

14/97

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Génie Civil

PROJET DE FIN D'ETUDE
pour l'optention du diplôme d'ingenieur d'état
en Genie Civil

المركز الوطني للمكتبات
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Sujet :

**UTILISATION DES METHODES
D'OPTIMISATION MULTICRITERE
EN CALCUL DE STRUCTURE.
CAS DU DIMENSIONNEMENT DES
SECTIONS DE BETON
PRECONTRAINTE.**

Proposé par :
Mr K.SILHADI

Etudié par :
Mr Y.GHAZALI
Mr S.MATENE

Dirigé par :
Mr K.SILHADI

Promotion: 1997

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Génie Civil

PROJET DE FIN D'ETUDE
pour l'optention du diplôme d'ingenieur d'état
en Genie Civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Sujet :

**UTILISATION DES METHODES
D'OPTIMISATION MULTICRITERE
EN CALCUL DE STRUCTURE.
CAS DU DIMENSIONNEMENT DES
SECTIONS DE BETON
PRECONTRAINTE.**

Proposé par :
Mr K.SILHADI

Etudié par :
Mr Y.GHAZALI
Mr S.MATENE

Dirigé par :
Mr K.SILHADI

Promotion: 1997

ملخص

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

إن الهدف من هذا العمل هو دراسة طرق التفضيل المتعددة العوامل وكيفية استعمالهم في ميدان الهندسة المدنية. من الناحية الأولى نتطرق إلى منهجية طرق التفضيل ثم نستعرض بعض الأمثلة التطبيقية في حساب المنشآت. من الناحية الثانية نعود إلى استعمال طريقة الإليباد العشوائية للمتغيرين (طريقة مونتشي كارلو) وجدول (مين. ماكس) في طريقة البحث عن الحل المفضل المتعلق بمشكل بإيجاد أبعاد الأعمدة من الخرسانة المفضولة.

Resumé

Le but de ce travail consiste à étudier les méthodes d'optimisation multicritères et leurs applications en Génie Civil. En premier lieu, on traitera la théorie des méthodes d'optimisation, on exposera quelques exemples d'application en calcul de structures.

Enfin, nous opérons pour l'utilisation de la méthode de génération aléatoire des variables (méthode Monté-Carlo) et l'algorithme Min-Max dans la recherche de la solution optimale relative un problème de dimensionnement de poutres en béton précontraint.

Abstract

The purpose of this work consists to study the multicriterion optimisation methods and their application in Civil Engineering.

First time, we will present the theory of these methods, after we will expose several examples of application in calculus of structures.

Finally, we use a random generation method of variables (Monte-Carlo method) and Min-Max algorithm in searching an optimal solution relative to a problem of beams dimensionnement in precast concrete.

Dédicace

- * À la mémoire de mon grand père,
- * à ma grande mère,
- * à mon très cher et regretté père,
- * à ma mère qui a tant souffert pour moi,
- * à mes frères et soeurs,
- * à mes oncles,
- * à mes tantes,
- * à tous les membres de ma famille,
- * à mes professeurs,
- * à tous mes amis et tous ceux qui me sont chers,

Je dédie ce modeste travail.

Vassine!

Dédicace

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

- * A la mémoire de mon frère Ben Omar,
- * à la mémoire de ma tante Hatma
- * à ma chère mère pour ses sacrifices,
- * à mon chère père,
- * à ma future épouse,
- * à tous mes sœurs et frères,
- * à tous ma famille,
- * à tous mes amis
- * à tous ceux qui me sont chers,
- et à vous,

Je dédie ce modeste travail.

Slimane.

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au département de Génie-civil de l'Ecole Nationale Polytechnique, dirigé par Mr K.SIL HADI.

Nous tenons, en tout premier lieu, à exprimer notre profonde gratitude et sincères remerciements à notre promoteur, pour l'aide qu'il nous a apporté pour réaliser ce travail.

Nous tenons, également à remercier Melle F.Yenoune pour son aide et par ses conseils précieux.

Nous tenons, également à remercier vivement messieurs les membres du jury, qui nous ont l'honneur de juger ce travail.

Nos remerciements vont également à nos camarades Rahim et Linda (ENV), Farouk, Abdou, Chawki, Ahmed, Rédha, Omar et Chacha, Smail Bentamar, AbdelKader, Krimo, Fouzi, Sihem, Bachir pour l'aide morale et matérielle qu'ils nous ont apporté pour effectuer ce travail.

Que les enseignants qui ont contribué à notre formation reçoivent notre gratitude.

Sans oublier d'exprimer nos remerciements à tous les agents de la bibliothèque de l'école, à tous nos amis et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin.

Sommaire

	<i>Page</i>
Introduction	
Chapitre I : Programme multicritère	
I.1 - Généralités et notations	1
I.1.1 - Variable de décision	1
I.1.2 - Variables de décision et paramètres	2
I.1.3 - Notion formelle	2
I.2 - Contraintes	2
I.2.1 - Contrainte sous forme inégalités	3
I.2.2 - Contrainte sous forme d'égalités	3
I.2.3 - Forme implicite des contraintes	3
I.3 - Fonctions objectifs ou critères (fonction but)	3
I.3.1 - Fonction objectif et contrainte	4
I.3.2 - Notion formelle	4
I.4 - Représentation graphique	4
I.4.1 - Espace des variables de décision et espace des fonctions objectif (fonction but)	4
I.4.2 - Exemple	4
I.4.3 - Représentation graphique de l'espace des solutions possibles.....	6
I.4.4 - Représentation graphique	6
I.5 - La formulation du problème intégré	9
I.5.1 - Forme de la programmation mathématique	10
Chapitre II : Optimisation	7
II.1 - Généralités et notations	11
II.1.1 - Le problème de la programmation mathématique multicritère.....	11
II.1.2 - La formulation du problème	11
II.1.3 - Définition de la solution idéale	14
II.1.4 - Convexité	14
II.2 - Solutions de paréto ou solutions non dominées	16
II.3 - L'optimum min-max	19
II.4 - Le problème de prise de décision	24
II.5 - Méthode de pondération des objectifs	25
II.5.1 - Interprétation géométrique	26

II.6 - Méthode du global programming ou méthode de programmation de but	29
II.7 - Méthode du critère global	32
II.7.1 - Autre forme de la fonction globale	33



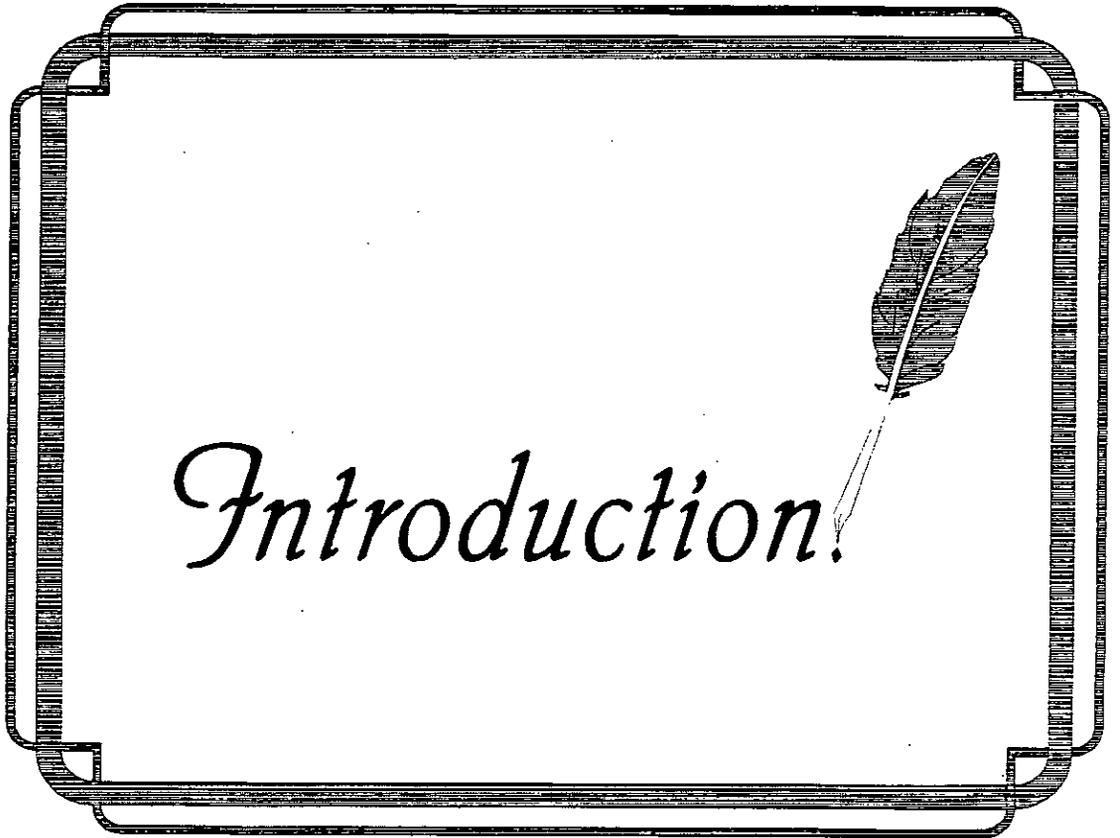
Chapitre III : Exemples d'application en calcul de structure	35
III.1 - Optimisation de la section transversale d'une poutre, soumise à une flexion composée	35
III.1.1 - Formulation du problème	35
III.2 - Optimisation d'une poutre soumise à une force de précontrainte des câbles	43
III.2.1 - Formulation du problème	43
III.3 - Optimisation d'un ensemble de barres soumises à des forces statiques (système à treillis)	52
III.3.1 - Formulation du problème	52

Chapitre IV : Optimisation de poutres isostatiques précontrainte

IV.1 - Introduction au calcul de béton précontraint	65
IV.1.1 - Effets d'un câble de précontrainte	65
IV.1.2 - Flexion de poutres isostatiques	70
IV.2 - Formulation du programme d'optimisation multicritère	81
IV.2.1 - Calcul des caractéristiques géométriques	82
IV.3 - Algorithmes de résolution et programmation	89
IV.3.1 - Méthode basées sur l'approche min-max	89
IV.3.2 - Deux algorithmes pour comparer des solutions	89
IV.3.3 - Méthodes pour chercher l'optimum min-max	94
IV.3.4 - Information des méthodes monté-carlo	98
IV.4 - Discussion des résultats	100
IV.4.1 - Influence du nombre points générés	100
IV.4.2 - Discussion sur la forme de l'ensemble de paréto	104
IV.4.3 - Calcul pratique pour la détermination de la précontrainte d'une section en double Té	107
IV.4.4 - Influence du choix domaines de variation des variables de decision	112

Conclusion

Annexes



Introduction

La méthode d'optimisation multicritère est probablement *une méthode mal connue dans le* domaine de Génie - civil pour le calcul et le prédimensionnement des structures.

Ainsi nous allons essayer de présenter ici cette méthode et de montrer son intérêt pour le dimensionnement *des structures*. Pour cela, ce mémoire s'articulera autour de quatre chapitres où seront développées les points essentiels *concernant* cette méthode.

→ Dans le premier chapitre sera décrite la formulation d'un problème d'optimisation multicritère.

On définira parallèlement : tous les éléments constituant cette formulation tel que *variables de décision et paramètres* les contraintes liées à l'environnement et au processus, ou aux ressources, on présentera de plus les fonctions objectifs ou critères.

Le deuxième chapitre illustre le principe d'optimisation, il introduit la notion de solutions de paréto et la solution optimum min-max par des exemples simples.

De plus on présentera le problème de prise de décision par suite on expose, quelques méthodes basées *sur la scalarisation de fonctions* tel que :

- La méthode de pondération des objectifs.
- La méthode de programmation de but.
- Et la méthode du critère global.

Dans le troisième chapitre est présentée trois cas d'exemple d'application en calcul de structures :

Exemple N° 1 : Optimisation d'une section rectangulaire soumise à une flexion composée.

Exemple N° 2 : Optimisation d'une poutre de section rectangulaire soumise à une force de précontrainte des câbles

Exemple N° 3 : Optimisation d'un ensemble de barres soumises à des forces statiques (système à treillis).

Dans le quatrième chapitre sera traité l'optimisation de poutres précontraintes. Ce qui constitue le but de notre travail.

En effet et en premier lieu on procède à une présentation détaillée du problème du béton précontraint et des différentes classes de précontrainte. Concernant la limitation des contraintes aux contraintes admissibles.

On en parlera aussi des différentes poutres utilisées pour n'utiliser que la section en double T qui nous intéresse dans notre étude.

En second lieu on procède à une formulation mathématique (sous forme d'équations et d'inéquations) pour pouvoir résoudre notre problème à l'aide d'un programme dont les algorithmes de résolution et programmation sont détaillés dans la troisième partie *de ce chapitre*.

En dernier lieu c'est-à-dire à la quatrième partie vient la partie de discussion de l'ensemble des résultats qu'on a pu obtenir du programme utilisé.

Finalement on procède à une conclusion générale ou on écrit toutes les constatations possibles et efficaces.

Chapitre : I

Programme multicritère.



Programme multicritère

I.1 Généralités et notations: Réf bib [1] Réf bib [16]

• *Introduction à la formulation d'un problème d'optimisation multicritères:*

Dans les problèmes complexes d'optimisation d'ingénierie, il existe souvent un nombre élevé de critères dont on doit considérés.

Cette situation est formulée comme : *un problème d'optimisation multicritère* (appeler aussi *multiperformance, multiple objectif ou vecteur optimisation*) où le but d'ingénieur est de minimiser et / ou maximiser pas seulement une fonction objectif mais plusieurs fonctions simultanément.

La formulation d'un problème d'optimisation consiste à construire un modèle mathématique décrivant le comportement d'un système physique cernant le domaine du problème.

Ce modèle doit approcher étroitement le comportement réel du système pour que la solution obtenue soit satisfaisante et utilisable. Nous allons voir comment formuler un problème d'optimisation multicritères pour la programmation mathématique, c'est-à-dire comment construire le modèle mathématique du système.

Généralement parler la programmation mathématique dans le sens considéré ici est l'analyse des problèmes du type:

Trouver l'optimum des fonctions objectifs quand les variables de décision sont liées à des contraintes inégalités et égalités. La programmation mathématique est rapidement devenue praticable et fondamentale pour l'étude des problèmes d'ingénierie et autres.

I.1.1 Variables de décision:

Dans un problème d'optimisation d'ingénierie les grandeurs numériques dont on devra choisir les valeurs seront appelées : "*Variables de décision*" ou plus simplement "*Variables*", dans la programmation mathématique ces quantités nous les noterons : X_i ; $i = 1, 2, \dots, n$ où x_i est la variable représentatif de la $i^{\text{ème}}$ quantité.

I.1.2 Variables de décision et paramètres:

Pour certain modèles d'optimisation, le choix du nombre et du type de variables de décision est simple, mais assez souvent la situation n'est pas claire au stade de la construction du modèle d'optimisation.

On décidera donc qu'elles grandeurs seront traitées comme variables de décision et les quelles seront fixées. nous appellerons ces dernières "*Paramètres*" des relations mathématiques entre les variables de décision et les paramètres constituent "*Un modèle d'optimisation*".

Une grandeur peut être considérée comme un "*Paramètre*" parce qu'on n'a pas la liberté de changer sa valeur, ou bien parce qu'on sait par expérience qu'une valeur donnée amène toujours de bons résultats.

Parfois, pour simplifier un problème, on peut traiter certaines quantités comme des paramètres alors qu'elles devraient être considérés comme des variables de décision.

Le problème est alors plus facile à résoudre, mais la solution ne correspond pas strictement à la réalité. Il faut donc décider quel degré de simplification est permis.

I.1.3 Notation formelle:

Maintenant on peut créer un vecteur des variables de décision, \bar{X} , qui n'est qu'une colonne contenant toutes les variables d'un problème.

Exemple :

$$\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

L'ordre des composantes du vecteur est arbitraire, mais une fois que la construction du vecteur est définie, n'importe quel vecteur de cette sorte peut être considéré comme une "*solution*".

I.2 Contraintes:

Pour chaque problème d'ingénieur, des conditions liées à l'environnement, au processus et / ou aux ressources doivent être satisfaites si on veut obtenir une solution acceptable. Ces conditions sont appelées fonctions de contrainte ou plus simplement contraintes et décrivent de quelle manière les variables de décision et les paramètres dépendent les uns des autres. Cela se traduit par des *inégalités mathématiques* et par fois par des *égalités*.

I.2.1 Contraintes sous forme inégalités:

En général, on écrit les contraintes inégalités sous la forme :

$$g_j(\bar{x}) \geq 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, m$$

ou $g_j(\bar{x}) \leq 0$

I.2.2 Contraintes sous forme d'égalités:

Pour certains modèles, nous pouvons avoir des contraintes égalités qui seront écrites sous la forme :

$$h_j(\bar{x}) = 0 \quad \text{où } j = 1, 2, \dots, p$$

Remarquons que p , le nombre d'égalités, doit être inférieur à n , le nombre de variables de décision; si on a $p > n$, le problème est dit "*Surcontraint*", c'est-à-dire qu'on n'a aucun degré de liberté pour optimiser.

Le nombre de degrés de liberté est donnée par la différence $(n-p)$.

I.2.3 Forme implicite des contraintes:

Dans la plupart des cas, des exemples traités par l'optimisation multicritères toutes les contraintes sont écrites de manière *explicite*, mais il existe des modèles plus complexes pour lesquels on ne peut pas écrire directement les g_j , c'est-à-dire les relations liant les composantes du vecteur \bar{x} .

Mais pour de nombreuses méthodes numériques d'optimisation, il est suffisant d'écrire les contraintes de façon implicite.

Evidemment, cela doit permettre le calcul des $g_j(\bar{x})$ pour tout vecteur \bar{X} , et c'est habituellement un algorithme qui le fait.

I.3 Fonctions objectifs ou critères: (fonctions but)

- Fonction but:

Parmi toutes les solutions qui satisfont les contraintes, on doit ensuite choisir une bonne solution; on a donc besoin de critères permettant de comparer les solutions entre elles.

Ces critères sont les qualités inhérentes à chaque solution, et dans le modèle d'optimisation elles doivent être exprimées par des fonctions des variables de décision.

Ces fonctions, appelées fonctions but, ne sont pas proportionnelles entre elles et généralement, certaines sont même en conflit avec les autres.

On désigne les fonctions but par $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ ou, pour accentuer leur dépendance vis à vis des variables de décision, par $f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), f_3(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x})$.

I.3.1 Fonction objectif et contrainte:

Depuis que les méthodes d'optimisation à un seul critère sont développées, beaucoup de problèmes d'ingénierie sont réduits à des modèles d'optimisation à un seul critère qui ne demandent la sélection que d'une seule qualité comme fonction but, ce qui est assez souvent difficile; pour les modèles d'optimisation multicritères, cette question ne se pose pas puisqu'on peut avoir autant de fonctions but que l'on veut.

Le seul problème est de décider quelles qualités seront traitées comme fonctions but et les quelles seront des contraintes.

I.3.2 Notation formelle:

Les fonctions but forment un vecteur fonction $\bar{f}(\bar{x})$ qui est une colonne contenant toutes les fonctions considérées dans ce modèle. Comme pour le vecteur des variables de décision \bar{X} , l'ordre des composantes du vecteur $\bar{f}(\bar{x})$ est arbitraire, mais une fois qu'il est choisi, on ne peut plus le changer. Ce choix est fait lorsque l'on prescrit un indice à chaque fonction but.

De manière générale : $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), f_3(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x}))^t$

I.4 Représentation graphique

I.4.1 Espace des variables de décision et espace des fonctions objectif (fonction but):

L'ensemble de tous les n-uplés de nombres réels noté E^n est appelé n-espace Euclidien. Comme on a le vecteur des variables de décision et le vecteur des fonctions but, on doit considérer deux espaces euclidiens :

- (1) - L'espace à n dimensions des variables de décision où chaque axe de coordonnées correspond à une composante du vecteur \bar{X} et
- (2) - L'espace à k dimensions des fonctions objectif où chaque axe correspond à une composante du vecteur $\bar{f}(\bar{x})$.

Chaque point du premier espace représente une solution et donne un point dans le deuxième espace qui détermine une qualité de cette solution grâce à une valeur de la fonction but.

I.4.2 Exemple:

On se limite simplement au problème de planification d'une production détermination du nombre de sacs de ciment à fabriquer pour deux classes de ciment tel que: la classe A et la classe B On peut définir ainsi.

X_1 : Nombre de sacs de classe A à produire.

X_2 : Nombre de sacs de classe B à produire.

Les deux produits A et B demandent du temps dans deux départements.

Le produit A passe 1 heure dans le premier département et 1 heure 1/4 dans le second.

Le produit B passe 1 heure dans le premier département et 3/4 d'heure dans le second.

Le nombre d'heures disponibles dans chaque département est de 200 heures par moins de plus il existe un marché potentiel maximum de 150 unités pour le produit B.

Ces restrictions sont traduites par les inégalités de contraintes suivantes :

$$X_1 + X_2 \leq 200$$

$$1,25.X_1 + 0,75.X_2 \leq 200$$

$$X_2 \leq 150$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

La représentation graphique est de ce fait un espace *bidimensionnel*.

La figure I.4.2.(a) montre l'espace des variables de décision. Dans cet espace, les contraintes inégalités sont données par leur formes générales.

$$g_1(\bar{x}) \equiv 200 - x_1 - x_2 \geq 0$$

$$g_2(\bar{x}) \equiv 200 - 1,25.x_1 - 0,75.x_2 \geq 0$$

$$g_3(\bar{x}) \equiv 150 - X_2 \geq 0$$

$$g_4(\bar{x}) \equiv X_1 \geq 0$$

$$g_5(\bar{x}) \equiv X_2 \geq 0$$

Où : le symbole \equiv signifie "*est défini comme*"

Ces cinq inéquations forment un ensemble de solutions possibles, c'est-à-dire : *une région possible* notée X est désigné par l'aire hachurée, chaque point \bar{X} tel que $\bar{X} \in X$ définit une *solution possible*.

Pour cet même exemple où le produit A est de haute qualité et le produit B de moins bonne qualité.

Les bénéfices sont respectivement de 4\$ et 5\$ par produit. Le meilleur client de la compagnie souhaite avoir autant de produits A que possible.

Pour résoudre ce problème, on doit donc considérer deux objectifs :

- (1) la maximisation du bénéfice;
- (2) la maximisation de la production de A.

Ces fonctions but qui s'écrivent de la manière suivante :

$$f_1(\bar{x}) = 4.x_1 + 5.x_2$$

$$f_2(\bar{x}) = x_1$$

N.B: On s'intéressera seulement à la représentation graphique de l'espace des fonctions but.

Cet espace de fonctions but est un ensemble des valeurs que ces fonctions objectif, c'est-à-dire les fonctions $f_1(\bar{x})$ et $f_2(\bar{x})$ peuvent prendre, noté F et désigné sur la figure I.4.2 (b) par l'air hachurée.

I.4.3 Représentation graphique, de l'espace des solutions possibles noté X dont les axes sont (X_1, X_2) et de son image noté (F) dont les axes seront respectivement $(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}))$):

Voir schéma.

I.4.4 Calcul correspondant à la détermination de l'ensemble image (F) , équations des différentes droites qui le limite:

Rappel : Des équations qui limitent le domaine intérieur X .

$$g_1(\bar{x}) = 200 - x_1 - x_2 = 0 \quad (\text{A})$$

$$g_2(\bar{x}) = 200 - 1,25 \cdot x_1 - 0,75 \cdot x_2 = 0 \quad (\text{B})$$

$$g_3(\bar{x}) = 150 - x_2 = 0 \quad (\text{C})$$

$$g_4(\bar{x}) = x_1 = 0 \quad (\text{D})$$

$$g_5(\bar{x}) = x_2 = 0 \quad (\text{E})$$

d'une part,

et d'autre part les fonctions but : $f_1(\bar{x})$ et $f_2(\bar{x})$ sont définies par

$$f_1(\bar{x}) = 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

$$f_2(\bar{x}) = x_1 \quad \text{où : } \bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}) ; f_2(\bar{x}))$$

1^{er} Cas : Image de la droite définie par : $x_2 = 0$ et $0 \leq x_1 \leq 160$

$$\text{Soit : } \begin{cases} f_1(\bar{x}) = 4 \cdot x_1 \\ f_2(\bar{x}) = x_1 \end{cases} \quad \text{et } 0 \leq x_1 \leq 160$$

D'où :

$$\boxed{f_2(\bar{x}) = \frac{1}{4} f_1(\bar{x})}$$

et $0 \leq f_1(\bar{x}) \leq 640$ qui représente une droite affine dans l'espace $(f_1(\bar{x}) ; f_2(\bar{x}))$.

2ème Cas : Image de la droite définie par : $x_1 = 0$ et $0 \leq x_2 \leq 150$

$$\text{Soit : } \begin{cases} f_1(\bar{x}) = 5.x_2 \\ f_2(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \bar{f} = (5.x_2, 0) \text{ et } 0 \leq x_2 \leq 150$$

Il y'aura variation seulement sur l'axe de la première fonction objectif c'est-à-dire la fonction $f_1(\bar{x})$ de l'ensemble F tel que : $0 \leq f_1(\bar{x}) \leq 750$

3ème Cas : $0 \leq x_1 \leq 50$ et $x_2 = 150$

$$\text{Par la suite : } \begin{cases} f_1(\bar{x}) = 4.x_1 + 750 \\ f_2(\bar{x}) = x_1 \end{cases} \quad \text{Soit : } f_1(\bar{x}) = 4.f_2(\bar{x}) + 750$$

Finalement :

$$f_2(\bar{x}) = \frac{1}{4} f_1(\bar{x}) - \frac{750}{4}$$

$$750 \leq f_1(\bar{x}) \leq 950$$

et

$$0 \leq f_2(\bar{x}) \leq 50 \quad \text{qui est une droite affine dans l'espace } (f_1(\bar{x}); f_2(\bar{x})).$$

4ème Cas : $50 \leq x_1 \leq 100$ et $x_2 = 200 - x_1$

$$\text{Dans ce cas : } f_1(\bar{x}) = 4.x_1 + 5.(200 - x_1) = (1000 - x_1) \quad \text{et} \quad f_2(\bar{x}) = x_1$$

On obtient alors :

$$f_2(\bar{x}) = 1000 - f_1(\bar{x})$$

$$\text{et } 900 \leq f_1(\bar{x}) \leq 950 \quad \text{qui est une droite affine dans l'espace } (f_1(\bar{x}); f_2(\bar{x})).$$

5ème Cas : $100 \leq x_1 \leq 160$ et $0 \leq x_2 \leq 100$

$$\text{tel que l'équation : } 200 - 1,25.x_1 - 0,75.x_2 = 0$$

$$\text{Soit : } x_2 = \frac{-5}{3}.x_1 + \frac{800}{3}$$

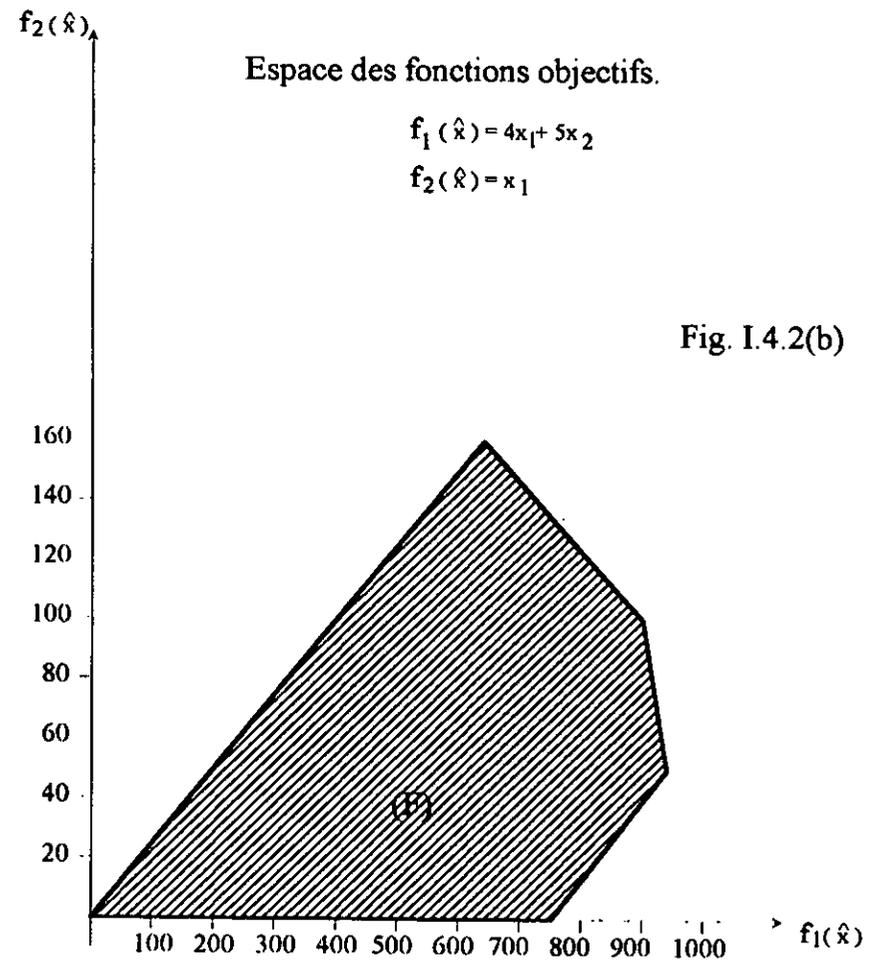
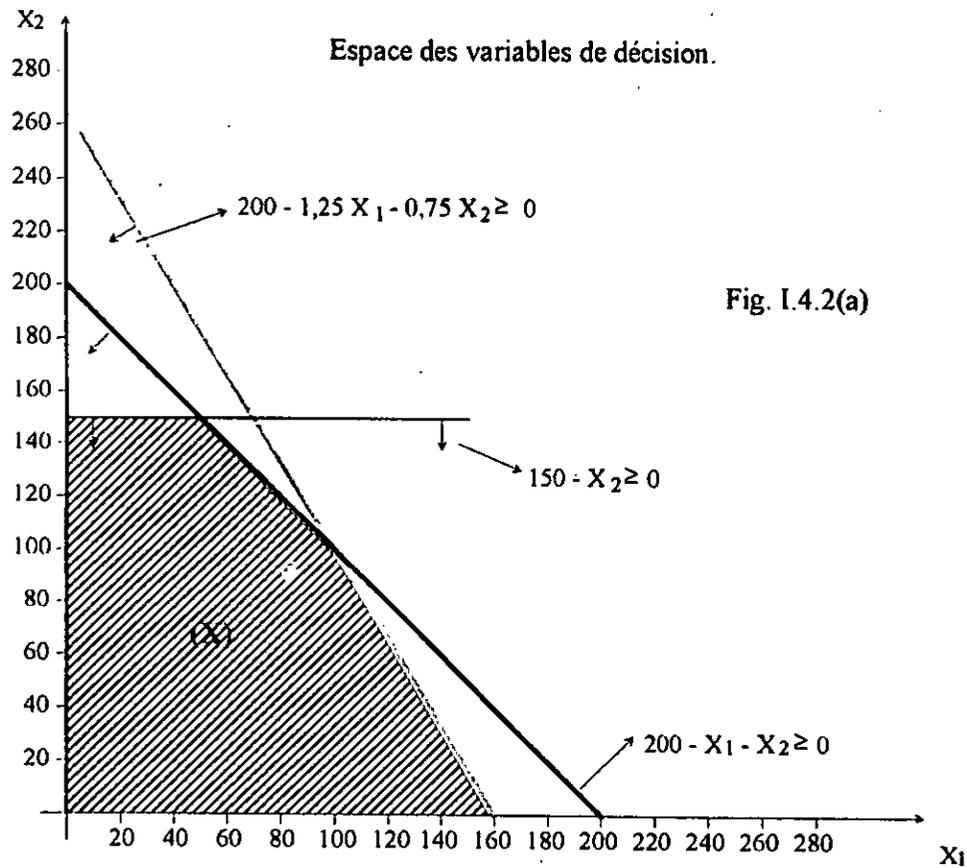
$$\text{Ainsi : } f_1(\bar{x}) = 4.x_1 + 5.\left(\frac{-5}{3}.x_1 + \frac{800}{3}\right) = \frac{-13}{3}.x_1 + \frac{4000}{3}$$

$$\text{et } f_2(\bar{x}) = x_1$$

On tire par conséquent :

$$f_2(\bar{x}) = \frac{-13}{3}.f_1(\bar{x}) + \frac{4000}{3}$$

$$\text{et } 640 \leq f_1(\bar{x}) \leq 900$$



I.5 La formulation du problème intégré:

Après avoir fait le jugement adapté du point de vue de l'ingénierie et défini les fonctions but et les fonctions de contraintes, on FORMULE un problème d'optimisation multicritères pour la programmation mathématique comme suit:

- Trouver le vecteur \bar{x}^* qui satisfait les m contraintes inégalités:

$$g_j(\bar{x}) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

et les p contraintes égalités : $h_j(\bar{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad p < n$

et optimise le vecteur fonction $\bar{f}(\bar{x})$.

