

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique

Département d'Electronique

Thèse de Doctorat d'Etat en Electronique,

Option : Contrôle

**CONTRIBUTION A LA THEORIE
D'APPROXIMATION DES SYSTEMES
DESCRIPTEURS**

Amel Baha Houda ADAMOU ép. MITICHE

(Ingénieur ENP, Magister USTHB)

Soutenue le : 23 Mars 2006

Devant le jury :

R. AKSAS (Pr.) (Président, ENP)
M. HADDADI (Pr.) (Directeur de thèse, ENP)
V. SIMA (Pr.) (Co-directeur de thèse, ICI, Roumanie)
A. GUESSOUM (Pr.) (Examineur, U. de Blida)
A. BERKOUK (Pr.) (Examineur, ENP)
D. BOUKHETALA (MC) (Examineur, ENP)

A toi Lahcène et à nos filles Nour et Rym.

Avant propos

En premier lieu, je souhaiterais remercier le Dr Najib LOUAM de m'avoir proposé ce sujet, et le Professeur Mourad HADDADI, d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse, je leur exprime ainsi tous mes respects et gratitude.

Je tiens aussi à remercier le Professeur Vasile SIMA de l'ICI (Roumanie) d'avoir accepté de co-diriger ma thèse.

Difficile de trouver les mots qui conviennent pour exprimer ma reconnaissance à mon mari et collègue Dr Lahcène MITICHE qui m'a guidé et m'a dirigé tout au long de ma recherche, pour ses précieux conseils, soutien moral et surtout pour sa compréhension qu'il reçoive l'expression de mes profonds sentiments.

Mes respectueuses salutations vont aux membres du jury qui ont bien voulu m'honorer par leur acceptation d'examiner et juger mon travail.

Amel B.H. ADAMOU-MITICHE

Notation

R : l'ensemble des nombres réels.

χ : l'ensemble des vecteurs d'états.

$[E, A, B, C, D, n]$: réalisation du système descripteur d'ordre complet n .

$[E_r, A_r, B_r, C_r, D, r]$: réalisation du système descripteur d'ordre réduit r .

$(\lambda E - A)$: pencil du système descripteur.

$u(\cdot), y(\cdot), x(\cdot)$: entrée, sortie, état du système.

t, k : temps continu, temps discret.

s, z : variables fréquentielles dans le cas continu, dans le cas discret .

$i = \sqrt{-1}$.

A^{-1} : inverse de A .

$$I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{matrice identité d'ordre } n.$$

$$N_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} : \text{matrice nilpotent d'ordre } n, \text{ dans la forme}$$

de Jordan.

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} : \text{matrice de Jordan associée a la valeur}$$

propre λ_i .

SVD : singular value decomposition (décomposition en valeurs singulières).

$\lambda_i(E, A), \lambda_i(A)$: ième valeur propre du pencil (E, A) , ième valeur propre de A .

$\sigma_i(A)$: ième valeur singulière de A .

Σ : matrice des valeurs singulières.

zeros(m, n) : matrice (m -lignes, n -colonnes) à éléments nuls.

MIMO : multi-input/multi-output (multi-entrées/multi-sorties).

SISO : single-input/single output (une seule entrée/ une seule sortie)

Table des matières

1	INTRODUCTION GENERALE	11
2	MOTIVATION DE LA REDUCTION DE MODELES	13
2.1	Introduction et position du problème	13
2.2	Approches <i>SVD</i>	16
2.2.1	Méthode de <i>MOORE</i>	16
2.2.2	Technique de <i>Schur</i>	17
2.3	Conclusion	19
3	THEORIE DES SYSTEMES DESCRIPTEURS LINEAIRES	21
3.1	Introduction	21
3.2	Notions d'espace d'état généralisé	22
3.3	Fonction de transfert et réalisations.	22
3.3.1	Cas continu	22
3.3.2	Cas discret	23
3.3.3	Réalisations	23
3.4	Commandabilité et observabilité	24

3.4.1	Commandabilité	24
3.4.2	Observabilité	26
3.5	Résolution	28
3.5.1	Cas continu	28
3.5.2	Cas numérique	29
3.6	Stabilité	29
3.6.1	Cas continu	29
3.6.2	Cas numérique	30
3.7	Calcul des grammiens	30
3.7.1	Cas continu	30
3.7.2	Cas numérique	31
3.8	Conclusion	32
4	APPROXIMATION DES SYSTEMES DESCRIPTEURS	33
4.1	Introduction	33
4.2	Valeurs singulières	34
4.3	Réduction d'ordre des modèles descripteurs continus	36
4.4	Conclusion	41
5	Simulations	43
5.1	Introduction	43
5.2	Exemple 1	44
5.3	Exemple 2	48
5.4	Exemple 3	68

5.5	Interprétation.	77
5.6	Conclusion	78
6	Conclusion générale	81
	Bibliographie	83
A	Définitions	89
B	ALGORITHME D'EQUILIBRE (MODELES CONTINUS STAN- DARDS)	91
C	ALGORITHME SVD	95
D	ALGORITHME D'EQUILIBRE (SYSTEMES DESCRIPTEURS CONTI- NUS)	99

Chapitre 1

INTRODUCTION GENERALE

Nous présenterons dans le présent travail une nouvelle théorie de réduction d'ordre de systèmes descripteurs appelés aussi systèmes semi-états, systèmes implicites, systèmes algébrico-différentiels, ou systèmes généralisés qui sont une généralisation des systèmes décrits dans l'espace d'état, dits systèmes réguliers ou classiques, ces derniers sont rencontrés, dans la littérature, sous l'appellation de systèmes standards [1]. A cet effet, le travail sera réparti en deux grands volets : dans le premier, nous poserons le problème de réduction en général, par la suite nous présenterons les diverses définitions et propriétés relatives à la théorie de systèmes descripteurs. Le second volet traitera une technique de réduction d'ordre de modèles, présentant deux propriétés intéressantes : elle permet d'assurer toujours la stabilité et en second lieu, permet une quantification de l'erreur d'approximation : c'est la technique *SVD* (Singular Values Decomposition)[2] qui, utilisée dans l'approximation de systèmes dynamiques standards, a été éten-

due aux systèmes généralisés.

La thèse est organisée comme suit :

Dans le chapitre 2, nous posons le problème de réduction dans le cas classique.

Le Chapitre 3 couvre l'essentiel de la théorie des systèmes descripteurs linéaires, invariants dans le temps, stables. Il inclue les notions de commandabilité, d'observabilité et des grammians des systèmes descripteurs qui sont les solutions des équations de *Lyapunov* généralisées [3].

Le chapitre 4 introduit l'idée de réduction d'ordre des systèmes descripteurs, basée sur l'extension de la technique *SVD*, reposant essentiellement sur le calcul d'un ensemble d'invariants appelés "valeurs singulières propres et valeurs singulières impropres de *Hankel*" [3], sur lesquelles s'opère la réduction d'ordre.

La nouveauté qu'apporte notre travail, réside dans le fait que l'algorithme de réduction élaboré permet de synthétiser des modèles d'approximation issus de la réduction, à la fois des sous-systèmes propres et impropres, permettant la construction d'approximants d'ordres faibles de natures différentes, l'un descripteur, l'autre régulier . Pour implémenter notre algorithme décrit dans le chapitre 4, un programme à base de Matlab [4] , et des routines en Fortran [5] ont été élaborés. Diverses simulations sur de systèmes descripteurs de très grande dimension ont été réalisées, montrant l'efficacité de notre algorithme.

Chapitre 2

MOTIVATION DE LA REDUCTION DE MODELES

2.1 Introduction et position du problème

Très souvent, dans le cadre classique de la théorie et de la commande des systèmes, les systèmes à grande dimension ne s'apprêtent pas facilement à l'analyse qui s'avère, parfois non faisable et/ou très coûteuse, ce qui rend la nécessité de réduire plus que souhaitable : mais irremédiablement impossible : surtout si l'on sait que la dimension (ordre) du modèle mathématique utilisé, qui pour représenter correctement un système physique, en tenant compte de toutes les contraintes auxquelles il est assujéti, devient relativement très importante. La réduction d'ordre de modèle est la simplification ou l'approximation d'un modèle mathématique sous la contrainte que le comportement globale Entrée/Sortie

(E/S) du modèle initial, pour un même ensemble d'entrées soit bien approximé. Dans ce chapitre, nous poserons le problème de la nécessité de simplification de modèles dynamiques, par la suite, nous présenterons deux approches de réduction d'ordre de systèmes classiques opérant dans l'espace d'état, basées sur l'approche SVD [6].

Un système dynamique est généralement représenté par un ensemble d'équations différentielles et un ensemble d'équations algébriques.

Le système en question noté S , est défini par [7]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ y(t) &= h(x(t), u(t)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pour plus de simplicité, on adoptera la notation suivante

$$S = (f, h) \text{ avec } x(t) \in R^n, u(t) \in R^m \text{ et } y(t) \in R^p$$

où u est l'entrée ou fonction d'excitation, x le vecteur d'état, et la fonction f décrit la dynamique de S ; y étant la sortie, ou ensemble des observations et h décrit comment les observations sont déduites à partir de l'état et de l'entrée.

La dimension n d'un système n'est autre que le nombre des équations différentielles qui le représentent (c'est aussi le nombre des états).

Le problème de la réduction est d'approximer S par un autre système dynamique \hat{S} de dimension r , donné par $\hat{S} = (\hat{f}, \hat{h})$ avec $\hat{x}(t) \in R^r, u(t) \in R^m$ et $y(t) \in R^p$, où le nombre des états de l'approximant doit être très faible devant celui du système original $r \ll n$. Dans le cas de systèmes dynamiques linéaires,

invariants dans le temps, S sera représenté par

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}\tag{2.2}$$

et l'on adoptera la notation

$$S \equiv \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right),\tag{2.3}$$

le problème est alors de trouver un approximant d'ordre réduit

$$\hat{S} \equiv \left(\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right).\tag{2.4}$$

Selon la technique de réduction utilisée, le modèle d'ordre réduit r doit satisfaire certaines contraintes, telles-que

1. une préservation de la stabilité, et passivité ,
2. une procédure de calcul efficace, rapide, et un volume de stockage faible,
3. une possibilité de quantification de l'erreur d'approximation.

Le problème classique de la réduction d'ordre a reçu une attention considérable lors des deux dernières décennies. Parmi les diverses approches construites dans ce domaine, on retiendra les plus récentes, celles basées sur la méthode *SVD*, qui seront l'objet de la section suivante. Ces méthodes ont le grand avantage de satisfaire les contraintes sus-citées.

2.2 Approches *SVD*

Les techniques de réduction d'ordre de modèles basées sur la méthode *SVD* opèrent dans l'espace d'état. Elles reposent sur le calcul d'une certaine base appelée base d'équilibre [8] dans laquelle les grammiens de commandabilité et d'observabilité sont égaux et diagonaux ; leurs composants appelés valeurs singulières de *Hankel* sont d'importants invariants qui rentrent dans la construction du modèle d'ordre réduit (par troncature des valeurs singulières les plus faibles), et aussi dans le calcul de la norme de *Hankel* [6]. Divers travaux ont été réalisés dans ce sens, et ont été aussi bien orientés vers l'approximation des systèmes continus (*SISO* et *MIMO* [9]) que systèmes numériques [10], sur les contrôleurs [11], et très récemment elle a permis de développer une nouvelle approche de modélisation de systèmes de production du signal de parole [12].

2.2.1 Méthode de *MOORE*

Introduite par *Moore* [8], cette approche est basée sur une transformation d'état particulière dite "transformation d'équilibre" [13] (Annexe B) qui rend symétrique certaines propriétés du système, du point de vue entrées/sorties, dans un sens énergétique [14].

Le calcul de certains invariants dits "valeurs singulières" (Annexe C) permet de construire un approximant d'ordre faible en éliminant les valeurs singulières les moins significatives. Le problème qui peut se poser est le mal conditionnement de la transformation (matrice) d'équilibre qui peut être causé par quelques modes

du système, presque non commandables ou/et mal observables [15]. Pour y remédier, la technique de *Schur* est utilisée.

2.2.2 Technique de *Schur*

Cette approche permet d'aboutir au même modèle de *Moore* sans calculer la transformation d'équilibre. Elle repose essentiellement sur le calcul d'espaces propres droite et gauche [16], mais cette fois-ci associés aux plus grandes valeurs propres des grammians de commandabilité et d'observabilité. Plus générale que la méthode de *Moore*, elle est principalement utilisée dans des problèmes de simplification de systèmes non minimaux.

Algorithme de *Schur*.

Entrées : La réalisation d'état d'ordre n (A, B, C, D), et l'ordre du modèle réduit r .

Étape 1- Calcul des deux grammians W_c et W_o (Annexe B).

Étape 2- Calcul de la matrice réelle orthonormale V , telle que la matrice $(VW_cW_oV^T)$ soit triangulaire supérieure ; c'est à dire, la mettre sous la forme de *Schur*.

Étape 3- En utilisant les rotations orthogonales [17], calculer les transformations réelles orthogonales V_A et V_D qui ordonnent la forme de *Schur* respective-

ment en ordre ascendant et descendant, telles-que

$$V_A^T W_c W_o V_A = \begin{bmatrix} \lambda_{A_n} & * & * & * & * \\ 0 & \lambda_{A_{n-1}} & * & * & * \\ \vdots & 0 & * & * & * \\ \vdots & \cdots & * & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{A_1} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$V_D^T W_c W_o V_D = \begin{bmatrix} \lambda_{D_1} & * & * & * & * \\ 0 & \lambda_{D_2} & * & * & * \\ \vdots & 0 & * & * & * \\ \vdots & \cdots & * & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{D_n} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

avec

$$\lambda_{A_i} = \lambda_{D_i} = \sigma_i^2, (i = \overline{1, r}) \quad (2.7)$$

$$\lambda_{A_i} = \lambda_{D_i} = \sigma_i^2, (i = \overline{r+1, n}) \quad (2.8)$$

Etape 4- Partition de V_A et V_D telles-que

$$V_A = \left[\underbrace{\quad}_{V_{d,p}}^{\mathbf{n-r}} \quad \underbrace{\quad}_{V_{g,g}}^{\mathbf{r}} \right] \quad (2.9)$$

$$V_D = \left[\underbrace{\quad}_{V_{d,g}}^{\mathbf{r}} \quad \underbrace{\quad}_{V_{g,p}}^{\mathbf{n-r}} \right] \quad (2.10)$$

Etape 5- Former la projection [17]

$$E_g = V_{g,g}^T V_{d,g} \quad (2.11)$$

et calculer sa décomposition en valeurs singulières SVD (Annexe C)

$$E_g = U_{E,g} \Sigma_{E,g} V_{E,g}^T \quad (2.12)$$

Étape 6- Former les matrices

$$S_{g,g} = V_{g,g} U_{E,g} \Sigma_{E,g}^{-\frac{1}{2}}, \in R^{n \times r} \quad (2.13)$$

$$S_{d,g} = V_{d,g} V_{E,g} \Sigma_{E,g}^{-\frac{1}{2}}, \in R^{n \times r} \quad (2.14)$$

Étape 7- Construction de la réalisation d'état du modèle simplifié

$$\begin{bmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{g,g}^T A S_{d,g} & S_{g,g}^T B \\ C S_{d,g} & D \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Fin de la procédure.

2.3 Conclusion

Nous avons posé le problème de la simplification de systèmes classiques décrits dans l'espace d'état, et décrit de récentes approches de réduction d'ordre. Dans ce qui va suivre nous allons voir une classe de systèmes plus large que celles des systèmes standards, qui est celle des systèmes descripteurs appelés aussi systèmes singuliers, et par la suite nous allons montrer comment sera étendue la théorie d'approximation par la réduction d'ordre aux systèmes descripteurs singuliers.

Chapitre 3

THEORIE DES SYSTEMES

DESCRIPTEURS LINEAIRES

3.1 Introduction

Dans la littérature, diverses appellations sont rencontrées pour les systèmes descripteurs, telles-que systèmes singuliers, systèmes implicites, systèmes dans l'espace d'état généralisé, systèmes algébrico-différentiels ou systèmes à semi-état [1]. De tels systèmes présentent le grand avantage d'être présents dans divers domaines [18], tels-que les circuits électriques, les systèmes interconnectés [19], les systèmes économiques [20], en chimie et autres. Nous présenterons dans ce chapitre quelques concepts de base et propriétés des systèmes descripteurs.

3.2 Notions d'espace d'état généralisé

Un système descripteur linéaire, invariant, continu dans le temps, est représenté dans l'espace d'état généralisé par

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

et un système descripteur linéaire, invariant, discret dans le temps, par

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0, \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \quad (3.2)$$

où $x \in R^n$ est le vecteur d'état, $u \in R^m$ est le vecteur de commande et $y \in R^p$ est le vecteur de sortie, $E, A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ et $C \in R^{p \times n}$ sont des matrices constantes, avec E matrice descripteur, supposée singulière et $x_0 \in R^n$. On supposera que le pencil $(\lambda E - A)$ est régulier. Comme il n'y a pas de pertes de généralité, on a posé nulle la matrice de couplage directe D . Si $E = I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n , les systèmes (3.1) et (3.2) sont appelés systèmes réguliers et seront décrits dans l'espace d'état standard.

3.3 Fonction de transfert et réalisations.

3.3.1 Cas continu

En introduisant la transformée de *Laplace* dans le système descripteur (3.1), on obtient

$$X(s) = C(sE - A)^{-1}BU(s) + (sE - A)^{-1}Ex(0), \quad (3.3)$$

$$Y(s) = C(sE - A)^{-1}BU(s) + C(sE - A)^{-1}Ex(0), \quad (3.4)$$

où $X(s)$, $U(s)$, $Y(s)$ sont respectivement, les transformées de *Laplace* de $x(t)$, $u(t)$ et $y(t)$.

Si $Ex(0) = 0$, la fonction de transfert est alors $G(s) = C(sE - A)^{-1}B$, elle décrit le comportement E/S du système (3.1) dans le domaine fréquentiel continu.

3.3.2 Cas discret

En appliquant la transformée en Z au système (3.2), on obtient alors $Y(z) = C(zE - A)^{-1}BU(z)$, où $U(z)$, $Y(z)$ sont respectivement, les transformées en Z des séquences $\{u(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{y(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

La fonction de transfert correspondante est alors $G(z) = C(zE - A)^{-1}B$, elle décrit le comportement E/S du système (3.2) dans le domaine fréquentiel discret.

3.3.3 Réalisations

Tout système (3.1) ou (3.2) construit à partir de $[E, A, B, C]$ est appelé une réalisation de $G(s)$ ou $G(z)$. Comme dans le cas de systèmes standards, il en existe une infinité de réalisations pour les systèmes descripteurs.

Définition 3.1. [3] Deux réalisations $[E, A, B, C]$ et $[\check{E}, \check{A}, \check{B}, \check{C}]$ sont équivalentes s'il existent deux matrices \check{W} et \check{T} telles-que

$$E = \check{W}\check{E}\check{T}, \quad A = \check{W}\check{A}\check{T}, \quad B = \check{W}\check{B}, \quad C = \check{C}\check{T}. \quad (3.5)$$

La paire (\check{W}, \check{T}) est appelée transformation d'équivalence du système descripteur.

3.4 Commandabilité et observabilité

Contrairement aux systèmes standards, il existe pour les systèmes descripteurs, plusieurs notions de commandabilité et d'observabilité [21], ils seront définis dans cette section [22].

3.4.1 Commandabilité

Définition 3.2. Les systèmes (3.1) et (3.2) sont dits complètement commandables (C-commandables) si

$$\text{rang}[\alpha E - \beta A, B] = n, \forall (\alpha, \beta) \in R^2 \setminus \{(0, 0)\}. \quad (3.6)$$

Définition 3.3. Les systèmes (3.1) et (3.2) sont dits commandables sur un ensemble gouvernable (sont notés R-commandables) si

$$\text{rang}[\lambda E - A, B] = n, \forall \lambda \in R \quad (3.7)$$

Définition 3.4. Les systèmes (3.1) et (3.2) sont dits commandables à l'infini (I-commandable) si

$$\text{rang}[E, AK_E, B] = n \quad (3.8)$$

où les colonnes de K_E engendrent l'espace nul de E .

Définition 3.5. Si les équations (3.7) et (3.8) sont satisfaites, alors (3.1) et (3.2) sont dits fortement commandables (S-commandables).

Remarques [22]

- Les systèmes (3.1) et (3.2) sont C-commandables si l'équation (3.7) est vérifié et $\text{rang}[E, B] = n$.

- La C-commandabilité implique que pour tout état x_0 et un état final $x_f \in \mathcal{R}^n$, il existe une entrée de commande $u(k)$ qui transfère le système de x_0 à x_f en un temps fini.
- La R-commandabilité assure que pour tout état x_0 , et état $x_f \in \mathcal{X}$, il existe une commande u qui transfère le système de x_0 à x_f en un temps fini.

