

10xc

وزارة التعليم العالي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Synthèse d'un filtre numérique R.I.I.
par la méthode des moindres
carrés modifiés

Proposé par :

D' B. DERRAS

Etudié par :

MOAD M.S.

Dirigé par :

D' B. DERRAS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

REMERCIEMENTS

Je voudrai tout d'abord remercier chaleureusement Monsieur B.DERRAS Ph.D à l'E.N.P de m'avoir accepté sous sa direction et pour le soutien qu'il m'a apporté durant cette étude.

Je tient aussi à remercier monsieurs :

- BEN SAID HOUCINE
- NASRI AZEDDINE
- ABDELEOUEL LAHCEN

pour l'aide considérable qu'ils m'ont apporté.

Mes plus vif remerciements vont aussi à toutes les personnes qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce travail.

D E D I C A C E S

*Je dédie ce modeste travail en signe de respect
et de reconnaissances à :*

- *Mes parents*
- *Mes frères et soeures*
- *Ma famille*
- *Mes amis*

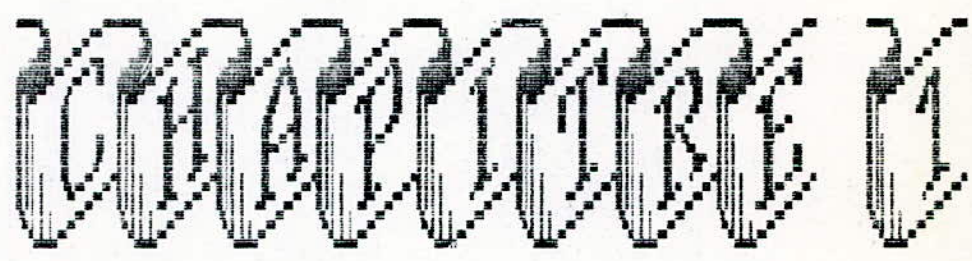
Moad Mohammed Es-Sayah

CHAPITRE I :	INTRODUCTION	
1-1 :	Introduction	2
1-2 :	Généralités mathématiques	2
1-3 :	Résumé du projet	3
CHAPITRE II :	FILTRES NUMERIQUES RIF ET RII	
2-1 :	Introduction	6
2-2 :	Filtres à réponse impulsionnelle finie ..	6
2-3 :	Filtres à réponse impulsionnelle infinie	9
2-4 :	Comparaison entre les filtres RIF et RII	11
CHAPITRE III :	METHODES D'APPROXIMATIONS	
3-1 :	Synthèse des filtres RII par l'approximation de PADE	13
3-2 :	Extension de la technique de PADE	17
3-3 :	Méthode des moindres carrés modifiés	23
CHAPITRE IV :	APPLICATION DES METHODES D'APPROXIMATIONS	
4-1 :	Exemple de filtre idéal	33
4-2 :	Application de l'approximation de PADE et son extension	37
4-3 :	Procédure de SCHARF et LUBY	39
4-4 :	Résultats et interprétations	45
CHAPITRE V :	FILTRE PASSE-TOUT ET EGALISATION DE PHASE	
5-1 :	Introduction	62
5-2 :	Propriétés des filtres passe-tout	62
5-3 :	Procédure d'egalisation	63
5-4 :	Egalisation par minimisation de l'erreur	66

CHAPITRE VI : CONCLUSIONS 69

ANNEXES

I : ALGORITHME DE MULLIS-ROBERTS71
II : ALGORITHME DE LEVINSON-DURBIN74
III : ALGORITHME DE HORNER77



1-1 \ INTRODUCTION

Un filtre numérique est un système numérique linéaire invariant dans le temps utilisé pour modifier la distribution fréquentielle des composantes d'un signal selon des spécifications données.

Pour des raisons historiques les filtres numériques ont été utilisés pour simuler les filtres analogiques.

L'avantage essentiel des filtres numériques sur les filtres analogiques est qu'ils ont une flexibilité dans l'utilisation de leurs paramètres intrinsèques.

L'intérêt économique et le progrès technologique ont poussés au développement des méthodes propres pour la synthèse des filtres numériques.

Comme on peut s'y attendre, il n'y a pas de méthode de filtrage qui soit la meilleure pour tous les cas. Il existe une grande variété de méthodes allant de la simple utilisation des résultats analytiques préétablis jusqu'à des méthodes algorithmiques assistées par ordinateur.

1-2 \ GENERALITES MATHEMATIQUES

Quatre relations mathématiques forment les outils de base du filtrage numérique.

La réponse fréquentielle $G(f)$ est liée aux transformées de FOURIER $X(f)$ et $Y(f)$ des signaux d'entrées et de sorties par :

$$Y(f) = G(f) \cdot X(f) \quad (1-1)$$

Dans le domaine temporel la relation précédente devient le produit de convolution bien connu

$$y(k) = \sum_{l=0}^{\infty} g(l) \cdot x(k-l) \quad (1-2)$$

où $g(k)$ est la réponse impulsionnelle causale du filtre.

La transformée en Z des deux membres de cette relation conduit

à :

$$Y(z) = G(Z).X(Z) \quad (1-3)$$

où $G(Z)$, la transformée en Z de la réponse impulsionnelle $g(k)$, est la fonction de transfert du filtre .

Si l'on admet que la fonction de transfert peut se mettre sous la forme de quotient de deux polynomes en Z (ou Z^{-1}), les signaux d'entrées et de sorties sont liés par l'équation de récurrence suivante :

$$\sum_{n=0}^N a(n) y(k-n) = \sum_{m=0}^M b(m) x(k-m) \quad (1-4)$$

où N et M representent respectivement les degres du denominateur et du numérateur .

Il est à remarquer qu'étant donnée que la réponse impulsionnelle $g(k)$ est un signal numérique, sa transformée de Fourier c'est à dire la reponse fréquentielle $G(f)$ est une fonction PERIODIQUE, de période $2\pi/T_0$ où T_0 représente la période d'échantillonnage dans le domaine temporel. On doit remarquer aussi que la réponse fréquentielle $G(f)$ d'un filtre numérique est donnée par la fonction de transfert $G(Z)$ évaluée sur le cercle unité c'est à dire

$$G(f) = G(Z) \Big|_{Z = \text{EXP}(j2\pi f T_0)} \quad (1-5)$$

Pour qu'un filtre numérique soit physiquement réalisable, il faut qu'il soit causal et stable. La causalité et la stabilité d'un filtre numérique peuvent être caractérisées directement en fonction de la réponse impulsionnelle $g(k)$. un filtre numérique est dit causal si $g(k)=0$ pour $k < 0$. Il est dit stable si :

$$g(k) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } k \longrightarrow \infty$$

1-3 \ RESUME DU PROJET

Dans ce projet, on verra dans le deuxième chapitre les deux grande classe des filtres numériques a savoir les filtres à réponse impulsionnelle finie (R.I.F.) et les filtres à réponse impulsionnelle infinie (R.I.I.). L'avantage des filtres RII sera deduit d'une comparaison faite selon les performances de chaque classe.

Le chapitre 3 contiendra les détails de quelques méthodes d'approximations utilisés pour la synthèse des filtres RII. En effet, la première méthode utilise l'approximation de " Padé " pour une production rapide d'un filtre RII à phase linéaire.

Une autre méthode utilise une extension de l'approximation de Padé pour essayer de corriger les défauts de la méthode précédente, notamment du point de vue stabilité du filtre synthétisé.

A la fin de ce chapitre, on verra un algorithme très efficace pour la synthèse d'un filtre RII consistant est stable. En effet, cet algorithme, élaboré par C.T.MULLIS et R.A.ROBERT, tire ses performances de la minimisation au sens des moindres carrés utilisée pour le mettre au point.

Dans le chapitre 4, les procédures utilisant les méthodes précédentes seront explicitées ainsi que quelques exemples soigneusement choisis pour montrer les performances de chaque méthode.

Dans le dernier chapitre, on donnera une idée sur le problème d'égalisation de la phase.

En annexe, on présentera les détails des algorithmes utilisés dans ce projet, ainsi que le listing des programmes élaborés pour mettre en oeuvre les procédures étudiées dans les chapitres antérieurs.

2-1 \ INTRODUCTION

Il existe deux grandes classes de filtres numériques différentiable selon la longueur de la réponse impulsionnelle . ces deux classes sont les suivantes :

-Les filtres à réponse impulsionnelle finie (R I F) :
Ces filtres sont caractérisés par des réponses impulsionnelle de durée finie. Autrement dit, les échantillons $g(k)$ sont non nuls sur un interval de durée finie L avec $0 \leq k \leq L-1$.

-Les filtres à réponse impulsionnelle infinie (R I I) :
ces filtres sont caractérisés par des reponses impulsionnelles de durée infinie. Dans ce cas, les échantillons $g(k)$ sont non nuls sur un intervalle infini $0 \leq k < +\infty$

2-2 \ FILTRE A REPOSE IMPULSIONNELLE FINIE (R.I.F .)

2-2-1 : PROPRIETES

Un filtre à réponse impulsionnelle de durée finie L , est donné par la fonction de transfert suivante :

$$G(Z) = \sum_{k=0}^{L-1} g(k) Z^{-k} \quad (2-1)$$

où $g(k)$ sont les valeurs de la réponse impulsionnelle, et L représente l'ordre du filtre RIF. Le schéma fonctionnel de ce type de filtre est donné par la figure (2.1) [1] .

Un filtre RIF est causal si les va leurs $g(k)$ sont nulles pour $k < 0$. Un filtre RIF est toujours stable, car tous ses pôles sont à l'origine. Un autre avantage des filtres RIF est qu'ils ont une caractéristique de phase parfaitement linéaire .

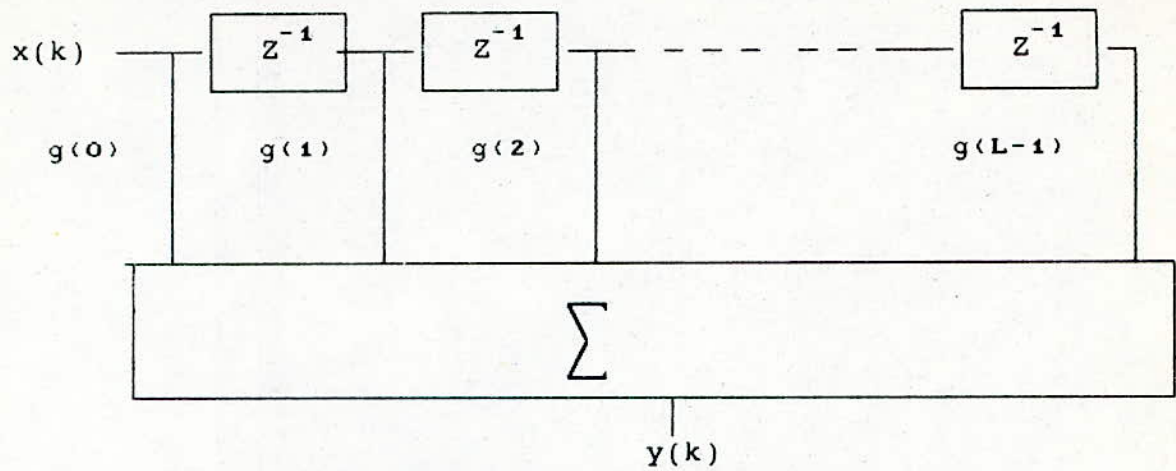


fig 2.1 - schema fonctionnel d'un filtre RIF.

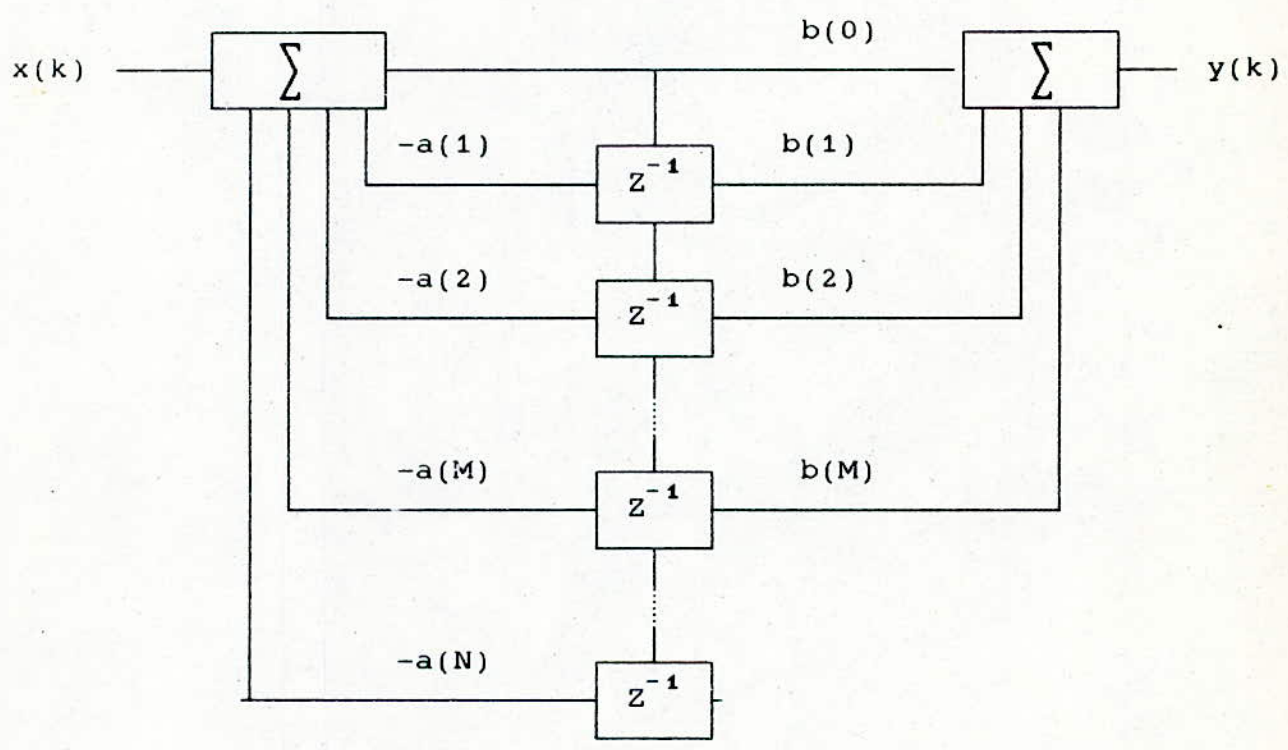


Fig 2.2 - schema fonctionnel d'un filtre RII avec $N > M$ et $a(0) = 1$.

2-2-2 \ SYNTHESE DES FILTRES RIF

Il existe deux méthodes très utilisées pour la synthèse des filtres RIF à savoir :

-Synthèse par série de Fourier (méthode de fenêtrage) :

Soit $G(f)$ la réponse fréquentielle périodique. Le principe de cette méthode est de calculer, dans la période principale, les coefficients de la réponse impulsionnelle par la relation suivante :

$$g(k) = \int_{-1/2}^{1/2} G(f) \exp(j2\pi fk) df \quad (2-2)$$

pour $k = 0, 1, 2, \dots$

Si la forme de la réponse impulsionnelle n'est pas simple à intégrer, il est souhaitable d'utiliser une approximation numérique pour calculer l'intégrale. En suite, on prend un nombre fini L d'éléments de $g(k)$ et le filtre RIF résultant sera :

$$\hat{G}(f) = \sum_{k=0}^{L-1} g(k) \exp(-j2\pi fk) \quad (2-3)$$

Le fait d'utiliser un nombre fini d'éléments de $g(k)$ revient à multiplier la réponse impulsionnelle par une fenêtre rectangulaire d'où la nomination de méthode par fenêtrage. On peut aussi utiliser d'autre type de, comme fenêtres, fenêtre de Hamming, fenêtre triangulaire etc [1], pour approximer le plus fidèlement possible la réponse fréquentielle $G(f)$ et surtout pour réduire les lobes secondaires. L'intégral devient alors :

$$g(k) = \int_{-1/2}^{1/2} W(f) \cdot G(f) \cdot \exp(j2\pi fk) \quad (2-4)$$

où $W(f)$ est la transformée de Fourier de la fenêtre temporelle choisie .

2-3 \ FILTRE A REPOSE IMPULSIONNELLE INFINIE (R.I.I.)

2-3-1: INTRODUCTION

Il existe deux catégories de méthodes pour la synthèse des filtres R.I.I.; la première comprend les techniques de transformation Analogique / Numérique, c'est à dire le passage du domaine S au domaine Z. Dans cette catégorie on peut trouver par exemple la méthode de transformation bilinéaire et la méthode de l'invariance de la réponse impulsionnelle.

la deuxième catégorie est celle des méthodes algorithmiques qui cherchent à minimiser l'erreur d'approximation des caractéristiques du filtre désiré par celles d'un filtre réalisable, selon un critère approprié.

2-3-2: METHODES DE TRANSPOSITION ENTRE DOMAINES

En effet, les filtres analogiques étant très bien étudiés, on peut utiliser les résultats de ces études pour les filtres numériques moyennant une correspondance entre le domaine analogique le domaine numérique. Pour se faire, il existe deux manières très utilisées pour ce genre de correspondance

2-3-2-1: CORRESPONDANCE PAR TRANSFORMATION BILINEAIRE

On peut obtenir la fonction de transfert dans le domaine numérique a partir de celle définie dans le domaine analogique en utilisant l'égalité :

$$S = \frac{Z - 1}{Z + 1} \quad (2-5)$$

où S est l'opérateur analogique de la transformation de Laplace .

2-3-2-2: CORRESPONDANCE PAR INVARIANCE DE LA REPOSE IMPULSIONNELLE

Cette méthode consiste à échantillonner la réponse temporelle du filtre analogique pour obtenir les réponses impulsionnelles

$$g(t) \longrightarrow g(kT_0) \quad (2-6)$$

En suite, on passe à la transformée en Z pour obtenir la réponse fréquentielle dans le domaine numérique.

