oscillante puisse enjamber les obstacles, il faut qu'elle se soulève à une certaine hauteur. Soit H_p sa hauteur maximale de soulèvement. Cette hauteur correspond à l'abscisse x_m parcourue dans le temps T_m . On définit ces conditions par les équations :

$$x_p(k.T_m) = x_m \quad (\text{IV-06})$$

$$y_p(k.T_m) = H_p \quad (\text{IV-07})$$

$$\dot{y}_p(k.T_m) = 0 \quad (\text{IV-08})$$

Répétitivité de la marche :

La répétitivité de la marche impose que la position et les vitesses angulaires à la fin du pas doivent être identiques au début du pas. Tandis que dans la PDS, les deux pieds sont au sol, les vitesses horizontales et verticales sont nulles. En conséquence, les équations suivantes doivent être vérifiées :

$$x_p((k-1).T_s) = (k-1).L_p \quad k = 1..n \quad (\text{IV-09})$$

$$x_p(k.T_s) = k.L_p \quad (\text{IV-10})$$

$$\dot{x}_p((k-1).T_s) = 0 \quad (\text{IV-11})$$

$$\dot{y}_p((k-1).T_s) = 0 \quad (\text{IV-12})$$



Minimiser l'effet de l'impact

L'impact se produit quand le pied oscillant entre en contact avec le sol par le talon. Il engendre un changement soudain des vitesses angulaires. Le pied de la patte oscillante sera coincé avec le sol après l'impact. Ainsi, pour garder une certaine souplesse de la marche du robot, on doit minimiser l'effet du changement brutal des vitesses angulaires dues à l'impact. Ces conditions sont données par les relations suivantes :

$$\dot{x}_p(kT_s) = 0 \quad (IV-13)$$

$$\dot{y}_p(kT_s) = 0 \quad k = 1 \dots n. \quad (IV-14)$$

Appliquons ces conditions pour déterminer les coefficients (a_i et b_j , $i = 1..3$, $j = 1..5$).

Les relations (IV-09) à (IV-12) permettent d'écrire respectivement :

$$x_p((k-1)T_s) = (k-1)L_p$$

$$x_p(kT_s) = kL_p = a_0 + a_1kT_s + a_2kT_s^2 + a_3kT_s^3$$

$$\dot{x}_p(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$\dot{x}_p(kT_s) = 0 = 2ka_2T_s + 3ka_3T_s^2$$

On trouve : $a_0 = 0 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = \frac{3L_p}{T_s^2} \quad a_3 = \frac{-2L_p}{T_s^3}$

On détermine les coefficients b_i à l'aide des conditions suivantes :

- de (IV-04) : $y_p(0) = 0 \Rightarrow b_0 = 0$
- de (IV-12) : $\dot{y}_p(0) = 0 \Rightarrow b_1 = 0$
- de (IV-05) : $y_p(T_s) = 0 = b_2T_s^2 + b_3T_s^3 + b_4T_s^4 + b_5T_s^5$
- de (IV-07) : $y_p(T_m) = H_m = b_2T_m^2 + b_3T_m^3 + b_4T_m^4 + b_5T_m^5$
- de (IV-08) : $\dot{y}_p(T_m) = 0 = 2b_2T_m + 3b_3T_m^2 + 4b_4T_m^3 + 5b_5T_m^4$
- de (IV-14) : $\dot{y}_p(T_s) = 0 = 2b_2T_s + 3b_3T_s^2 + 4b_4T_s^3 + 5b_5T_s^4$

En combinant ces équations entre elles, on trouve finalement :

$$b_5 = \left(\frac{-H_m}{A1 + A2} \right) \left(\frac{T_s^2}{T_m^3 - T_m^2T_s} + \frac{4T_mT_s^4 - 6T_m^2T_s^3}{T_m^6 - 2T_m^5T_s + T_m^4T_s^2} + \frac{2T_s^5 + 3(T_m^3T_s^2 - T_mT_s^4) - 2T_m^2T_s^3}{T_m^6 + 3(T_m^4T_s^2 - T_m^5T_s) - T_m^3T_s^3} \right)$$

Avec :

$$A1 = 3T_s^4 + \frac{T_m^2T_s^5 - T_m^5T_s^2}{T_m^3 - T_m^2T_s} + \frac{6T_m^2T_s^4 - 4T_m^3T_s^3 - 2T_s^6}{T_m^2 + T_s^2 - 2T_mT_s}$$

$$A2 = \frac{2T_m^5T_s^2 - 3T_m^4T_s^3 + T_m^2T_s^5 - 2T_m^3T_s^4 + 3T_m^2T_s^5 - T_s^7}{T_m^3 - T_s^3 + 3(T_mT_s^2 - T_m^2T_s)}$$

$$b_4 = -b_5 \left(\frac{2T_m^3 - 3T_m^2T_s + T_s^3}{T_m^2 - 2T_mT_s + T_s^2} \right) + H_m \left(\frac{2T_mT_s - 3T_m^2}{T_m^6 - 2T_m^5T_s + T_m^4T_s^2} \right)$$



$$b_3 = H_m \left(\frac{2T_s^3 + 3(T_m^3 - T_m T_s^2) - 2T_m^2 T_s}{T_m^6 + 3(T_m^4 T_s^2 - T_m^5 T_s) - T_m^3 T_s^3} + \frac{1}{T_m^3 - T_m^2 T_s} \right) + b_5 \left(\frac{2T_m^5 - 3T_m^4 T_s - 2T_m^3 T_s^2 + 4T_m^2 T_s^3 - T_s^5}{T_m^3 - T_s^3 + 3(T_m T_s^2 - T_m^2 T_s)} - \frac{T_m^3 - T_s^3}{T_m - T_s} \right)$$

$$b_2 = -(b_3 T_s + b_4 T_s^2 + b_5 T_s^3)$$

$$b_1 = 0$$

$$b_0 = 0$$

IV.4. Simulation de la trajectoire du pied en vol.

Paramètres de simulation:

- Longueur du pas: $L_p = 0.56$ m.
- Position initiale de la hanche en PSS: $xh_{s0} = \frac{1}{4} L_p$.
- Position initiale et finale de la hanche en PSS respectivement : $xh_{d0} = (\frac{3}{4} - 0.02) L_p$,
 $xh_{df} = \frac{3}{4} L_p$.
- Vitesses initiale de la PSS et PDS, respectivement: $V_{h1} = 0.008$ m/s , $V_{h2} = 0.09$ m/s .
- Période de la PSS et PDS, respectivement : $T_s = 1.3$ s , $T_d = 0.3$ s .
- Période d'un pas: $T_p = 1.60$ s .
- $T_m = \frac{T_s}{2}$, $H_p = 0.10$ m ,
- Hauteur minimale et maximale de la hanche, respectivement: $H_{h-min} = 0.62$ m ,
 $H_{h-max} = 0.64$ m .
- Longueur des chaînons : $L_1 = 0.36$ m , $L_2 = 0.32$ m , $L_T = 0.35$ m .
- Nombre des pas : $k = 0, \dots, 2$.

Les figures suivantes illustrent les allures de position et des vitesses du pied en vol.

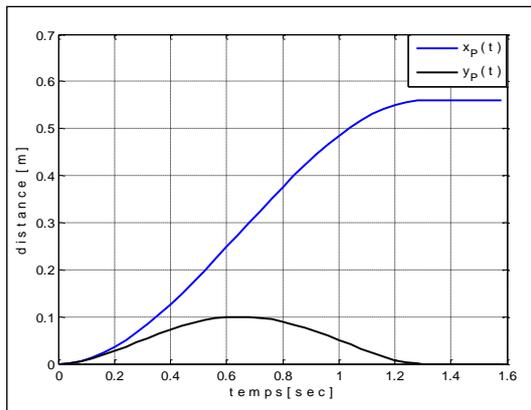


Fig IV.3 : allures des positions du pied de vol ($x_p(t)$, $y_p(t)$)

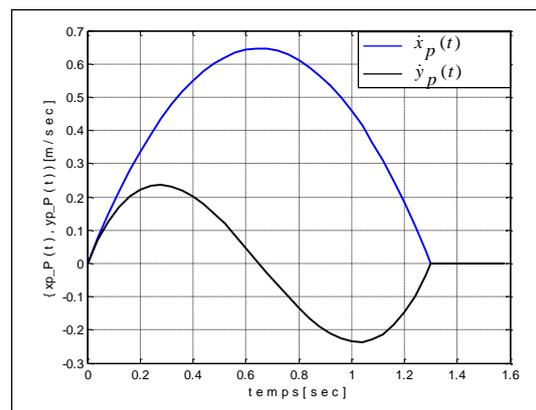


Fig IV.4 : allures des vitesses du pied de vol

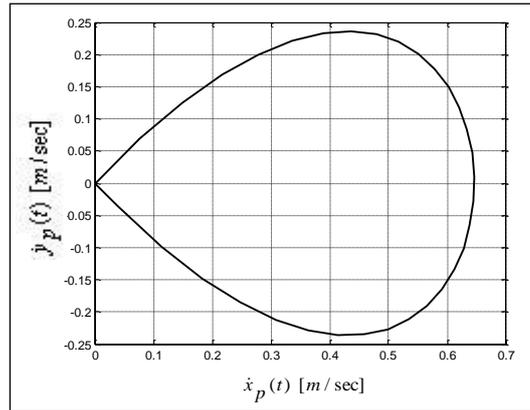


Fig IV.5 : trace de $\dot{y}_p(t)$ en fonction de $\dot{x}_p(t)$

Interprétation:

La figure IV.3 montre l'allure des deux fonctions $x_p(t)$ et $y_p(t)$ de la trajectoire du pied en vol. Le pied est en vol dans l'intervalle de temps $[0, 1.3]$ s qui correspond à la PSS. A l'instant $t=1.3$ s, la fonction, $y_p(t)$ s'annule, par contre la fonction $x_p(t)$ prend sa valeur maximale (0.56 m) qui représente la longueur du pas de marche choisi auparavant. Les deux fonctions restent, par la suite, constantes dans l'intervalle de temps $[1.3, 1.6]$ s qui correspond à la PDS, car en PDS, les deux pieds sont fixes et écartés par une distance égale au pas de marche. Durant cet intervalle de temps, on a seulement la hanche qui avance.

La figure IV.4 illustre l'évolution de la vitesse du pied en vol données par les deux fonctions $\dot{x}_p(t)$ et $\dot{y}_p(t)$. En PSS, la fonction $\dot{y}_p(t)$ varie d'une façon sinusoïdale de période T_s , Elle est positive dans l'intervalle $[0, T_s/2]$ et s'annule au temps $T_s/2$ qui représente le mi-intervalle de la PSS. A ce moment, le pied en vol est en hauteur maximale d'élévation. Quant à la fonction $\dot{x}_p(t)$, on remarque qu'elle a la forme d'une sinusoïdale. Elle est positive dans l'intervalle $[0, T_s]$ et prend sa valeur maximale au temps $T_s/2$. Evidemment, la PSS se termine au temps T_s . A la PDS les deux fonctions s'annulent car le pied est en contact avec le sol.

La figure VI.5 montre l'évolution de la fonction de la vitesse $\dot{y}_p(t)$ en fonction de celle de $\dot{x}_p(t)$. On remarque que la courbe est symétrique par rapport à l'axe horizontal. Elle commence du point zéro et finit au même point qui correspond aux deux positions initiale et finale de la PSS où le pied est au sol. Quand la vitesse suivant l'axe (x) est à son maximum, celle de l'axe (y) s'annule. Ceci a lieu quand le pied est à sa hauteur maximale.

IV.4. Trajectoire de la Hanche.

La trajectoire de la hanche est étudiée en deux phases séparément. Elles sont notées par les coordonnées de la hanche $X_{hs} : (x_{hs}(t), y_{hs}(t))$ et $X_{hd} : (x_{hd}(t), y_{hd}(t))$ correspondantes, respectivement, à la PSS et la PDS exprimées dans le repère (O, x, y) . Des fonctions polynomiales d'ordre trois et cinq sont utilisées pour décrire $x_{hs}(t)$, $x_{hd}(t)$. La trajectoire $y_{hd}(t)$ évolue seulement dans le sens horizontal, donc hauteur constante. Pour celle donnée par la fonction $y_{hs}(t)$, on propose deux fonctions ci-dessous. On retiendra celle qui satisfait mieux les critères de la stabilité.

a. Mouvement horizontal de la hanche

$$x_{hs}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 \quad 0 \leq t \leq T_s \quad (\text{IV-13-a})$$



$$x_{hd}(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 \quad T_s \leq t \leq T_c \quad (\text{IV-13-b})$$

b. Mouvement vertical de la hanche

Nous proposons également deux types de trajectoires. On retiendra celle qui assure une meilleure stabilité du robot.

1. y_{hs} et y_{hd} sont constantes dans tout le cycle de marche :

$$y_{hs}(t) = H_{h-\min} \quad 0 \leq t \leq T_s \quad (\text{IV-14-a})$$

$$y_{hd}(t) = H_{h-\min} \quad T_s \leq t \leq T_c \quad (\text{IV-14-b})$$

2. choisissons une fonction polynomiale d'ordre cinq.

$$y_{hs}(t) = k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t^3 + k_4 t^4 + k_5 t^5 \quad 0 \leq t \leq T_s \quad (\text{IV-15-a})$$

$$y_{hd}(t) = H_{h-\min} \quad T_s \leq t \leq T_c \quad (\text{IV-15-b})$$

Les relations des contraintes sont décrites comme suit :

Enlèvement maximal de la hanche :

Notons que la hanche ne doit pas dépasser la valeur maximal $H_{h-\max}$ correspondant à l'abscisse S_m dans le temps T_m . On définit cette condition par les équations :

$$H_{h-\max} \leq L_1 + L_2 \quad (\text{IV-16})$$

$$y_h(T_m) = H_{h-\max} \quad (\text{IV-17})$$

$$\dot{y}_h(T_m) = 0 \quad (\text{IV-18})$$

Répétitivité de la marche :

Pour assurer la répétitivité de la marche, les positions et les vitesses angulaires au début de la PSS doivent être identiques à celles de la fin de la PDS. On exprime ces conditions par les équations suivantes :

$$x_{hs}(0) = X_{hs0} \quad (\text{IV-19})$$

$$x_{hd}(T_c) = \frac{3L_P}{4} \quad (\text{IV-20})$$

$$\dot{x}_{hs}(0) = V_{h1} \quad (\text{IV-21})$$

$$\dot{x}_{hd}(T_c) = V_{h1} \quad (\text{IV-22})$$

$$y_{hs}(0) = y_{hd}(T_c) = H_{h-\min} \quad (\text{IV-23})$$

$$\dot{y}_{hs}(0) = \dot{y}_{hd}(T_c) = 0 \quad (\text{IV-24})$$

où : $X_{hs0} = \frac{1}{4} L_P$



Continuité de la marche :

La trajectoire de la hanche doit être continue durant le cycle de la marche : le déplacement horizontal et les vitesses de la hanche à la fin de la PSS et le début de la PDS doivent être identiques. On écrit :

$$x_{hd}(T_s) = X_{hd0} \quad (\text{IV-25})$$

$$x_{hs}(T_s) = X_{hd0} \quad (\text{IV-26})$$

$$\dot{x}_{hs}(T_s) = V_{h2} \quad (\text{IV-27})$$

$$\dot{x}_{hd}(T_s) = V_{h2} \quad (\text{IV-28})$$

$$\dot{y}_{hs}(T_c) = \dot{y}_{hs}(T_s) \quad (\text{IV-29})$$

où :

$$\begin{aligned} X_{hd0} &= (L_P + X_{hs0} - 0,02L_P) \\ &= \left(\frac{3}{4} - 0,02\right)L_P \end{aligned}$$

De (IV-13-a) et (IV-13-b), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_{hs}(t) = c_1 + 2c_2t + 3c_3t^2 \\ \dot{x}_{hd}(t) = d_1 + 2d_2t + 3d_3t^2 \end{cases}$$

Coefficients de la PSS :

$$c_0 = X_{hs0}$$

$$c_1 = V_{h1}$$

$$c_2 = \left(\frac{1}{T_s^2}\right) [3(X_{hd0} - X_{hs0}) - 3V_{h1}T_s] - \left(\frac{1}{T_s}\right)(V_{h2} - V_{h1})$$

$$c_3 = \left(\frac{1}{T_s^2}\right) \left[V_{h2} - V_{h1} - \left(\frac{2}{T_s}\right)(X_{hd0} - X_{hs0} - V_{h1}T_s) \right]$$

Coefficients de la PDS :

$$d_3 = \frac{-\left(X_{hd0} - X_{hdf} - (T_s - T_c)\left(\frac{1}{2}\right)(V_{h1} + V_{h2})\right)}{(T_s - T_d)^4}$$

$$d_2 = \frac{(V_{h2} - V_{h1}) - 3d_3(T_s^2 - T_c^2)}{2(T_s - T_c)}$$

$$d_1 = V_{h1} - 2T_c d_2 - 3T_c^2 d_3$$

$$d_0 = X_{hd0} - V_{h1}T_s - d_2 T_s^2 - d_3 T_s^3$$



Pour les coefficients du mouvement vertical de la hanche (suivant l'axe y), on a :

$$\begin{aligned}
 k_0 &= H_{h-\min} ; \\
 k_1 &= 0 ; \\
 k_5 &= \frac{A_{1^\circ}}{A_{2^\circ}} ; \\
 k_4 &= \frac{(H_{h-\max} - H_{h-\min})}{(T_m^2 (T_s - T_m)^2)} - k_5 \frac{(4T_s^3 - 3T_m T_s^2 + T_m^3)}{(T_s - T_m)^2} ; \\
 k_3 &= \frac{(H_{h-\max} - H_{h-\min})}{(T_m^2 (T_s - T_m))} - k_4 (T_s + T_m) - k_5 \frac{(T_s^3 - T_m^3)}{(T_s - T_m)} ; \\
 k_2 &= \frac{(H_{h-\max} - H_{h-\min})}{T_m^2} - k_3 T_m - k_4 T_m^2 - k_5 T_m^3
 \end{aligned}$$

où:

$$\begin{aligned}
 A_{1^\circ} &= (H_{h-\max} - H_{h-\min}) \left(\frac{-2}{T_m} + \frac{1}{T_s - T_m} - \frac{T_m - T_s}{(T_s - T_m)^2} \right) ; \\
 A_{2^\circ} &= 3T_m^4 - \frac{T_m^2 (T_s^3 - T_m^3)}{(T_m - T_s)} + \frac{(9T_m^4 T_s^2 - 7T_m^3 T_s^3 - T_m^6 + T_s T_m^5 + 4T_m^2 T_s^4)}{(T_m - T_s)^2} ;
 \end{aligned}$$

IV.4.1. Simulation de la trajectoire de la hanche.

Parameters de simulation:

- Longueur du pas: $L_p = 0.56$ m.
- Position initiale de la hanche en PSS: $xh_{s0} = \frac{1}{4} L_p$.
- Position initiale et finale de la hanche en PSS respectivement : $xh_{d0} = (\frac{3}{4} - 0.02) L_p$,
 $xh_{dF} = \frac{3}{4} L_p$.
- Vitesses initiale de la PSS et PDS, respectivement : $V_{h1} = 0.008$ m/s , $V_{h2} = 0.09$ m/s .
- Période de la PSS et PDS, respectivement: $T_s = 1.3$ s , $T_d = 0.3$ s
- Période d'un pas: $T_p = T_s + T_d = 1.6$ s
- $T_m = \frac{T_s}{2}$, $H_p = 0.10$ m ,
- Hauteurs minimale et maximale de la hanche, respectivement : $H_{h-\min} = 0.62$ m , $H_{h-\max} = 0.64$ m
- Longueur des chaînons : $L_1 = 0.36$ m , $L_2 = 0.32$ m , $L_T = 0.35$ m.
- Nombre de pas : $k = 0, \dots, 2$.

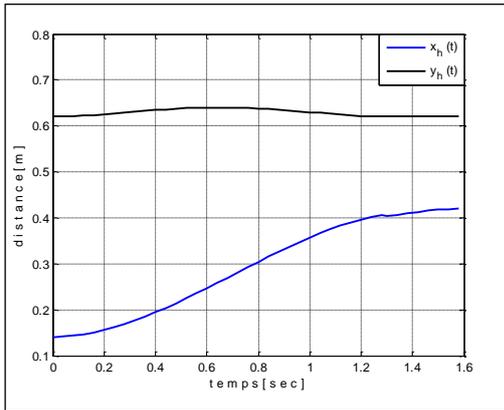


Fig IV.6 : allures des positions de la hanche (PSS et PDS)

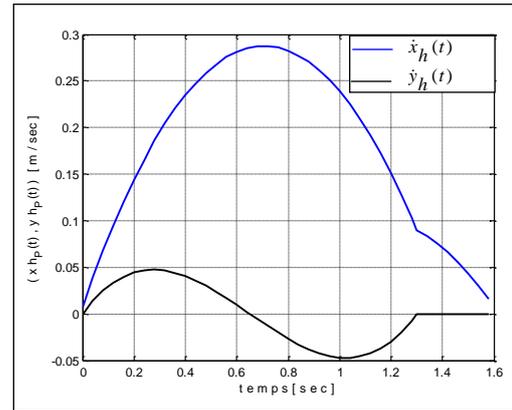


Fig IV.7 : allures des vitesses de la hanche (PSS et PDS)

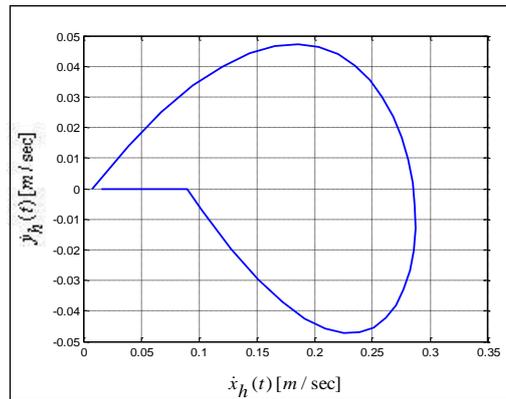


Fig IV.8 : trace de $\dot{y}_h(t)$ en fonction de $\dot{x}_h(t)$

Interprétation:

La figure IV.6 montre l'allure des graphes des deux fonctions définissant la position de la hanche. On remarque que ces courbes prennent des valeurs correspondant au choix des paramètres utilisés à la détermination des coefficients des fonctions d'interpolation. La courbe noire représente la hauteur de la hanche. Elle commence à une hauteur de 0.62 m jusqu'à avoir son maximum 0.64 m au temps $T_s/2$ puis diminue jusqu'à la valeur 0.62 juste à la fin de la PSS. Elle reste ensuite à la même élévation en PDS. La courbe bleue représente l'avancement de la hanche, c'est une courbe croissante.

Les courbes de la figure IV.7 représentent la vitesse de la hanche. En PSS, les deux courbes peuvent être interprétées de la même manière que celles du pied en vol. Par contre, en PDS, la vitesse $\dot{y}_h(t)$ est nulle et celle $\dot{x}_h(t)$ diminue progressivement jusqu'à ce qu'elle prend la valeur 0.09 m/sec (valeur choisie initialement), car à cette phase la hanche avance uniquement horizontalement.

La figure IV.8 montre la courbe de $\dot{y}_h(t)$ en fonction de $\dot{x}_h(t)$.

IV.5. Simulation du modèle géométrique inverse.

Les trajectoires du robot étant déterminées, on peut alors simuler le modèle géométrique inverse.



Paramètres de simulation :

- Vitesses initiales de la PSS et la PDS respectivement [m/s]: $V_{h1}=0.08$; $V_{h2}=0.10$.
- Hauteur maximale et minimale de la hanche respectivement [m] : $h_{\max}=0.64$; $h_{\min}=0.62$
- Hauteur maximale de pied en vol [m]: $h_p=0.10$.
- Période de la PSS [s]: $T_s=1,3$
- Période de la PDS [s]: $T_d=0.3$
- Période d'un pas [s]: $T_p=T_s+T_d=1.6$
- Temps moyen correspond à h_p [s]: $T_m=T_s/2$
- Longueurs des éléments [m]: $l_1=0.36$; $l_2=0.32$; $l_3=0.35$
- Longueur d'un pas [m]: $L_p=0.56$.
- Positions initiales de la hanche en PSS et la PDS respectivement [m]: $x_{s0}=0,18.L_p$, $x_{d0}=x_{df}-0.015$
- Position finale de la hanche en PDS[m] : $x_{df}=0,5.L_p+x_{s0}$.