Dans le cas où $E = I$, la R-commandabilité coïncide avec la C-commandabilité et représente la commandabilité des systèmes standards.

- La I-commandabilité :

1. Dans le cas continu, elle est aussi appelée commandabilité impulsive.

elle signifie que les modes impulsifs dans la solution, peuvent être exclus ou supprimés par un choix de commande par retour d'état approprié ; c'est à dire, pour tout vecteur d'état initial x_0 il existe une commande $u(t) = F_c x(t) + v(t)$ où $F_c \in \mathcal{R}^{m \times n}$ et un nouveau vecteur de commande $v(t) \in \mathcal{R}^m$ tels-que le système en boucle fermée

$$E\dot{x}(t) = (A + BF_c)x(t) + Bv(t), \quad x(0) = x_0,$$

ne présente pas de solutions impulsives.

2. Dans le cas numérique, elle implique que pour tout état initial $x_0 \in \mathcal{R}^n$, on peut trouver une commande par retour d'état $u(k) = F_c x(k) + v(k)$, avec une matrice gain $F_c \in \mathcal{R}^{m \times n}$ et un nouveau vecteur de commande $u(k) \in \mathcal{R}^m$, tels-que le système en boucle fermée

$$Ex(k+1) = (A + BF_c)x(k) + Bv(k), \quad x(0) = x_0,$$

soit causal.

Définition 3.6. Les matrices C_+ et C_- données par

$$C_+ = [F_0B, \dots, F_kB, \dots] \quad \text{et} \quad C_- = [\dots, F_{-k}B, \dots, F_{-1}B], \quad (3.9)$$

avec

$$F_k = \begin{cases} T^{-1} \begin{bmatrix} J^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W^{-1}, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -N^{-k-1} \end{bmatrix} W^{-1}, & k = -1, -2, \dots \end{cases} \quad (3.10)$$

représentent, respectivement, dans le cas continu, les matrices de commandabilité propre et impropre ; dans le cas numérique, les matrices de commandabilité causale et non-causale [22].

Les matrices T et W sont des matrices non singulières, de transformation.

La matrice de commandabilité de tout système descripteur (3.1) et (3.2) est alors

$$C = [C_-, C_+] \quad (3.11)$$

3.4.2 Observabilité

Comme dans le cas de systèmes standards, l'observabilité est le concept dual de la commandabilité [23].

Définitions 3.7.

- Les systèmes (3.1) et (3.2) sont dits complètement observables (C-observable)

si

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \alpha E - \beta A \\ C \end{bmatrix} = n, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \quad (3.12)$$

– Les systèmes (3.1) et (3.2) sont dits observables sur un ensemble gouvernable (**R**-observables) si

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ C \end{bmatrix} = n, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

– Les systèmes (3.1) et (3.2) sont dits observables à l'infini (**I**-observables),

si

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ K_{E^T A}^T \\ C \end{bmatrix} = n, \quad (3.14)$$

où les colonnes de K_{E^T} engendrent l'espace nul de E^T .

– Les systèmes (3.1) et (3.2) sont dits fortement observables (**S**-observables)

si les équations (3.7) et (3.8) sont vérifiées.

Définition 3.8. Les matrices O_+ et O_- données par

$$O_+ = \begin{bmatrix} C F_0 \\ \vdots \\ C F_k \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad O_- = \begin{bmatrix} \vdots \\ C F_{-k} \\ \vdots \\ C F_{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

sont respectivement appelées : dans le cas continu, matrices d'observabilité propre et impropre ; dans le cas numérique, elles sont dites, respectivement, matrices

d'observabilité causale et non-causale.

La matrice d'observabilité de tout système descripteur (3.1) et (3.2) est donnée par

$$O = \begin{bmatrix} O_- \\ O_+ \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

3.5 Résolution

3.5.1 Cas continu

Sous la transformation de coordonnées

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = Tx(t)$$

le système (3.1) est découpé en un sous-système lent

$$\dot{z}(t) = Jz(t) + B_1u(t), \quad z(0) = z_0, \quad (3.17)$$

et un sous-système rapide

$$N\dot{w}(t) = w(t) + B_2u(t), \quad w(0) = w_0. \quad (3.18)$$

avec

$$y(t) = C_1z(t) + C_2w(t), \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} z_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = Tx_0$$

Ainsi, la solution $x(t, x_0, u)$ de tout système descripteur (3.1), sera [21]

$$x(t, x_0, u) = T^{-1} \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \varphi(t)Ex_0 + \int_0^t \varphi(t-\tau)B(\tau)d\tau + \sum_{k=0}^{\nu-1} F_{-k-1}Bu^{(k)}(t). \quad (3.19)$$

avec $\varphi(t)$ donnée par [22]

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda E - A)^{-1} d\lambda, \quad (3.20)$$

où Γ est la courbe de Jordan fermée incluant les valeurs propres finies du pencil $(\lambda E - A)$.

3.5.2 Cas numérique

D'une manière analogue que pour le cas continu, [24], on découplera le système (3.2) et il lui correspondra la solution $x(k, x_0, u)$, telle que,

$$x(k, x_0, u) = T^{-1} \begin{bmatrix} z(k) \\ w(k) \end{bmatrix} = F_k E x_0 + \sum_{j=0}^{k+\nu-1} F_{-j-1} B u_j, \quad k \geq 0. \quad (3.21)$$

3.6 Stabilité

3.6.1 Cas continu

Théorème 3.11. [22] *Soit un pencil régulier $(\lambda E - A)$; le système (3.1) est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles finis de $(\lambda E - A)$ appartiennent au demi plan gauche.*

Définition 3.12. Un pencil $(\lambda E - A)$ est c-stable s'il est régulier et si tous les pôles finis de $(\lambda E - A)$ appartiennent au demi plan gauche.

3.6.2 Cas numérique

Théorème 3.13. [25] *Soit un pencil régulier $(\lambda E - A)$; le système (3.2) est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles finis de $(\lambda E - A)$ sont à l'intérieur du cercle unité.*

Définition 3.14. Tout pencil $(\lambda E - A)$ est d-stable s' il est régulier et si tous les pôles finis de $(\lambda E - A)$ sont à l'intérieur du cercle unité.

3.7 Calcul des grammians

Les grammians d'un système descripteur sont les solutions des équations *projetées généralisées de Lyapunov* [24].

3.7.1 Cas continu

Le grammien de commandabilité propre G_{pc} et le grammien d'observabilité propre G_{po} sont les solutions uniques symétriques, semidéfinies positives des équations *projetées généralisées de Lyapunov* continues

$$EG_{pc}A^T + AG_{pc}E^T = -P_l BB^T P_l^T, \quad (3.22)$$

$$E^T G_{po} A + A^T G_{po} E = -P_r^T C^T C P_r, \quad (3.23)$$

où P_l et P_r sont les *projecteurs spectraux* sur les sous-espaces gauche et droite engendrés par $(\lambda E - A)$ correspondant aux valeurs propres finies. Par ailleurs ; le grammien de commandabilité impropre G_{ic} et le grammien d'observabilité

impropre G_{io} sont les solutions uniques symétriques, semidéfinies positives des équations *projetées généralisées de Lyapunov* discrètes [26]

$$AG_{ic}A^T - EG_{ic}E^T = (I - P_l)BB^T(I - P_l)^T, \quad (3.24)$$

$$A^TG_{io}A - E^TG_{io}E = (I - P_r^T)C^TC(I - P_r). \quad (3.25)$$

où les matrices de projection P_r et P_l ont pour expressions suivantes

$$P_r = T^{-1} \begin{pmatrix} I_{n_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T, \quad (3.26)$$

$$P_l = W \begin{pmatrix} I_{n_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}. \quad (3.27)$$

L'ensemble des grammien propres et impropres constitue les grammien du système descripteur (3.1).

3.7.2 Cas numérique

Pour les systèmes descripteurs numériques [25], on définit

– Grammien de commandabilité causale G_{dcc}

$$G_{dcc} = C_+C_+^T = \sum_{k=0}^{\infty} F_kBB^TF_k^T. \quad (3.28)$$

– Grammien de commandabilité non causale G_{dnc}

$$G_{dnc} = C_-C_-^T = \sum_{k=-\nu}^{-1} F_kBB^TF_k^T. \quad (3.29)$$

– Grammien d'observabilité causale G_{dco}

$$G_{dco} = O_+^TO_+ = \sum_{k=0}^{\infty} F_k^TC^TCF_k. \quad (3.30)$$

- Grammien d’observabilité non causale G_{dno}

$$G_{dno} = O_-^T O_- = \sum_{k=-\nu}^{-1} F_k^T C^T C F_k. \quad (3.31)$$

Ainsi,

- le grammien de commandabilité d’un système descripteur numérique est donné par

$$G_{dc} = G_{dcc} + G_{dnc}. \quad (3.32)$$

- le grammien d’observabilité d’un système descripteur numérique est donné par

$$G_{do} = G_{dco} + G_{dno}. \quad (3.33)$$

3.8 Conclusion

Nous avons présenté dans cette section quelques notions et résultats importants relatifs aux systèmes descripteurs continus et discrets, tels-que la commandabilité, l’observabilité et la stabilité, et donner les expressions des vecteurs d’état généralisés continu et discret, nous avons aussi donné les expressions analytiques des grammiens de commandabilité et d’observabilité auxquels la réduction d’ordre est étroitement liée. Dans la prochaine section, nous décrirons comment sera étendu la procédure de réduction d’ordre aux systèmes descripteurs.

Chapitre 4

APPROXIMATION DES SYSTEMES DESCRIPTEURS

4.1 Introduction

Considérons un système descripteur, linéaire, continu dans le temps, c-stable,

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $x(t) \in R^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ est le vecteur de commande, $y(t) \in R^p$ est le vecteur de sortie ; et $E, A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$ sont des matrices constantes avec E singulière. On suppose que le pencil $(\lambda E - A)$ est régulier. L'objectif de toute procédure de réduction d'ordre de système descripteur est de remplacer un système complet d'ordre n (4.1) par un modèle

d'ordre réduit r ,

$$\begin{aligned} E_r \dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r u(t), \\ y_r(t) &= C_r x_r(t) + D_r u(t), \end{aligned} \quad (4.2)$$

où $E_r, A_r \in R^{r \times r}$, $B_r \in R^{r \times m}$, $C_r \in R^{p \times r}$, et $r \ll n$.

Le système (4.2) doit conserver les propriétés clés du système initial (4.1), telle que la stabilité, et l'erreur d'approximation doit être relativement faible. Divers travaux ont été réalisés dans ce sens [27, 28]. Dans ce qui suit, nous présenterons une généralisation de la technique *SVD* "Singular Values Decomposition" aux systèmes descripteurs, permettant de construire un approximant d'ordre réduit par troncature des valeurs singulières les plus faibles, puis nous développerons notre propre algorithme de réduction.

4.2 Valeurs singulières

Soit un système descripteur donné par (4.1), c -stable. Les grammien décrits précédemment peuvent être utilisés pour définir les valeurs singulières qui ont un rôle déterminant dans la réduction d'ordre de modèles. Sous une transformation d'équivalence $(\widetilde{W}, \widetilde{T})$ [29],

- le grammien de commandabilité propre G_{cpc} sera transformé en

$$\widetilde{G}_{cpc} = \widetilde{T}^{-1} G_{cpc} \widetilde{T}^{-T},$$

- le grammien de commandabilité impropre G_{cic} sera transformé en

$$\widetilde{G}_{cic} = \widetilde{T}^{-1} G_{cic} \widetilde{T}^{-T},$$

– le grammien d’observabilité propre G_{cpo} sera transformé en

$$\widetilde{G}_{cpo} = \widetilde{W}^{-T} G_{cpo} \widetilde{W}^{-1},$$

– le grammien d’observabilité impropre G_{cio} sera transformé en

$$\widetilde{G}_{cio} = \widetilde{W}^{-T} G_{cio} \widetilde{W}^{-1},$$

On remarque que le spectre du produit des deux grammien (de commandabilité et d’observabilité) propres reste invariant sous la même transformation d’équivalence :

$$* \Upsilon_c := G_{cpc} E^T G_{cpo} E.$$

Sous une transformation d’équivalence $(\widetilde{W}, \widetilde{T})$, elle sera transformée en

$$* \widetilde{G}_{cpc} \widetilde{E}^T \widetilde{G}_{cpo} \widetilde{E} = \widetilde{T}^{-1} G_{cpc} E^T G_{cpo} E \widetilde{T}.$$

Un résultat similaire reste valable aussi pour le produit des deux grammien impropres,

$$* \Gamma_c := G_{cic} A^T G_{cio} A.$$

Les matrices Υ et Γ jouent le même rôle que le produit des grammien de commandabilité et d’observabilité pour les systèmes standards. La racine carrée des composantes de Υ représente l’ensemble des valeurs singulières propres et la racine carrée des composantes de Γ représente l’ensemble des valeurs singulières impropres.

Remarque : Pour $E = I$, les valeurs singulières propres sont les valeurs singulières du système standard.

4.3 Réduction d'ordre des modèles descripteurs continus

La réduction opérée dans la base d'équilibre peut soit ne pas s'effectuer lorsque le système n'est pas R-minimal, soit elle peut rencontrer le problème de mal conditionnement de la matrice d'équilibre, c'est à dire lorsque la matrice Σ présente des valeurs singulières très faibles, elle peut devenir singulière, c'est pourquoi l'algorithme que nous proposons est plus général car nous pourrions construire nos approximants même si le système descripteur initial n'est pas R-minimal [35], et la réduction d'ordre s'opérera par troncatures des valeurs singulières faibles correspondants aux états dont l'élimination n'affecte pas les propriétés du système descripteur initial. Initialement, le pencil $(\lambda E - A)$ est transformé sous la forme de GUPTRI (Generalized Upper Triangular) [29]

$$E = V \begin{bmatrix} E_{n_f} & E_u \\ 0 & E_{n_\infty} \end{bmatrix} U^T, \quad (4.3)$$

$$A = V \begin{bmatrix} A_{n_f} & A_u \\ 0 & A_{n_\infty} \end{bmatrix} U^T, \quad (4.4)$$

où E_{n_f} est triangulaire supérieure, nonsingulière et E_{n_∞} est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale, A_{n_f} est quasi-triangulaire supérieure et A_{n_∞} est triangulaire supérieure, nonsingulière. On a aussi

$$W_\infty = V \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_\infty} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$T_\infty = U \begin{bmatrix} Y \\ I_{n_\infty} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

où Y satisfait les équations de *Sylvester* généralisées (4.7) et (4.8).

L'algorithme que nous suggérons permet de construire deux types de modèles réduits. Le premier approximant $M1$, donné par la réalisation $[E_{r1}, A_{r1}, B_{r1}, C_{r1}, D_{r1}]$, résulte de la réduction d'ordre uniquement de la partie propre du système descripteur, la partie impropre étant copiée intégralement dans le modèle réduit.

Le modèle $M2$, construit par la seconde approche, donné par $[E_{r2}, A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}]$, résultera de la réduction d'ordre simultanée des parties propre et impropre du descripteur initial [35].

Algorithme.

Les modèles d'ordre réduits $M1$ et $M2$ sont calculés selon la procédure suivante

Entrées : Une réalisation $[E, A, B, C, D]$ du système descripteur (4.1) tels-que le pencil $(\lambda E - A)$ soit régulier et c-stable.

Étape 1- Transformer E et A sous la forme de GUPTRI (4.3) et (4.4).

Étape 2- Calculer les solutions Y et Z des équations de *Sylvester* généralisées [29]

$$E_{n_f} Y - Z E_{n_\infty} = -E_u, \quad (4.7)$$

$$A_{n_f} Y - Z A_{n_\infty} = -A_u. \quad (4.8)$$

Etape 3- Conformément à la partition de V et U donnée par (4.3) et (4.4), former et partitionner les matrices

$$V^T B = \begin{bmatrix} B_{n_f} \\ B_{n_\infty} \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$CU = \begin{bmatrix} C_{n_f} & C_{n_\infty} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Etape 4- Calculer les facteurs de *Cholesky* R_f et L_f solutions de $X_c = R_f R_f^T$ et $X_o = L_f^T L_f$ des équations généralisées de *Lyapunov*

$$E_{n_f} X_c A_{n_f}^T + A_{n_f} X_c E_{n_f}^T = -(B_{n_f} - Z B_{n_\infty})(B_{n_f} - Z B_{n_\infty})^T, \quad (4.11)$$

$$E_{n_f}^T X_o A_{n_f} + A_{n_f}^T X_o E_{n_f} = -C_{n_f}^T C_{n_f}. \quad (4.12)$$

Etape 5- Test : Si $\text{rang}(R_f) < n_f$ ($\text{rang}(L_f) < n_f$), calculer la matrice R_1 (L_1) issue de la décomposition QR

$$R_f^T = Q_R \begin{bmatrix} R_1^T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

$$L_f = Q_L \begin{bmatrix} L_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Sinon $R_1 = R_f$ ($L_1 = L_f$).

Etape 6- Former les matrices

$$R = U \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & -L_1 Z \end{bmatrix} V^T. \quad (4.16)$$

Étape 7- Calculer les matrices

$$W_\infty = V \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_\infty} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

$$T_\infty = U \begin{bmatrix} Y \\ I_{n_\infty} \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Étape 8- Décomposition en valeurs singulières de la matrice LER , puis partitionner

$$LER = \begin{bmatrix} U_1 & U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & V_0 \end{bmatrix}^T, \quad (4.19)$$

où $\Sigma_1 = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{l_f}]$ étant la partie à préserver correspondant aux l_f plus grandes valeurs singulières propres du système.

Étape 9- Construire les matrices

$$W_l = \begin{bmatrix} L^T U_1 \Sigma_1^{-\frac{1}{2}}, & W_\infty \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$T_l = \begin{bmatrix} R V_1 \Sigma_1^{-\frac{1}{2}}, & T_\infty \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Étape 10- Réduire la partie impropre $[E_{n_\infty}, A_{n_\infty}, B_{n_\infty}, C_{n_\infty}]$, ou d'une manière équivalente : réduire le système régulier discret dans le temps par la méthode de *Schur* [9, 16], et selon la décomposition GUPTRI, A_{n_∞} est nonsingulière,

$$\begin{aligned} A_{n_\infty} z(k+1) &= E_{n_\infty} z(k) + B_{n_\infty} \nu(k) \\ \psi(k) &= C_{n_\infty} z(k). \end{aligned} \quad (4.22)$$

La méthode de *Schur* des systèmes discrets [9,16] donne un modèle d'ordre réduit $[E_{\infty r}, A_{\infty r}, B_{\infty r}, C_{\infty r}]$ du modèle impropre, et les valeurs singulières du

système (4.22) sont appelées les valeurs singulières impropres du système (4.1), et sont données par : $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{l_\infty}, 0, \dots, 0]$.

Remarque : Si Φ présente des valeurs singulières de *Hankel* impropres répétitives, le sous-système correspondant doit être soit éliminé soit inclus comme un tout dans l'approximant d'ordre réduit ; par contre les valeurs singulières nulles sont à éliminer.

Sorties : Les deux systèmes d'ordre réduits $M1$ and $M2$ sont donnés par

$$[E_{r1}, A_{r1}, B_{r1}, C_{r1}, D_{r1}] = [W_l^T E T_l, W_l^T A T_l, W_l^T B, C T_l, D], \quad (4.23)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} sE_{r2} - A_{r2} & B_{r2} \\ \hline C_{r2} & D_{r2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} sE_{fr} - A_{fr} & B_{fr} \\ \hline C_{fr} & C_{\infty r} \end{array} \middle| \begin{array}{c} B_{\infty r} \\ D \end{array} \right], \quad (4.24)$$

où les matrices $E_{fr}, A_{fr} \in R^{l_f \times l_f}$, $B_{fr} \in R^{l_f \times m}$, $C_{fr} \in R^{p \times l_f}$, sont obtenues par troncature des l_f lignes et colonnes de A_{r1} , l_f lignes de B_{r1} , et des l_f colonnes de C_{r1} , respectivement. Les matrices $E_{\infty r} = I_{l_\infty}$, $A_{\infty r} \in R^{l_\infty \times l_\infty}$, $B_{\infty r} \in R^{l_\infty \times m}$, $C_{\infty r} \in R^{p \times l_\infty}$, sont des matrices du système d'ordre réduit l_∞ résultant de la réduction d'ordre de la partie impropre de l'(Etape 10). On note que le système $M1$ est d'ordre $(l_f + n_\infty)$, alors que l'ordre de $M2$ est plus petit et est égal à $(l_f + l_\infty)$.