2-3-3: PROPRIETES DES FILTRES RII

Un filtre RII est régi par l'équation de récurrence suivante :

$$\sum_{n=0}^N a(n) y(k-n) = \sum_{m=0}^M b(m)x(k-m) \quad (2-7)$$

où $x(k)$ et $y(k)$ représentent respectivement les signaux d'entrée et de sortie, M et N sont respectivement l'ordre du numérateur et du dénominateur. Le schéma fonctionnel des filtres RII est donné par la figure(2.2) [1]. La fonction de transfert correspondante est donnée par :

$$G(Z) = \frac{\sum_{m=0}^M b(m) Z^{-m}}{\sum_{n=0}^N a(n) Z^{-n}} \quad a(0) = 1.$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) Z^{-k} \quad (2-8)$$

les coefficients $\{ a(i) \}$ et $\{ b(i) \}$ doivent être calculé de manière à ce que la réponse fréquentielle satisfait le gabarit donné. Ce dernier n'est rien d'autre que des tolérances admises pour la bande passante, la bande coupée et la bande de transition.

2-4: COMPARAISON ENTRE LES FILTRES R.I.F ET R.I.I

La comparaison entre les filtres RIF et les filtres RII peut se faire suivant plusieurs critères [2]. Un filtre RIF à phase linéaire d'ordre L, nécessite pour sa réalisation, L/2 mémoires pour les coefficients et L mémoires pour les données internes et pour chaque valeur de la sortie, il faut L/2 multiplications et L additions. Il faut mentionner que ce type de filtre sont stables et facile à réaliser.

Les filtres RII sont plus délicats à mettre en oeuvre. Pour un filtre RII d'ordre N, il faut pour sa réalisation N mémoires pour les données internes et 2N mémoires pour les coefficients, chaque sortie nécessite environ 2N additions et 2N multiplications.

Dans le cas d'un filtre passe-bas, le type RII est plus avantageux que le type RIF pour des paramètres telle que : [9]

$$L \geq 4 N \quad (2-9)$$

Du point de vue bande de transition, les filtres RII donnent une bande nettement plus petite que les filtres RIF.

La linéarité en phase peut être égalisée pour les filtres RII en utilisant des cellules de filtres passe-tout.

Finalement il est recommandé d'utiliser les filtres RII sauf, peut être, dans le cas où la linéarité de la phase est très importante.

WANDERLUST

3-1 \ SYNTHESE DES FILTRES RII PAR L'APPROXIMATION DE PADE

3-1-1: GENERALITES

Soit $G(f)$, dans l'intervalle $[-2\pi / T_0, 2\pi / T_0]$, la réponse fréquentielle du filtre à synthétiser, où T_0 est la période d'échantillonnage. Le développement en séries de Fourier conduit à :

$$G(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k) \exp(-j2\pi f k T_0) \quad (3-1)$$

où $g(k)$ représentent les éléments de la réponse impulsionnelle du filtre à synthétiser .

3-1-2: METHODOLOGIE

Le problème se pose ainsi : Soit les $T+1$ échantillons de la réponse impulsionnelle $\{ g(k) \}$ $k = 0, 1, \dots, T$ on veut synthétiser un filtre RII physiquement réalisable dont la fonction de transfert $H(Z)$ a la forme suivante :

$$H(Z) = \frac{\sum_{i=0}^M b(i) Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a(i) Z^{-i}} \quad (3-2)$$

pour assurer la causalité du système on pose la condition $N \geq M$. Le point $Z^{-1}=0$ n'étant pas un point singulier, on peut donc décomposer $H(Z)$ en série de Mac Laurin, on a :

$$H(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) Z^{-k} \quad (3-3)$$

avec $h(k)$ la réponse impulsionnelle du filtre réalisable.

La méthode de Padé synthétise le filtre $H(Z)$, c'est à dire cherche les coefficients $a(i)$ et $b(i)$, en posant l'égalité :

$$h(k) = g(k) \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, T \quad (3-4)$$

dans le cas particulier où $T = M+N$

3-1-3: CALCUL DES COEFFICIENTS DU FILTRE RII

on a :

$$\begin{aligned}
 H(Z) &= \frac{\sum_{i=0}^M b(i) Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a(i) Z^{-i}} \\
 &= \frac{B_M(Z)}{A_N(Z)} \tag{3-5}
 \end{aligned}$$

on a donc

$$H(Z) \cdot A_N(Z) = B_M(Z) \tag{3-6}$$

en passant au domaine temporel on obtient :

$$\begin{cases} a(k) * h(k) = b(k) & \text{pour } k = 0, 1, \dots, M \\ a(k) * h(k) = 0 & \text{pour } k = M+1, \dots, M+N \end{cases} \tag{3-7}$$

où (*) denote le produit de convolution .

Si on developpe encore ce systeme , on peut l'ecrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^M a(i) h(k-i) = b(k) & k = 0, 1, \dots, M \\ \sum_{i=0}^N a(i) h(k-i) = 0 & k = M+1, \dots, M+N \end{cases} \tag{3-8}$$

Remarque :

On remarque qu'on peut facilement evaluer les coefficients $a(i)$ et $b(i)$ par un simple resolution de $M+N$ equations lineaires d'où l'importance de l'hypothese $T = M+N$

Sous forme matricielle le système s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix}
 h(0) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 h(1) & h(0) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 h(m) & h(m+1) & \dots & \dots & \dots & \dots & h(0) & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 h(N) & h(N+1) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & h(0) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 h(N+M) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & h(M)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 1 \\
 a(1) \\
 a(2) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 a(N)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 b(0) \\
 b(1) \\
 b(2) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 b(M) \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 0
 \end{bmatrix}
 \tag{3-9}$$

qu'on peut décomposer sous les formes suivantes :

$$\begin{bmatrix}
 h(0) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 h(1) & h(0) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 h(M) & h(M+1) & \dots & \dots & \dots & \dots & h(0) & 0 & \dots & \dots & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 1 \\
 a(1) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 a(N)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 b(0) \\
 b(1) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 b(M)
 \end{bmatrix}
 \tag{3-10}$$

H_0
 A
 B

$$\begin{bmatrix}
 h(M+1) & h(M) & \dots & \dots & \dots & \dots & h(0) & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 h(M+2) & h(M+1) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 h(N) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & h(0) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 h(M+N) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & h(M)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 1 \\
 a(1) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 a(N)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 0
 \end{bmatrix}
 \tag{3-11}$$

En divisant encore l'expression (3-12), on obtient le système :

$$\begin{bmatrix}
 h(M) & h(M-1) & \dots & h(0) & \dots & 0 \\
 h(M+1) & & & h(0) & \dots & 0 \\
 \vdots & & & & & \\
 h(N-1) & \dots & \dots & \dots & \dots & h(0) \\
 \vdots & & & & & \\
 h(N+M-1) & \dots & \dots & \dots & \dots & h(M)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a(1) \\
 a(0) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 a(N)
 \end{bmatrix}
 = -
 \begin{bmatrix}
 h(M+1) \\
 h(M+2) \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 h(M+N)
 \end{bmatrix}
 \tag{3-12}$$

$H1$
 A
 G

on obtient les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases}
 H1 \ A = G \\
 H2 \ A = B
 \end{cases}
 \tag{3-13}$$

où $A = (1 \ A)^t$

Ces systèmes sont facilement résolubles par l'utilisation de la méthode de GAUSS pour les systèmes linéaires.

3-1-4 : CONCLUSION

L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle ne donne aucune garantie pour la stabilité du modèle ainsi synthétisé. En plus, cette méthode nécessite une occupation mémoire qui augmente avec le nombre ($T = M+N$) d'échantillons utilisés.

On remarque aussi que pour des valeurs relativement petites de N (c'est à dire l'ordre du filtre), cette méthode donne une forme éronée de la réponse fréquentielle.

En contre partie, cette méthode permet une évaluation rapide des coefficients du filtre, ainsi qu'une facilite de manipulation du spectre et de la contrainte de linéarité de la phase, même pour les filtres d'ordre très élevée.

Deplus, cette méthode produit fiablement les $(M+N+1)$ premiers éléments de la réponse impulsionnelle, et donne une réponse impulsionnelle qui ne déville irrésiblement de la reponse impulsionnelle désirée, surtout si T est grand.

3-2 \ GENERALISATION DE LA TECHNIQUE DE PADÉ

Cette nouvelle approche des filtres RII n'est rien d'autre qu'une reformulation de la technique de l'approximation de Padé étudiée précédemment. Il est évident que cette dernière méthode donne des caractéristiques indésirables dues à la mauvaise spécification des éléments de la réponse impulsionnelle $h(i)$ pour $i = T+1, \dots, \infty$.

On essaye par cette généralisation de remédier à ces défauts par utilisation d'un nombre d'équations plus grand.

2-2-1 : DESCRIPTION DE LA METHODE

Soit $G(Z)$ et $H(Z)$ respectivement les fonctions de transfert du filtre à approximer et du filtre approximant. La fonction de transfert $H(Z)$ est cherchée sous la forme suivante :

$$H(Z) = \frac{\sum_{l=0}^M b(l) Z^{-l}}{\sum_{l=0}^N a(l) Z^{-l}} = \frac{B_M(Z)}{A_N(Z)} \quad (3-14)$$

avec $a(0) = 1$.

où M et N représentent respectivement l'ordre du numérateur et du dénominateur. Pour des raisons de causalité on prend toujours $N \geq M$. Le nombre N représentera alors l'ordre du filtre.

En développant l'expression (3-14) on a :

$$H(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) Z^{-k} \quad (3-15)$$

où $h(k)$ représentent les valeurs de la réponse impulsionnelle du filtre réalisable.

L'erreur de l'approximation est donnée par l'expression suivante :

$$E(Z) = (G(Z) - H(Z)) \cdot U(Z) = Y(Z) - \hat{Y}(Z) \quad (3-16)$$

Le schéma bloc de cette erreur est donné par la figure (3.1)

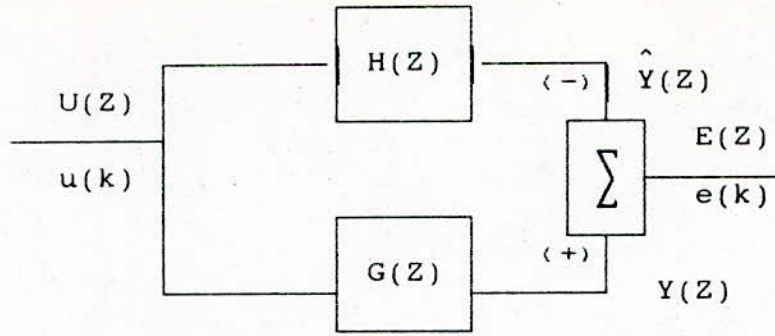


Fig 3-1 : Erreur pour la méthode des moindres carrés original

Ici $u(k)$ est considéré comme un bruit blanc normalisé.

Le but de la méthode d'approximation de Padé généralisée, est de chercher les coefficients $\{ a(i) \}$ $i = 0, \dots, N$ et $\{ b(i) \}$ $i = 0, \dots, M$ de façon à minimiser l'énergie de l'erreur d'approximation $E(Z)$ ou $e(k)$. Pour ce fait on utilise le critère de minimisation des moindres carrés.

3-2-2 : METHODE DES MOINDRES CARRÉS

En tenant compte du théorème de PARSEVAL, l'énergie de l'erreur d'approximation peut s'écrire comme suit :

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | E(e^{j\theta}) |^2 d\theta = E (e^2(k)) \quad (3-17)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (g(k) - h(k))^2$$

où E représente l'espérance mathématique, $g(k)$ et $h(k)$ sont respectivement les réponses impulsionnelles des filtres dont les fonctions de transfert sont $G(Z)$ et $H(Z)$.

La minimisation de l'erreur ainsi formulée conduit à un système d'équations non linéaires qui nécessite la programmation non linéaire. Dans notre projet ce problème est omis et on utilise pour la minimisation une autre forme d'erreur.

3-2-3 : METHODE DES MOINDRES CARRÉS MODIFIÉS

Une manière d'éviter les systèmes non linéaires, consiste à minimiser une version modifiée de l'erreur. On a tout d'abord :

$$E(Z) = (G(Z) - H(Z))U(Z) = \left(G(Z) - \frac{B_M(Z)}{A_N(Z)} \right) U(Z) \quad (3-18)$$

c'est équivalent à dire que :

$$E(Z) \cdot A_N(Z) = (G(Z) \cdot A_N(Z) - B_M(Z)) U(Z) \quad (3-19)$$

Si l'on pose :

$$E_1(Z) = E(Z) \cdot A_N(Z) \quad (3-20)$$

On obtient la relation suivante :

$$E_1(Z) = (G(Z)A_N(Z) - B_M(Z)) U(Z) \quad (3-21)$$

On définit ainsi une nouvelle version de l'erreur dite " erreur modifiée" dont le schéma est synoptique suivant :

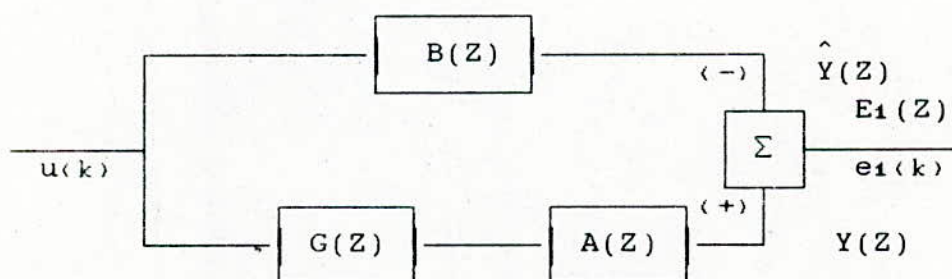


Fig 3.2 : modèle d'Erreur pour la méthode des moindres carrés modifiés

3-2-4 : UTILISATION DE LA METHODE MODIFIEE

Le problème revient donc à chercher les coefficients $\{ a(i) \}$

$i=0, \dots, N$ avec $a(0)=1$, et $\{ b(i) \}$ $i=0, \dots, M$ qui minimisent le mieux l'énergie de l'erreur modifiée. En utilisant le théorème de

PARSEVAL, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 W &= 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} | E_1(e^{j\theta}) |^2 d\theta = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} | G(e^{j\theta}) A_N(e^{j\theta}) - B_M(e^{j\theta}) |^2 d\theta \\
 &= E [e_1^2(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} e_1^2(k) \quad (3-22)
 \end{aligned}$$

où le signal $e_1(k)$ est représenté par :

$$e_1(k) = g(k) * a(k) - b(k) \quad (3-23)$$

Si on choisie un nombre T d'équations plus important que le nombre (M+N) d'inconnues, qui sont les coefficients $\{ a(i) \}$ et $\{ b(i) \}$ et on posant l'égalité : $h(i)=g(i)$ pour $i=0, \dots, T-1$, à partir de (3-23) on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} e_1(k) = \sum_{i=0}^N a(i) h(k-i) - b(k) & \text{pour } k = 0, 1, \dots, M \\ e_1(k) = \sum_{i=0}^N a(i) h(k-i) & \text{pour } M < k \leq T-1 \end{cases} \quad (3-24)$$

avec $h(k)=0$ pour $k < 0$

Il en découle le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} h(0) & 0 & - & - & - & - & - & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & - & - & - & - & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ h(M) & - & - & - & - & - & - & \\ \vdots & & & & & & & \\ h(N) & - & - & - & - & - & h(0) & \\ \vdots & & & & & & & \\ h(T-1) & & & & & & h(T-N-1) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a(1) \\ \vdots \\ a(N) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b(0) \\ b(1) \\ \vdots \\ b(M) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1(0) \\ e_1(1) \\ \vdots \\ e_1(M) \\ e_1(M+1) \\ \vdots \\ e_1(T-1) \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

Pour cela ,on calcule :

$$\begin{aligned}
 E^t E &= (H\Delta - h_1)^t (H\Delta - h_1) \\
 &= (\Delta^t H^t - h_1^t) (H\Delta - h_1) \\
 &= \Delta^t H^t H\Delta - h_1^t H \Delta - \Delta^t H^t h_1 + h_1^t h_1
 \end{aligned}$$

La dérivé peut alors s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial (E^t E)}{\partial \Delta} = 0 &\iff 2H^t H\Delta - H^t h_1 - H^t h_1 = 0 \\
 &\iff H^t H \Delta - H^t h_1 = 0 \\
 &\iff \Delta = (H^t H)^{-1} H^t h_1
 \end{aligned}$$

On facilement calculer les coefficients a(i) i = 0,1,...N d'après le système suivant :

$$(H^t H) \Delta = H^t h_1 \tag{3-31}$$

avec

$$\begin{aligned}
 h_1 &= [-h(M+1), -h(M+2), \dots, -h(T-1)]^t \\
 \Delta &= [a(1), a(2), \dots, a(N)]^t
 \end{aligned}$$

$$H = \begin{bmatrix} h(M) & \dots & h(0) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ h(N-1) & \dots & \dots & \dots & \dots & -h(0) \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ h(T-1) & & & & & h(T-N-1) \end{bmatrix} \tag{3-32}$$

On a donc utilisé l'erreur modifiée pour aboutir à un système d'équations linéaires qu'on peut facilement résoudre en utilisant une méthode numérique appropriée. Pour évaluer les coefficients du numérateur de H(Z), { b(i) } i = 0,...,M on utilise la relation (3-26), en annulant les valeurs de l'erreur pour k=0,1,...,M .

Ceci nous mènera au produit direct suivant

$$\begin{bmatrix} h(0) & \dots & \dots & \dots & 0 \\ h(1) & h(0) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ h(M) & \dots & -h(0) & \dots & -0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a(1) \\ \vdots \\ a(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(0) \\ b(1) \\ \vdots \\ b(M) \end{bmatrix} \tag{3-33}$$

H₀
A
B

3-3 \ METHODE DES MOINDRES CARRES MODIFIEES

3-3-1 : GENERALITES

Dans la methode généralisée de l'approximation de Padé, on a utilisé seulement un nombre finie d'élément de la réponse impulsionnelle $\{h(i)\}$, $i= 0,1,\dots,T$. Pour un problème plus généralisé on est ramené à utiliser toute l'information apportée par les $\{h(i)\}$ $i= 0,1,\dots,\infty$, ceci par l'intermédiaire de la fonction d'auto-corrélation. D'après la relation (3-22), l'énergie de l'erreur modifiée est donnée par l'intégrale suivante :

$$W = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} | G(e^{j\theta}) A(e^{j\theta}) - B(e^{j\theta}) |^2 d\theta$$

En passant dans le domaine temporel, et en posant $g(k) = h(k)$ pour $k = 0, \dots, N$ cette énergie devient

$$W = \sum_{k=0}^M b^2(k) - 2 \sum_{k=0}^M b(k) \sum_{j=0}^N a(j) h(k-j) + \sum_{i,j=0}^N a(i) a(j) r(|i-j|) \quad (3-34)$$

avec bien sûr $h(k)=0$ pour $k < 0$.

$$\text{ou} \quad r(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i) h(i+k) \quad \text{pour } k=-\infty, \dots, 0, \dots, \infty \quad (3-35)$$

représentent les éléments de la fonction d'auto-corrélation du filtre, avec $r(k)=r(-k)$

Pour minimiser ce critère, on est donc conduit à poser :

$$b(k) = \sum_{j=0}^N a(j) h(k-j) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq M \quad (3-36)$$

avec $h(k)=0$ pour $k < 0$.