Premier cas :

L'allure des trajectoires du pied en vol et de la hanche est définie par les fonctions polynomiales suivantes :

$$X_p : \begin{cases} x_p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \\ y_p(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + b_4t^4 + b_5t^5 \end{cases} \quad (k-1).T_s \leq kt \leq (k+1).T_s$$

$$X_h : \begin{cases} x_h(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 \\ y_h(t) = d_0 + d_1t + d_2t^2 + d_3t^3 + d_4t^4 + d_5t^5 \end{cases} \quad (k-1).T_s \leq kt \leq (k+1).T_s$$

Avec : $k=1 \dots n$

Les coefficients $a_i, b_i, c_i, et d_i$; $i=1 \dots 5$ sont calculés ci-dessus.

a- Simulation des trajectoires:

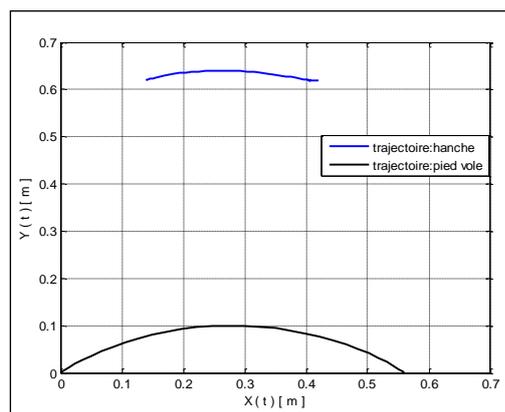


Figure IV.9 : trajectoire du robot

La courbe en haut (bleue) représente la trajectoire de la hanche et l'autre en bas (noire) représente celle du pied en vol.



b- Locomotion:

Pour qu'on puisse vérifier l'approche de calcul de notre modèle géométrique, on procède à la simulation pour les deux modèles analytiques de calculs géométriques indiqués au chapitre II. Les deux modèles dérivent de la modélisation géométrique; le premier du premier cheminement (angles réels), le second du deuxième cheminement (angles de simulation).

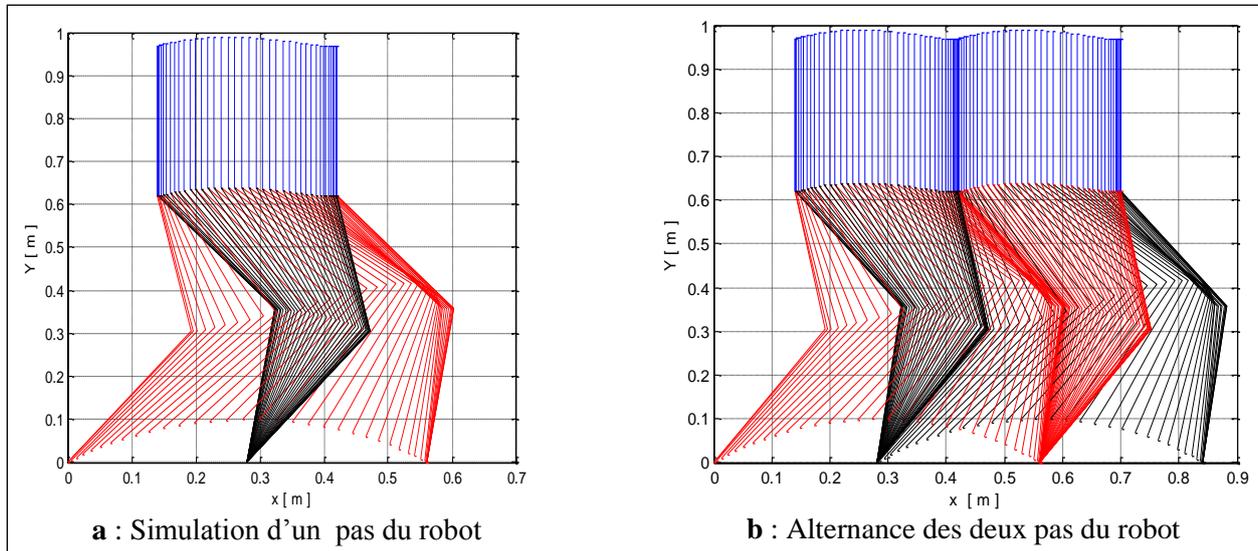


Figure IV.10 : simulation de MGI du robot (cas N°01)

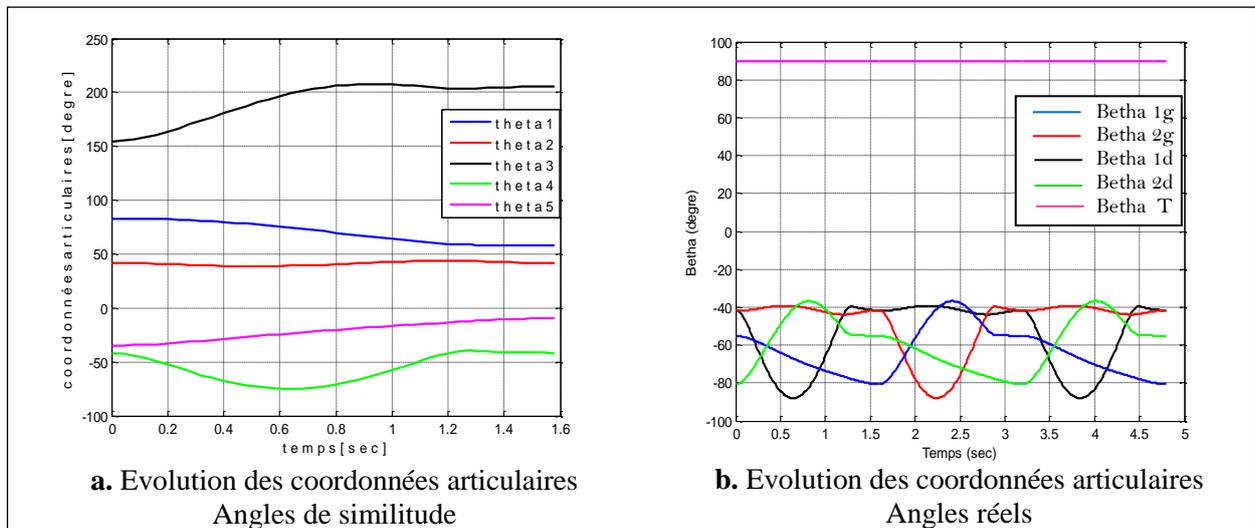


Figure IV.11 : simulation des coordonnées articulaires

La figure IV.10.a représente la simulation d'un pas de marche du robot.

La figure IV.11.a représente les allures des angles obtenus par la similitude pour un pas afin de distinguer l'évolution articulaire, avec la figure IV.11.b, entre les deux cas de cheminements montrés dans le chapitre de calcul géométrique (chapitre II).

La figure IV.11.b illustre les allures des angles réels du robot. Pour chaque pas, les angles de la patte droite reprennent les valeurs des angles de la patte gauche à $t = 1,6$ s et vis-vers-ça à chaque pas de marche. Ceci est dû à la symétrie géométrique du robot, d'une part et d'autre part, au choix des conditions initiales et finales à chaque pas afin d'assurer la continuité de locomotion.



2. Deuxième cas :

On utilise les mêmes équations de trajectoire mais en maintenant la hanche à une hauteur constante $y_h = 0.61 m$.

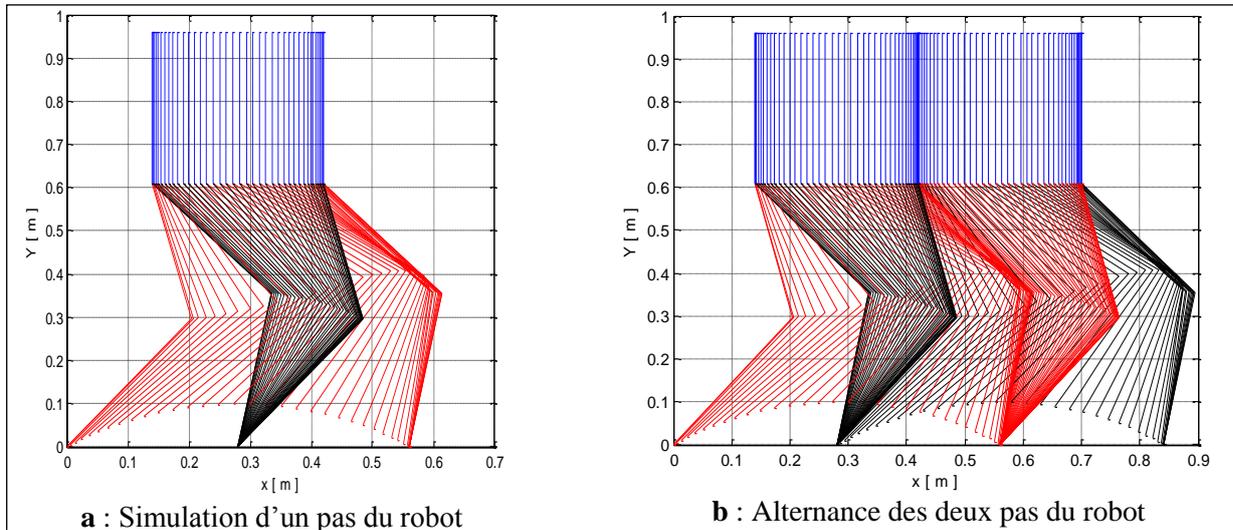


Figure IV.12. Simulation de MGI du robot (cas N°02)

IV.6. Conclusion.

Dans ce chapitre, on présente une méthode de génération de trajectoires de marche d'un robot bipède. Ces trajectoires sont définies par des fonctions d'interpolation polynomiales à coefficients constants que l'on détermine à partir des conditions géométriques et physiques du robot. Pour le modèle géométrique du robot bipède choisi et son cycle de marche, on a défini principalement deux trajectoires, celle de la hanche et celle du pied en vol. Chacune de ces deux trajectoires est définie par deux fonctions polynomiales correspondant aux deux phases de marche (phase simple support et phase double support) avec la prise en compte du problème de continuité entre les deux fonctions.

Des simulations de marche du robot sont présentées en programmation sous Matlab. Ces simulations sont aussi faites pour la génération de trajectoire avec le modèle géométrique inverse.

CHAPITRE V

MODELISATION DYNAMIQUE



V.1. Généralités.

V.1.1. Introduction.

La commande d'un robot d'une manière rapide et précise nécessite la prise en compte des contraintes dynamiques. La commande en temps réel peut être obtenue si l'on est capable de calculer en ligne la relation dénommée le modèle dynamique inverse dont le calcul consiste à écrire les relations entre les efforts généralisés de commande Γ à appliquer aux liaisons et les coordonnées articulaires θ , vitesses $\dot{\theta}$ et accélération $\ddot{\theta}$ généralisées qu'ils y produisent. Les équations du mouvement du robot s'écrivent sous la forme:

$$\Gamma = f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, f_e) \quad (\text{V-01})$$

Cette dernière est une forme implicite qui ne sépare pas entre les différentes variables. Il existe aussi la forme explicite particulière dans laquelle les accélérations généralisées apparaissent séparément des coordonnées et vitesses généralisées, ce qui peut être écrit sous la forme :

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + \bar{D}(q, \dot{q}) \quad (\text{V-02})$$

Où : Γ est le vecteur colonne des couples.

$A(q)$: Matrice d'inertie du robot.

$\bar{D}(q, \dot{q}) = D(q, \dot{q})\dot{q} + Q(q)$: rassemble les termes de forces centrifuges, de Coriolis, de gravité et articulaires.

$D(q, \dot{q})$: Matrice de termes de Coriolis et centrifuge.

$Q(q)$: Vecteur de forces de gravité.

V.1.2. Etude des différents formalismes utilisés à la dynamique.

Les formalismes les plus souvent utilisés pour le calcul du modèle dynamique en robotique sont : le Formalisme de **Newton-Euler** et de **Lagrange**.

a. Formalisme de Newton-Euler

Il est basé sur le théorème de la résultante dynamique (Théorème de Newton) et sur le théorème du moment cinétique (théorème d'Euler). Il ne fournit qu'une expression implicite du MDI. Il en résulte que sa mise en œuvre sur ordinateur est plus simple en raison du caractère itératif de ses équations. Toutefois, ce n'est qu'en 1979 que J.Y.S. Luth, M.W Walker et R.P.C Paul ont proposé un calcul itératif direct pour les vitesses et les accélérations et inverse pour les efforts. Récemment, divers auteurs ont montré que le nombre d'opérations arithmétiques nécessaires pourrait encore être réduit si le modèle est tout d'abord calculé analytiquement (symboliquement) dans une première phase, puis numériquement dans une seconde phase [01].

b. Formalisme de Lagrange

Ce formalisme utilise la fonction de Lagrange. Il permet d'obtenir une expression explicite du MDI dans laquelle apparaissent clairement les coordonnées, les vitesses et les accélérations articulaires. Les n équations scalaires obtenues appelées équations de Lagrange, ne font intervenir que les efforts généralisés de commande. L'avantage de ce formalisme réside dans l'élimination automatique des efforts d'interaction. Le calcul du modèle dynamique à l'aide de ce formalisme peut se faire par des méthodes tout à fait différentes.



V.1.3. Propriété du modèle dynamique

1. La matrice A est symétrique et définie positive, donc $A_{ij} = A_{ji}$;
2. Les énergies du corps C_j sont fonction de q_{k+1}, \dots, q_n (q_1, q_2, \dots, q_j) et $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_j)$;
3. A_{ij} est fonction de q_k , avec $k = \min(i, j)$ et des paramètres inertiels des corps C_r, \dots, C_n , avec $r = \max(i, j)$;
4. Le modèle dynamique est linéaire vis-à-vis des éléments des paramètres inertiels m_j, md_j et I_j , appelés paramètres inertiels standards, où :

${}^j I_j$ désigne le tenseur d'inertie du corps C_j par rapport au repère R_j ,

m_j la masse du corps C_j ,

${}^j md_j$ le premier moment d'inertie du corps C_j autour de l'origine du repère R_j ,

$${}^j I_j = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int x y dm & -\int x z dm \\ -\int x y dm & \int (x^2 + z^2) dm & \int y z dm \\ -\int x z dm & -\int y z dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XX_j & XY_j & XZ_j \\ XY_j & YY_j & YZ_j \\ XZ_j & YZ_j & ZZ_j \end{bmatrix}$$

5. Le robot est un système passif qui dissipe de l'énergie.

V.2. Calcul de base de la dynamique

V.2.1. Calcul de l'énergie cinétique.

L'énergie cinétique totale du système est donnée par l'équation :

$$E = \sum_{j=1}^n E_j \quad (\text{V-03})$$

Où E_j désigne l'énergie cinétique du corps C_j , qui s'exprime par :

$$E_j = \frac{1}{2} (\omega_j^T I_{G_j} \omega_j + m_j V_{G_j}^T V_{G_j}) \quad (\text{V-04})$$

La figure V.1 permet d'écrire :

$$P_{o,j} = P_{o,j-1} + L_{j-1,j} \quad (\text{V-05})$$

$$d_{o,j} = P_{o,j} + d_{jj} \quad (\text{V-06})$$

En dérivant, on obtient :

$$V_j = \dot{P}_{o,j} = \dot{P}_{o,j-1} + \omega_{j-1} \times L_{j-1,j} + \sigma_j \dot{q}_j z_j \quad (\text{V-07})$$

$$V_{G_j} = \dot{d}_{o,j} = \dot{P}_{o,j} + \omega_j \times d_{j,j} \quad (\text{V-08})$$

Remarque : Dans notre cas, toutes les articulations sont rotoïdes, donc $\sigma_j = 0 \Rightarrow \sigma_j \dot{q}_j {}^j a_j = 0$

Pour alléger l'écriture, réécrivant les équations (V-07) et (V-08) comme suit :



$$V_j = V_{j-1} + \omega_{j-1} \times L_{j-1,j} \quad (V-09-a)$$

$$V_{G_j} = V_j + \omega_j \times d_{jj} \quad (V-09-b)$$

Sachant que :

$$I_j = I_{G_j} - m_j \hat{d}_{jj} \hat{d}_{jj} \quad (V-10)$$

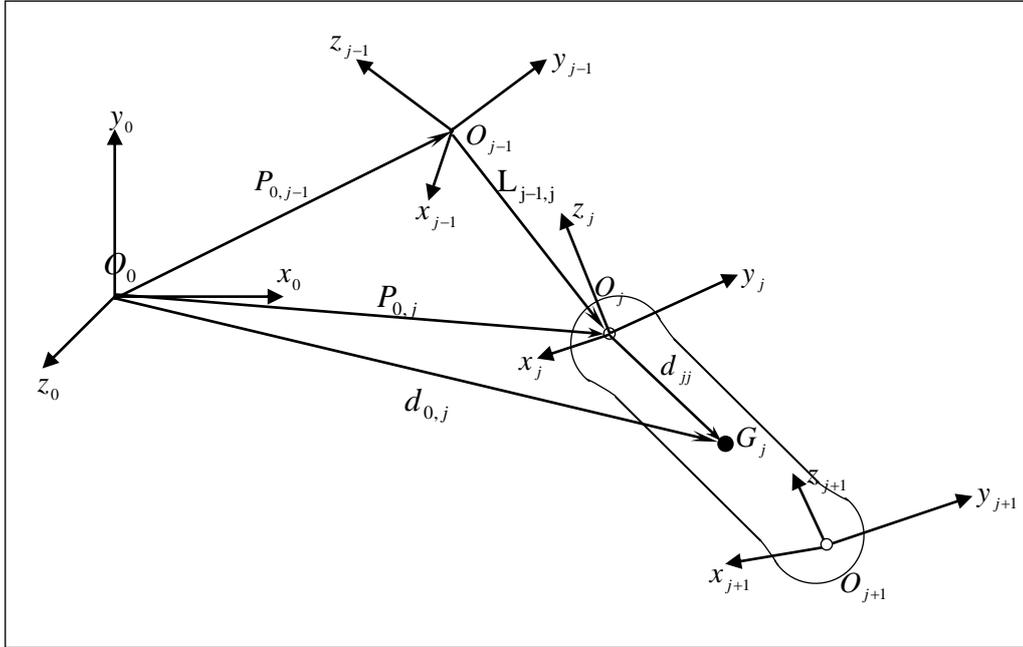


Fig V.1 : Composition des vitesses

la relation (V-04) devient :

$$E_j = \frac{1}{2} [(\omega_j^T I_j \omega_j + m_j V_j^T V_j + 2 m d_{jj}^T (V_j \times \omega_j))] \quad (V-11)$$

Contrairement à la relation (V-04), la relation (V-11) est linéaire vis-à-vis des éléments de m_j , $m d_{jj}$ et I_j , appelés paramètres inertiels standard.

Le calcul de V_j et de ω_j se fait par les équations de composition des vitesses :

$$\omega_j = \omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j z_j \quad (V-12)$$

$$V_j = V_{j-1} + \omega_{j-1} \times L_{j-1,j} + \sigma_j \dot{q}_j z_j \quad (V-13)$$

Dans l'équation (V-11), tous les éléments doivent être exprimés dans le même repère. La façon la plus simple est de l'exprimer dans le repère R_j . On réécrit donc les équations (V-11), (V-12), (V-13) donnant ${}^j E_j$, ${}^j \omega_j$ et ${}^j V_j$

$$E_j = \frac{1}{2} [({}^j \omega_j^T {}^j I_j {}^j \omega_j + m_j {}^j V_j^T {}^j V_j + 2 m_j {}^j d_{jj}^T ({}^j V_j \times {}^j \omega_j))] \quad (V-14)$$

Avec :

$${}^j \omega_j = {}^j \omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j {}^j z_j$$

$${}^j V_j = {}^j V_{j-1} + {}^j \omega_{j-1} \times {}^j L_j + \sigma_j \dot{q}_j {}^j z_j$$



Sachant que: ${}^j\omega_{j-1} = {}^jA_{j-1} {}^{j-1}\omega_{j-1}$ et ${}^jV_{j-1} = {}^jA_{j-1} {}^{j-1}V_{j-1}$

il vient :

$${}^j\omega_j = {}^j\omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j z_j = {}^jA_{j-1} {}^{j-1}\omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j {}^jz_j \quad (\text{V-15-a})$$

$${}^jV_j = {}^jA_{j-1} ({}^{j-1}V_{j-1} + {}^{j-1}\omega_{j-1} \times {}^{j-1}P_j) + \sigma_j \dot{q}_j {}^jz_j \quad (\text{V-15-b})$$

Où : ${}^{j-1}P_j$ est le vecteur de position exprimant le repère j dans le repère $j-1$.

En substituant, l'équation (V-15) dans équation (V-09), on trouve la vitesse du centre de gravité de chaque chaînon :

$${}^jV_{G_j} = {}^jV_j + {}^j\omega_j \times {}^jd_j \quad (\text{V-16})$$

Les termes jI_j et jmd_j sont constants. Ils seront notés I_j et md_j pour alléger l'écriture.

En utilisant les vecteurs du torseur cinématique, les relations précédentes s'écrivent :

$$E_j = \frac{1}{2} {}^j\bar{V}_j^T {}^j\bar{I}_j {}^j\bar{V}_j \quad (\text{V-17})$$

Avec :

$${}^j\bar{V}_j = \begin{bmatrix} {}^jV_j \\ {}^j\omega_j \end{bmatrix} \quad (\text{V-18})$$

$${}^j\bar{I}_j = \begin{bmatrix} m_j I(3) & -{}^jmd_j \\ {}^jmd_j & {}^jI_j \end{bmatrix} \quad (\text{V-19})$$

I_3 : Matrice d'identité d'ordre (3x3).

Les relations de récurrence entre les vitesses de rotation et de translation (V-15) et (V-16) peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$${}^j\bar{V}_j = {}^j\bar{T}_{j-1} {}^{j-1}\bar{V}_{j-1} + \dot{q}_j {}^j\bar{z}_j$$

${}^j\bar{T}_{j-1}$ est la matrice de transformation entre torseurs de dimension (6x6) :

$${}^j\bar{T}_{j-1} = \begin{bmatrix} {}^jA_{j-1} & -{}^jA_{j-1} {}^{j-1}\hat{P}_j \\ \mathbf{0}_3 & {}^jA_{j-1} \end{bmatrix} \quad (\text{V-20-a})$$

${}^j\bar{z}_j$ est la matrice colonne (6x1) définie par :

$${}^j\bar{z}_j = \begin{bmatrix} \sigma_j {}^jz_j \\ \bar{\sigma}_j {}^jz_j \end{bmatrix} \quad (\text{V-20-b})$$



V.2.2. Calcul de l'énergie potentielle.

L'énergie potentielle s'écrit :

$$U = \sum_{j=1}^n U_j = \sum_{j=1}^n -m_j g^T (L_{0,j} + d_j) \quad (\text{V-21})$$

$L_{0,j}$: désignant le vecteur d'origine O_0 et d'extrémité O_j .

U_j : L'énergie potentielle du chaînon C_j

En projetant les vecteurs de cette relation dans R_0 , on obtient :

$$U_j = -m_j {}^0g^T ({}^0P_j + {}^0A_j {}^j d_j) \quad (\text{V-22-a})$$

$$U_j = -m_j {}^0g^T ({}^0P_j + {}^0A_j {}^j d_{jj}) = -[{}^0g^T \quad 0] {}^0T_j \begin{bmatrix} {}^j m d_j \\ m_j \end{bmatrix} \quad (\text{V-22-b})$$

Qui est linéaire en m_j et aussi vis-à-vis des éléments de ${}^j m d_j$.

Les énergies potentielles et cinétiques étant linéaires par rapport aux paramètres inertiels, le modèle dynamique l'est également.

V.3. Calcul itératif des couples nécessaires aux actionneurs.

V.3.1. Equation de Newton-Euler par rapport aux paramètres inertiels.

Dans ce paragraphe, on présente un algorithme de Newton-Euler fondé sur la double récurrence, exprimant le torseur dynamique des efforts extérieurs en utilisant les paramètres inertiels m_j , $m d_j$ et I_j . Le modèle ainsi engendré est linéaire par rapport aux paramètres inertiels. Il peut être calculé en utilisant les paramètres inertiels de base et en appliquant les propriétés de la linéarité.

L'équation de Newton-Euler lie les forces et les moments des centres de gravité des chaînons aux vitesses et accélérations. Considérons un chaînon j intermédiaire isolé du robot, avec des forces et des moments agissant sur lui. Fixons au chaînon j un système de coordonnées en son centre de gravité G_j , comme indiqué à la figure V.2.

Le second principe de Newton donne :

$$F_j = \frac{dP_j}{dt} \quad (\text{V-23})$$

$$M_j = \frac{dH_j}{dt} \quad (\text{V-24})$$

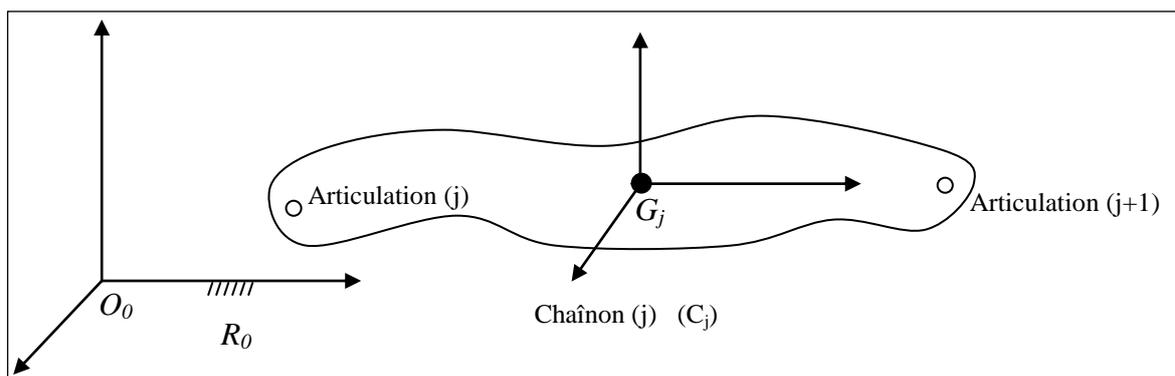


Fig V.2 : repérage d'un chaînon (C_j)



F_j : Force agissante sur le corps C_j au point O_j

M_j : Moment autour du point O_j

P_j : Quantité du mouvement du chaînon C_j . $P_j = m_j V_j$

H_j : Moment cinétique du corps C_j autour O_j : $H_j = I_j \omega_j$.