En d'autres mots, on veut déterminer l'ensemble : $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ qui produit les valeurs optimum de toutes les fonctions but, à partir de l'ensemble de tous les nombres qui satisfont les contraintes inégalités et égalités indiquées ci-dessus.

Ici, "Optimiser" ne veut pas simplement dire trouver le maximum ou le minimum de la fonction but comme c'est le cas pour un problème d'optimisation monocritère.

Cela veut dire trouver une "bonne" solution en considérant toutes les fonctions but.

Bien sur, on doit d'abord décider sur quels critères une solution est jugée "bonne" ou "mauvaise".

On parlera de cette importante question dans le chapitre suivant. Considérons donc qu'on s'ait déjà ce qu'est cet optimum.

Le problème suivant est de trouver cet optimum ou un ensemble de solutions optimum qui aidera l'ingénieur à prendre une décision on en parlera également dans le chapitre suivant dans la formulation standard donné ci-dessus, les contraintes égalités et inégalités apparaissent toutes deux.

Bien sur, on doit pouvoir aussi résoudre des problèmes dans les quels on a :

- 1- Que des contraintes inégalités.
- 2- Que des contraintes égalités.
- 3- Pas de contraintes.

Dans ce dernier cas, appelé problème d'optimisation sans contrainte, il n'y a aucune restriction sur le vecteur \bar{X} et l'ensemble des solutions possibles X est donc espace Euclidien E^n .

Dans la plupart des problèmes traduisant des cas réels, cela se produit très rarement.

I.5.1 Forme de la programmation mathématique:

Les méthodes de programmation mathématiques qui servent à résoudre le problème que nous venons de formuler peuvent être classées comme suit :

- 1 - Programmation linéaire :** Les fonctions but et de contrainte sont toutes deux des fonctions linéaires des variables de décision (cf : voir exemple déjà cité: problème de planification d'une production).
- 2 - Programmation non linéaire :** Au moins une des fonctions mentionnées ci-dessus n'est pas linéaire.
- 3 - Programmation entière :** La solution n'est pas choisie dans l'ensemble des nombres réels, mais dans celui des nombres entiers.

Les méthodes numériques de résolution de tels problèmes sont plus complexes et sont beaucoup moins développés que les deux précédentes, même pour des problèmes d'optimisation monocritères.

- 4 - Programmation discrète :** La solution est choisie dans un ensemble de valeurs discrètes possibles.

Cette programmation est la plus complexe pour résoudre des problèmes d'optimisation à un seul critère, ainsi que les multicritères.

Mais elle apparaît assez souvent dans le travail des ingénieurs.

Chapitre : II



Optimisation

Optimisation

II.1 Généralités et notations: Réf bib [1] Réf bib [16] Réf bib [6]

II.1.1 Le problème de la programmation mathématique multicritères:

Le problème est formulé comme suit :

Trouver un vecteur de variables de décisions qui satisfait les contraintes et optimise un vecteur fonction dont les éléments représentent les fonctions but.

Ces fonctions forment une description mathématique de critères de performance qui sont généralement en conflit.

A partir de là, le terme "Optimiser" signifie trouver une solution qui donnerait des valeurs acceptables pour toutes les fonctions but.

On peut discuter de ce qu'une approche mathématique formalisée peut offrir ici.

D'abord on définit l'optimum paréto. Cet optimum désigne une solution "non inférieure", c'est à dire une solution pour laquelle on ne peut pas améliorer un critère sans en faire empirer un autre. Il est clair que la solution doit être choisie dans "l'ensemble de paréto", mais cela est encore vaste.

En suite, on définit l'optimum "min max". Cet optimum donne une solution qui considère tous les problèmes comme étant d'égale importance.

Pour cette solution, la valeur de chacune des fonctions but est aussi proche que possible du minimum qu'elles atteindraient séparément. Si la solution n'est pas acceptable, ce qui arrive encore assez souvent, l'ingénieur est confronté au problème *de prise de décision*.

II.1.2 La formulation du problème:

Nous avons déjà formulé le problème dans le paragraphe 5 du chapitre précédent ;

Il s'agit en effet de :

$$\text{Trouver } \bar{x}^* \text{ tel que : } \quad \bar{f}(\bar{x}^*) = \text{opt } \bar{f}(\bar{x}) \quad [2.1]$$

$$\text{et : } \quad g_j(\bar{x}) \geq 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m \quad [2.2]$$

$$h_j(\bar{x}) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, p \quad \text{tel que } p < n \quad [2.3]$$

Où :

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ est le vecteur des variables de décision défini dans l'espace Euclidien à n dimensions E^n , et $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}) ; \dots ; f_k(\bar{x}))^t$ est le vecteur fonction défini dans l'espace à k dimensions E^k .

$g_j(\bar{x})$, $h_j(\bar{x})$ et $f_i(\bar{x})$ sont des fonctions linéaires et / ou non linéaires des variables

On réserve \bar{x}^* pour noter la solution optimale, *ou un ensemble de solutions optimales*.

$I = (1, 2, \dots, k)$ représente l'ensemble des indices de toutes les fonctions but.

Dans un problème d'optimisation multicritères, on peut :

- (1) minimiser toutes les fonctions objectif ;
- (2) maximiser toutes les fonctions objectif ou
- (3) en minimiser certaines et maximiser les autres.

Pour une raison pratique, on exprime toutes les fonctions que l'on doit maximiser sous une forme qui permet de les minimiser grâce à l'identité :

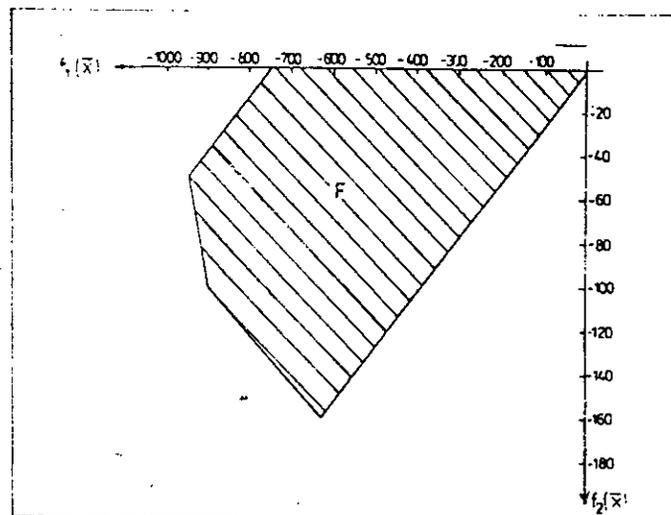


Fig. II.1 : Ensemble F du problème de planification de production après l'emploi de 2.4

$$\max f_i(\bar{x}) = - \min (-f_i(\bar{x})) \quad [2.4]$$

De la même façon, les inégalités :

$$g_j(\bar{x}) \leq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad [2.5]$$

sont équivalentes à :

$$-g_j(\bar{x}) \geq 0 \quad ; \quad j=1, 2, \dots, m \quad [2.6]$$

qui est de la même forme que [2.2] et les p égalités données par [2.3] peuvent être remplacées par $2.p$ inégalités :

$$\begin{aligned} h_j(\bar{x}) &\geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, p \\ -h_j(\bar{x}) &\leq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad [2.7]$$

Comme les méthodes numériques pour traiter les contraintes sous forme d'égalités ou d'inégalités sont différentes, on préfère les traiter séparément. De nombreuses méthodes d'optimisation ne peuvent faire face qu'à des inégalités, et ce sont donc elles qui reviennent le plus souvent pour traiter des travaux d'ingénierie.

Un problème d'optimisation multicritères peut être écrit plus simplement sous la forme :

$$\bar{f}(\bar{x}^*) = \text{opt } \bar{f}(\bar{x}) \quad , \quad \bar{x} \in X$$

Où : $f: X \rightarrow E^k$

$$X = \{ \bar{x} \in E^n / \bar{g}(\bar{x}) \geq 0, \bar{h}(\bar{x}) = 0 \} \quad [2.8]$$

L'abréviation "opt" signifie ici l'optimum du vecteur fonction.

Il n'y a pas de définition générale de cet optimum, mais bien sur s'il existe $\bar{x}^* \in X$ tel que

$$\forall i = 1, 2, \dots, k \quad , \quad \forall \bar{x} \in X, \quad f_i(\bar{x}^*) \leq f_i(\bar{x}) \quad [2.9]$$

Alors \bar{x}^* est une solution acceptable. Un exemple de cette situation est illustré figure II.2.

Malheureusement, c'est une solution utopique, il est très improbable que tous les $f_i(\bar{x})$ trouvent leur minimum en même point \bar{x}^* .

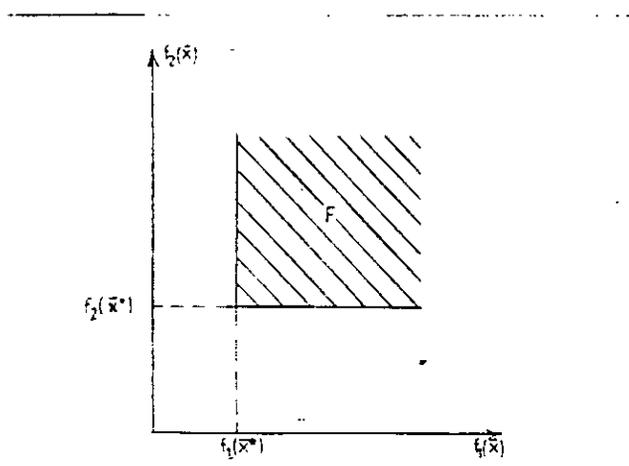


Fig. II.2 : Illustration graphique de la solution utopique.

Avant de continuer, nous allons définir deux termes qui nous seront utiles.

II.1.3 Définition de la solution idéale:

Pour la déterminer, il faut trouver les minima que chaque fonction objectif atteindrait séparément, si on peut les trouver, appelons :

$\bar{x}^{0(i)} = (x_1^{0(i)}, x_2^{0(i)}, \dots, x_n^{0(i)})^t$ le vecteur qui minimise la $i^{\text{ème}}$ fonction objectif $f_i(\bar{x})$

On a donc : $f_i(\bar{x}^{0(i)}) = \min_{\bar{x} \in X} f_i(\bar{x})$, $\bar{x} \in X$ [2.10]

Nous utiliserons f_i^0 pour noter la valeur minimum de la $i^{\text{ème}}$ fonction.

Un vecteur : $\bar{f}^0 = (f_1^0, f_2^0, \dots, f_k^0)^t$ est *idéal*.

Pour un problème d'optimisation multicritères et le point de E^n qui détermine ce vecteur est *la solution idéal*.

Pour trouver le vecteur \bar{f}^0 , il faut résoudre k problèmes d'optimisation scalaires.

La solution *idéale* n'est jamais possible, mais on se réfère souvent au vecteur \bar{f}^0 .

II.1.4 Convexité:

II.1.4.1 Ensembles et fonctions convexes:

II.1.4.1.a Ensembles convexes:

- Ensemble convexe:

Un ensemble convexe dans E^n est un ensemble tel que, étant donné deux points x_1 et x_2 appartenant à l'ensemble, et $0 \leq \theta \leq 1$, tous les points qui se trouvent sur la ligne joignant x_1 à x_2 et définis par :

$$x = (1 - \theta).x_1 + \theta.x_2 \quad [2.11]$$

Sont aussi dans l'ensemble, le convexe d'un ensemble donné est l'intersection de tous les ensembles convexes qui contiennent l'ensemble donné.

Un point extrême d'un ensemble convexe est un point qui n'appartient pas à une ligne joignant deux distincts de l'ensemble.

Un polyèdre est un ensemble *convexe*, il est le convexe de ses points extrêmes, qui sont ses sommets.

II.1.4.1.b' Fonctions convexes:

- Fonction convexe:

La fonction $f(x)$ est dite convexe sur un ensemble convexe X dans E^n si pour toute paire de points x_1 et x_2 dans X et pour tout θ , tel que $0 \leq \theta \leq 1$.

$$f[\theta.x_2 + (1 - \theta).x_1] \leq \theta.f(x_2) + (1 - \theta).f(x_1) \quad [2.12]$$

La même fonction $f(x)$ est dite strictement convexe si le signe \leq est remplacé par le signe $<$

Géométriquement [2.12] signifie que l'hypersurface $Z = f(x)$ est convexe si la ligne joignant toute paire de points (x_1, Z_1) ; (x_2, Z_2) qui se trouvent sur la surface, se trouve sur ou au-dessus de la surface.

Une somme de fonctions convexes est une fonction convexe.

Exemple:

- Fonction linéaire:

$Z = c \times x$ est une fonction convexe, sur tout l'espace E^n , puisque :

$$C.[\theta.x_2 + (1 - \theta).x_1] = \theta.(C.x_2) + (1 - \theta).(C.x_1)$$

Toute fois, elle n'est pas strictement convexe. En utilisant les deux définitions précédents on peut citer la définition suivante:

Définition:

L'ensemble F est convexe pour tout $\bar{u}^1, \bar{u}^2 \in F$ et tout $\theta \in [0, 1]$ si :

$$f[\theta.\bar{u}^2 + (1 - \theta).\bar{u}^1] \leq \theta.f(\bar{u}^2) + (1 - \theta).f(\bar{u}^1) \quad [2.13]$$

(Le segment joignant ces points est aussi dans l'ensemble).

Les figures a et b montrées ci-dessous: *sont convexes* contrairement aux figures c et d.

Voir schéma.

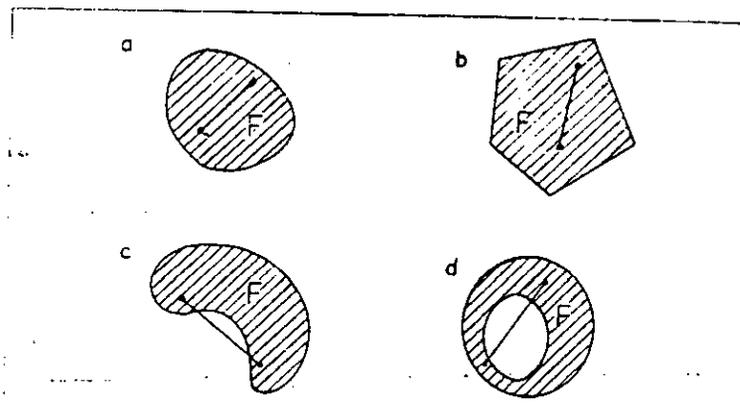


Fig. II.3 : Ensembles convexes et concaves.

Pour les méthodes d'optimisation, on a souvent besoin de savoir si ce qu'on appelle "*L'ombre t-directionnelle*" pour le champ d'action F est convexe. On appelle F^t cette ombre et elle est définie par :

$$F^t = \{ y \in E^k / y = \bar{f} + \alpha \cdot \bar{t}, \bar{f} \in F^P, \alpha \in E^1, \alpha \geq 0 \}$$

La figure suivante illustre cette définition.

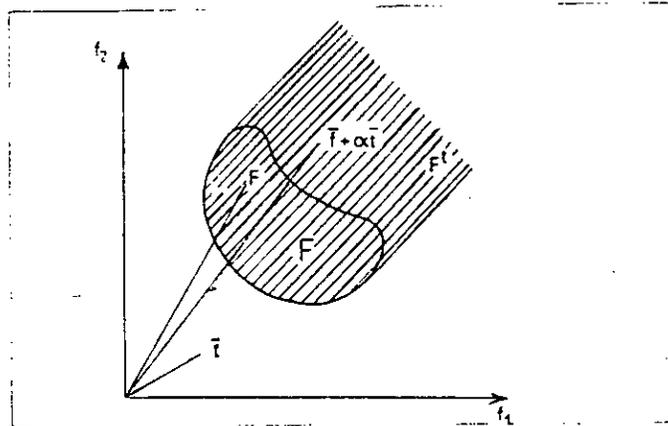


Fig. II.4 : Illustration graphique de l'ombre t-directionnelle pour le champ d'action F .

Un problème d'optimisation multicritère est dit *convexe* si F^t est *convexe* $\forall \bar{t} > 0$.

Certaines méthodes de résolution demandent un problème convexe. Si ce n'est pas le cas, ces méthodes ne sont pas valables.

Mais on ne dispose d'aucune méthode analytique pour savoir si un problème est convexe ou non.

II.2 Solutions de paréto ou solutions non dominées:

- *Optimum paréto* :

Le concept de cet optimum a été formulé par V.Paréto en 1896 et il représente encore aujourd'hui la partie la plus importante de l'analyse multicritères. Habituellement, on énonce cet optimum de la façon suivante:

Un point $\bar{x}^* \in X$ est un *minimum paréto* si pour tout $\bar{x} \in X$:

$$\forall i \in I, f_i(\bar{x}) = f_i(\bar{x}^*) \quad [2.14]$$

Ou, il existe au moins un $i \in I$ tel que:

$$f_i(\bar{x}) > f_i(\bar{x}^*) \quad [2.15]$$

Cette définition est basée sur la conviction intuitive que le point \bar{x}^* est le point optimal si aucun critère ne peut être amélioré sans en empirer un autre.

Malheureusement, l'optimum paréto donne presque toujours un ensemble de solutions au lieu d'une solution unique, ces solutions sont appelées *solutions "non-inférieures"* ou *"non-dominées"*.

On note cet ensemble de solutions X^P et sa correspondance dans l'espace des objectifs est appelée F^P .

Considérons le problème représenté en figures I.4.2 (a); (b) pour le quel X^P et F^P sont désignés par les traits en gras figures II.2 (a); (b).

Les équations [2.14] et [2.15] ne sont satisfaites que lorsque F^P correspond aux frontières de F . Il arrive que X^P corresponde également aux frontières de X , mais ce n'est pas une règle.

Exemple 2.1: Le problème est :

D'optimiser :

$$f_1(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 12.(x_1 + x_2) \quad \rightarrow \min.$$

$$f_2(\bar{x}) = x_1 \cdot x_2 \quad \rightarrow \max.$$

assujettis à :

$$g_1(\bar{x}) \equiv -0,5 \cdot x_1^2 + 5 \cdot x_1 - x_2 - 6 \geq 0$$

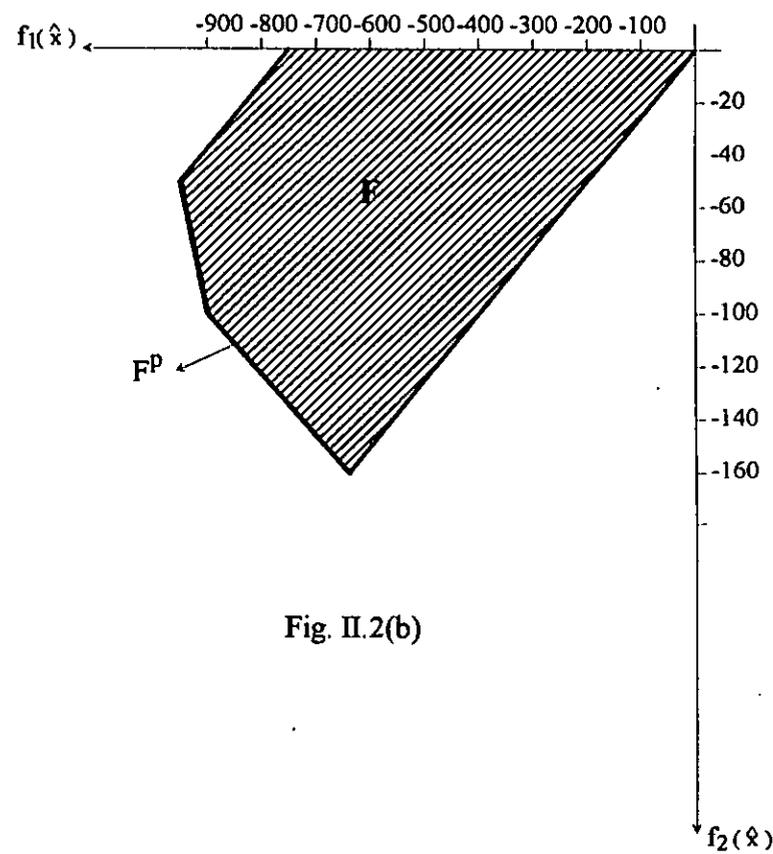
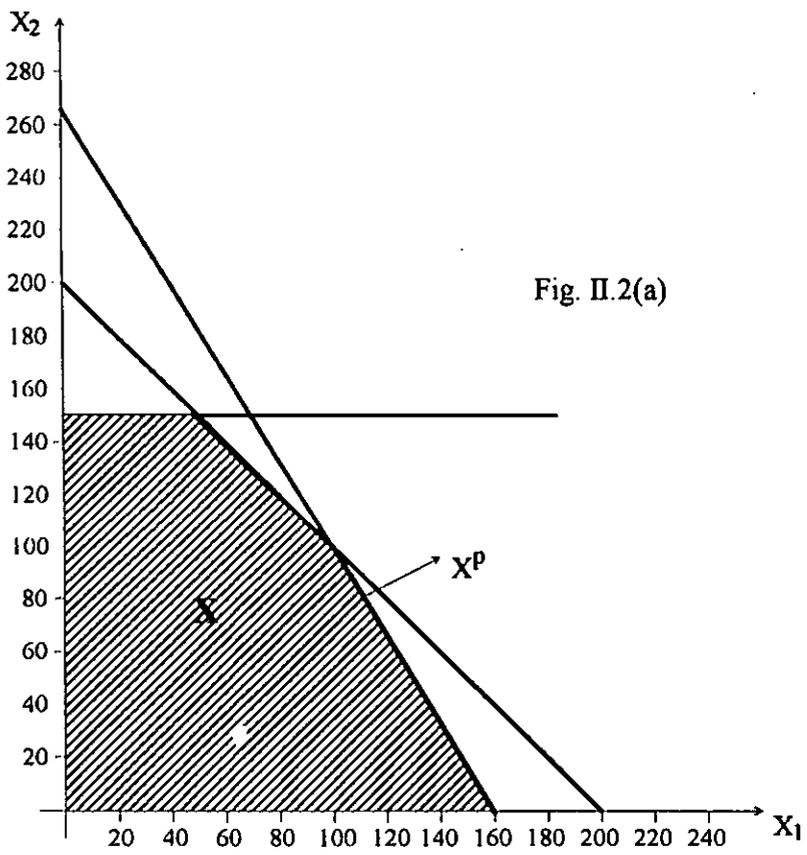
$$g_2(\bar{x}) \equiv -x_1^2 + 6 \cdot x_1 - x_2^2 + 14 \cdot x_2 - 42 \geq 0$$

$$g_3(\bar{x}) \equiv -x_1^2 + 16 \cdot x_1 - x_2^2 + 6 \cdot x_2 - 48 \geq 0$$

On transforme la seconde fonction but de manière à pouvoir la minimiser, ce qui nous donne:

$$f_2(\bar{x}) = -x_1 \cdot x_2$$

L'illustration de ce problème est montrée figure II.5, où les ensembles X^P et F^P sont désignés par les traits en gras.



Les ensembles X^P et F^P pour le problème de planification de production.

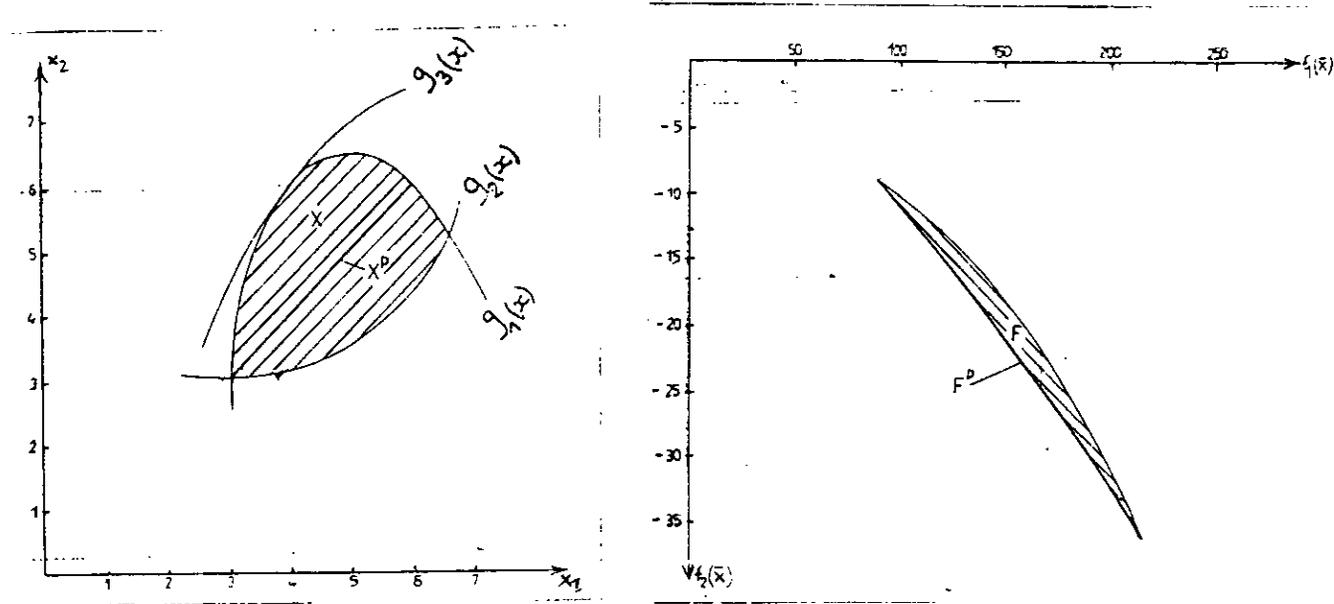


Fig. II.5 : Ensembles X^P et F^P pour l'exemple 2.1.

II.3 L'optimum min-max:

L'idée d'énoncer l'optimum min-max et de l'appliquer à des problèmes multicritères est venue de la théorie des jeux qui permet de résoudre des situations conflictuelles. L'approche du min-max à un modèle linéaire a été proposée par Jutler (1967) et Solich (1969). Elle a été ensuite développée par Osyczka (1978), (1981). L'optimum du min-max compare les déviations relatives des différents minima des fonctions prises séparément. Considérons la $i^{\text{ème}}$ fonction objectif pour la quelle la déviation relative peut être calculée par :

$$Z'_i(\bar{x}) = |f_i(\bar{x}) - f_i^0| / |f_i^0| \tag{3.1}$$

Ou par :

$$Z''_i(\bar{x}) = |f_i(\bar{x}) - f_i^0| / |f_i(\bar{x})| \tag{3.2}$$

Avec: $\forall i \in I$ et $\forall \bar{x} \in X \quad f_i(\bar{x}) \neq 0$.

Remarquons que nous transformons l'énoncé initial du problème en une forme pour la quelle on minimise toutes les fonctions objectif. Cette transformation amène les équations [3.1] et [3.2] à donner des représentations différentes des écarts relatifs : pour les équations que l'on minimise.

L'équation [3.1] définit les incréments relatifs des fonctions, alors que pour c_i elles que l'on maximise, elle définit leur décrétement relatif. L'équation [3.2] travaille inversement.

Soit $\bar{Z} = (Z_1(\bar{x}), \dots, Z_1(\bar{x}), \dots, Z_k(\bar{x}))$ le vecteur des incréments relatifs définis en E^k . Les composantes du vecteur $\bar{Z}(\bar{x})$ sont évaluées grâce à la formule:

$$\forall i \in I, Z_i(\bar{x}) = \max \{ Z'_i(\bar{x}), Z''_i(\bar{x}) \} \quad [3.3]$$

Maintenant, définissons l'optimum min-max de la façon suivante:

Un point \bar{x}^* est optimum min-max si, pour tout $\bar{x} \in X$, il satisfait la formule de récurrence suivante: $\bar{x}^* \in X$

$$\text{Pas 1: } V_1(\bar{x}^*) = \min \max \{ Z_i(\bar{x}) \} \quad \bar{x} \in X, \quad i \in I$$

On a alors: $I_1 = \{ i_1 \}$, où i_1 est l'indice pour le quel la valeur de $Z_i(\bar{x})$ est maximale.

S'il existe un ensemble $X_1 \subset X$ de solutions qui satisfont le pas 1, alors.

$$\text{Pas 2: } V_2(\bar{x}^*) = \min \max \{ Z_i(\bar{x}) \} \quad \bar{x} \in X_1, \quad i \in I \quad i \notin I_1$$

et $I_2 = \{ i_1, i_2 \}$,

où i_2 est l'indice de la valeur pour le quelle $Z_i(\bar{x})$ est maximale dans ce pas. [3.4]

S'il existe un ensemble de solutions $X_{r-1} \subset X$ qui satisfont le pas r-1, alors:

$$\text{Pas r: } V_r(\bar{x}^*) = \min \max \{ Z_i(\bar{x}) \} \quad \bar{x} \in (X_{r-1}), \quad i \in I \text{ et } i \notin I_{r-1}$$

et $I_r = \{ I_{r-1}, i_r \}$,

où l'indice i_r est celui pour le quel la valeur $Z_i(\bar{x})$ est maximum dans le pas r.