En substituant (3-36) dans la relation (3-35) il vient :

$$W = \sum_{i,j=0}^N a(i) a(j) r(|i-j|) = \sum_{k=0}^N \left[\sum_{j=0}^N a(i) h(k-j) \right]^2 \quad (3-37)$$

Sous forme matricielle, l'énergie de l'erreur s'écrit alors :

$$W = (a(0), a(1), a(2), \dots, a(N)) J K J (a(0), a(1), \dots, a(N))^t \quad (3-38)$$

où N est bien sûr l'ordre du filtre, et la matrice K est donnée par :

$$J K J = R = H_0^t H_0 \quad (3-39)$$

Une définition plus exacte de la matrice K est donnée par (3-55).

$$R = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & - & - & - & r(N) \\ r(1) & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ r(N) & - & - & - & - & r(0) \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & - & - & - & - & 0 \\ h(1) & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ h(M) & - & - & - & - & - & h(0) \end{bmatrix} \quad (3-41)$$

J est donnée par la relation (A 2-5).

Sous forme matricielle la relation (3-36) devient :

$$B = H_0 A \quad (3-42)$$

$$\text{avec } A = (a(0), a(1), \dots, a(N))^t \quad (3-43)$$

LEMME : [8]

Soit K une matrice symétrique définie semi-positive ,et soit un vecteur ψ donné .Pour minimiser :

$$\begin{cases} x^t K x \\ \text{avec la contrainte } x^t \psi = 1 \end{cases} \quad (3-44)$$

Le vecteur solution x^* est donné par :

$$K x^* = \alpha \psi \quad (3-45)$$

$$\text{avec } \alpha = \min \{ x^{*t} k x, x^{*t} \psi = 1 \} \quad (3-46)$$

Pour notre cas, minimiser l'énergie de l'erreur revient donc à chercher les coefficients $a(i)$ $i=0,1,\dots,N$ avec $a(0)=1$ satisfaisant la relation :

$$(R - H_0^t H_0) A = (\alpha_n, 0, \dots, 0) \quad (3-47)$$

$$\text{où } \alpha_n = \min (A^t J K J A)$$

$$= \text{l'énergie minimale de l'erreur} \quad (3-48)$$

avec bien sûr la relation (3-42)

$$H_0 A = B$$

En rassemblant les deux systèmes (3-47) et (3-42)

$$\begin{bmatrix} R & -H_0^t \\ -H_0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-49)$$

3-3-2 : ALGORITHME DE MULLIS-ROBERTS

Pour résoudre le système (3-49) et plus exactement (3-47), C.T MULLIS et R.A ROBERTS ont mis au point un algorithme efficace - utilisé ici pour le cas $N = M$ - qui est vu à être une généralisation de celui de Levinson [8] (voir annexe). Cet algorithme tient compte du fait que la matrice $(R - H_0^t H_0)$ est proche de la forme de TOEPLITZ.

Les données pour cet algorithme sont les éléments de la réponse impulsionnelle $\{h(0), h(1), \dots, h(M)\}$ et les coefficients de la fonction d'auto-corrélation $\{r(0), r(1), \dots, r(N)\}$. Le nombre de mémoires utiliser est proportionnel à N (ordre du filtre) et

le temps d'exécution est proportionnel à N^2 [8], alors que si on utilise la méthode directe de résolution (méthode de GAUSS) le nombre de mémoires utilisés est proportionnel à N^2 et le temps d'exécution est proportionnel à N^3 .

ALGORITHME

Dans ce qui suit on pose :

$$a_{n+1}(n) = d_{n+1}(n) = c_{n+1}(n) = 0$$

où les valeurs entre parenthèses indique l'ordre de la prédiction alors que l'indice indique l'élément du vecteur correspondant .

$$\text{Initialisation} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = r(0) - h(0)^2 \\ a_0(0) = 1 \\ d_0(0) = 1/\alpha_0 \\ c_0(0) = h(0)/\alpha_0 \\ \delta_0 = 1 + h(0)/\alpha_0 \end{array} \right.$$

Récursion
sur l'ordre
de prédiction

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n a_k(n) r(n+1-k)$$

$$\gamma_n = - \sum_{k=0}^n a_k(n) h(n+1-k)$$

$$\theta_n = \beta_n d_0(n) + \gamma_n c_0(n)$$

$$\phi_n = \beta_n c_0(n) + \gamma_n \delta_n$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \beta_n \theta_n - \gamma_n \phi_n$$

$$\delta_{n+1} = \delta_n + \phi_n^2 / \alpha_{n+1}$$

$$a_k(n+1) = a_k(n) - \beta_n \cdot d_{n+1-k}(n) - \gamma_n \cdot c_{n+1-k}(n)$$

$$d_k(n+1) = d_k(n) - (\theta_n / \alpha_{n+1}) \cdot a_{n+1-k}(n+1)$$

$$c_k(n+1) = c_k(n) - (\phi_n / \alpha_{n+1}) \cdot a_{n+1-k}(n+1)$$

avec $1 \leq k \leq n+1$

$$0 \leq n \leq N-1$$

Les détails sur la méthode d'obtention de cet algorithme seront données plus clairement en annexe 1.

les nombres γ_n et β_n représentent respectivement les erreurs de prédiction pour les valeurs futures de la réponse impulsionnelle et l'auto-corrélation $r(n+1)$ et $h(n+1)$.

le coefficient α_n qui représente l'énergie (variance) de l'erreur pour chaque niveau de prédiction tient bien compte des valeurs γ_n et β_n .

On remarque que cet algorithme est récursif dans l'ordre. Donc on n'est pas forcé de préciser l'ordre du filtre à priori. on peut tester l'erreur α_n en utilisant une certaine tolérance et à partir du résultat du test on continue ou on arrête les calculs.

3-3-3 : STABILITE ET EXISTANCE DE LA SOLUTION

Pour la méthode des moindres carrés modifiée l'existence et la stabilité de la solution sont garanties, ce qui forme l'avantage essentiel de cette méthode par rapport aux autres méthodes étudiées précédemment. Pour que la solution existe il faut que les données $\{ h(0), \dots, h(M), r(0), \dots, r(N) \}$ soient consistantes.

La proposition suivante caractérise la solvabilité du système.

PROPOSITION : [8]

A partir des données $\{ h(0), \dots, h(M), r(0), \dots, r(N) \}$, on peut définir la matrice symétrique $(n+1 \times n+1)$ suivante :

$$[K(m,n)]_{ij} = r(|i-j|) - \sum_{k=-\infty}^{m-n+\min(i,j)} h(k) \cdot h(k + |i-j|) \quad (3-51)$$

où $i, j = 0, 1, \dots, N$; $h(k) = 0$ pour $k < 0$

a)- si $K(m,n)$ n'est pas définie positive, alors il n'existe aucune solution pour au problème dans L_2

b)- Si $K(m,n)$ est définie semi positive, mais $\det[K(m,n)] = 0$, alors il existe précisément une seule solution au problème dans L_2 .

c)- Si $K(m,n)$ est définie positive, alors il existe une infinité de solution dans L_2 .

Le détail de cette proposition et les démonstrations nécessaires peuvent se trouver dans [8].

Sachant la relation qui lie la stabilité et les coefficients $\{a(i)\}$ qui sont les coefficients du polynôme caractéristique, il est facile de prouver la stabilité du filtre en utilisant simplement le théorème de LYAPONOV .

THEOREME DE STABILITE DE LYAPONOV

Si (A,b) constitue un couple contrôlable, et il existe une matrice symétrique K définie positive telle :

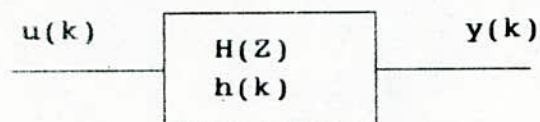
$$K = A K A^t + \alpha b b^t \quad (3-52)$$

Pour $\alpha > 0$, alors les valeurs propres de A se trouvent à l'intérieur du cercle unité. Où A est une matrice de dimension $(n \times n)$ et b est un vecteur de dimension $(n \times 1)$. La condition que (A,b) soit contrôlable est équivalente à ce que la matrice :

$$G = [b, Ab, \dots, A^{N-1} b]$$

soit non singulière .

Pour montrer la stabilité du filtre, on utilise la représentation d'état suivante :



$$\begin{cases} x(k+1) = A x(k) + b u(k) \\ y(k) = C x(k) + h(0) u(k) \end{cases} \quad (3-53)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & - & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - & - & - & - & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ -a(N) & - & - & - & - & - & -a(1) & \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ h(N) \end{bmatrix}$$

$$c = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \tag{3-54}$$

Soit K la matrice de covariance définie comme suit :

$$K = E (x(k) x^t(k)) \tag{3-55}$$

où l'état $x(k)$ peut être défini par :

$$x(k) = \begin{bmatrix} y(0) - h(0) \cdot u(0) \\ y(1) - h(0) \cdot u(1) - h(1) \cdot u(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y(N-1) - h(0) \cdot u(N-1) \dots \dots \dots - h(N-1) \cdot u(0) \end{bmatrix} \tag{3-56}$$

avec N ordre du filtre .

En décomposant l'expression (3-56) ,on obtient :

$$x(k) = y(k) - H_0 u(k) \tag{3-57}$$

où

$$y(k) = (y(0) \ \dots \ y(N-1))$$

$$u(k) = (u(0) \ \dots \ u(N-1)) \tag{3-58}$$

H_0 est donnée par l'expression (3-41)

Ainsi si on développe l'expression (3-55) en utilisant (3-57), il vient :

$$K = R - H_0 H_0^t \tag{3-59}$$

d'autre part si on calcule (3-55) en utilisant (3-53), on obtient :

$$K = A K A^t + b b^t \tag{3-60}$$

A partir de l'expression (3-59) et (3-60), on peut déduire les conclusions suivantes :

- Puisque la matrice K est une matrice de covariance, elle est alors définie positive. On peut donc dire d'après la proposition précédente que plusieurs solutions au problème d'approximation existent.

- Puisque la matrice K a ses coefficients $\{ K_{ij} \}$ finies, alors d'après (3-60), les valeurs propres de la matrice A sont à l'intérieur du cercle unité. Ceci revient à dire que le système régi par (3-54) est STABLE.

3-3-4 : TEST DE STABILITE

Il existe un test de stabilite standard pour l'analyse des systèmes discrets appelé test de stabilite de " JURY ". Il est analogue à la procédure de stabilité de " ROUTH " pour les systèmes continus .

Soit le polynôme $A(Z)$, défini par les coefficients $\{ a(i) \}$, et le nombre positive a_n . On a :

$$A(Z) = \sum_{i=0}^{N^*} a(i) Z^{-i} \tag{3-61}$$

Cet algorithme consiste à calculer les coefficients $a(k)$ à partir des coefficients $a(k+1)$ ceci par inversion de l'équation principale de l'algorithme de Levinson-Durbin à savoir :

$$a_k(n+1) = a_k(n) - (\beta_n/\alpha_n) \cdot a_{n+k-1}(n) \quad (3-62)$$

où α_n est la variance de l'erreur et β_n erreur de prédiction des éléments de la fonction d'auto-corrélation dans l'algorithme de Levinson-Durbin.

On obtient alors l'algorithme suivant :

$$\text{Initialisation} \begin{cases} \alpha_n, a_1(n), \dots, a_N(n) & \text{sont donnés} \\ a_0(n) = 1 & \alpha_n = \text{variance de l'erreur} \\ & \text{initialisé à 1} \end{cases}$$

$$\text{Recursion inverse} \begin{cases} \xi_{k-1} = -a_k^{(k)} \\ \alpha_{k-1} = \alpha_k / (1 - \xi_{k-1}^2) \\ a_j^{(k-1)} = (a_j^{(k)} + \xi_{k-1} \cdot a_{k-j}^{(k)}) / (1 - \xi_{k-1}^2) \\ 0 \leq j \leq k-1 \end{cases} \quad (3-63)$$

Pour voir la stabilité il faut vérifier le signe des coefficients $\{\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0\}$, si tous ces coefficients sont positives alors toutes les racines du polynome $A(Z)$ (c'est à dire pôles de $H(Z)$) sont à l'intérieur du cercle unité et donc le filtre est stable. Si par contre, un seul coefficient des $\{\alpha_i\}$ est négatif alors $A_N(Z)$ doit avoir des racines à l'extérieur du cercle unité. On peut aussi vérifier les coefficients $\{\xi_i\}$, et déclarer la stabilité du filtre si pour tout i , on a :

$$|\xi_i| < 1 \quad (3-64)$$

CHAPTER IV

INTRODUCTION

Les méthodes d'approximation étudiées dans le chapitre précédent donne la possibilité de synthèser des filtres RII physiquement réalisables. En effet, pour cette application on choisit deux exemples de filtres idéaux, non réalisables pour lesquels on essaye d'approximer les caractéristiques.

4-1: EXEMPLES DE FILTRE IDEAL

4-1-1 : FILTRE PASSE-BAS

Le filtre passe-bas est donné par la réponse fréquentielle $G(f)$ de la forme suivante :

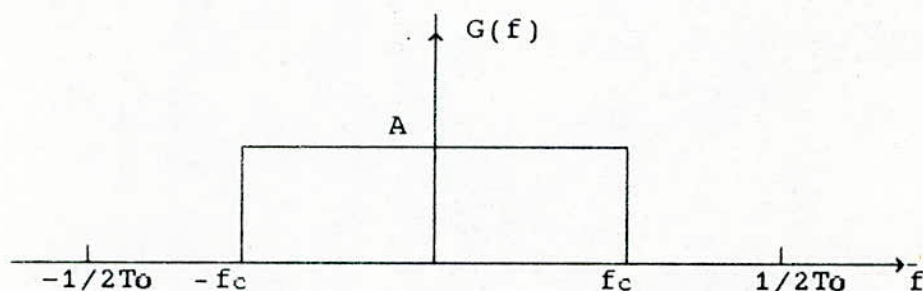


Fig 4-1 : filtre ideal passe-bas

- avec :
- f_c : fréquence de coupure
 - T_0 : periode d'échantillonnage
 - A : amplitude du spectre

La réponse impulsionnelle est donnée par la relation :

$$g(k) = \int_{-1/2T_0}^{1/2T_0} G(f) \exp(j2\pi f k T_0) df$$

$$= 2 f_c A \operatorname{sinc}(2\pi k f_c) \quad (4-1)$$

pour $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

où $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$

La fonction d'auto-corrélation est donnée par la relation :

$$r(k) = \int_{-1/2T_0}^{1/2T_0} G^2(f) \exp(j2\pi f k T_0) df$$

$$= 2 f_c A^2 \operatorname{sinc}(2\pi k f_c) \quad (4-2)$$

pour $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Si on admet une tolérance pour les fréquences coupées, le spectre devient :

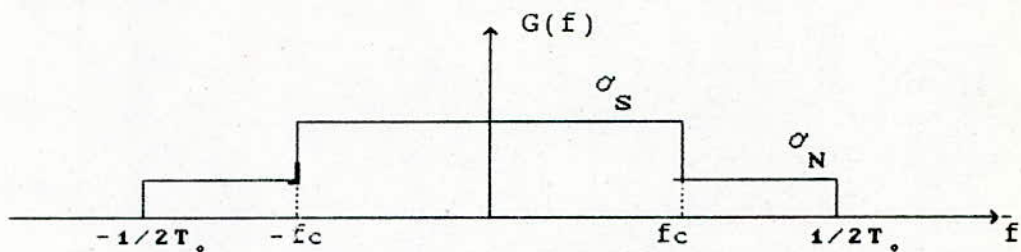


Fig 4-2 : filtre passe-bas avec tolérance des bandes coupées

avec : - σ_S : amplitude de la bande passante
 - σ_N : tolérance pour la bande coupée

La réponse impulsionnelle devient alors :

$$\begin{aligned}
 g(k) &= \int_{-1/2T_0}^{1/2T_0} G(f) \exp(j2\pi f k T_0) df \\
 &= 2 \sigma_S T_0 f_c \sin(2\pi k f_c T_0) + \sigma_N (1 - 2 T_0 f_c) \\
 &\quad \times \cos[(2 f_c T_0 + 1)k\pi/2] \cdot \text{sinc}[(1 - 2 T_0 f_c)k\pi/2] \quad (4-3) \\
 &\quad \text{pour } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots
 \end{aligned}$$

La fonction d'auto-corrélation est alors :

$$\begin{aligned}
 r(k) &= \int_{-1/2T_0}^{1/2T_0} G(f)^2 \exp(j2\pi f k T_0) \\
 &= 2 \sigma_S^2 T_0 f_c \sin(2\pi f_c k T_0) + \sigma_N^2 (1 - 2 T_0 f_c) \\
 &\quad \times \cos[(2 T_0 f_c + 1)k\pi/2] \cdot \text{sinc}[(1 - 2 T_0 f_c)k\pi/2] \\
 &\quad \text{pour } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4-4)
 \end{aligned}$$

On définit le taux de rejection η par :

$$\eta = \sigma_S / \sigma_N \quad (4-5)$$

4-1-2 : FILTRE PASSE-BANDE

Le filtre passe-bande est donné par la réponse fréquentielle $G(f)$ qui la forme suivante :