En substituant les deux quantités de P_j et H_j dans les équations (V-23) et (V-24), on trouve :

$$F_j = m_j \gamma_j \quad (\text{V-25})$$

$$M_j = I_j a_j + \omega_j \times (I_j \omega_j) \quad (\text{V-26})$$

γ_j : L'accélération linéaire du point O_j du corps C_j exprimé dans R_0 ;

a_j : L'accélération angulaire du corps C_j exprimé dans R_0 ;

L'équation dynamique du chaînon j peut être représentée par ces deux équations :

- L'équation (V-25) décrivant le mouvement de translation du point O_j ;
- L'équation (V-26) décrivant le mouvement de rotation autour du point O_j .

V.3.1.1. Forces et couples appliqués à un chaînon isolé du robot.

En utilisant l'approche du corps libre, comme représenté dans la figure V.3, un chaînon j de la chaîne cinématique isolé est soumis à l'effet des chaînons voisins tels que les forces et les couples.

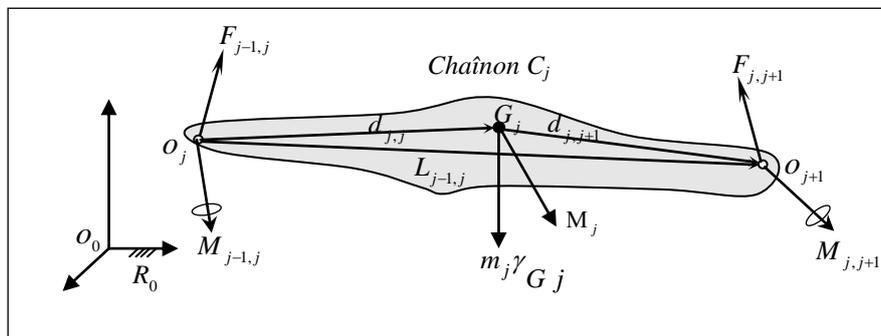


Fig V.3 : Forces et couples agissent sur le corps C_j

- Chaînon $j-1$ applique une force à travers l'articulation j ($f_{j-1,j}$);
- Chaînon $j+1$ applique une force à travers l'articulation $j+1$ ($f_{j,j+1}$);
- Les efforts dus aux effets d'inerties, appliqués au point O_j du chaînon C_j ($F_j = m_j \gamma_j$),
($M_j = I_j \ddot{\theta}_j$)

L'équation du mouvement dynamique du chaînon C_j est donc :

$$F_j = f_{j-1,j} - f_{j,j+1} + m_j g = m_j \gamma_j \quad (\text{V-27})$$

Pour le bilan des couples, les forces dues aux chaînons adjacents engendrent des moments autour du point O_j . Des couples externes dus aux actionneurs et aux frictions agissent également sur



les articulations. La force de la pesanteur agit sur le centre de la masse, elle ne contribue pas l'effet des couples.

$$\begin{aligned} M_j &= \mathcal{M}_{j-1,j} - \mathcal{M}_{j,j+1} + d_{j,j} \times m_j g + L_{j,j+1} \times F_{j,j+1} \\ &= I_j a_j + \omega_j \times (I_j \omega_j) \end{aligned} \tag{V-28}$$

où:

$\mathcal{M}_{j-1,j}$ ($\mathcal{M}_{j,j+1}$) : Couple appliqué sur le chaînon C_j par le chaînon C_{j-1} (C_{j+1});

$d_{j,j}$: Vecteur liant l'origine O_{j-1} du repère R_{j-1} (articulation $j-1$) avec l'origine G_j du centre de masse ;

$L_{j,j+1}$: Vecteur liant l'origine O_j du repère R_j (articulation j) avec l'origine O_{j+1} du repère R_{j+1} (articulation $j+1$).

Par réarrangement des équations (V-27) et (V-28), on peut réécrire les expressions des force et moments au niveau des articulations :

$$f_{j-1,j} = m_j \gamma_j + f_{j,j+1} - m_j g \tag{V-29-a}$$

$$f_{j-1,j} = F_j + f_{j,j+1} - m_j g \tag{V-29-b}$$

$$\mathcal{M}_{j-1,j} = M_j + \mathcal{M}_{j,j+1} + d_{j,j} \times m_j g + d_{j,j+1} \times f_{j,j+1} \tag{V-30}$$

On peut faire intervenir l'effet de la gravité sans avoir à la prendre en compte dans le bilan des efforts. Pour cela, on prend [24]:

$$\dot{V}_0 = -g$$

De (V-26) et (V-30), on obtient :

$$\mathcal{M}_{j-1,j} = \mathcal{M}_{j,j+1} + d_{j,j} \times m_j g + L_{j,j+1} \times f_{j,j+1} + I_j a_j + \omega_j \times (I_j \omega_j) \tag{V-31}$$

On obtient alors les couples aux actionneurs Γ_j en projetant, suivant la nature de l'articulation j , les vecteurs F_j ou M_j sur l'axe du mouvement. On ajoute les termes correctifs représentant l'effet des frottements et des inerties des actionneurs, ce qui donne :

$$\Gamma_j = (\sigma_j F_j + \bar{\sigma}_j M_j)^T {}^j z_j + F_{sj} \text{Sign}(\dot{q}_j) + F_{Vj} \dot{q}_j + I_{aj} \ddot{q}_j \tag{V-32}$$

V.3.1.2. Exemple [04]

La figure V.4 montre un exemple d'une chaîne cinématique ouverte composée de trois chaînons en repos. En raison de la force de la gravité, ces trois chaînons exercent mutuellement action et réaction des forces et des couples l'un sur l'autre. Pour étudier l'effet des forces et des couples, on peut décomposer la chaîne cinématique ouverte en jeu de corps rigides indépendants. Les interactions entre les corps rigides sont régies par les forces/couples d'action et de réaction.

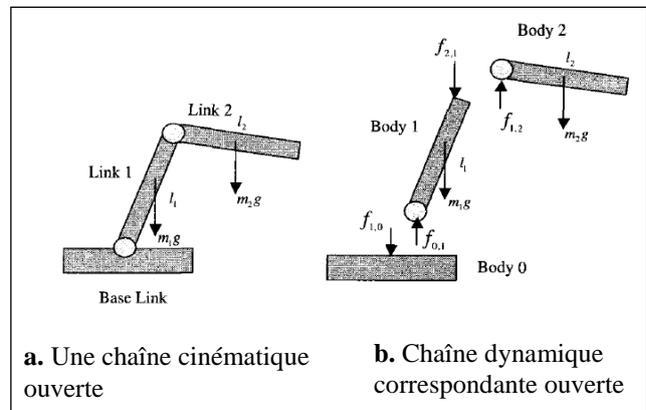


Fig V.4 : Chaîne dynamique ouverte.

Dans cet exemple, on a :



$$\begin{cases} f_{0,1} = -f_{1,0} \\ f_{1,2} = -f_{2,1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tau_{0,1} = -\tau_{1,0} \\ \tau_{1,2} = -\tau_{2,1} \end{cases}$$

Ainsi, on peut organiser un algorithme permettant de calculer les différentes quantités du modèle dynamique du robot comme suit :

Calcul itératif direct :

Il permet de calculer F_j et M_j à partir des relations (V-25) et (V-26). Pour ce faire, il faut calculer ω_j, a_j et γ_{Gj} . Les formules de composition des vitesses donnent :

Pour $j=1 \dots n$;

$$\begin{aligned} {}^j \omega_{j-1} &= {}^j A_{j-1} {}^{j-1} \omega_{j-1} \\ {}^j \omega_j &= {}^j \omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j {}^j z_j \\ {}^j V_{j-1} &= {}^j A_{j-1} {}^{j-1} V_{j-1} \\ {}^j V_j &= {}^j V_{j-1} + {}^j \omega_{j-1} \times {}^j L_j + \sigma_j \dot{q}_j {}^j z_j \\ {}^j V_{Gj} &= {}^j V_j + {}^j \omega_j \times {}^j d_j \end{aligned}$$

Leurs dérivées par rapport au temps donnent :

$${}^j \dot{\omega}_{j-1} = {}^j A_{j-1} {}^{j-1} \dot{\omega}_{j-1} \quad (\text{V-33})$$

$${}^j \dot{\omega}_j = {}^j \dot{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j (\ddot{q}_j z_j + \omega_{j-1} \times \dot{q}_j z_j) \quad (\text{V-34})$$

$${}^j \dot{V}_{j-1} = {}^j A_{j-1} {}^{j-1} \dot{V}_{j-1} \quad (\text{V-35})$$

$${}^j \dot{\gamma}_j = {}^j \dot{V}_j = {}^j \dot{V}_{j-1} + {}^j \dot{\omega}_{j-1} \times L_{j-1,j} + {}^j \omega_{j-1} \times ({}^j \omega_{j-1} \times L_{j-1,j}) + \sigma_j (\ddot{q}_j z_j + 2 {}^j \omega_{j-1} \times \dot{q}_j z_j) \quad (\text{V-36})$$

$$\dot{\gamma}_{Gj} = {}^j \dot{V}_j + {}^j \dot{\omega}_j \times {}^j d_{jj} + {}^j \omega_j \times ({}^j \omega_j \times {}^j d_{jj}) \quad (\text{V-37})$$

$$F_j = m_j \gamma_j \quad (\text{V-38})$$

$$M_j = I_j a_j + {}^j \omega_j \times (I_j {}^j \omega_j) \quad (\text{V-39})$$

Réurrence initiale : $\omega_0 = a_0 = V_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\dot{V}_0 = -g.z_j$ avec : $z_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T$

Calcul itératif Inverse :

Les équations qui composent la récurrence inverse sont obtenues à partir du bilan des efforts de chaque corps. On obtient :

Pour $j=n \dots 1$;

$$f_{j-1,j} = F_j + f_{j,j+1} - m_j g \quad (\text{V-40})$$

$$\mathcal{M}_{j-1,j} = M_j + \mathcal{M}_{j,j+1} + d_{j,j} \times f_{j-1,j} - d_{j,j+1} \times f_{j,j+1} \quad (\text{V-41})$$

V.3.2. Equations dynamiques du robot.



Elles sont obtenues par le formalisme de Lagrange qui décrit les équations de mouvement en termes de travail et d'énergie du système, ce qui se traduit, lorsqu'on n'a pas d'action extérieure appliquée sur le robot, par l'équation suivante :

$$\Gamma = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{V-42})$$

avec :

L : Lagrangien du système : $L = E - U$;

E : Energie cinétique totale du système ;

U : Energie potentiel totale du système ;

Sa forme générale peut être écrite comme suite :

$$A(q)\ddot{q} + D(q, \dot{q})\dot{q} + Q(q) = \Gamma - J^T F_{ext} \quad (\text{V-43})$$

Avec : $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ $D \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ $Q \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$ et $(J^T F_{ext}) \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$.

$A(q)$: Matrice d'inertie du robot

$D(q, \dot{q})$: Matrice des forces centripètes, Coriolis et d'inertie

$Q(q)$: Vecteur des forces et couples des forces de gravité.

V.3.2.1. Calcul des matrices A , D et Q de l'équation dynamique du robot.

L'énergie cinétique du système est une fonction quadratique des vitesses articulaires :

$$E = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} \quad (\text{V-44})$$

$A(q)$: est la matrice ($n \times n$) de l'énergie cinétique, d'élément générique A_{ij} , appelée aussi matrice d'inertie du robot, qui est symétrique et définie positive. Ses éléments sont fonction des variables articulaire q .

En effet, on remarque, d'après cette équation (V-44), que l'élément A_{jj} de la matrice A égal au coefficient de $\dot{q}_j^2 / 2$ dans l'expression de l'énergie cinétique, tandis que l'élément A_{ij} , si $i \neq j$ est égal au coefficient de $\dot{q}_i \dot{q}_j$.

Les éléments du vecteur $Q(q)$ se calculent en écrivant :

$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (\text{V-45})$$

Une deuxième écriture de l'équation dynamique du robot est donnée par :

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + \bar{D}(q, \dot{q}) \quad (\text{V-46})$$

avec :

$$\bar{D}(q, \dot{q}) = D(q, \dot{q})\dot{q} + Q(q) + J^T F_{ext} \quad (\text{V-47})$$

A partir de l'équation (V-46), on a :

$$\bar{D}(q, \dot{q}) = \Gamma, \text{ si } \ddot{q} = 0.$$

En utilisant le formalisme de Newton-Euler avec $\ddot{q} = 0$, on peut calculer les $\bar{D}(q, \dot{q})$. Sachant qu'on peut aisément calculer le vecteur $Q(q)$ donné par l'équation (V-45), on peut donc écrire :



$$D(q, \dot{q})\dot{q} = \bar{D}(q, \dot{q}) - Q(q) - J^T F_{ext} \quad (V-48)$$

V.4. Application au robot.

La locomotion du robot bipède sur un plan purement horizontal est construite dans le plan sagittal. Par alternance des pas, ce cycle de marche va se répéter pour déplacer le corps du robot d'une position à une autre. Un cycle de marche provient par la succession de deux pas symétriques. On va donc modéliser un seul pas sachant qu'un pas (demi-cycle) inclut trois étapes distinctes :

1. phase de simple support ;
2. phase d'impact pied-sol (phase transitoire) ;
3. phase de double support.

V.4.1. Phase de simple support (PSS)

Cette phase est définie lorsque qu'un pied est au sol et l'autre en vol. Le pied support porte le poids entier du corps (Figure.V.5).

Hypothèses :

- un frottement pied-sol suffisant pour empêcher le glissement.
- La vitesse linéaire du pied support est nulle ($\dot{x}_p = \dot{y}_p = 0$).

Dans cette phase, on considère que le robot est composé de trois organes terminaux, le pied en vol, le pied support et le tronc.

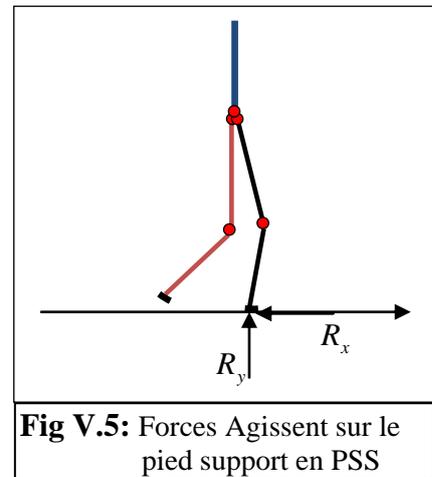


Fig V.5: Forces Agissent sur le pied support en PSS

On procède au calcul avec les conditions suivantes :

Calcul itératif direct : Pour $j = 1 \dots n$.

Le calcul itératif direct est le même pour les trois organes terminaux.

Réurrence initiale par : $\omega_0 = a_0 = V_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\dot{V}_0 = -g \cdot \varrho_j$ avec : $\varrho_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T$ c'est ϱ_j ?

Calcul Itératif Inverse : Pour $j = n \dots 1$;

- ❖ Pour le pied en vol : Réurrence initiale par les efforts : $f_{n,n+1} = 0$ et $\mathcal{M}_{n,n+1} = 0$.
- ❖ Pour le tronc : Réurrence initiale pour les efforts : $f_{n,n+1} = 0$ et $\mathcal{M}_{n,n+1} = 0$.
- ❖ Pour le pied support : Réurrence initiale pour les efforts : $f_{j,j+1} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ 0 \end{bmatrix}^T$ et $\mathcal{M}_{j,j+1} = 0$.



V.4.2. Phase Transitoire (Phase d'impact) (PT).

Durant cette phase, le pied oscillant entre en contact soudainement avec le sol. Cela implique un changement de l'état physique du robot, ce qui signifie un changement brusque des vitesses angulaires de chaque articulation.

On admet que ceci a lieu dans un intervalle de temps infinitésimal $[t_0, t_0 + \Delta t]$, car la vitesse des pieds doit être nulle. Ce moment très court indique la fin de la PSS et le début de la PDS. Pour cette phase, on fait les hypothèses suivantes [60]:

- Le contact pied-sol est rigide, le pied ne peut en aucun cas pénétrer dans le sol ;
- Il n'y a pas de glissement pied-sol.

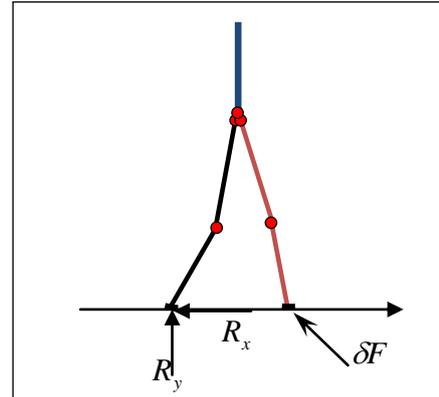


Fig V.6: Forces appliquées sur les pieds du robot en PT

Soient X_p le point du pied en vol exprimé dans le repère absolu, \dot{X}_p sa vitesse et $X_{contact}$ le point du contact. Le contact se produira lorsque [60] :

$$X_p = X_{contact}$$

Au contact pied en vol avec le sol durant la période transitoire, il se produit une force que l'on désigne par δF donnée par :

$$\delta F = \left[\frac{\partial X_p(\theta)}{\partial \theta} \right]^T \bar{\lambda} = J_p^T \bar{\lambda} \quad (V-49)$$

J_p : est la matrice Jacobienne du pied oscillant ;

$\bar{\lambda}$: Vecteur colonne, représentant les multiplicateurs de Lagrange correspondants aux forces de contact.

Le mouvement juste avant l'impact est régi par la même équation (V-02) :

$$A(q)\ddot{q} + D(q, \dot{q})\dot{q} + Q(q) = \Gamma$$

Et, l'équation gouvernante le mouvement juste après l'impact est [60]:

$$A(q)\ddot{q} + D(q, \dot{q})\dot{q} + Q(q) = \Gamma + \delta F \quad (V-50)$$

En faisant l'intégration de cette dernière sur l'intervalle infinitésimal $[t_0, t_0 + \Delta t]$, on peut écrire :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} A(q)\ddot{q} dt + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} [D(q, \dot{q})\dot{q} + Q(q) - \Gamma] dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \delta F dt \quad (V-51)$$

Comme : $\Delta t \rightarrow 0$,

il vient :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} [D(q, \dot{q})\dot{q} + Q(q) - \Gamma] dt \rightarrow 0$$

d'où, l'équation (V-51) devient :

$$A(q)\Delta \dot{q} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \delta F dt = J_p^T \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \bar{\lambda} dt \quad (V-52)$$



A partir du modèle cinématique, nous exprimons la vitesse linéaire en fonction de \dot{q} par la relation :

$$\dot{X} = J \dot{q}$$

alors :

$$\dot{X}_p = V_p = J_p \dot{q} \quad (\text{V-53})$$

Sachant que la vitesse relative entre $[t_0, t_0 + \Delta t]$ est donnée par [60] :

$$\Delta V_p = V_p(t_0 + \Delta t) - V_p(t_0)$$

Compte tenu de l'équation (V-53), on obtient donc :

$$V_p(t_0 + \Delta t) - V_p(t_0) = J_p [\dot{q}(t_0 + \Delta t) - \dot{q}(t_0)] \quad (\text{V-54})$$

De l'équation (V-52), on aura :

$$\Delta \dot{q} = [A(q)]^{-1} J_p^T \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \bar{\lambda} dt \quad (\text{V-55})$$

$$J_p \Delta \dot{q} = J_p \left[[A(q)]^{-1} J_p^T \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \bar{\lambda} dt \right] = \Delta V_p \quad (\text{V-56})$$

alors :

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \bar{\lambda} dt = [J_p [A(q)]^{-1} J_p^T]^{-1} \Delta V_p \quad (\text{V-57})$$

En substituant (V-57) dans (V-56), on obtient :

$$\Delta \dot{q} = [A(q)]^{-1} J_p^T [J_p [A(q)]^{-1} J_p^T]^{-1} \Delta V_p \quad (\text{V-57-a})$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{q} &= \dot{q}_{\text{après}} - \dot{q}_{\text{avant}} \\ \Delta V_p &= V_{p,\text{après}} - V_{p,\text{avant}} \end{aligned}$$

La vitesse linéaire du pied de l'impact immédiatement après l'impact est nulle ($V_{p,\text{après}} = 0$), d'où :

$$\Delta V_p = -V_{p,\text{avant}}$$

Il vient :

$$\dot{q}_{\text{après}} = \dot{q}_{\text{avant}} + [A(q)]^{-1} J_p^T [J_p [A(q)]^{-1} J_p^T]^{-1} V_{p,\text{avant}} \quad (\text{V-57-b})$$

Ainsi, la force exercée sur le pied d'impact est égale à [60] :

$$\delta F = J_p^T \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \bar{\lambda} dt = -J_p^T [J_p [A(q)]^{-1} J_p^T]^{-1} V_{p,\text{avant}} \quad (\text{V-58})$$

Les conditions de récurrences sont comme suit :

Calcul itératif direct : Pour $j = 1 \dots n$;

$$\text{Récurrence initiale par : } \omega_0 = a_0 = V_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \dot{V}_0 = -g \cdot g_j \text{ avec : } g_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$



Calcul Itératif Inverse : Pour $j = n \dots 1$;

❖ Pied d'impact :

$$\text{Récurrence initiale par les efforts : } \{f_{n,n+1}\} = \begin{Bmatrix} \delta F_x \\ \delta F_y \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \{\mathcal{M}_{n,n+1}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

❖ Pied support : Récurrence initiale pour les efforts : $f_{n,n+1} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ 0 \end{Bmatrix}^T$ et $\{\mathcal{M}_{n,n+1}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$.

❖ Tronc :

$$\text{Récurrence initiale pour les efforts : } \{f_{n,n+1}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \{\mathcal{M}_{n,n+1}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

V.4.3. Phase Double Support (PDS)

Le robot commence la phase double support quand les deux pieds seront en contact avec le sol. En ce moment, leurs vitesses seront nulles. Le robot forme alors une chaîne fermée avec le sol.

Juste après l'impact, et généralement dans un intervalle de temps $[T_s, T_c]$ Tel que $T_c - T_s = T_d \cong 0,02T_s$, on suppose que, chaque pied supporte la moitié des forces dues à la dynamique du robot (figure V.7)

On fait isoler le système pied-sol, et on propose:

Hypothèses :

- Il n'y aura pas de moment autour des pieds ;
- Le robot est statiquement équilibré, car, à ce moment là, le robot se translate avec des vitesses très réduites ;
- Les valeurs des deux réactions aux pieds (N_1, N_2) telles que :

$$\begin{aligned} N_1 &= [0 \quad -R_1 \quad 0] \\ N_2 &= [0 \quad -R_2 \quad 0] \end{aligned} \tag{V-59}$$

sont égales ($R_1 = R_2$); leurs valeurs sont considérées dans le modèle statique du robot (Chap-III-).

Conditions de récurrences :

Calcul itératif direct : Pour $j = 1 \dots n$;

$$\text{Récurrence initiale par : } \omega_0 = a_0 = V_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \dot{V}_0 = -g \cdot g_j \text{ avec : } g_j = \begin{Bmatrix} 0, \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}^T$$

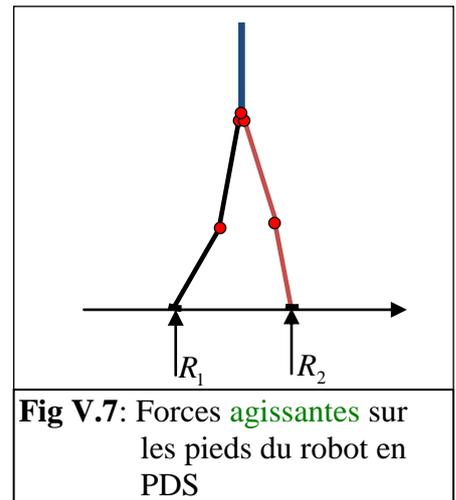


Fig V.7: Forces agissantes sur les pieds du robot en PDS



Calcul Itératif Inverse : Pour $j = n \dots 1$;

❖ Pied d'impact :

$$\text{Récurrence initiale par les efforts : } \{f_{n,n+1}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \{\mathcal{M}_{n,n+1}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

❖ Pied support : Récurrence initiale pour les efforts : $f_{n,n+1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R2 \\ 0 \end{Bmatrix}^T$ et $\{\mathcal{M}_{n,n+1}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$.