S'il existe un ensemble de solutions $X_{k-1} \subset X$ de solutions qui satisfont le pas k-1, alors.

$$\text{Pas k: } V_k(\bar{x}^*) = \min Z_i(\bar{x}) \quad \text{pour } i \in I \text{ et } i \notin I_{k-1}, \quad \bar{x} \in X_{k-1}$$

Où $V_1(\bar{x}^*), \dots, V_k(\bar{x}^*)$ est l'ensemble des valeurs optimales des déviations fractionnaires rangées par ordre décroissant on peut définir cet optimum comme suit: connaissant les valeurs extrêmes de la fonction objectif que l'on peut obtenir en optimisant chaque critère séparément, la solution désirée est celle qui donne la plus petite valeur de l'incrément relatif de toutes les fonctions objectifs.

Le point \bar{x}^* qui satisfait peut être appelé la meilleur solution de compromis en considérant tous les critères simultanément, et avec la même importance.

Exemple 2.2:

$$\text{Optimiser: } f_1(\bar{x}) = x_1 + x_2^2 \rightarrow \min.$$

$$f_2(\bar{x}) = x_1^2 + x_2 \rightarrow \min.$$

Assujettis à :

$$g_1(\bar{x}) = 12 - x_1 - x_2 \geq 0$$

$$g_2(\bar{x}) = -x_1^2 + 10.x_1 - x_2^2 + 16.x_2 - 80 \geq 0$$

Pour travailler avec un ensemble fini de solutions, on considère que c'est un problème à programmation entière. Les minima que l'on peut atteindre séparément sont:

$$f_1^0 = 30 \qquad \bar{x}^0(1) = (5,5)^t$$

$$f_2^0 = 12 \qquad \bar{x}^0(2) = (2,8)^t$$

Pour toutes les valeurs entières de \bar{x} qui satisfont les contraintes $g_1(\bar{x})$ et $g_2(\bar{x})$, le tableau suivant donne les résultats des calculs des composantes du vecteur $\bar{Z}(\bar{x})$:

No.	$\bar{x} = [x_1, x_2]^T$	$f(\bar{x}) = [f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x})]^T$	$z_1(x)$	$z_1(x)$	$z_2(x)$	$z_2(x)$	$\bar{z}(\bar{x}) = [z_1(\bar{x}), z_2(\bar{x})]^T$	$\max_{i \in \{1,2\}} \{z_i(x)\}$	i_1	$z_i(x), i \neq i_1$
1	$[2, 8]^T$	$[66.0, 12.0]^T$	1.200	0.545	0.000	0.000	$[1.200, 0.000]^T$	1.200	1	0.000
2	$[3, 6]^T$	$[39.0, 15.0]^T$	0.300	0.230	0.250	0.200	$[0.300, 0.250]^T$	0.300	1	0.250
3	$[3, 7]^T$	$[52.0, 16.0]^T$	0.733	0.423	0.333	0.250	$[0.733, 0.333]^T$	0.733	1	0.333
4	$[3, 8]^T$	$[67.0, 17.0]^T$	1.233	0.552	0.416	0.294	$[1.233, 0.416]^T$	1.233	1	0.416
5	$[3, 9]^T$	$[84.0, 18.0]^T$	1.800	0.642	0.500	0.333	$[1.800, 0.500]^T$	1.800	1	0.500
6	$[4, 6]^T$	$[40.0, 22.0]^T$	0.333	0.250	0.833	0.454	$[0.333, 0.833]^T$	0.833	2	0.333
7	$[4, 7]^T$	$[53.0, 23.0]^T$	0.766	0.433	0.916	0.478	$[0.766, 0.916]^T$	0.916	2	0.766
8	$[4, 8]^T$	$[68.0, 24.0]^T$	1.266	0.558	1.000	0.5	$[1.266, 1.000]^T$	1.266	1	1.000
9	$[5, 5]^T$	$[30.0, 30.0]^T$	0.000	0.000	1.500	0.6	$[0.000, 1.500]^T$	1.500	2	0.000
10	$[5, 6]^T$	$[41.0, 31.0]^T$	0.366	0.268	1.583	0.612	$[0.366, 1.583]^T$	1.583	2	0.366
11	$[5, 7]^T$	$[54.0, 32.0]^T$	0.800	0.444	1.666	0.625	$[0.800, 1.666]^T$	1.666	2	0.800
12	$[6, 6]^T$	$[42.0, 42.0]^T$	0.400	0.285	2.500	0.714	$[0.400, 2.500]^T$	2.500	2	0.400

Tableau des résultats des calculs pour l'exemple : 2.2 :

On choisit toutes les solutions qui satisfont le premier pas de la formule de récurrence [3.4]. Dans cet exemple, nous n'avons qu'une solution qui est $\bar{x}^* = (3,6)$. On s'arrête donc là, sans effectuer le second pas. On obtient les résultats:

$$f_1(\bar{x}^*) = 39 \quad , \quad f_2(\bar{x}^*) = 15 \quad , \quad \text{et : } Z_1(\bar{x}^*) = 0,300 \quad , \quad Z_2(\bar{x}^*) = 0,250.$$

Cet exemple est illustré figure II.6.

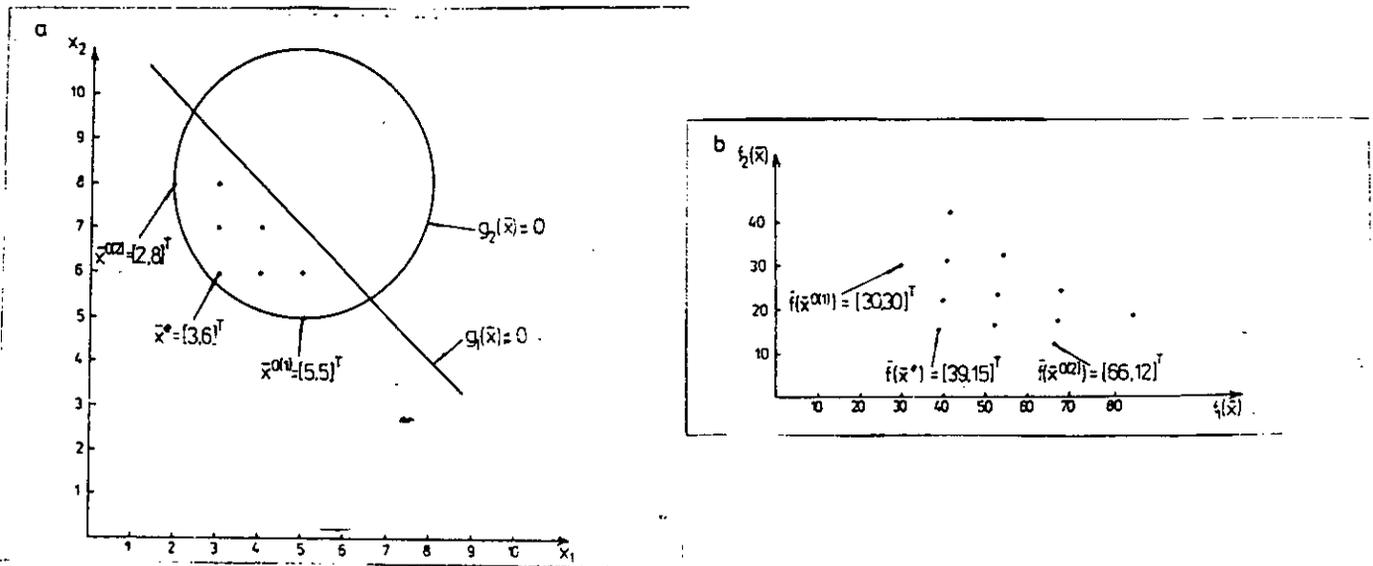


Fig. II.6 : Illustration graphique de l'exemple 2.2.

Pour le problème de l'exemple 2.1 on considère que c'est un problème à programmation entière. Pour toutes les valeurs entières de \bar{x} qui satisfont les contraintes, $g_1(\bar{x})$, $g_2(\bar{x})$, $g_3(\bar{x})$ le tableau suivant donne les résultats des calculs des composantes du vecteur $\bar{z}(\bar{x})$:

No.	$\bar{x} = [x_1, x_2]^T$	$\bar{f}(\bar{x}) = [f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x})]^T$	$z_i(x)$	$z_i(\bar{x})$	$z_i(\bar{x})$	$z_i(\bar{x})$	$\bar{z}(\bar{x}) = [z_1(\bar{x}), z_2(\bar{x})]^T$	$\max_{i \in \{1,2\}} [z_i(\bar{x})]$	i_i	$z_i(\bar{x}), i \neq i_i$
1	$[3, 3]^T$	$[90.0, -9.0]^T$	0.000	0.000	0.75	3.000	$[0.000, 3.000]^T$	0.300	2	0.000
2	$[4, 4]^T$	$[128.0, -16.0]^T$	0.422	0.96	0.555	1.250	$[0.422, 1.250]^T$	1.250	2	0.422
3	$[4, 5]^T$	$[149.0, -20.0]^T$	0.655	0.395	0.444	0.800	$[0.655, 0.800]^T$	0.800	2	0.655
4	$[4, 6]^T$	$[172.0, -24.0]^T$	0.911	0.476	0.333	0.500	$[0.911, 0.500]^T$	0.911	1	0.500
5	$[5, 4]^T$	$[149.0, -20.0]^T$	0.655	0.395	0.444	0.800	$[0.655, 0.800]^T$	0.800	2	0.655
6	$[5, 5]^T$	$[170.0, -25.0]^T$	0.888	0.470	0.305	0.440	$[0.888, 0.400]^T$	0.888	1	0.400
7	$[5, 6]^T$	$[193.0, -30.0]^T$	1.144	0.533	0.166	0.200	$[1.144, 0.200]^T$	1.144	1	0.200
8	$[6, 5]^T$	$[193.0, -30.0]^T$	1.144	0.533	0.166	0.200	$[1.144, 0.200]^T$	1.144	1	0.200
9	$[6, 6]^T$	$[216.0, -36.0]^T$	1.400	0.583	0.000	0.000	$[1.400, 0.000]^T$	1.400	1	0.000

Dans le plupart des modèles d'optimisation, l'optimum min-max est atteint dès le premier pas de la formule [3.4].

Le cas d'une optimisation à deux critères est illustré figure II.7 (a). Les modèles pour les quels on a besoin d'utiliser le second pas et / ou les suivants sont assez rares (figure II.7 (b)).

Finalement, il existe des modèles pour les quels, après avoir effectué tous les pas de (3.4), il reste encore une solution (figure II.7 (c)). De tels modèles sont très rares. Les situations présentées (figures II.7(b) et (c)) ne peuvent se présenter que pour des problèmes non convexes et sont plus fréquents pour les problèmes à programmation entière et discrète

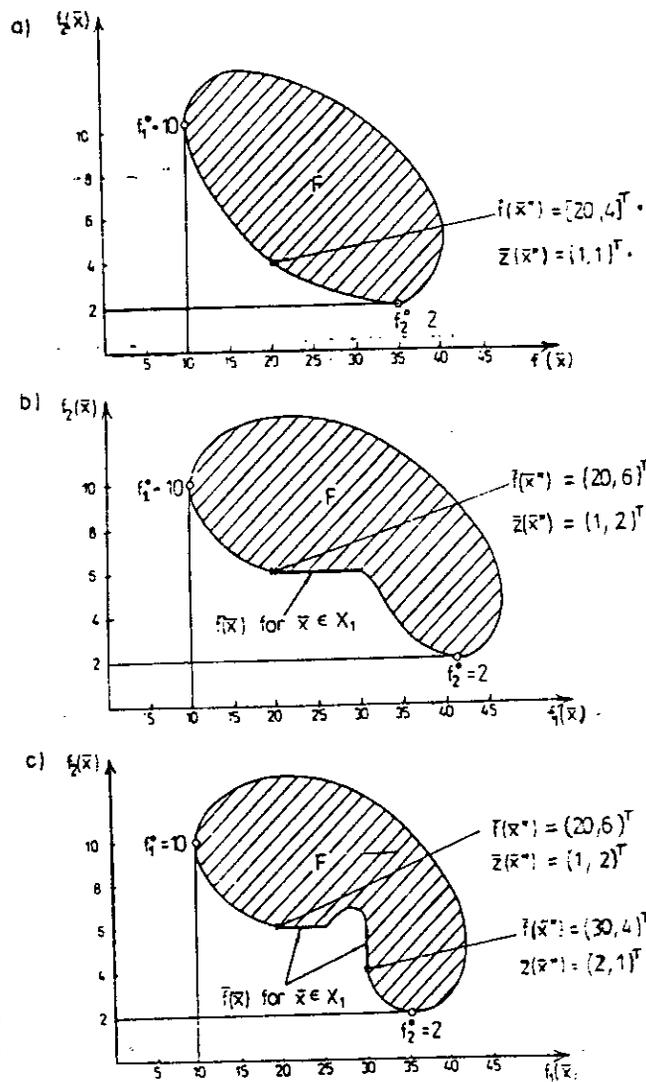


Fig. II.7 : Les différents cas possibles qui peuvent se présenter pour l'optimum min-max.

II.4 Le problème de prise de décision:

Après avoir construit un modèle d'optimisation multicritères d'un système physique, l'ingénieur est confronté à deux questions :

- * Quelle technique d'optimisation appliquer pour résoudre ce problème.
- * La solution obtenue est-elle satisfaisante ?

Pour résoudre des modèles d'optimisation multicritères, on utilise généralement des techniques d'optimisation à un seul critère.

Pour choisir la technique appropriée, des méthodes sont données dans la littérature; le problème est très vaste.

La seconde question, qui implique l'acceptation d'une solution, est appelé le problème de prise de décision.

Dans les paragraphes 2 et 3, nous avons expliqué ce que signifient les optima dans le sens du pareto et du min-max. Ces optima ne nous donneront pas une réponse universelle au problème de prise de décision pour tous les problèmes d'optimisation multicritères. Si tous les critères sont de même importance, alors les optima min-max peuvent définir une solution acceptable. Dans tous les autres cas, on choisira une solution dans l'ensemble des optima pareto, c'est-à-dire de l'ensemble X^P .

L'ensemble X^P contient habituellement un très grand nombre de solution. Il est donc impossible de toutes les considérer. Il serait plus facile de trouver la solution si on connaissait à priori les préférences quant à l'importance des critères.

La connaissance de ces préférences peut être nécessaire pour certaines méthodes de résolution. Comme cette information est habituellement incomplète et ne peut pas être exprimée de manière vraiment formelle, il arrive rarement qu'on obtienne une solution de l'ensemble X^P acceptable pour un ingénieur. La plupart des méthodes s'attachent à fournir un sous-ensemble de X^P . En explorant ce sous-ensemble, l'ingénieur choisit la solution qu'il préfère et qu'il admettra comme satisfaisante.

Pour les problèmes où l'information sur les préférences n'est donné qu'a posteriori, le premier pas permet d'obtenir des solutions de l'ensemble X^P qui aident à faire des choix pour les explorations suivantes.

On sait que les fonctions objectif représentent des qualités physiques; il est donc habituellement difficile de prendre une décision en ne se basant que sur leur valeur.

Le vecteur $\bar{Z}(\bar{x})$ est alors plus utile, car les valeurs sans dimension de ses composantes rend la comparaison de solution plus facile.

- Exemple:

Considérons le problème de planification de production présenté figures I.4.2 (a) et (b). On décide à priori que dans ce problème, le bénéfice est plus important que le nombre de produits A qui reflète les souhaits du meilleur client. Pour exprimer les préférences d'une manière formalisée, on dit que l'on peut satisfaire les souhaits du client pour que cela lui coûte moins de 8% du bénéfice qu'il ferait si on négligeait ses souhaits la solution qui donne le profit maximum est :

$$\bar{x}^{0(1)} = (50, 150)^t \quad ; \quad f_1(\bar{x}^{0(1)}) = 950 \quad ; \quad f_2(\bar{x}^{0(1)}) = 50$$

La solution compromis qui donne 8% du décrement du profit est :

$$\bar{x}^* = (106, 90)^t; \quad f_1(\bar{x}^*) = 874 \quad ; \quad f_2(\bar{x}^*) = 90$$

Méthodes basées sur la scalarisation de fonctions:

Il existe plusieurs méthodes de base qui transforment une *fonction vecteur* en une fonction scalaire : en minimisant ces fonctions, on peut obtenir une *solution optimale du paréto* ou un ensemble de ces solutions.

La forme de la transformation diffère suivant la méthode et cela influence le résultat que l'on obtient.

D'après ces méthodes on peut citer :

- (1) - *La méthode de pondération des objectifs.* *
- (2) - *La méthode d'optimisation hiérarchique.*
- (3) - *La méthode du compromis.*
- (4) - *Méthode de programmation de but.* *
- (5) - *Méthode du critère global.* *

On s'intéressera particulièrement à :

II.5 Méthode de pondération des objectifs:

La méthode de pondération des objectifs a reçu beaucoup d'attention et certains modèles de cette méthode ont été largement appliqués.

La base de cette méthode consiste à ajouter toutes les fonctions objectifs, en utilisant pour chacune des coefficients de pondération différents.

Cela signifie que l'on change notre problème d'optimisation multicritères, en un problème d'optimisation scalaire en créant une fonction de la forme :

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{i=k} W_i f_i(\bar{x}) \quad [5.1]$$

Où $W_i \geq 0$ sont les coefficients de pondération représentant l'importance relative des critères.

Généralement, on considère que:

$$\sum_{i=1}^{i=k} W_i = 1 \quad [5.2]$$

Le résultat de la résolution d'un modèle d'optimisation utilisant [5.1] peut varier de manière significative quand les coefficients de pondération changent. Et on a habituellement aucune indication quant à la manière de les choisir.

Il faut donc résoudre le même problème pour des W_i différents; en confrontant les solutions obtenues, on choisit la quelle est *préférable*.

Remarquons que les coefficients de pondération ne reflètent pas l'importance relative de chaque objectif; ce sont seulement des facteurs qui, lorsqu'ils varient, localisent des points sur XP. Pour les méthodes numériques de recherche du minimum de [5.1], cette localisation ne dépend pas uniquement des valeurs de W_i , mais aussi des unités dans les quelles les fonctions sont exprimées.

Habituellement, on normalise les fonctions par $C_i = \frac{1}{f_i^0}$; le vecteur fonction sera donc de la forme suivante;

$$\bar{f}(\bar{x}) = (\tilde{f}_1(\bar{x}), \tilde{f}_2(\bar{x}), \dots, \tilde{f}_k(\bar{x}))^t$$

$$\text{Où : } \tilde{f}_i(\bar{x}) = \frac{f_i(\bar{x})}{f_i^0}$$

De cette façon, W_i reflète assez bien l'importance des objectifs et la formule [5.1] se trouve transformée en :

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{i=k} W_i \tilde{f}_i(\bar{x}) \cdot C_i \quad [5.2]$$

Si la condition $f_i = 0$ n'est pas assurée, la valeur de C_i doit être choisie par celui qui traite le problème.

II.5.1 Interprétation géométrique:

Considérons le problème d'optimisation à deux critères présenté figure II.5.1(a); dans l'espace des objectifs, on peut dessiner une droite L de pente $-\frac{W_1}{W_2}$.

La droite L est l'ensemble des points tels que :

$$W_1.f_1(\bar{x}) + W_2.f_2(\bar{x}) = C \quad \text{où : } C \text{ est une constante.}$$

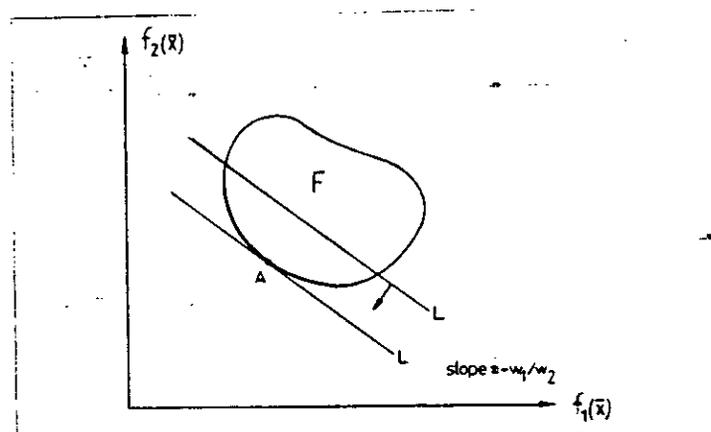


Fig. II.5.1.(a) : Interprétation géométrique de la méthode de pondération des objectifs.

La minimisation de [5.1] peut être interprétée comme le fait de déplacer la droite (L), W_1 et W_2 étant fixés, (déplacement parallèlement à la droite de départ (L)).

Dans une direction positive et ce aussi loin que possible du point de départ mais en gardant une intersection entre les ensembles L et F. Le point A pour lequel L est tangent à F sera le minimum de [5.1].

Remarquons que pour un problème non convexe, une grande partie de l'ensemble des *solutions non-inférieures* ne sera pas valable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de valeur de W_1 pouvant localiser les points dans une certaine région de F^P . Considérons le problème représenté figure II.5.1 (b).

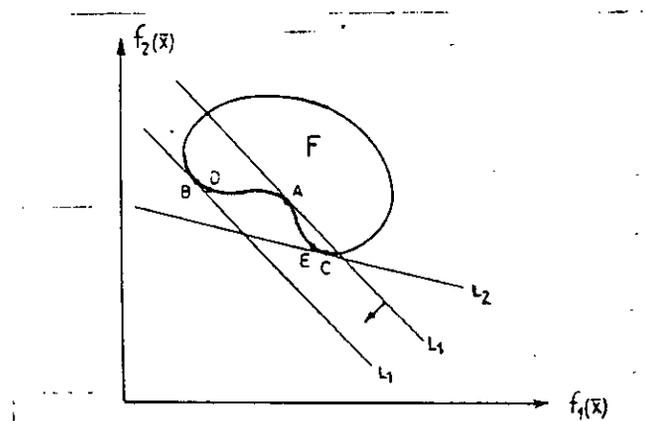


Fig. II.5.1.(b) : Méthode de pondération des objectifs pour un problème non convexe.

La droite (L_1) qui est tangente au point A avec la pente $-\frac{W_1}{W_2}$ peut être bougée d'avantage dans une direction positive jusqu'à être tangente au point B.

Avec cette méthode et ces valeurs de W_i , on trouvera donc le point B et non le point A. D'autres W_i trouveront le point C.

Pour ce problème, les solutions non-inférieures entre D et E ne sont pas valables.

Pour des problèmes à programmation linéaire, l'exigence de la convexité est satisfaisante, donc la méthode de pondération des objectifs peut être utilisée pour trouver l'ensemble complet des solutions non inférieures. Mais il est impossible de trouver un sous-ensemble représentatif de ces solutions.

Considérons l'exemple présenté figure II.5.1.(c).

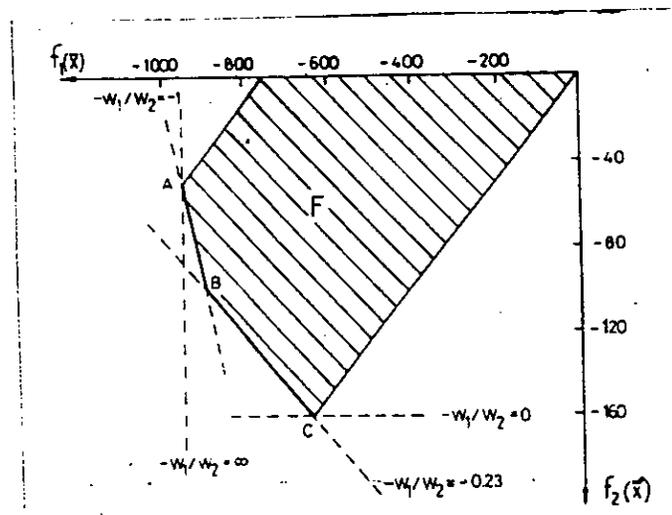


Fig. II.5.1.(c) : Méthode de pondération des objectifs pour un problème de programmation linéaire.

Pour $-\frac{W_1}{W_2} = -1$, on a un ensemble infini de solutions (*segment AB*) qui donneront le minimum de [5.1].

On a la même situation pour $-\frac{W_1}{W_2} = \frac{-3}{13} \cong -0,23$ cette méthode ne peut donc pas localiser une solution sur le segment AB ou BC.

II.6 Méthode du Goal programming ou méthode de programmation de but:

La programmation de but a été proposée par CHARNES et COPPER (1961) et IJRI (1965) pour des modèles linéaires. Pour cette méthode, on doit spécifier quel but on veut atteindre pour chaque objectif. Les buts, c'est-à-dire leurs valeurs quantitatives, sont considérées comme des contraintes supplémentaires aux quelles on rajoute de nouvelles variables qui représentent les déviations par rapport aux buts initiaux.

Les fonctions objectif spécifient en termes quantitatifs les déviations par rapport à ces buts et les priorités pour la réalisation de chacun.

La forme la plus courante de la méthode de programmation de but est la suivante :

$$\text{Trouver } \bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^t \text{ tel que :} \\ \min a = \{ \rho_1 h_1 (d^-, d^+), \rho_2 h_2 (d^-, d^+), \dots, \rho_l h_l (d^-, d^+) \} \quad [6.1]$$

Soumis à

$$g_j(\bar{x}) + d_j^- - d_j^+ = b_j \quad j = 1, 2, \dots, m \quad [6.2]$$

$$f_i(\bar{x}) + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad i = 1, 2, \dots, k \quad [6.3]$$

$$\forall i (d_i^-, d_i^+ \geq 0)$$

$$\forall i (d_i^- \cdot d_i^+ = 0)$$

Où :

b_i = Valeur quantitative du $i^{\text{ème}}$ but.

d_i^- = Déviation négative du $i^{\text{ème}}$ but.

d_i^+ = Déviation positive du $i^{\text{ème}}$ but.

$h_i (d^-, d^+) =$ Fonction des variables de déviation, appelée la $i^{\text{ème}}$ fonction de réalisation où $i = 1, 2, \dots, L$.

$P_i =$ Coefficient de priorité pour la $i^{\text{ème}}$ fonction de réalisation.

Les équations [6.2] et [6.3] représentent les buts b_i désirés et les fonctions qui effectuent ces buts. Les variables de déviations par rapport aux buts sont ajoutées à cet ensemble d'équations pour forcer l'égalité entre les fonctions qui font les buts et les buts désirés.

La spécification de la fonction de réalisation [6.1] est l'élément clé du déploiement pratique de cette méthode.

Dans cette fonction, on considère que : $P_i \gg P_{i+1}$, ce qui signifie qu'aucun nombre N , aussi grand soit il, ne peut donner $N \cdot P_{i+1} > P_i$ cette propriété de la programmation par but permet l'ordonnancement absolu des buts.

L'algorithme utilisé pour cette méthode est le suivant:

1- Trouver la solution qui minimise la 1^{ère} fonction de réalisation, c'est-à-dire la fonction avec le niveau de priorité 1:

$$h_1^*(d^-, d^+) = \min h_1(d^-, d^+) \quad ; \quad \bar{x} \in X \quad [6.4]$$

2- Faire le pas 3 pour $j = 2, 3, \dots, l$.

3- Trouver la solution qui minimise la j^{ème} fonction de réalisation, c'est-à-dire :

$$h_j^*(d^-, d^+) = \min h_j(d^-, d^+) \quad ; \quad \bar{x} \in X \quad [6.5]$$

Soumise aux contraintes supplémentaires de la forme :

$$h_{i-1}(d^-, d^+) \leq h_{i-1}^*(d^-, d^+) \quad , \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots, j. \quad [6.6]$$

Autrement dit : on minimise la seconde et les autres fonctions de réalisation déjà considérées ne peuvent être plus grandes que leur minima.

4- La solution déterminée en minimisant $h_j(d^-, d^+)$ est l'optimum.

Exemple:

Considérons le problème de planification de production illustré I.4.2(a); (b).

Posons les priorités suivantes :

p_1 : Les contraintes données par $g_j(\bar{x}) \geq 0$.

$j = 1, 5$ doivent être satisfaites.

p_2 : On produit au moins 100 unités de produit A, ce qui signifie qu'on veut satisfaire le souhait du meilleur client en produisant pour lui au moins 100 unités.

p_3 : Essayer d'obtenir un bénéfice aussi près que possible de 1000\$.

Maintenant, le modèle de la programmation de but est :

minimiser $(d_1^+ + d_2^+ + d_3^+)$, (d_5^-) , (d_4^-)

assujettis à:

$$G_1 : x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 200$$

$$G_2 : 1,25.x_1 + 0,75.x_2 + d_2^- - d_2^+ = 200$$

$$G_3 : x_2 + d_3^- - d_3^+ = 150$$

$$G_4 : 4.x_1 + 5.x_2 + d_4^- - d_4^+ = 1000$$

$$G_5 : x_1 + d_5^- - d_5^+ = 100$$

$$x, d^-, d^+ \geq 0$$

L'illustration graphique du modèle précédent est montrée figure II(6.a), la fonction de réalisation consiste en les priorités mentionnées ci-dessus. Pour satisfaire la première priorité, on minimise $(d_1^+ + d_2^+ + d_3^+)$ avec: G_1, G_2 et G_3 comme contraintes physiques.

La priorité est satisfaite lorsque $d_1^+ = d_2^+ = d_3^+ = 0$. Si non, le point \bar{x} serait en dehors des solutions possibles représentées sur la figure par l'aire hachurée.

La seconde priorité est de produire 100 unités du produit A, ce qui signifie la minimisation de d_5^- . On peut satisfaire pleinement ce but avec $d_5^- = 0$.

Pour la troisième priorité, l'ensemble des solutions possibles est limité à l'aire hachurée. Pour la satisfaire, on doit minimiser d_4^- . On procède jusqu'à obtenir le point A, sans dégrader la solution de la priorité du niveau 2.

C'est donc le point A qui est la solution finale pour la quelle : $\bar{x} = (100, 100)^t$.

$$a = \{0, 0, 100\} \quad ; \quad \bar{F} = (90, 100)^t$$

La programmation de but a surtout été développée pour des modèles linéaires et des programmes informatiques spéciaux sont valables pour ces modèles.

[cf. LEE (1972) et ZELENY (1974)].

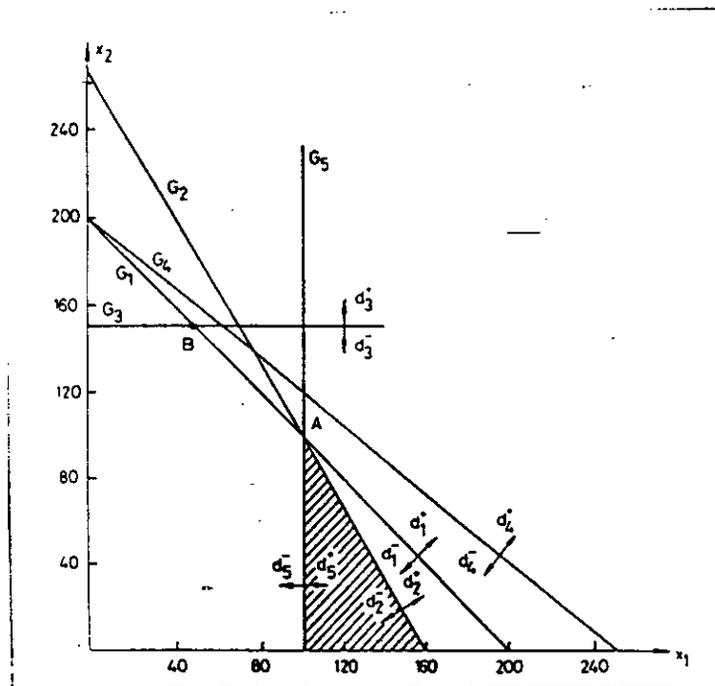


Fig. II.6.(a) : Illustration graphique de la méthode de programmation de but.