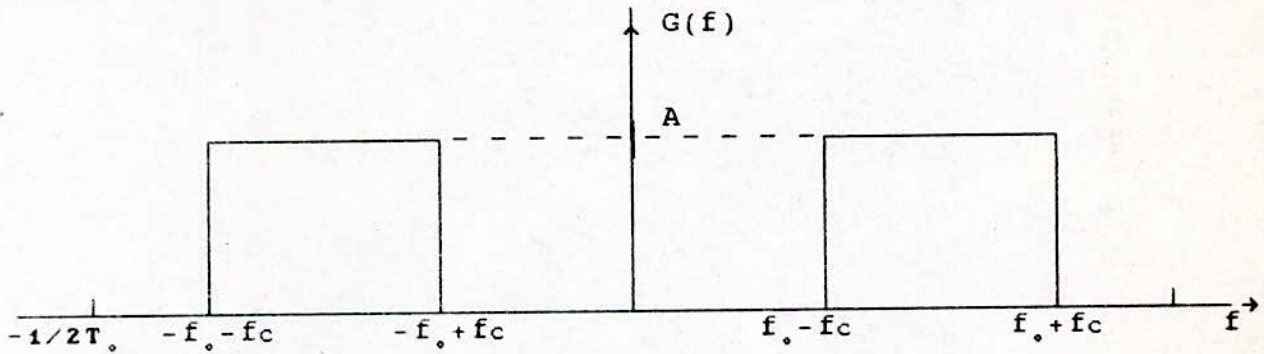


Fig 4-3 : filtre passe-bande ideal

avec :

f_0 : fréquence centrale

f_c : fréquence de coupure

T_0 : periode d'échantillonnage

A : amplitude de la bande passante

La réponse impulsionnelle est donnée par :

$$\begin{aligned}
 g(k) &= \int_{-1/2T_s}^{1/2T_s} G(f) \exp(j2\pi f k T_0) df \\
 &= 4 A f_c \operatorname{sinc}(2\pi k f_c) \cdot \cos(2\pi k f_0)
 \end{aligned} \tag{4-5}$$

pour $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

La fonction d'auto-corrélation est donnée par :

$$\begin{aligned}
 r(k) &= \int_{-1/2T_s}^{1/2T_s} G^2(f) \exp(j2\pi k f T_0) df \\
 &= 4 A^2 f_c \operatorname{sinc}(2\pi k f_c) \cdot \cos(2\pi k f_0)
 \end{aligned} \tag{4-6}$$

Si on admet une tolérance pour les bande coupées, le spectre d'amplitude aura la forme suivante :

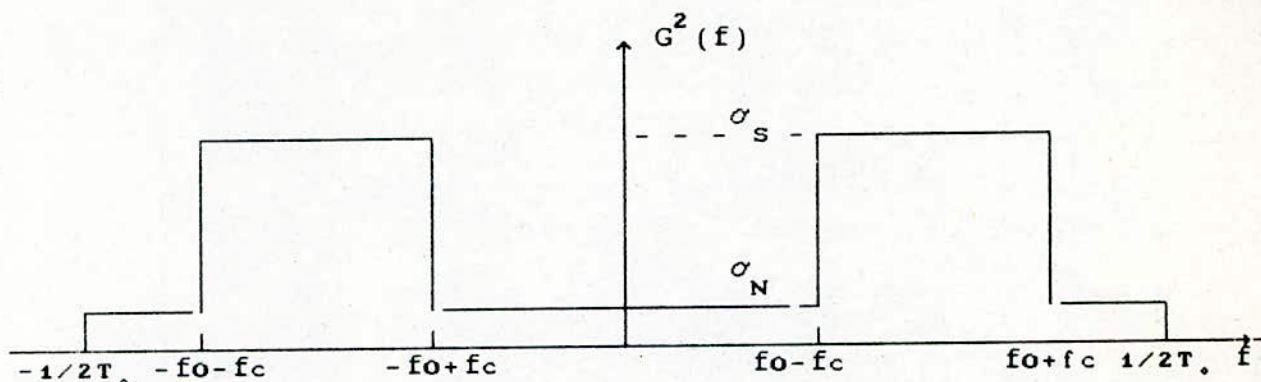


Fig 4-4 : filtre passe-bande avec tolérance.

avec :

- σ_S : amplitude de la bande passante
- σ_N : tolérance pour la bande coupée

La réponse impulsionnelle devient :

$$g(k) = \sigma_N \operatorname{sinc}(k\pi) + 4 f_c T_0 (\sigma_S^2 - \sigma_N^2) \cdot \operatorname{sinc}(2\pi k f_c T_0) \times \cos(2\pi k f_0 T_0) \quad \text{pour } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4-7)$$

La fonction d'auto-corrélation devient aussi :

$$r(k) = \sigma_N^2 \operatorname{sinc}(k\pi) + 4 f_c T_0 (\sigma_S^2 - \sigma_N^2) \cdot \operatorname{sinc}(2\pi k f_c T_0) \times \cos(2\pi k f_0 T_0) \quad \text{pour } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4-8)$$

Il est toujours bon de rappeler que les réponse fréquentielle qu'on vient de voir son toutes periodique et de periode $1/T_0$.

4-2: APPLICATION DE L'APPROXIMATION DE PADE ET SON EXTENSION

L'application de l'approximation de Padé nécessite comme données une séquence d'éléments de la réponse impulsionnelle du filtre original .

En effet, on calcule N éléments de la réponse impulsionnelle à partir du filtre idéal (où N est l'ordre du filtre à synthétiser), on forme ensuite les matrices H_1 et H_2 et le vecteur G (voir 2-1-3) . A la fin on utilise la méthode de Gauss pour résoudre le système (3-12) et ainsi calculer les coefficients $\{ a(i) \}$.

Les coefficients $\{ b(i) \}$ seront alors calculer par le produit direct donné par (3-10) .

La procédure reste la même pour l'approximation utilisant l'extention de Padé, mais avec des matrices et des vecteurs différents et un nombre d'éléments de la réponse impulsionnelle nettement supérieur. En effet on calcule T éléments de la réponse impulsionnelle où $T \gg N+M$. On forme ensuite les matrices H_0 et H_0 et le vecteur h_1 voir (3-32) et (3-33), on calcule alors les coefficients $\{ a(i) \}$ en résolvant le système (3-27) par la méthode de Gauss. Les coefficients $\{ b(i) \}$ seront obtenu par un produit direct de la forme (3-33) .

Pour voir le comportement du filtre ainsi synthétisé, notamment la bande de transition, on calcule les éléments de la réponse fréquentielle en utilisant l'algorithme de HORNER (voir annexe). Cet algorithme calcule la valeur d'un polynôme en différents points d'une manière efficiente.

En peut résumè les étapes précédentes comme suit :

pour l'approximation de Padé :

1- Génération des éléments de la réponse impulsionnelle (cette étape sera omise dans le cas pratique car la réponse impulsionnelle sera donnée).

2- Formation des matrices H_1 et H_2 et le vecteur G voir (3-10)-(3-13).

3- calcule des coefficients $\{ a(i) \}$ par la méthode de Gauss.

4- Calcile des coefficients $\{ b(i) \}$ par (3-10).

Pour l'extension de l'approximation de Padé :

1- Génération des éléments de la réponse impulsionnelle.

2- Formation des matrices H , H_0 et du vecteur h_1 voir (3-32)-(3-33).

3- Calcul des coefficients $\{ a(i) \}$ par (3-27).

4- Calcul des coefficients $\{ b(i) \}$ par (3-33).

4-3: PROCEDURE DE SCHARF-LUBY

4-3-1 : PRESENTATION DE LA PROCEDURE

Les propriétés très importantes de la méthode utilisant l'approximation de Padé pour la synthèse des filtres RII, telles la facilité et la rapidité d'évaluation des coefficients du filtre, n'empêche l'existence de quelques défauts très gênants notamment pour la stabilité et pour les valeurs de la réponse impulsionnelle des régions supérieures.

Ces méthodes utilisent comme données une séquence d'éléments de la réponse impulsionnelle. Dans la procédure qu'on va décrire ultérieurement, on montre les performances apportées par l'utilisation de la fonction d'auto-corrélation .

Pour cette procédure, en partant des éléments de la fonction d'auto-corrélation, on synthétise un filtre AR (auto-régressif) moyennant une prédiction linéaire. Ce modèle sera utilisé dans le seul but de générer les éléments de la réponse impulsionnelle et les éléments de la fonction d'auto-corrélation. On utilise ensuite l'algorithme de Mullis - Roberts pour trouver les coefficients du filtre ARMA(N,M) réalisable. La notation ARMA(N,M) indique le filtre digital de N pôles et M zéros.

4-3-2 : ETAPES DE LA PROCEDURE

On présente dans ce paragraphe quelques détails sur les différentes étapes de la procédure Fig 4.5

- 1^{ère} ETAPE : CALCUL DES ELEMENTS D'AUTO-CORRELATION

On commence tout d'abord par spécifier la caractéristique du filtre idéal à approximer. On calcule ensuite N_i+1 éléments de la fonction d'auto-corrélation $r(k) = 0, \dots, N_i$ à l'aide des relations présentées dans la section (4-1) .

-2^{ème} ETAPE : SYNTHÈSE D'UN MODÈLE AR

On veut avoir, un filtre AR de la forme :

$$H(Z) = \frac{\sigma}{\sum_{i=0}^{N_1} p(i) Z^{-i}} \quad (4-9)$$

avec $a(0) = 1$ et N_1 ordre du modèle AR de manière que :

$$r(k) = r'(k) \quad \text{pour } k=0,1,\dots,N_1 \quad (4-10)$$

où $r'(k)$ représente les coefficients d'auto-corrélation calculer à partir du filtre AR .

On utilise alors une prédiction lineaire, c'est à dire on calcule les éléments de la réponse impulsionnelle $h'(k)$ du filtre approximant, à partir de ceux $h(k)$ du filtre idéal par la relation

$$h(k) = - \sum_{i=1}^{N_1} p'(i) h(k-i) \quad (4-11)$$

où N_1 ordre du filtre AR et $\{ p'(i) \}$ sont les estimées des coefficients $\{ p(i) \}$.

L'erreur de prédiction s'écrit :

$$e(k) = h(k) - h'(k) = \sum_{i=0}^{N_1} p'(i) h(k-i) \quad (4-12)$$

La variance de l'erreur est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= r(0) = \sum_{i,j=0}^{N_1} p(i) p(j) h(k-i) h(k-j) \\ &= \sum_{i,j=0}^{N_1} p(i) p(j) r(|i-j|) \end{aligned} \quad (4-13)$$

où { p(i) } sont les valeurs à estimer, la notation avec prime est omise pour des raisons de commodité .

La minimisation par rapport aux coefficients p(i) conduit au système :

$$\frac{\partial \sigma_e^2}{\partial p(i)} = \sum_{l=0}^{N_1} r(|i-j|) p(i) = 0 \quad \text{pour } i=1,2,\dots,N_1 \quad (4-14)$$

on peut aussi écrire :

$$\sum_{j=1}^{N_1} r(|i-j|) p(j) = -r(i) \quad \text{pour } i=1,2,\dots,N_1 \quad (4-15)$$

sous forme matricielle le système devient :

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(N_1 - 1) \\ r(1) & - & - & - \\ & & & \\ r(N_1-1) & - & - & - & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \\ \vdots \\ p(N_1) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(N_1) \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

Vu la forme TOEPLITZ symétrique de la matrice ainsi obtenue, on peut alors calculer les coefficients { p(i) } i= 0,1,...,N1 ,en utilisant l'algorithme de LEVINSON-DURBIN donné ci-dessous :

RECUSION
SUR n

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 = r(0) \\ p_0(0) = 1 \\ \beta_n = \sum_{k=0}^n p_k(n) r(n+1-k) \\ p_k(n+1) = p_k(n) - (\beta_n / \alpha_n) p_{n+1-k}(n) \\ \qquad \qquad \qquad 1 \leq k \leq n-1 \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n (1 - (\beta_n / \alpha_n)^2) \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

où $n=1, \dots, N_1$ indique l'ordre de la prédiction, et le coefficient α_n donne à chaque fois l'erreur de prédiction commise. Cette algorithmme sera plus détaillé en annexe.

La variance de l'erreur pour l'ordre N_1 vaut après minimisation :

$$\sigma_e^2 = \sum_{i=0}^{N_1} p(i) r(i) \quad (4-18)$$

Pour une bonne approximation on est amené à choisir :

$$\sigma^2 = \sigma_e^2 \quad (4-19)$$

où σ : numérateur du modèle AR

σ_e^2 : variance de l'erreur de prédiction .

Pour plus de détails voir [9 p 106-137] .

-3^{ème} ETAPE : GENERATION DE LA REPONSE IMPULSIONNELLE

On a :

$$H(Z) = \frac{\sigma}{A(Z)} \quad \Leftrightarrow \quad H(Z) A(Z) = \sigma$$

$$\text{avec } A(Z) = \sum_{i=0}^{N_1} p(i) Z^{-i} \quad \text{avec } p(0) = 1 \quad (4-20)$$

En passant au domaine temporel, on calcule la réponse impulsionnelle par la relation :

$$h(k) = - \sum_{i=1}^{N_1} p(i) h(k-i) + \sigma \delta(k) \quad (4-21)$$

$$\text{où } \delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \text{fonction de Kronicker} \quad (4-22)$$

avec $h(k) = 0$ pour $k < 0$

- 4^{ème} ETAPE : OBTENTION DES COEFFICIENTS DU FILTRE

Pour cette étape, (M+1) éléments de la réponse impulsionnelle $\{h(i)\}_0^M$ et (N+1) éléments de la fonction d'auto-corrélation $\{r(i)\}_0^N$ sont utilisés dans l'algorithme de Mullis- Roberts pour estimer les coefficients $\{a(i)\}_0^N$ et $\{b(i)\}$ du filtre ARMA(N,M), où M est l'ordre du numérateur du filtre et $N \ll M$ ordre du dénominateur .

Il est toujours bon de rappeler que l'algorithme est utilisé pour évaluer les coefficients $\{a(i)\}$ et $\{b(i)\}$ qui minimise l'énergie de l'erreur suivante :

$$W = \sum_{l=0}^N a(l) \sum_{m=0}^N a(m) r(|l-m|) - 2 \sum_{k=0}^M b(k) \sum_{l=0}^N a(l) h(k-l) + \sum_{k=0}^M b^2(k) \quad (4-23)$$

où M et N sont respectivement l'ordre du numérateur et du dénominateur .

La minimisation conduit au système suivant :

$$JKJ \Delta = [\alpha_n \ 0 \dots \dots 0]^t$$

$$\text{avec } \Delta = [a(0) \dots \dots a(n)]^t$$

$$\{K_{lm}\} = \left\{ r(|l-m|) - \sum_{k=0}^M h(k-l) h(k-m) \right\} \quad (4-24)$$

$$l, m = 0, \dots, N$$

avec $h(k) = 0$ pour $k < 0$

5^{ème} ETAPE : OBTENTION DE LA REPONSE FREQUENTIELLE

Pour calculer les éléments de la réponse fréquentielle , on utilise l'algorithme de HORNER qui calcule la valeur d'un polynôme pour des différents valeurs de la fréquence

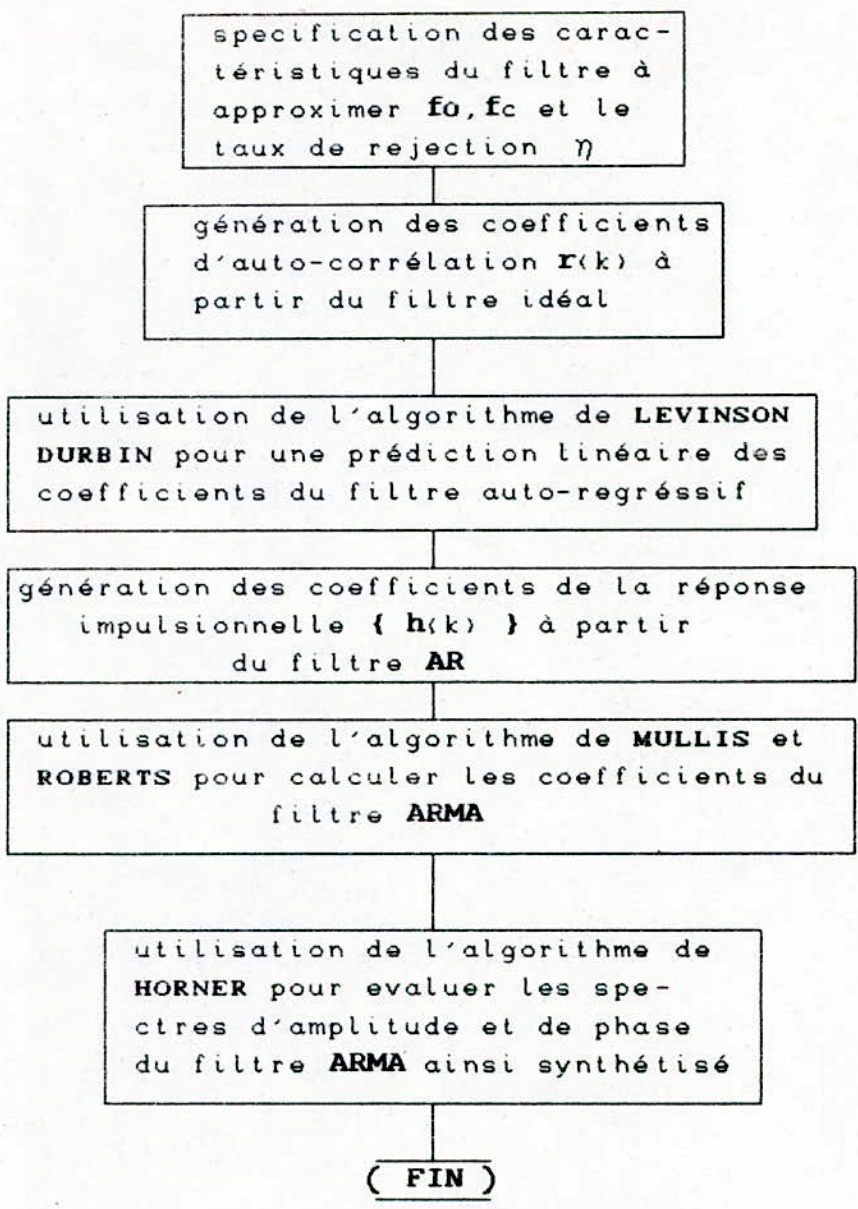


Fig 4.5 Organigramme pour la procédure de Scharf-Luby .