❖ Tronc :

$$\text{Récurrence initiale pour les efforts : } \{f_{n,n+1}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \{\mathcal{M}_{n,n+1}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

V.5. Simulation.

La simulation est faite sur un pas du robot sans tenir compte de l'effet d'impact du pied en vol avec le sol.

Paramètres de simulation :

- Vitesses initiales de la PSS et la PDS respectivement [m/s]: $V_{h1}=0.08$; $V_{h2}=0.04$
- Hauteurs maximale et minimale de la hanche respectivement [m] : $h_{max}=0.64$; $h_{min}=0.62$
- Hauteur maximale de pied en vol [m] : $h_p=0.10$
- Accélération de pesanteur [m/s^2] : $g=10$
- Période de la PSS [s]: $T_s=1,3$
- Période de la PDS [s]: $T_d=0.3$
- Période d'un pas [s]: $T_p = T_s + T_d = 1.6$
- Temps moyen correspond à h_p [s]: $T_m=T_s/2$
- Longueurs des éléments [m]: $l_1=0.36$; $l_2=0.32$; $l_t=0.35$
- Longueur d'un pas [m]: $L_p=0.56$.
- Positions initiales de la hanche en PSS et PDS respectivement :
 $x_{s0}=0,18L_p$; $x_{d0}=x_{df}-0.015$
- Position finale de la hanche en PDS[m] : $x_{df}=0,5.L_p+x_{s0}$.
- Moments d'inerties centraux [m^4] : $I_{x1}=0.0085$; $I_{y1}=0.7879$; $I_{z1}=0.338$; $I_{x2}=0.009456$; $I_{y2}=0.8817$; $I_{z2}=0.3678$; $I_{xt}=0.006072$; $I_{yt}=0.55056$; $I_{zt}=0.258306$.
- Masses [kg] : $m_1=1.22472$; $m_2=0.96768$; $m_t=3.157625$

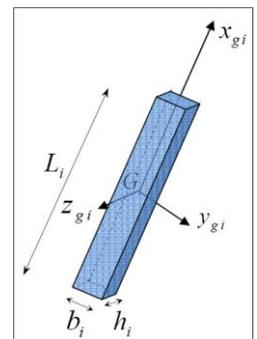


Fig VI.12 : Géométrie des chaînons

V.5.1. forces de réaction.

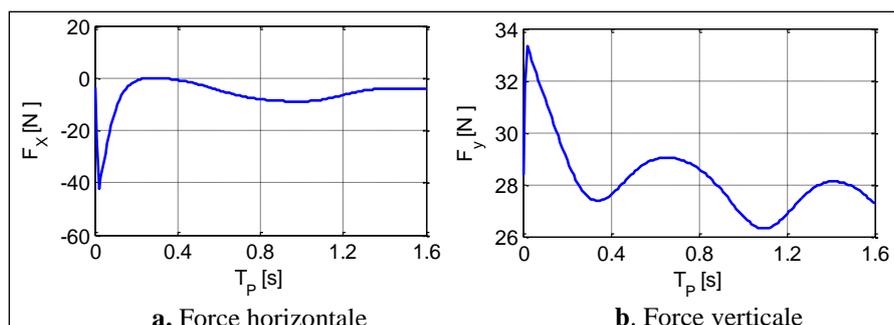


Fig.V.8 : Evolution des forces de réaction (sol-pied)



Interprétation :

La figure V.8 montre l'évolution des forces de réaction du pied support (force horizontale et force verticale); le robot étant initialement dans la position repos.

Au début de son mouvement, le robot commence à soulever son corps pour faire la marche. Comme, en ce moment, son poids se trouve derrière le pied support, une force d'inertie importante s'oppose au mouvement. Par conséquent, la force de réaction sol-pied support est aussi importante.

La figure V.8.a montre l'allure de la force de réaction suivant l'axe horizontal. On y voit qu'au démarrage du robot, cette force prend la valeur -43N (le signe $(-)$ indique que la force est de sens opposé à l'axe x). Elle diminue ensuite jusqu'à s'annuler au temps $0,3\text{s}$. Dans l'intervalle de temps $[0,3 ; 1,30]$, la réaction prend une valeur voisine de -10N . Dans la suite, elle tend vers la valeur -5N car le robot maintient en ce moment sa phase de double support, ce qui conduit à une réaction très faible.

La figure V.8.b montre l'évolution de la force de réaction du pied support suivant l'axe vertical. On y remarque qu'au début du mouvement du robot, cette force prend la valeur 34N , puis continue à diminuer jusqu'à ce qu'elle atteigne la valeur 28N au temps $0,3\text{s}$. Ensuite, elle fluctue très peu en restant proche de cette valeur (28N). On explique ceci par le fait qu'au démarrage du robot, les forces d'inertie à son mouvement étant importantes, il est alors quasiment en phase double support, ce qui montre une force de réaction verticale importante. A noter que, durant cette phase, la force de réaction reste importante car la charge du robot est répartie sur les deux pieds.

V.5.2. Couples.

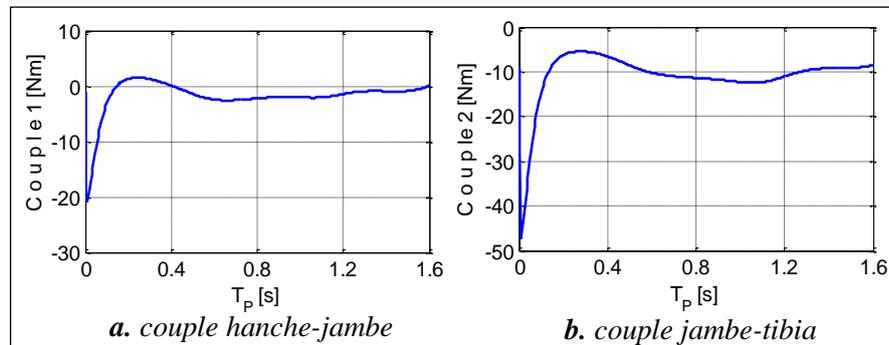


Fig.V.9 : Couples : patte support

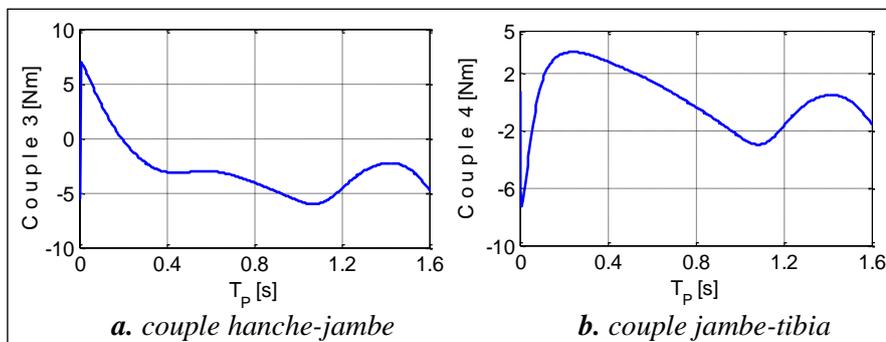


Fig.V.10 : Couples : patte en vol

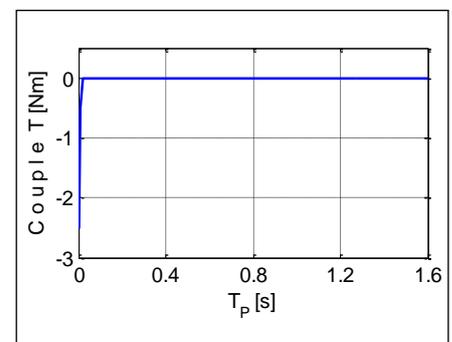


Fig.V.11 : couple : hanche-tronc

**Interprétation :**

Initialement le robot se trouve en équilibre statique où les deux pieds sont écartés d'une distance d'un pas.

La figure V.9.a représente le premier couple du robot dû à l'actionneur de l'articulation (hanche-jambe) de la patte support. On y observe qu'au début du déplacement, le couple est important. En effet, l'ensemble des forces de gravité se trouvant derrière la patte support, il est donc nécessaire d'exercer un couple élevé pour que le corps du robot puisse se soulever et avancer. Ce couple diminue avec l'augmentation des forces d'inerties, et se stabilise à environ $-2,5$ Nm dans l'intervalle du temps $[0,5 ; 1,6]$ s.

La figure V.9.b représente le deuxième couple du robot qui est dû à l'actionneur de l'articulation (jambe-tibias) de la patte support. L'allure de ce graphe prend presque la même que celle du graphe de la figure V.9.a. Elle s'explique donc de la même façon que pour le premier couple. Les valeurs du couple sont ici plus grandes car cette articulation est plus sollicitée que la première. Ce couple se stabilise à environ -10 Nm dans l'intervalle de temps $[0,2, 1,6]$ s.

Pour la patte en vol (Figure V.10), on constate que l'articulation (hanche-jambe) est plus sollicitée que l'articulation (jambe-tibias). Au début du pas, les deux couples ont la valeur maximale, environ 7Nm. Dans la figure V.10.a, le couple s'annule au temps $t=0,2$ s qui correspond à l'inversion de rotation de l'actionneur, puis continue son augmentation jusqu'à environ 4Nm dans l'intervalle du temps $[0,3, 1,6]$ s. Dans la figure V.10.b le couple s'annule au temps $t=0,8$ s qui correspond aussi à l'inversion de rotation de l'actionneur. Cet actionneur est moins sollicité que celui de l'articulation précédente.

La figure V.11 représente le graphe du couple dû à l'actionneur de l'articulation (hanche-tronc). Puisqu'on a considéré que le tronc reste dans la position verticale, son couple et donc nul.

En terme des couples, les résultats obtenus sont assez satisfaisants comparativement avec l'étude rapportée par M. Hackel [31] (voir figure I.23, Chap.I, Page 18). Notons que la représentation géométrique des angles dans notre modèle n'est pas semblable à celle dans cette référence, par conséquent, les évolutions des cinq courbes des couples ne ressemblent pas schématiquement avec nos résultats. Prenons le cas des couples de la patte en vol (couple appliqué à l'articulation hanche-jambe en vol et celle de la jambe-tibias). Relativement aux autres couples, ils sont faibles, mais le couple de la patte support dû à l'articulation jambe-tibias est plus élevé. En revanche, pour l'articulation hanche-jambe, le couple est un peu faible par rapport à ce celui jambe-tibias.

V.6. Conclusion.

On a présenté dans ce chapitre les deux formalismes, celui de Lagrange et de Newton-Euler, pour le calcul du modèle dynamique du robot marcheur. Le formalisme de Lagrange a permis de calculer la matrice d'inertie de chaque mécanisme (les deux pattes et le tronc). Le formalisme de Newton-Euler a fourni les valeurs des couples moteurs au niveau des articulations des mécanismes. Ceci est nécessaire pour le suivi des trajectoires désirées. Dans le chapitre qui suit, on abordera la commande du robot pour qu'il puisse suivre la trajectoire imposée.

CHAPITRE IV

ETUDE

DE LA

STABILITE



VI.1. Introduction.

Le robot bipède convient au déplacement dans les endroits qui contiennent des obstacles, tels que les escaliers. Cependant, il est difficile de générer une marche automatique similaire à celle de l'être humaine [61]. La recherche dans ce domaine reste encore beaucoup à développer.

L'analyse du processus de la marche comporte principalement deux concepts importants qui doivent être clarifiés : le cycle de marche et les déplacements du centre de masse (CM) [62]. Le déplacement du centre de masse est un concept principal dans le cycle de marche, car il comporte la définition de la stabilité dans certaine mesure. En d'autres termes, il est considéré comme base pour comprendre le type de la marche.

Les robots Bipède ont des structures instables par leur nature et peuvent se renverser facilement. Ils créent des problèmes de stabilité et causent des difficultés pour générer une marche dynamique stable et à leurs systèmes de commande. Le problème de la stabilité devient alors plus complexe

Le concept de stabilité des systèmes multi-corps (robot bipède) est, le soi-disant, ZMP, qui a été à l'origine présenté par Vukobratovic M. [02]. Il y a deux types de stabilité, la stabilité statique et la stabilité dynamique. Pour la stabilité statique, elle exige juste que le centre de la gravité (CG) soit dans le secteur de sustentation qui est défini par le contour de pied/pieds du robot (figure VI.1), mais dans ce cas les mouvements du robot sont très lents. Cette condition permet de considérer les couples d'échange des chaînons comme négligeables et le centre de gravité (CG) au centre de pression (CP). Pour la stabilité dynamique, le CP peut être différent du CG., puisqu'il considère des effets dynamiques du robot. Dans ce cas, la projection verticale du centre de masse peut se situer à l'extérieur du polygone de sustentation (figure VI.2) [63].

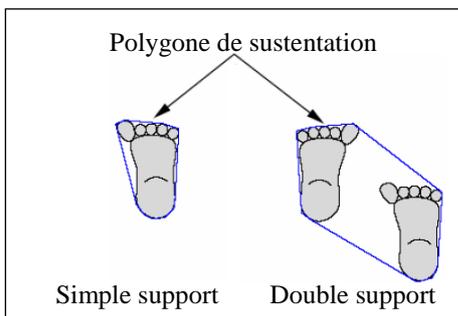


Fig. VI.1 : Polygone de sustentation en simple et double support

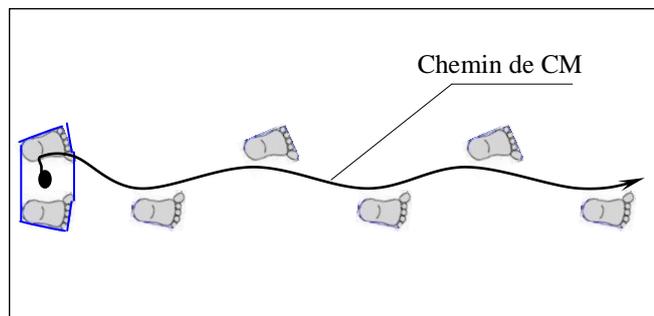


Fig VI.2 : Type de la marche dynamique

Dans le premier type de marche (marche statique), le robot est stable et se traduit pratiquement comme un robot ayant une grande surface au pied et une marche avec un pas de quelques centimètres à des vitesses très réduites. Mais ceci ne convient pas à son utilité. Pour que la marche du robot soit similaire à celle de l'être humaine qui est une marche dynamique, la question qui se pose, quelle est la procédure d'une marche dynamique stable ? La solution réside dans la maîtrise du critère de ZMP qui englobe les effets d'inertie et des forces externes, comme on va l'expliquer ci-dessous.



VI.2. Calcul du centre de masse du robot

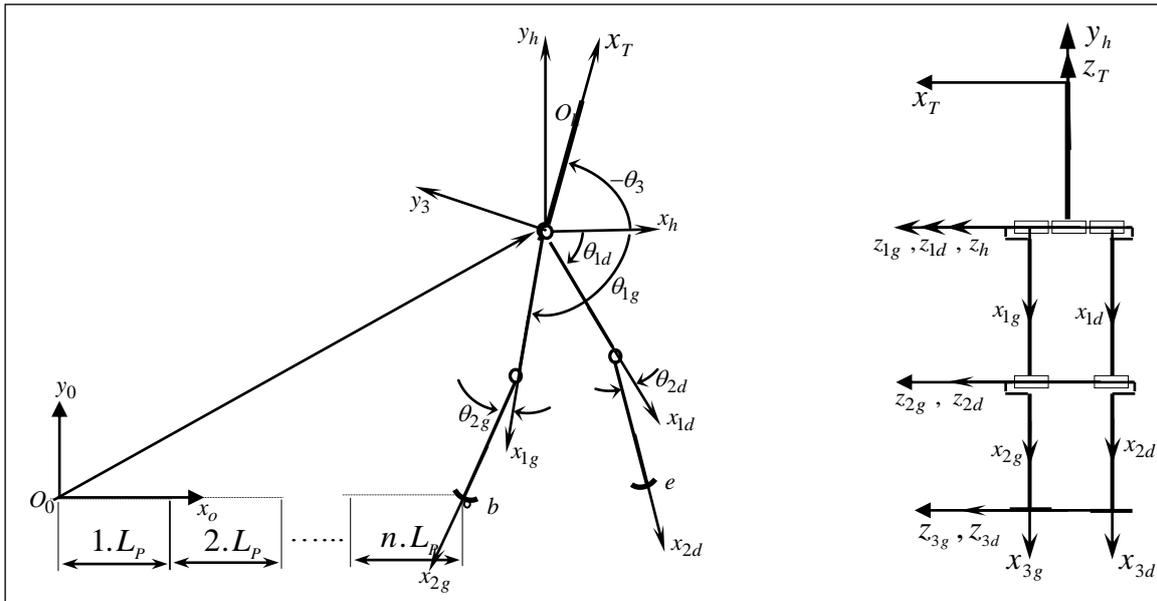


Fig VI.3 : Schéma cinématique avec paramétrage géométrique

Compte tenu des relations géométriques entre les chaînons, on détermine le centre de gravité $X_{Gj} = [xc_j, yc_j, 0]^T$ de chaque chaînon comme suit :

$$X_{Gj} = {}^0L_{j-1} + {}^{j-1}d_j$$

En projetant les vecteurs de cette relation dans R_0 . On obtient :

$${}^0X_{Gj} = D_{0,j} + {}^0A_j {}^j d_j,$$

avec : $D_{0,j} = \sum_1^j ({}^0A_{j-1} {}^{j-1}L_j)$ Tel que : ${}^0L_1 = [0 \ 0 \ 0]^T$

$${}^0X_{Gj} = \sum_1^j ({}^0A_{j-1} {}^{j-1}L_j + {}^0A_j {}^j d_j)$$

Avec :

${}^{j-1}L_j$: Longueur du chaînon exprimé dans le repère R_j ;

${}^j d_j$: Vecteur liant l'origine de O_j avec le centre de masse du C_j .

$${}^0X_{Gj} = (xc_j, yc_j, zc_j)^T$$

Le robot étant modélisé dans un plan, son centre de masse $CG = [Cgx, Cgy, 0]$ est donné par :

$$CG = \frac{\sum_{j=1}^5 m_j {}^0X_{Gj}}{\sum_{j=1}^5 m_j}$$



Ce qui permet d'écrire :

$$C_{gx} = \frac{\sum_{j=1}^5 m_j x c_j}{\sum_{j=1}^5 m_j} = \frac{m_1 x c_1 + m_2 x c_2 + m_3 x c_3 + m_4 x c_4 + m_5 x c_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}$$

$$C_{gy} = \frac{\sum_{i=1}^5 m_i y c_i}{\sum_{i=1}^5 m_i} = \frac{m_1 y c_1 + m_2 y c_2 + m_3 y c_3 + m_4 y c_4 + m_5 y c_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}$$

VI.3. Equilibre statique du robot

Le robot peut se représenter par deux configurations statiques, dans l'une, les deux pattes sont confondues l'une à l'autre dans le plan (O_0, x_0, y_0) , dans l'autre, les deux pieds sont écartés d'une distance d'un pas.

VI.3.1. Les deux pieds sont confondus

La marche étant dans le plan sagittal, le centre de masse du robot est donc dans ce plan. Pour avoir l'équilibre statique, il faut que sa projection soit dans la région de sustentation qui est définie par le contour des deux pieds (figure VI.4.b).

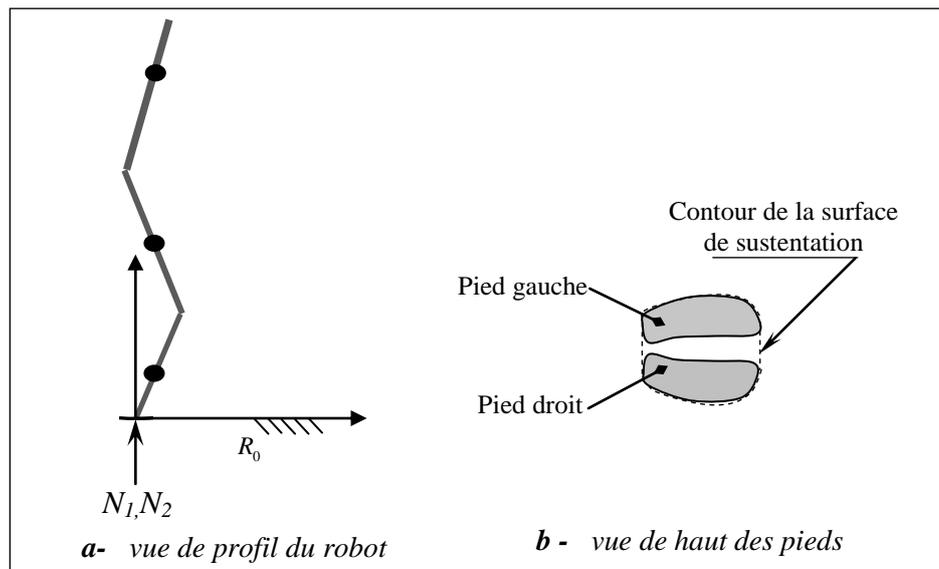


Fig VI.4 : première configuration d'équilibre statique

Par raison de symétrie, les deux pieds supportent les mêmes charge :

$$N_1 = N_2 = \frac{\sum_{j=1}^5 m_j \cdot g}{2}$$

Avec : $(P_j = m_j \cdot g)$ est la charge due au poids du chaînon j .



VI.3.2. Les deux pieds sont écartés d'un pas.

Dans cette configuration, la région de sustentation, qui est toujours définie par le contour des deux pieds, est plus grande que la précédente (figure VI.5).

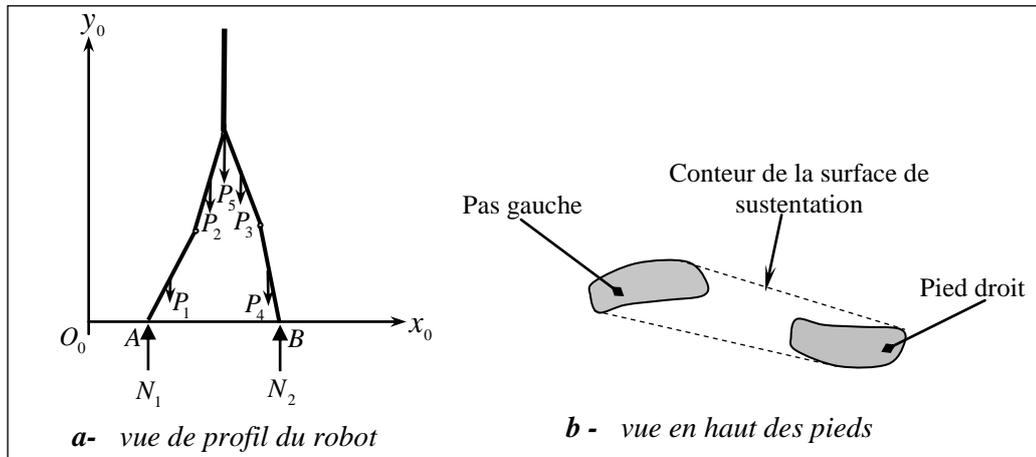


Fig VI.5 : deuxième configuration d'équilibre statique

Appliquons la loi fondamentale de la statique à l'équilibre :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad (\text{VI-01-a})$$

$$\sum \vec{M}_{/A} = \vec{0} \quad (\text{VI-02-a})$$

Ce qui permet d'écrire pour notre robot :

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = N_1 + N_2 \quad (\text{VI-01-b})$$

$$L_1 C(\theta_1)(P_2 + P_3 + P_4 + P_5) + L_2 C(\theta_1 + \theta_2)(P_3 + P_4 + P_5) + P_1 d_1 C(\theta_1) + P_2 d_2 C(\theta_1 + \theta_2) + P_4 d_4 C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + P_3 d_3 C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + P_4 L_3 C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = N_2 L_p \quad (\text{VI-02-b})$$

De l'équation (VI-01-b) et (VI-02-b), on peut déterminer la valeur de N_1 et N_2 , mais toujours en fonctions des variables articulaires $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$; donc, à chaque variation des angles, les deux réactions N_1 et N_2 auront des nouvelles valeurs.

On peut ramener le problème à un celui d'optimisation mais en ajoutant des contraintes supplémentaires, par exemple, des contraintes géométriques pour avoir la forme d'un système d'inégalités à optimiser dont la fonction objet à minimiser serait l'énergie nécessaire au décollage du pied.

On procède au calcul de N_1 et N_2 à partir des hypothèses et des données établies dans le chapitre IV.

- Le robot est symétrique par rapport au plan sagittal ;
- La hauteur de la hanche est connue h ;
- La longueur du pas est connue L_p ;
- L'abscisse de la hanche est égal à $1/4 L_p$. Cette valeur minimise l'énergie de décollage du pied arrière au moment de la marche.

Les coordonnées de la hanche et des deux pieds seront alors :

$$X_h = \left(\frac{1}{4} L_p, h, 0\right), \quad X_{p1} = (0, 0, 0) \quad \text{et} \quad X_{p2} = \left(\frac{1}{2} L_p, 0, 0\right).$$



A partir du modèle géométrique inverse MGI (Chap-II-), on peut donc calculer les différentes positions articulaires correspondantes à cette configuration.