II.7 Méthode du critère global:

Pour cette méthode, une solution optimale est un vecteur des variables de décision qui minimise un critère global. La fonction qui décrit ce critère global est une mesure de la précision avec la quelle on peut s'approcher du vecteur solution *idéale* \bar{f}^0 . La forme la plus courante de cette fonction est :

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{i=k} \left(\frac{(f_i^0 - f_i(\bar{x}))}{f_i^0} \right)^p \quad [7.1]$$

Boyчук et Ovchinnikov (1973) ont suggéré de donner à p la valeur $p = 1$ et Salukvadze (1974) à proposé $p = 2$. Mais on peut aussi utiliser d'autres valeurs de p . Bien sûr, la solution obtenue après minimisation de [7.1] sera différente suivant la valeur de p utilisée. Le problème sera donc de déterminer qu'elle valeur de p convient le mieux au problème traité.

Exemple:

Considérons le problème de planification de production présenté figure I.4.2(a) et (b). La solution idéale est $\bar{f}^0 = (-950, -160)^t$.

La fonction globale pour $p = 1$ est :

$$f(\bar{x})_{p=1} = \frac{-950 - (-4.x_1 - 5.x_2)}{-950} + \frac{-160 - (-x_1)}{-160}$$

$$f(\bar{x})_{p=1} = 2 - 0,01046.x_1 - 0,00526.x_2$$

Le minimum de cette fonction donne la solution :

$$\bar{x} = (160 ; 0) \quad \text{pour la quelle} \quad \bar{f}(\bar{x}) = (-640 ; -160)^t$$

La fonction globale pour $p = 2$ est :

$$f(\bar{x})_{p=2} = \left(\frac{-950 - (-4.x_1 - 5.x_2)}{-950} \right)^2 + \left(\frac{-160 - (-x_1)}{-160} \right)^2$$

Le minimum de cette fonction donne la solution :

$$\bar{x} = (135,1 ; 41,4)^t \quad \text{pour la quelle} \quad \bar{f}(\bar{x}) = (-747,4 ; -135,1)^t$$

La représentation graphique de la fonction dans l'espace des variables de décision se trouve figure II(7.a); pour $p = 1$ et $p = 2$.

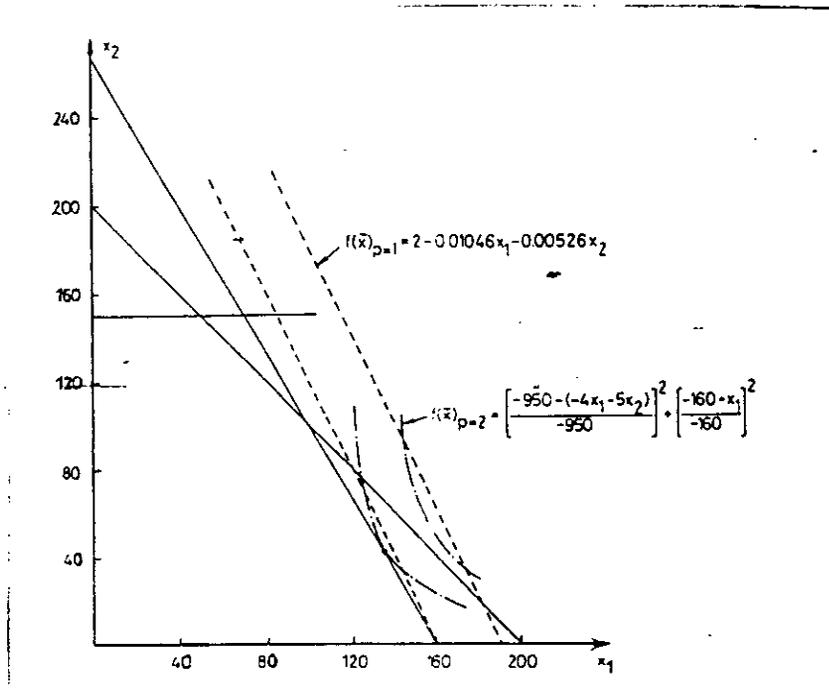


Fig. II.7(a) : Illustration graphique de la méthode du critère global.

Remarquons que si $p = 2$, la fonction [7.1] devient non-linéaire et le problème ne peut plus être résolu par la méthode du simplexe.

II.7.1 Autre formes de la fonction globale:

Le premier pas consiste toujours à trouver la *solution idéale* qui est le vecteur $f_j(\bar{x}^{id})$ où $j = 1, 2, \dots, k$, qui satisfait à la condition de minimisation de chaque fonction $f_j(\bar{x})$ considérée indépendamment du reste de notre problème. Ainsi le *critère global* est formulé en exigeant que la distance entre les points optimaux et idéaux dont l'expression est écrite ci-dessous soit *minimal*, avec satisfaction des contraintes

$$g_i(\bar{x}) \geq 0 \quad \text{et} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Cela :

$$f^{(p)} = \left[\sum_{j=1}^{j=k} \left(|f_j(\bar{x}) - f_j(\bar{x}^{id})|^p \right) \right]^{1/p} \quad 1 < p < \infty$$

Chapitre : III

*Exemples
d'application en
calcul de structure.*



Exemples d'application en calcul de structure

III.1 Optimisation de la section transversale d'une poutre, soumise à une flexion simple et une compression, c'est-à-dire "flexion composée": Réf bib [17]

III.1.1 Formulation du problème:

Trouver par exemple les dimensions d'une section transversale rectangulaire d'une poutre dans le but de minimiser à la fois *son volume* V et *l'énergie interne de déformation* U produite par un chargement qui provoque une flexion composée (flexion simple + compression).

Nos variables de décision seront :

La hauteur X_1 et la largeur X_2 . Elles seront contenues dans les deux intervalles, tels que

$$X_1 \leq X_1 \leq \bar{X}_1$$

$$X_2 \leq X_2 \leq \bar{X}_2$$

Où X_1 : Hauteur de la section rectangulaire.

X_2 : Largeur de la section rectangulaire.

Les critères d'optimisation seront comme indiqués ci-dessous.

◆ Volume de la poutre:

$$V = \int_0^l A \cdot dx = X_1 \cdot X_2 \cdot l = V_{\min} \quad ; \quad A = X_1 \cdot X_2$$

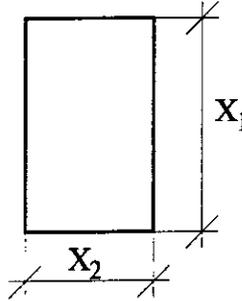
avec l longueur de la poutre.

◆ **Energie de déformation interne:**

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2.EI} . dx + \int_0^l \frac{N^2}{2.EA} . dx = \frac{N^2 . l}{2.E} \left(\frac{12.M^2}{N^2} . \frac{1}{X_1^3 . X_2} + \frac{1}{X_1 . X_2} \right) = U_{\min}$$

$$\text{Où : } I = \frac{b.h^3}{12} = \frac{X_2 . X_1^3}{12}$$

Schéma de la section:



• En introduisant de nouvelles variables de décision qui seront sans dimension soient ε_1 et ε_2 tels que :

$$\varepsilon_1 = \frac{X_1}{\bar{X}_1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \frac{X_2}{\bar{X}_2}$$

Il est possible de formuler le problème comme suit : Trouver le minimum des fonctions objectifs:

$$V = X_1 . X_2 . l = (\bar{X}_1 . \bar{X}_2 . l) . \left(\frac{X_1}{\bar{X}_1} \right) . \left(\frac{X_2}{\bar{X}_2} \right) \quad ; \quad V_0 = \bar{X}_1 . \bar{X}_2 . l$$

$$\varepsilon_1 = \frac{X_1}{\bar{X}_1} \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{X_2}{\bar{X}_2}$$

$$\text{Soit : } V = V_0 . \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = V_{\min}$$

[3.1]

De même nous avons :

$$U = \frac{N^2 . l}{2.E} \left(\frac{12.M^2}{N^2} . \frac{1}{\bar{X}_1^3 . \bar{X}_2 . \left(\frac{X_1}{\bar{X}_1} \right)^3 . \left(\frac{X_2}{\bar{X}_2} \right)} + \frac{1}{\bar{X}_1 . \bar{X}_2 . \left(\frac{X_1}{\bar{X}_1} \right) . \left(\frac{X_2}{\bar{X}_2} \right)} \right)$$

$$\text{Soit : } U = U_0 \cdot \left(\frac{K}{\varepsilon_1^3 \cdot \varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) = U_{\min} \quad [3.2]$$

Où :

$$U_0 = \frac{N^2 J}{2.E.\bar{X}_1.\bar{X}_2} \quad ; \quad V_0 = \bar{X}_1.\bar{X}_2 J \quad ; \quad K = \frac{12.M^2}{N^2.\bar{X}_1^2}$$

Les nouvelles variables de décision $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ doivent satisfaire les contraintes suivantes :

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_1 \leq \bar{\varepsilon}_1$$

$$\varepsilon_2 \leq \varepsilon_2 \leq \bar{\varepsilon}_2$$

L'ensemble des solutions qui conviennent est contenu dans le rectangle représenté en figure III.1(a) où les limites qui conviennent sont prises égales à :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/3$$

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2 = 1$$

Détermination de l'ensemble solutions :

Les fonctions objectifs V et U transforment l'ensemble des solutions possibles dans un domaine objectif. Ce domaine est déterminé comme suit :

On détermine ε_2 à partir de l'équation [3.1] et on la substitue dans l'équation [3.2]

$$\text{En effet dans [3.1] on a : } V = V_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_2 = \frac{V}{V_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon_1}$$

En substituant ainsi cette valeur de ε_2 dans l'équation [3.2] on aura :

$$U = U_0 \cdot \left(\frac{K}{\varepsilon_1^3 \cdot \frac{V}{V_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon_1}} + \frac{1}{\varepsilon_1 \cdot \frac{V}{V_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon_1}} \right)$$

Soit :

$$U = U_0 \cdot V_0 \cdot \left(\frac{K}{\varepsilon_1^2} + 1 \right) \cdot \frac{1}{V} \quad [3.3]$$

Le fait de prendre $\varepsilon_1 = \underline{\varepsilon}_1 = 1/3$ et $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1 = 1$, nous permet d'obtenir, et cela on se basant sur la relation [3.3], les bornes des segments, AE et BC du domaine objectif.

Domaine des fonctions buts.

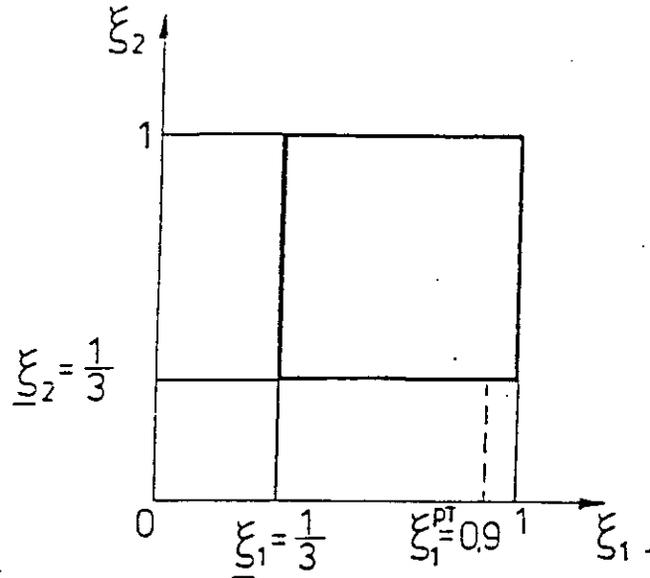


Fig. III.1.(a) : Espace représentatif des variables de décision

De la même manière en éliminant ε_1 dans l'équation [3.1] et [3.2] on obtiendra $\varepsilon_1 = \frac{V}{V_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon_2}$ à partir de l'équation [3.1].

En remplaçant dans l'équation [3.2] cette valeur de ε_1 en fonction de ε_2 , on aura :

$$U = U_0 \cdot \left(\frac{K}{\left(\frac{V}{V_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon_2} \right)^3 \cdot \varepsilon_2} + \frac{1}{\frac{V}{V_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon_2} \cdot \varepsilon_2} \right)$$

Soit :

$$U = U_0 \cdot V_0 \cdot \left(\frac{K \cdot V_0^2 \cdot \varepsilon_2^2}{V_3} + \frac{1}{V} \right) \quad [3.4]$$

A partir de cette expression il est possible de déterminer les segments de courbes AB et EC et cela dans le domaine *des fonctions objectifs* en prenant : $\varepsilon_2 = \underline{\varepsilon}_2 = 1/3$ et $\varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}_2 = 1$ figure III.1.(b).

Dans ce cas l'ensemble solution de notre problème se présente en deux segments:

- Le segment AB décrit par :

$$U = U_0 \cdot V_0 \cdot \left(\frac{K \cdot V_0^2 \cdot \underline{\varepsilon}_2^2}{V^3} + \frac{1}{V} \right) \quad [3.5]$$

- Le segment EC décrit par :

$$U = U_0 \cdot V_0 \cdot (1+K) \cdot \frac{1}{V} \quad [3.6]$$

Sélection de la solution préférable:

La solution préférable peut être déterminée en employant : *la méthode du critère global* : en prenant $p = 2$.

Ce critère a la forme suivante :

$$F^{(2)} = \sqrt{(V - V^{id})^2 + \mu^2 (U - U^{id})^2} = F_{\min} \quad [3.7]$$

Où : $F^{(2)}$ à l'unité d'un volume (m^3)

U : à l'unité d'une énergie : (KN.m)

et $\mu \equiv 1 m^2/KN$.

La solution idéale est représentée par :

$$V^{id} = V_0 \cdot \underline{\varepsilon}_1 \cdot \underline{\varepsilon}_2 \quad \text{et} \quad U^{id} = U_0 \cdot (K+1)$$

Il est nécessaire de trouver le minimum de la fonction $F^{(2)}$, avec la satisfaction de la condition [3.5] ou la condition [3.6].

En prenant le cas où la solution liée au segment AB de l'ensemble des solutions, satisfait à la condition [3.5] c'est à dire :

$$U = U_0 \cdot V_0 \cdot \left(\frac{K \cdot V_0^2 \cdot \underline{\varepsilon}_2^2}{V^3} + \frac{1}{V} \right)$$

On aura, la nouvelle équation de l'expression $F^{(2)}$ donnée par :

$$F^{(2)} = \sqrt{\left(V - V_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \right)^2 + \mu^2 \left(U_0 \cdot V_0 \left(\frac{K \cdot V_0^2 \cdot \varepsilon_2^2}{V^3} + \frac{1}{V} \right) - U_0 \cdot (1+K) \right)^2} \quad [3.8]$$

La condition nécessaire pour minimiser la fonction [3.8] se traduit par $\frac{dF^{(2)}}{dV} = 0$ c'est à dire:

$$2 \cdot (V - V_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) + 2 \cdot \mu^2 \left(U_0 \cdot V_0 \left(\frac{K \cdot V_0^2 \cdot \varepsilon_2^2}{V^3} + \frac{1}{V} \right) - U_0 \cdot (1+K) \right) \left(U_0 \cdot V_0 \left(\frac{-3 \cdot K \cdot V_0^2 \cdot \varepsilon_2^2}{V^4} - \frac{1}{V^2} \right) \right) = 0$$

D'où :

$$\begin{aligned} & V^8 - V_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot V^7 + \mu^2 \cdot U_0^2 \cdot V_0 \cdot (1+K) \cdot V^5 - \mu^2 \cdot U_0^2 \cdot V_0^2 \cdot V^4 \\ & + 3 \cdot \mu^2 \cdot U_0^2 \cdot V_0^3 \cdot K \cdot (1+K) \cdot \varepsilon_2^2 \cdot V^3 - 4 \cdot \mu^2 \cdot U_0^2 \cdot V_0^4 \cdot K \cdot \varepsilon_2^2 \cdot V^2 - 3 \cdot \mu^2 \cdot U_0^2 \cdot V_0^5 \cdot K^2 \cdot \varepsilon_2^2 = 0 \end{aligned} \quad [3.9]$$

Equation pour la quelle on peut déterminer la valeur de $V^{(2)}$: *sa valeur numérique*. Puis en suite celle de $U^{(2)}$ en utilisant l'équation n°: [3.5] et les variables de décision ε_1 et ε_2 qui nous permettent de déterminer les solutions qui conviennent aux équations [3.1] et [3.2].

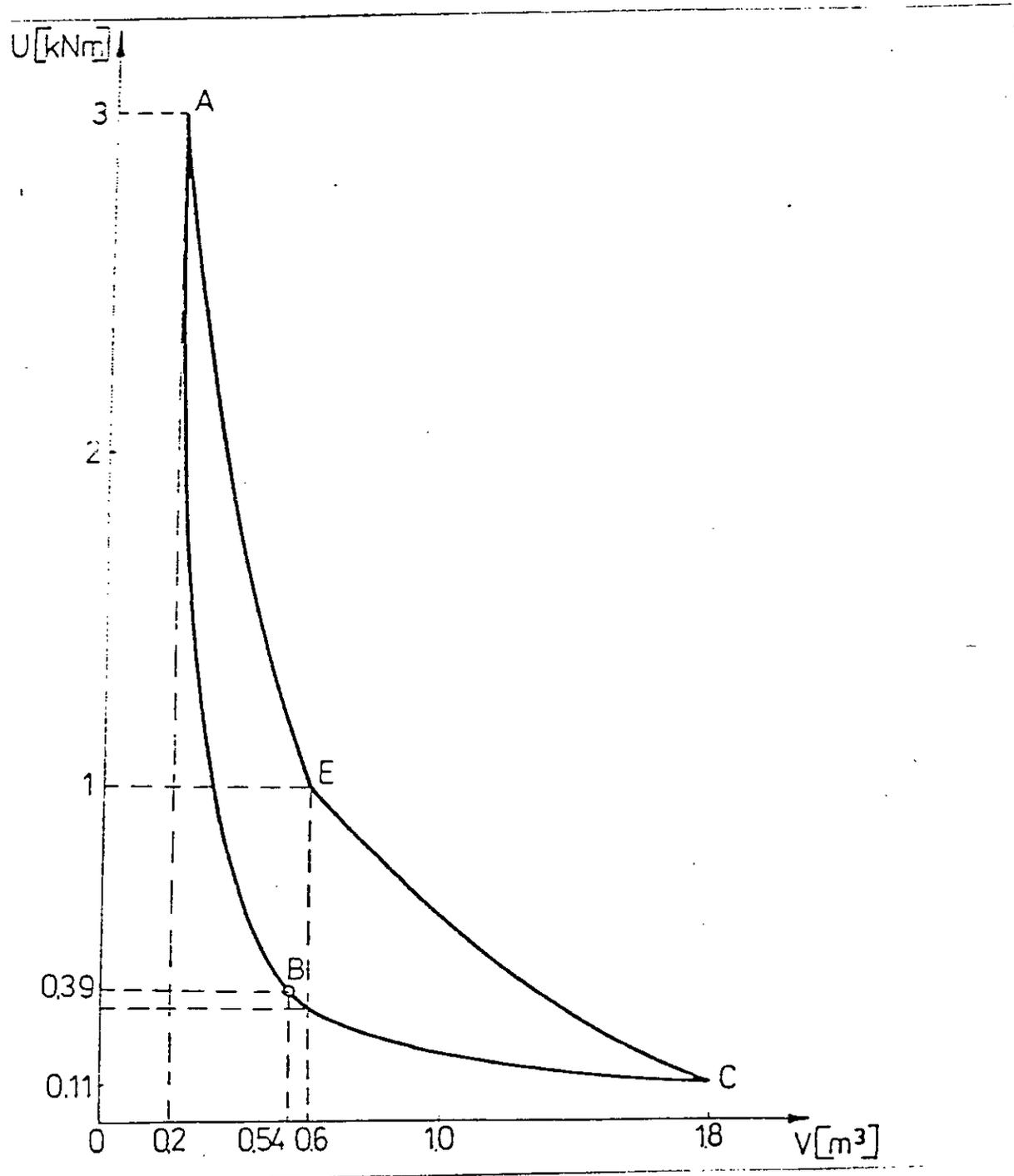


Fig. III.1.(b) : Représentation de l'espace des fonctions objectifs

En prenant la solution liée au segment EC de l'ensemble des solutions on aura :

$$F^{(2)} = \sqrt{(V - V_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)^2 + \mu^2 \cdot U_0^2 \cdot (1+k)^2 \left(\frac{V_0}{V} - 1\right)^2} \quad [3.10]$$

La condition nécessaire pour minimiser la fonction donnée en [3.10] est définie par :

$$\frac{d(F^{(2)})}{d(V)} = 0$$

Ce qui entraîne que : $2.(V - V_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) + 2 \cdot \mu^2 \cdot U_0^2 \cdot (1+k)^2 \cdot \left(\frac{V_0}{V} - 1\right) \cdot \left(\frac{-V_0}{V^2}\right) = 0$

D'où l'équation du quatrième degré.

$$V^4 - V_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot V^3 + \mu^2 \cdot U_0^2 \cdot V_0 \cdot (1+k)^2 \cdot V - \mu^2 \cdot U_0^2 \cdot V_0^2 \cdot (1+k)^2 = 0 \quad [3.11]$$

A partir de cette équation on peut tirer, $V^{(2)}$ numériquement, tandis que $U^{(2)}$ est déterminé en se basant sur l'équation n° : [3.6].

Pour les variables de décision ε_1 et ε_2 elles seront déterminées en combinant les différentes équations déjà vues soit [3.1] et [3.2].

Exemple numérique:

Les données de notre exemple numérique se présentent :

- Moment de flexion : $M = 30 \text{ KN.m}$.
- Force de compression : $N = 300 \text{ KN}$.
- Longueur de la poutre : $l = 10 \text{ m}$.
- Hauteur maximale de la section transversale : $\bar{X}_1 = 0,60 \text{ m}$.
- Hauteur minimale de la section transversale : $\underline{X}_1 = 0,20 \text{ m}$.
- Largeur maximale de la section transversale : $\bar{X}_2 = 0,30 \text{ m}$.
- Largeur minimale de la section transversale : $\underline{X}_2 = 0,10 \text{ m}$.

Pour les variables numériques citées ci dessus (U_0, K, \dots).

Les calculs donnent les résultats suivants:

$$V_0 = 1,8 \text{ m}^3$$

$$U_0 = 1/12 \text{ KN.m}$$

$$K = 1/3$$

$$\underline{V} = 0,2 \text{ m}^3$$

$$\bar{V} = 1 \text{ m}^3$$

$$\underline{U} = 0,11 \text{ KN.m}$$

$$\bar{U} = 3 \text{ KN.m}$$

La solution préférable sera :

$$\varepsilon_1^{pr} = 0,9$$

$$; \quad \varepsilon_2^{pr} = 0,33$$

$$V^{pr} = 0,54 \text{ m}^3$$

$$\text{et} \quad U^{pr} = 0,39 \text{ KN.m}$$

Les solutions ci-dessus sont représentées sur la figure III.1(a) et figure III.1(b).

III.2 Optimisation d'une poutre soumise à une force de précontrainte des câbles : Réf bib [17]

III.2.1 Formulation du problème:

Le but de l'optimisation est de choisir la largeur d'une poutre dont la section droite est un *rectangle* soumis à une force de précontrainte p .

Donc on veut choisir la valeur de p , et cela pour minimiser le volume V de la poutre.

Deux chargement extrêmes statiques de la poutre sont pris en compte pour produire deux *moments de flexion* M_1 et M_2 .

On prendra comme *variables de décision* la largeur " b " et la *force de précontrainte des câbles* " P ". Tandis que la hauteur de la section droite de la poutre " h " est prise comme paramètre (elle est donc supposée connue). Les variables de décision doivent satisfaire les conditions suivantes pour deux chargements statiques.

$$\begin{cases} \frac{p}{b.h} + \frac{6.(M_1 - p.e)}{b.h^2} \leq \bar{\sigma} \\ \frac{p}{b.h} - \frac{6.(M_1 - p.e)}{b.h^2} \geq \underline{\sigma} \end{cases} \quad \text{sous le premier chargement, c-à-d : } M_1$$

et

[3.12]

$$\begin{cases} \frac{p}{b.h} + \frac{6.(M_2 - p.e)}{b.h^2} \geq \underline{\sigma} \\ \frac{p}{b.h} - \frac{6.(M_2 - p.e)}{b.h^2} \leq \bar{\sigma} \end{cases} \quad \text{sous le second chargement, c-à-d : } M_2$$

Où :

$\bar{\sigma}$: Contrainte admissible supérieure.

$\underline{\sigma}$: Contrainte admissible inférieure.

Avec : $M_2 = M_m$ et $M_1 = M_M$

Tel que : M_m : Moment sous poids propre seulement.

et M_M : Moment sous (poids propre + chargement extérieur).

Sous les deux conditions suivantes :

$$b \geq \underline{b} \quad \text{et} \quad p \geq 0$$

L'excentricité de la force de précontrainte est égale à :

$$e = \left(\frac{h}{2} - d \right) \quad \text{où } (d) \text{ représente la distance minimale entre le centre de gravité des câbles de précontrainte et la surface inférieure de la poutre.}$$

d : Enrobage.

Il est à noter que la position des câbles à $e = \left(\frac{h}{2} - d \right)$ est la position limite à respecter pour l'excentrement des câbles, la section dans ce cas est dite *surcritique*.

Les critères d'optimisation sont indiqués ci-dessous:

$$\min (A) \quad \text{avec } A = b \cdot h \quad [3.13]$$

$$\min (p) \quad [3.14]$$

L'ensemble des inéquations [3.12] peut être écrit sous les formes suivantes :

La première équation de l'ensemble sera réécrit en suivant les étapes suivantes:

Soit :

$$\frac{p}{b \cdot h} + \frac{6(M_1 - p \cdot e)}{b \cdot h^2} \leq \bar{\sigma}$$

$$\Leftrightarrow p \cdot h + 6 \cdot (M_1 - p \cdot e) \leq \bar{\sigma} \cdot b \cdot h^2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma} \cdot b \cdot h^2 - (h - 6 \cdot e) \cdot p - 6 \cdot M_1 \geq 0$$

$$\text{Or : } e = \frac{h}{2} - d$$

$$\text{Donc : } \bar{\sigma} \cdot b \cdot h^2 - \left(h - 6 \cdot \left(\frac{h}{2} - d \right) \right) \cdot p - 6 \cdot M_1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma} \cdot b \cdot h^2 - (-2h + 6d) \cdot p - 6 \cdot M_1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\bar{\sigma} \cdot b \cdot h^2 + 2 \cdot (h - 3d) \cdot p - 6 \cdot M_1 \geq 0} \quad [3.15]$$

En suivant les mêmes étapes de calcul en transformera les trois autres inéquations en :

$$\sigma \cdot h^2 \cdot b - 2 \cdot (2h - 3d) \cdot p + 6 \cdot M_1 \leq 0 \quad [3.16]$$

$$\sigma \cdot h^2 \cdot b + 2 \cdot (h - 3d) \cdot p - 6 \cdot M_2 \leq 0 \quad [3.17]$$

$$\bar{\sigma} \cdot h^2 \cdot b - 2 \cdot (2h - 3d) \cdot p + 6 \cdot M_2 \geq 0 \quad [3.18]$$

Dans ce problème la hauteur h est un *paramètre* donc sa valeur est fixée, cet ensemble d'inéquations est linéaire en respectant les variables de décision, et leur détermination dans le plan (b, p) .

Le quadrangle BCDE définit le domaine des solutions possibles, (voir figure III.2.(a)) les expressions des valeurs particulières liées aux points d'intersection des contraintes [3.15] jusqu'à [3.18] sont comme indiquées ci-dessous.

- Le point B qui est le point d'intersection des deux contraintes [3.15] et [3.16].

Soit :

$$\begin{cases} \bar{\sigma} \cdot h^2 \cdot b + 2 \cdot (h - 3d) \cdot p = 6 \cdot M_1 & (1) \\ \sigma \cdot h^2 \cdot b - 2 \cdot (2h - 3d) \cdot p = -6 \cdot M_1 & (2) \end{cases}$$

On peut procéder pour résoudre ce système soit par la méthode des déterminants ou bien plus simplement par la *méthode de substitution*.

$$\text{En effet : } (1) + (2) \Rightarrow (\bar{\sigma} + \sigma) \cdot h^2 \cdot b - 2h \cdot p = 0$$

$$\text{On tire alors : } p = \frac{(\bar{\sigma} + \sigma) \cdot h}{2} \cdot b \quad (a)$$

Dans l'équation (1) en substituant p par sa nouvelle expression en fonction de b on aura :

$$\bar{\sigma} \cdot h^2 \cdot b + (h - 3d) \cdot (\bar{\sigma} + \sigma) \cdot h \cdot b = 6 \cdot M_1$$

$$\Leftrightarrow b \cdot (\bar{\sigma} \cdot h^2 + (\bar{\sigma} + \sigma) \cdot h \cdot (h - 3d)) = 6 \cdot M_1$$

Soit finalement :

$$b_B = \frac{6 \cdot M_1}{\bar{\sigma} \cdot h^2 + (\bar{\sigma} + \sigma) \cdot h \cdot (h - 3d)}$$

Et par suite expression de P sera :

$$P_B = \frac{3 \cdot (\bar{\sigma} + \sigma) \cdot M_1}{\bar{\sigma} \cdot h + (\bar{\sigma} + \sigma) \cdot (h - 3d)}$$

Un calcul analogue conduit à la détermination des expressions des coordonnées des autres points d'intersection.

- Le point C qui est le point d'intersection des contraintes [3.15] et [3.18].

Soit :

$$b_C = \frac{2(2M_1 - M_2)}{\bar{\sigma}h(h-2d)} - \frac{6d(M_1 - M_2)}{\bar{\sigma}h^2(h-2d)}$$

$$P_C = \frac{M_1 + M_2}{h-2d}$$

- Le point D qui est le point d'intersection des contraintes [3.17] et [3.18].

Soit :

$$b_D = \frac{6M_2}{\sigma h^2 + (\bar{\sigma} + \sigma)h(h-3d)}$$

$$P_D = \frac{3M_2(\bar{\sigma} + \sigma)}{\sigma h + (\bar{\sigma} + \sigma)(h-3d)}$$

- Le point E qui est le point d'intersection des contraintes [3.16] et [3.17].