Remarques

- Les équations (4.3, 4.4, 4.9, 4.10) découplées selon GUPTRI, du système descripteur (4.1) sont équivalentes à la décomposition additive de la fonction de transfert en $H(s) = H_p(s) + H_i(s)$, où $H_p(s)$ est la partie propre, et $H_i(s)$ est la partie polynômiale de $H(s)$. La fonction de transfert du

modèle d'ordre réduit $M1$ est aussi donné par $H_r(s) = H_{rp}(s) + H_i(s)$; dans ce cas, la fonction de transfert d'erreur $\Delta H(s) = H(s) - H_r(s) = H_p(s) - H_{rp}(s)$ est indépendante de la partie polynômiale, et sa norme H_∞ vérifie la borne supérieure suivante [6]

$$\|H(s) - H_r(s)\|_{H_\infty} = \sup_{\omega \in R} \|H(j\omega) - H_r(j\omega)\|_2 \leq 2 \sum_{i=l_f+1}^{n_f} \sigma_i, \quad (4.25)$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme spectrale.

- Par ailleurs, nous soulignons un important résultat : si l'on n'effectue aucune troncature dans (Etape 10), c'est-à-dire, $l_\infty = n_\infty$, l'approximant $M2$ est toujours régulier.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques importants résultats relatifs au calcul des valeurs singulières propres et les valeurs singulières impropres. Ces paramètres sont étroitement liés au choix de l'ordre de l'approximant réduit. Pour éviter le problème de mal conditionnement de l'équilibre (dont l'algorithme est présenté dans Annexe D), nous avons présenté deux techniques de réduction d'ordre basée sur l'approche *SVD* de systèmes descripteur continu, *c*-stable. Nous avons considéré l'algorithme donné par Stykel [22], et nous l'avons étendu à la réduction d'ordre des deux parties propre et impropre du système descripteur [35]. Pour concevoir le nouvel algorithme de réduction d'ordre (qui concerne les parties propre et impropre) nous nous sommes basés sur la technique de *Schur* régulière, discrète dans le calcul de modèles d'ordre réduit concer-

nant la partie impropre du système descripteur initial. L'algorithme permet de construire deux approximants différents : dans le premier, $M1$, juste la partie propre (correspondant aux valeurs propres finies du pencil $(\lambda E - A)$) est sujet à une réduction d'ordre, la partie impropre (correspondant aux valeurs propres infinies du pencil $(\lambda E - A)$) est copiée telle quelle dans $M1$. La seconde, notre propre approche, présente un résultat intéressant car le modèle d'ordre réduit $M2$ est toujours décrit dans l'espace d'état par une réalisation régulière. Pour les deux approximants, la c -stabilité est toujours garantie et la distance entre le système original et ses deux approximants est quantifiable.

Chapitre 5

Simulations

5.1 Introduction

Dans cette section, nous traiterons diverses applications sur la réduction d'ordre de systèmes descripteurs continus *SISO* et *MIMO*. Pour chaque exemple, on part de la réalisation d'état généralisée (E, A, B, C, D, n) d'ordre n du descripteur initial et en appliquant l'algorithme donné dans le chapitre 4, les modèles $M1$ et $M2$ d'ordre réduits $r \ll n$ sont calculés. Pour mieux apprécier la qualité des approximants, nous tracerons les réponses fréquentielles (spectres d'amplitude et spectres de phase) qui seront confortées par les spectres des valeurs singulières. Afin d'avoir une idée claire sur le choix de l_f , ordre de réduction du sous-système propre et l_∞ , ordre de réduction du sous-système impropre, nous traçons la répartition des valeurs singulières propres et impropres en fonction de l'ordre. Pour le modèle $M1$, la borne supérieure sera calculée et la norme de

l'erreur de *Hankel* est vérifiée. Notons que le package *Slicot* [5] a été utilisé pour la résolution des équations généralisées de *Sylvester* et de *Lyapunov*.

5.2 Exemple 1

Considérons un système descripteur d'ordre 20, [36], où $n_f = 16$ and $n_\infty = 4$. Les valeurs singulières propres sont : $\Sigma = [4.7036e-1, 2.2789e-2, 2.3584e-3, 2.8453e-4, 8.8205e-5, 8.3374e-6, 6.1547e-7, 8.5106e-8, 2.7199e-8, 5.4447e-9, 2.9487e-10, 1.1302e-10, 1.6944e-11, 1.8849e-12, 6.5155e-14, 3.8902e-15]$, et les valeurs singulières impropres sont $\Phi = [1.1172e-1, 7.7527e-3, 6.1473e-10, 0e+0]$.

En fixant d'après les figures 5.4 et 5.5 les ordres réduits $l_f = 1$ et $l_\infty = 3$, nous calculons les deux approximants $M1$ et $M2$ dont les réponses sont données ci-dessous, voir Tab 5.1 et les fig. (5.2, 5.3, 5.4, 5.5).

TAB. 5.1 – Estimation de l'erreur et les bornes supérieures des modèles d'ordre réduits $M1$, $l_f = 1$, $n_f = 16$, pour l'exemple 1

E/S	$\sup_{\omega \in R} \ H(j\omega) - H_{M1}(j\omega)\ _2$	$2 \sum_{i=l_f+1}^{n_f} \sigma_i$
1/1	2.4033695e-2	5.1060054e-2
1/2	2.1975731e-2	5.1060054e-2
2/1	2.4033695e-2	5.1060054e-2
2/2	2.1053715e-2	5.1060054e-2

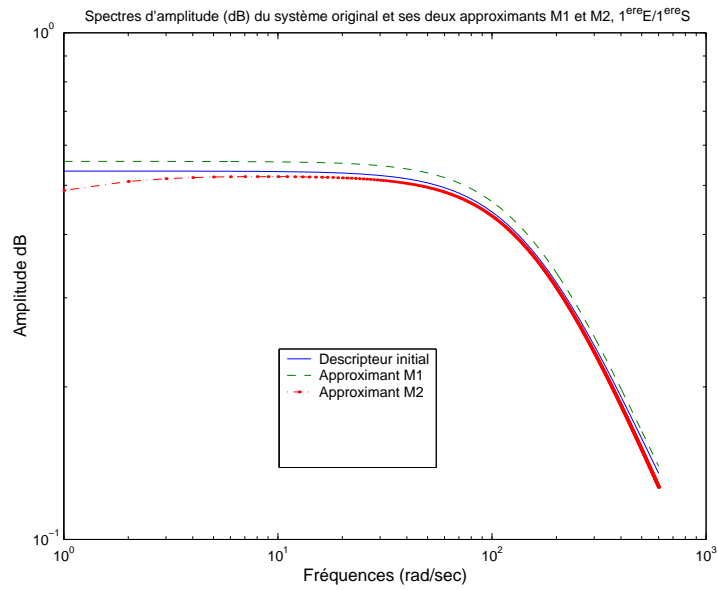


FIG. 5.1 – Spectres d’amplitude (dB) des systèmes original et réduits

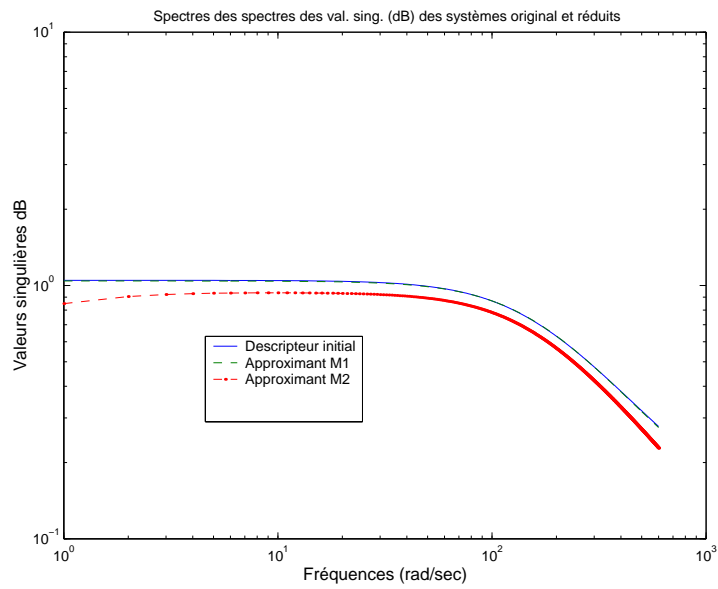


FIG. 5.2 – Réponses des valeurs singulières en (dB) des systèmes original et réduits

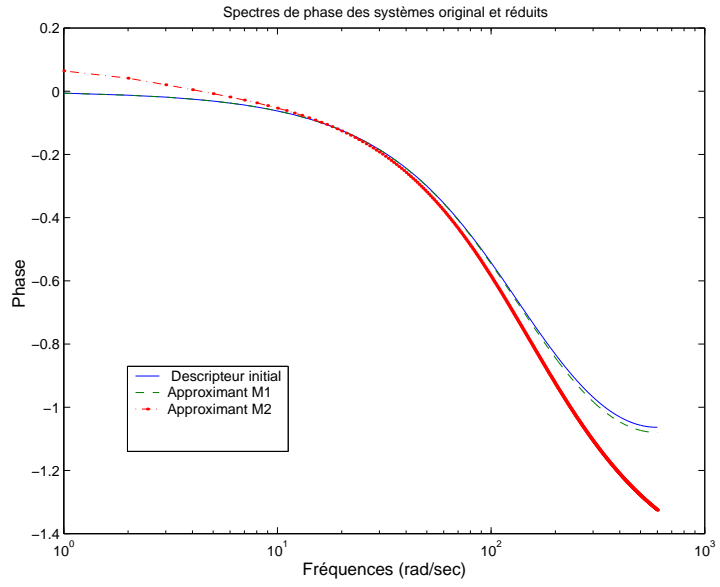


FIG. 5.3 – Spectres de phase des systèmes original et réduits

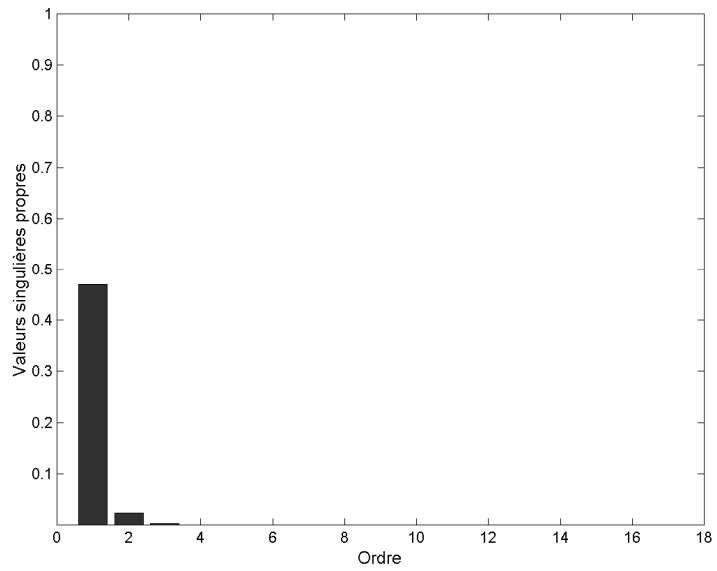


FIG. 5.4 – Distribution des valeurs singulières propres

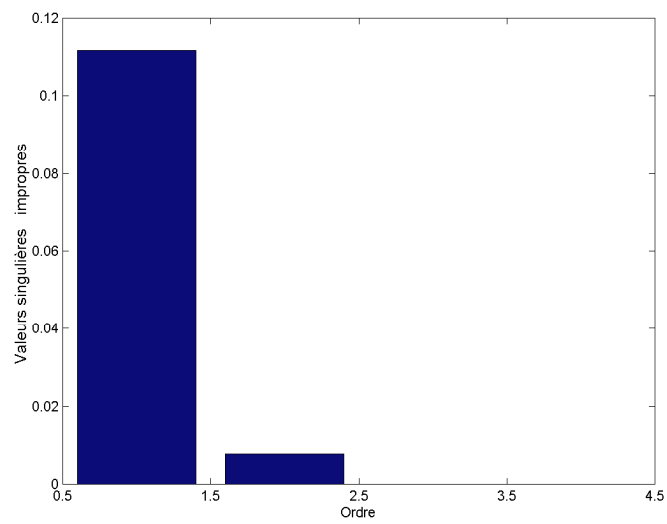


FIG. 5.5 – Distribution des valeurs singulières impropres

5.3 Exemple 2

Considérons un système descripteur MIMO (2E/3S), d'ordre 120 où $n_f = 100$ et $n_\infty = 20$. L'approximant $M1$ dont l'ordre est $r = 21$, est singulier, tandis-que $M2$ dont l'ordre est $r = 2$, est régulier. Les deux modèles d'ordre réduit sont stables. Le modèle $M1$ est représenté par la réalisation $[E_{r1}, A_{r1}, B_{r1}, C_{r1}, D]$ donnée ci- dessous

$$E_{r1} = \text{diag} \left(\begin{array}{c} -0.9728 \\ \text{zeros}(20, 1) \end{array} \right), A_{r1} = 10^2 \times \text{diag} \left(\begin{array}{c} 6.8019 \\ -7.4952 \\ 7.4919 \\ 7.4919 \\ -7.4919 \\ 7.4919 \\ 7.4919 \\ 7.4919 \\ -7.4919 \\ 7.4919 \\ -7.4919 \\ -7.4919 \\ 7.4919 \\ -7.4919 \\ 7.4919 \\ 7.4919 \\ -7.4919 \\ -7.4918 \\ -7.4918 \\ -7.4918 \\ 7.4918 \end{array} \right),$$

$$B_{r1} = \begin{bmatrix} 5.1741 + 0.0065i & 5.1684 - 0.0116i \\ -2.3529 & -2.2568 \\ -0.0157 & -0.3809 \\ -0.0535 & 0.1323 \\ -0.1447 & -0.1645 \\ -0.0727 & 0.1688 \\ 0.1423 & -0.3308 \\ -0.4818 & -0.1144 \\ 0.0983 & -0.1387 \\ 0.2423 & -0.1820 \\ 0.1104 & -0.3887 \\ -0.1757 & 0.2145 \\ -0.5596 & 0.2444 \\ 0.2904 & -0.0023 \\ 0.3686 & -0.3042 \\ -0.0581 & -0.6274 \\ -0.1413 & -0.3757 \\ 0.6125 & 0.4040 \\ -0.2563 & -0.0428 \\ 0.1960 & -0.1160 \\ 0.1928 & -0.1762 \end{bmatrix},$$

$$C_{rf1} = \begin{bmatrix} -5.4669 - 0.0010i & -2.1227 & 0.2429 & -0.0401 & 0.3132 & -0.0046 & 0.0912 & -0.1006 \\ -5.0687 - 0.0014i & -2.5372 & 0.4990 & 0.0237 & -0.2544 & 0.3224 & 0.3785 & -0.4103 \\ -5.1871 - 0.0009i & -2.0696 & -0.1419 & -0.4377 & -0.3414 & 0.1191 & -0.1134 & 0.0740 \end{bmatrix},$$

$$C_{rf2} = \begin{bmatrix} -0.2746 & 0.2823 & 0.3199 & -0.6008 & 0.0656 & -0.4923 & -0.1050 & 0.0835 \\ 0.0014 & -0.1894 & -0.0537 & 0.4382 & 0.1431 & 0.4394 & -0.2528 & -0.2905 \\ -0.1918 & -0.1188 & 0.1348 & 0.2871 & 0.1417 & 0.1997 & 0.5422 & 0.1741 \end{bmatrix},$$

$$C_{rf3} = \begin{bmatrix} 0.0637 & -0.2116 & -0.0317 & 0.4958 & 0.1409 \\ -0.1317 & -0.1471 & -0.0638 & 0.2380 & 0.2938 \\ -0.2080 & -0.3478 & 0.0238 & -0.7221 & 0.1524 \end{bmatrix},$$

Le modèle $M2$ est régulier et est représenté par la réalisation $[E_{r2}, A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D]$

telles-que :

$$E_{r2} = \begin{bmatrix} -0.9728 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_{r2} = 10^2 \times \begin{bmatrix} 6.8019 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$B_{r2} = \begin{bmatrix} 5.1741 + 0.0065i & 5.1684 - 0.0116i \\ 0.0062 & 0.0062 \end{bmatrix}, C_{r2} = \begin{bmatrix} -5.4669 - 0.0010i & 2.0120 \\ -5.0687 - 0.0014i & 2.5235 \\ -5.1871 - 0.0009i & 2.0395 \end{bmatrix},$$

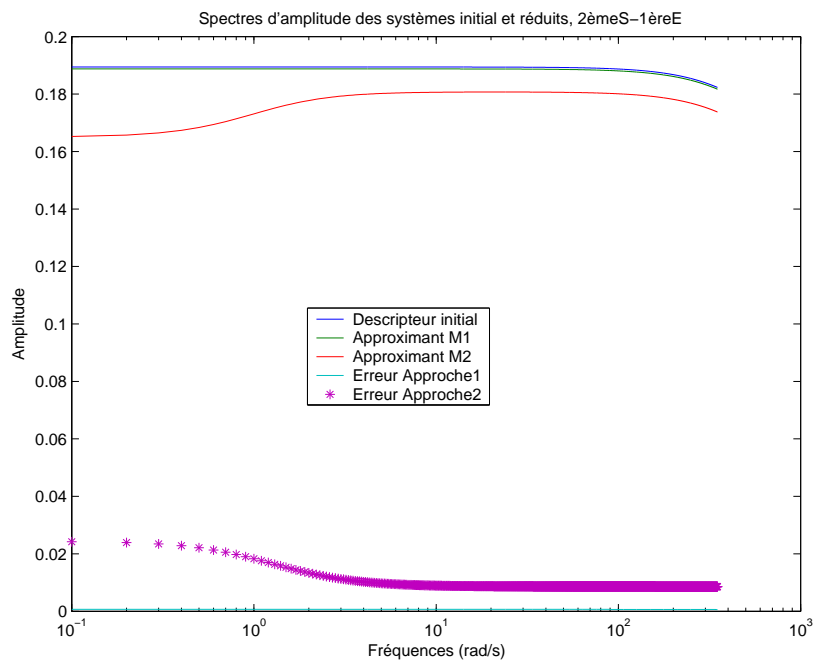
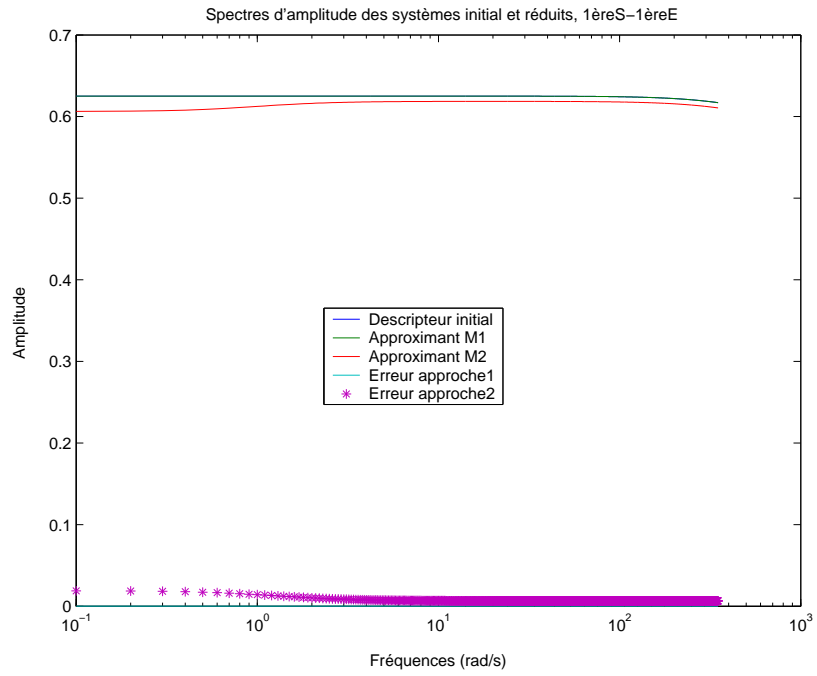
Ses pôles seront représentés par le vecteur $polM2$.

$$polM2 = 10^2 \times \begin{bmatrix} -6.9924 \\ -0.0100 \end{bmatrix},$$

L'approximant $M2$ est stable.

Les comportements des approximants seront représentées par les figures fig.

(5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14, 5.15, 5.16, 5.17).