De l'équation (VI-2-b), on en déduit :

$$N_2 = \frac{g}{L_c} [L_1 C(\theta_1)(m_2 + m_3 + m_4 + m_5) + L_2 C(\theta_1 + \theta_2)(m_3 + m_4 + m_5) + m_1 d_1 C(\theta_1) + m_2 d_2 C(\theta_1 + \theta_2) + m_4 d_4 C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + m_3 d_3 C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + m_4 L_3 C(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)]$$

L'équation (VI-1-b) donne :

$$N_1 = g(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) - N_2$$

VI.4. Etude dynamique de la stabilité

La méthode appelée le point nul des moments (ZMP) [09], [16] est employée comme critère de stabilité de la marche dynamique. La condition principale de la stabilité du robot exige que le ZMP soit emboîté dans la surface délimitant la région du polygone de sustentation au sol. Alors, le robot bipède peut marcher d'une façon stable seulement si le ZMP se trouve dans cette région. N'importe quelle planification de marche bipède doit respecter ce principe de base.

VI.4.1. Point nul des moments (ZMP)

C'est un point sur le sol où la somme de tous les couples appliqués est égale à zéro. Il sert de critère de stabilité à la dynamique des systèmes multi-corps défini par Vukobratovic, M. [02].

Il est crucial d'avoir une bonne compréhension sur le ZMP. Par exemple, dans figure VI.6, il est évident que si l'athlète, en position de commencer à courir, n'accélère pas son corps vers l'avant, il tombera par la suite. Au contraire, s'il accélère vers l'avant pour un certain temps, il pourra stabiliser son corps et garder son équilibre, dans ce cas, le ZMP qui se trouve au sol sera dans le polygone de sustentation (pied gauche dans ce cas-ci) [62].

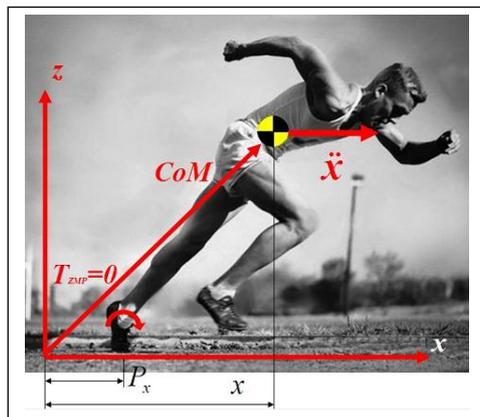


Fig VI.6 : Une personne qui commence à courir [61].

Sur cette figure, le ZMP de l'athlète est $P_{zmp} = [p_x, p_y, p_z]^T$, le centre de masse est $CM = [x, y, z]^T$.

Puisque le couple net appliqué autour du ZMP est égal à zéro, ceci implique que la marche est stable, autrement dit, il n'y a aucun moment de basculement agissant sur le corps. Si le ZMP est à l'extérieur du polygone de sustentation, le couple net agissant sur le corps n'est pas nul. Il existe donc un couple de basculement, par conséquent, la marche n'est pas stable et le corps peut tomber par la



suite, c'est exactement ce qui va se produire si la personne n'accélère pas en avant dans l'exemple précédent.

Les figures VI.7 et VI.8 illustrent les trajectoires du ZMP en respectant le critère de stabilité, la première dans le plan sagittal suivant l'axe x , la seconde dans le plan frontal suivant l'axe z [62].

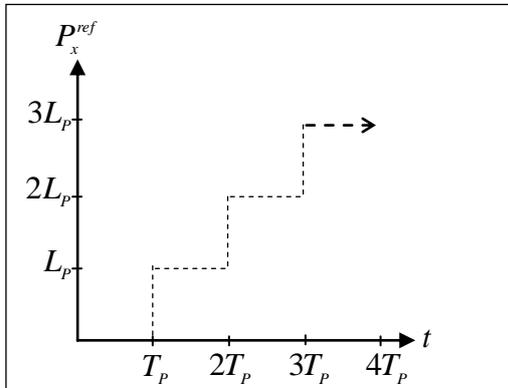


Fig VI.7 : ZMP trajectoire de référence dans le plan Sagittal.

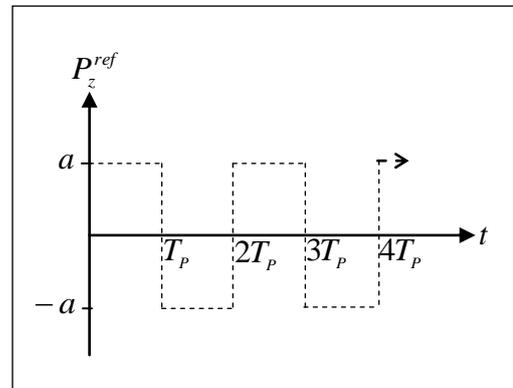


Fig VI.8 : ZMP trajectoire de référence dans le plan Frontal

VI.4.2. Types de ZMP

Habituellement, dans beaucoup d'études rapportées [27, 30], la référence de ZMP dans la phase de simple support est située en un point sous la semelle du pied support. Cependant, les expériences de marche avec les humains prouvent que le ZMP ne reste pas à un point fixe dans la PSS [13, 14, 48]. Il se déplace plutôt de la semelle du pied support, du talon à l'orteil.

a. type 1

Beaucoup de recherches indiquent des trajectoires prédéterminées du ZMP. C'est un ZMP fixe, typiquement au centre de la semelle du pied dans la phase de simple support et un ZMP mobile en phase de double support, qui change de période pendant la locomotion. Donc, principalement, selon la phase de la marche du robot, on distingue deux situations de ZMP, le ZMP mobile (en mouvement) et ZMP fixe.

Première situation : ZMP fixe. La position possible de ZMP est dans le polygone de sustentation délimité par le pied support et aura lieu dans la PSS.

Deuxième situation : ZMP mobile. Le trajet de ZMP est défini par une trajectoire liant les deux pieds en PDS et aura lieu dans la PDS.

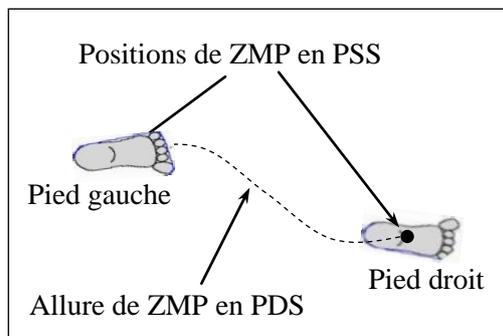


Fig VI.9 : type1 -ZMP fixe-



b. Type 2

Dans ce type, la marche est naturelle [13, 14, 32], c'est-à-dire, le ZMP n'est pas fixe, il varie d'un pas à l'autre (Figure VI.10). En PSS, le ZMP se déplace du talon à l'orteil du pied support avec une vitesse relativement réduite. En PDS, le ZMP suit avec une vitesse plus rapide que la précédente un trajet droit liant les deux positions des pieds du robot.

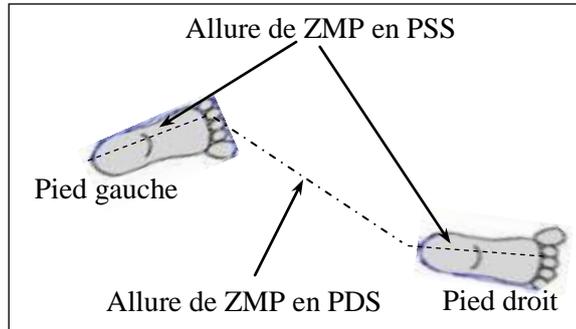


Fig VI.10 : type 2 -ZMP naturel-

VI.4.3. Génération de la marche normale.

Qu'est ce que c'est la marche normale ? La marche humaine est très régulière, parce que les humains peuvent se servir de la pesanteur efficacement. L'énergie qui est nécessaire pour le mouvement de la marche très faible. La marche humaine est donc optimisée comme énergie. Par conséquent, on définit la marche normale d'un robot comme suit : La marche normale est le mouvement qui réduit au minimum toute l'énergie locomotrice du robot bipède [61]. Pour produire cette marche, c'est trouvé le mouvement qui réduit au minimum la consommation d'énergie totale nécessaire pour tous les actionneurs dans le système du robot.

VI.4.4. Dérivation de l'équation de ZMP

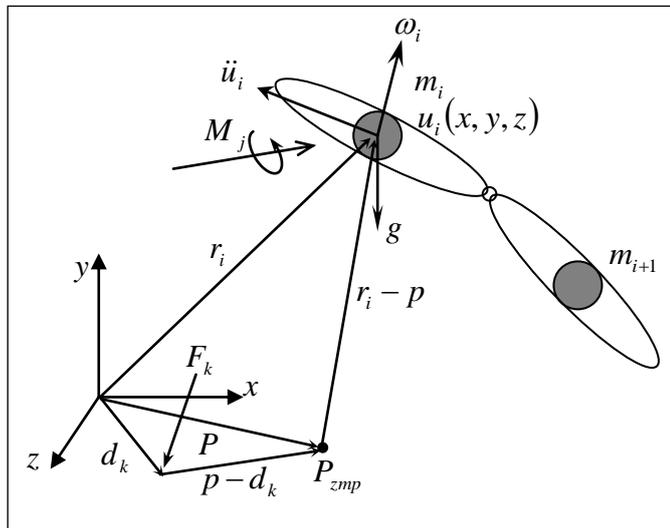


Fig VI.11 : calcul du ZMP.

D'après la définition du ZMP, on écrit :

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{/P_{zmp}} = \vec{0} .$$

En considérant la figure VI.11, l'ensemble des moments appliqués au point P_{zmp} se traduit par l'équation suivante :



$$\sum_{i=1}^n (r_i - p_{zmp}) \wedge m_i (\ddot{u} + g) + \sum_{i=1}^n (I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \wedge I_i \omega_i) + \sum_{j=1}^m M_j + \sum_{k=1}^p F_k \wedge (d_k - p_{zmp}) = 0.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n p_{zmp} \wedge m_i (\ddot{u} - g) = \sum_{i=1}^n r_i \wedge m_i (\ddot{u} + g) + \sum_{i=1}^n (I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \wedge I_i \omega_i) + \sum_{j=1}^m M_j + \sum_{k=1}^p F_k \wedge (d_k - p_{zmp}) \quad (\text{VI-03})$$

La locomotion est supposée seulement dans le plan sagittal, on a donc :

$$\omega_i \wedge I_i \omega_i = 0.$$

Projetons l'équation (VI-3) dans le plan $(o x z)$ avec l'hypothèse qu'aucune force ou moment externe n'agisse sur le robot, le ZMP est calculé par :

$$x_{ZMP} = \frac{\sum_i^n m_i (\ddot{y}_i - g) x_i - \sum_i^n m_i \ddot{x}_i y_i - \sum_i^n I_{iz} \ddot{\theta}_{iz}}{\sum_i^n m_i (\ddot{y}_i - g)} \quad (\text{VI-04})$$

$$z_{ZMP} = \frac{\sum_i^n m_i (\ddot{y}_i - g) z_i - \sum_i^n m_i \ddot{z}_i y_i - \sum_i^n I_{ix} \ddot{\theta}_{ix}}{\sum_i^n m_i (\ddot{y}_i - g)} \quad (\text{VI-05})$$

où :

$\ddot{u}_i = [\ddot{x}_i \quad \ddot{y}_i \quad \ddot{z}_i]^T$: Accélération du centre de masse du chaînon (i) dans le repère absolu.

m_i : Masse de chaînon (i) ;

$I_i = [I_{xi} \quad I_{yi} \quad I_{zi}]$: Moments d'inerties autour l'axe x, y et z ;

$\ddot{\theta}_{ix}, \ddot{\theta}_{iz}$: Vitesses angulaires absolues du centre de gravité de chaînon (i) autour l'axe x et z , respectivement ;

$g = [g_{xi} \quad g_{yi} \quad g_{zi}]^T$: Accélération de la pesanteur ;

$M_j = [M_{xj} \quad M_{yj} \quad M_{zj}]^T$: Moment externe appliqué au robot ;

$F_k = [F_{xk} \quad F_{yk} \quad F_{zk}]^T$: Force externe appliquée au robot ;

$P_{zmp} = [x_{zmp} \quad 0 \quad z_{zmp}]^T$: Coordonnées du ZMP ;

$r_i = [x_i, y_i, z_i]^T$: Coordonnées du centre de masse de chaînon (i) exprimé dans le repère absolu.

Notons que, en locomotion normale sur une surface horizontale : $g = [0 \quad -g \quad 0]^T$.

Quand le ZMP est situé dans le contour de la surface de sustentation, on a :

$$P_{zmp} = (x_{zmp}, 0, z_{zmp}) \in S$$

où :

P_{zmp} : La position du ZMP ;

S : le domaine de la surface de sustentation.



Sachant que la marche bipède, est, par hypothèse, réalisée dans le plan sagittal, on n'a pas donc de rotation autour de l'axe des x , ni de déplacement selon l'axe des z , en effet, seulement la quantité de x_{ZMP} , donnée par la relation ci-après, qui sera comptée:

$$x_{ZMP} = \frac{\sum_i m_i (\ddot{y}_i + g) x_i - \sum_i m_i \ddot{x}_i y_i - \sum_i I_{iz} \ddot{\theta}_{iz}}{\sum_i m_i (\ddot{y}_i + g)} \quad (VI-06)$$

Les paramètres qui affectent la marche stable du robot sont les positions et la cinématique de la hanche. Cette marche stable ne peut être obtenue que par tâtonnement. On ne peut donc la trouver qu'à travers un calcul itératif en faisant varier les paramètres v_{h1} , x_{s0} , y_{s0} et v_{h2} , x_{d0} , y_{d0} (vitesses et positions initiales de PSS et PDS).

VI.5. Simulation.

Paramètres de simulation :

- *Paramètre invariables :*

- Hauteur maximale de pied en vol [m]: $h_p=0.10$
- Accélération de la pesanteur [m/s^2] : $g=10$
- Période de la PSS [s]: $T_s=1,3$
- Période de la PDS [s]: $T_d=0.3$
- Période d'un pas [s]: $T_p = T_s+T_d=1.6$
- Mi-temps correspond à h_{p-max} [s]: $T_m=T_s/2$
- Longueur d'un pas [m]: $L_p=0.56$.
- Longueurs des éléments [m]: $l_1=0.36$; $l_2=0.32$; $l_t=0.35$
- Position finale de la hanche en PDS : $x_{df}=0,5.L_p+x_{s0}$.
- Moments d'inerties centraux [m^4] :
 $I_{x1}=0,008500$; $I_{y1}=0,78790$; $I_{z1}=0,338$
 $I_{x2}=0,009456$; $I_{y2}=0,88170$; $I_{z2}=0,3678$
 $I_{xt}=0,006072$; $I_{yt}=0,55056$; $I_{zt}=0,258306$
- Masses[kg] ($m_1=1.22472$; $m_2=0.96768$; $m_t=3.157625$)

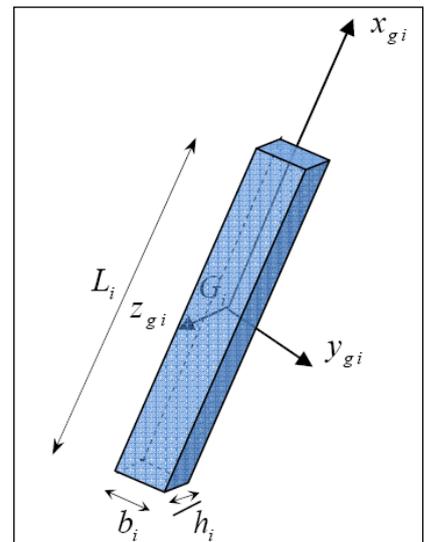


Fig VI.12 : Géométrie des chaînons

-*Paramètres variables selon les cas* (six cas) :

Cas	Hauteur min et max de la hanche : H_h [m]	Position initiale et finale de la hanche en PSS (x_{s0} , x_{d0}) [m]	Vitesses initiale et finale de la hanche en PSS (v_{h1} , v_{h2}) [m/s]
a-	$0,63 < H_h < 0,65$	$x_{s0}=0,1008$. $x_{d0}= 0,3808$	$v_{h1}=0,08$. $v_{h2}=0,16$
b-	$0,60 < H_h < 0,62$	$x_{s0}=0,1120$. $x_{d0}= 0,3670$	$v_{h1}=0,06$. $v_{h2}=0,08$
c-	$0,62 < H_h < 0,64$	$x_{s0}=0,1008$. $x_{d0}= 0,3808$	$v_{h1}=0,08$. $v_{h2}=0,1$
d-	$0,62 < H_h < 0,64$	$x_{s0}=0,1008$. $x_{d0}= 0,3808$	$v_{h1}=0,10$. $v_{h2}=0,10$
e-	$0,62 < H_h < 0,64$	$x_{s0}=0,1008$. $x_{d0}= 0,3808$	$v_{h1}=0,08$. $v_{h2}=0,04$
f-	$0,64 < H_h < 0,66$	$x_{s0}=0,1120$. $x_{d0}= 0,3670$	$v_{h1}=0,08$. $v_{h2}=0,10$

Les figures suivantes illustrent les graphes de stabilité pour chaque cas.

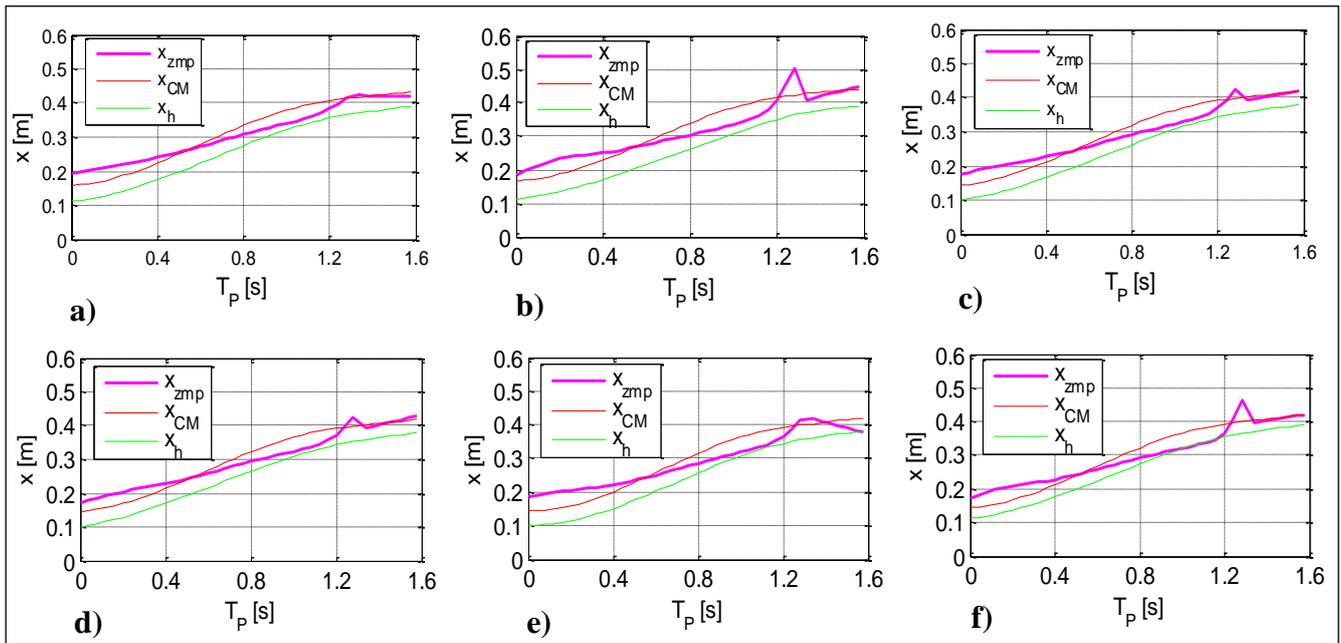


Fig.VI.13: allures : de la stabilité, du centre de masse et position de la hanche (suivant l'axe x)

Interprétation.

Nous avons fait varier les paramètres qui influent sur la stabilité du robot tels que l'élévation, les positions et les vitesses initiale et finale de la hanche afin de déterminer ceux répondant au critère de stabilité. On a également tracé la trajectoire de la hanche (x_h) et l'allure du centre de gravité du robot (x_{CM}) car ces deux paramètres ont aussi une relation avec la stabilité et l'équilibre du robot.

L'allure du graphe de stabilité dans les figures ci-dessus présente un pic correspondant à la deuxième phase (PDS), sauf dans les figures VI.13.a et VI.13.e où ce pic est courbé. Nous allons choisir les paramètres correspondants à la figure VI.13.a, puisque dans la PSS le graphe présente une évolution acceptable qui varie entre 0.20m et 0.40m, et à la PDS il coïncide pratiquement avec l'allure du centre de gravité du robot.

Sur le plan théorique, d'après les études [27] et [30], le point de ZMP en PSS est supposé situé en un point fixe sous la semelle du pied support. Dans notre simulation, on ne trouve pas ce résultat, car on constate, d'après l'allure du graphe x_{ZMP} de la figure VI.13.a, que ce dernier débute au point 0.20m et se termine au point 0.40m en PSS, ce qui signifie qu'en PSS, le point de ZMP n'est pas fixe. Ceci est conforme aux études [45] et [46] qui montrent qu'en cette phase, le ZMP n'est pas fixe. En effet, le trajet de x_{ZMP} suit l'allure au talon de pied d'appui à ses orteils. Notre robot devrait alors être équipé par des pieds de longueur de 0.20m afin qu'il puisse garder sa stabilité.

VI.6. Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de la stabilité du robot bipède. On présente les deux types de stabilité : la stabilité statique et la stabilité dynamique. Le calcul de la première est simple et ne présente pas des difficultés mathématiques. Le calcul de la seconde se fait par la méthode dite « Zéro Moment Point » dont le principe de base consiste à avoir le point où la somme des moments est nulle à l'intérieur de la surface de sustentation. Ceci dépend essentiellement de l'ensemble des forces et des moments qui agissent sur le robot. Etant donné que ces forces et moments sont exprimés en fonction des paramètres géométriques et physiques du robot, ce principe de stabilité est alors conditionné par le bon choix de ces paramètres dans le calcul. Dans ce but, nous avons établi un code de calcul afin de pouvoir simuler et atteindre la condition de la stabilité du



robot, car le choix de ces paramètres qui répondent à cette condition ne peut être obtenu que par tâtonnement.

CHAPITRE IIV

ETUDE

DE LA

COMMANDE



VII.1. Introduction

Le modèle dynamique décrit un système de n équations différentielles de second ordre non linéaires et couplées, n étant le nombre d'articulations. La commande des robots a fait l'objet de nombreux travaux. Les principales approches utilisées sont :

- La commande classique de type PID;
- La commande par découplage non linéaire;
- La commande passive;
- La commande fondée sur la fonction de Lyapunov;
- La commande adaptative;
- La commande robuste à structure variable (modes de glissement).

Lorsque l'application exige des évolutions rapides du robot et une grande précision dynamique, il est nécessaire de concevoir un système de commande plus sophistiqué. L'utilisation de la commande par découplage non linéaire constitue une bonne approche dans ce cas. Ce type de commande est appelé aussi commande dynamique parce qu'elle est fondée sur l'utilisation de la dynamique. Théoriquement, elle assure le découplage et la linéarisation des équations du modèle et a pour effet une réponse uniforme quelle que soit la configuration du robot [1].

La mise en œuvre de cette méthode exige le calcul dynamique en ligne et la connaissance des valeurs numériques des paramètres inertiels et de frottement.

Cette commande consiste à transformer par retour d'état le problème de la commande d'un système non linéaire en un problème de commande d'un système linéaire. L'élaboration d'une loi de commande qui linéarise et découple les équations est simplifiée par le fait que le nombre d'actionneurs est égal au nombre de variables articulaires et que le modèle dont on dispose est un modèle inverse qui exprime l'entrée Γ du système en fonction des vecteurs d'état $\theta, \dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ [24]. Ces propriétés font que les équations du robot définissent un système plan dont les variables articulaires sont θ et $\dot{\theta}$ [1].

VII.2. Equation de mouvement.

Afin de bien appréhender la problématique de la commande des robots, il est utile de rappeler les équations du modèle dynamique du robot (Chap. V) dont la forme générale pour un robot à n degrés de liberté est la suivante :

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + D(q, \dot{q})\dot{q} + Q(q) + \text{Diag}(\dot{q})F_v + \text{Diag}(\text{sign}(\dot{q}))F_s \quad (\text{VII-01})$$

ou, sous forme plus compacte :

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + \bar{D}(q, \dot{q}) \quad (\text{VII-02})$$

On rappelle que Γ est le vecteur $(n \times 1)$ des couples/forces articulaires, $A(q)$ est la matrice $(n \times n)$ d'inertie du robot, $D(q, \dot{q})\dot{q}$ est le vecteur $(n \times 1)$ représentant les forces centrifuges et les forces de Coriolis, $Q(q)$ est le vecteur regroupant les forces de gravité et de frottement ; F_s et F_v sont les vecteurs des paramètres dynamiques (paramètres de frottement et inertiels).