Soit :

$$b_E = \frac{2(2M_2 - M_1)}{\sigma h(h-2d)} + \frac{6d(M_1 - M_2)}{\sigma h^2(h-2d)}$$

$$P_E = \frac{M_1 + M_2}{h-2d}$$

Application:

Exemple numérique:

Les valeurs numériques considérées sont indiquées ci-dessous:

- Les moments de flexion : $M_1 = 375 \text{ KN.m}$ et $M_2 = 250 \text{ KN.m}$
- La hauteur de la poutre : $h = 0,70 \text{ m}$.
- La largeur minimale de la poutre $b = 0,10 \text{ m}$.
- La distance entre le C.D.G du câble moyen de la précontrainte et la surface inférieure de la poutre soit :

L'enrobage $d = 0,05 \text{ m}$.

- Les contraintes admissibles en compression seront :

$$\bar{\sigma} = 10\,000 \text{ KN/m}^2 \quad \text{et} \quad \sigma = 500 \text{ KN/m}^2.$$

Pour ces valeurs numériques les coordonnées des sommets du quadrangle qui détermine le domaine des solutions possibles seront comme indiquées ci-dessous.

- Point B : $b_B = 0,2516 \text{ m}$; $P_B = 924,7 \text{ KN}$.
- Point C : $b_C = 0,2252 \text{ m}$; $P_C = 1041,7 \text{ KN}$.
- Point D : $b_D = 0,3500 \text{ m}$; $P_D = 1285,7 \text{ KN}$.
- Point E : $b_E = 1,4456 \text{ m}$; $P_E = 1041,7 \text{ KN}$.

Détermination de l'ensemble des solutions:

Les fonctions objectifs [3.13] , [3.14] sont linéaires et transforment le quadrangle BCDE en un quadrangle B'C'D'E' figure III.2.(b) dont les coordonnées des points B', C', D', E' sont les suivantes:

- Point B' ($A_{B'} = h \cdot b_B$; P_B).
- Point C' ($A_{C'} = h \cdot b_C$; P_C).
- Point D' ($A_{D'} = h \cdot b_D$; P_D).
- Point E' ($A_{E'} = h \cdot b_E$; P_E).

Ainsi les sommets du quadrangle qui détermine le domaine objectif ont les coordonnées suivantes:

- Point B' ; $A_{B'} = 0,176 \text{ m}^2$; $P_{B'} = 924,7 \text{ KN}$.
- Point C' ; $A_{C'} = 0,158 \text{ m}^2$; $P_{C'} = 1041,7 \text{ KN}$.
- Point D' ; $A_{D'} = 0,245 \text{ m}^2$; $P_{D'} = 1285,7 \text{ KN}$.
- Point E' ; $A_{E'} = 1,0119 \text{ m}^2$; $P_{E'} = 1041,7 \text{ KN}$.

L'ensemble de solutions est défini par le segment B'C' (figure III.2.(b)).

Vue la solution idéale qui est définie par $(A^{id}, p^{id}) = (A_{C'}, P_{B'})$ donc pour minimiser les fonctions qui définissent la distance par rapport à (A^{id}, p^{id}) nos points doivent appartenir au segment B'C'.

La solution idéale prend la forme:

$$A^{id} = A_{C'} = \frac{2(2M_1 - M_2)}{\bar{\sigma}(h-2d)} - \frac{6.d(M_1 - M_2)}{\bar{\sigma}.h.(h-2d)}$$

et

$$p^{id} = P_{B'} = \frac{3(\bar{\sigma} + \underline{\sigma}).M_1}{\bar{\sigma}.h + (\bar{\sigma} + \underline{\sigma}).(h-3.d)}$$

Ainsi la solution idéale d'après l'application numérique est le point dont les coordonnées sont :

$$A^{id} = 0,158 \text{ m}^2 \quad \text{et} \quad P^{id} = 924,7 \text{ KN.}$$

Sélection de la solution préférable ou optimale:

La solution optimale peut être déterminée en suivant plusieurs méthodes. Voir chapitre II.

En suivant : La méthode du critère global avec $p = 1$.

On obtient :

$$F^{(1)} = |A - A^{id}| + \mu |P - P^{id}| \quad [3.19]$$

$$\mu = 1. \text{m}^2/\text{KN}$$

N.B: μ : doit intervenir pour homogénéiser les dimensions et donc pouvoir effectuer la somme en question.

Il est nécessaire de trouver le minimum de la fonction objectif $F^{(1)}$ appartenant au segment B'C' figure (III.2.b), la fonction $F^{(1)}$ est linéaire est donc minimum est localisé au point B' ou C'.

Sauf dans le cas particulier où la droite d'équation [3.19], est parallèle au segment B'C' et ainsi la valeur minimale de $F^{(1)}$ correspond à chaque point de ce segment.

Avec $p = 2$, le critère global a la forme suivante:

$$F^{(2)} = \sqrt{(A - A^{id})^2 + \mu^2 (P - P^{id})^2} \quad [3.20]$$

$$\text{avec : } \mu = 1. \text{m}^2/\text{KN} .$$

Il est nécessaire de trouver la valeur minimale de la fonction $F^{(2)}$ appartenant à la ligne droite B'C' d'écrite par l'équation.

$$\frac{P - P_{B'}}{A - A_{B'}} = \frac{P_{C'} - P_{B'}}{A_{C'} - A_{B'}}$$

Soit finalement :

$$(P - P_{B'}) = \left(\frac{P_{C'} - P_{B'}}{A_{C'} - A_{B'}} \right) \cdot (A - A_{B'}) \quad [3.21]$$

$$\text{Or : } A^{id} = A_{C'} \quad \text{et} \quad P^{id} = P_{B'}$$

La fonction $F^{(2)}$ sera réécrite comme suit :

$$F^{(2)} = \sqrt{(A - A_{C'})^2 + \mu^2 \left(\frac{P_{C'} - P_{B'}}{A_{C'} - A_{B'}} \right)^2 \cdot (A - A_{B'})^2}$$

En écrivant la condition nécessaire pour la minimisation de la fonction $F^{(2)}$ soit :

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial A} = 0 \quad \text{on obtient :}$$

$$(A - A_{C'}) + \mu^2 \left(\frac{P_{C'} - P_{B'}}{A_{C'} - A_{B'}} \right)^2 \cdot (A - A_{B'}) = 0$$

Après résolution on obtient :

$$A^{(2)} = \frac{(A_{B'}) + A_{C'} / \mu^2 \left(\frac{P_{C'} - P_{B'}}{A_{C'} - A_{B'}} \right)^2}{1 + 1 / \mu^2 \left(\frac{P_{C'} - P_{B'}}{A_{C'} - A_{B'}} \right)^2}$$

Ainsi d'après l'équation [3.21] on tire.

$$P^{(2)} = P_{B'} + \left(\frac{P_{C'} - P_{B'}}{A_{C'} - A_{B'}} \right) \cdot \frac{(A_{C'} - A_{B'}) \cdot \mu^2 \left(\frac{P_{C'} - P_{B'}}{A_{C'} - A_{B'}} \right)^2}{1 + 1 / \mu^2 \left(\frac{P_{C'} - P_{B'}}{A_{C'} - A_{B'}} \right)^2}$$

Soit :

$$P^{(2)} = (P_{B'}) + \frac{(P_{C'} - P_{B'}) \cdot \mu^2 \left(\frac{P_{C'} - P_{B'}}{A_{C'} - A_{B'}} \right)^2}{1 + 1 / \mu^2 \left(\frac{P_{C'} - P_{B'}}{A_{C'} - A_{B'}} \right)^2}$$

Alors les variables de décision qui correspondent à ces valeurs des fonctions objectifs seront données par :

$$b^{(2)} = \frac{1}{h} \cdot A^{(2)} \quad \text{et} \quad P^{(2)}$$

La solution préférable ou optimale dans les différents cas particuliers ont les valeurs numériques suivantes:

- Solution déterminée en employant la méthode du critère global avec, $p = 1$.

$$b^{(1)} = 0,216 \text{ m} \quad ; \quad A^{(1)} = 0,176 \text{ m}^2 \quad ; \quad P^{(1)} = 924,7 \text{ KN.}$$

(Points B et B' schématisés aux figures III.2(a) et III.2(b)).

- Solution déterminée en employant la méthode du critère global avec, $p = 2$.

$$b^{(2)} = 0,2516 \text{ m} \quad ; \quad A^{(2)} = 0,176 \text{ m}^2 \quad ; \quad P^{(2)} = 924,7 \text{ KN.}$$

(Points B et B' schématisés aux figures III.2(a) et III.2(b)).

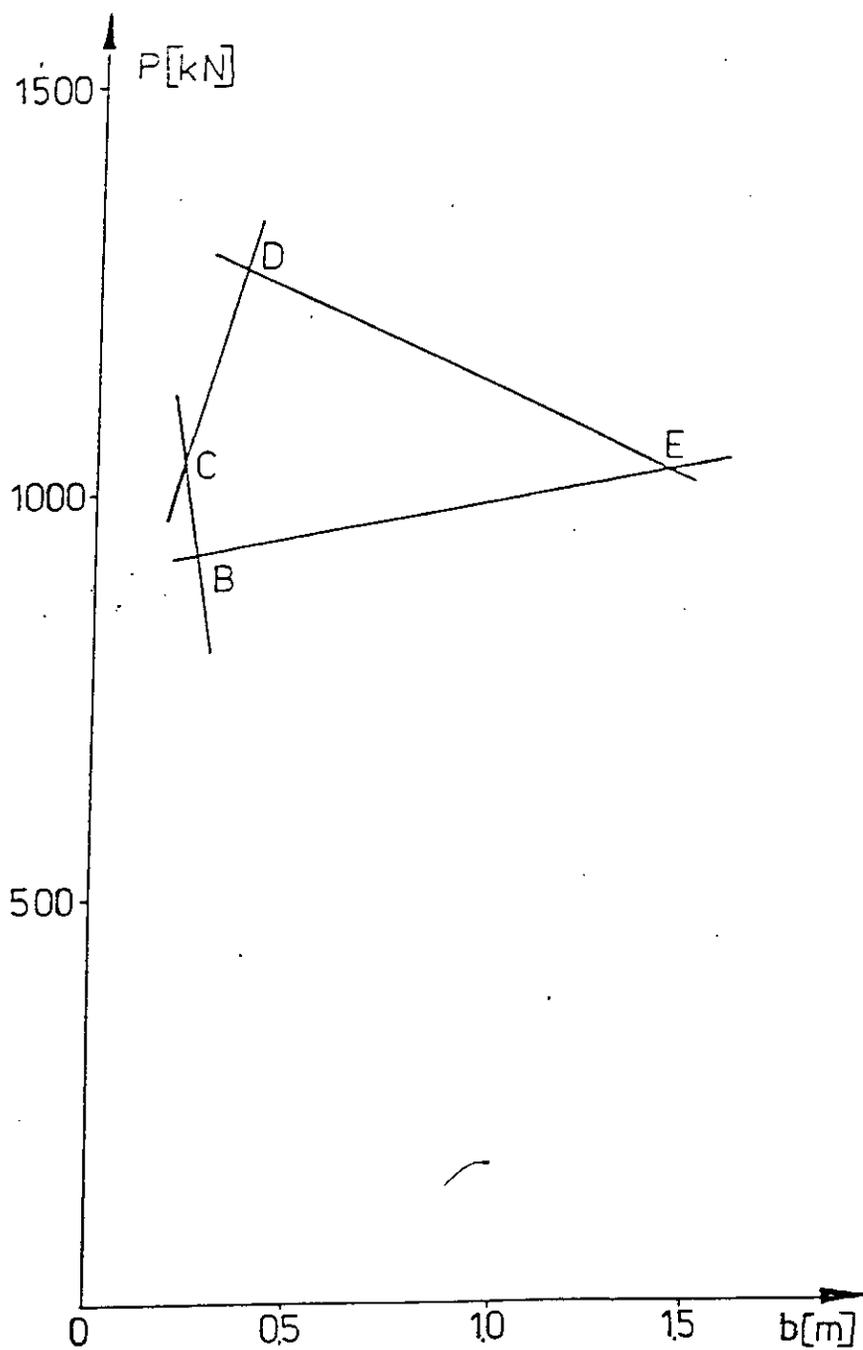


Fig. III.2.(a) : Représentation de l'espace des variables de décision.

Suite de l'exemple N°:2

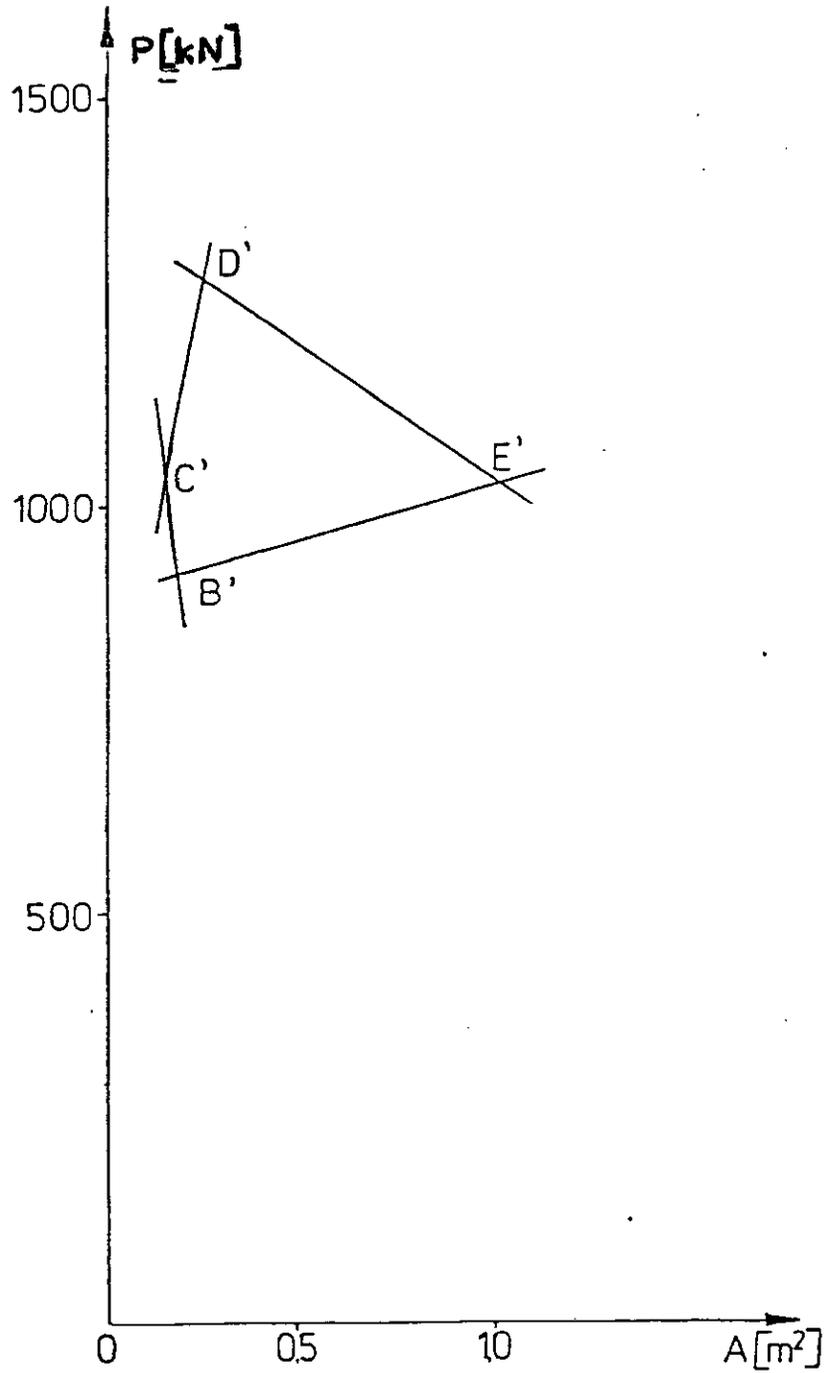


Fig. III.2.(b) : Représentation des fonctions objectifs.

III.3 Optimisation d'un ensemble de barres soumises à des forces statiques (système à treillis): Réf bib [17]

III.3.1 Formulation du problème:

Déterminer les dimensions d'un ensemble de barres (système à treillis) représenté à la figure III.3(a) dont le but de minimiser son *volume* V ; le déplacement du point B et finalement dont le but de maximiser les forces critiques dans l'ensemble des barres de type *tube carré* soumises à la compression représentées à la figure III.3(b).

On suppose que les variables de décision sont :

d'une part : l'épaisseur du tube de section carré : g_i .

d'autre part : la largeur de la section transversale de la barre : b_i Voir figure III.3(b)

Les variables de décision doivent satisfaire les contraintes suivantes:

- *Contraintes de conception* :

$$\begin{cases} g_i \geq \underline{g} \\ b_i \leq \bar{b} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 7$$

- *Contraintes sur les efforts (forces)*:

$$\sigma_i \leq \sigma_i \leq \bar{\sigma}_i \quad i = 1, 2, \dots, 7$$

Où : $\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}$ et $A_i = b_i^2 - (b_i - 2 \cdot g_i)^2$

$$A_i = 4 \cdot g_i \cdot (b_i - g_i)$$

Soit : $\sigma_i = \frac{N_i}{4g_i(b_i - g_i)}$

Avec:

$\underline{\sigma}$: Contrainte admissible de compression.

$\bar{\sigma}$: Contrainte admissible de traction

Les critères d'optimisation de l'ensemble sont comme suit :

- *Volume de l'ensemble des barres (volume total)* :

$$V = \sum_{i=1}^{i=7} V_i = \sum_{i=1}^{i=7} A_i \cdot l_i = \sum_{i=1}^{i=7} 4 \cdot l_i \cdot g_i \cdot (b_i - g_i) = V_{\min}$$

- Déplacement vertical du point B :

$$\delta_B = \sum_{i=1}^{i=7} \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{N_i^2 \cdot l_i}{4 \cdot E \cdot g_i (b_i - g_i)} \right] = \delta_B \text{ min}$$

- La charge critique dans les barres soumises à la compression :

$$P_{crj} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_j}{l_j^2} = P_{crj} \text{ max}$$

Solution du problème :

Le problème est résolu en suivant deux (02) étapes.

Les sections transversales droites, de l'ensemble des barres, A_i sont déterminées en première étape.

Pendant qu'à la deuxième étape on déterminera les dimensions en détail, c'est à dire les valeurs de g_i et b_i de la section transversale droite de l'ensemble des barres.

On utilise ici comme méthode de résolution *la programmation dynamique*. Le chargement statique "P" appliqué au point B verticalement, produit les forces suivantes dans l'ensemble des barres, de notre système en treillis.

Soit après résolution :

$$N_1 = N_7 = \frac{-5}{8} \cdot P$$

$$N_2 = N_6 = \frac{3}{8} \cdot P$$

$$N_3 = N_5 = \frac{5}{8} \cdot P$$

$$N_4 = \frac{-3}{4} \cdot P$$

Le déplacement du point B peut être écrit sous la forme suivante :

$$\delta_B = \sum_{i=1}^{i=7} \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{N_i^2 \cdot l_i}{E \cdot A_i} \right] = 2 \frac{25}{64} \cdot \frac{P \cdot l_1}{E \cdot A_1} + 2 \frac{9}{64} \cdot \frac{P \cdot l_2}{E \cdot A_2} + 2 \frac{25}{64} \cdot \frac{P \cdot l_3}{E \cdot A_3} + \frac{9}{16} \cdot \frac{P \cdot l_4}{E \cdot A_4}$$

Et on peut remarquer, qu'on a introduit que les sections droites (A_1, A_2, A_3, A_4) de l'ensemble des barres et cela est dû à la symétrie de la construction de notre système.

- La première étape de résolution de notre problème est formulée comme suit :

Trouver la section transversal droite de l'ensemble des barres A_1 jusqu'à A_4 , pour *minimiser* non seulement le volume de l'ensemble. Soit :

$$V = 2.l_1.A_1 + 2.l_2.A_2 + 2.l_3.A_3 + l_4.A_4 = V_{\min}$$

Mais aussi le déplacement du point B, soit :

$$\delta_B = \frac{1}{16} \cdot \frac{P}{E} \cdot \left[\frac{25}{2} \cdot \frac{l_1}{A_1} + \frac{9}{2} \cdot \frac{l_2}{A_2} + \frac{25}{2} \cdot \frac{l_3}{A_3} + 9 \cdot \frac{l_4}{A_4} \right] = \delta_B \min$$

En prenant en compte que la section transversale droite de l'ensemble des barres, et assujetti à leur plus basse et plus haute contrainte. Ce problème est résolu en employant : *la méthode de programmation dynamique*, en suivant les chemins indiqués ci-dessous :

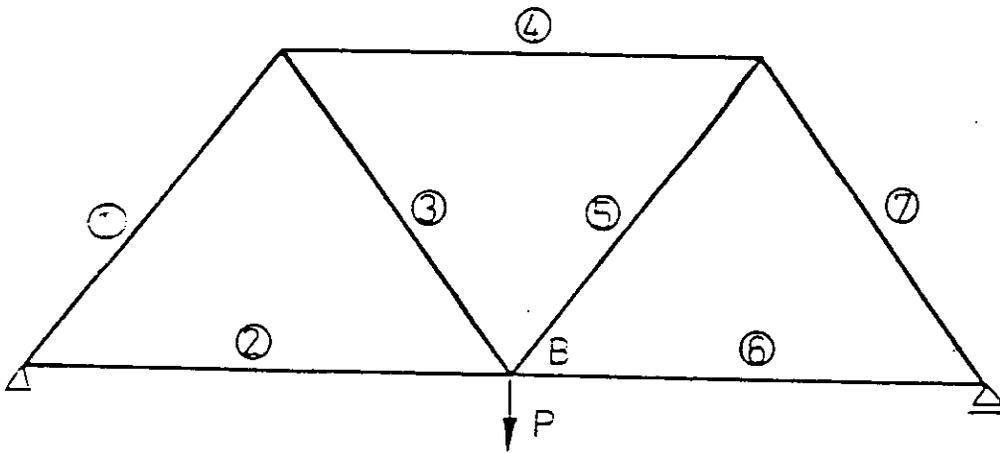


Fig. III.3.(a) : Schéma du système à treillis statique.

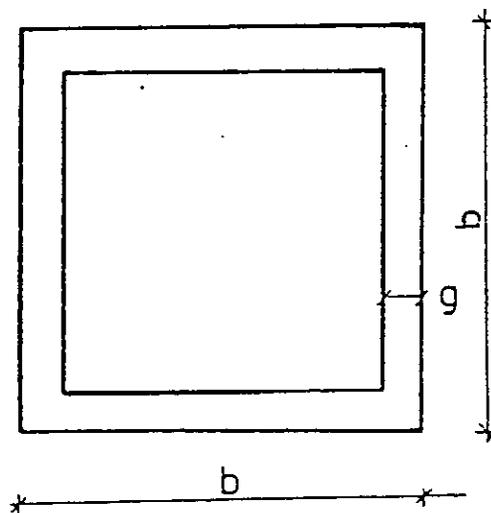


Fig. III.3.(b) : La section transversale des barres du système à treillis.

Dans la première phase, le premier groupe de section figure III.3(c) qui est l'ensemble des barres 1 et 7 qui sont considérées afin de faire une tentative pour trouver :

$$\hat{V}_1(S_2) = \min (2l_1 \cdot A_1(S_2))$$

Avec satisfaction de la contrainte : $\frac{25}{32} \cdot \frac{P.l_1}{E.A_1} = S_2$

Où : S_2 est le déplacement inconnu du point B et qui est dû à la déformation du groupe identique de barres 1 et 7.

La résolution de cette étape nous permet d'obtenir les résultats suivants :

$$\hat{A}_1 = \frac{25}{32} \cdot \frac{P.l_1}{E.S_2} \quad \text{où :} \quad \hat{A}_1 = A_1(S_2)$$

Par suite on tire :

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_1(S_2) = 2 l_1 \cdot A_1(S_2) = \frac{25}{16} \cdot \frac{P.l_1^2}{E.S_2}$$

Soit :

$$\hat{V}_1 = \frac{25}{16} \cdot \frac{P.l_1^2}{E.S_2}$$

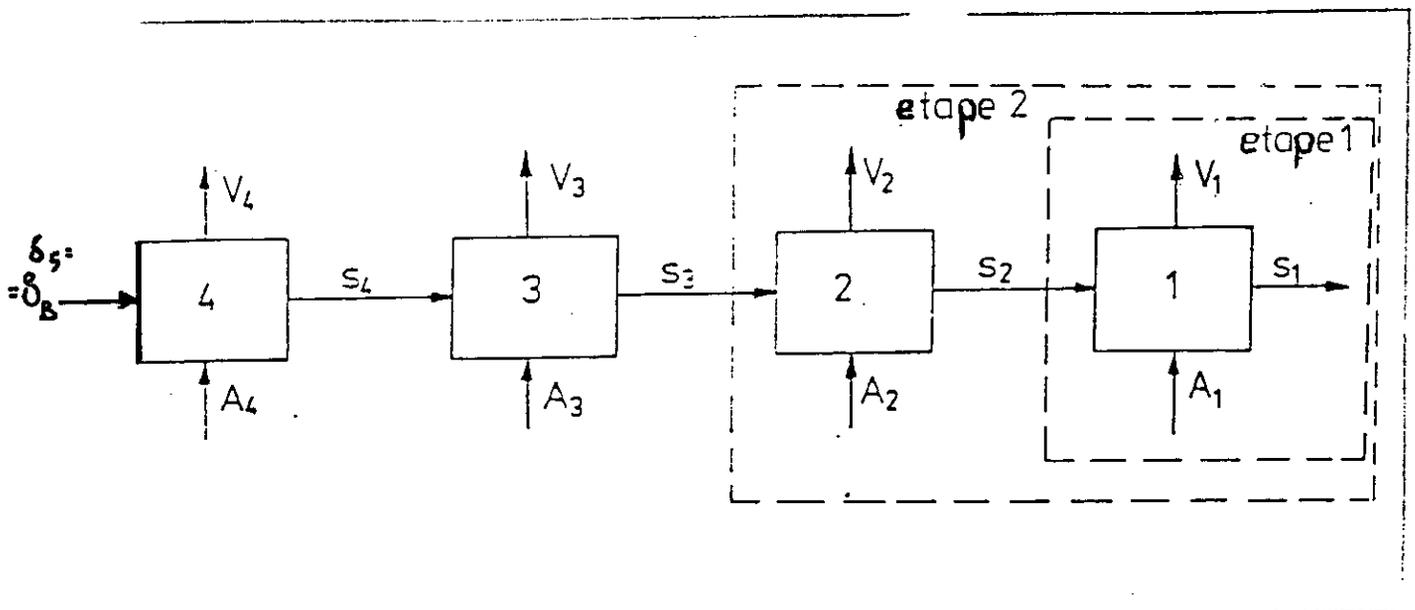


Fig. III.3.(c) : Schéma du processus des quatre étapes du problème de la programmation dynamique.

Dans la seconde étape, on considère deux groupes de section figure III.3(c) et on cherche la valeur de \hat{V}_2 tel que :

$$\hat{V}_2(S_3) = \min_{A_2} [2 l_1 \cdot A_1(S_2) + 2 l_2 \cdot A_2(S_3)]$$

Avec satisfaction de la contrainte : $S_3 = S_2 + \frac{9}{32} \cdot \frac{P \cdot l_2}{E \cdot A_2}$ [3.22]

Où : S_3 est le déplacement inconnu du point B dû à la déformation des deux groupes de barres identiques qui sont respectivement le groupe (1 et 7) d'une part et d'autre part le groupe (2 et 6).

A partir du principe d'optimisation de Bellman il s'en suit :

$$2 l_1 \cdot \hat{A}_1(S_2) = \frac{25}{16} \cdot \frac{P \cdot l_1^2}{E \cdot S_2} \quad ; \quad 2 l_1 \cdot \hat{A}_1(S_2) = \hat{V}_1(S_2)$$

Et par suite :

$$\hat{V}_2(S_3) = \min_{A_2} \left[\left(\frac{25}{16} \cdot \frac{P \cdot l_1^2}{E \cdot S_2} + 2 l_2 \cdot A_2(S_3) \right) \right]$$

A partir de l'équation [3.22] il est possible de déterminer :

$$S_2 = S_3 - \frac{9}{32} \cdot \frac{P \cdot l_2}{E \cdot A_2}$$

Et ensuite l'expression :

$$\hat{V}_2(S_3) = \min_{A_2} \left[\frac{25}{16} \cdot \frac{P \cdot l_1^2}{E} \cdot \frac{1}{S_3 - \frac{9}{32} \cdot \frac{P \cdot l_2}{E \cdot A_2}} + 2 l_2 \cdot A_2 \right]$$

Où : $A_2 = A_2(S_3)$

La condition $\frac{\partial \hat{V}_2}{\partial A_2} = 0$ nous permet de trouver :

$$\frac{\partial \hat{V}_2}{\partial A_2} = \frac{\partial}{\partial A_2} \left[\frac{25}{16} \cdot \frac{P l_1^2}{E} \cdot \frac{1}{S_3 - \frac{9}{32} \frac{P l_2}{E A_2}} + 2 l_2 \cdot A_2 \right]$$

$$\frac{\partial \hat{V}_2}{\partial A_2} = 2 l_2 + \frac{25}{16} \cdot \frac{P l_1}{E} \cdot \frac{-\frac{9}{32} \cdot \frac{P l_2}{E} \cdot \frac{1}{A_2}}{\left(S_3 - \frac{9}{32} \frac{P l_2}{E A_2} \right)^2} = 0$$

Soit :

$$S_3 - \frac{9}{32} \cdot \frac{P l_2}{E A_2} - \frac{5}{4} \frac{P l_1}{E} \cdot \frac{3}{8} \frac{1}{A_2} = 0$$

A partir de laquelle on tire la valeur de S_3 .

Soit :

$$S_3 = \frac{3}{32} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{3 l_2 + 5 l_1}{A_2}$$

Finalement la section $A_2 = A_2(S_3)$ sera donnée par :

$$\hat{A}_2 = \frac{3}{32} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{3 l_2 + 5 l_1}{S_3}$$

N.B: L'autre solution est à rejeter puisque $A_2 > 0 \quad \forall l_1, l_2$ ce qui n'est pas vérifié si $3 l_2 - 5 l_1 \leq 0$ en 2^{ème} cas.

et :

$$\hat{A}_2(S_3) = \frac{1}{16} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{1}{S_3} (3 l_2 + 5 l_1)^2$$

et cela après développement des calculs nécessaires.

Maintenant on considère trois groupes de sections et on déterminera :

$$\hat{V}_3(S_4) = \min_{A_3} (\hat{V}_2 + 2 l_3 \cdot A_3).$$

Avec satisfaction de la contrainte : $S_4 = S_3 + \frac{25}{32} \cdot \frac{P.l_3}{E.A_3}$;

Où : S_4 est le déplacement du point B dû au déplacement de l'ensemble des barres (1 et 7) ; (2 et 6) ; (3 et 5).