4-4 : RESULTATS ET INTERPRETATIONS

4-4-1 : INTRODUCTION

On présente dans cette section, quelques exemples numériques pour illustrer les performances des méthodes décrites dans les chapitres précédants. Pour une bonne comparaison on va choisir trois exemples de filtres :

- Un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure $f_c = 0.3$

- Un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure $f_c = 0.01$

- Un filtre passe-bande avec une fréquence de coupure $f_c = 0.3$ et une fréquence centrale $f_0 = 0.2$

Toutes les fréquences sont normalisées, le taux de réjection est fixé à $\eta = 90$ dB.

4-4-2 PROCESSUS D'APPROXIMATION

Pour mieux comparer les performances des méthodes utilisées, on trace deux fonctions différentes; la réponse fréquentielle et la réponse de phase. Ces fonctions sont choisies à cause de leurs importances pour la structure de chaque système. Le rapprochement de la fonction approximante à sa fonction originale correspondante donne une idée sur la qualité de l'approximation.

Pour notre simulation, on choisi un modèle avec 10 coefficients pour le numérateur et 10 coefficients pour le dénominateur.

4-4-3 : SIMULATION NUMERIQUE

On commence notre simulation par l'approximation de Padé. On utilise une séquence de réponse impulsionnelle de longueur $N = 100$. Les figures 4-6-a et 4-6-b donnent la réponse fréquentielle et la réponse de phase pour un filtre passe-bas.

Pour l'extension de la méthode de Padé on utilise aussi une séquence de la réponse impulsionnelle de longueur $N = 100$. Les figures de la réponse fréquentielle et de phase des filtres passe-bas et passe-bande peuvent se trouver dans les figures 4-8 et 4-9 .

Enfin, on présente dans les figures 4-10 et 4-11 les réponses fréquentielles et les réponses de phase des filtres synthétisés par la méthode des moindres carrés modifiés.

D'après ces graphes on peut dire que la méthode des moindres carrés donne la meilleur approximation des filtres idéaux. En effet, il est facile de remarquer que les ondulations au niveau de la bande passante son plus petites pour la méthode des moindres carrés que pour les autres méthodes. La bande de transition est la plus petite possible pour la méthode des moindres carrés.

Une comparaison est faite entre les filtres utilisant la méthode des moindres carrés selon l'ordre du filtre. Le résultat de cette comparaison est donnée par les figure 4-12-a et 4-12-b.

IL apparait clairement que plus en augmente l'ordre des filtres plus l'approximation est bonne.

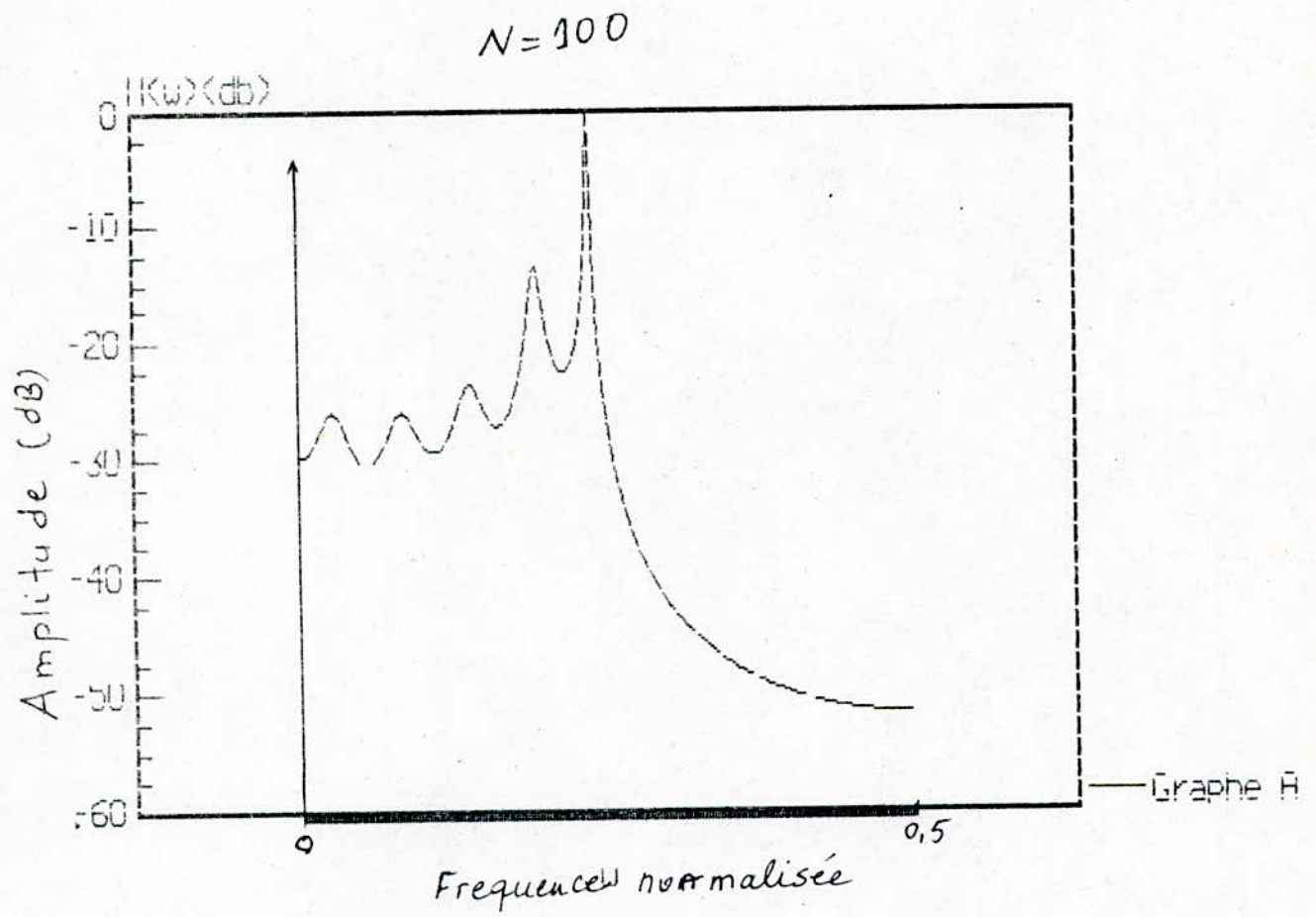
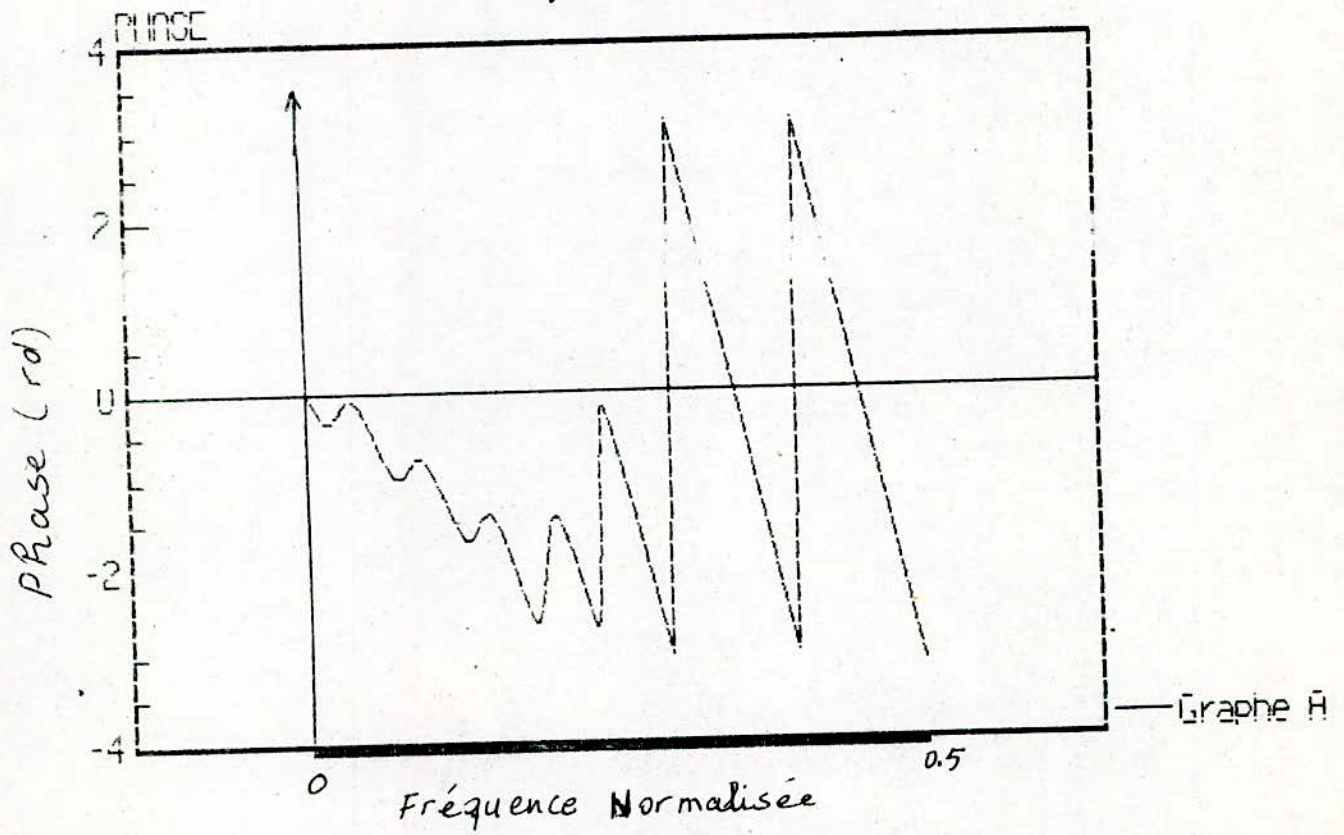


Fig 4-6-a: Filtre passe-bas Synthétisé par la méthode de Padé

Fig 4.6-b: phase d'un filtre passe-bas synthétisé par la méthode de Padé



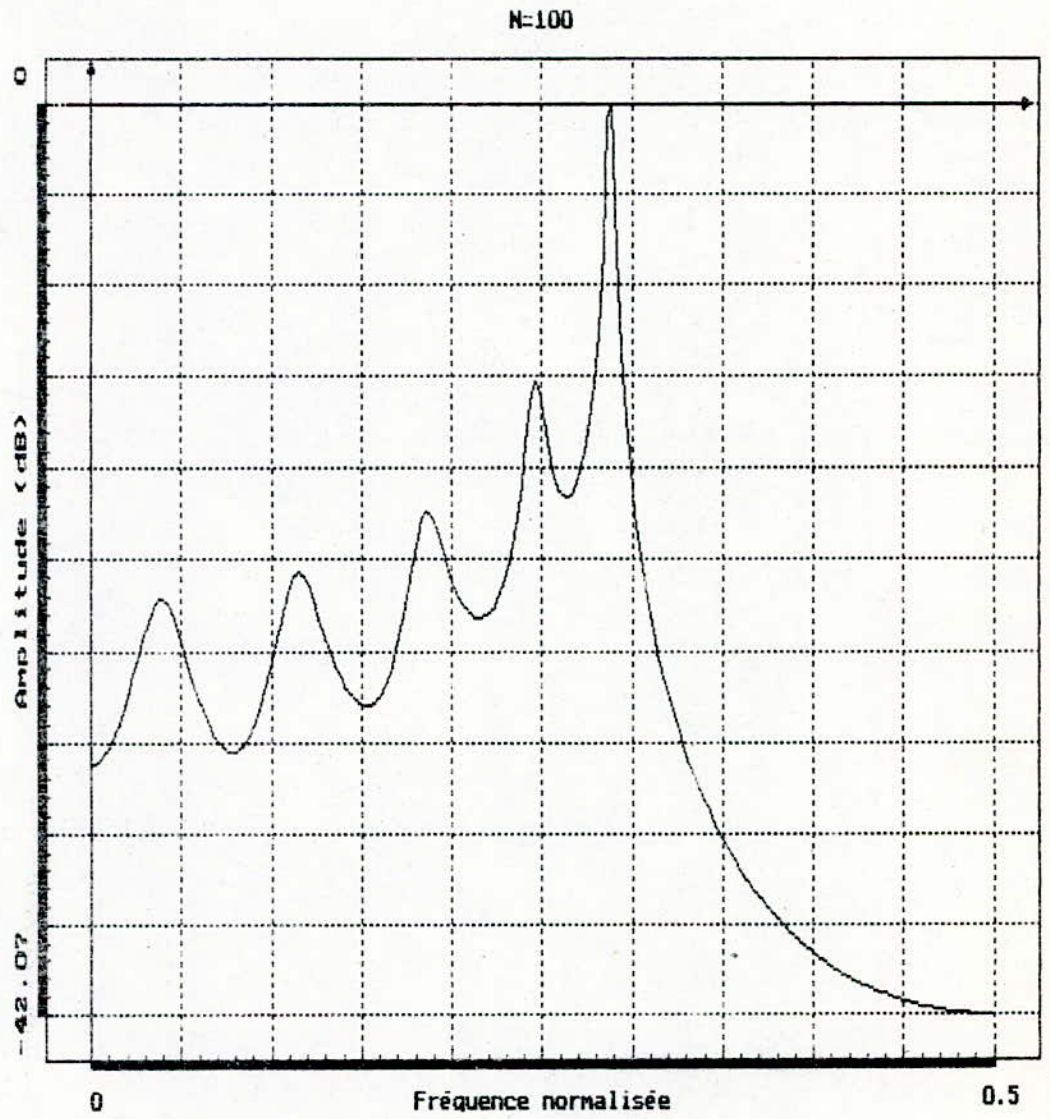


Fig 4. $\frac{7}{8}$: Filtre passe-bas synthétisée par la méthode de l'extension de Padé

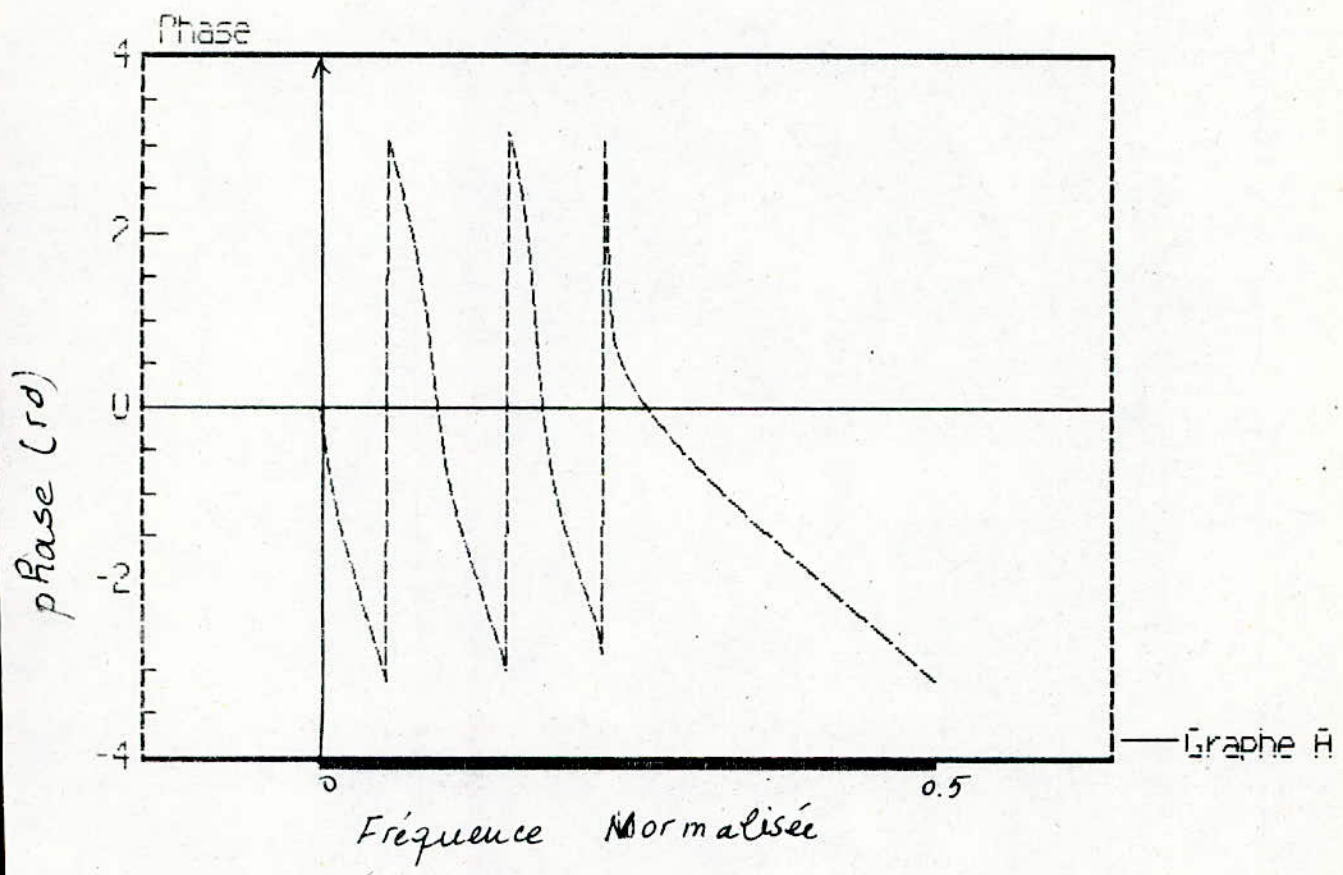


Fig. 4.8: phase d'un filtre passe-bas Synthétisé par la méthode d'extension de Padé