Le couple transmis à l'articulation j par un moteur électrique à courant continu ou synchrone commandé en courant, en supposant que les organes de transmission ne comportent ni jeux ni élasticité, s'exprime par :

$$\Gamma = N_j K_{aj} K_{Tj} u_j \quad (\text{VII-03})$$



Où N_j est le rapport de réduction, K_{aj} est le gain de l'amplificateur, K_{Tj} est la constante de couple du moteur et u_j est le signal d'entrée de l'amplificateur.

La synthèse de la commande consiste à calculer Γ_j , puis à calculer le signal u_j permettant de suivre la consigne désirée.

VII.3. Commande par découplage non linéaire dans l'espace articulaire.

Soient $\hat{A}(q)$ et $\hat{D}(q, \dot{q})$ les estimations respectives de $A(q)$ et $\bar{D}(q, \dot{q})$. On suppose que les positions et vitesses articulaires sont mesurables et que les mesures ne sont pas bruitées. Partant de l'équation (VII-02), si l'on choisit une commande Γ telle que :

$$\Gamma = A(q)\ddot{\theta}(t) + \bar{D}(q, \dot{q}) \quad (\text{VII-04})$$

Alors :

$$\Gamma = \hat{A}(q)\Theta(t) + \hat{D}(q, \dot{q}) \quad (\text{VII-05})$$

Donc, dans le cas idéal où le système est supposé parfait, le vecteur de commande s'écrit :

$$\ddot{\theta}_d(t) = \Theta(t) \quad (\text{VII-06})$$

On se ramène à un problème de commande de systèmes linéaires, invariants, découplés, et du second ordre. Si le mouvement désiré est complètement spécifié, alors $\Theta(t)$ est donné par :

$$\Theta(t) = \ddot{\theta}_d + K_v(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + K_p(\theta_d - \theta) \quad (\text{VII-07})$$

où :

$\ddot{\theta}_d(t)$, $\dot{\theta}_d(t)$ et $\theta_d(t)$ Désignent respectivement l'accélération, la vitesse et la position désirées dans l'espace articulaire ;

K_v et K_p : Sont des matrices diagonales définies positives de dimension $(n \times n)$,

$$K_v = \text{diag}[k_{vj}], \quad K_p = \text{diag}[k_{pj}] \quad (\text{VII-08})$$

D'après l'équation (VII-07), la réponse du système en boucle fermée sera donc décrite par l'équation linéaire découplée suivante :

$$\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = 0 \quad (\text{VII-09})$$

où : $\dot{e}(t) = \dot{\theta}_d(t) - \dot{\theta}(t)$ et $e(t) = \theta_d(t) - \theta(t)$

La solution de l'équation de l'erreur $e(t)$ est globalement exponentiellement stable. Les gains k_{pj} et k_{vj} sont choisis pour imposer à l'erreur de l'axe j la dynamique désirée de l'amortissement ξ_j et de pulsation ω_j , quelque soit la configuration du robot :

$$k_{pj} = \omega_j^2 k_{vj} = 2\xi_j \omega_j \quad (\text{VII-10})$$

En général, on choisit un amortissement égal à 1 pour avoir une réponse sans dépassement. On spécifie le mouvement de la patte (tronc) dans l'espace articulaire et on applique sa commande dans cet espace. Les figures VI.1 représentent le schéma bloc de cette loi de commande dans l'espace articulaire.



Le signal de commande aux actionneurs comporte trois parties :

- la première compense les couples de Coriolis, centrifuge, de frottement et de gravités;
- la deuxième est une correction de position et de vitesse à gains variables représentée respectivement par $\hat{A}K_p$ et $\hat{A}K_v$;
- la troisième constitue une anticipation des forces d'accélération désirées $\hat{A}\ddot{\theta}_d$.

Lorsqu'il y a des erreurs de modélisation, l'équation de la boucle fermée correspondante à la figure VII.1 est obtenue en utilisant les relations (VII-4) et (VII-5), soit :

$$\Gamma = \hat{A}(q)(\ddot{\theta}_d + k_v\dot{e} + k_p e) + \hat{D}(q, \dot{q}) = A(q) + \bar{D}(q, \dot{q}) \quad (\text{VII-11})$$

On en déduit :

$$\ddot{e} + k_v\dot{e} + k_p e = \hat{A}^{-1}(q)[A(q) - \hat{A}(q)]\ddot{\theta} + D(q, \dot{q}) - \hat{D}(q, \dot{q}) \quad (\text{VII-12})$$

On remarque avec la relation (V.12) que les erreurs de modélisation constituent une excitation pour l'équation de l'erreur. Il en résulte que lorsque ces erreurs sont importantes, il faut augmenter les gains de position et de vitesse, mais ces valeurs sont limitées par la stabilité du système.

Notons qu'il existe différentes méthodes utilisées dans la commande par découplage non linéaire dans l'espace articulaire, tel que [24] :

- le cas où le mouvement est complètement spécifié ;
- le cas où seule la position finale est spécifiée ;
- la commande dynamique prédictive ;

Dans ce qui suit, nous utiliserons la « commande dynamique prédictive ».

VII.4. Commande dynamique prédictive.

En utilisant une commande dynamique prédictive dans laquelle le calcul de \hat{A} et \hat{D} ne se fait pas en fonction des valeurs courantes de q et \dot{q} , mais plutôt en fonction des variables du mouvement désiré q^d et \dot{q}^d . Dans ce cas, la loi de commande pour une expression :

$$\Gamma = \hat{A}(q^d)\Theta(t) + \hat{D}(q^d, \dot{q}^d) \quad (\text{VII-13})$$

Le terme $\Theta(t)$ est celui de l'équation (VII-07).

La figure VII.1 représente le schéma-bloc de cette loi. Si le suivi est correct, on peut supposer que $\hat{A}(q) = \hat{A}(q^d)$ et $\hat{D}(q, \dot{q}) = \hat{D}(q^d, \dot{q}^d)$. En l'absence d'erreurs de modélisation et pour des erreurs initiales nulles, la loi de commande (VII-13) linéarise et découple les équations du système comme dans le cas précédent. L'avantage essentiel de cette loi est que le calcul de $\hat{A}(q^d)$ et $\hat{D}(q^d, \dot{q}^d)$ n'est pas contaminé par les bruits de mesure.

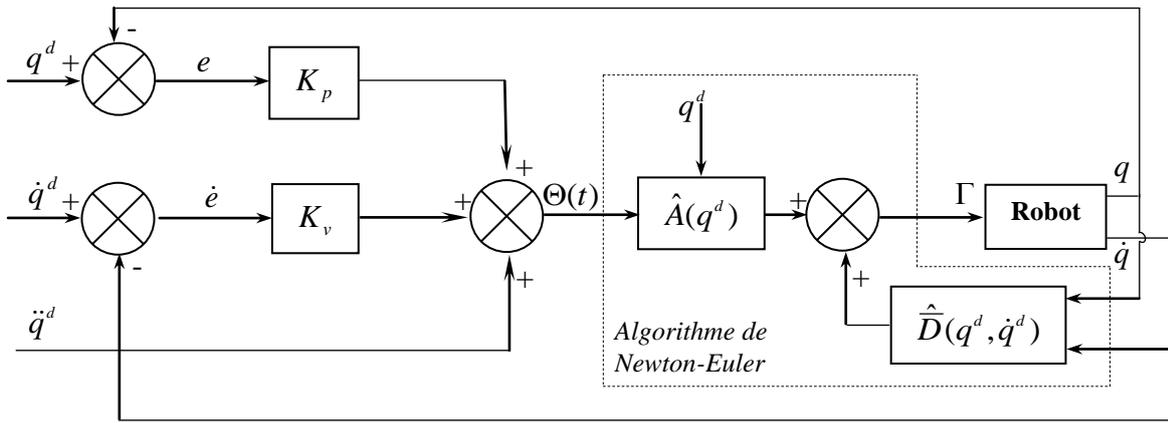


Fig VII.1 : Schéma d'une commande dynamique prédictive [24]

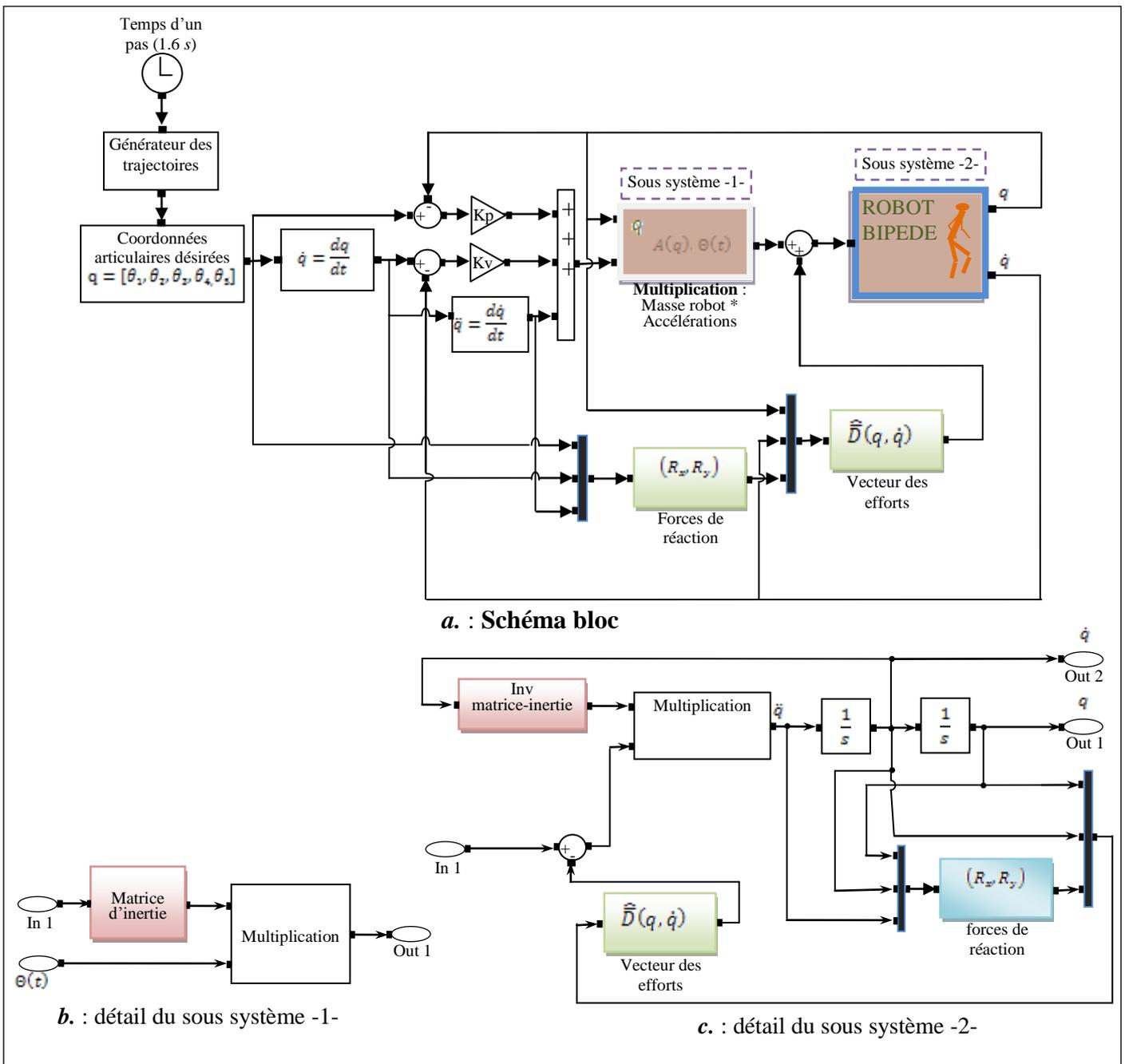


Fig VII.2 : Schémas fonctionnel de commande dynamique prédictive du Robot dans l'espace articulaire.



VII.5. Simulation.

La simulation est faite sur un pas de marche du robot correspondant à 1.6 secondes (ici, l'effet d'impact du pied de vol-sol n'est pas pris en compte). Le pas de variation utilisé pour la simulation est égal à 0.01 seconde.

Paramètres de simulation :

- Vitesses initiales de la PSS et la PDS respectivement [m/s]: $V_{h1}=0.08$; $V_{h2}=0.04$
- Hauteurs maximale et minimale de la hanche respectivement [m] : $h_{max}=0.64$; $h_{min}=0.62$
- Hauteur maximale de pied en vol [m]: $h_p=0.10$.
- Accélération de pesanteur [m/s^2] : $g=10$
- Période de la PSS [s]: $T_s=1,3$
- Période de la PDS [s]: $T_d=0.3$
- Période d'un pas [s]: $T_p = T_s+T_d=1.6$
- Temps moyen correspond à h_p [s]: $T_m=T_s/2$
- Longueurs des éléments [m]: $l_1=0.36$; $l_2=0.32$; $l_t=0.35$
- Longueur d'un pas [m]: $L_p=0.56$.
- Positions initiales de la hanche en PSS et la PDS respectivement : $x_{s0}=0,18.L_p$, $x_{d0}=x_{df}-0.015$
- Position finale de la hanche en PDS : $x_{df}=0,5.L_p+x_{s0}$.
- Moments d'inerties centraux [m^4] : $I_{x1}=0.0085$; $I_{y1}=0.7879$; $I_{z1}=0.338$; $I_{x2}=0.009456$; $I_{y2}=0.8817$; $I_{z2}=0.3678$; $I_{xt}=0.006072$; $I_{yt}=0.55056$; $I_{zt}=0.258306$.
- Masses [kg] ($m_1=1.22472$; $m_2=0.96768$; $m_t=3.157625$).
- Pulsation de signal : $\omega = 80 \text{ rad} / s$.
- Coefficient d'amortissement : $\xi = 1$

a. Les coordonnées articulaires.

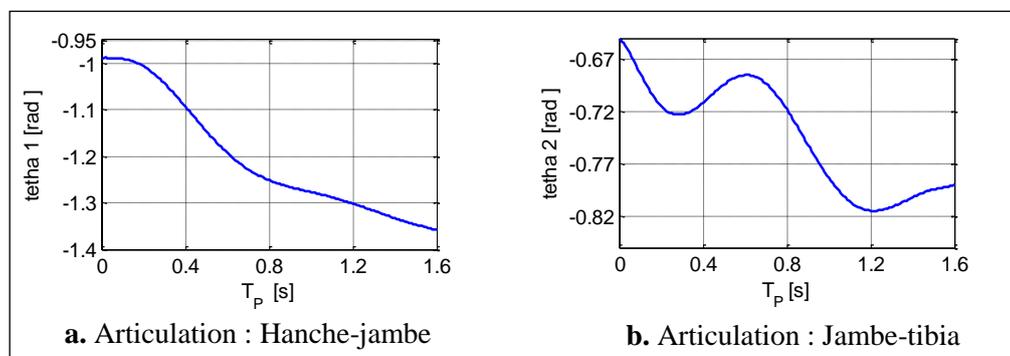


Fig VII.3. Coordonnées articulaires : -patte support-

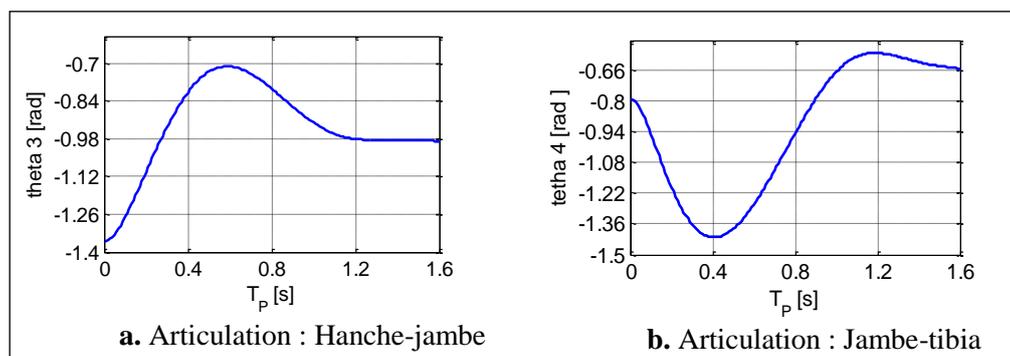


Fig VII.4. Coordonnées articulaires : -patte en vol-

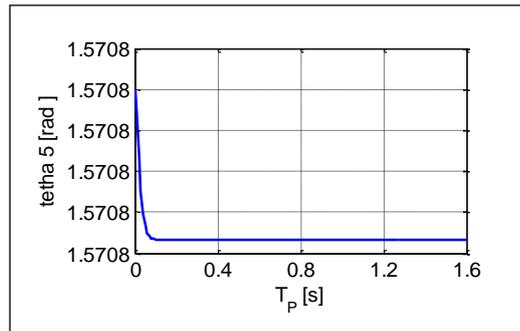


Fig VII.5 : Coordonnée articulaire : Hanche-tronc

b. Erreur sur les coordonnées articulaires

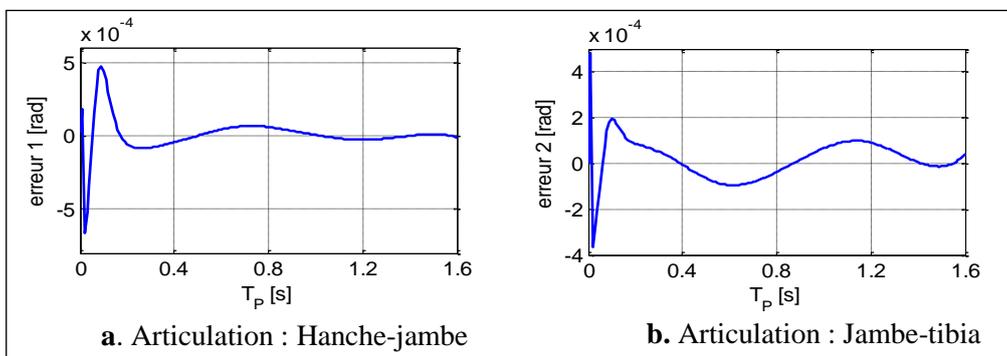


Fig VII.6 : Erreur sur les coordonnées articulaires -patte support-

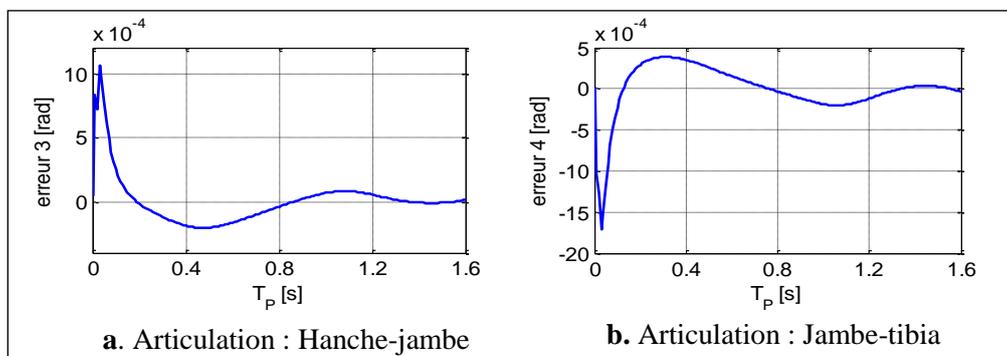


Fig VII.7 : Erreur sur les coordonnées articulaires -patte vole-

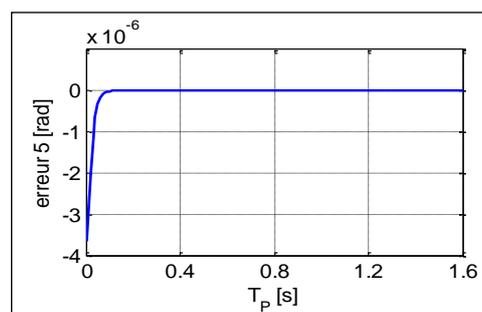


Fig VII.8 : Erreur sur la coordonnée articulaire : hanche-tronc



Interprétation des résultats :

Les figures VII.3, VII.4 et VII.5 montrent les cinq graphes des coordonnées articulaires en radian, ils représentent les valeurs réelles calculées par le système de commande. Les figures VII.6, VII.7 & VII.8 montrent l'évolution de l'erreur sur les coordonnées articulaires ($\theta_j^d - \theta_j$). Cette erreur est de l'ordre de 10^{-4} rad, ce qui montre la bonne convergence de la loi de commande établie.

c. Vitesses des coordonnées articulaires

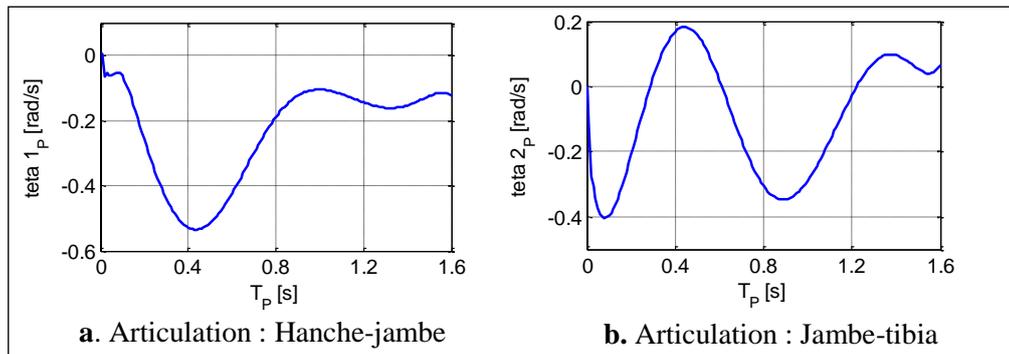


Fig VII.9: Vitesses des coordonnées articulaires -patte support-

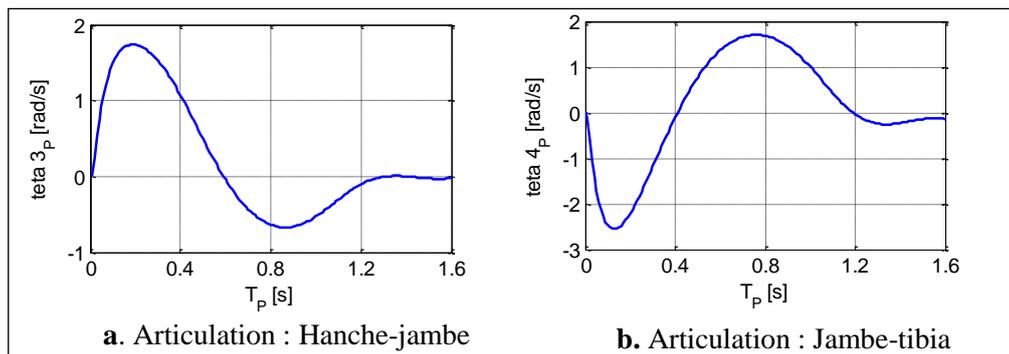


Fig VII.10: Vitesses des coordonnées articulaires -patte de vole-

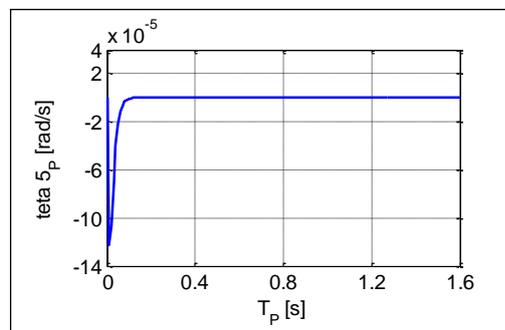


Fig VII.11: Vitesse de la coordonnée articulaire : hanche-tronc



d. Erreur sur les vitesses angulaires

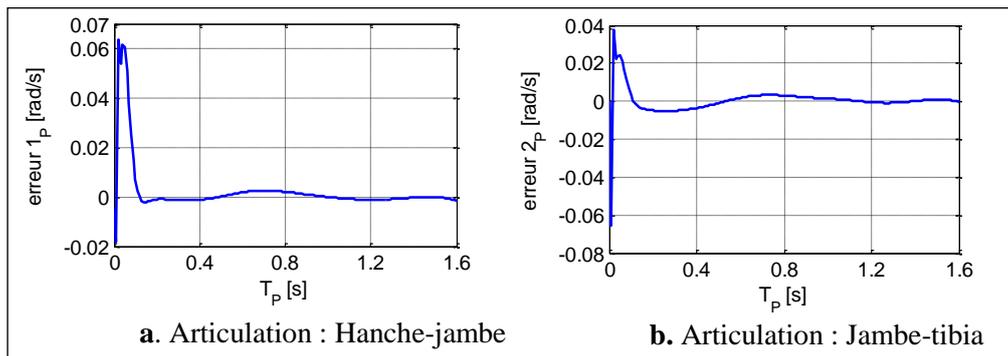


Fig VII.12 : Erreur sur les vitesses articulaire -patte support-

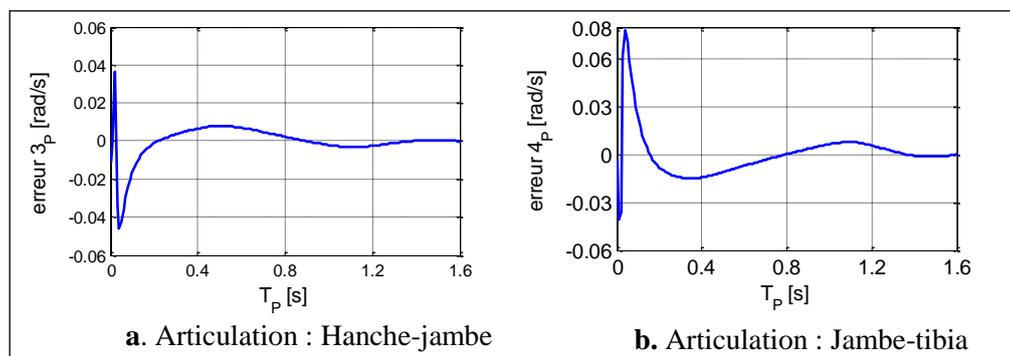


Fig VII.13 : Erreur sur les vitesses articulaire -patte de vol-

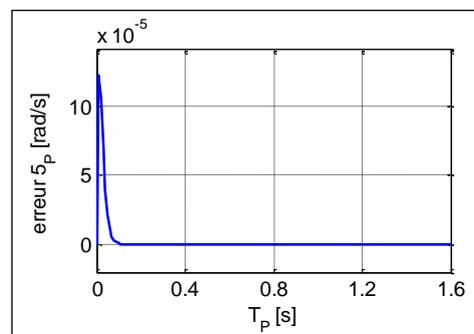


Fig VII.14 : Erreur sur la vitesse articulaire : hanche-tronc

Les figures VII.9, VII.10 & VII.11 montrent les cinq graphes des vitesses articulaires du robot en radian/seconde. Elles représentent les valeurs réelles calculées par le système de commande. L'erreur ($\dot{\theta}_j^d - \dot{\theta}_j$) est de l'ordre de 10^{-2} rad/s comme le montrent les figures VII.12, VII.13 et VII.14. On remarque que l'erreur au début du mouvement commence par de fortes perturbations dues aux accélérations de démarrage, puis, elle diminue et se stabilise aux très faibles oscillations pour les quatre articulations des deux pattes correspondants à la phase simple support et à la phase double support. Enfin pour le graphe du tronc, l'erreur est presque nulle car on considère que l'articulation du tronc est immobile.