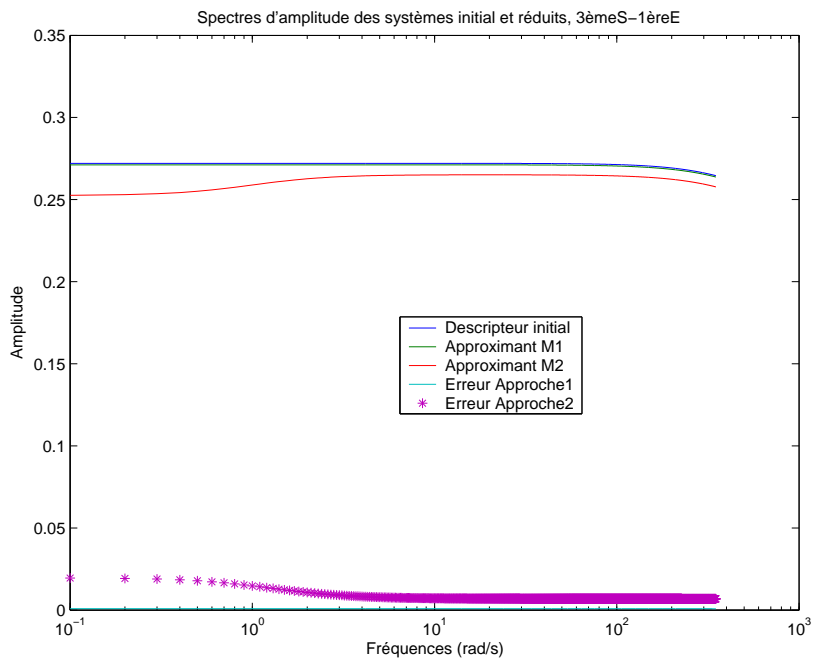
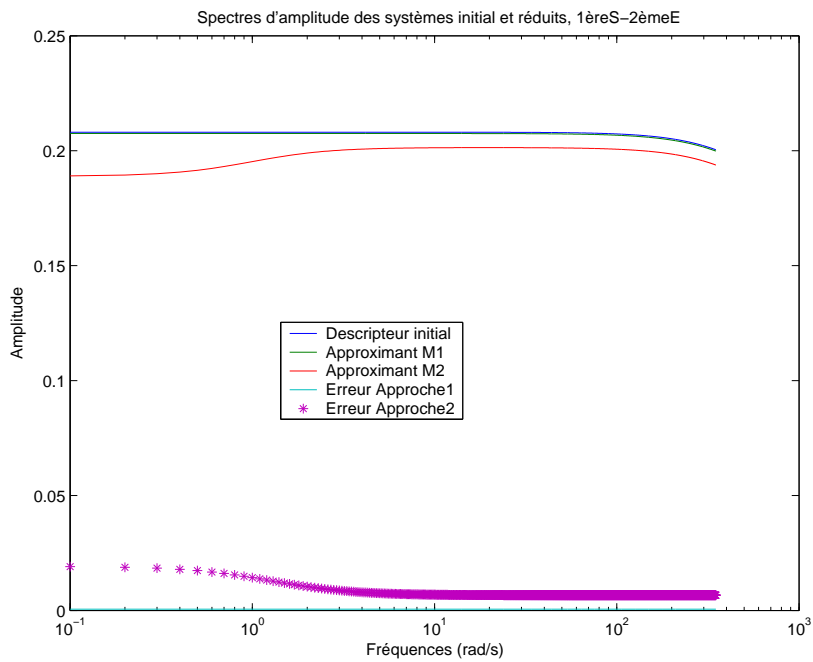


FIG. 5.6 – Spectres d'amplitude des systèmes original et réduits relatifs à la 1^{ère} entrée



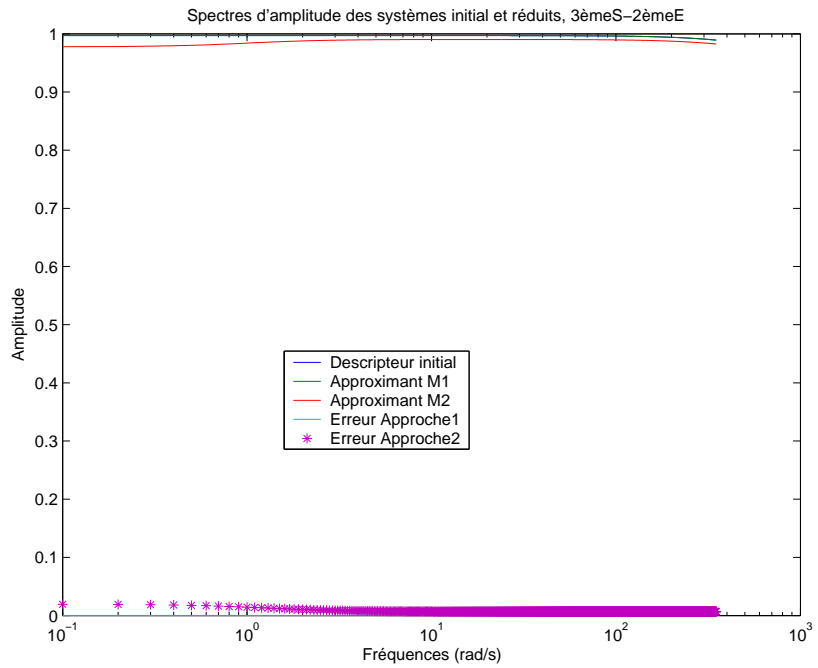
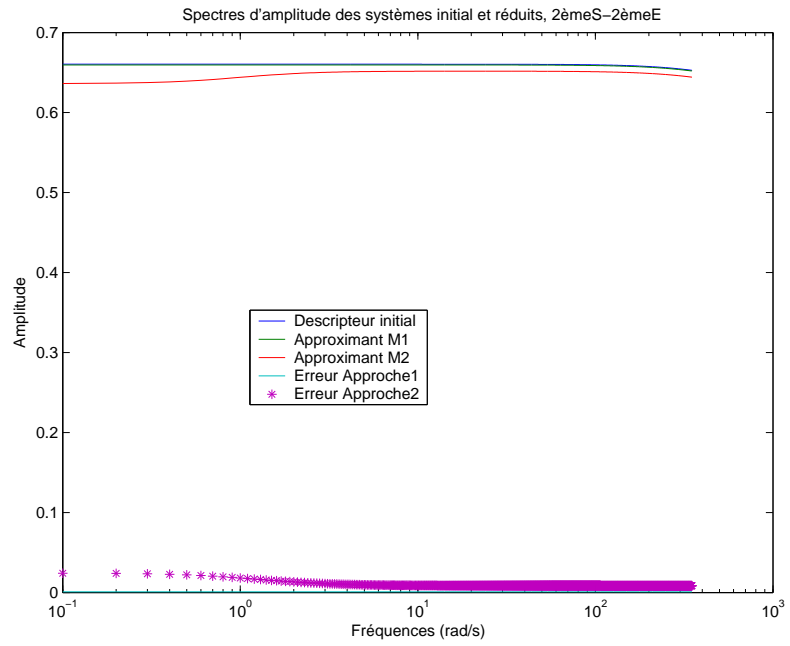
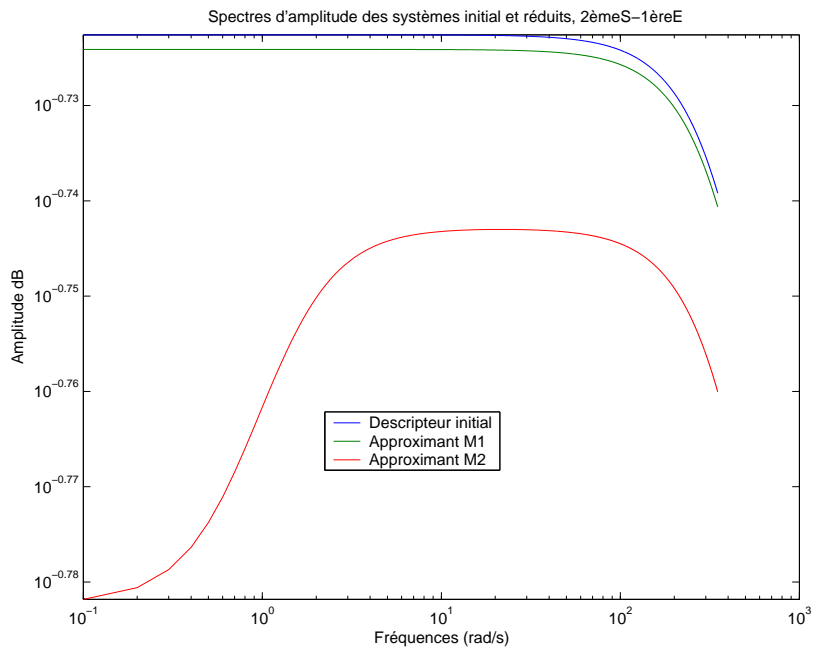
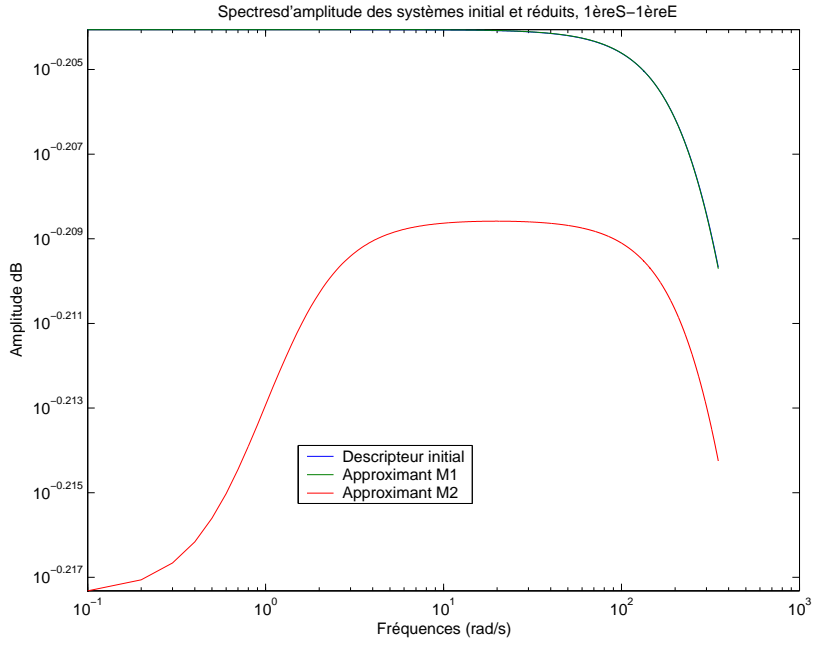


FIG. 5.7 – Spectres d'amplitude des systèmes original et réduits relatifs à la 2^{ème} entrée



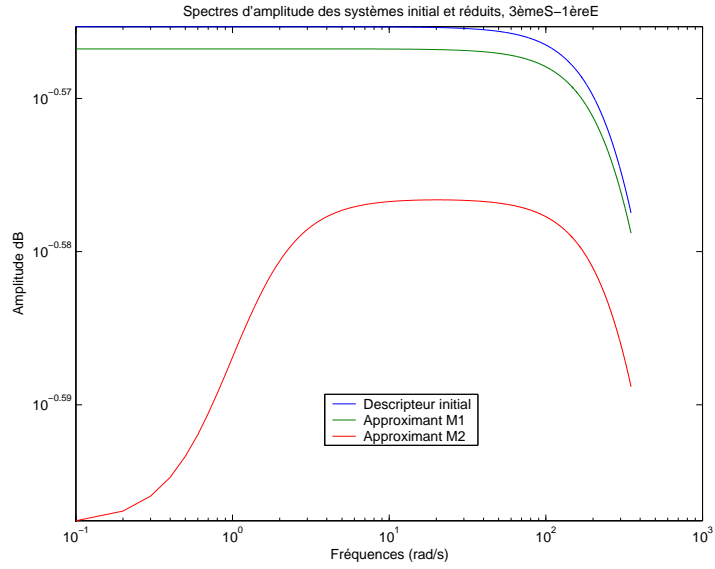
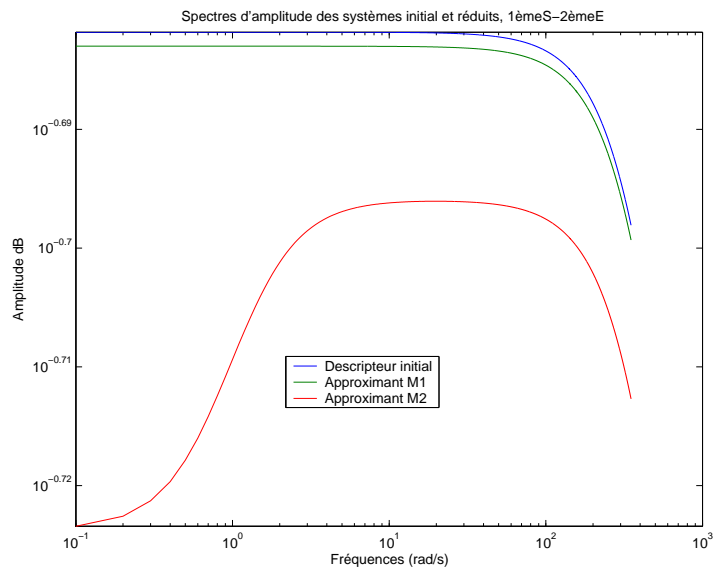


FIG. 5.8 – Spectres d’amplitude (dB) des systèmes original et réduits relatifs à la 1^{ère} entrée



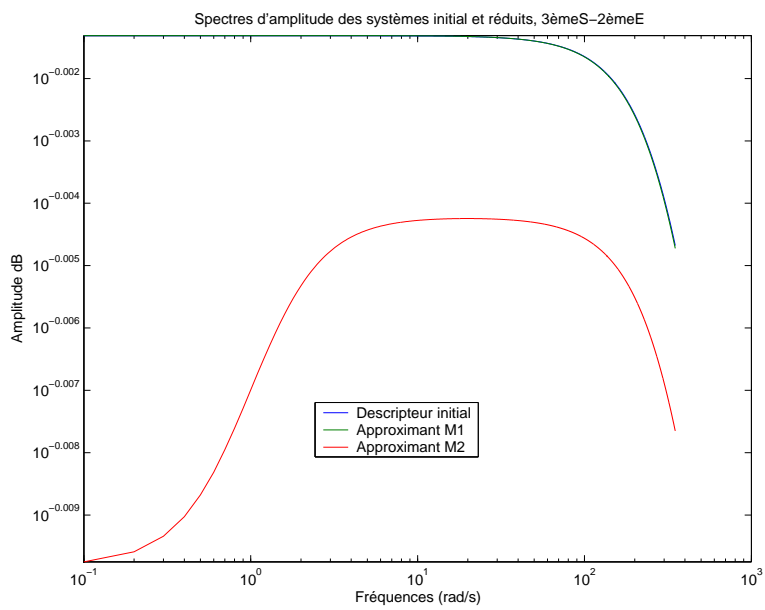
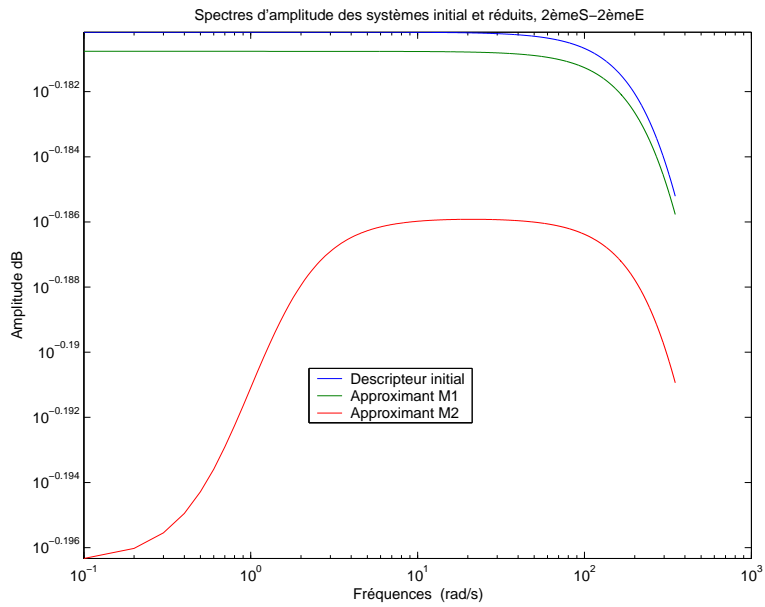
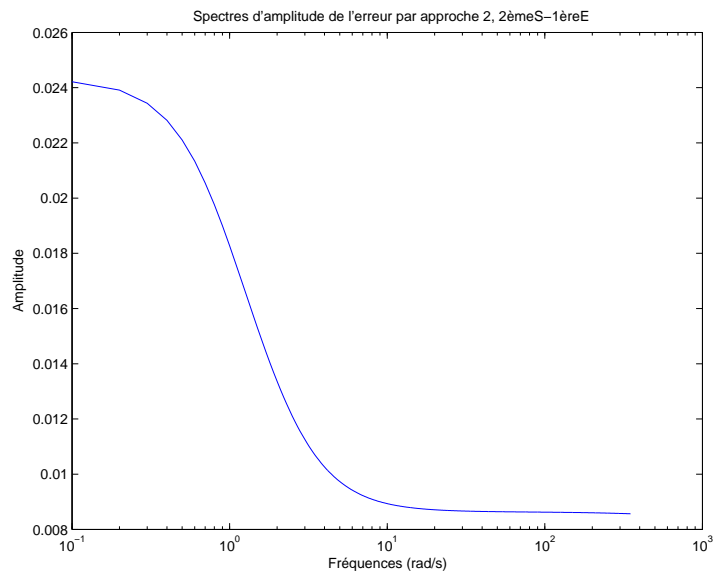
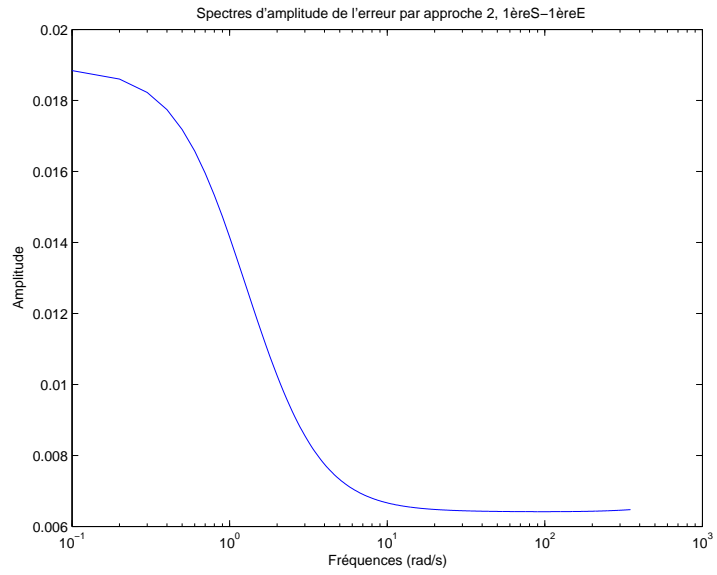


FIG. 5.9 – Spectres d’amplitude (dB) des systèmes original et réduits relatifs à la 2^{ème} entrée



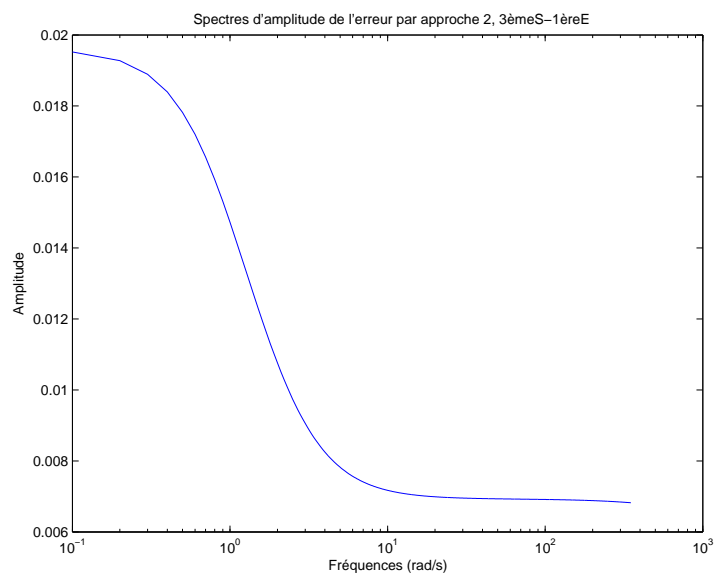
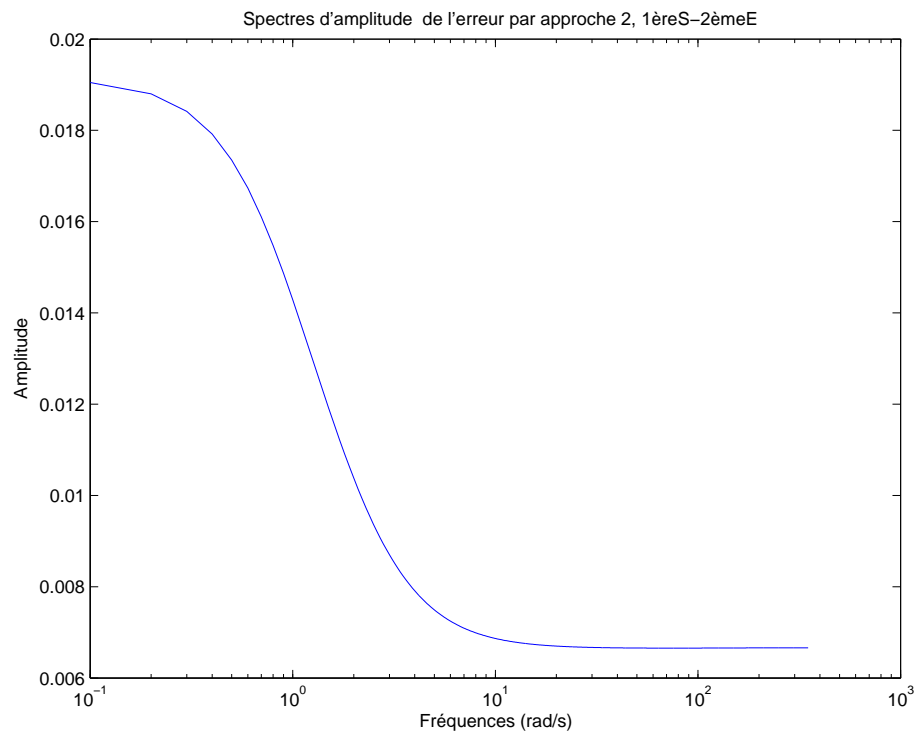