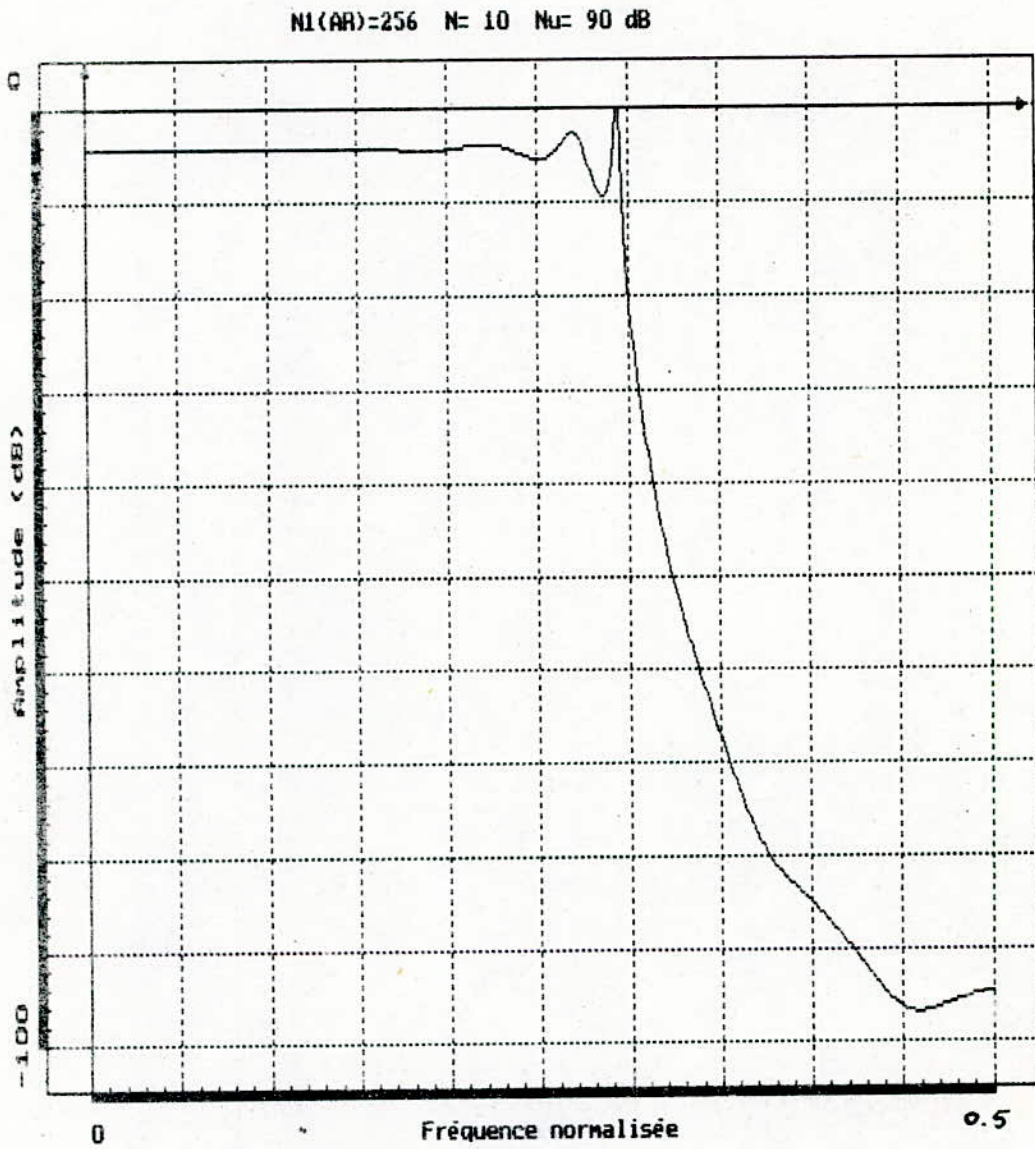


Fig 4.10-a : Filtre passe-bas synthétisé par la méthode des moindres carrés modifiés

$N1(AR)=256$ $N=10$ $Nu=90$ dB.

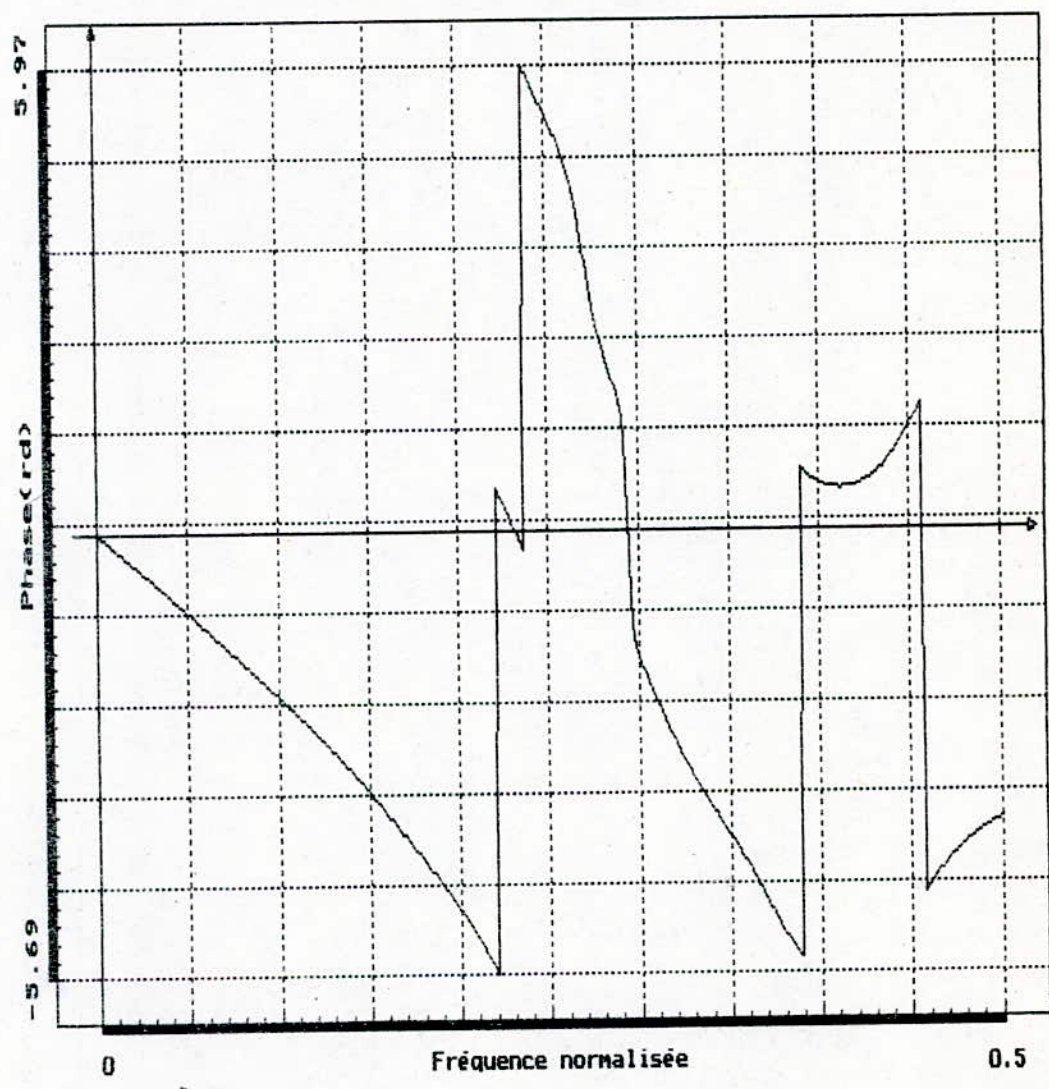


Fig 4.10-b: Phase pour la méthode des moindres carrés modifiés

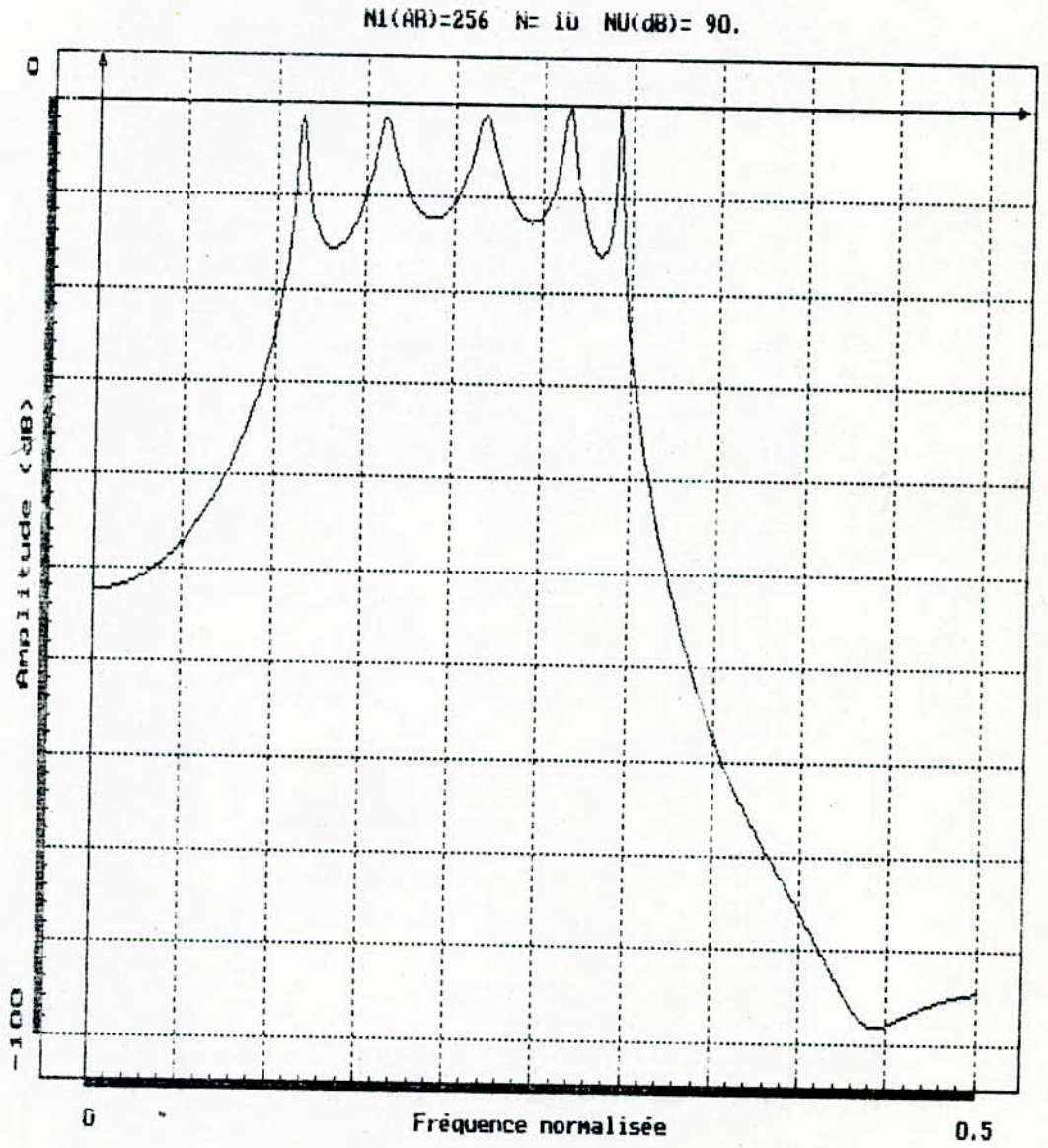


Fig4.11-a: Filtre passe-bande synthétisé
par la méthode des moindres carrés modifiés

$N1(AR)=256$ $N=10$ $NU(dB)=90$.

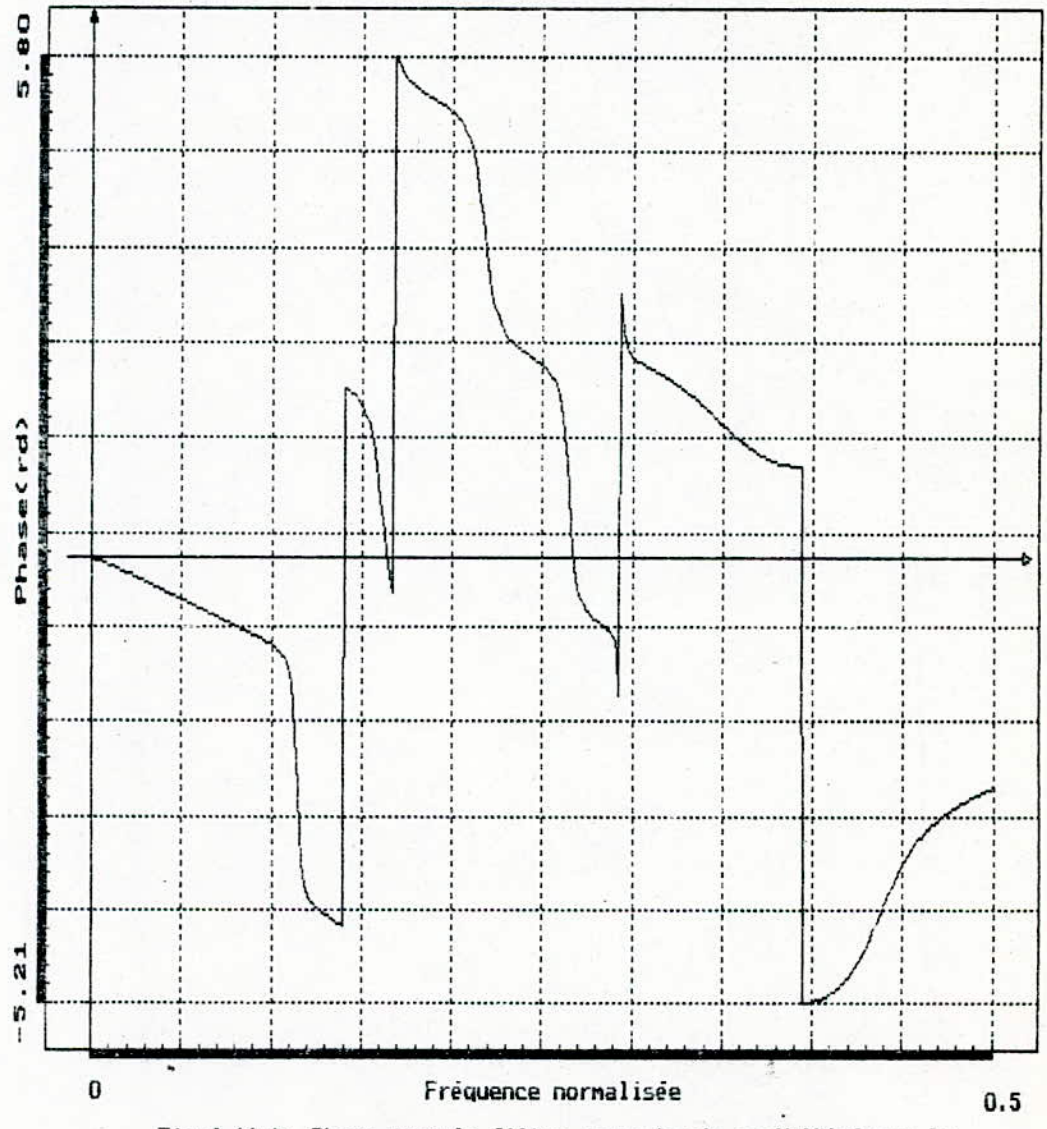


Fig 4.11-b: Phase pour le filtre passe-bande synthétisé par la méthode des moindres carrés modifiés

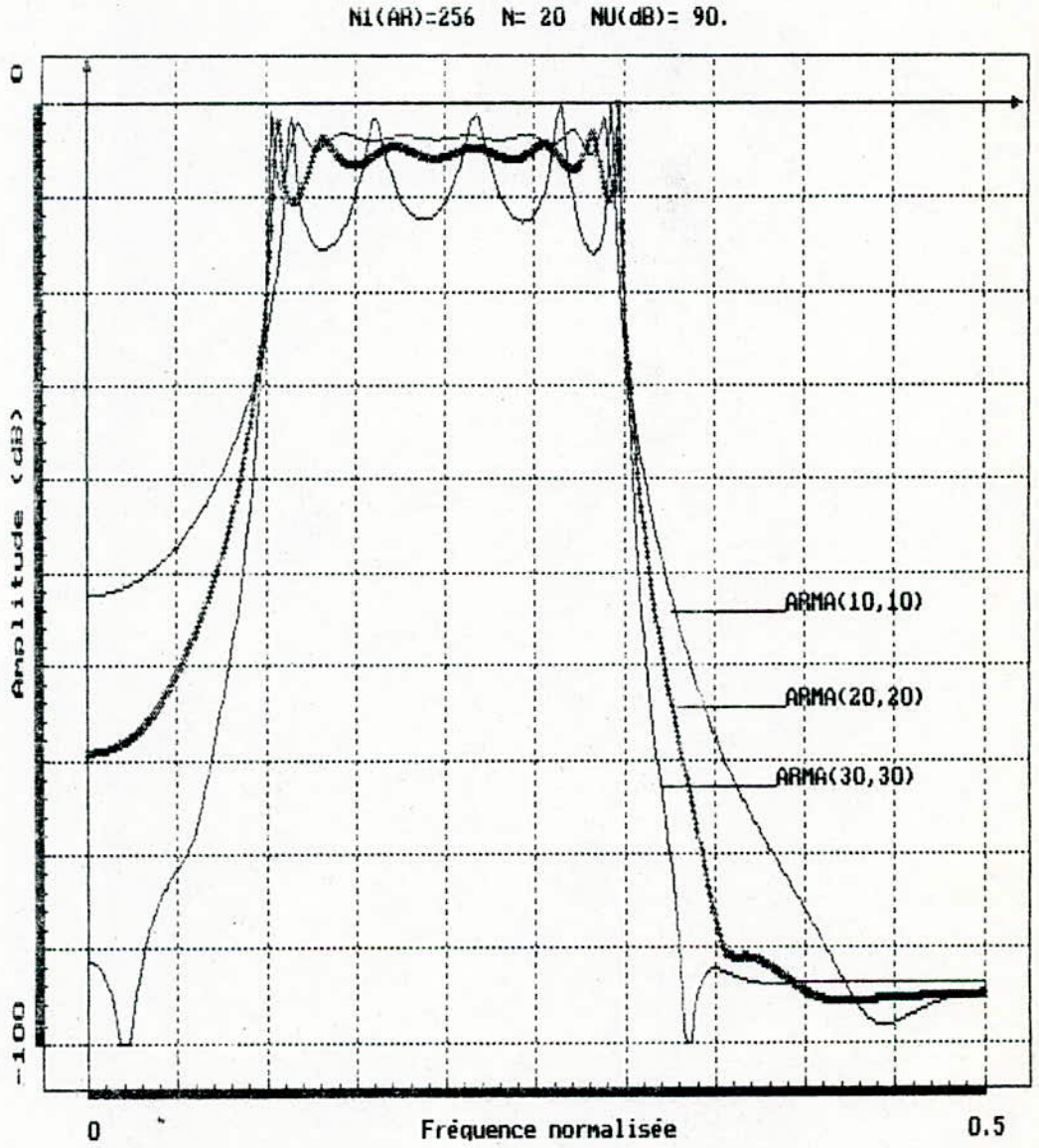


Fig 4.12-b: comparaison entre les filtres passe-bande synthétisés par la méthode des moindres carrés modifiés