VII.6. Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons présenté la synthèse de la commande dynamique d'un robot marcheur rigide dans les espaces articulaires.

C'est dans l'étape de validation des différents schémas de commande que nous avons constaté l'importance des modèles géométrique, cinématique et dynamique pour le calcul des consignes de commande.

La commande par découplage non linéaire du robot repose directement sur le calcul direct du modèle dynamique, donc plus le modèle dynamique est lourd plus le calcul de la commande en temps réel présente des contraintes.

La bonne convergence du système de commande du robot nécessite la connaissance des différents paramètres qui restituent le modèle dynamique tels que les paramètres géométriques et physiques des éléments de conception.

**CONCLUSION
GENERALE
ET
PERSPECTIVES**



Conclusion générale et perspectives.

Dans ce travail, on présente les différentes étapes nécessaires pour une étude préalable à la réalisation d'un robot bipède. Une application est présentée en détail pour un type de robot bipède ayant cinq degrés de liberté. Celui-ci est composé de cinq chaînons rigides qui sont interconnectés entre eux par des articulations cylindriques constituant deux pattes et un tronc dans le plan sagittal et est capable de marcher sur une plateforme horizontale.

Notre étude porte sur cinq points essentiels suivants :

- 1) Analyse globale de la marche d'un bipède
- 2) Modélisation géométrique, cinématique et dynamique
- 3) Génération de trajectoire
- 4) Etude de la stabilité
- 5) Etude de la commande

Un état de l'art a tout d'abord été mené : historique de la recherche en robotique, définitions de base permettant de rappeler les principes fondamentaux du robot bipède, recherche bibliographique touchant ce domaine et quelques réalisations technologiques existantes.

L'analyse de la marche bipède est inspirée directement de la marche humaine définie principalement dans trois plans : plan frontal, plan latéral et plan sagittal. Le mouvement essentiel est réalisé dans le plan sagittal. Un cycle de marche provient par l'alternance des deux pas successifs. Un pas est défini par deux configurations : Phase simple support (PSS) où un seul pied est au sol et une phase double support (PDS) où les deux pieds sont au sol.

La méthode de modélisation basée sur le principe de transformation homogène des matrices, dite principe de Denavit-Hertenberg est utilisée dans ce travail. L'étude porte sur la modélisation géométrique, cinématique et dynamique. Ces trois modèles de modélisation sont liés entre eux par des relations intrinsèques déduites à partir des principes fondamentaux de la cinématique et de la dynamique. Une relation entre les lois de la cinématique, de la dynamique et le principe de Denavit-Hertenberg a permis d'utiliser l'algorithme de Newton Euler dont l'avantage est de faciliter la programmation et de réduire le temps de calcul.

Pour la modélisation géométrique, trois cheminements ont été envisagés. Chaque cheminement est mené par une étude du modèle géométrique direct (MGD) et du modèle géométrique inverse (MGI). Ce dernier est défini à partir de la position désirée (trajectoire : pieds et hanche) et par le biais de la méthode de Paul, et a permis de calculer les paramètres variables articulaires correspondantes à chaque MGD.

L'étude cinématique du robot comporte le modèle cinématique direct (MCD) et le modèle cinématique inverse (MCI). Le MCD est obtenu directement en dérivant le MGD qui s'écrit sous forme d'un produit matriciel d'une jacobienne et d'un vecteur vitesse; son MCI correspondant est obtenu par inversion de la matrice jacobienne. Une approche mathématique est utilisée dans le cas où la jacobienne est n'est pas régulière.



Pour pouvoir faire marcher le robot, on a opté à fournir un mouvement de référence défini essentiellement par la trajectoire de la hanche et celle du pied en vol. Il sera inévitable de prévoir une loi de génération de la trajectoire permettant de répondre à chaque mouvement donné aux postures de la marche envisagée. On a alors conçu des fonctions d'interpolation à coefficients constants déterminés à partir des conditions de la marche du robot. Elles sont examinées pour les deux phases de la marche (PSS et PDS).

La dynamique du robot est dérivée de deux algorithmes, l'un est de Newton-Euler et l'autre de Lagrange. Ces deux algorithmes sont appliqués sur chaque sous système du robot (patte en vol, patte support et tronc), puis rassemblés dans un seul système d'équations sous forme matricielle définissant les équations dynamiques globales du robot.

Le formalisme de Lagrange a servi de calculer la matrice d'inertie, celui de Newton-Euler a permis de calculer les différents couples moteurs nécessaires pour que le robot soit capable de marcher.

En marche, sous les effets de la dynamique et de la pesanteur, le robot doit satisfaire certaines conditions pour assurer sa stabilité. Celle-ci est étudiée en appliquant le critère de la stabilité de M. Vukobratovic. Pour réaliser une marche stable, les deux aspects sont conjugués : le générateur de la trajectoire et le critère de stabilité. Dans ce but, un code de calcul est développé sous le logiciel Matlab, qui a permis d'obtenir par tâtonnement les paramètres vérifiant la stabilité du robot pendant son cycle complet de marche. Les paramètres analysés sont : les positions, les vitesses, la hauteur de la hanche et la hauteur du pied en vol.

La mise en œuvre de tel projet anthropomorphe nécessite une loi de commande. Pour cela, on a adopté une loi de commande permettant au robot de suivre en positions et vitesses désirées, les trajectoires de la marche prédéterminée (trajectoire de pied en vol et celle de la hanche). Cette loi de commande est dite commande par découplage non linéaire. Son calcul nécessite le calcul en ligne du modèle dynamique, pour cette raison sa convergence dépend de l'exactitude du modèle dynamique du robot.

L'étude est menée par simulations sous Matlab afin de vérifier les calculs analytiques.

Les perspectives offertes par ce travail peuvent concerner :

- une étude d'un robot bipède ayant une structure permettant la mobilisation dans les trois plans de locomotion de telle sorte qu'il soit plus commode et pratique;
- une loi de commande favorisant la marche du robot dans n'importe quel endroit tenant compte de sa stabilité;
- une opportunité d'une contribution consistante entre les laboratoires de l'ENP des trois départements (Mécanique, Automatique, Electrotechnique) pour pouvoir réaliser un prototype d'un robot bipède.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIES

- [01] C. Mahfoudi, *contribution à la modélisation et à la commande des robots à pattes, application aux hexapodes*. Thèse de doctorat. Ecole Nationale Supérieure Polytechnique d'Alger. Département de Génie Mécanique. Oct 2006.
- [02] P-N. Mousavi, A. Bagheri. *Mathematical simulation of a seven link biped robot on various surfaces and ZMP considerations*; Applied mathematical modelling, vol. 31, n°1, pp. 18-37 (26 ref.). Elsevier 2007.
- [03] P-B. Wieber. *Modélisation et Commande d'un Robot Marcheur Anthropomorphe*. Thèse de Doctorat. Ecole des Mines de Paris. Dec 2000.
- [04] H. Bunke. S. P. Wang. *Fundamentals of robotics linking perception to action*. Ming Xie Singapore-MIT. Vol.58, series in machine perception and artificial intelligence. world scientific 2003.
- [05] P. Fisette, H. Buyse, J.C. Samin. *Introduction à la robotique*. MECA 2732. Nov 2004
- [06] B. Sicilano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo. *Robotics Modeling, Planing and Control*; 2009 Springer-Verlag London Limited
- [07] S. Kajita, H. Hirukawa, K. Harada & K. Yokoi. *Introduction à la commande des robots humanoïdes*. Springer-Verlag France 2009,
- [08] Y. Ogura, S. Ando, H. Lim, A. Takanishi. *Sensory-based walking motion instruction for biped humanoid robot*. Vol. 48, Issue 4, P :163-169, Japan. Elsever 2004.
- [09] K. Yong-Sung, S. Chang-Jun. *Development of a Biped Walking Robot, ICCAS*, Department of Electronics Engineering, Kyungpook National University, Daegu 702-701, Korea. 2005
- [10] C. Azevedo, P. Pognet et B. Espiau. *Artificial locomotion control: from human to robots*. Robotics and Autonomous Systems (RAS), vol. 47, N° :4, p : 203–223. Elsevier 2004.
- [11] M. A. Zennani . *Dynamique inverse de la Marche bipède ; Systèmes Mécaniques Robotisés*. Memoire magister. Ecole militaire polytechnique. Oct 2007
- [12] J. Fourier. *Simulation graphique d'un robot bipède dans un environnement structuré*, Thèse de Doctorat. Université de Grenoble. Octobre 1999.
- [13] I-L. Maach. *Développement d'un Nouveau système pour Analyser la Biocinématique Du Genou. Application : Evacuation De L'orthèse Plantaire*. Thèse de Doctorat. Ecole Polytechnique De Montréal. Août 1998.
- [14] A. Goswami. *Postural stability of biped robots and the foot rotation indicator (FRI) point* International Journal of Robotics Research Vol. 18, N° 6. P: 523-533. SAGE Publications 1999.
- [15] Y. Bachar. *Developing Controllers for Biped Humanoid Locomotion*. Master of science School of Informatics University of Edinburgh 2004.
- [16] R. Zhang, C. Vogler, D. Metaxas. *Human gait recognition at sagittal plane*. *Image and Vision Computing*, Vol. 25, N° 3. P : 321-330. USA. 2005
- [17] T-T Lee, P.L. Jeng and W.A.Gruver. *Control of a 5-Link Biped Robot for Steady Walking*. Intelligent Control. Proceedings, IEEE International Symposium on Robotics .Vol.1, Issue 24-26. P: 484-489. IEEE 1989.
- [18] Y. Hurmuzlu. *Dynamics of bipedal gait; Part I: Objective functions and the contact event of a planar five-link biped*. ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.60, Issue2, P :331–336. 1993.
- [19] H. Wang, T-T. Lee, and W. A. Gruver. *A Neuromorphic Controller for a Three-Link Biped Robot*. *Systems, Man and Cybernetics*. Vol 22, Issue 1, P:164–169. IEEE 1992.
- [20] P. Sardain, M. Rostami, E. Thomas, G. Bessonnet, *Biped Robots: correlations between Technological Design and Dynamical Behavior*, Journal of Control Engineering Practice, Vol.7, P :401-411, Elsevier 1999.
- [21] M. Morisawa K.Ohnishi. *A Dynamic Hybrid Control of Biped Robot in Supporting Area*. *Advanced Motion Control*. Dept. of Syst. Design Eng., Keio Univ. Japan, P: 381-386. IEEE 2004.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIES

- [22] T. Tsuji & K. Ohnishi. *A Control of Biped Robot which Applies Inverted Pendulum Mode with Virtual Supporting Point*. Advanced Motion Control. Dept. of Syst. Desing Eng., Keio Univ, Japan. P: 478 - 483. IEEE 2002.
- [23] P.L. Jeng, Tsu-Tian Lee & W.A.Gruver. *Control of a 5-Link Biped Robot for Steady Walking*. IEEE 1989
- [24] W. Khalil. *Modélisation identification et commande des robots*. Hermes science publication 1988.
- [25] R. Muszynski. *A solution to the singular inverse kinematic problem for a manipulation robot mounted on a track*. Institute of Engineering Cybernetics, Control Engineering Practice, Vol.10, P:35-43 (9). Elsevier 2002.
- [26] C-M. gosselin, & D. laurendeau. *Inverse kinematic functions for approach and catching operations*. Transactions on systems, man, and cybernetics, vol.23, N°:3. P:783-791. IEEE 1993.
- [27] K. Tchou, & J. Jakubiak. *A repeatable inverse kinematics algorithm with linear invariant subspaces for mobile manipulators*. Transactions on systems, man, and cybernetics—part b: cybernetics, vol.35, N°:5. P:1253-1260. IEEE 2005
- [28] A. D'Souza, S. Vijayakumar & S. Schaal. *Learning inverse kinematics*. International conference on intelligent systems . Mani, Hawaii, USA, IEEE 2001
- [29] R. Laurence. *Génération de trajectoires de marche optimales pour un robot bipède*. Thèse de Doctorat. Institut national polytechnique de Grenoble, France. 1998.
- [30] K. Majima, T. Miyazaki & K. Ohishi. *Dynamic gait control of biped robot based on kinematics and motion Description in cartesian space*. Industrial Electronics, Control and Instrumentation. New Orleans, LA, USA.Vol.3, P: 1317-1322. Nov 1999.
- [31] M. Hackel. *Humanoid robot, Human like machine*. Published by Advanced Robotic Systems International and I-Tech Education and Publishing. Vienna, Austria. Printed in Croatia. published July 2007
- [32] R. Zhang & P.Vadakkepat. *Motion Planning of Biped Robot Climbing Stairs*. Department of Electrical and Computer Engineering, National University of Singapore.
- [33] A-D. Kuo. *The six determinants of gait and the inverted pendulum analogy: A dynamic walking perspective*. Human movement science. European Workshop on Movement Science, Amsterdam, vol. 26, N° 4, p: 617-656. Elsevier 2007.
- [34] P-N Mousavi, & A. Bagheri. *Mathematical simulation of a seven link biped robot on various surfaces and ZMP considerations*. Applied Mathematical Modelling. Vol.31, Issue 1, P : 18-37, Iran. Elsevier 2006.
- [35] M-S. Orendurff , G-C Bernatz , J-A Schoen & G-K Klute. *Kinetic mechanisms to alter walking speed*. Motion Analysis Laboratory, Gait & Posture, Vol.27, Issue 4, P :603-610 Elsevier 2007.
- [36] Y. Nong & K. Yeon. *Fuzzy logic zero moment point trajectory generation for reduced trunk motions of biped robots*. Intelligent robotic systems. Vol.134, Issue 1 P: 189-203. Elsevier 2003.
- [37] K. Yong-Sung & S. Chang-Jun. *Development of a Biped Walking Robot*, Department of Electronics Engineering, Kyungpook National University, Daegu 702-701, Korea. ICCAS 2005.
- [38] Qiang H., Kazuhito Y., Shuuji K. & Kenji K. *Planning Walking Patterns for a Biped Robot*. Transactions on Robotics and Automation. Vol.17, Issue 3. P : 280 – 289. IEEE 2001.
- [39] H-K.Lum, M.Zribi & Y.C.Soh. *Planning and control of a biped robot*. Int. Journal of engineering science. Vol.37, N°10 .P : 1319-1349 (4 ref). Singapore. Elsevier 1999.
- [40] C. Chevallereau & Y. Aoustin. *Optimal reference trajectories for walking and running of a biped robot*. Cambridge University Press New York, NY, USA.Vol.19 , Issue 5 . P: 557– 569. Elsevier 2001.
- [41] A. Takanishi & H-O Lim. *Compensatory motion control for a biped walking robot*. Cambridge University Press New York, NY, USA. Vol. 23, Issue 1. P: 1-11 . Elsevier 2005.



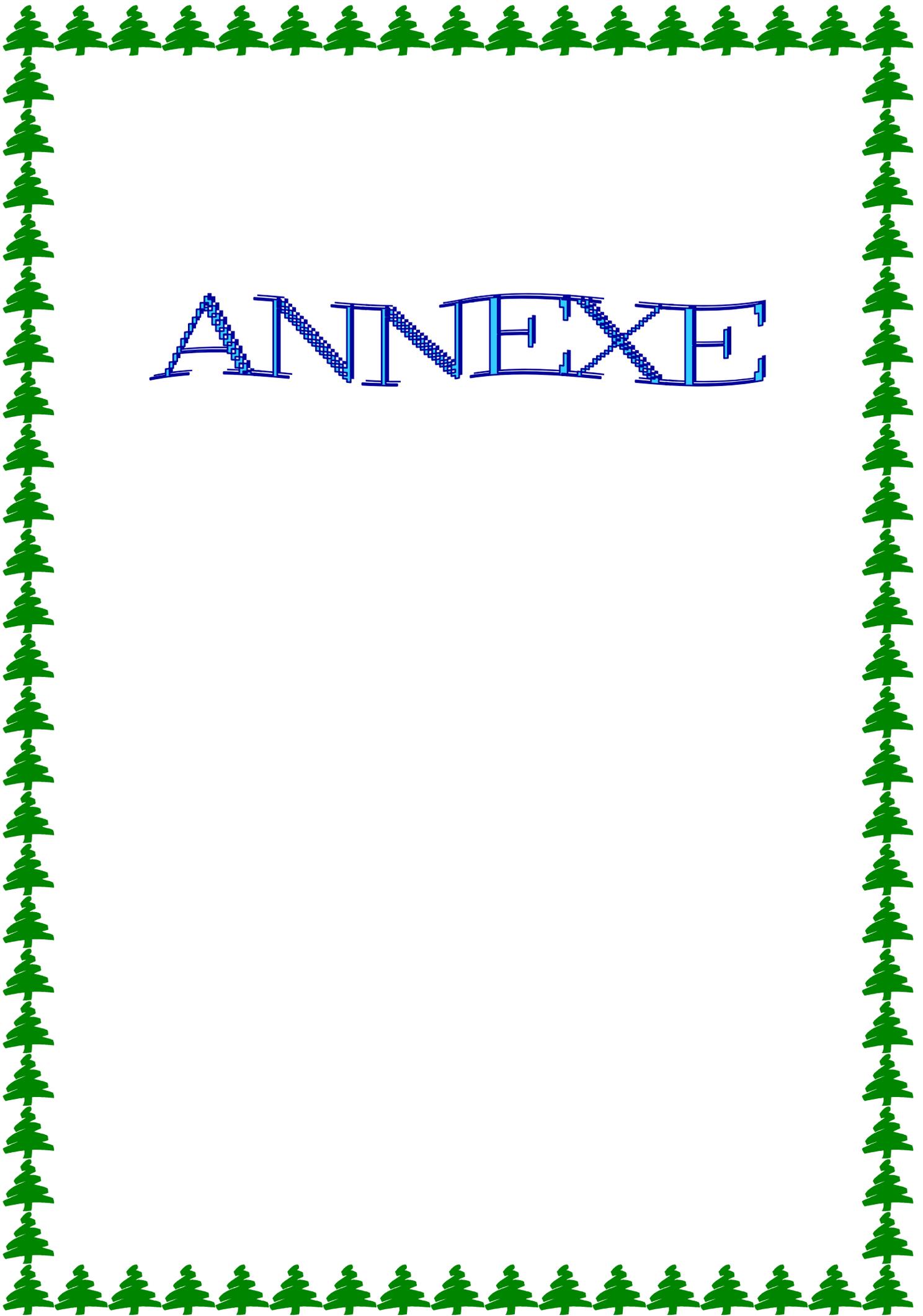
REFERENCES BIBLIOGRAPHIES

- [42] C-L Shih. *Gait Synthesis for a biped robot*. Cambridge University Press New York, NY, USA. Vol. 15, Issue 6. P: 599 – 607. Elsevier 1997.
- [43] K. Hirai, M. Hirose, Y. Haikawa, & T. Takenaka. *The development of honda humanoid robot*. Proc. Int. Conf. on Robotics & Automation, p : 1321-1326. IEEE 1998.
- [44] Q. Huang, K. Yokoi, S. Kajita, K. Kaneko, H. Arai, N. Koyachi & K. Tanie. *Planning walking patterns for a biped robot*. Transactions on Robotics and Automation. Vol.17. P: 280-289. IEEE 2001.
- [45] K. Erbatur, O. Kurt. *Humanoid Walking Robot Control with Natural ZMP References*. Sabanci University Faculty of Engineering and Natural Sciences Orhanli-Tuzla, stanbul 34956.TURKEY
- [46] B. Rok So, J-Y. Choi, B-J. Yi & W. Kim. *A New ZMP Constraint Equation with Application to Motion Planning of Humanoid Using Kinematic Redundancy*.
- [47] S. kajita, M. Orisawa, K. Harada, K. kaneko, F. Kanehiro, K. Fujiwara & H. Hirukawa. *Biped Walking Pattern Generator allowing Auxiliary ZMP Control*. Intelligent Robots and Systems, AIST,Tsukuba, Beijing. P: 2993-2999. IEEE 2006.
- [48] P. Sardain & G. Bessonnet. *Zero Moment Point-Measurements From a Human Walker Wearing Robot Feet as Shoes*. Transactions on systems, man, and cybernetics—part A: systems and humans, vol. 34, N°: 5. P: 638-648. IEEE 2004.
- [49] Q. Li, A. Takanishi, & I. Kato. *Learning control for a biped wacking robot with a trunk*. International Conference on Intelligent Robots and Systems. Yokohama, Japan. P: 1771-1777. IEEE 1993.
- [50] S. Kajita, T. Yamaura, & A. Kobayashi. *Dynamic Walking Control Of a Biped Robot Along a Potential Energy Concerning Orbit*. Transactions on Robotics and Automation, Vol 8, N° 4. P:431-438. IEEE 1992.
- [51] S. kajita, F. kanehiro, k. kaneko, k. Fujiwara, K. Harada, K. yokoi & H. Hirukawa. *Biped walking pattern generation by using preview control of zero-moment point*. P 1620-1626 Inlerostional Conference on Robotics & Automation, Taiwan, IEEE 2003.
- [52] H. Minakata. *A study of flexible shoe system for biped robot*. *Advanced Motion Control*. AMCapos. N° 04. P: 387- 392. IEEE 2004.
- [53] M-J. Er, Y. Zhou & C-J. Chien. *Gait Synthesis Self-generation by Dynamic Fuzzy Q-Learning Control of Humanoid Robots*. Inter. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics. Vol.5, Issue :8-11. P: 4231-4236, Taiwan. IEEE 2006.
- [54] M. Takahashi, T. Narukawa, K. Miyakawa & K. Yoshida. *Combined Control of CPG and Torso Attitude Control for Biped Locomotion*. Intelligent Robots and Systems. Univ. Yokohama, Japan. P :4051-4056. IEEE 2002
- [55] J-H Park & Y-K. Rhee. *ZMP Trajectory Generation for Reduced Trunk Motions of Biped Robots*. vol.1. P: 90-95. Univ. Seoul, Korea. IEEE 1998.
- [56] J-M. BOURGEOT. *Contribution à la commande de systèmes mécaniques non-réguliers*. institut national polytechnique de grenoble. These de Docteurat. Oct 2004
- [57] M. Thoma & J-P. Laumond. *Robot Motion Planning and Control*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer. 1998.
- [58] D -R. shircliff. *Build A Remote-Controlled Robot*. McGraw-Hill 2002.
- [59] N. Hadidi, C. Mahfoudi & M. Bouaziz. *Modélisation Géométrique, Génération de Trajectoire et Simulation d'un Robot Bipède*. 2^{ème} Conférence Internationale sur les Sciences de la Mécanique, Université Oum Elboighi. Nov 2008.
- [60] X. Mu & Q. Wu. *A Complete Dynamic Model of Five-Link Bipedal Walking*. Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Manitoba, Canada, R3T 5V6. Proceedings 01 the American Control Conference. Colorado. Juin 2003.
- [61] Y. Hasegawa, T. Arakawa & T. Fukuda. *Trajectory generation for biped locomotion robot*. Robotics and Automation. Vol.7. P: 652-659. Japan. IEEE 1998.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIES

- [62] O. KURT. *Biped robot reference generation with natural ZMP trajectories*. Sabanc University; Submitted to the Graduate School of Engineering and Natural Sciences in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science. Fev 2006.
- [63] Z. Tang, C. Zhou & Z. Sun. *Trajectory Planning for Smooth Transition of a Biped Robot*. International Conference of Robotics & Automation. vol.2. Issue: 14-19 . P: 2455- 2460. Taiwan. IEEE 2003.