FIG. 5.10 – Spectres d'amplitude de l'erreur d'approximation par l'approche2, relatifs à la 1^{ère} entrée



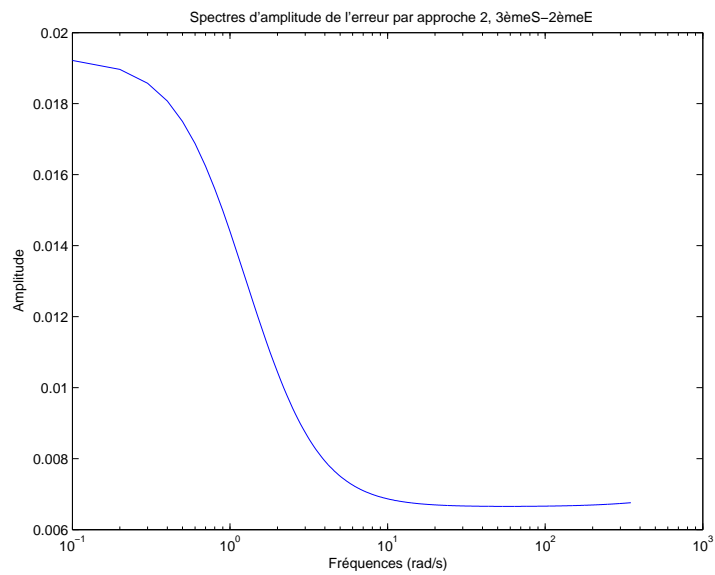
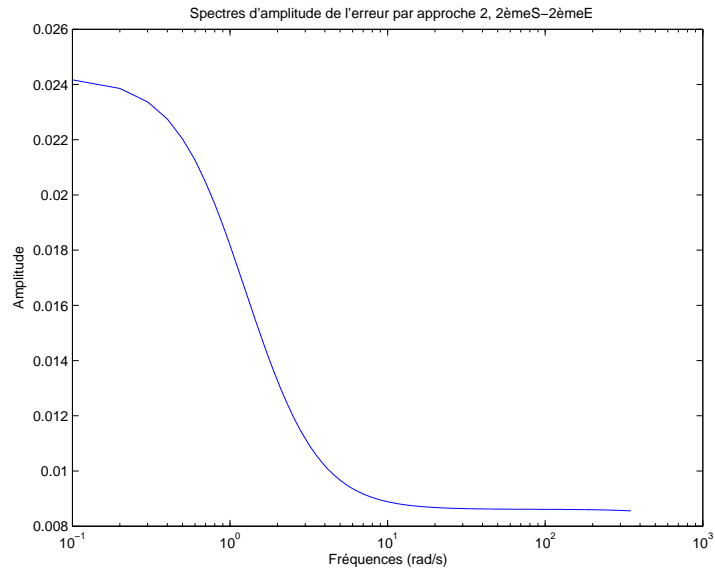
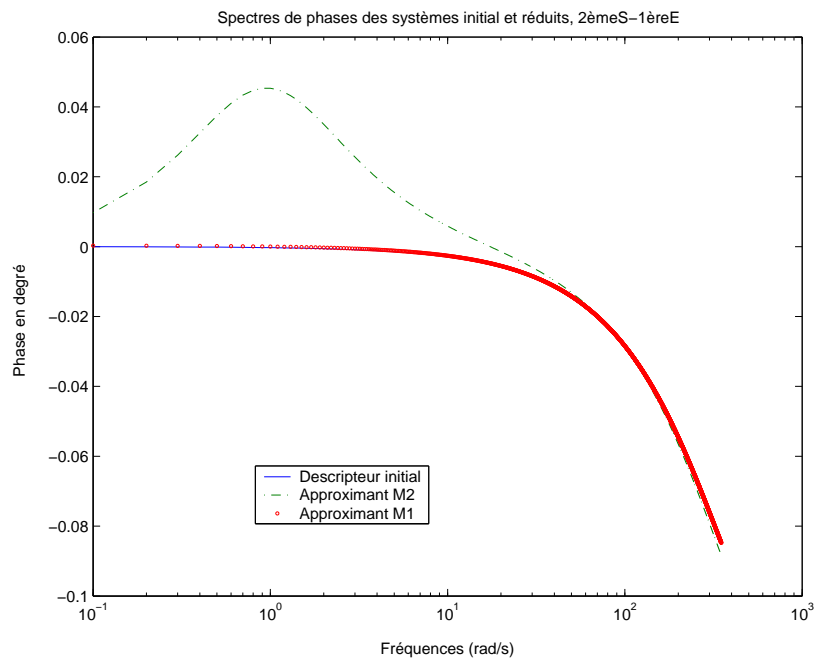
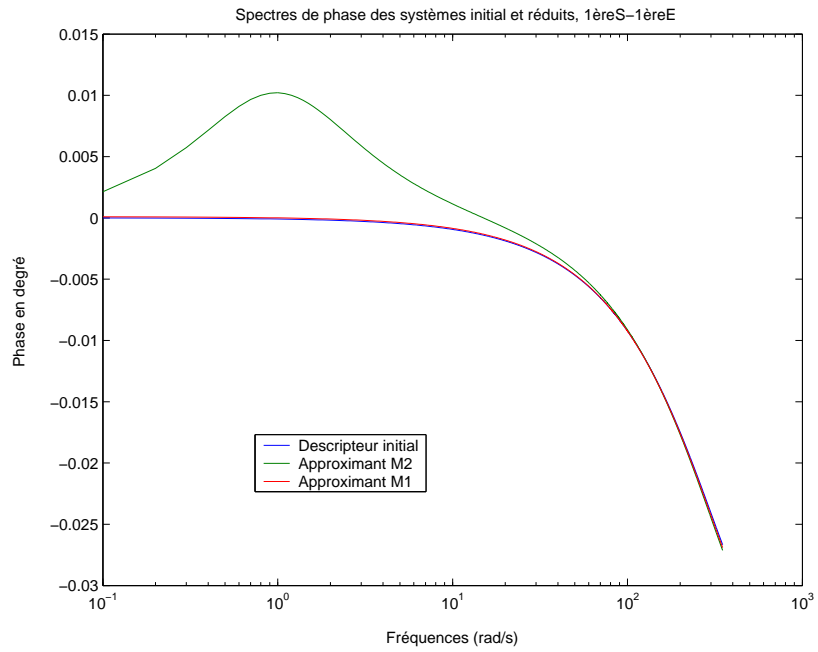


FIG. 5.11 – Spectres d'amplitude de l'erreur d'approximation par l'approche2, relatifs à la 2^{ème} entrée



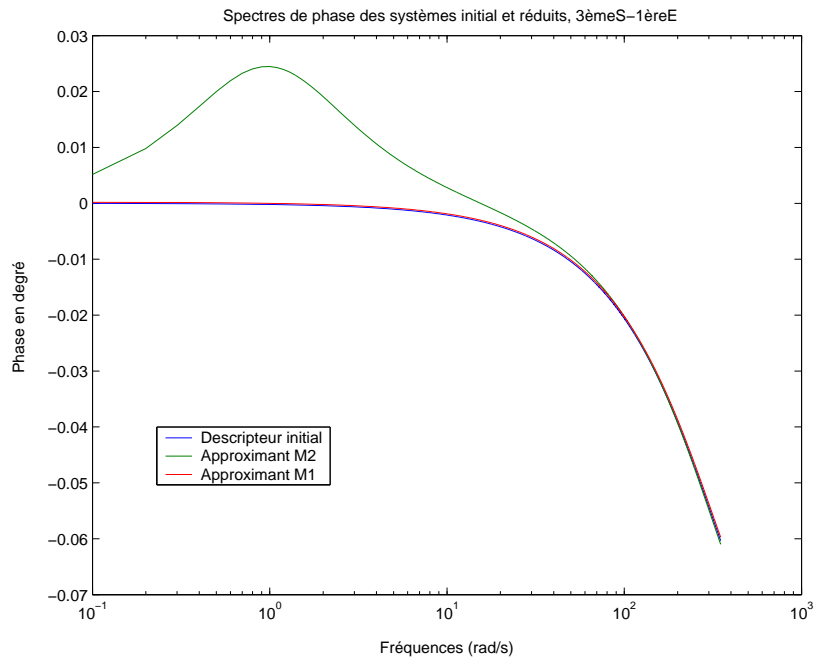
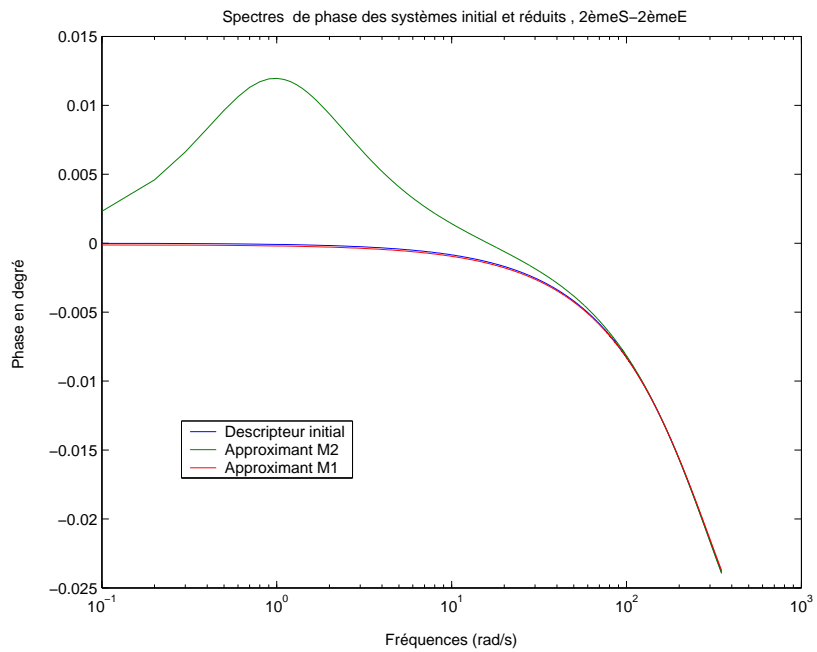
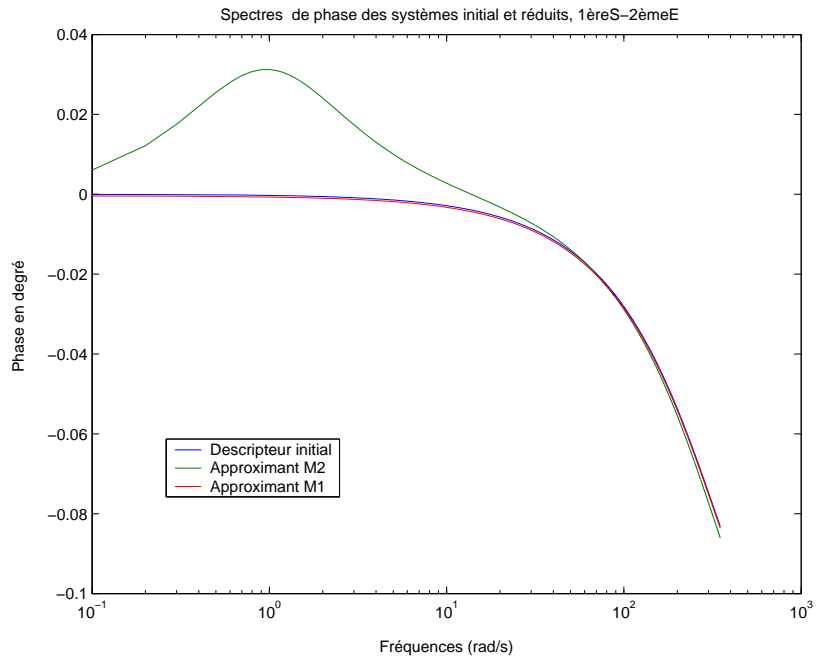


FIG. 5.12 – Spectres de phase des systèmes original et réduits relatifs à la 1^{ère} entrée



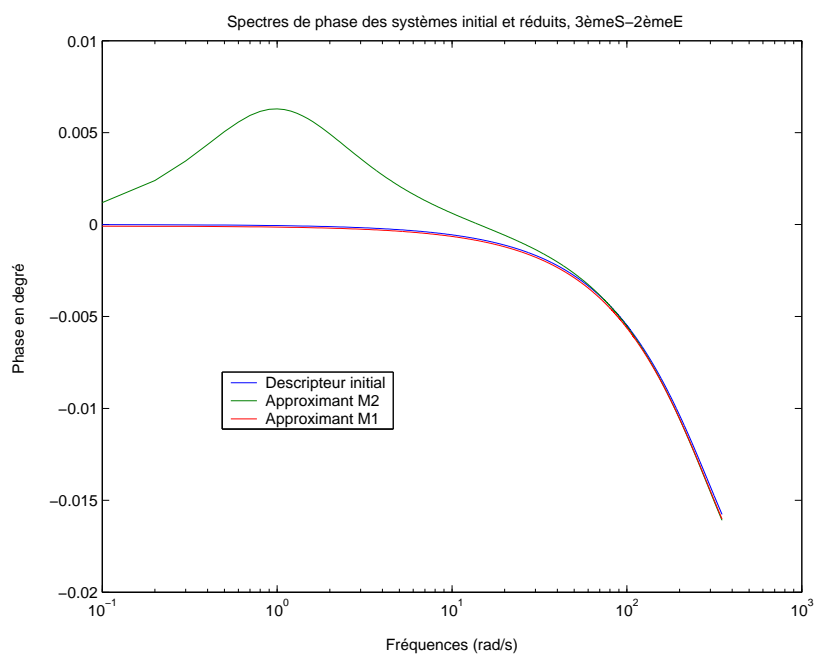


FIG. 5.13 – Spectres de phase des systèmes original et réduits relatifs à la 2^{ème} entrée

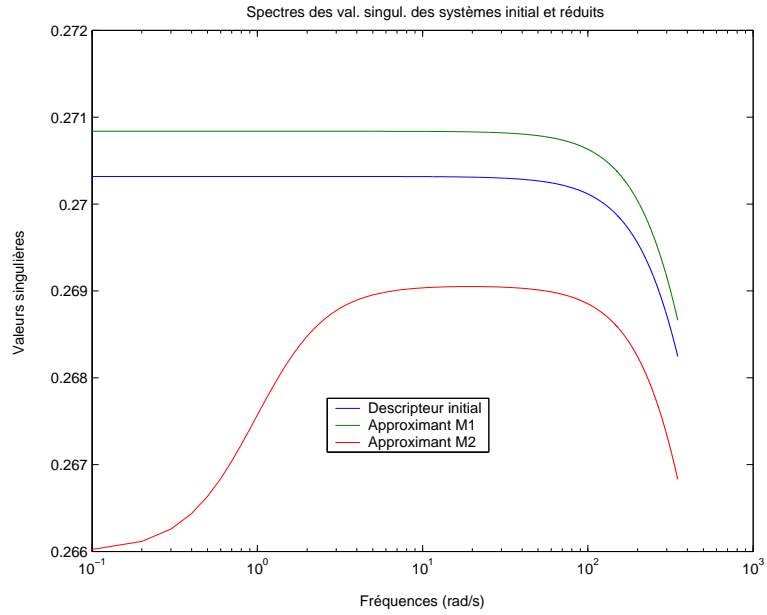


FIG. 5.14 – Réponses des valeurs singulières en (dB) des systèmes original et réduits



FIG. 5.15 – Distribution des valeurs singulières propres

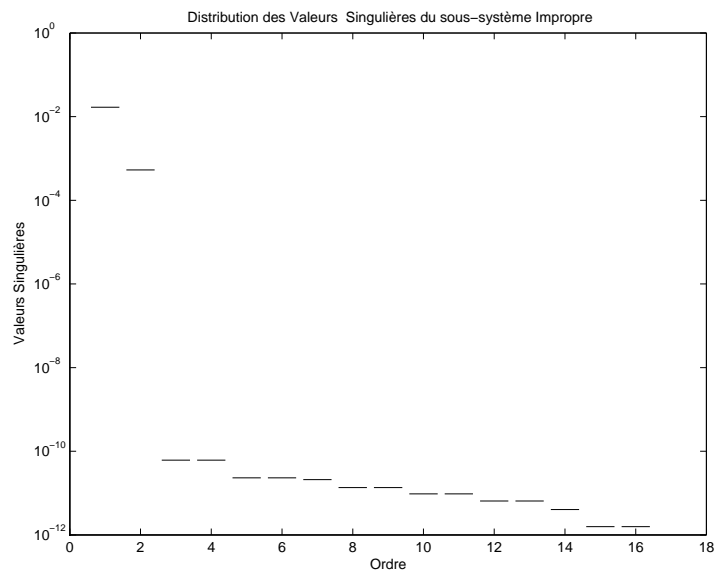


FIG. 5.16 – Distribution des valeurs singulières impropres

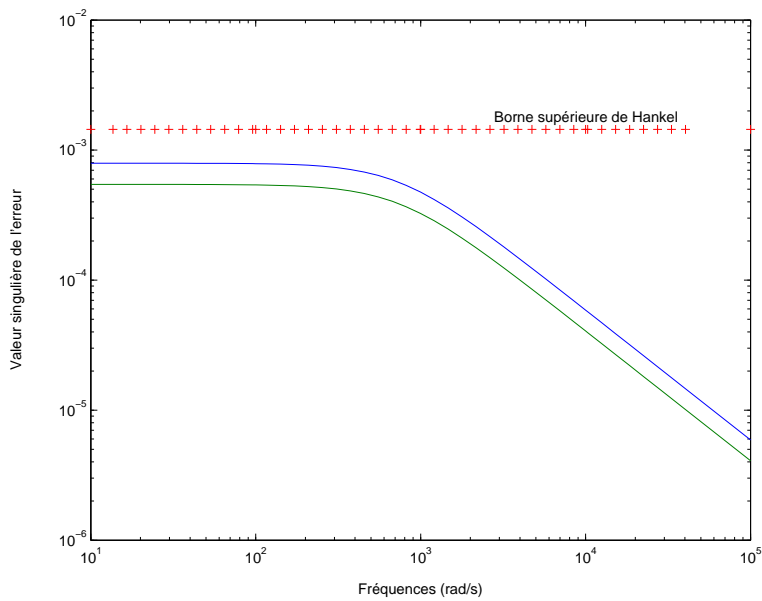


FIG. 5.17 – Valeur singulière de l'Erreur de l'approche1 comparée à la borne supérieure de Hankel

5.4 Exemple 3

Considérons un système descripteur *SISO* d'ordre 7 où $n_f = 5$ et $n_\infty = 2$,
donné par la réalisation $[E, A, B, C, D]$

$$E = \begin{bmatrix} 10.1306 & 0.2701 & 0.4104 & 0.7346 & 0.1034 & 0 & 0 \\ 0.2970 & 10.1259 & 0.5448 & 0.1493 & 0.2248 & 0 & 0 \\ 0.3060 & 0.9304 & 10.6043 & 0.0962 & 0.4278 & 0 & 0 \\ 0.5228 & 0.8545 & 0.7659 & 10.3296 & 0.6705 & 0 & 0 \\ 0.3562 & 0.0818 & 0.3512 & 0.4205 & 10.6712 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -73.8015 & 1.5622 & 2.7738 & 5.6520 & 1.2507 & 0 & 0 \\ 2.0340 & -74.5921 & 4.3411 & 1.8052 & 2.3102 & 0 & 0 \\ 2.5364 & 7.1592 & -71.3989 & 0.8006 & 3.5929 & 0 & 0 \\ 3.6724 & 6.2465 & 4.7759 & -72.7131 & 4.3354 & 0 & 0 \\ 2.8893 & 0.6461 & 2.4423 & 3.2402 & -70.1848 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.5117 \\ 0.8221 \\ 0.5373 \\ 0.9336 \\ 0.9774 \\ 0.7155 \\ 0.6718 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.8389 & 0.0881 & 0.6548 & 0.0936 & 0.7108 & 0.4088 & 0.8565 \end{bmatrix},$$

$$D = 0.6560.$$

L'approximant $M1$ dont l'ordre est $r = 4$, est représenté par $[E_{r1}, A_{r1}, B_{r1}, C_{r1}, D]$

où :

$$E_{r1} = \begin{bmatrix} 9.1099 & -2.8779 & 0 & 0 \\ 7.5337 & 1.0744 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{r1} = \begin{bmatrix} -43.8371 & 18.0989 & 0 & 0 \\ -38.9178 & -9.0271 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix},$$

$$B_{r1} = \begin{bmatrix} -1.2978 \\ -1.1126 \\ 0.7155 \\ 0.6718 \end{bmatrix},$$

$$C_{r1} = \begin{bmatrix} -0.9430 & 0.3435 & 0.4088 & 0.8565 \end{bmatrix}.$$

Les pôles du modèle $M1$ sont donnés par

$$polM1 = \begin{bmatrix} -4.9745 \\ -7.0275 \\ -\infty \\ -\infty \end{bmatrix}.$$

Quant au modèle $M2$ d'ordre $r = 3$, il est régulier, stable, et est représenté par la réalisation $[E_{r2}, A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D]$:

$$E_{r2} = \begin{bmatrix} 9.1099 & -2.8779 & 0 \\ 7.5337 & 1.0744 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_{r2} = \begin{bmatrix} -43.8371 & 18.0989 & 0 \\ -38.9178 & -9.0271 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{r2} = \begin{bmatrix} -1.2978 \\ -1.1126 \\ 0.2707 \end{bmatrix},$$

$$C_{r2} = [-0.9430, 0.3435, 0.9161].$$

Les pôles du modèle $M2$ sont

$$polM2 = \begin{bmatrix} -4.9745 \\ -7.0275 \\ -1 \end{bmatrix},$$

Les réponses de ces deux modèles seront donnés par les figures fig. (5.18, 5.19, 5.20, 5.21, 5.22, 5.23, 5.24, 5.25, 5.26, 5.27).