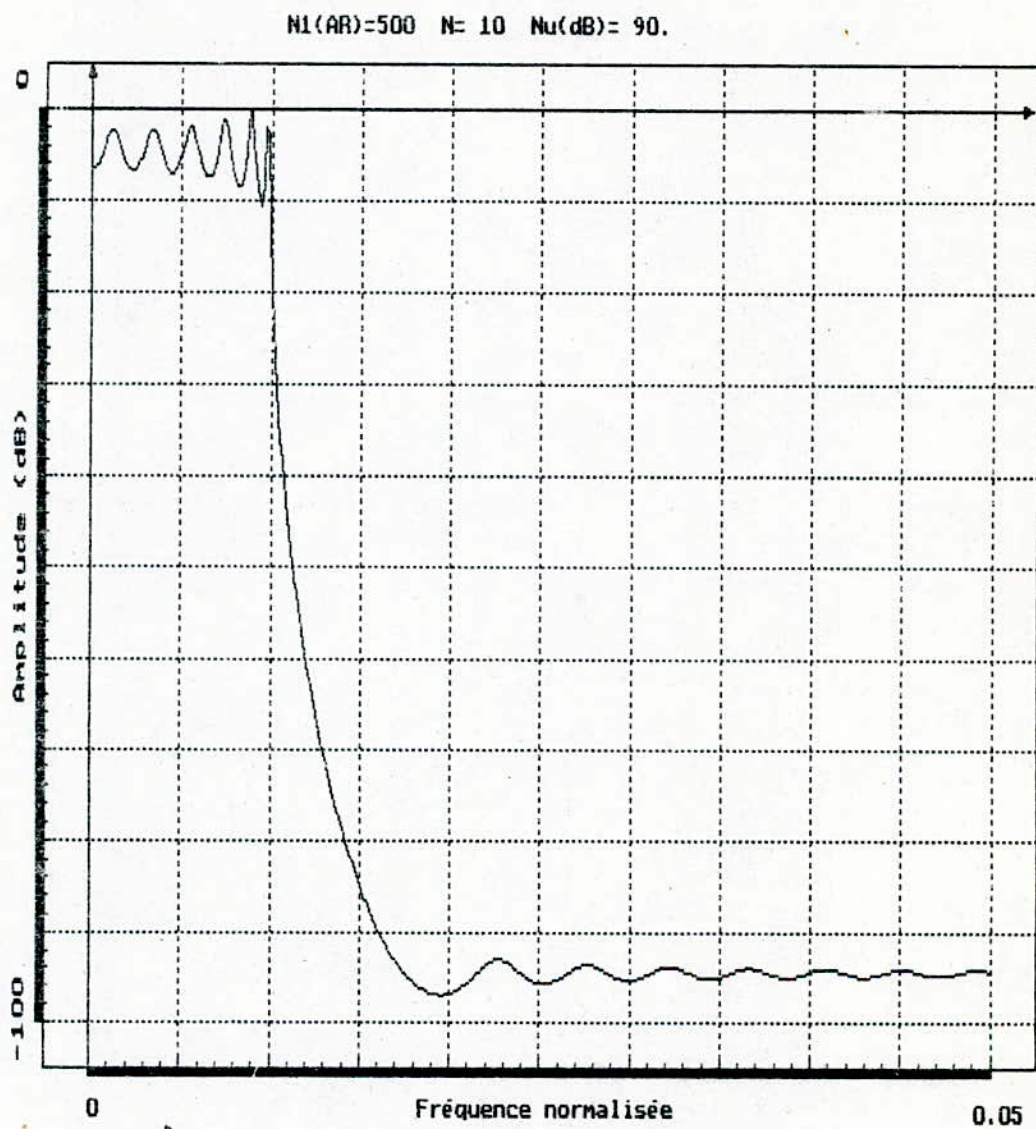


Fig 4.13-a: Filtre passe-bas synthétisée par la méthode des moindres carrés modifiés

$N1(AR)=500$ $N=10$ $Nu(dB)=90$.

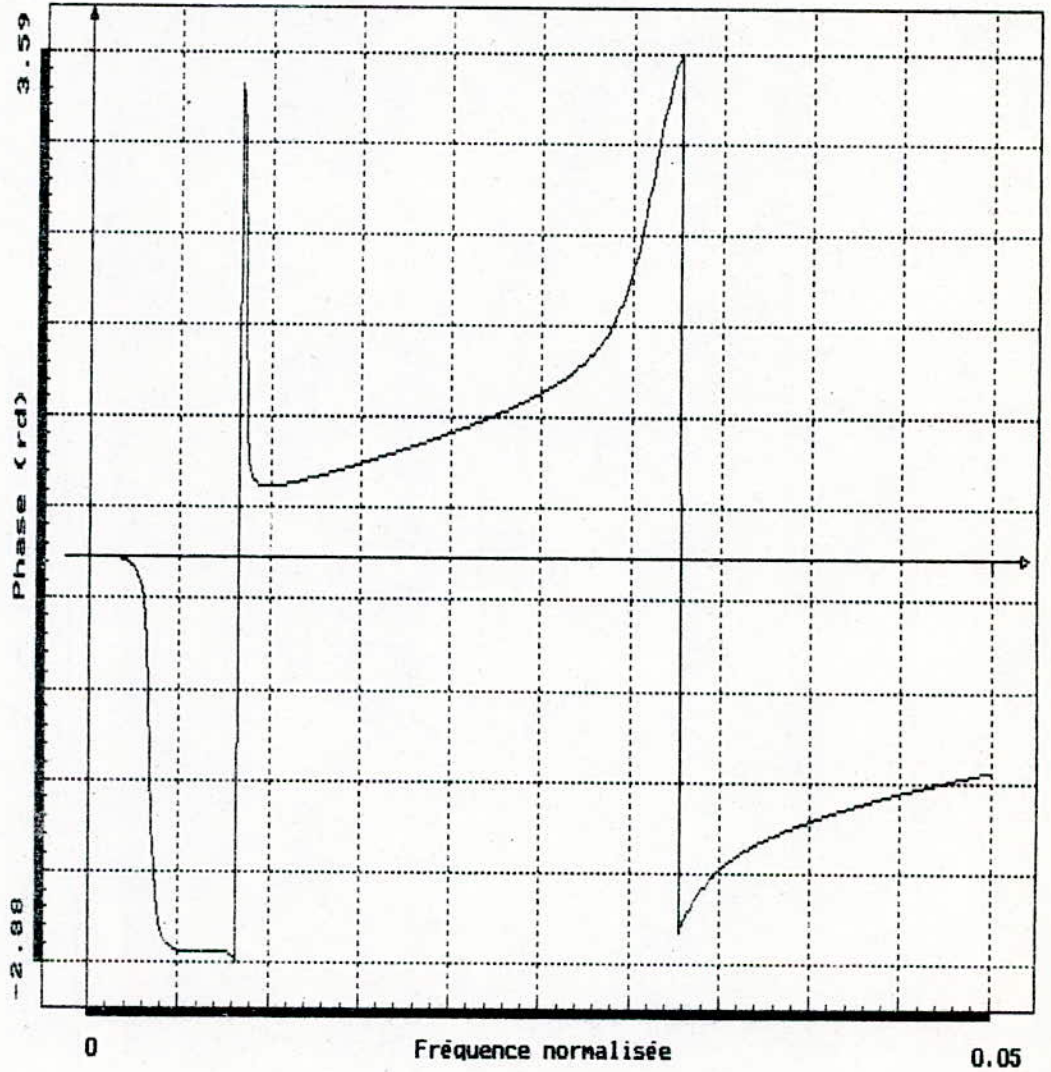
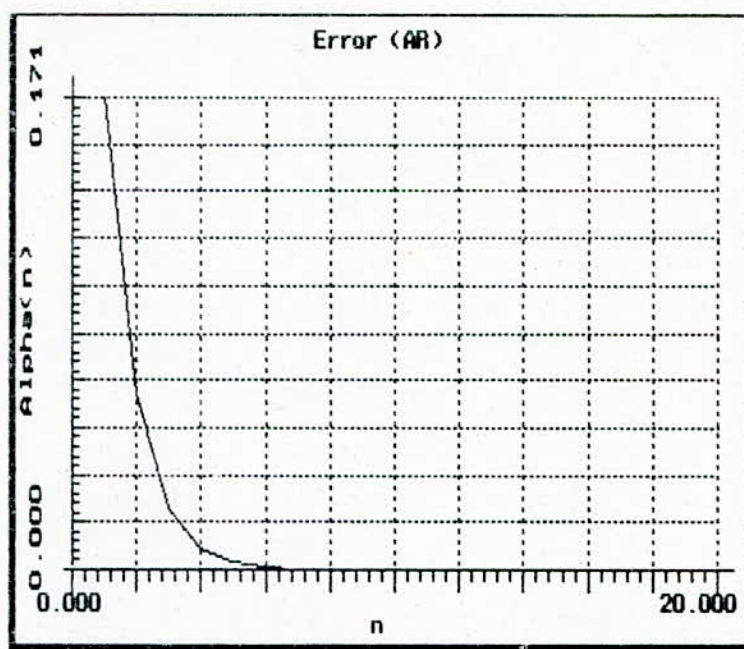
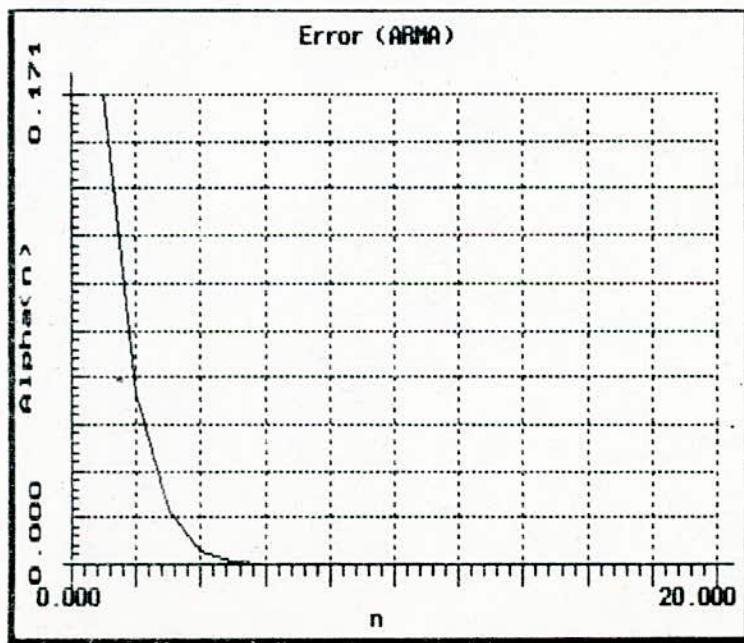


Fig 4.13-b: Phase pour la méthode des moindres carrés modifiés

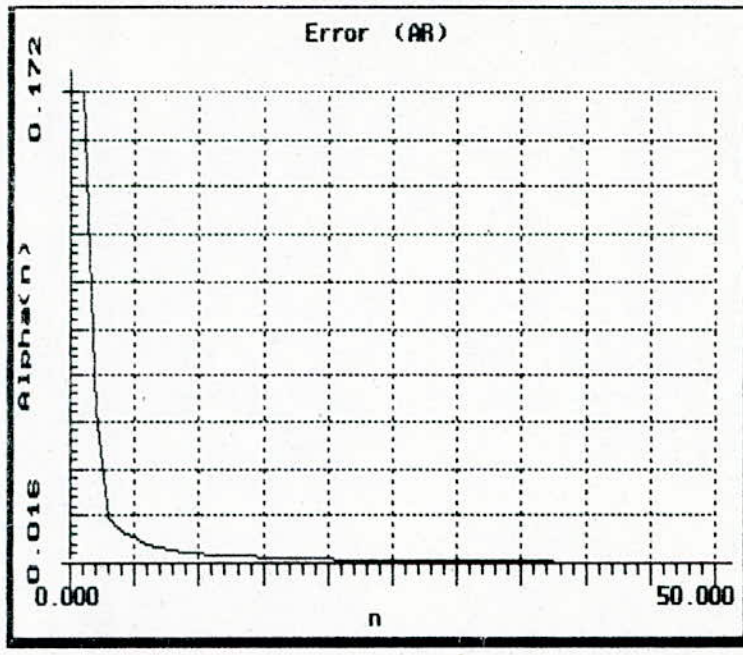


(a)

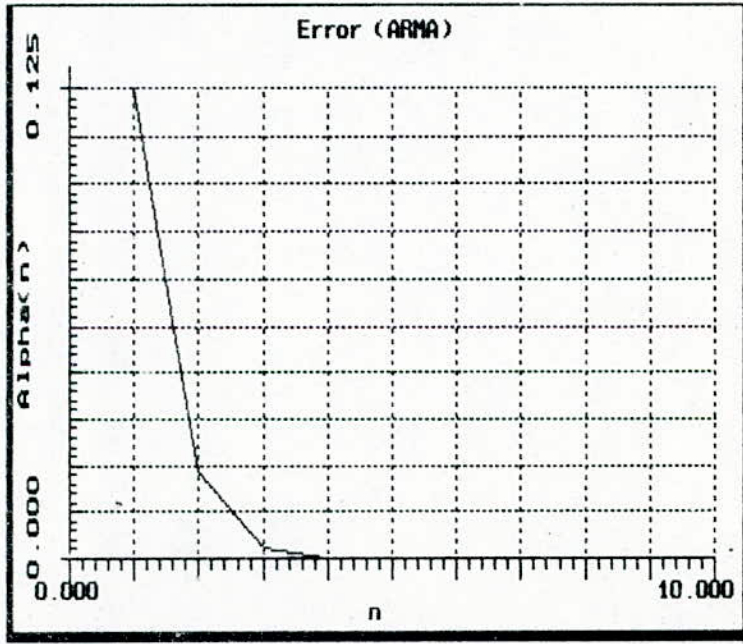


(b)

Fig 4.14 a) Erreur pour le filtre AR(256); b) erreur pour le filtre ARMA(30,30)



(a)



(b)

Fig 4.15. a) Erreur pour le filtre AR (64) ; b) erreur pour le filtre ARMA (10,10).

CONTEMPORARY IS

5-1: INTRODUCTION

Dans les chapitres étudiés jusqu'à présent, on a développé des méthodes pour caractériser l'amplitude des filtres RII sans tenir compte de la caractéristique de phase. Dans plusieurs applications la linéarité de la phase est aussi importante que la caractéristique de l'amplitude. En effet, si la phase du filtre n'est pas linéaire, chaque composante fréquentielle subira un retard différent de celui des autres composantes. On aura alors à la sortie du filtre un signal distordu.

La méthode directe pour spécifier en même temps la phase et l'amplitude peut être difficile. On préfère alors désigner l'amplitude tout d'abord puis introduire un filtre passe-tout pour ajuster la phase.

5-2 : PROPRIETES DES FILTRES PASSE-TOUT

Un filtre passe-tout est caractérisé par la relation suivante:

$$| H_t(Z) | = 1 \quad \forall Z = e^{j2\pi f} \quad (5-1)$$

où $H_t(Z)$ est la fonction de transfert du filtre passe-tout.

On peut trouver plusieurs exemples de filtre passe-tout

- Filtre passe-tout d'ordre 1 :

$$H_t(Z) = \frac{Z + \alpha}{\alpha Z + 1} \quad (5-2)$$

où α est une constante qui peut être complexe

- Filtre passe-tout d'ordre 2 :

$$H_t(Z) = \frac{Z^2 + \alpha_1 Z + \alpha_2}{\alpha_2 Z^2 + \alpha_1 Z + 1} \quad (5-3)$$

où α_1, α_2 sont des constantes pouvant être complexes.

5-3 : PROCEDURE D'EGALISATION

L'egalisation consiste à multiplier la fonction de transfert du filtre $H(Z)$ dont on veut egaliser la phase par celle d'un filtre passe-tout $H_t(Z)$. On obtient donc :

$$H_e(Z) = H(Z) \cdot H_t(Z) \quad (5-4)$$

où $H_e(Z)$ représente la fonction de transfert du filtre dont la phase est egalisée .

La caractéristique d'amplitude devient :

$$\begin{aligned} |H_e(Z)| &= |H(Z) \cdot H_t(Z)| \\ &= |H(Z)| \end{aligned} \quad (5-5)$$

et la caractéristique de phase devient :

$$\phi_e(f) = \phi(f) + \phi_t(f) \quad (5-6)$$

avec :

$\phi_e(f)$: phase du filtre egalisée

$\phi(f)$: phase du filtre original

$\phi_t(f)$: phase du filtre passe-tout

Ainsi on peut choisir la fonction $\phi_t(f)$ de sorte à rendre linéaire la caractéristique de phase du filtre résultant .