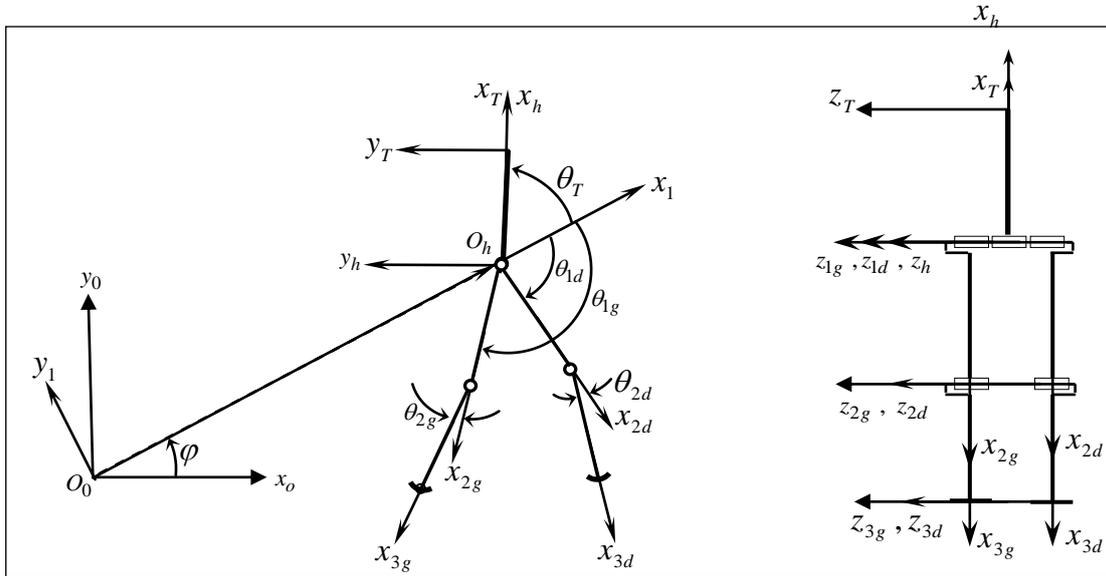


ANNEXE

Annexe A

RESULTATS SYMBOLIQUES DU MODELE DYNAMIQUE D'UNE PATTE

Le calcul suivant du modèle dynamique est applicable pour les trois phases (PSS, PDS et PT) d'un pas de marche du robot, avec la prise en compte de la force agissant sur le pied de la patte à chaque phase.



Paramétrage géométrique

Notation :

$$\cos(\theta_j) = C\theta_j ; \quad \sin(\theta_j) = S\theta_j$$

Dans ce que suit, en calcul symbolique, on écrit q_j, θ_j au lieu q_{jd}, θ_{jd} ou (q_{jg}, θ_{jg}) afin d'éviter d'encombrer l'écriture, car le calcul se fait séparément pour chaque patte (droite, gauche) et même du tronc.

1- Matrice de passage

Elle est donnée au chapitre II (page 35).

2- Efforts sur les points de contact

$$f_e = [f_{e,x}, f_{e,y}, f_{e,z}]^T$$

$$\mathcal{M}_e = [\mathcal{M}_{e,x}, \mathcal{M}_{e,y}, \mathcal{M}_{e,z}]^T = [0, 0, 0]^T$$

3- Moments d'inertie

$$I_{11} = \begin{bmatrix} I_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z1} \end{bmatrix}; \quad I_{22} = \begin{bmatrix} I_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z2} \end{bmatrix}; \quad I_{33} = \begin{bmatrix} I_{x3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z3} \end{bmatrix}$$

4- Conditions initiales (vitesse angulaire, accélération angulaire, accélération linéaire)

$$\omega_{00} = [\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0}]^r ; \quad a_{00} = [a_{x0}, a_{y0}, a_{z0}]^r ; \quad \gamma_{00} = [\gamma_{x0}, \gamma_{y0} - g, \gamma_{z0}]^r$$

a- Vitesses angulaires :

$${}^j \omega_j = {}^j \omega_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j {}^j z_j \Leftrightarrow \omega_{j,j} = \omega_{j-1,j} + \bar{\sigma}_j \dot{q}_j z_{j,j}$$

$$\text{Avec : } \omega_{j-1,j} = A_{j-1,j} \cdot \omega_{j-1,j-1}$$

$$\bullet \quad \omega_{1,1} = \omega_{0,1} + 1 \cdot \dot{q}_1 \cdot z_{1,1} \Rightarrow \omega_{1,1} = A_{0,1} \cdot \omega_{0,0} + 1 \cdot \dot{q}_1 \cdot z_{1,1} \Rightarrow \omega_{1,1} = \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x0} \\ \omega_{y0} \\ \omega_{z0} \end{bmatrix} + \dot{\varphi} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \omega_{1,1} = \begin{bmatrix} \omega_{x0} \cdot C\varphi - \omega_{y0} \cdot S\varphi \\ \omega_{x0} \cdot S\varphi + \omega_{y0} \cdot C\varphi \\ \omega_{z0} + \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{x1,1} \\ \omega_{y1,1} \\ \omega_{z1,1} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \omega_{2,2} = \omega_{1,2} + 1 \cdot \dot{q}_2 \cdot z_{2,2} \Rightarrow \omega_{2,2} = A_{1,2} \cdot \omega_{1,1} + 1 \cdot \dot{q}_2 \cdot z_{2,2}$$

$$\Rightarrow \omega_{2,2} = \begin{bmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x1,1} \\ \omega_{y1,1} \\ \omega_{z1,1} \end{bmatrix} + \dot{\theta}_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_{2,2} = \begin{bmatrix} \omega_{x1,1} \cdot C\theta_1 + \omega_{y1,1} \cdot S\theta_1 \\ -\omega_{x1,1} \cdot S\theta_1 + \omega_{y1,1} \cdot C\theta_1 \\ \omega_{z1,1} + \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{2,2} = \begin{bmatrix} \omega_{x2,2} \\ \omega_{y2,2} \\ \omega_{z2,2} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \omega_{3,3} = \omega_{2,3} + 1 \cdot \dot{q}_3 \cdot z_{3,3} \Rightarrow \omega_{3,3} = A_{2,3} \cdot \omega_{2,2} + 1 \cdot \dot{q}_3 \cdot z_{3,3}$$

$$\Rightarrow \omega_{3,3} = \begin{bmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x2,2} \\ \omega_{y2,2} \\ \omega_{z2,2} \end{bmatrix} + \dot{\theta}_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_{3,3} = \begin{bmatrix} \omega_{x2,2} \cdot C\theta_2 + \omega_{y2,2} \cdot S\theta_2 \\ -\omega_{x2,2} \cdot S\theta_2 + \omega_{y2,2} \cdot C\theta_2 \\ \omega_{z2,2} + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{3,3} = \begin{bmatrix} \omega_{x3,3} \\ \omega_{y3,3} \\ \omega_{z3,3} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \omega_{4,4} = \omega_{3,4} + 1 \cdot \dot{q}_4 \cdot z_{4,4} \Rightarrow \omega_{4,4} = A_{3,4} \cdot \omega_{3,3} + 1 \cdot \dot{q}_4 \cdot z_{4,4}$$

$$\Rightarrow \omega_{4,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x3,3} \\ \omega_{y3,3} \\ \omega_{z3,3} \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_{4,4} = \begin{bmatrix} \omega_{x4,4} \\ \omega_{y4,4} \\ \omega_{z4,4} \end{bmatrix}$$

b- Accélération angulaires :

$${}^j \dot{\omega}_j = {}^j A_{j-1} \cdot {}^{j-1} \dot{\omega}_{j-1} + \ddot{q}_j \cdot {}^j z_j + {}^{j-1} \omega_{j-1} \times \dot{q}_j \cdot {}^j z_j \Leftrightarrow a_{j,j} = A_{j-1,j} \cdot a_{j-1,j-1} + \ddot{q}_j \cdot z_{j,j} + \omega_{j-1,j-1} \times \dot{q}_j \cdot z_{j,j}$$

$$a_{1,1} = A_{0,1} \cdot a_{0,0} + \ddot{q}_1 \cdot z_{1,1} + \omega_{0,0} \times \dot{q}_1 \cdot z_{1,1} \Rightarrow a_{1,1} = \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{x0} \\ a_{y0} \\ a_{z0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{x0} \\ \omega_{y0} \\ \omega_{z0} \end{bmatrix} \times \dot{\varphi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{1,1} = \begin{bmatrix} a_{x0} \cdot C\varphi + a_{y0} \cdot S\varphi + \dot{\varphi} \cdot \omega_{y0} \\ -a_{x0} \cdot S\varphi + a_{y0} \cdot C\varphi - \dot{\varphi} \cdot \omega_{x0} \\ a_{z0} + \ddot{\varphi} \end{bmatrix} \Rightarrow a_{1,1} = \begin{bmatrix} a_{x1,1} \\ a_{y1,1} \\ a_{z1,1} \end{bmatrix}$$

$$a_{2,2} = A_{1,2} \cdot a_{1,1} + \ddot{q}_2 \cdot z_{2,2} + \omega_{1,1} \times \dot{q}_2 \cdot z_{2,2} \\ \Rightarrow a_{2,2} = \begin{bmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{x1,1} \\ a_{y1,1} \\ a_{z1,1} \end{bmatrix} + \ddot{\theta}_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{x1,1} \\ \omega_{y1,1} \\ \omega_{z1,1} \end{bmatrix} \times \dot{\theta}_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{2,2} = \begin{bmatrix} a_{x1,1} \cdot C\theta_1 + a_{y1,1} \cdot S\theta_1 + \dot{\theta}_1 \cdot \omega_{y1,1} \\ -a_{x1,1} \cdot S\theta_1 + a_{y1,1} \cdot C\theta_1 - \dot{\theta}_1 \cdot \omega_{x1,1} \\ a_{z1,1} + \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{2,2} = \begin{bmatrix} a_{x2,2} \\ a_{y2,2} \\ a_{z2,2} \end{bmatrix}$$

$$a_{3,3} = A_{2,3} \cdot a_{2,2} + \ddot{q}_3 \cdot z_{3,3} + \omega_{2,2} \times \dot{q}_3 \cdot z_{3,3} \\ \Rightarrow a_{3,3} = \begin{bmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{x2,2} \\ a_{y2,2} \\ a_{z2,2} \end{bmatrix} + \ddot{\theta}_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{x2,2} \\ \omega_{y2,2} \\ \omega_{z2,2} \end{bmatrix} \times \dot{\theta}_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{3,3} = \begin{bmatrix} a_{x2,2} \cdot C\theta_2 + a_{y2,2} \cdot S\theta_2 + \dot{\theta}_2 \cdot \omega_{y2,2} \\ -a_{x2,2} \cdot S\theta_2 + a_{y2,2} \cdot C\theta_2 - \dot{\theta}_2 \cdot \omega_{x2,2} \\ a_{z2,2} + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{3,3} = \begin{bmatrix} a_{x3,3} \\ a_{y3,3} \\ a_{z3,3} \end{bmatrix}$$

$$a_{4,4} = A_{3,4} \cdot a_{3,3} + \ddot{q}_4 \cdot z_{4,4} + \omega_{3,3} \times \dot{q}_4 \cdot z_{4,4} \Rightarrow a_{4,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{x3,3} \\ a_{y3,3} \\ a_{z3,3} \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{x3,3} \\ \omega_{y3,3} \\ \omega_{z3,3} \end{bmatrix} \times 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{4,4} = \begin{bmatrix} a_{x4,4} \\ a_{y4,4} \\ a_{z4,4} \end{bmatrix}$$

c- Accélération linéaires aux centres de gravité :

$${}^j\dot{V}_j = {}^jA_{j-1} \left({}^{j-1}\dot{V}_{j-1} + {}^{j-1}U_{j-1} \cdot {}^{j-1}P_j \right) + \sigma_j \left[\ddot{q}_j \cdot {}^jz_j + 2 \cdot {}^j\omega_{j-1} \times \dot{q}_j \cdot {}^jz_j \right]$$

$$\Leftrightarrow \gamma_{j,j} = A_{j-1,j} \left(\gamma_{j-1,j-1} + U_{j-1,j-1} \cdot P_{j,j-1} \right) + \sigma_j \left[\ddot{q}_j \cdot z_{j,j} + 2 \cdot \omega_{j-1,j} \times \dot{q}_j \cdot z_{j,j} \right]$$

Sachant que toutes les articulations sont rotoïdes, on a alors : $\Rightarrow \sigma_j = 0$

donc :
$$\gamma_{j,j} = A_{j-1,j} \left(\gamma_{j-1,j-1} + U_{j-1,j-1} \cdot P_{j,j-1} \right)$$

Avec :
$$U_{j,j} = \hat{\omega}_{j,j} + \hat{\omega}_{j,j} \cdot \hat{\omega}_{j,j}$$
 est un opérateur tensoriel.

Calcul des opérateurs tensoriels : (j = 1,2,3,4)

$$\hat{a}_{j,j} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{z,j} & a_{y,j} \\ a_{z,j} & 0 & -a_{x,j} \\ -a_{y,j} & a_{x,j} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\omega}_{j,j} \cdot \hat{\omega}_{j,j} = \begin{bmatrix} -\omega_{z,j}^2 - \omega_{y,j}^2 & \omega_{y,j} \cdot \omega_{x,j} & \omega_{z,j} \cdot \omega_{x,j} \\ \omega_{y,j} \cdot \omega_{x,j} & -\omega_{z,j}^2 - \omega_{x,j}^2 & \omega_{z,j} \cdot \omega_{y,j} \\ \omega_{z,j} \cdot \omega_{x,j} & \omega_{z,j} \cdot \omega_{y,j} & -\omega_{y,j}^2 - \omega_{x,j}^2 \end{bmatrix}$$

$$U_{j,j} = \begin{bmatrix} -\omega_{z,j}^2 - \omega_{y,j}^2 & -a_{z,j} + \omega_{y,j} \cdot \omega_{x,j} & a_{y,j} + \omega_{z,j} \cdot \omega_{x,j} \\ a_{z,j} + \omega_{y,j} \cdot \omega_{x,j} & -\omega_{z,j}^2 - \omega_{x,j}^2 & -a_{x,j} + \omega_{z,j} \cdot \omega_{y,j} \\ -a_{y,j} + \omega_{z,j} \cdot \omega_{x,j} & a_{x,j} + \omega_{z,j} \cdot \omega_{y,j} & -\omega_{y,j}^2 - \omega_{x,j}^2 \end{bmatrix}$$

$$U_{j,j} = \begin{bmatrix} U_{j,xx} & U_{j,yx} & U_{j,zx} \\ U_{j,yx} & U_{j,yy} & U_{j,yz} \\ U_{j,zx} & U_{j,zy} & U_{j,zz} \end{bmatrix}$$

•
$$\gamma_{1,1} = A_{0,1} \left(\gamma_{0,0} + U_{0,0} \cdot P_{1,0} \right)$$

$$\gamma_{1,1} = \begin{bmatrix} C\varphi & S\varphi & 0 \\ -S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \gamma_{x0} \\ \gamma_{y0} - g \\ \gamma_{z0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} tr \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \gamma_{1,1} = \begin{bmatrix} -g \cdot S\varphi \\ -g \cdot C\varphi \\ \gamma_{z0} \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{1,1} = \begin{bmatrix} \gamma_{x1,1} \\ \gamma_{y1,1} \\ \gamma_{z1,1} \end{bmatrix}$$

•
$$\gamma_{2,2} = A_{1,2} \left(\gamma_{1,1} + U_{1,1} \cdot P_{2,1} \right)$$

$$\gamma_{2,2} = \begin{bmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{x1,1} \\ \gamma_{y1,1} \\ \gamma_{z1,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{1,xx} & U_{1,yx} & U_{1,zx} \\ U_{1,yx} & U_{1,yy} & U_{1,yz} \\ U_{1,zx} & U_{1,zy} & U_{1,zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \gamma_{2,2} = \begin{bmatrix} C\theta_1 \cdot (\gamma_{x1,1} + U_{1,xx} \cdot tr) + S\theta_1 \cdot (\gamma_{y1,1} + U_{1,yx} \cdot tr) \\ -S\theta_1 \cdot (\gamma_{x1,1} + U_{1,xx} \cdot tr) + C\theta_1 \cdot (\gamma_{y1,1} + U_{1,yx} \cdot tr) \\ \gamma_{z1,1} + U_{1,zx} \cdot tr \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{2,2} = \begin{bmatrix} \gamma_{x2,2} \\ \gamma_{y2,2} \\ \gamma_{z2,2} \end{bmatrix}$$

- $\gamma_{3,3} = A_{2,3} (\gamma_{2,2} + U_{2,2} \cdot P_{3,2})$

$$\gamma_{3,3} = \begin{bmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{x2,2} \\ \gamma_{y2,2} \\ \gamma_{z2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{2,xx} & U_{2,yx} & U_{2,zx} \\ U_{2,yx} & U_{2,yy} & U_{2,yz} \\ U_{2,zx} & U_{2,zy} & U_{2,zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \gamma_{3,3} = \begin{bmatrix} C\theta_2 \cdot (\gamma_{x2,2} + U_{2,xx} \cdot L_2) + S\theta_2 \cdot (\gamma_{y2,2} + U_{2,yx} \cdot L_2) \\ -S\theta_2 \cdot (\gamma_{x2,2} + U_{2,xx} \cdot L_2) + C\theta_2 \cdot (\gamma_{y2,2} + U_{2,yx} \cdot L_2) \\ \gamma_{z2,2} + U_{2,zx} \cdot L_2 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{3,3} = \begin{bmatrix} \gamma_{x3,3} \\ \gamma_{y3,3} \\ \gamma_{z3,3} \end{bmatrix}$$

5- Efforts sur les articulations :

On a : $F_j = m_j \cdot \gamma_{j,j} + U_{j,j} \cdot md_{j,j} = f_{j,j} - f_{j,j+1} + f_e$

$$f_{j,j} = F_j + f_{j,j+1} + f_e$$

On suppose qu'il existe des forces extérieures agissantes sur le système. Soit :

$$f_e = [f_{e,x}, f_{e,y}, f_{e,z}] \text{ leur composante. On peut écrire :}$$

- $F_3 = m_3 \cdot \gamma_{3,3} + U_{3,3} \cdot md_{3,3} = f_{3,3} - f_{3,4} + f_e$

$f_{4,3}$ représente l'action du chaînon 4 sur le chaînon 3. Le chaînon 4 n'existant pas, on

alors $f_{4,3} = 0$

$$f_{3,3} = F_3 = m_3 \cdot \gamma_{3,3} + U_{3,3} \cdot md_{3,3}$$

$$f_{3,3} = \left[f_{e,x} + \frac{1}{2} U_{3,xx} \cdot m_2 \cdot L_2 + m_2 \cdot \gamma_{x3,3} , f_{e,y} + \frac{1}{2} U_{3,yx} \cdot m_2 \cdot L_2 + m_2 \cdot \gamma_{y3,3} , f_{e,z} + \frac{1}{2} U_{3,yz} \cdot m_2 \cdot L_2 + m_2 \cdot \gamma_{z3,3} \right]^T$$

$$f_{3,3} = [f_{x3,3} , f_{y3,3} , f_{z3,3}]^T$$

- $F_2 = m_2 \cdot \gamma_{2,2} + U_{2,2} \cdot md_{2,2} = f_{2,2} - f_{3,2}$

avec : $f_{3,2} = [f_{x3,3} \cdot C\theta_2 - f_{y3,3} \cdot S\theta_2 , f_{x3,3} \cdot S\theta_2 + f_{y3,3} \cdot C\theta_2 , f_{z3,3}]$

$$f_{2,2} = \left[\frac{1}{2} U_{2,xx} \cdot m_1 \cdot L_1 + m_1 \cdot \gamma_{x2,2} + f_{x3,3} \cdot C\theta_2 - f_{y3,3} \cdot S\theta_2 , \frac{1}{2} U_{2,yx} \cdot m_1 \cdot L_1 + m_1 \cdot \gamma_{y2,2} + f_{x3,3} \cdot S\theta_2 + f_{y3,3} \cdot C\theta_2 , \frac{1}{2} U_{2,xx} \cdot m_1 \cdot L_1 + m_1 \cdot \gamma_{z2,2} + f_{z3,3} \right]^T$$

$$f_{2,2} = [f_{x2,2} , f_{y2,2} , f_{z2,2}]^T$$

- $F_1 = m_0 \cdot \gamma_{1,1} + U_{1,1} \cdot md_{1,1} = f_{1,1} - f_{2,1}$, avec :

$$f_{2,1} = [f_{x2,2} \cdot C\theta_1 - f_{y2,2} \cdot S\theta_1 , f_{x2,2} \cdot S\theta_1 + f_{y2,2} \cdot C\theta_1 , f_{z2,2}]$$

$$f_{1,1} = [f_{x2,2} \cdot C\theta_1 - f_{y2,2} \cdot S\theta_1 , f_{x2,2} \cdot S\theta_1 + f_{y2,2} \cdot C\theta_1 , f_{z2,2}]$$

$$f_{1,1} = [f_{x1,1} , f_{y1,1} , f_{z1,1}]^T$$

6- Couples sur les articulations

$$\mathcal{M}_{j,j} = M_{j,j} + A_{j+1,j} \cdot \mathcal{M}_{j+1,j+1} + P_{j+1,j} \times f_{j+1,j} + \mathcal{M}_{e,j}$$

Avec :

$$M_{j,j} = I_{j,j} \cdot a_{j,j} + \omega_{j,j} \times (I_{j,j} \cdot \omega_{j,j}) + md_{j,j} \times \gamma_{j,j}$$

$$\mathcal{M}_{3,3} = \left[\omega_{y33} \cdot \omega_{z33} \cdot (I_{z3} - I_{y3}) + I_{x3} \cdot a_{x33} , \omega_{x33} \cdot \omega_{z33} \cdot (I_{x3} - I_{z3}) + I_{y3} \cdot a_{y33} - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot L_2 \cdot \gamma_{z33} , \omega_{x33} \cdot \omega_{y33} \cdot (I_{y3} - I_{x3}) + I_{z3} \cdot a_{z33} + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot L_2 \cdot \gamma_{y33} + L_2 \cdot f_{e,yy} \right]$$

$$\mathcal{M}_{3,3} = [\mathcal{M}_{x,33} , \mathcal{M}_{y,33} , \mathcal{M}_{z,33}]^T$$

$$\mathcal{M}_{2,2} = [\mathcal{M}_{x,33} \cdot C\theta_2 - \mathcal{M}_{y,33} \cdot S\theta_2 + \omega_{y22} \cdot \omega_{z22} \cdot (I_{z2} - I_{y2}) + I_{x2} \cdot a_{x22} ,$$

$$\mathcal{M}_{x,33} \cdot S\theta_2 + \mathcal{M}_{y,33} \cdot C\theta_2 + \omega_{x22} \cdot \omega_{z22} \cdot (I_{x2} - I_{z2}) + I_{y2} \cdot a_{y22} - \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot L_1 \cdot \gamma_{z22} - L_1 \cdot f_{z,33} ,$$

$$\mathcal{M}_{z,33} + \omega_{x22} \cdot \omega_{y22} \cdot (I_{y2} - I_{x2}) + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot L_1 \cdot \gamma_{y22} + L_1 (f_{x,33} \cdot S\theta_2 + f_{y,33} \cdot C\theta_2) + I_{z2} \cdot a_{z22}]$$

$$\mathcal{M}_{2,2} = [\mathcal{M}_{x,22}, \mathcal{M}_{y,22}, \mathcal{M}_{z,22}]^T$$

$$\mathcal{M}_{1,1} = [\mathcal{M}_{x,22} \cdot C\theta_1 - \mathcal{M}_{y,22} \cdot S\theta_1, \mathcal{M}_{x,22} \cdot S\theta_1 + \mathcal{M}_{y,22} \cdot C\theta_1 - tr \cdot f_{x,22}, \mathcal{M}_{z,22} + tr \cdot (f_{x,22} \cdot S\theta_1 + f_{y,22} \cdot C\theta_2)]^T$$

$$\mathcal{M}_{1,1} = [\mathcal{M}_{x,11}, \mathcal{M}_{y,11}, \mathcal{M}_{z,11}]^T$$