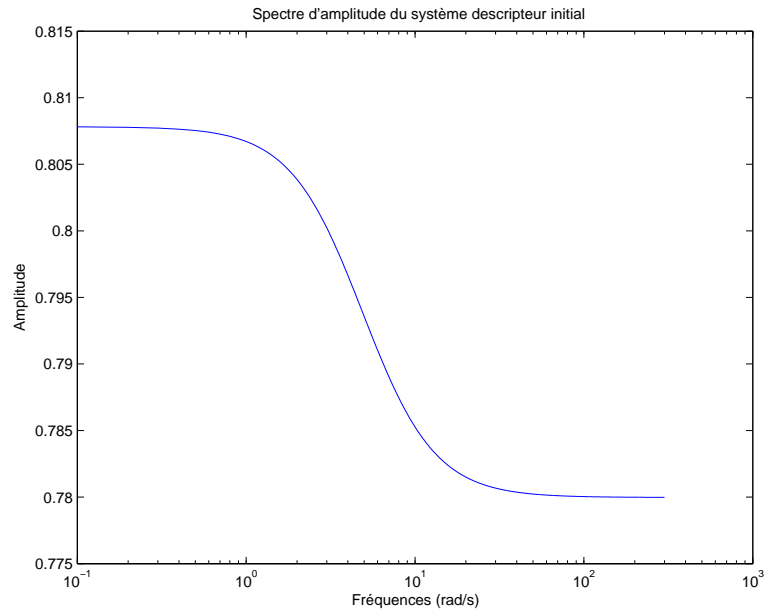


FIG. 5.18 – Spectre d'amplitude du système original

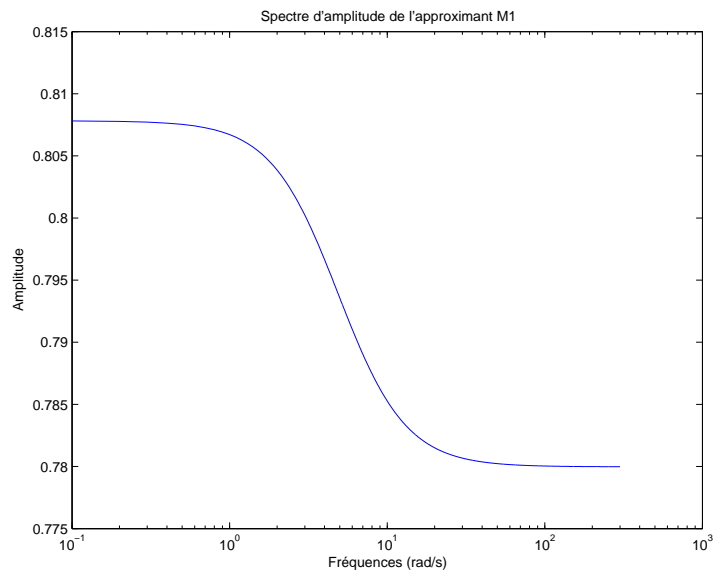


FIG. 5.19 – Spectre d'amplitude de l'approximant M1

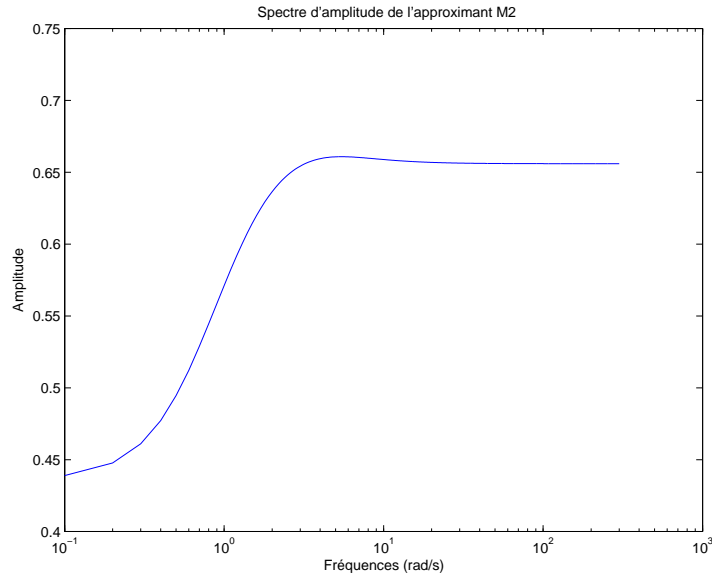


FIG. 5.20 – Spectre d'amplitude de l'approximant M2

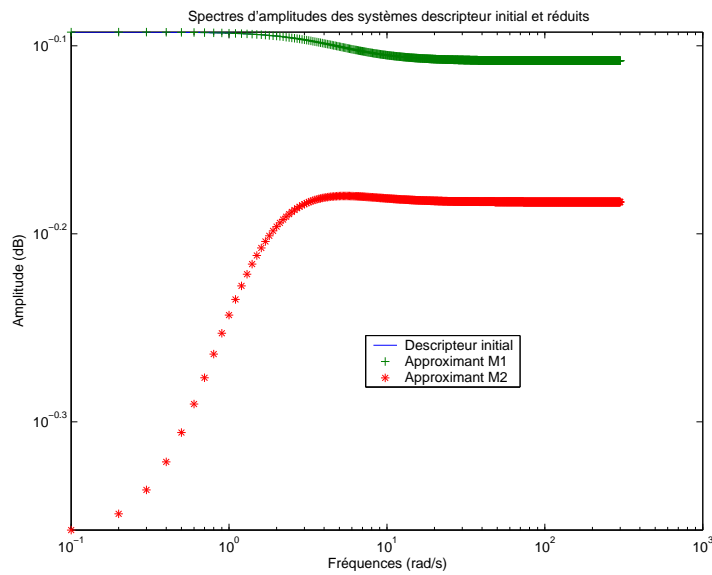


FIG. 5.21 – Spectres d'amplitude (dB) des systèmes original et réduits

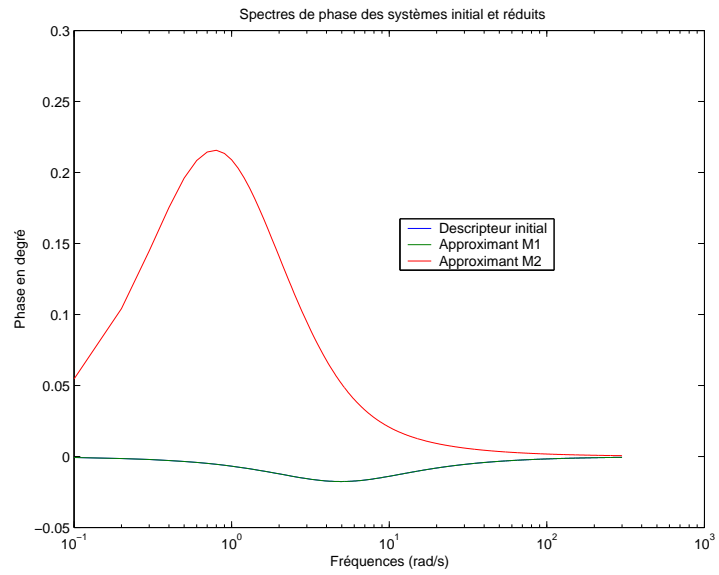


FIG. 5.22 – Spectres de phase des systèmes original et réduits

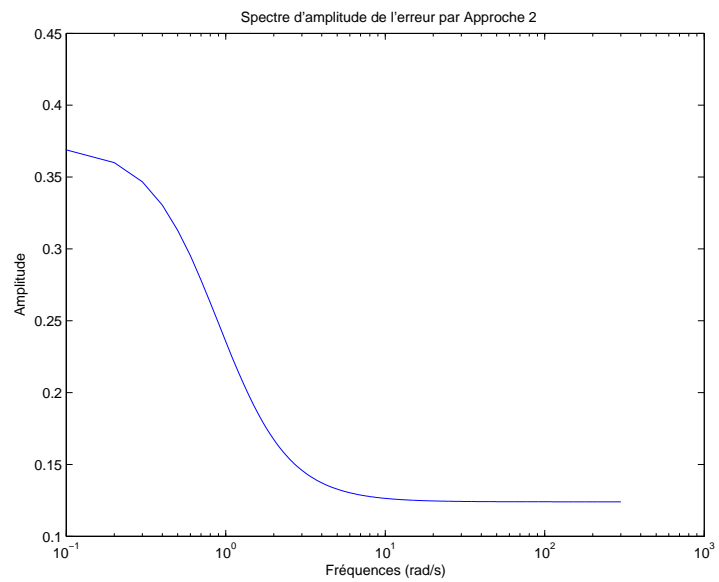


FIG. 5.23 – Spectre d'amplitude de l'erreur d'approximation par approche2

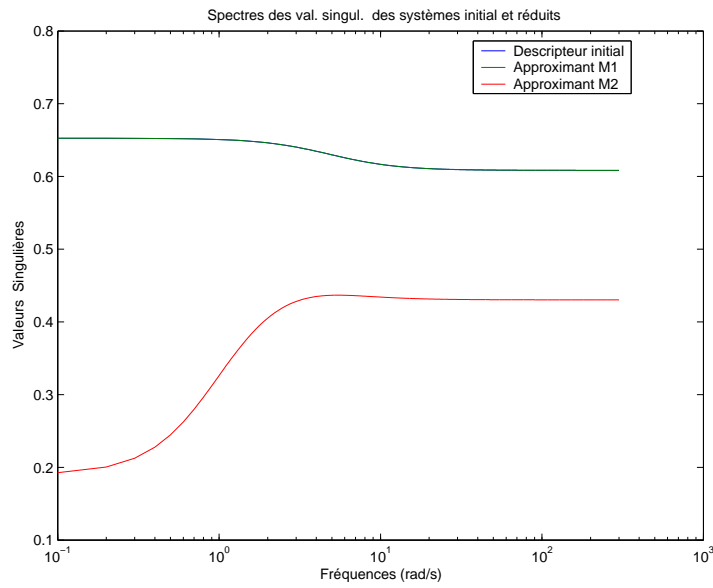


FIG. 5.24 – Réponses des valeurs singulières en (dB) des systèmes original et réduits

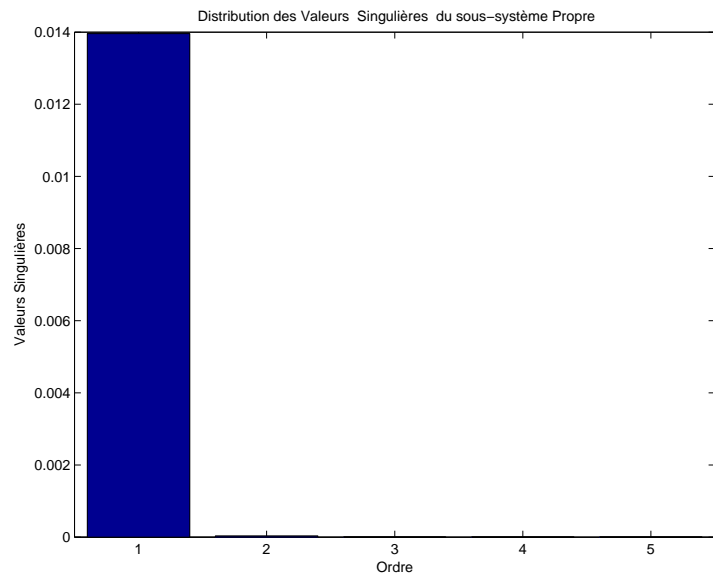


FIG. 5.25 – Distribution des valeurs singulières propres

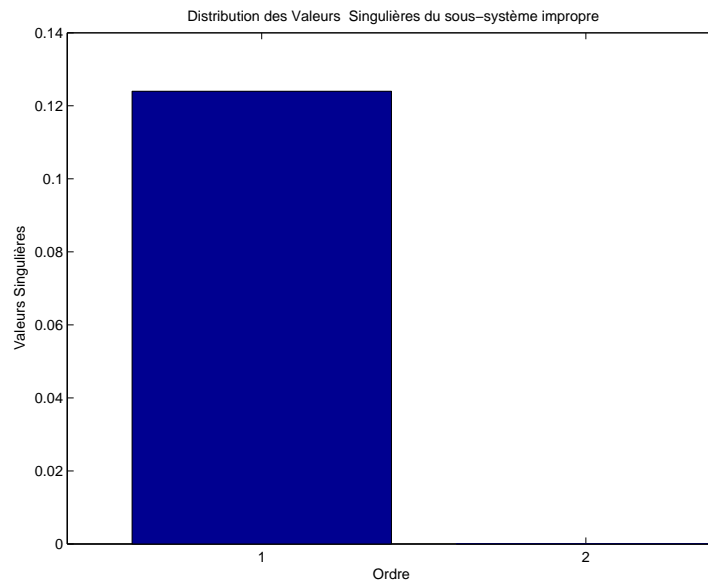


FIG. 5.26 – Distribution des valeurs singulières impropres

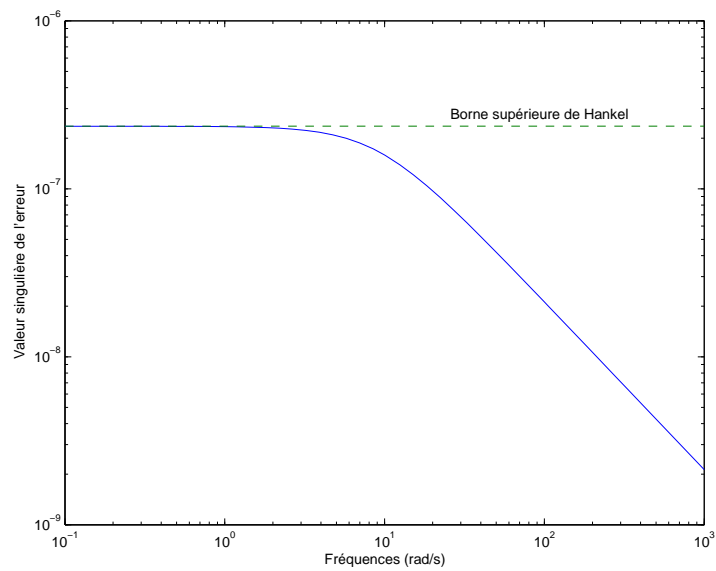


FIG. 5.27 – Valeur singulière de l'Erreur de l'approche1 comparée à la borne supérieure de Hankel

5.5 Interprétation.

Partant d'un descripteur de grande dimension, c-stable, notre algorithme permet de calculer deux modèles d'ordre réduits $M1$ et $M2$ tel-que : l'approximant $M1$ est singulier, $M2$ est régulier. Les deux types d'approximants sont c-stables. Pour les trois exemples, nous avons illustré les réponses fréquentielles en traçant les spectres d'amplitude, spectres d'amplitude en (dB), spectres de phase ainsi que la réponse des valeurs singulières en (dB). Les graphes montrent que les approximants suivent fidèlement le comportement du système initial (les courbes donnant les spectres des écarts entre descripteur initial et $M1$, descripteur initial et $M2$ en témoignent) plus particulièrement, dans la bande de fréquences moyennes. On notera comme même une légère déviation au niveau des fréquences basses la même remarque pour le spectre de phase du modèle $M2$ au niveau des fréquences hautes : ces erreurs sont dûes à une réduction conséquente d'ordre. On précise que pour l'exemple 1, on a tracé les spectres d'amplitude en (dB), uniquement pour $1^{\text{ère}} E / 1^{\text{ère}} S$, nous avons obtenu des graphes similaires pour les autres canaux. Les figures montrant la distribution des valeurs singulières propres et impropres, nous donnent une idée quant au choix de l'ordre de réduction l_f de la partie propre du système descripteur, lorsque uniquement les valeurs singulières de la partie propre sont à éliminer, et de l'ordre l_∞ de la partie impropre du système descripteur : elles illustrent bien les valeurs singulières répétitives qui doivent être soit éliminées soit incluses dans le modèle d'ordre réduit, celles qui sont nulles seront éliminées. Pour le modèle $M1$, la

norme H_∞ vérifie la borne supérieure (4.25) et ce pour chaque exemple (voir Table ou graphes correspondants). Pour bien apprécier la distance entre modèle initial et approximant issus de l'approche 2, le spectre d'erreur d'approximation a été tracé et montre bien que les spectres d'amplitude du système original et celui réduit ($M2$) sont presque confondus.

5.6 Conclusion

Diverses simulations ont été réalisées, parmi lesquelles nous avons choisi de proposer trois exemples pour mettre en évidence les traits caractéristiques des approximants issus de l'algorithme proposé dans le chapitre 4, construits à partir de la réduction d'ordre par l'approche SVD, opérée sur la partie propre d'un descripteur d'ordre élevé, en retenant le caractère impulsif du système original (partie infinie est copiée dans le modèle réduit), c'est ce que nous avons appelé "M1" qui a la même nature que le système descripteur ; soit en réduisant simultanément sur les parties propre et impropre de système descripteur initial, dans ce cas là, il s'agit de "M2" qui a la particularité d'être un système régulier. Très important à souligner, que ces deux modèles réduits suivent fidèlement le comportement du système original, l'écart entre approximant et modèle initial est très faible, ceci permet de conclure quant à l'efficacité de notre algorithme qui permet de construire des approximants de différentes natures (régulier et descripteur) de faible ordre, pour lesquelles la stabilité est toujours garantie et permettant de modéliser le comportement globale du système initial.

Chapitre 6

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons présenté quelques aspects importants de la théorie des systèmes descripteurs. Ainsi, un système singulier est asymptotiquement stable si les pôles du pencil qui lui correspond appartiennent au demi plan gauche, dans le cas de systèmes descripteurs continus, ou s'ils sont à l'intérieur du cercle unité dans le cas de systèmes descripteurs numériques.