Il est souvent plus pratique d'utiliser non pas la caractéristique de phase mais plutôt sa dérivée :

$$\begin{aligned} \tau_e(f) &= - \frac{d\phi_e(f)}{df} = - \frac{d(\phi(f) + \phi_t(f))}{df} \\ &= \tau(f) + \tau_t(f) \end{aligned} \quad (5-7)$$

$\tau_e(f)$: temps de propagation de groupe du filtre $H_e(Z)$

$\tau(f)$: temps de propagation de groupe du filtre $H(Z)$

$\tau_t(f)$: temps de propagation de groupe du filtre $H_t(Z)$

Pour trouver la fonction $\tau_t(f)$ appelé en anglais "groupe delay " on peut procéder comme suit :

On peut tracé le temps de groupe du filtre original et puis essayer d'une manière ampérique on peut trouver le ou les filtres dont les temps de groupe égalisent celui du filtre original. Cette procédure ne donne pas une grande flexibilité. En effet, un filtre passe-tout d'ordre 1 est déterminé par un seul paramètre α voir (5-2), alors que pour les filtres d'ordre supérieurs on peut jouer sur plusieurs paramètres mais le degré de complexité augmente aussi .

5-3.1 EXEMPLE D'EGALISATION

On présente ici un exemple d'egalisation .

Soit le filtre passe-bande donné par :

$$H(Z) = \frac{Z^2 - 1}{13.7 Z^2 - 16.5 Z + 11.7} \quad (5-8)$$

La bande passante est la 0.5 et 0.6 KHz

La phase est donné par :

$$\phi(f) = \pi/2 - \tan^{-1} \frac{2 \sin(2\pi fT)}{25.4 \cos(2\pi fT) - 16.5} \quad (5-9)$$

Le temps de propagation de groupe est donné par :

$$\tau(f) = \frac{(50.8 - 33 \cos(2\pi fT))}{25.4 \cos(2\pi fT) - 16.5)^2 + (2 \sin 52\pi fT)} \quad (5-10)$$

On va maintenant le ou les filtres passe-tout dont le temps de propagation de groupe égalise celui du filtre passe-bande

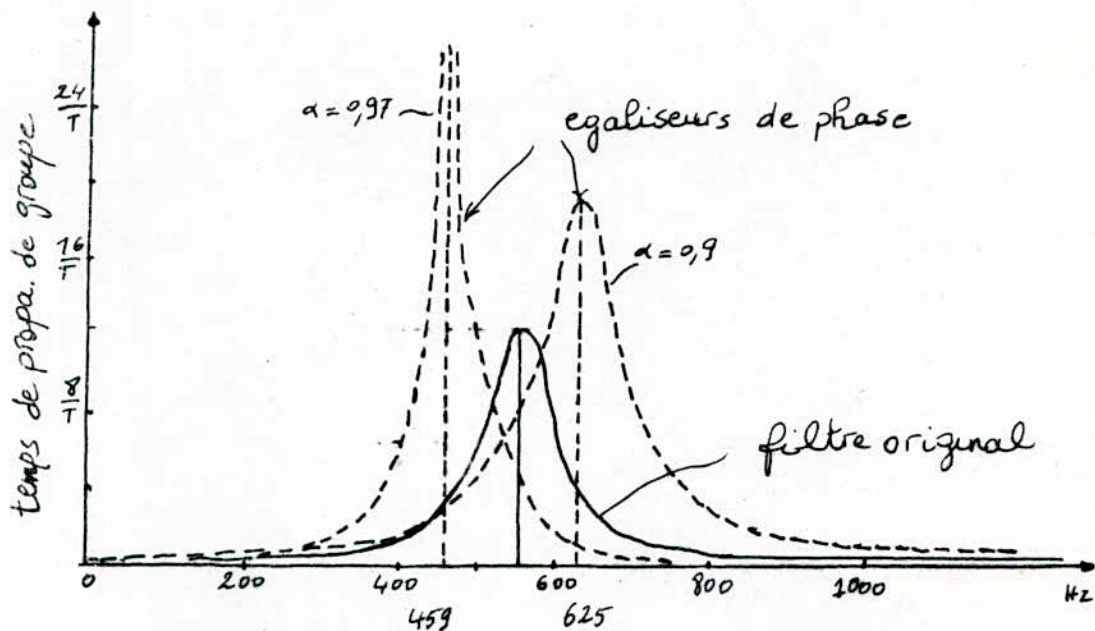


Fig 5-1: temps de propagation de groupe du filtre original et des filtres passe-tout égaliseurs

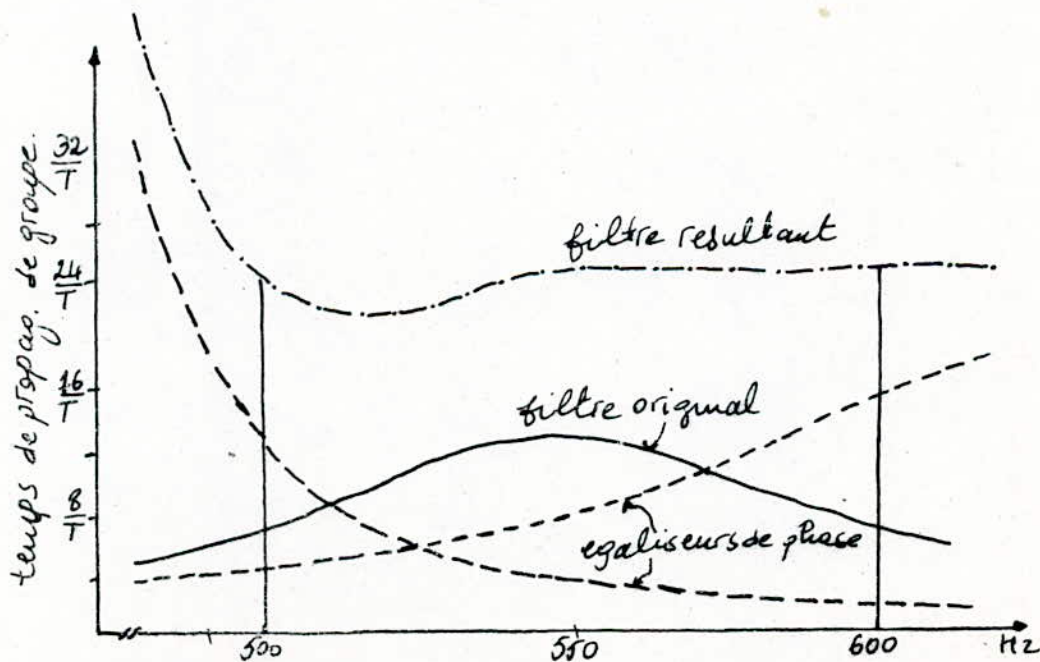


Fig 5.2: temps de propagation de groupe après égalisation

original. La figure (5-1) montre les fonction temps de propagation de groupe pour le filtre original et les filtres égaliseurs. Les filtres passe-tout égaliseurs sont choisis du 1^{er} ordre et de manière à rendre constante la partie de $\tau(f)$ qui se trouve dans la bande passante. Le résultat de cette égalisation est donné par la figure (5-2). On remarque d'après cette figure que dans la bande 0.5 - 0.6 KHz, le temps de propagation de groupe est presque constant ce qui veut dire que la phase est pratiquement linéaire.

5-4 \ EGALISATION PAR MINIMISATION DE L'ERREUR

On veut rendre linéaire la phase du filtre RII, cela revient à écrire :

$$\phi(f) + \phi_t(f) = -\lambda f + \beta \quad \forall f \quad (5-11)$$

avec $\lambda > 0$, β deux constantes .

On doit bien sûr prendre f appartenant à la bande passante du filtre .

En passant au temps de propagation de groupe, la relation (5-8) s'écrit :

$$\tau(f) + \tau_t(f) = -\lambda \quad \forall f \quad (5-12)$$

En admettant une certaine erreur, on peut écrire :

$$\tau(f) + \tau_t(f) + \lambda = e(f) \quad (5-13)$$

En estimant l'erreur pour plusieurs fréquences f_1, f_2, \dots, f_N appartenant à la bande passante, il vient :

$$\begin{aligned} \tau(f_1) + \tau_t(f_1) + \lambda &= e(f_1) \\ \tau(f_2) + \tau_t(f_2) + \lambda &= e(f_2) \\ \vdots & \\ \tau(f_N) + \tau_t(f_N) + \lambda &= e(f_N) \end{aligned} \quad (5-14)$$

où $\phi(f_i)$ peut être calculer par la relation suivante :

$$\phi(f) = \text{Arctan} \left(\frac{\text{Im} \left(H \left(e^{j2\pi f t} \right) \right)}{\text{Re} \left(H \left(e^{j2\pi f t} \right) \right)} \right) \quad (5-15)$$

et les valeurs du temps de propagation de groupe peuvent être calculer en utilisant les différences finies.

Ayant fixé l'ordre du filtre passe-tout egaliseur, on peut donc déterminé les les paramètres de $H_t(Z)$ de pourque l'énergie de l'erreur :

$$W(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{k=0}^N e^2(f_k) \quad (5-16)$$

soit minimale.

où les α_i représente les paramètres du filtre passe-tout.

Cette minimisation nous ramène à un système d'équations non lineaire surdéterminé dont la solution ne fait pas partie du présent projet.

CONSTITUTION

CONCLUSION GENERALE

Plusieurs méthodes ont été élaborées pour synthétiser des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie (R.I.I) physiquement réalisables .

D'après l'étude présentée dans ce projet, on déduit l'importance des méthodes d'approximations utilisant les moindres carrés comme critère d'optimisation .

Ces méthodes, en plus de leur rapidité, présentent le plus grand avantage d'aboutir à un filtre RII stable, résultat non garanti par d'autres méthodes comme celles qui utilisent l'approximation de Padé .

Le degré d'approximation gagné, grâce au moindres carrés, dans la synthèse des filtres R.I.I est très satisfaisant, comparé au nombre réduit de mémoires que permet ce type de filtre .

Cette amélioration concerne essentiellement la bande de transition et les lobes secondaires. Les résultats donnés sous forme de graphes confirme l'exactitude de ces conclusions.

Le problème de ces méthodes réside dans la non linearité de la caractéristique de phase du filtre ainsi synthétisé.

L'étude faite dans ce projet peut alors être complétée par un travail plus détaillé sur le problème d'égalisation de la phase, dans le but de rendre linéaire surtout la partie de la phase qui réside dans la bande passante du filtre.

ANNEXE 1

dans cette annexe on donne quelques détails sur l'algorithme de MULLIS et ROBERTS .

soit la matrice K donnée par :

$$K_{n+1} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} r(0) \\ r(1) \\ \vdots \\ r(n+1) \end{matrix} & \begin{matrix} - & - & - & r(n+1) \end{matrix} \\ \hline & K_n \end{array} \right] - \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(n+1) \end{bmatrix} (h(0), \dots, h(n+1)) \quad (\text{A 1-1})$$

où l'indice indique l'ordre de la matrice.

on définit v_n telque :

$$R(n+1) = \left[\begin{array}{c|c} K_{n+1} & v_n \\ \hline v_n^t & I \end{array} \right] \quad (\text{A 1-2})$$

on pose :

$$A_n = (a_0(n), \dots, a_n(n))^t \text{ vecteur solution de (3-47)}$$

$$D_n = (d_0(n), \dots, d_n(n))^t \quad (\text{A 1-3})$$

$$C_n = (c_0(0), \dots, c_n(n))^t$$

en posant aussi les relations suivantes

$$K_n D_n = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^t \quad (\text{A 1-4})$$

$$K_n C_n = (h(0), \dots, h(n))^t$$

en développant le calcul pour la relation (3-47), et en utilisant

la décomposition (A 1-2), il vient :

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} A_n \\ 0 \end{bmatrix} - \beta_n \begin{bmatrix} D_n \\ 0 \end{bmatrix} - \gamma_n \begin{bmatrix} C_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{n+1} = \begin{bmatrix} D_n \\ 0 \end{bmatrix} - (\theta_n / \alpha_n) A_{n+1}$$

$$C_{n+1} = \begin{bmatrix} C_n \\ 0 \end{bmatrix} - (\phi_n / \alpha_{n+1}) A_{(n+1)}$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \beta_n \cdot \theta_n - \gamma_n \cdot \phi_n \quad (\text{A 1-5})$$

$$\text{où } \beta_n = \sum_{k=0}^n a_k(n) r(n+1-k) \quad (\text{A 1-6})$$

$$\gamma_n = - \sum_{k=0}^n a_k(n) h(n+1-k) \quad (\text{A 1-7})$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \theta_n = \beta_n \cdot d_0(n) + \gamma_n \cdot c_0(n) \\ \phi_n = \beta_n \cdot c_0(n) + \gamma_n \cdot \delta_n \\ \delta_{n+1} = \delta_n + \phi_n^2 / \alpha_{n+1} \end{cases} \quad (\text{A 1-9})$$

ANNEXE 12

On présente dans cette partie de l'annex le developpement de l'algorithme de LEVINSON - DURBIN .

On veut résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & - & - & r(n) \\ r(1) & - & - & - & - \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ r(n) & - & - & r(1) & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ a(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_n \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A 2-1})$$

où α_n est la variance de l'erreur .

Par décomposition on obtient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & - & - & r(n-1) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ r(n-1) & . & . & . & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a(n) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ r(n) \end{bmatrix} \quad (\text{A 2-2})$$

$R_n \quad \Delta_n \quad r^{(n)}$

où l'indice n indique l'ordre de la matrice ou du vecteur.

qu'on peut écrire sous la forme simple suivante :

$$R_n \Delta = - r^{(n)} \Rightarrow \Delta_n = - R_n^{-1} r^{(n)} \quad (\text{A 2-3})$$

En décomposant encore le système on obtient :

$$\left[\begin{array}{c|c} R_{n-1} & J_{n-1} r^{(n-1)} \\ \hline r^{(n-1)} & J_{n-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} a(1) \\ \vdots \\ a(n-1) \\ a(n) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r^{(n-1)} \\ r(n) \end{bmatrix} \quad (\text{A 2-4})$$

avec

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ & & & & \vdots & \\ & & & & \vdots & \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A 2-5})$$

En developpant on obtient :

$$R_{n-1} (a^{(1)} \dots a^{(n-1)})^t = - r^{(n-1)} - a(n) J_{n-1} r^{(n-1)} \quad (A 2-6)$$

$$r^{(n-1)t} J_{n-1} (a^{(1)}, \dots, a^{(n-1)})^t + a(n) r(0) = - r(n) \quad (A 2-7)$$

En combinant les relations (A 2-5) et (A 2-3), on obtient :

$$\begin{bmatrix} a_1^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n-1}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^{(n-1)} \\ \vdots \\ a_{n-1}^{(n-1)} \end{bmatrix} + a(n) J_{n-1} \begin{bmatrix} a_1^{(n-1)} \\ \vdots \\ a_{n-1}^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (A 2-8)$$

En substituant (A 2-7) dans la relation (A 2-6), on obtient :

$$a(n) = \frac{r(n) + r^{(n-1)t} J_{n-1} A_{n-1}}{r(0) + r^{(n-1)t} A_n} \quad (A 2-8)$$

Ce qui permet d'élaborer l'algorithme (4-17).

ANNEXE 13

Dans cette annexe on présente un algorithme dit de " HORNER " qui nous permet d'évaluer les valeurs d'un polynôme en différents points, d'une manière très rapide

Soit le polynôme :

$$P(Z) = \sum_{i=1}^n a(i) Z^{n-i} \quad (\text{A 3-1})$$

où n : ordre du polynôme

$$a(i) \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } Z = \exp(j\theta) = \cos(\theta) + j \sin(\theta) \quad (\text{A 3-2})$$

L'algorithme est donné par :

ayant θ , $a(0)$, , $a(n)$

on cherche α et β tel que :

$$P(e^{j\theta}) = \alpha + j\beta$$

$$C = \cos(\theta)$$

$$S = \sin(\theta)$$

$$D = 2 C$$

$$V_1 = 0$$

$$V_2 = 0$$

$$\text{Récursion} \quad \left[\begin{array}{l} V_3 = a(k) - V_1 - d.V_2 \\ V_1 = V_2 \\ V_2 = V_3 \\ 0 \leq k \leq n \end{array} \right.$$

$$\alpha = V_2 - C.V_1$$

$$\beta = S.V_1$$

$$P(e^{j\theta}) = \alpha + j\beta$$

B I B L I O G R A P H I E

- [1] : M. KUNT " *traitement numérique du signal* " Dunod 1981
- [2] : M. BELLANGER " *traitement numérique du signal* " Masson 1987
- [3] : F. COULON " *théorie et traitement du signal* " presses polytechnique de romandes coll " traité d'électricité IV " 1984
- [4] : A. PELED & B. LILI " *a new approach to the realisation of non recursive digital filter* " I. E. E. E. tras. audio & elect. vol au 21 n° 6 pp 477-484 dec 73
- [5] : J. M. CLELLAN T. PARKS & L. RABINER " *a computer program for designing optimum FIR linear phase digital filters* " I. E. E. E. trans. audio elect. vol a-u 21 n° 6 pp 506-526, dec 73
- [6] : F. BROPHY A. SALAZAR " *consideration of Padé approximant technique in the synthesis of recursive digital filters* " I. E. E. E. trans. audio elect. pp 500-505 vol a-u 21 n° 6 dec 73
- [7] : R. HASTINGS S. MEHRA " *extension of Padé-approximant technique for the design of recursive digital filters* " I. E. E. E. trans. audio elect. pp 501-509 vol a-u 21 dec 77
- [8] : C.T. MULLIS & R.A. ROBERTS " *the use of second-order information in the approximation of discrete-time linear systems* " I. E. E. E. trans. acous. speech vol assp-24 n° 3 june 76
- [9] : R. BOITE M. KUNT " *traitement de la parole* " presses polytechnique de romandes coll " complément au traité d'électricité " 1987
- [10] : A.G. EVANS & R. FSCHL " *optimal least squares time-domain synthesis of recursive digital filters* " I. E. E. E. trans. audio elect. pp 61-65 february 1973
- [11] : P. THAJCHAYAPONG & P.J.W. RAYNER " *recursive digital filter design by linear programming* " I. E. E. E. trans. audio elect. pp 107-112 vol a-u 21 n° 3 apr 73

[12] : J.W.BANDLER & B.BARDAKJIAN " *least pth optimization of recurs
digital filters* "

I. E. E. E. trans. audio elect. pp 500-505 vol a-u 21 n°6 oct73

[13] : L.L. SCHARF & J.C. LUBY " *statistical design of
autoregressive-moving average digital filters* "

I. E. E. E. trans. acous. speech pp 240-247 vol assp-24 n°3
june 76