En substituant : $\hat{V}_2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{(5l_1 + 3l_2)^2}{S_3}$

Et en s'accordant avec le principe d'optimisation, on obtient :

$$\hat{V}_3(S_4) = \min_{A_3} \left[\frac{1}{16} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{(5l_1 + 3l_2)^2}{S_4 - \frac{25}{32} \cdot \frac{P.l_3}{E.A_3}} + 2l_3.A_3 \right]$$

$$\text{et : } A_3 = A_3(S_4)$$

A partir de la condition $\frac{\partial \hat{V}_3}{\partial A_3} = 0$, il s'en suit que :

$$\frac{\partial \hat{V}_3}{\partial A_3} = \frac{\partial}{\partial A_3} \left[\frac{1}{16} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{(5l_1 + 3l_2)^2}{S_4 - \frac{25}{32} \cdot \frac{P.l_3}{E.A_3}} + 2l_3.A_3 \right]$$

$$\frac{\partial \hat{V}_3}{\partial A_3} = 2l_3 + \frac{1}{16} \cdot \frac{P}{E} \cdot (5l_1 + 3l_2)^2 \cdot \frac{(-) \frac{25}{32} \cdot \frac{P.l_3}{E} \cdot \frac{1}{A_2}}{\left(S_4 - \frac{25}{32} \cdot \frac{P.l_3}{E.A_3} \right)^2}$$

$$\text{Donc : } \frac{\partial \hat{V}_3}{\partial A_3} = 0 \Rightarrow$$

$$2l_3 \left(S_4 - \frac{25}{32} \cdot \frac{P.l_3}{E.A_3} \right)^2 - \frac{1}{16} \cdot \frac{P^2}{E^2} \cdot (2l_3) \cdot (5l_1 + 3l_2)^2 \cdot \frac{25}{64} \cdot \frac{1}{A_3^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2l_3 \left[\left(S_4 - \frac{25}{32} \cdot \frac{P.l_3}{E.A_3} \right)^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{P}{E} \cdot (5l_1 + 3l_2) \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{A_3} \right)^2 \right] = 0$$

Soit :

$$S_4 - \frac{25}{32} \cdot \frac{P l_3}{E A_3} - \frac{5}{32} \cdot \frac{P(5 l_1 + 3 l_2)}{E A_3} = 0 \quad *$$

En effet : $l_3 \neq 0$ et l'autre solution est à rejeter car on devra avoir, $\forall l_1, l_2, l_3 \cdot A_3 > 0$.

$$* \Rightarrow S_4 - \frac{5}{32} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{1}{A_3} \cdot (5 l_1 + 3 l_2 + 5 l_3) = 0$$

Finalement on tire :

$$A_3 = \frac{5}{32} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{(5 l_1 + 3 l_2 + 5 l_3)}{S_4}$$

Et par suite : on tire l'expression de \hat{V}_3 .

Soit :

$$\hat{V}_3 = \frac{1}{16} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{(5 l_1 + 3 l_2 + 5 l_3)^2}{S_4}$$

Dans l'étape qui suit on ajoute la seule barre restant (barre 4). Soit les groupes, (1 et 7) ; (2 et 6) ; (3 et 5) et (4), et on trouve après calcul que :

$$\hat{V}_4(S_5) = \min_{A_4} (\hat{V}_3 + l_4 \cdot A_4).$$

$$\hat{V}_4(S_5) = \min_{A_4} \left[\frac{1}{16} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{(5 l_1 + 3 l_2 + 5 l_3)^2}{S_5 - \frac{9}{16} \cdot \frac{P l_4}{E A_4}} + l_4 \cdot A_4 \right]$$

$$\text{En effet : } S_5 = S_4 + \frac{9}{16} \cdot \frac{P l_4}{E A_4}$$

A partir de la condition : $\frac{\partial \hat{V}_4}{\partial A_4} = 0$, il s'en suit que :

$$A_4 = \frac{3}{16} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{(5 l_1 + 3 l_2 + 5 l_3 + 3 l_4)}{S_5}$$

Le volume minimal de la barre n°: 4 est :

$$\hat{V}_4 = \frac{1}{16} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{(5l_1 + 3l_2 + 5l_3 + 3l_4)^2}{S_5}$$

dépend du déplacement du point B étant donné que $\delta_B = S_5$.

Étant donné que la contrainte admissible dans les barres ne peut être excédée on peut écrire alors, que :

$$V \geq 2l_1 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{P}{\sigma} + 2l_2 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{P}{\sigma} + 2l_3 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{P}{\sigma} + l_4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{\sigma} = \underline{V}$$

d'autre part et à partir de la condition de formes des barres on peut écrire la condition enveloppe suivante :

$$V \leq b^2 \cdot (2l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) = \bar{V}$$

Le segment contenu entre \underline{V} et \bar{V} de la courbe donnant le volume total.

$$V = \frac{1}{16} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{(5l_1 + 3l_2 + 5l_3 + 3l_4)^2}{\delta_B} \quad ; \quad [3.23]$$

Avec : $\delta_B = S_5$.

dans le système de coordonnées (V, δ_B) ce segment est la courbe *des solutions satisfaisantes*.

La solution préférable (optimale) peut être déterminée en employant la méthode du critère global écrit dans ce cas sous la forme :

$$F^{(2)} = \sqrt{(V - V^{id})^2 + \mu^2 (\delta_B - \delta_B^{id})^2} \quad [3.24]$$

avec : $\mu = 1.m^2$

Formule qui décrit la distance minimale entre la solution préférable (optimale) et la solution idéale.

Les coordonnées du point idéal (V^{id}, δ_B^{id}) sont comme suit :

$$V^{id} = V_{inf} = \frac{1}{4} \cdot P \cdot \left(5 \frac{l_1}{\sigma} + 3 \frac{l_2}{\sigma} + 5 \frac{l_3}{\sigma} + 3 \frac{l_4}{\sigma} \right)$$

et :

$$\delta_B^{id} = \frac{1}{16} \cdot \frac{P}{E} \cdot \frac{(5l_1 + 3l_2 + 5l_3 + 3l_4)^2}{b^2 \cdot (2l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)}$$

En substituant, les valeurs de V^{id} et δ_B^{id} dans l'équation [3.24] et en prenant en compte la condition en vertu de la solution préférable qui appartient à l'ensemble de solution décrit par l'équation [3.23], on obtient alors la relation :

$$F^{(2)} = \left\{ \left[V - \frac{1}{4} P \cdot \left(5 \frac{l_1}{\sigma} + 3 \frac{l_2}{\sigma} + 5 \frac{l_3}{\sigma} + 3 \frac{l_4}{\sigma} \right) \right]^2 + \mu^2 \cdot \left(\frac{1}{16} \frac{P}{E} \right)^2 (5 l_1 + 3 l_2 + 5 l_3 + 3 l_4)^4 \cdot \left[\frac{1}{V} - \frac{1}{\bar{b}^2 (2 l_1 + 2 l_2 + 2 l_3 + l_4)} \right] \right\}^{1/2}$$

A partir de la condition : $\frac{\partial F}{\partial V} = 0$ on trouve l'équation :

$$V^4 - \frac{1}{4} P \cdot \left(5 \frac{l_1}{\sigma} + 3 \frac{l_2}{\sigma} + 5 \frac{l_3}{\sigma} + 3 \frac{l_4}{\sigma} \right) \cdot V^3 + \mu^2 \cdot \left(\frac{1}{16} \frac{P}{E} \right)^2 \cdot \frac{(5 l_1 + 3 l_2 + 5 l_3 + 3 l_4)^4}{\bar{b}^2 (2 l_1 + 2 l_2 + 2 l_3 + l_4)} - \mu^2 \cdot \left(\frac{1}{16} \frac{P}{E} \right)^2 (5 l_1 + 3 l_2 + 5 l_3 + 3 l_4)^4 = 0 \quad [3.25]$$

A partir de la quelle, on tire la valeur de V^{Pr} tel que : $\underline{V} \leq V^{Pr} \leq \bar{V}$

En suite on détermine les dimensions en détail de la section droite des groupes de barres soumises à une compression, à partir de la condition de maximisation de la force critique tout en préservant la section des barres transversales obtenues dans la phase précédente.

La force critique du $j^{\text{ème}}$ groupe de barres est donnée par :

$$P_{cr(j)} = \pi^2 \frac{E J_j}{l_j^2}$$

Où : J_j : Moment d'inertie.

et l_j : Longueur réelle de la barre soumise à une force de compression (longueur de flambement).

Cette force critique peut être maximisée si le moment d'inertie correspondant est maximal. Ainsi il est nécessaire de trouver le maximum de la relation :

$$J = \frac{b^4}{12} - \frac{(b - 2g)^4}{12} = \frac{1}{12} A \cdot (b^2 + (b - 2g)^2) \quad [3.26]$$

Avec satisfaction de la condition :

$$A = b^2 - (b - 2g)^2 = 4g \cdot (b - g) = A^{Pr} \quad [3.27]$$

et : $g \geq \underline{g}$ et $b \leq \bar{b}$

En déterminant b à partir de l'équation [3.27] et en substituant cette valeur dans l'équation [3.26] on aura :

$$4g(b - g) = A^{pr} \Rightarrow \boxed{b = \frac{A^{pr}}{4g} + g}$$

Soit :

$$J = \frac{1}{12} A^{pr} \cdot \left[\left(\frac{A^{pr}}{4g} + g \right)^2 + \left(\frac{A^{pr}}{4g} - g \right)^2 \right]$$

et donc :

$$\boxed{J = \frac{1}{6} \cdot A^{pr} \cdot \left(\frac{A^{pr 2}}{16g^2} + g^2 \right)}$$

La fonction J en fonction de g n'a pas d'extremum dans l'intervalle $[b/2, \underline{g}]$ et elle atteint la valeur maximal pour $g = \underline{g}$.

La force critique P_{cr} prend sa valeur maximale si :

$$g^{pr} = \underline{g} \quad \text{et} \quad b^{pr} = \frac{A^{pr}}{4\underline{g}} + \underline{g}$$

Cette solution est optimale uniquement si : $b^{pr} \leq \bar{b}$

Autrement on peut prendre : $b^{pr} = \bar{b}$ et $g^{pr} = \frac{\bar{b}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\bar{b}^2 - A^{pr}}$

Exemple numérique:

Les valeurs numériques de notre exemple seront:

- La force $P = 2000$ KN.
- Le module de Young : $E = 200$ KN/mm².
- Les contraintes admissibles: $\bar{\sigma} = \underline{\sigma} = 250$ MPa.
- Longueurs des barres:

$$l_1 = l_3 = l_5 = l_7 = 5 \text{ m}; \quad l_2 = l_4 = l_6 = 6 \text{ m.}$$

- La largeur maximale de la section droite $\bar{b} = 200$ mm.
- Epaisseur minimale $\underline{g} = 10$ mm.

On trouvera après résolution de l'équation [3.25] et cela en remplaçant tous les paramètres par leur valeurs numériques.

Soit : $V^{pr} = 0,1755 \text{ m}^3$, pareil la valeur du déplacement du point B qui correspond au volume $V = V^{pr}$ est donnée par :

$$\delta_B^{pr} = 0,02634 \text{ m.} \quad \text{Figure III.3.(d)}$$

Après avoir déterminé $\delta_B^{pr} = S_5$ on déterminera successivement les valeurs :

$$A_4^{pr} ; S_4 ; A_3^{pr} ; S_3 ; A_2^{pr} ; S_2 \text{ et } A_1^{pr}.$$

Soit les résultats de calcul :

$$A_4^{pr} = 0,006122 \text{ m}^2. \quad S_4 = 0,02082 \text{ m.}$$

$$A_3^{pr} = 0,005103 \text{ m}^2. \quad S_3 = 0,01317 \text{ m.}$$

$$A_2^{pr} = 0,003061 \text{ m}^2. \quad S_2 = 0,00766 \text{ m.}$$

$$A_1^{pr} = 0,005100 \text{ m}^2.$$

Après avoir déterminé la section droite de toutes les barres. Le critère de la force critique maximal peut être utilisé pour déterminer les dimensions en détail de la section droite des groupes de barres soumises à la compression.

Pour les barres 1 et 7, il est possible d'écrire :

$$g_1^{pr} = g_7^{pr} = \underline{g} = 10 \text{ mm}$$

$$\text{et : } b_1^{pr} = b_7^{pr} = \frac{5100}{40} + 10 = 137,5 \text{ mm.}$$

$$\text{Alors on aura : } b_1^{pr} = b_7^{pr} = 137,5 \text{ mm} < \bar{b} = 200 \text{ mm.}$$

Ces quantités déterminent la solution optimale.

Pour le groupe constitué par la barre 4 on a :

$$g_4^{pr} = \underline{g} = 10 \text{ mm}$$

$$\text{et : } b_4^{pr} = \frac{6122}{40} + 10 = 163,1 \text{ mm.}$$

$$\text{Dans ce cas on a aussi : } b_4^{pr} < \bar{b} = 200 \text{ mm.}$$

Pour le groupe de barres soumis à un effort de traction la solution n'est pas unique, parceque l'optimisation n'a pris de mesure que sur les sections transversales droites. Leur dimensions peuvent être s'élctionnées sur les bases de leur adaptation à ceux des autres sections droites des groupes de barres soumises à la compression.

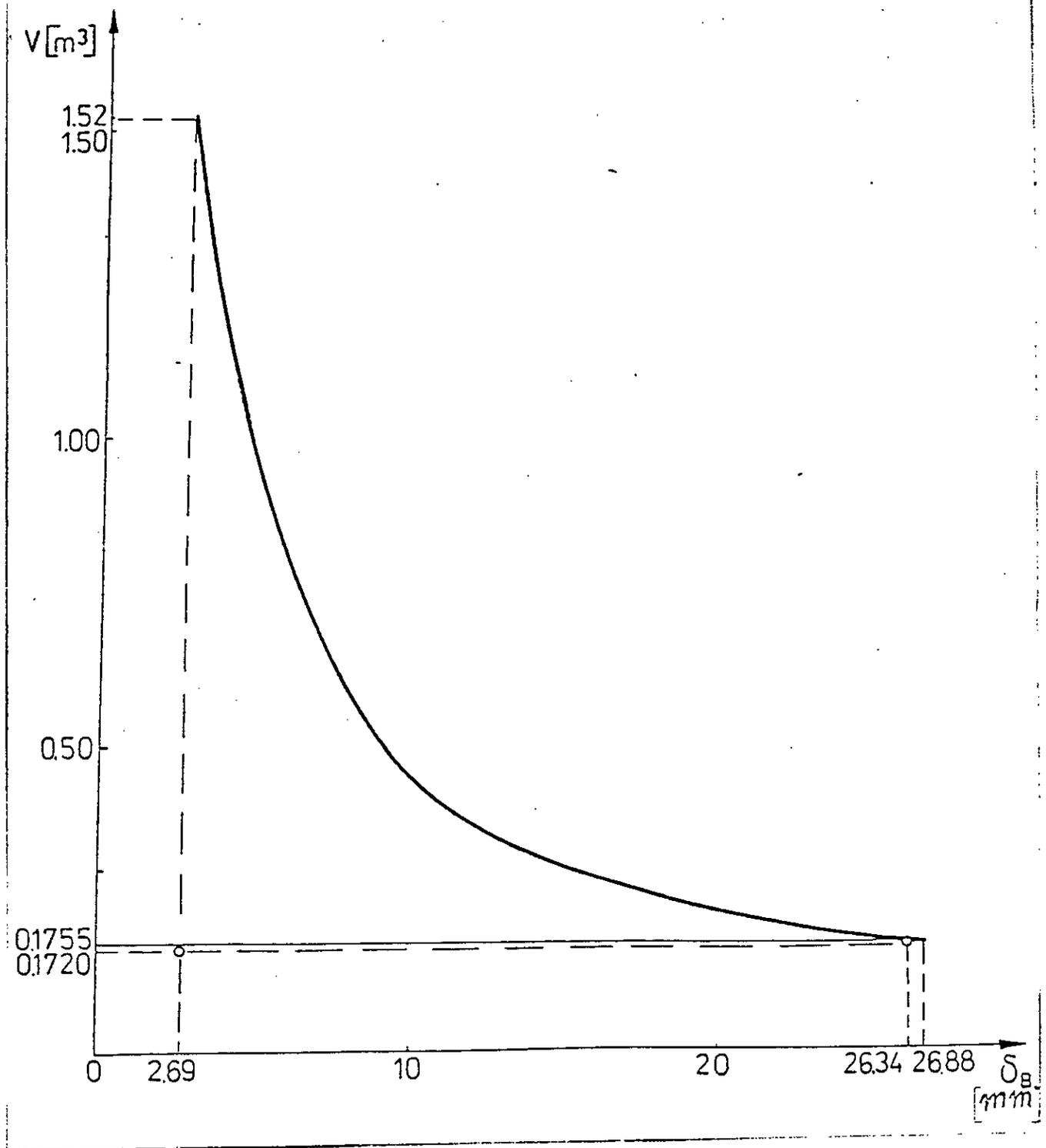


Fig. III.3.(d) : Représentation de l'espace des fonctions objectifs de l'ensemble des solutions.

Chapitre : IV

*Optimisation de
poutres isostatiques
précontraintes.*



IV.1 Présentation du problème: Réf bib [3] Réf bib [4]

IV.1. Introduction au calcul de béton précontraint:

IV.1.1 Effets d'un câble de précontrainte:

IV.1.1.1 Equilibre d'ensemble d'une pièce précontrainte: (Figure IV.1.1.1)



Fig. IV.1.1.1

Le câble de précontrainte est tendu en prenant appui sur le béton. L'ensemble béton + câble est en équilibre; d'après la loi de l'action et de la réaction, cela veut dire que la force développée par le câble (P) est équilibrée par une réaction de béton (F_b) $F_b = P$.

Donc globalement l'ensemble *béton + câble* est soumis à un système de forces nul ($P - F_b = 0$).

En conséquence la précontrainte ne développe que des efforts internes.

IV.1.1.2 Effets Internes développés par la précontrainte:

a. *Equilibre du câble:*

Soit un câble considéré comme un fil parfait présentant une courbure de rayon r entre les sections A et S d'une pièce. Si l'on exerce une force P_A sur le câble et en considérant un frottement de coefficient f du câble sur sa gaine, la force $p(x)$ dans la section S(x) doit équilibrer (figure IV-1-1-2(a))

- L'effort P_A .
- L'action radiale (centrifuge) du béton

résultant de la courbure $\sum_A^S \frac{p(x)}{r}$

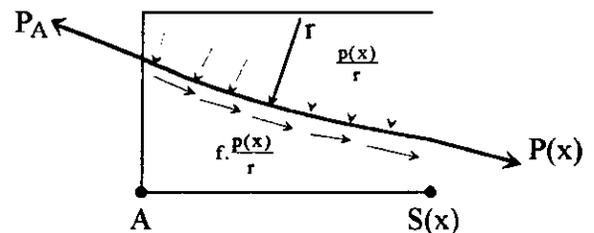


Fig. IV.1.1.2 (a)

- L'action tangente de frottement du béton $\sum_A^S f \cdot \frac{p(x)}{r}$.

b. Equilibre du béton:

De même l'effort $F_b(x)$ doit équilibrer (figure IV-1-1-2(b))

- L'effort F_{bA} .

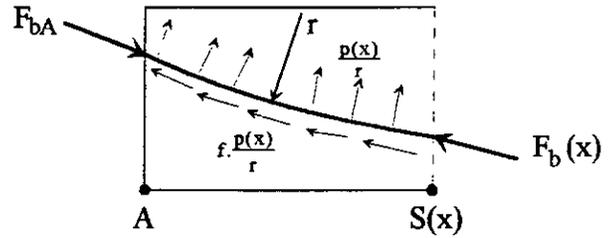


Fig. IV.1.1.2 (b)

- L'action radiale (centripète) du câble due à la courbure $\sum_A^S \frac{p(x)}{r}$.

- L'action tangente de frottement du câble $\sum_A^S f \cdot \frac{p(x)}{r}$.

L'équilibre du système béton + câble impose que les termes soient identiquement égaux et donc $F_b(x) = p(x)$.

c. Sollicitations dues au câble dans une section:

Un câble de tracé non linéaire, de rayon de courbure r exerce sur le béton une force radiale P_r (c'est-à-dire perpendiculaire en tout point au câble), proportionnelle à l'effort de traction P exercé dans le câble :

$$P_r = \frac{P}{r}$$

L'action de la précontrainte est considéré soit comme :

- Une action intérieure entraînant en tout point un moment dit isostatique, $M_0 = p \cdot e_0$ pour une excentricité e_0 . La méthode de calcul correspondante s'appelle *méthode interne* ou *méthode directe*:

- Ou bien une action extérieure appliquée aux ancrages et radialement le long de son tracé si ce dernier n'est pas rectiligne (*méthode externe*).

c.1 Méthode directe (ou interne):

• **Structure isostatique:**

La précontrainte exerce en tout point de la section étudiée d'abscisse x :

- Un effort normal à la section $N_x = p(x) \cdot \cos\alpha(x)$;

- Un moment dit *moment isostatique* : $M_0 = p(x) \cdot \cos\alpha(x) \cdot e_0(x)$.

$\alpha(x)$ désigne l'angle du tracé du câble avec l'horizontale.

Comme les valeurs des angles sont généralement inférieures à $\arctg(1/10)$ ou 6° , on peut négliger les termes du 2^{ème} ordre dans la valeur du cosinus ($\cos 6^\circ = 0,994$) et adopter par conséquent $p(x)$ au lieu de $p(x) \cdot \cos\alpha(x)$.

On peut donc en tout point déterminer les contraintes dues à l'action de la précontrainte seule par la formule classique :

$$\sigma = \frac{p}{S} \pm \frac{p \cdot e_0}{\frac{I}{V}}$$

c.2 Méthode externe:

L'action du câble de précontrainte est alors considérée comme une action extérieure agissant aux ancrages avec:

- Un effet horizontal $p \cdot \cos\alpha = p_h$
- Un effet vertical $p \cdot \sin\alpha = p_v$ directement transmis dans l'appui et n'entraînant aucune déformation de la structure:

- Un moment $p \cdot \cos\alpha \cdot e_0 = p_h \cdot e_0$.

- Une charge radiale $P_r(x) = \frac{P(x)}{r(x)}$.

- Pour un tracé de câble composé de segments de droite, la valeur de P_r est nulle (courbure $\frac{1}{r} = 0$).

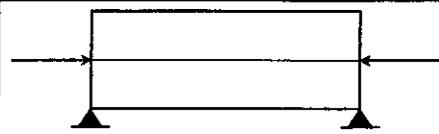
- Pour un tracé de câble parabolique*, on peut admettre en négligeant les termes du second ordre que :

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = y''$$

La dérivée seconde d'une parabole étant une constante, l'action radiale est donc uniformément répartie et le moment correspondant facile à calculer.

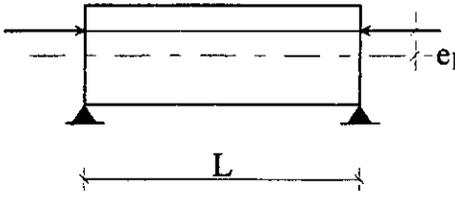
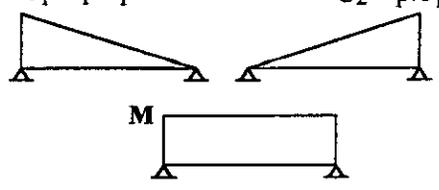
IV.1.1.3 Exemples comparatifs simples des méthodes directe et externe:

a. Poutre isostatique à câble filant centré au centre de gravité de la section:

	Méthode directe	Méthode externe
 <p>excentricité $e_0 = 0$ quelle que soit l'abscisse.</p>	$e_0 = 0$ $M_0 = p \cdot e_0 = 0$	$\frac{1}{r} = 0$ donc $P = \frac{P}{r} = 0$ e_0 à l'appui = 0 donc pas de couple extérieur sur appui.

b. Poutre isostatique à câble filant rectiligne d'excentricité constante:

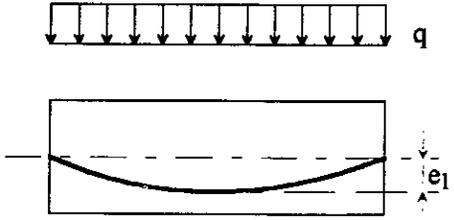
$$e_0(x) = e_1$$

	Méthode directe	Méthode externe
	$e_0 = e_1$ $M_0 = p \cdot e_0 = p \cdot e_1$ Quelle que soit l'abscisse	$\frac{1}{r} = 0$ Actions extérieures : $P_{\Gamma} = \frac{P}{r} = 0$ Moment aux extrémités : $C_1 = +p \cdot e_1$ $C_2 = +p \cdot e_1$ $C_1 = p \cdot e_1$ $C_2 = p \cdot e_1$  d'où : $M = C_1 + C_2 = +p \cdot e_1 = M_0$

N.B:

L'excentricité $e_0(x)$ est comptée à partir du centre de gravité de la section, positivement vers le haut.

c. Poutre isostatique à câble parabolique soumise à une charge uniforme q :

Recherche de l'excentricité e_1 pour avoir une contrainte constante en tout point de la section médiane.	Méthode directe	Méthode externe
	<ul style="list-style-type: none"> Equation du câble : $e_0(x) = \frac{4e_1}{L^2} x(L-x)$ Contrainte constante si moment global nul : $q \cdot \frac{L^2}{8} + p \cdot e_1 = 0$ $e_1 = \frac{-q \cdot L^2}{8 \cdot p}$ 	<ul style="list-style-type: none"> Courbure de la parabole : $\frac{1}{r} = \frac{8 \cdot e_1}{L^2}$ Chaque radiale uniforme : $P = \frac{P}{r} = \frac{8 \cdot p \cdot e_1}{L^2}$ Contrainte constante si charge répartie globale nulle : $q + P = 0$ d'où : $e_1 = \frac{-q \cdot L^2}{8 \cdot p}$

Remarque:

La méthode de calcul externe donne dans les exemples ci-dessus moins de calculs et paraît plus simple. Cependant pour les problèmes usuels rencontrés dans la pratique, qui s'éloignent de ces cas idéaux la méthode directe est plus commode.

La méthode externe a cependant le mérite de mieux faire comprendre l'action de la précontrainte sur un système hyperstatique.

Dans notre étude on s'intéressera à l'application de la méthode *interne ou directe* pour le cas de structure *isostatique*.

IV.1.2 Flexion de poutres isostatiques:

IV.1.2.1 Combinaisons de calcul aux états limites:

a. Etat limite ultime: (Combinaison courante)

$$\gamma_{P_m} \cdot P_m + 1,35 \cdot G_{\max} + G_{\min} + \gamma_{Q_1} \cdot Q_{1,k} + \sum_{i>1} 1,3 \cdot \Psi_{0i} \cdot Q_{i,k}$$

Avec :

P_m : Valeur probable de la précontrainte.

$\gamma_{P_m} = 1$ en général pour la flexion et les cas courants en cisaillement.

G_{\max} : Actions permanentes défavorables.

G_{\min} : Actions permanentes favorables.

$\gamma_{Q_1} = 1,5$ dans le cas général.

$Q_{1,k}$, $Q_{i,k}$ et Ψ_{0i} sont définis selon la nature des actions dans le B.P.E.L.

b. Etats limites de service (combinaisons fréquentes)

$$P_k + G_{\max} + G_{\min} + \Psi_{11} \cdot Q_{1,k} + \sum_{i>1} \Psi_{2i} \cdot Q_{i,k}$$

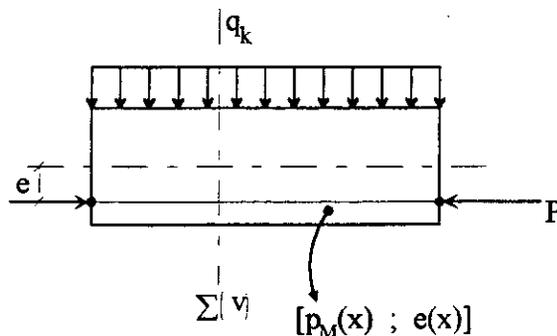
Avec:

$Q_{1,k}$, $Q_{i,k}$, Ψ_1 , Ψ_2 sont définis selon la nature des actions dans le B.P.E.L.

Il existe encore deux autres combinaisons telles que : *combinaisons rares* et *combinaison quasi-permanentes*.

En effet, ces états-limites visent à assurer la durabilité des structures; ils sont donc liés aux phénomènes que l'on veut éviter (en général ce sera en béton précontraint les trop fortes compressions ou l'ouverture de fissures) et aux différents valeurs des actions variables.

Exemples :



E.L.U :

$$P_m + 1,35.G_{\max} + \gamma_Q \cdot q_k \quad / \text{ en charge.}$$

$$P_m + G_{\min} \quad / \text{ à vide}$$

Effort normal :

$$N(x) = P_m(x)$$

Moment fléchissant :

$$M(x) = P_m(x) \cdot e(x) + 1,35.M_g(x) + \gamma_Q.M_{qk}(x) \\ \text{en charge.}$$

$$M(x) = P_m(x) \cdot e(x) + M_g(x) \quad \text{à vide.}$$

Effort tranchant :

$$V(x) = 1,35.V_g(x) + \gamma_Q.V_{qk}(x) \quad \text{en charge.}$$

$$V(x) = V_g(x) \quad \text{à vide.}$$

E.L.S

$$P_m + G_{\max} + q_k \quad / \text{ en charge.}$$

$$P_m + G_{\min} \quad / \text{ à vide}$$

$$N(x) = P_m(x)$$

$$M(x) = P_m(x) \cdot e(x) + M_g(x) + M_{qk}(x) \\ \text{en charge.}$$

$$M(x) = P_m(x) \cdot e(x) + M_g(x) \quad \text{à vide.}$$

$$V(x) = V_g(x) + V_{qk}(x) \quad \text{en charge.}$$

$$V(x) = V_g(x) \quad \text{à vide.}$$

IV.1.2.2 La flexion en état limite de service:

Après avoir déterminé les sollicitation appliquées à la section en flexion, suivant les cas on est amené à faire:

- Soit une détermination de la section: choix de la forme de la section (rectangulaire en T é ou en I, etc), détermination du coffrage (largeur, hauteur,), calcul de l'effort de précontrainte 'P', détermination de l'excentricité du câble moyen.

- Soit une vérification des contraintes de béton en compression et en traction.

Comme pour le béton armé calculé en flexion composée, on doit s'assurer que les sollicitations agissantes restent dans le domaine de sécurité.

Si l'on trace le diagramme d'interaction *moment-effort* la courbe limite du domaine de sécurité a l'allure de la figure.

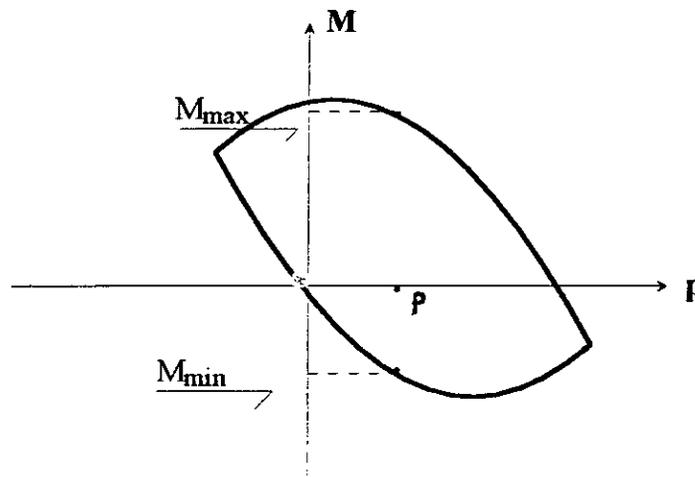


Fig. 1.2.2 : Diagramme d'interaction moment-effort normal.