Nous avons posé la solution complète de la résolution des systèmes généralisés de tout système descripteur. Par la suite, nous avons présenté les équations de *Lyapunov projetées généralisées* qui donnent une notion sur les propriétés de commandabilité et d'observabilité, et dont la résolution permet de calculer les grammiens de commandabilité et d'observabilité importants paramètres qui rentrent dans la réduction d'ordre de modèles. Dans ce contexte, nous nous devons de souligner que les équations de *Lyapunov* associées aux systèmes standards ont été l'objet d'innombrables travaux [30, 31, 32], ce n'est pas du tout le

cas des équations de *Lyapunov projetées généralisées* qui ont été seulement résolues par deux algorithmes [33], l'algorithme généralisé de *Bartels-Stewart* et celui de *Hammarling*. Nous avons défini alors dans le cas de systèmes singuliers, les valeurs singulières propres et impropres qui sont les composants des gramiens et peuvent être considérés comme mesure de l'énergie de chaque état du système comme pour le cas standard [14] : une faible quantité d'énergie (grande) est demandée à l'entrée pour transférer des état correspondants à une grande (faible) valeur singulière. Ces mêmes états vont générer une faible (grande) énergie en sortie. L'algorithme que nous avons proposé permet de découpler le système en sous-système propre (partie dynamique) et en sous-système impropre (partie algébrique), puis de construire deux types d'approximants d'ordre faible, l'un descripteur, l'autre régulier, tous les deux sont obtenus par troncature des états dont les valeurs singulières (propres et impropres) sont faibles ce qui correspond aux états contribuant faiblement dans la réponse du système. L'intérêt majeur de ce type de schéma de réduction d'ordre est que la stabilité est toujours garantie et l'erreur d'approximation quantifiable.

Bibliographie

- [1] L. Dai, *Singular Control Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [2] A.C. Antoulas, *Lectures on the Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*, SIAM Book Series : Advances in Design and Control, 2002.
- [3] T. Stykel, "Numerical Solution and Perturbation Theory for Generalized Lyapunov Equations", *Linear Algebra Appl.*, 349(1-3), 2002, 155-185.
- [4] *MatlabTM*, The Mathworks, Inc., 1984-1989, Version 3.5.
- [5] P. Benner, V. Mehrmann, V. Sima, S. Van Huffel, and A. Varga, "SLICOT- A subroutine library in systems and control theory", *Appl. Comput. Cont. Sig. Circuits*, **1**, 499-539.
- [6] K. Glover, "All optimal Hankel approximations of linear multivariable systems and their L^∞ -errors bounds", *Int. J. of Control*, 39(6), pp. 1115-1193, 1984.
- [7] A.C. Antoulas, "Approximation of linear dynamical systems", pp # 1049, *Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, edited by J.G.

Webster, published by John Wiley and Sons, Inc., 1998.

- [8] B.C. Moore, "*Principal component analysis in linear systems : controllability, observability, and model reduction*", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-26, pp 17-31, Feb. 1981.
- [9] L. Mitiche and A.B.H. Adamou, "*A Schur method for model reduction (non minimal case)*", Int. Conf. on Signals and Systems, ICSS-94, Vol. 2, pp. VI.63-VI.66, Algiers Sept. 24-26, 1994.
- [10] A.B.H. Adamou-Mitiche and L. Mitiche, "*Comparative study of model reduction schemes-application to the digital filters synthesis*", Proceeding of the IEEE sixth International Symposium on Sig. Proces. and Its Applications ISSPA 2001, Vol. 2, pp. 675-678, 13-16 August 2001, Kuala Lumpur, Malaysia.
- [11] L. Mitiche and A.B.H. Adamou-Mitiche, "*A new approach for robust controller model reduction based on balanced truncation*", Accepted for presentation in the IEEE Conference on Control Applications, Article # KV 98-117, September 1-4, 1998, Trieste, Italy.
- [12] L. Mitiche, B. Derras and A.B.H. Adamou-Mitiche, "*Speech modelling by model-order reduction : SNR behaviour*", The IEE Electronics Letters, Vol. 39, No. 17, 21st August 2003, pp. 1288-1290.
- [13] A. Laub, M.T. Heath, C.C. Paige and R.C. Ward, "*Computation of systems balancing transformations and other applications of simultaneous diago-*

- nalization algorithms*", IEEE Trans. on Automatic Cont., Vol. AC-32, No. 2, pp. 115-122, Feb. 1987.
- [14] M. Bettayeb, "*New interpretation of balancing state space representation as an input-output energy minimization problem*", Int. Journal Systems SCI, pp. 325-331, 1991.
- [15] R.W. Aldhaheri, "*Model order reduction via real Schur-form decomposition*", Int. J. of Cont., 1991, Vol. 53, No. 3, 709-716.
- [16] M.G. Safonov and R.Y. Chiang, "*A Schur method for balanced-truncation model reduction*", IEEE Trans. Automat. Control, AC-34(7), pp. 729-733, 1989.
- [17] G. Strang, *Linear algebra and its applications*, Academic Press, Inc., USA, 1976.
- [18] F.L. Lewis, "*A survey of Linear Singular Systems*", Circuits Systems Signal Process. Vol. 5 No. 1, 1986.
- [19] Z. Bai, P.M. Dewilde and R.W. Freund, "*Reduced-Order Modeling*", Numerical analysis manuscript No. 02-4-13, Bell Lab., Murray hill, New Jersey, Mars 2002.
- [20] A. Banaszuk, M. Kociecki and F.L. Lewis, "*Kalman decomposition for implicit linear systems*", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 37, No 10, 1992, pp. 1509-1513.
- [21] D. Cobb, "*Controllability, Observability, and Duality in Singular Systems*", IEEE Trans. on Autom. Cont., Vol. 29, No. 12, December 1984.

- [22] T. Stykel, *Analysis and numerical solution of generalized Lyapunov equations*, Ph.D. Thesis, Mathematik und Naturwissenschaften, Universität Berlin, 2002.
- [23] T. Stykel, "On criteria for asymptotic stability of differential-algebraic equations", *Z. Angew. Math. Mech.*, 82(3), 147-158, 2002.
- [24] T. Stykel, "Stability and Inertia theorems for generalized Lyapunov equations", *Linear Algebra Appl.*, 355(1-3), 297-314, 2002.
- [25] T. Stykel, "Input-Output Invariants for Descriptor Systems". The work was supported by Deutsche Forschungsgemeinschaft, Research Grant ME790/12-1, 2003.
- [26] V.L. Syrmos, P. Misra and R. Aripirala, "On the discrete Generalized Lyapunov equation", *Automatica*, Vol. 2, 297-301, 1995.
- [27] W.Q. Liu and V. Sreeram, "Model reduction of singular systems", In Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and control (Sydney, Australia, 2000) pp. 2373-2378, IEEE, 2000.
- [28] K. Perev and B. Shafai, "Balanced realization and model reduction of singular systems", *Int. J. on Systems Sci.*, Vol. 25, No 6, pp. 1039-1052, 1994.
- [29] P. VanDooren, "The computation of Kronecker's Canonical form of a Singular Pencil", *Linear Algebra and its Applications*, Vol.27, pp. 103-140, 1979.
- [30] J.W. Demmel and B. Kagstrom, *The generalized Schur decomposition of an arbitrary pencil $A - \lambda B$: Robust software with error bounds and ap-*

- plications. Part I : Theory and algorithms*, ACM Trans. Math. Software, 19(2) : 160-174, 1993.
- [31] G.H. Golub and C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, 3rd ed. The Johns Hopkins university Press, Baltimore, London, 1996.
- [32] Y. Saad, *Numerical solution of large Lyapunov equations*, In M.A. Kaa-shoek, J.H. Van Schuppen and A.C.M. Ran Editors, *Signal Processing, Scattering, Operator Theory and Numerical Methods* (Amsterdam, 1989), pages 503-511. Birkhäuser, Boston,MA, 1990.
- [33] D. Rothschild and A. Jameson, "*Comparaison of four numerical algorithms for solving the Lyapunov matrix equation*", Int. J. of Cont., 1970, Vol. 11, No.2, 181-198.
- [34] T. Penzl, "*Numerical Solution of Generalized Lyapunov Equations*". The work was supported by Deutsche Forschungsgemeinschaft, Research GrantME790/7-1, 1996.
- [35] Amel B. H. Adamou-Mitiche, Lahcène Mitiche, and Vasile Sima, "*Descriptor Systems Approximation*". International Journal of General Systems, Vol. 33, Issue 1, pp. 99-110, Feb. 2004.
- [36] Amel B. H. Adamou-Mitiche, Lahcène Mitiche, and Vasile Sima, "*Model reduction for Descriptor Systems*". in CD-ROM Proceedings of the IEEE-EURASIP 1st International Symposium on Control, Communications, and Signal Processing ISCCSP 2004, pp. 827-830, 21-24 March 2004, Hammamet, Tunisia.

- [37] Amel B. H. Adamou-Mitiche, and Mourad Haddadi, "*Two new models for Descriptor Systems : Time and frequency behavior*", Paper 469-106, Accepted and published in proceeding of the IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling (ASM 2005), June 15-17 2005, Benalmadena, Spain.
- [38] Amel B. H. Adamou-Mitiche, Lahcène Mitiche, and Mourad Haddadi, "*Two new models for Descriptor Systems : Time and frequency behavior*", paper 050318001, accepted for publication in *Scientific Inquiry : Journal of IIGSS, Inc.*
- [39] Amel B. H. Adamou-Mitiche, Lahcène Mitiche, and Mourad Haddadi, "*MIMO-DESCRIPTOR SYSTEMS MODEL REDUCTION* ", paper 205-4333, accepted for publication in *The International Journal of Modelling and Simulation*, ACTA Press.

Annexe A

Définitions

Matrice symétrique. Une matrice $A \in R^{n \times n}$ est symétrique si $A = A^T$.

Matrice (semi) définie positive (négative). Une matrice $A \in R^{n \times n}$ est respectivement définie positive (définie négative), est semi-définie positive (semi-définie négative) dans un sous-espace $\chi \subset R$, si $v^T Av > 0$ ($v^T Av < 0$), et $v^T Av \geq 0$ ($v^T Av \leq 0$), pour tout non nul $v \in \chi$.

Décomposition de Cholesky. Une matrice $A \in R^{n \times n}$ semi-définie positive peut être décomposée en $A = U_A^T U_A$, où $U_A \in R^{n \times n}$ est dite facteur de Cholesky, matrice triangulaire supérieure.

Décomposition QR. Soit $A \in R^{n \times n}$. Il existe alors une matrice orthogonale $Q \in R^{n \times n}$ et une matrice triangulaire supérieure $R \in R^{n \times n}$ telles que $A = QR$.

Décomposition rang complet. Une matrice $A \in R^{n \times n}$ semi-définie positive,

de rang r . Alors il existe une matrice $R_A \in R^{r \times n}$ telle que $A = R_A^T R_A$.
 R_A étant le facteur rang de ligne complet et R_A^T est le facteur rang de
colonne complet.

Décomposition de GUPTRI (generalized upper triangular form). La décompo-
sition de Guptri transforme un pencil $(A - \lambda B)$ en la forme triangulaire
supérieure généralisée (guptri) donnée par $(a - \lambda b)$ via la transformation
d'équivalence $P^T \times (A - \lambda B) \times Q$. Cette forme est décrite ci-dessous.

$$a = \begin{bmatrix} a_{rt} & * & * & * & * \\ 0 & a_{zr} & * & * & * \\ 0 & 0 & a_{fn} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{in} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{lt} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_{rt} & * & * & * & * \\ 0 & b_{zr} & * & * & * \\ 0 & 0 & b_{fn} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & b_{in} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{lt} \end{bmatrix}.$$

Avec

1. $(a_{rt} - \lambda b_{rt})$ possède une structure singulière droite,
2. $(a_{zr} - \lambda b_{zr})$ possède une structure de Jordan pour la valeur propre 0,
3. $(a_{fn} - \lambda b_{fn})$ possède une structure de Jordan pour les valeurs propres non nulles,
4. $(a_{in} - \lambda b_{in})$ possède une structure de Jordan pour les valeurs propres infinies,
5. $(a_{lt} - \lambda b_{lt})$ possède une structure singulière gauche.

Annexe B

ALGORITHME D'EQUILIBRE

(MODELES CONTINUS

STANDARDS)

Equilibre de modèles

L'équilibre des modèles est l'étape fondamentale sur laquelle repose la *MRE*.

Il consiste en la détermination d'une transformation non singulère T dont le calcul est essentiellement basé sur les grammiens de commandabilité et d'observabilité du modèle.

Procédure de l'équilibre

Entrées : Ayant la réalisation d'ordre n (A, B, C, n).

Etape 1- Calcul des grammiens W_c et W_o , solutions des équations de Lyapunov,

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$A W_c + W_c A^T + B B^T = 0. \quad (\text{B.2})$$

Ces deux grammiens sont donnés par les quantités suivantes

$$W_c = \int_0^{t_\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt, \quad (\text{B.3})$$

$$W_o = \int_0^{t_\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt. \quad (\text{B.4})$$

Remarque.

Si le modèle est asymptotiquement stable, W_c et W_o convergent pour un nombre fini de termes.

Etape 2- Factorisation de Cholesky de la paire (W_c, W_o) telle que

$$W_o = L_o L_o^T, \quad (\text{B.5})$$

$$W_c = L_c L_c^T. \quad (\text{B.6})$$

avec L_o et L_c des matrices triangulaires inférieures.

Etape 3- Décomposition en valeurs singulières *SVD* (Annexe C) de la quantité

$$M = L_o^T L_c, \quad (\text{B.7})$$

telle que

$$M = U \Sigma V^T. \quad (\text{B.8})$$

où U et V sont des nxn-matrices orthogonales.

$\Sigma =$ nxn-matrice diagonale (matrice des valeurs singulières du système) telle que

$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ avec $\sigma_i \geq \sigma_j$ pour $i < j$.

Etape 4- Obtention de la transformation d'équilibre T et de son inverse T^{-1}

$$T = L_c V \Sigma^{-1/2}, \quad (\text{B.9})$$

$$T^{-1} = \Sigma^{-1/2} U^T L_o^T. \quad (\text{B.10})$$

Etape 5- Construction de la réalisation équilibrée

$$A_e = T^{-1} A T = \Sigma^{-1/2} U^T L_o^T A L_c V \Sigma^{-1/2}, \quad (\text{B.11})$$

$$B_e = T^{-1} B = \Sigma^{-1/2} U^T L_o^T B, \quad (\text{B.12})$$

$$C_e = C T = C L_c V \Sigma^{-1/2}. \quad (\text{B.13})$$

Sorties : La réalisation équilibrée du modèle d'ordre complet (A_e, B_e, C_e, n) .

Fin de la procédure.

Et on montre que les grammians d'observabilité et de commandabilité s'expriment dans la base d'équilibre par

$$\begin{aligned} W_{oe} &= T^T W_o T, \\ &= \Sigma^{-1/2} V^T L_c^T L_o L_o^T L_c V \Sigma^{-1/2}, \\ &= \Sigma^{-1/2} V^T M^T M V \Sigma^{-1/2}, \\ &= \Sigma, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

et

$$\begin{aligned} W_{ce} &= T^{-1} W_c T^{-T}, \\ &= \Sigma^{-1/2} U^T L_o^T L_c L_c^T L_o U \Sigma^{-1/2}, \\ &= \Sigma^{-1/2} U^T M M^T U \Sigma^{-1/2}, \\ &= \Sigma. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

d'où $(W_{oe}, W_{ce}) = (\Sigma, \Sigma)$.

De point de vue mathématique, Σ est aussi solution des équations de Lyapunov

$$A_e \Sigma A_e^T - \Sigma + B_e B_e^T = 0, \quad (\text{B.16})$$

$$A_e^T \Sigma A_e - \Sigma + C_e^T C_e = 0. \quad (\text{B.17})$$

Annexe C

ALGORITHME SVD

Les valeurs singulières d'une matrice $A \in R^{m,n}$ de rang q , notées σ_i , sont les racines carrées non négatives des valeurs propres de $A^T A$, ordonnées telles que :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0.$$

Si $q < n$ nous aurons $n - q$ valeurs singulières nulles, c'est à dire :

$$\sigma_{q+1} = \sigma_{q+2} = \dots = \sigma_n = 0.$$

Il existe deux matrices orthogonales $U \in R^{m,m}$, $V \in R^{n,n}$ et une matrice diagonale $\Sigma \in R^{m,n}$ telles que [37]

$$A = U \Sigma V^T = U \begin{bmatrix} \Sigma_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T, \quad (\text{C.1})$$

et les valeurs singulières σ_i , $i = \overline{(1, q)}$ sont les racines carrées des q valeurs propres positives (non nulles) de $A^T \cdot A$.

U et V sont les matrices orthogonales ayant pour colonnes les vecteurs propres de $A^T A$ et AA^T respectivement.

Cette décomposition est dite "Décomposition en Valeurs Singulières" *SVD* de la matrice A .

Remarque

Si $A = U\Sigma V^T$ est la décomposition en valeurs singulières de la matrice A , alors les décompositions en valeurs propres de $A^T A$ et de AA^T sont données par

$$A^T A = V(\Sigma^T \Sigma)V^T = V\Sigma^2 V^T, \tag{C.2}$$

$$AA^T = U(\Sigma \Sigma^T)U^T = U\Sigma^2 U^T. \tag{C.3}$$

Notons

$\bar{\sigma}(A) = \sigma_1$ [la plus grande valeur singulière de la matrice A],

$\underline{\sigma}(A) = \sigma_n$ [la plus petite valeur singulière de la matrice A].

Les valeurs singulières maximum et minimum d'une matrice A , notées respectivement $\bar{\sigma}$ et $\underline{\sigma}$, sont équivalentes en terme de norme spectrale à

$$\bar{\sigma}(A) = \|A\|_2 \tag{C.4}$$

$$\underline{\sigma}(A) = \begin{cases} \|A^{-1}\|_2^{-1}, & \text{si } \det(A) \neq 0, \\ 0, & \text{si } \det(A) = 0 \end{cases} \tag{C.5}$$

La valeur singulière minimale $\underline{\sigma}(A)$ donne une mesure de la tendance à la singularité de la matrice A .

Propriétés des valeurs singulières [33]

1.

$$\underline{\sigma}(A) = \min \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (C.6)$$
$$x \neq 0, x \in R^n$$

2.

$$\bar{\sigma}(A) = \max \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (C.7)$$
$$x \neq 0, x \in R^n$$

3.

$$\underline{\sigma}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \bar{\sigma}(A), \quad (C.8)$$

où $\lambda_i(\cdot)$ est la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de (\cdot)

4. Si A^{-1} existe,

$$\underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})} \quad (C.9)$$

5. Si A^{-1} existe,

$$\bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})} \quad (C.10)$$

6.

$$\bar{\sigma}(\alpha \cdot A) = |\alpha| \bar{\sigma}(A) \quad (C.11)$$

7.

$$\bar{\sigma}(A + B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \quad (C.12)$$

8.

$$\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A) \bar{\sigma}(B) \quad (C.13)$$

9.

$$\max[\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)] \leq \bar{\sigma}(AB) \leq \sqrt{2} \max[\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)] \quad (C.14)$$

10.

$$\max |a_{i,j}| \leq \bar{\sigma}(A) \leq n \max |a_{i,j}|, \text{ pour } i, j \quad (\text{C.15})$$

11.

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \text{tr}[A^T A] \quad (\text{C.16})$$

Annexe D

ALGORITHME D'EQUILIBRE (SYSTEMES DESCRIPTEURS CONTINUS)

Théorème D.1. [22] *Une réalisation $[E, A, B, C, D]$ est dite minimale si et seulement si le descripteur donné par (4.1) est complètement commandable et complètement observable.*

Définition D.2. Une réalisation (E, A, B, C, n) de la fonction de transfert $G(s)$ est dite R – minimale, si le triplet (E, A, B) est R – commandable et le triplet (E, A, C) est R – observable.

Définition D.3. Une réalisation (E, A, B, C, n) de la fonction de transfert c-

stable $G(s)$ est "équilibrée" et est "propre" si le grammien de commandabilité propre et le grammien d'observabilité propre sont égaux et diagonaux.

Procédure de l'équilibre

Entrées : Ayant une réalisation d'ordre n (E, A, B, C, n).

Etape 1- Calcul des grammien G_{cpc} et G_{cpo} , solutions des équations de *Lya-punov projetées généralisées*.

Etape 2- Factorisation de Cholesky de la paire G_{cpc} et G_{cpo} telle que

$$G_{cpo} = L^T L, \quad (D.1)$$

$$G_{cpc} = R R^T, \quad (D.2)$$

avec L et R des matrices triangulaires inférieures.

Etape 3- Décomposition en valeurs singulières *SVD* (Annexe C) de la quantité

$$M = L^T R, \quad (D.3)$$

telle que

$$M = U_f \Sigma V_f^T, \quad (D.4)$$

où U_f et V_f sont des $n_f \times n_f$ -matrices orthogonales.

$\Sigma = n_f \times n_f$ -matrice diagonale non singulière (matrice des valeurs singulières du système) telle que $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n_f})$ avec $\sigma_i > \sigma_j$ pour $i < j$.

Etape 4- Considérer les matrices

$$W_b = [L^T U_f \Sigma^{-1/2}, W_\infty], \quad W'_b = [E R V_f \Sigma^{-1/2}, W'_\infty], \quad (D.5)$$

$$T_b = [V_f R \Sigma^{-1/2}, T_\infty], \quad T'_b = [E^T L^T U_f \Sigma^{-1/2}, T'_\infty], \quad (D.6)$$

telles-que les matrices W_∞ et T_∞ engendrent respectivement les sous-espaces gauche et droite du pencil $\lambda E - A$ correspondant aux valeurs propres infinies, et les matrices W'_∞ et T'_∞ sont telles-que $W_\infty^T W'_\infty = (T'_\infty)^T T_\infty = I_{n_\infty}$.

Sorties : Construction de la réalisation équilibrée (E_e, A_e, B_e, C_e, n)

$$E_e = \begin{bmatrix} \Sigma^{-1/2} U^T L E R V \Sigma^{-1/2} & \Sigma^{-1/2} U^T L E T_\infty \\ W_\infty E R V \Sigma^{-1/2} & W_\infty^T E T_\infty \end{bmatrix}, \quad (\text{D.7})$$

$$A_e = \begin{bmatrix} \Sigma^{-1/2} U^T L E R V \Sigma^{-1/2} & \Sigma^{-1/2} U^T L A T_\infty \\ W_\infty A R V \Sigma^{-1/2} & W_\infty^T A T_\infty \end{bmatrix}, \quad (\text{D.8})$$

$$B_e = W_b^T B, \quad (\text{D.9})$$

$$C_e = C T_b. \quad (\text{D.10})$$

Fin de la procédure.

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique d'Alger

Département d'Electronique

Résumé de Thèse de Doctorat d'Etat en Electronique,

Option : Contrôle.

**CONTRIBUTION A LA THEORIE
D'APPROXIMATION DES SYSTEMES
DESCRIPTEURS**

Par Amel B. H. ADAMOU-MITICHE

(Ingénieur ENPA et Magister USTHB)

- Directeur de thèse : Pr. Mourad HADDADI

- Co-Directeur de thèse: Pr. Vasile SIMA

ملخص

يتطرق بحثنا هذا إلى نظرية جديدة معممة لنظرية تخفيض درجة الأنظمة المتمثلة في فضاء الحالات. تكمن حداثة بحثنا في خوارزمية بإمكانها تخفيض ، في آن واحد ، درجة النظام الفرعي المنتظم ودرجة النظام الفرعي المفرد (الدافع).
لأجل إنشاء خوارزمتنا ، حررنا برنامج مرتكزين على Matlab وبعض الروتينات (الدالات) بـ Fortran .
قمنا بعدة تجارب على أنظمة مفردة (Descripteur) حيث استطعنا تخفيض الدرجة إلى أدناها بدون المساس بالمميزات الأكثر أهمية مثل الاستقرار.
كلمات الدليل: التوازن ، النظام المفرد ، تخفيض الأنظمة ، النظام الفرعي المنتظم ، النظام الفرعي الدافع .

Abstract

Two SVD-based techniques to construct different types of lower degree approximants of a singular system are presented. Such techniques enable to preserve the key properties of the original system, such as stability, and give a quantization of approximation error. The first technique consists in reducing only the proper part of the descriptor system, while the second allows to reduce at once the proper and the improper parts of the system. The numerical results reveal the capabilities of the proposed techniques.

Keywords: Balancing, Descriptor system, Model reduction, Proper and improper subsystems, Singular values, Weierstrass canonical forms.

Résumé

Nous présenterons dans le présent travail une nouvelle théorie de réduction d'ordre de systèmes descripteurs qui sont une généralisation des systèmes décrits dans l'espace d'état, dits systèmes réguliers ou classiques. La nouveauté qu'apporte mon travail, réside dans le fait que l'algorithme de réduction élaboré permet de synthétiser des modèles d'approximation issus de la réduction, à la fois des sous-systèmes propres et impropres, permettant la construction d'approximants d'ordres faibles de natures différentes, l'un descripteur, l'autre régulier . Pour implémenter notre algorithme, un programme à base de Matlab, et des routines en Fortran a été élaboré. Diverses simulations sur de systèmes descripteurs de très grande dimension ont été réalisées, montrant l'efficacité de notre algorithme.

Mots clés : Equilibre, System descripteur, Réduction de modèle, Sous-systèmes propre et impropre, Valeurs singulières, Forme canonique de Weierstrass.

Ecole Nationale Polytechnique d'Alger

Département d'Electronique

Résumé de Thèse de Doctorat d'Etat :

CONTRIBUTION A LA THEORIE
D'APPROXIMATION DES SYSTEMES
DESCRIPTEURS

Par: Amel Baha Houda ADAMOU-MITICHE

Directeur de thèse: Pr. Mourad HADDADI

Co-Directeur de thèse: Pr. Vasile SIMA

Année Universitaire: 2005/2006

1 INTRODUCTION GENERALE

Nous présenterons dans le présent travail une nouvelle théorie de réduction d'ordre de systèmes descripteurs appelés aussi systèmes semi-états, systèmes implicites, systèmes algébrico-différentiels, ou systèmes généralisés qui sont une généralisation des systèmes décrits dans l'espace d'état, dits systèmes réguliers ou classiques, ces derniers sont rencontrés, dans la littérature, sous l'appellation de systèmes standards [1]. A cet effet, le travail sera réparti en deux grands volets : dans le premier, nous poserons le problème de réduction en général, par la suite nous présenterons les diverses définitions et propriétés relatives à la théorie de systèmes descripteurs. Le second volet traitera une technique de réduction d'ordre de modèles, présentant deux propriétés intéressantes : elle permet d'assurer toujours la stabilité et en second lieu, permet une quantification de l'erreur d'approximation : c'est la technique *SVD* (Singular Values Decomposition)[2] qui, utilisée dans l'approximation de systèmes dynamiques standards, a été étendue aux systèmes généralisés.

La nouveauté qu'apporte mon travail, réside dans le fait que l'algorithme de réduction élaboré permet de synthétiser des modèles d'approximation issus de la réduction, à la fois des sous-systèmes propres et impropres, permettant la construction d'approximants d'ordres faibles de natures différentes, l'un descripteur, l'autre régulier. Pour implémenter notre algorithme décrit dans la section 2, un programme à base de Matlab [3], et des routines en Fortran [4] ont été élaborés. Diverses simulations sur des systèmes descripteurs de très grande dimension ont été réalisées, montrant l'efficacité de notre algorithme.

2 APPROXIMATION DES SYSTEMES DESCRIPTEURS

2.1 Introduction

Considérons un système descripteur, linéaire, continu dans le temps, c-stable,

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (1)$$

où $x(t) \in R^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ est le vecteur de commande, $y(t) \in R^p$ est le vecteur de sortie ; et $E, A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$ sont des matrices constantes avec E singulière. On suppose que le pencil $(\lambda E - A)$ est régulier. Si $E = I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n , le système (1) est appelé système régulier et sera décrit dans l'espace d'état standard. L'objectif de toute procédure de réduction d'ordre de système descripteur est de remplacer un système complet d'ordre n (1) par un modèle d'ordre réduit r (2),

$$\begin{aligned} E_r \dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r u(t), \\ y_r(t) &= C_r x_r(t) + D_r u(t), \end{aligned} \quad (2)$$

où $E_r, A_r \in R^{r \times r}$, $B_r \in R^{r \times m}$, $C_r \in R^{p \times r}$, et $r \ll n$.

Le système (2) doit conserver les propriétés clés du système initial (1), telle que la stabilité, et l'erreur d'approximation doit être relativement faible. Divers travaux ont été réalisés dans ce sens [5, 6]. Dans ce qui suit, nous présenterons une généralisation de la technique *SVD* "Singular Values Decomposition" aux systèmes descripteurs, permettant de construire un approximant d'ordre réduit par troncature des valeurs singulières les plus faibles, puis nous développerons notre propre algorithme de réduction.

2.2 Réduction d'ordre des modèles descripteurs continus

La réduction opérée dans la base d'équilibre peut soit ne pas s'effectuer lorsque le système n'est pas R-minimal [7], soit elle peut rencontrer le problème de mal conditionnement de la matrice d'équilibre, c'est à dire lorsque la matrice Σ présente des valeurs singulières très faibles, elle peut devenir singulière, c'est pourquoi dans l'algorithme que nous proposons est plus général car nous pourrons construire nos approximants même si le système descripteur initial n'est pas R-minimal, [8, 9] et la réduction d'ordre s'opérera par troncatures des valeurs singulières faibles correspondants aux états dont l'élimination n'affecte pas les propriétés du système descripteur initial. Initialement, le pencil $(\lambda E - A)$ est transformé sous la forme de GUPTRI (Generalized Upper Triangular) [10]

$$E = V \begin{bmatrix} E_{n_f} & E_u \\ 0 & E_{n_\infty} \end{bmatrix} U^T, \quad (3)$$

$$A = V \begin{bmatrix} A_{n_f} & A_u \\ 0 & A_{n_\infty} \end{bmatrix} U^T, \quad (4)$$

où E_{n_f} est triangulaire supérieure, nonsingulière et E_{n_∞} est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale, A_{n_f} est quasi-triangulaire supérieure et A_{n_∞} est triangulaire supérieure, nonsingulière. Alors W_∞ et T_∞ sont données par

$$W_\infty = V \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_\infty} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$T_\infty = U \begin{bmatrix} Y \\ I_{n_\infty} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

où Y satisfait les équations de *Sylvester* généralisées (7) et (8).

L'algorithme que nous suggérons permet de construire deux types de modèles réduits. Le premier approximant $M1$, donné par la réalisation $[E_{r1}, A_{r1}, B_{r1}, C_{r1}, D_{r1}]$,

résulte de la réduction d'ordre uniquement de la partie propre du système descripteur, la partie impropre étant copiée intégralement dans le modèle réduit.

Le modèle $M2$, construit par la seconde approche, donné par $[E_{r2}, A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}]$, résultera de la réduction d'ordre simultanée des parties propre et impropre du descripteur initial [8].

Algorithme.

Les modèles d'ordre réduits $M1$ et $M2$ sont calculés selon la procédure suivante

Entrées : Une réalisation $[E, A, B, C, D]$ de système descripteur (1) tels-que le pencil $(\lambda E - A)$ soit régulier et c-stable.

Etape 1- Transformer E et A sous la forme de GUPTRI (3) et (4).

Etape 2- Calculer les solutions Y et Z des équations de *Sylvester* généralisées [10]

$$E_{n_f} Y - Z E_{n_\infty} = -E_u, \quad (7)$$

$$A_{n_f} Y - Z A_{n_\infty} = -A_u. \quad (8)$$

Etape 3- Conformément à la partition de V et U données par (3) et (4), former et partitionner les matrices

$$V^T B = \begin{bmatrix} B_{n_f} \\ B_{n_\infty} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$C U = \begin{bmatrix} C_{n_f} & C_{n_\infty} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Etape 4- Calculer les facteurs de Cholesky R_f et L_f solutions de $X_c = R_f R_f^T$ et $X_o = L_f^T L_f$ des équations généralisées de *Lyapunov*

$$E_{n_f} X_c A_{n_f}^T + A_{n_f} X_c E_{n_f}^T = -(B_{n_f} - Z B_{n_\infty})(B_{n_f} - Z B_{n_\infty})^T, \quad (11)$$

$$E_{n_f}^T X_o A_{n_f} + A_{n_f}^T X_o E_{n_f} = -C_{n_f}^T C_{n_f}. \quad (12)$$

Etape 5- Test : Si $\text{rang}(R_f) < n_f$ ($\text{rang}(L_f) < n_f$), calculer la matrice R_1 (L_1) issue de la décomposition QR

$$R_f^T = Q_R \begin{bmatrix} R_1^T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$L_f = Q_L \begin{bmatrix} L_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Sinon $R_1 = R_f$ ($L_1 = L_f$).

Etape 6- Former les matrices

$$R = U \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & -L_1 Z \end{bmatrix} V^T. \quad (16)$$

Etape 7- Calculer les matrices

$$W_\infty = V \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_\infty} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$T_\infty = U \begin{bmatrix} Y \\ I_{n_\infty} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Etape 8- Décomposition en valeurs singulières de la matrice LER , puis partitionner

$$LER = \begin{bmatrix} U_1 & U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & V_0 \end{bmatrix}^T, \quad (19)$$

où $\Sigma_1 = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{l_f}]$ étant la partie à préserver correspondant aux l_f plus grandes valeurs singulières propres du système.

Etape 9- Construire les matrices

$$W_l = \begin{bmatrix} L^T U_1 \Sigma_1^{-\frac{1}{2}}, & W_\infty \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$T_l = \begin{bmatrix} R V_1 \Sigma_1^{-\frac{1}{2}}, & T_\infty \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Etape 10- Réduire la partie impropre $[E_{n_\infty}, A_{n_\infty}, B_{n_\infty}, C_{n_\infty}]$, ou d'une manière équivalente : réduire le système régulier discret dans le temps par la méthode de *Schur* [11, 12], et selon la décomposition GUPTRI, A_{n_∞} est nonsingulière,

$$\begin{aligned} A_{n_\infty} z(k+1) &= E_{n_\infty} z(k) + B_{n_\infty} \nu(k) \\ \psi(k) &= C_{n_\infty} z(k). \end{aligned} \quad (22)$$

La méthode de *Schur* des systèmes discrets [10,16] donne un modèle d'ordre réduit $[E_{\infty r}, A_{\infty r}, B_{\infty r}, C_{\infty r}]$ du modèle impropre, et les valeurs singulières du système (22) sont appelées les valeurs singulières impropres du système (1), et sont données par : $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{l_\infty}, 0, \dots, 0]$.

Remarque : Si Φ présente des valeurs singulières de *Hankel* impropres répétitives, le sous-système correspondant doit être soit éliminé soit inclus comme un tout dans l'approximant d'ordre réduit ; par contre les valeurs singulières nulles sont à éliminer.

Sorties : Les deux systèmes d'ordre réduits $M1$ and $M2$ sont donnés par

$$[E_{r1}, A_{r1}, B_{r1}, C_{r1}, D_{r1}] = [W_l^T E T_l, W_l^T A T_l, W_l^T B, C T_l, D], \quad (23)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} sE_{r2} - A_{r2} & B_{r2} \\ \hline C_{r2} & D_{r2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} sE_{fr} - A_{fr} & B_{fr} \\ \hline C_{fr} & C_{\infty r} \quad B_{\infty r} \\ & D \end{array} \right], \quad (24)$$

où les matrices $E_{fr}, A_{fr} \in R^{l_f \times l_f}$, $B_{fr} \in R^{l_f \times m}$, $C_{fr} \in R^{p \times l_f}$, sont obtenues par troncature des l_f lignes et colonnes de A_{r1} , l_f lignes de B_{r1} , et des l_f colonnes de C_{r1} , respectivement. Les matrices $E_{\infty r} = I_{l_\infty}$, $A_{\infty r} \in R^{l_\infty \times l_\infty}$, $B_{\infty r} \in R^{l_\infty \times m}$, $C_{\infty r} \in R^{p \times l_\infty}$, sont des matrices du système d'ordre réduit l_∞ résultant de la réduction d'ordre de la partie impropre de l'(Etape 10). On note que le système $M1$ est d'ordre $(l_f + n_\infty)$, alors que l'ordre de $M2$ est plus petit et est égal à $(l_f + l_\infty)$.

Remarques

- Les équations (3, 4, 9, 10) découplées selon GUPTRI, du système descripteur (1) sont équivalentes à la décomposition additive de la fonction de transfert en $H(s) = H_p(s) + H_i(s)$, où $H_p(s)$ est la partie propre, et $H_i(s)$ est la partie polynômiale de $H(s)$. La fonction de transfert du modèle d'ordre réduit $M1$ est aussi donné par $H_r(s) = H_{rp}(s) + H_i(s)$; dans ce cas, la fonction de transfert d'erreur $\Delta H(s) = H(s) - H_r(s) = H_p(s) - H_{rp}(s)$ est indépendante de la partie polynômiale, et sa norme H_∞ vérifie la borne supérieure suivante [13]

$$\|H(s) - H_r(s)\|_{H_\infty} = \sup_{\omega \in R} \|H(j\omega) - H_r(j\omega)\|_2 \leq 2 \sum_{i=l_f+1}^{n_f} \sigma_i, \quad (25)$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme spectrale.

- Par ailleurs, nous soulignons un important résultat : si l'on n'effectue aucune troncature dans (Etape 10), c'est-à-dire, $l_\infty = n_\infty$, l'approximant $M2$ est toujours régulier.

2.3 Conclusion

Un algorithme de réduction d'ordre de systèmes descripteurs a été explicité ; permettant de construire deux natures différentes de modèles réduits des systèmes descripteurs, l'un singulier et résultant de la réduction d'ordre effectuée uniquement sur la partie propre, l'autre toujours régulier construit à partir de la réduction effectuée simultanément sur la partie propre et la partie impropre du système descripteur global.

3 CONCLUSION GENERALE

Nous avons présenté deux techniques de réduction d'ordre basée sur l'approche *SVD* de systèmes descripteur continu, c-stable. Au départ, nous avons

considéré l'algorithme donné par Stykel [7], et nous l'avons étendu à la réduction d'ordre des deux parties propre et impropre du système descripteur [9]. Pour concevoir le nouvel algorithme de réduction d'ordre (qui concerne les parties propre et impropre) nous nous sommes basés sur la technique de *Schur* régulière, discrète dans le calcul de modèles d'ordre réduit concernant la partie impropre du système descripteur initial[8]. L'algorithme permet de construire deux approximations différents : dans le premier, $M1$, juste la partie propre (correspondant aux valeurs propres finies du pencil $(\lambda E - A)$) est sujet à une réduction d'ordre, la partie impropre (correspondant aux valeurs propres infinies du pencil $(\lambda E - A)$) est copiée telle quelle dans $M1$. La seconde, ma propre approche, présente un résultat intéressant car le modèle d'ordre réduit $M2$ est toujours décrit dans l'espace d'état par une réalisation régulière. Pour les deux approximations, la c -stabilité est toujours garantie et la distance entre le système original et ses deux approximations est quantifiable [14,15].

Références

- [1] L. Dai, *Singular Control Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [2] A.C. Antoulas, *Lectures on the Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*, SIAM Book Series : Advances in Design and Control, 2002.
- [3] *MatlabTM*, The Mathworks, Inc., 1984-1989, Version 3.5.
- [4] P. Benner, V. Mehrmann, V. Sima, S. Van Huffel, and A. Varga, "SLICOT- A subroutine library in systems and control theory", *Appl. Comput. Cont. Sig. Circuits* , **1**, 499-539.

- [5] W.Q. Liu and V. Sreeram, "*Model reduction of singular systems*", In Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and control (Sydney, Australia, 2000) pp. 2373-2378, IEEE, 2000.
- [6] K. Perev and B. Shafai, "*Balanced realization and model reduction of singular systems*", Int. J. on Systems Sci., Vol. 25, No 6, pp. 1039-1052, 1994.
- [7] T. Stykel, "*Analysis and numerical solution of generalized Lyapunov equations*", Ph.D. Thesis, Mathematik und Naturwissenschaften, Universitat Berlin, 2002.
- [8] Amel B. H. Adamou-Mitiche, Lahcène Mitiche, and Vasile Sima, "*Descriptor Systems Approximation*". International Journal of General Systems, Vol. 33, Issue 1, pp. 99-110, Feb. 2004.
- [9] Amel B. H. Adamou-Mitiche, Lahcène Mitiche, and Vasile Sima, "*Model reduction for Descriptor Systems*". The IEEE-EURASIP 1st International Symposium on Control, Communications, and Signal Processing ISCCSP 2004, pp. 827-830, 21-24 March 2004, Hammamet, Tunisia.
- [10] P. Van Dooren, "*The computation of Kronecker's Canonical form of a Singular Pencil*", Linear Algebra and its Applications, Vol.27, pp. 103-140, 1979.
- [11] A.B.H. Adamou-Mitiche and L. Mitiche, "*Comparative study of model reduction schemes-application to the digital filters synthesis*", Proceeding of the IEEE sixth International Symposium on Sig. Proces. and Its Applications ISSPA 2001, Vol. 2, pp. 675-678, 13-16 August 2001, Kuala Lumpur, Malaysia.
- [12] M.G. Safonov and R.Y. Chiang, "*A Schur method for balanced-truncation model reduction*", IEEE Trans. Automat. Control, AC-34(7), pp. 729-733, 1989.

- [13] K. Glover, *All optimal Hankel approximations of linear multivariable systems and their L^∞ -errors bounds*, International Journal of Control, 39(6), pp. 1115-1193, 1984.
- [14] Amel B. H. Adamou-Mitiche, and Mourad Haddadi, "Two new models for Descriptor Systems : Time and frequency behavior", Paper 469-106, Accepted and published in proceeding of the IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling (ASM 2005), June 15-17 2005, Benalmadena, Spain.
- [15] Amel B. H. Adamou-Mitiche, Lahcène Mitiche, and Mourad Haddadi, "Two new models for Descriptor Systems : Time and frequency behavior", paper 050318001, accepted for publication in Scientific Inquiry : Journal of IIGSS, Inc.