La section sera vérifiée si et seulement si les points représentatifs des sollicitations appliquées sont à l'intérieur de la courbe.

Pour un effort de précontrainte donné P , les moments appliqués à la section doivent être compris entre M_{\max} et M_{\min} .

Contrairement à la flexion simple en état limite de service du béton armé où nous n'avons besoin que du moment maximum, nous devons prendre en compte les *moments maximum et minimum* qui pour une poutre sur *deux appuis simples* sans console, correspondent aux cas souvent désignés par *en charge* pour le moment maximum et *à vide* pour le moment minimum.

Les calculs dans le domaine des E.L.S sont caractérisés par le fait que les comportements mécaniques des matériaux sont essentiellement élastiques linéaires (loi de Hooke) ce qui nous permet d'utiliser les relations de la R.D.M.

IV-1-2-2-1 Notations générales liées à la limitation des contraintes :

a. Caractéristiques géométriques:

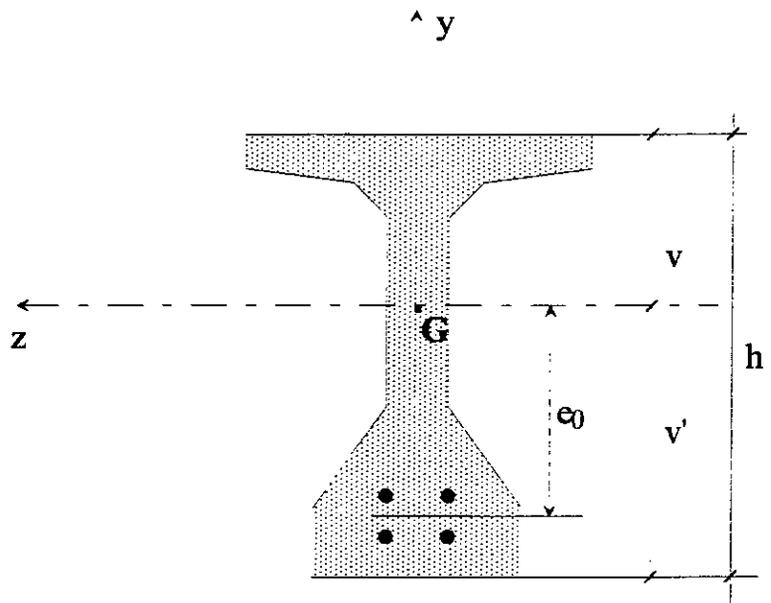
Considérons la section droite d'une poutre isostatique à plan moyen chargée dans ce plan (précontrainte) dont les caractéristiques sont données ci-dessous.

1- Section:

Aire : B

Centre de gravité : G

Moment d'inertie / G_z : I



2- Précontrainte:

Effort : P

Excentricité moyenne : e_0 (orientée par rapport à G_y)

En effet : en bas $e_0 < 0$.

en haut $e_0 > 0$.

3- Sollicitations créées par des charges extérieures:

- Effort tranchant : V
- Moment fléchissant $M_m (M_g)$ et $M_M (M_{g+q})$.

Notion préliminaire: rendement d'une section: ρ

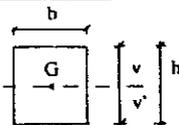
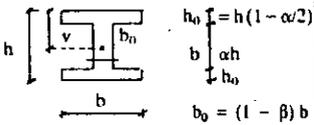
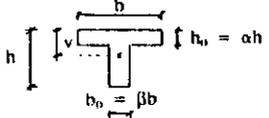
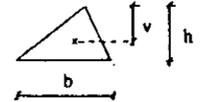
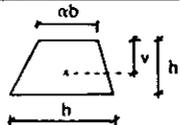
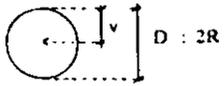
Le rendement d'une section est un paramètre qui caractérise la bonne disposition de la matière par rapport à la sollicitation schématiquement une section à bon rendement est telle que pour une surface donnée B de matière on réalise une inertie I : maximale.

Ce paramètre prend des valeurs comprises entre 0 et 1 (cas idéal) et son expression est donnée par :

$$\rho = \frac{I}{B.v.v'}$$

Voir tableau donnant les caractéristiques géométriques de sections courants.

Caractéristiques géométriques de sections courantes

Forme de la section	Aire : S	Centre de gravité : v	Moment d'inertie par rapport au c.d.g. : I	Rendement géométrique : ρ
	bh	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{1}{3}$
	$bh \cdot (1 - \alpha\beta)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3}{12} (1 - \beta\alpha^3)$	$\frac{1 - \beta\alpha^3}{3(1 - \alpha\beta)}$
	$bh (\beta + \alpha (1 - \beta))$	$\frac{h}{2} \frac{\beta + \alpha^2 (1 - \beta)}{\beta + \alpha (1 - \beta)}$	$\frac{bh^3}{12} \cdot \frac{\beta + (1 - \beta) [\alpha^4 - \beta (1 - \alpha)^4]}{\beta + \alpha (1 - \beta)}$	$\frac{I}{S \cdot v (h - v)}$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{bh}{2} (1 + \alpha)$	$\frac{h}{3} \cdot \frac{(2 + \alpha)}{(1 + \alpha)}$	$\frac{bh^3}{36} \left(1 + \alpha + \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \right)$	$\frac{1 + 4\alpha + \alpha^2}{4 + 10\alpha + 4\alpha^2}$
	$\pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$	R	$\frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{1}{4}$

b. Noyau limite d'une section droite:

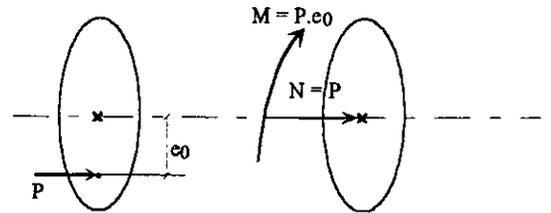
Considérons une section soumise au seul effet de la précontrainte P l'effort normal N et le moment fléchissant M.

En supposant que le problème est plan (section et chargement à symétrie verticale) et que seule la précontrainte P crée un effort normal, il vient alors :

$$N = P \quad \text{et} \quad M = P \cdot e_0$$

Dans ce cas l'excentricité du c.d.p est :

$$e_c = \frac{M}{N} = e_0$$

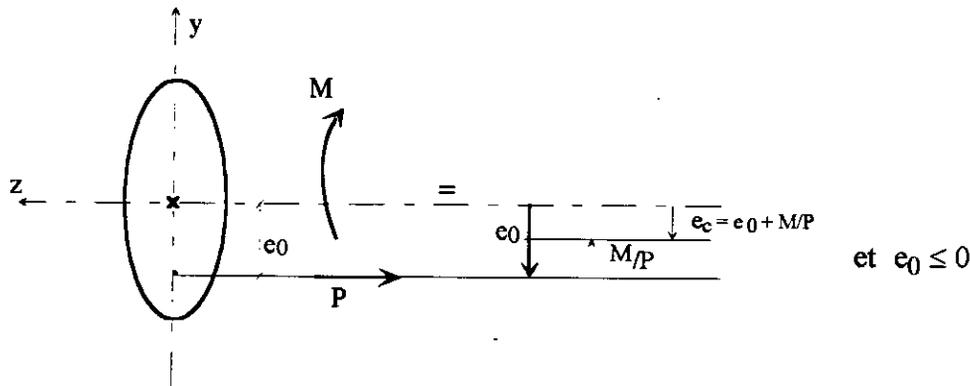


Tandis que l'application d'un moment fléchissant va déplacer le centre de pression d'une valeur algébrique (positive vers le haut) égale à :

$$\frac{M}{P} = e_{0 \text{ add}}$$

Car :

$$\begin{cases} N = p \\ M = p \cdot e_0 + \underline{M} \end{cases} \Rightarrow e_c = \frac{M}{N} = \frac{p \cdot e_0 + M}{p} = e_0 + \frac{M}{p}$$



Sous l'effet de la précontrainte et du moment extérieur ($M_m : (M_g)$ et $M_M : (M_{g+q})$) la contrainte sur une fibre d'ordonnée y aura pour expression :

$$\sigma(y) = \frac{N}{B} \pm \frac{M}{I} \cdot y$$

$$\sigma(y) = \frac{p}{B} \pm \frac{p \cdot e_c}{I} \cdot y$$

$$\sigma(y) = \frac{p}{B} \left(1 \pm \frac{e_c \cdot y}{\left(\frac{I}{B}\right)} \right)$$

$$\sigma(y) = \frac{p}{B} \left(1 \pm \frac{e_c \cdot y}{i^2} \right) \quad \text{et} \quad i^2 = \frac{I}{B}$$

Où y et e : orientés positivement vers le haut, les contraintes du béton au niveau des fibres extrêmes de la section sous l'action conjuguée.

De (P, M_m) : *Précontrainte moment minimal*.

Ou (P, M_M) : *Précontrainte moment maximal*.

doivent être limitées par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fibre sup. :} \quad \bar{\sigma}_{ts} \leq \sigma_s \leq \bar{\sigma}_{cs} \\ \text{et} \\ \text{fibre inf. :} \quad \bar{\sigma}_{ti} \leq \sigma_i \leq \bar{\sigma}_{ci} \end{array} \right.$$

c. Classe de précontrainte:

Pour assurer l'intégrité du béton, c'est-à-dire éviter l'ouverture de fissures qui peuvent être nuisibles aux aciers de précontrainte pour des raisons de corrosion, on a été amené pour les premières constructions en béton précontraint à interdire toute contrainte de traction de flexion dans le béton.

Une association de concepteurs et de réalisateurs du secteur privé, appelée: *Association scientifique pour la précontrainte* (A.S.P), élabora en 1965 des recommandations pour le calcul et l'exécution des ouvrages précontraints dits *ASP 65*.

Ces recommandations introduisirent pour la première fois la notion de classes de précontrainte:

Classe I : Béton entièrement comprimé en tout point de la section.

Classe II : Béton tendu à contrainte de traction limitée, inférieure à la résistance à la traction du béton.

Classe III : La valeur de la contrainte de traction n'a pas d'importance (comme en béton armé) sous charges de courtes durée, mais ne dépasse pas la valeur de la classe II sous charges permanentes. On pourrait appeler cette classe, *béton armé précontraint*.

L'administration à son tour, introduisit la notion de classes de précontrainte (sous la dénomination de genre au lieu de classe) par l'instruction provisoire du 13 août 1973.

Comme cette instruction a été remplacée par le BPEL, nous passerons directement à ce dernier qui a repris la notion de classe (et non de genre) en définissant:

- *La classe I*, qui est d'un recours exceptionnel pour des ouvrages tels que tirants, parois de réservoirs circulaires, pièces très sollicitées à la fatigue, pour la quelle aucune contrainte de traction n'est admise, sous l'effet des combinaisons rares.

- *La classe II*, qui est destinée plus particulièrement aux éléments exposés à une ambiance agressive (cas de certains bâtiments industriels) et à ceux qui comportent de nombreux joints.

Elle se caractérise par une contrainte de traction admissible.

- *La classe III*, Intéresse essentiellement les pièces en atmosphère peu agressive tels des éléments de bâtiments courants.

Sous l'action des combinaisons quasi permanentes la contrainte de traction est limitée; dans les autres combinaisons, il n'y a pas de limites à la traction du béton.

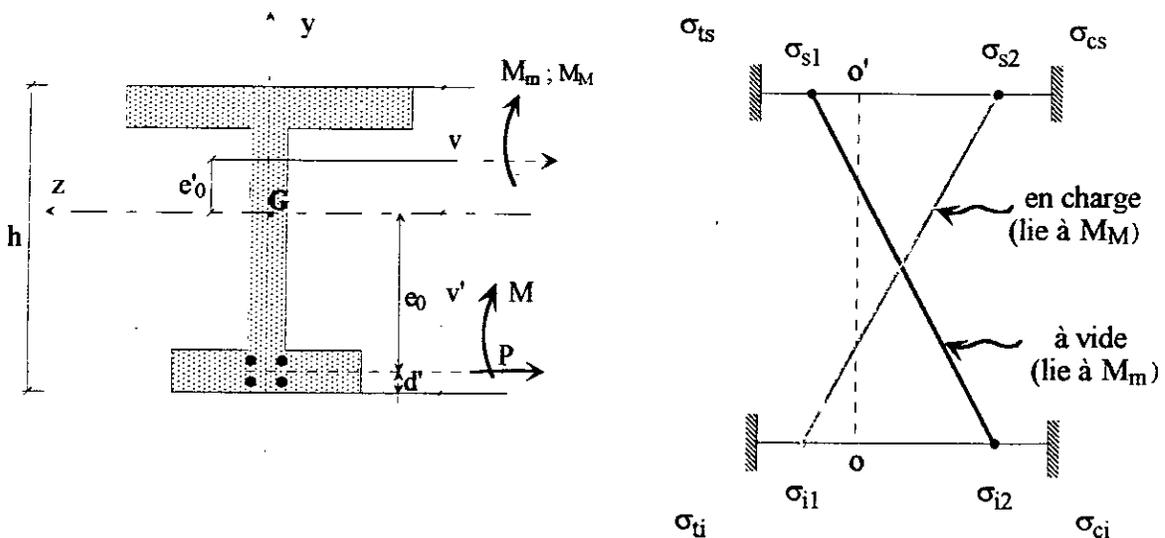
On se place dans le cas général c'est-à-dire la flexion en classe II et III, où des contraintes de traction sont permises à l'inverse de la classe I où aucune contrainte de traction n'est permise, cas qui peut être déduit de celui qu'on va étudier. Le calcul de la section se fait en supposant celle-ci non fissurée.

Les variables de décision doivent satisfaire les conditions suivantes, en imposant deux chargement statiques.

M_m : Moment minimal à vide.

et M_M : Moment maximal en charge.

d. Les inéquations à vérifier seront:



On a les deux (02) contraintes :

$$\sigma(v) = \frac{P}{B} + (p.e_0 + M) \cdot \frac{v}{I} \quad \text{et} \quad y = v \quad (> 0)$$

$$\sigma(v') = \frac{P}{B} - (p.e_0 + M) \cdot \frac{v'}{I} \quad \text{et} \quad y = v' \quad (< 0)$$

En tenant en compte de la limitation des contraintes de béton aux niveaux des fibres extrêmes de la section, c'est-à-dire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fibre sup. :} \quad \bar{\sigma}_{ts} \leq \sigma_s \leq \bar{\sigma}_{cs} \\ \text{et} \\ \text{fibre inf. :} \quad \bar{\sigma}_{ti} \leq \sigma_i \leq \bar{\sigma}_{ci} \end{array} \right.$$

Ce qui se traduit par les quatre (04) inéquations déjà prévues:

Soit:

Etat à vide (sous M_m)

$$\text{Fibres inférieures: } \sigma_{i_2} = \frac{P}{B} - \frac{P.e_0.v'}{I} - \frac{M_m.v'}{I} \leq \bar{\sigma}_{ci} \quad (1)$$

$$\text{Fibres supérieures: } \sigma_{s_1} = \frac{P}{B} + \frac{P.e_0.v}{I} + \frac{M_m.v}{I} \geq \bar{\sigma}_{ts} \quad (2)$$

Etat en charge (sous M_M).

$$\text{Fibres inférieures: } \sigma_{i_1} = \frac{P}{B} - \frac{P.e_0.v'}{I} - \frac{M_M.v'}{I} \geq \bar{\sigma}_{ti} \quad (3)$$

$$\text{Fibres supérieures: } \sigma_{s_2} = \frac{P}{B} + \frac{P.e_0.v}{I} + \frac{M_M.v}{I} \leq \bar{\sigma}_{cs} \quad (4)$$

Où e_0 est pris en valeur algébrique par rapport au centre de gravité de la section considérée, et comme contrainte admissible, $\bar{\sigma}_{ci}$, $\bar{\sigma}_{ts}$, $\bar{\sigma}_{ti}$ et $\bar{\sigma}_{cs}$ à bien définir avant tout où $\bar{\sigma}_{ti} < 0$ et $\bar{\sigma}_{ts} < 0$

Remarque:

En, reprenant les notions de moment maximum et de moment minimum, nous pouvons essayer de déterminer la précontrainte minimum P et l'excentricité qui lui est attachée.

Voir annexe 1: Formule de prédimensionnement du B.P.E.L.

Il peut alors se présenter deux cas de figure:

Cas 1:

L'excentricité calculée est réalisable, c'est-à-dire que les câbles excentrés resteront à l'intérieur du béton. Nous dirons que la section est *sous critique* voir figure -a-.

Cas 2:

Tandis que si l'excentricité calculée est tel que le câble serait à l'extérieur du béton et on n'aurait pas l'enrobage suffisant pour éviter la corrosion, dans ce cas la section sera dite: *sur critique*.

Et l'excentricité sera alors limitée à la valeur $e_0 = -(v' - d')$ voir figure -b-.

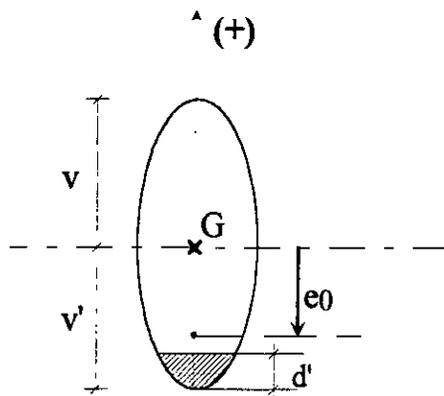


Fig. -a-

Section sous critique

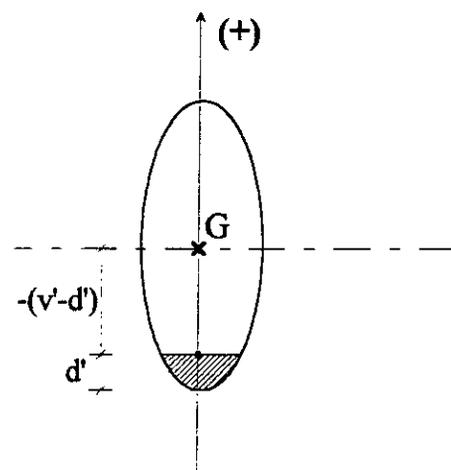


Fig. -b-

Section sur critique

Comme il est clair et évident que si l'on procède à un excentrement de la force de précontrainte on diminuera automatiquement l'effort de précontrainte à utiliser, voir Annexe 1, -Formule de prédimensionnement du B.P.E.L-, cela nous amène à prendre comme excentricité du câble de précontrainte, la valeur limite qui est égale à $e_0 = -(v' - d')$.

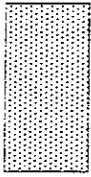
Où d' : étant l'enrobage, c'est-à-dire la distance minimale entre le centre de gravité du câble moyen et la surface inférieure de la poutre.

EXEMPLES DE POUTRE ISOSTATIQUE:

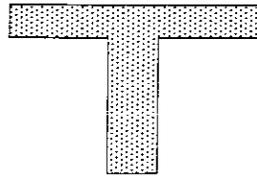
Les poutres isostatiques, (sur deux appuis simples), sont très courantes de leur simplicité de calcul et de mise en oeuvre par rapport à une poutre continue.

Elles ont l'inconvénient d'avoir une déformée plus importante à inertie égale.

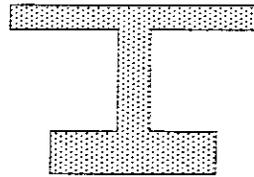
Les sections des poutres les plus courantes vont de la section rectangulaire pour les dalles pleines ou les ponts-dalles aux poutres en T ou double T, quel que fois aux poutres-caissons ou dalles alvéolées (figure).



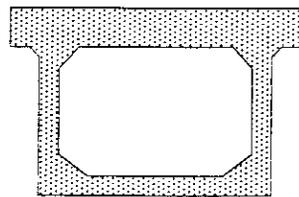
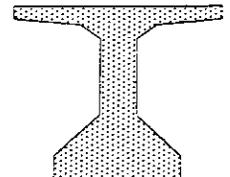
Poutre
rectangulaire



Té



Double - Té



Poutre - caisson



Dalle alvéolée ou élégie

Le choix de telle ou telle section est fonction de l'utilisation de la poutre, de son coût et de la portée.

Ainsi pour des ponts de petite portée, on pourra utiliser la dalle-pleine ou alvéolé, pour des portées plus grandes, des poutres en Té ou I ou double Té. Pour les grandes portées, on utilisera des poutres double Té ou des poutres caissons.

Pour notre problème nous traiterons le cas d'une poutre en double Té d'un pont à poutres sous chaussées indépendantes.

Pour ce cas on cherche à optimiser la structure, ceci consiste à maximiser ou minimiser certaines fonctions objectives à partir de la détermination de toutes les variables de décision de notre problème pour finalement pouvoir passer à l'étape de la construction du modèle.

Il est à noter qu'il est indispensable de respecter toutes les contraintes sous les conditions de chargement statiques bien définies.

IV.2 Formulation du programme d'optimisation multicritère:

• Cas d'une poutre en double T_e sous chaussée indépendante:

Le but de notre optimisation est de sélectionner et trouver toutes les variables de décision citées ci-dessous d'une poutre en double T_e. Schématisée voir figure IV.2(a).

Celle-ci est soumise à une force de précontrainte, force déduite après suppression de toutes les pertes qui peuvent se présenter.

Il s'agit d'*optimiser* le volume de la poutre, en d'autres termes la section B étant donné que la portée L est connue de plus de la valeur de la force de précontrainte P des câbles de précontrainte.

Dans le sens de *minimiser* à la fois la surface de la section B et la force de précontrainte P des câbles. Deux chargements statiques extrêmes de la poutre sont considérés et produisent les moments de flexion M_m et M_M où : M_m : moment à vide et M_M : moment en charge.

Nous prendrons comme variables de décision les dimensions respectives, de notre poutre.

$b_1 \equiv X_1$: Largeur du talon de la poutre.

$b_s \equiv X_2$: Largeur de la table supérieure de la poutre.

$e_1 \equiv X_3$: Epaisseur du talon

$e_s \equiv X_4$: Epaisseur de la table.

$b_0 \equiv X_5$: Epaisseur de l'âme.

$h \equiv X_6$: Hauteur totale de la poutre.

Voir figure IV.2 (a).

IV.2.1 Calcul des caractéristiques géométriques:

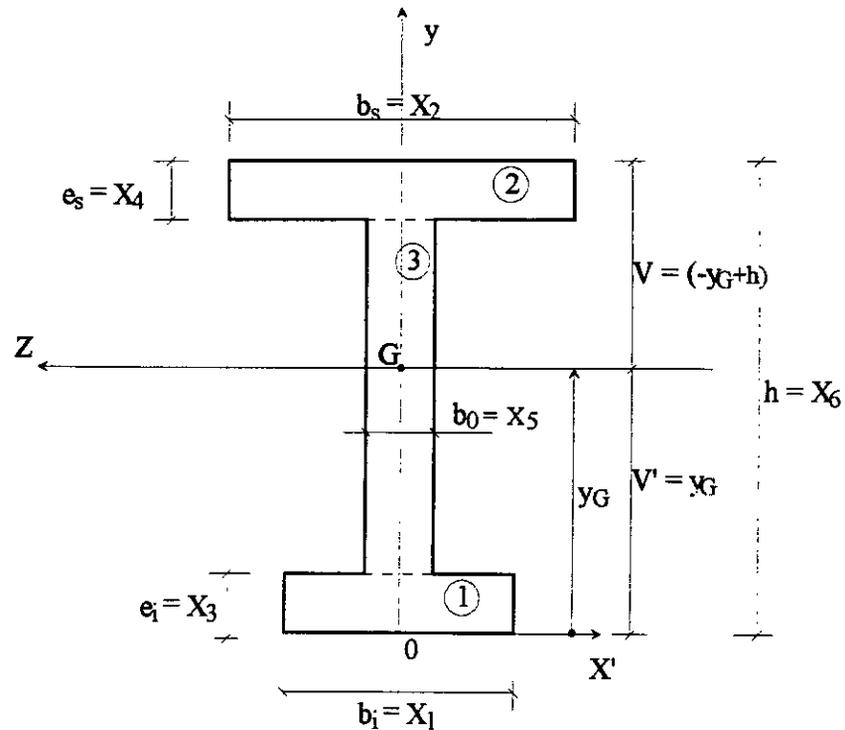


Fig. IV.2 (a)

Où y_G est compté à partir de la base inférieure, axe ox'

a - Détermination du C.D.G de la section ainsi définie:

- $x_G = 0$ $y_G = ?$
- $y_{G1} = (e_i / 2)$ et $A_1 = (e_i b_i)$
- $y_{G2} = (h - e_s / 2)$ et $A_2 = (e_s b_s)$
- $y_{G3} = (h - e_s - e_i) / 2 + e_i = (h - e_s + e_i) / 2$ et $A_3 = ((h - e_i - e_s) b_0)$

D'où:

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^3 y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^3 A_i}$$

$$y_G = \frac{\frac{e_i}{2} \cdot e_i b_i + \left(h - \frac{e_s}{2}\right) e_s b_s + \frac{(h - e_s + e_i)}{2} (h - e_s - e_i) b_0}{e_i b_i + (h - e_s - e_i) b_0 + e_s b_s}$$

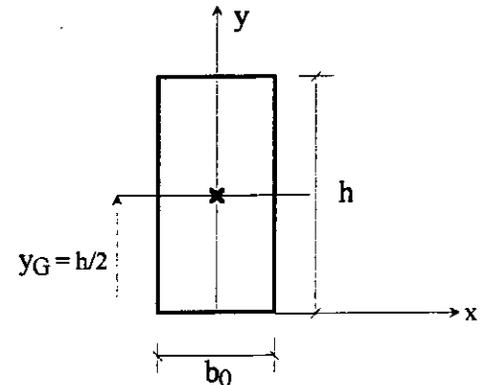
Et après développement des calculs on trouve l'expression :

$$y_G = \frac{\frac{e_i^2}{2}(b_i - b_0) - \frac{e_s^2}{2}(b_s - b_0) + h \cdot e_s(b_s - b_0) + \frac{b_0}{2} \cdot h^2}{e_i(b_i - b_0) + e_s(b_s - b_0) + hb_0}$$

Dans le cas particulier où : $b_i = b_0$ et $b_s = b_0 \Rightarrow$ section rectangulaire ($b_0 \cdot h$) on aura en employant la formule donnant y_G .

$$y_G = \frac{h^2 \cdot \frac{b_0}{2}}{h \cdot b_0} = \frac{h}{2}$$

résultat à trouver dans le cas d'une section rectangulaire de hauteur h .



Avec :

$$V' = y_G \quad \text{distance à la fibre inférieure.}$$

Et :

$$V = -y_G + h \quad \text{distance à la fibre supérieure.}$$

b - Aire de la section:

$$B = e_i \cdot b_i + e_s \cdot b_s + (h - e_s - e_i) b_0$$

c - Calcul du moment d'inertie de la section en double T considérée:

$$I_Z = I = b_i \frac{e_i^3}{12} + b_i e_i \left(y_G - \frac{e_i}{2} \right)^2 + b_s \frac{e_s^3}{12} + b_s e_s \left(-y_G + h - \frac{e_s}{2} \right)^2 + b_0 \frac{(h - e_s - e_i)^3}{12} + b_0 (h - e_s - e_i) \left(\frac{(h - e_s + e_i)}{2} - y_G \right)^2$$

Ou bien :

$$I = I_Z = b_i \frac{e_i^3}{12} + b_i e_i \left(v' - \frac{e_i}{2} \right)^2 + b_s \frac{e_s^3}{12} + b_s e_s \left(-v' + h - \frac{e_s}{2} \right)^2 + b_0 \frac{(h - e_s - e_i)^3}{12} + b_0 (h - e_s - e_i) \left(\frac{(h - e_s + e_i)}{2} - v' \right)^2$$

On notations avec les X_i , $i = 1,6$ soit:

$$I_Z = X_1 \frac{X_3^3}{12} + X_1 X_3 \left(v' - \frac{X_3}{2}\right)^2 + X_2 \frac{X_4^3}{12} + X_2 X_4 \left(-v' + X_6 - \frac{X_4}{2}\right)^2 + X_5 \frac{(X_6 - X_4 - X_3)^3}{12} \\ + X_5 (X_6 - X_4 - X_3) \left(\frac{(X_6 - X_4 + X_3)}{2} - v'\right)^2.$$

Et :

$$V' = \frac{\frac{e_i^2}{2} (b_i - b_0) + \left(h - \frac{e_s}{2}\right) (b_s - b_0) e_s + \frac{b_0}{2} h^2}{e_i (b_i - b_0) + e_s (b_s - b_0) + h b_0}$$

Soit avec les notations en X_i , $i = 1,6$

$$V' = \frac{\frac{X_3^2}{2} (X_1 - X_5) + \left(X_6 - \frac{X_4}{2}\right) (X_2 - X_5) X_4 + \frac{X_5}{2} X_6^2}{X_3 (X_1 - X_5) + X_4 (X_2 - X_5) + X_6 X_5}$$

Et:

$$B = e_i \cdot b_i + e_s \cdot b_s + (h - e_s - e_i) b_0$$

Soit finalement:

$$B = X_3 \cdot X_1 + X_4 \cdot X_2 + (X_6 - X_3 - X_4) X_5$$

d - Transformation des quatre inéquations limitant les contraintes de traction et de compression:

1- $PI - PB \cdot e_0 v' - BM_m v' - BI \bar{\sigma}_{C_i} \leq 0$

2- $PI + PB \cdot e_0 v + BM_m v - BI \bar{\sigma}_{t_s} \geq 0$

Et :

3- $PI - PB \cdot e_0 v' - BM_M v' - BI \bar{\sigma}_{t_i} \geq 0$

4- $PI + PB \cdot e_0 v + BM_M v - BI \bar{\sigma}_{C_s} \leq 0$

e - Fixation de l'excentricité e_0 à sa limite - section surcritique:

Avec $e_0 = -(v' - d')$ cas d'une section surcritique.

Pour avoir la précontrainte minimale possible en introduisant cette nouvelle égalité dans le système précédent on obtiendra le nouveau système:

$$1- \quad P (I + B (v' - d') v') - BM_m v' - BI \bar{\sigma}_{C_i} \leq 0$$

$$2- \quad P (I + B (v' - d') (v' - h)) - BM_m (v' - h) - BI \bar{\sigma}_{t_s} \geq 0$$

Et :

$$3- \quad P (I + B (v' - d') v') - BM_M v' - BI \bar{\sigma}_{t_i} \geq 0$$

$$4- \quad P (I + B (v' - d') (v' - h)) - BM_M (v' - h) - BI \bar{\sigma}_{C_s} \leq 0$$

Où d' : est l'enrobage dont la valeur doit être précise pour chaque exemple fixé.

Il est à noter qu'on peut prendre comme paramètre la hauteur h : de la poutre

f - Critères d'optimisation (Fonctions objectifs):

Dans notre problème on optimisera les deux fonctions objectifs dans un sens de la minimisation de leur valeurs respectifs.

Soit alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} B = e_i b_i + e_s b_s + (h - e_s - e_i) b_0 = B_{\min} \\ \text{et} \\ P_{\text{sur}} = P_{\min} = \frac{M_{\text{max}} + \rho B \cdot V \cdot \bar{\sigma}_{t_i}}{\rho V + V' - d'} = \frac{M_M + \frac{I}{V'} \cdot \bar{\sigma}_{t_i}}{\frac{I}{BV'} + V' - d'} \end{array} \right.$$

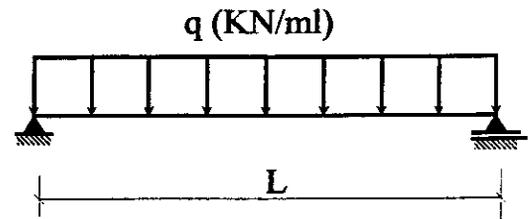
Autrement:

$$\left\{ \begin{array}{l} B = X_3 X_1 + X_4 X_2 + (X_6 - X_3 - X_4) X_5 = B_{\min} \\ \text{et} \\ P = P_{\text{sur}} = \frac{M_M + \frac{I}{V'} \cdot \bar{\sigma}_{t_i}}{\frac{I}{BV'} + V' - d'} = P_{\min} \end{array} \right.$$

g - Domaine d'appartenance de chaque variable de décision de notre section en dcuble**Té:**

Soit L : la portée de notre poutre isostatique

Et soit q : une charge d'exploitation classique de pont route (10 à 15 KN/m²)



- Pour ce type d'ouvrage, la hauteur de la poutre est de l'ordre de : 1/15 à 1/18 de la portée, soit :

$$\boxed{1/18 \cdot L \leq h \leq 1/15 \cdot L} \quad \text{pour des portées courantes de (20 à 50m)}$$

- L'espacement entre axe des poutres est de l'ordre de : 2,5 m à 3,5 m en fonction de l'épaisseur du hourdis.

- Table de compression:

- La largeur de la table supérieur de la poutre préfabriqué est de l'ordre de 0,5 à 0,7 h soit:

$$0,5h \leq b_s \leq 0,7 h$$

L'épaisseur (e_s) fonction de sa portée et de sa nature (B.P.):

- entraxe poutre B.P.

2,5 m	17 cm
3 m	18 cm
3,5 m	20 cm

(Épaisseur minimum 16 cm)

- Ame:

Épaisseur minimale, 3 fois le ϕ d'une gaine, $b_0 = 20$ à 25 cm.

- Talon:

Le rôle du talon de la poutre est:

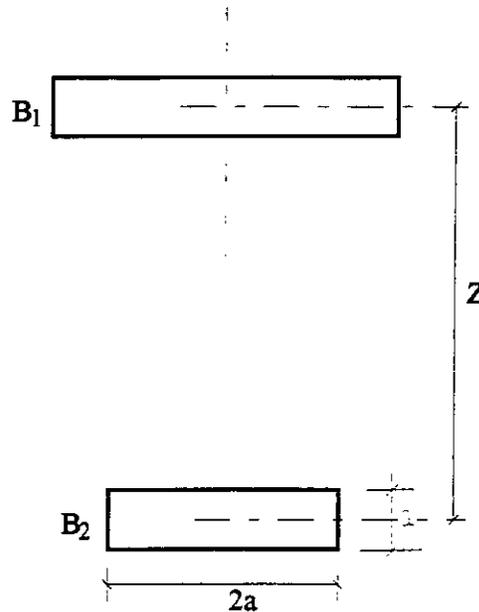
- De contenir les câbles en partie inférieur de la poutre en respectant les conditions d'enrobage.
- De résister à la compression dûe au moment minimum, cette dernière condition s'écrit en section sous critique ou sur critique:

$$\boxed{\frac{I}{V'} \geq \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_1}}$$

En se fixant une hauteur du talon

Ou bien déterminé sur la base du modèle représenté ci-contre pour la quelle:

$$\frac{I}{V'} = B_2 Z \quad \left(\frac{I}{V} = B_1 Z \right) \quad \text{en admettant } Z \approx h.$$



En notations avec les X_i ; $i = 1,6$ on aura:

- Pour une portée donnée "L" de la poutre isostatique:

$h \equiv X_6$ est tel que :

$$\frac{1}{18} L \leq X_6 \leq \frac{1}{15} L$$

L : est de l'ordre de 20 à 50 m.

- L'espacement entre axe des poutre est de l'ordre de 2,5 à 3,5 m

- $b_s \equiv X_2$ est tel que : $0,5 \cdot X_6 \leq X_2 \leq 0,7 \cdot X_6$

Après avoir fixé une valeur de X_6

- $e_s \equiv X_4$ est tel que :

Entre axe poutre	X_4 .
2,5 m	17 cm.
3 m	18 cm.
3,5 m	20 cm.

X_4 minimum est de l'ordre de 16 cm

- $b_0 \equiv X_5$ épaisseur minimale, 3 fois le ϕ d'une gaine,

X_5 est de l'ordre de 20 à 50 cm.

- $b_i \equiv X_1$ et $e_i \equiv X_3$ déterminées de sorte a:

1) De contenir les câbles en partie inférieure de la poutre en respectant les conditions d'enrobage.

2) De résistance à la compression due au moment minimum.

Condition qui s'écrit :

$$\boxed{\frac{I}{V'} \geq \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_i}}$$

En se fixant une hauteur du talon $e_i \equiv X_3$.

IV.3 Algorithmes de résolution et programmation:

IV.3.1 Méthodes basées sur l'approche min - max:

Cette partie sera consacrée aux méthodes développées sur les bases de l'approche min - max. Ces méthodes sont très utilisées et offrent à l'ingénieur un ensemble de solutions optimum paréto souhaitables et la solution de meilleur compromis.

Nous allons tout d'abord d'écrire deux algorithmes qui permettent de comparer des solutions et ainsi de sélectionner un ensemble de solutions optimales paréto et l'optimum min - max. Ces algorithmes peuvent être effectifs pour toutes méthodes d'OMC qui génèrent un ensemble de solutions admissibles.

Une méthode de recherche au hasard sera présentée.

On verra ensuite comment l'approche min - max peut être utilisée pour obtenir un ensemble (réparti uniformément) de solutions optimum paréto, un ensemble de solutions qui sont dans le voisinage d'une solution souhaitable, et une solution qui satisfait les buts supposés (avec ou sans priorité).

L'utilisation de cette approche fournit à l'ingénieur un nombre de solutions quelque soit la situation conflictuelle et lui permet ainsi de trouver une solution satisfaisante de manière efficace.

Pour traiter un cas concret d'optimisation multicritère nous nous sommes servis d'un programme développé par M^{lle} YENOUNE [réf. biblio.16] et que nous avons adopté au cas des poutres en béton précontraint. Ce programme est basé sur une approche dite du min-max.

IV.3.2 Deux algorithmes pour comparer des solutions:

On suppose que l'on a une méthode qui génère un ensemble de solutions vraisemblables. Pour l'OMC, on veut sélectionner dans cet ensemble un sous ensemble qui contient seulement les solutions optimum paréto et la solution optimum min-max on va décrire les algorithmes paréto et min-max qui nous permettent de faire cette sélection.

Pour résoudre un problème, l'ingénieur est souvent obligé de préparer une méthode, pour un problème spécifique, qui donne un ensemble fini de solutions réalisables à comparer. Les deux algorithmes peuvent être utilisés avec cette méthode.

IV.3.2.1 L'algorithme paréto:

Cet algorithme qui sélectionne des solutions optimum paréto d'un ensemble donné de solutions envisageables a été proposé par Gerlash (1980) et est basé sur le théorème de contact suivant :

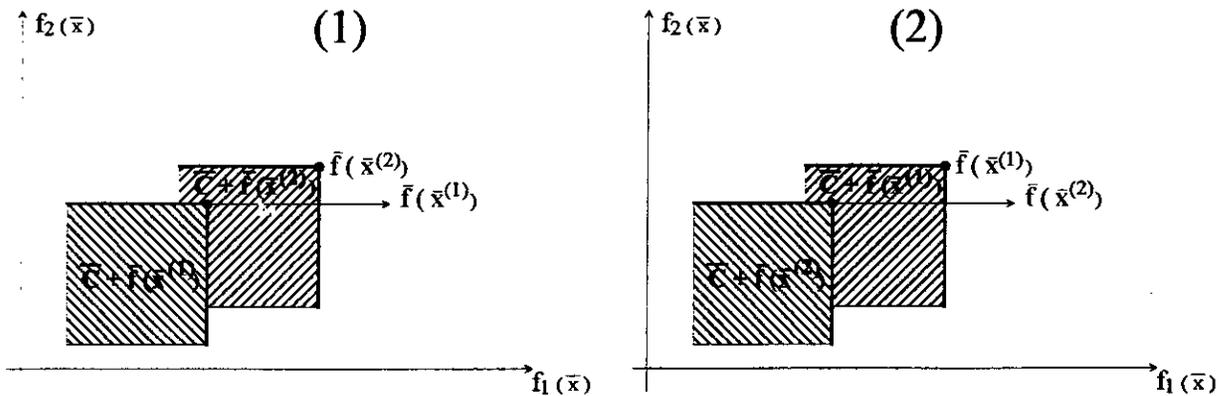
Il faut d'abord définir un cône négatif : c'est l'ensemble dans :

$$E^k / \bar{C} = \{ \bar{f} \in E^k / \bar{f} \leq 0 \}$$

Le théorème de contact est donc : un vecteur \bar{f}^* est une solution optimum paréto pour un problème d'OMC si

$$(\bar{C} + \bar{f}^*) \cap F = \{\bar{f}^*\}.$$

L'illustration graphique de ce théorème est donné par le schéma ci-dessous : (cas d'un exemple a deux fonctions critères) considérons deux solutions \bar{x}^1 et \bar{x}^2 pour les quelles on peut avoir deux cas spécifiques:



1- $(\bar{C} + \bar{f}(\bar{x}^1)) \subset (\bar{C} + \bar{f}(\bar{x}^2))$

2- $(\bar{C} + \bar{f}(\bar{x}^1)) \supset (\bar{C} + \bar{f}(\bar{x}^2))$.

On note :

$\bar{x}^l = [x_1^l, \dots, x_n^l]^T$: un point de x .

$\bar{f}(\bar{x}^l) = [f_1(\bar{x}^l), \dots, f_k(\bar{x}^l)]^T$: vecteur fonction objective.

$\bar{x}_j^p = [x_{1j}^p, \dots, x_{nj}^p]^T$: la $j^{\text{ème}}$ solution optimum paréto.

$\bar{f}_j^p = [f_{1j}^p, \dots, f_{kj}^p]^T$: vecteur fonction objective pour la $j^{\text{ème}}$ solution optimum paréto.

Maintenant le problème est de choisir parmi un ensemble donné de solutions:

$L = \{1, \dots, l, \dots, l^a\}$, l'ensemble des solutions optimum paréto $J = \{1, \dots, j, \dots, j^a\}$.

Le concept principal de l'algorithme paréto est le suivant:

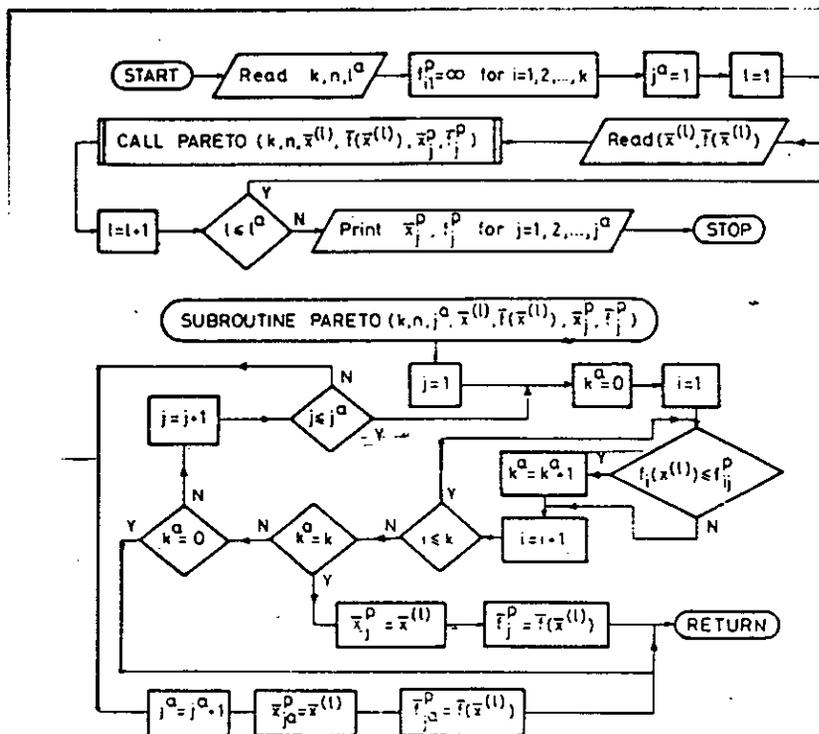
Soit $\bar{x}^{(l)}$ une nouvelle solution à considérer. Si dans l'ensemble des solutions optimum paréto il existe une solution x_j^p tel que:

- \bar{x}_j^p satisfait (1) alors \bar{x}^l remplace \bar{x}_j^p
- \bar{x}_j^p satisfait (2) alors \bar{x}^l est mis de côté.

Si aucune solution de l'ensemble paréto ne vérifie ni (1) ni (2) alors $\bar{x}^{(l)}$ devient une solution optimum paréto. Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

- 1 - Lire k, n, l^a
- 2 - Posons $f_{i1}^p = \infty$ pour $i = 1 \dots k$ et $j^a = 1$
- 3 - Posons $l = 1$.
- 4 - Lire \bar{x}^l et $f(\bar{x}^l)$
- 5 - Posons $j = 1$.
- 6 - Si $\forall i \in I f_i(\bar{x}^l) < f_{ij}^p$ alors $\bar{x}_{ji}^p = \bar{x}^l$.
Et $f_j^p = f(\bar{x}^l)$ et allez en 10, sinon allez en 7.
- 7 - Si $\forall i \in I f_i(\bar{x}^l) > f_{ij}^p$ alors allez en 10, sinon allez en 8.
- 8 - Posons $j = j + 1$.
- 9 - Si $j > j^a$ alors $j^a = j^a + 1$ et $\bar{x}_{j^a}^p = \bar{x}^l$ et $\bar{f}_{j^a}^p = \bar{f}(\bar{x}^l)$ et allez en 10, sinon allez en 6.
- 10 - Posons $l = l + 1$.
- 11 - Si $l \leq l^a$ alors allez en 4, sinon allez en 12.
- 12 - Ecrire \bar{x}_j^p et \bar{f}_j^p pour $j = 1, 2, \dots, j^a$.

La subroutine paréto peut être utilisée avec toutes méthodes générant \bar{x}^l et $f(\bar{x}^l)$: un ensemble de solutions.



-Diagramme de l'algorithme paréto-

(k^a est un nombre qui indique le nombre de fondations telles que : $f_i(\bar{x}^l) \leq f_{ij}^p$)

IV.3.2.2 L'algorithme min-max:

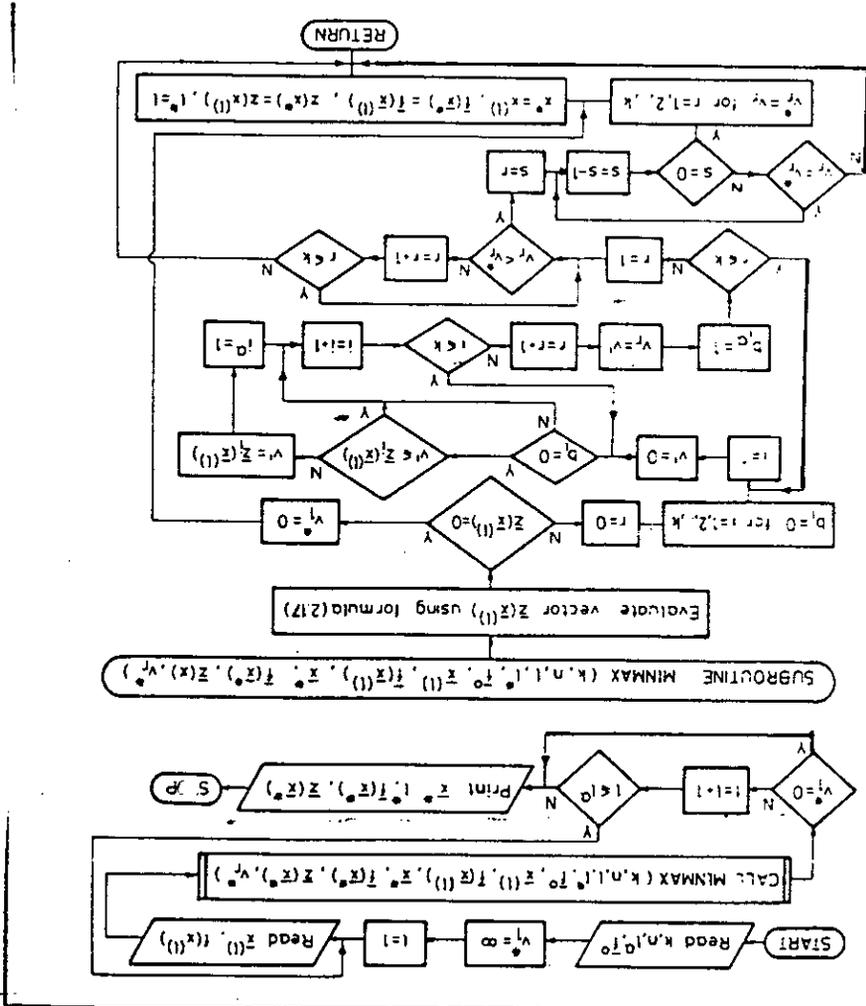
Son but est de choisir parmi l'ensemble des solutions $L = \{1, 2, \dots, l^a\}$.

La solution optimum min-max, on suppose que le vecteur idéal \bar{f}^o est donné.

Les étapes de cet algorithme sont les suivantes :

- 1 - Lire k, n, p, f_0
- 2 - Posons $V_1^* = \infty$.
- 3 - Posons $l = 1$.
- 4 - Lire x^l et $f(x^l)$
- 5 - Evaluer $Z(x^l)$ cf : chapitre II formule (3.3).
- 6 - Si $Z(x^l) = 0$, alors retenir cette solution comme optimum et allez en 7, sinon allez en 7.
- 7 - Trouver les valeurs maximales des étapes de la formule de récurrence chapitre II formule (3.4), pour le point x^l . Ces valeurs sont notées : $v_j : j = 1, \dots, k$ cf : chapitre II.

-Diagramme de l'algorithme min-max-



8 - Remplacer V_i^* par v_i pour $i = 1, \dots, k$ et retenir cette solution comme optimum si $v_1 < V_1^* \exists r \in \{2, \dots, k\} ((v_r < V_r^* \forall S \in \{1, \dots, r\} (v_s = V_s^*))$

Ou $V_1^* \dots V_k^*$ est l'ensemble des valeurs optimales des incréments relatifs.

9 - Posons $l = l + 1$.

10 - Si $l \leq l^a$ alors allez en 4, sinon allez en 11.

11 - Ecrire $x^*, l^*, \bar{f}(\bar{x}^*), \bar{Z}(\bar{x}^*)$.

La sobroutine min max peut être utilisée par toutes méthodes qui génèrent \bar{x}^l et $\bar{f}(\bar{x}^l)$.

Signification des différents paramètres présents dans les algorithmes:

* L'algorithmes paréto :

- K_a : il est utiliser pour savoir le nombre de fonctions qui vérifient $f_i(\bar{x}^l) \leq f_{ij}^P$

- j^a et l^a : Représentent respectivement le nombre de solutions optimales paréto et le nombre de solutions "quelconques".

* L'algorithme min-max :

- b_i : dans les étapes de récurrence, on enlève au fur et à mesure des indices -chapitre II, optimum min-max-

Si $b_i = 1$ on ne considère plus l'indice "i" dans la formule de récurrence.

Si $b_i = 0$ on le considère encore.

- On cherche à minimiser les incréments relatifs.

Donc : soit un ensemble de points vérifiant la première formule de récurrence, la deuxième étape éliminera les points tels que $v_2 > v_2^*$, la 3^{ème} étape éliminera les points tels que $v_3 > v_3^* \dots$ car ils ne minimisent pas les incréments relatifs.

IV.3.3 Méthodes pour chercher l'optimum min-max:

Deux sortes de méthodes de minimisation de fonction peuvent être distinguées:

1- Des méthodes d'exploration.

2- Des méthodes séquentielles.

On s'intéressera aux méthodes d'exploration.

IV.3.3.1 Méthodes d'exploration:

Dans cette méthode, un point est obtenu au moyen d'une règle qui néglige les résultats obtenus auparavant.

La règle consiste en une méthode de recherche systématique dans laquelle: on crée une grille avec des points espacés entre eux mais suffisamment proche pour définir un minimum et on calcule la valeur de la fonction objective pour chaque point de la grille.

Ces méthodes (moins précises que les méthodes séquentielles) peuvent résoudre toutes les sortes de problèmes de programmation non linéaire.

Un exemple de ces méthodes est la méthode Monte - carlo dans la quelle un certain nombre de points sont choisis au hasard parmi le domaine des variables. Ceci peut se faire par la formule :

$$x_i = x_i^a + \delta_i (x_i^b - x_i^a) \quad i = 1, \dots, n.$$

Avec : x_i : Valeur sélectionnée au hasard.

x_i^a : Limite inférieure estimée ou donné pour x_i .

x_i^b : Limite supérieure estimée ou donné pour x_i .

δ_i : Nombre "au hasard" tel que $0 \leq \delta_i \leq 1$.

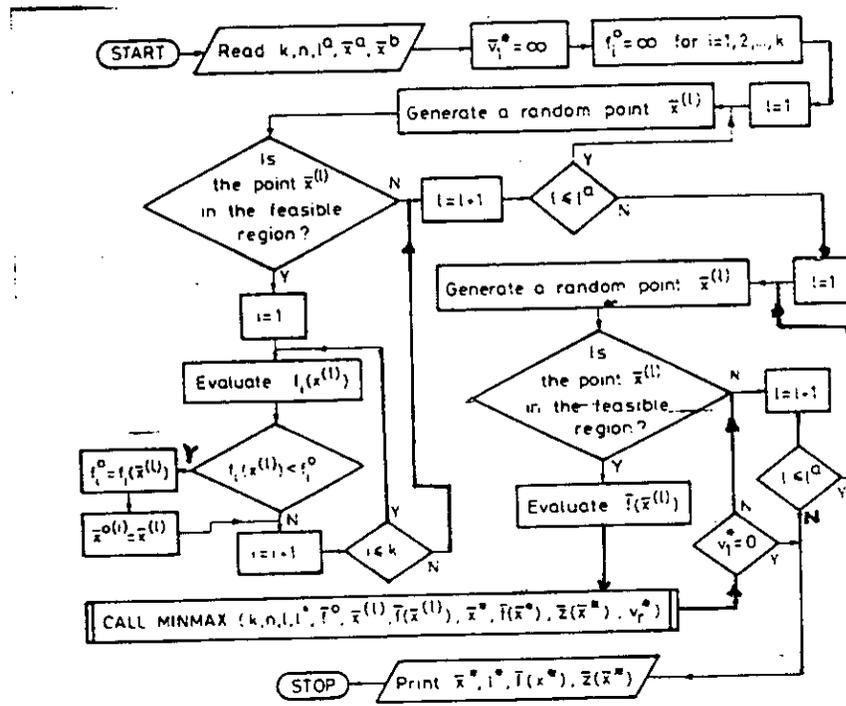
Si on décide de générer les valeurs des variables pour l^a points, on génère δ_i nombre "au hasard" pour chaque points et on utilise la formule précédente pour obtenir les x_i . On teste chaque point généré et on l'élimine si ce n'est pas une solution admissible, sinon on évolue la fonction objective pour ce point.

Le meilleur résultat est pris comme le minimum -on peut ensuite décrire un nouvel ensemble de nombres au hasard générés pour chaque l^a points- on va décrire deux méthodes Monte-carlo utilisées pour trouver l'optimum min - max.

a- Méthode 1:

Cette méthode est basée sur une double exploration de l'aire de l'espace des variables, tout d'abord pour chercher le vecteur idéal \bar{f}^o , ensuite pour chercher le min - max optimum.

Voici l'organigramme.



- Diagramme général pour la méthode Monté-carlo N 1-

ça peut être décrit comme suit:

Faire les étapes 1, 2, 3, 4, pour $l = 1, 2, \dots, l^a$.

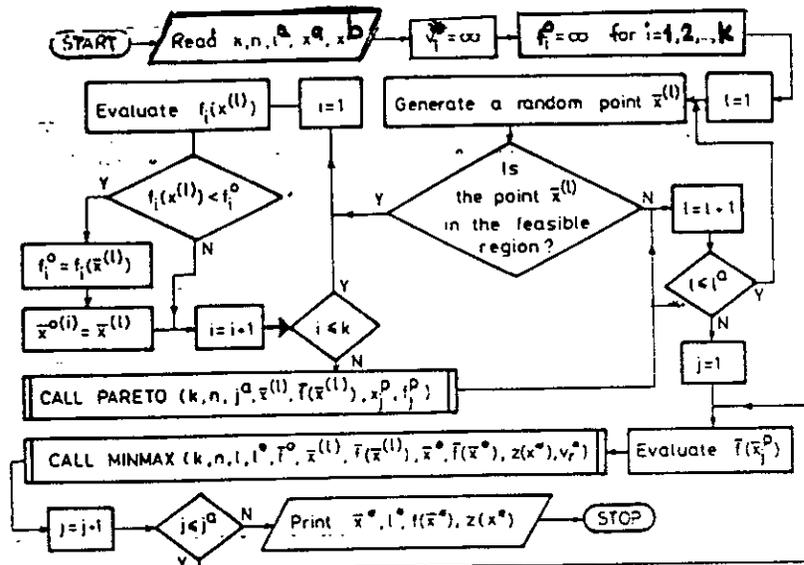
- 1 - Générer un point au hasard \bar{x}^l
- 2 - Si le point \bar{x}^l n'est dans la région envisageable allez en 1 sinon allez en 3.
- 3 - Evaluez $f_i(\bar{x}^l)$ pour $i = 1, 2, \dots, k$.
- 4 - Remplacez f_i^o par $f_i(\bar{x}^l)$ pour $\forall i$ tel que $f_i(\bar{x}^l) < f_i^o$.

Faire les étapes 5, 6, 7, 8 pour $l = 1, 2, \dots, l^a$.

- 5 - Générer un point au hasard \bar{x}^1
- 6 - Si le point \bar{x}^l n'est dans la région envisageable allez en 5 sinon allez en 7.
- 7 - Evaluez $f_i(\bar{x}^l)$ pour $i = 1, 2, \dots, k$.
- 8 - Appelez subroutine Min Max pour vérifier si le point \bar{x}^l est l'optimum min - max.

b- Méthode 2:

Dans cette méthode, on explore la région de l'espace des variables une seule fois et on crée, durant cette exploration, un ensemble de solutions optimum paréto et cherche le vecteur idéal \bar{f}^o . En suite, on examine cet ensemble et on vérifié quelle solution est l'optimum min - max. Voici l'organigramme.



- Diagramme général pour la méthode Monté-carlo N 2-

Cette méthode peut être décrit par:

faire les étapes 1, 2, 3, 4, 5 pour $l = 1, 2, \dots, l^a$.

- 1- Générer un point au hasard \bar{x}^l
- 2- Si le point \bar{x}^l n'est dans la région envisageable allez en 1 sinon allez en 3.
- 3- Évaluez $f_i(\bar{x}^l)$ pour $i = 1, 2, \dots, k$.
- 4- Remplacez f_i^o par $f_i(\bar{x}^l)$ pour $\forall i$ pour laquelle $f_i(\bar{x}^l) < f_i^o$.
- 5- Appelez subroutine paréto pour vérifier si le point \bar{x}^l est l'optimum paréto.

Faire les étapes 6, 7, pour $j = 1, 2, \dots, j^a$.

- 6- Évaluez $f_i(\bar{x}_j^p)$ pour $i = 1, 2, \dots, k$.
- 7- Appelez subroutine Min Max pour vérifier si le point \bar{x}_j^p est l'optimum min - max.

Cette méthode utilise plus de mémoire que la 1^{ère}, l'ensemble des solutions optimales paréto devant être emmagasiné. Bien sûr, on peut vouloir connaître cet ensemble afin de prendre la bonne décision mais si l'ensemble est grand, il devient difficile d'examiner toutes les solutions, on peut réduire cet ensemble en introduisant des contraintes additionnelles:

$$f_i(\bar{x}) \leq f_i^0 \quad i = 1, \dots, k \text{ où } f_i^0 \text{ est choisi par le décideur.}$$

La 2^{ème} méthode sera plus efficace pour des problèmes ayant un grand nombre de contraintes car le nombre de solutions optimales paréto sera assez petit. La 2^{ème} méthode offre aussi la possibilité d'avoir une représentation graphique.

IV.3.4. Informatisation des méthodes monté-carlo:

Programmation:

Dans cette partie, on va écrire un programme en fortran afin de résoudre le problème d'optimisation multicritères pour des modèles non linéaires dont les variables (discrètes ou continues) sont soumises à des contraintes d'inégalités, on va utiliser les méthodes 1 et 2 décrites dans la partie précédente c'est à dire les méthodes Monté-carlo.

IV.3.4.1 Structure du programme:

Le programme est constitué d'un programme principal et de six sous-routines, paréto, min max, odchyl, gen, OGRN et FCEL.

1- Le programme principal organise les données d'entrées et de sorties, génère l'ensemble des solutions envisageables et recherche le vecteur idéal \bar{f}^0

2- La sous-routine paréto sélectionne l'ensemble des solutions optimales paréto de l'ensemble précédent on utilisera les symboles suivants :

$$K = k, N = n, JA = j^a, \bar{X} = \bar{x}^l, F = \bar{f}(\bar{x}^l), x_p = \bar{x}_j^p, FP = \bar{f}_j^p$$

3- La sous-routine min-max sélectionne la solution optimum min-max de l'ensemble des solutions envisageables, on utilisera les symboles suivantes:

$$L = l, LZ = l^*, F_0 = \bar{f}^0, x_{oz} = \bar{x}^*, F_{oz} = \bar{f}(\bar{x}^*), DF_z = (\bar{Z}(\bar{x}^*)), ID_z = v_r^* \times 10^{ica}$$

La sous-routine compare les incréments relatifs de la fonction avec une précision correspondant au nombre de décimal imposé par la variable ICA.

4- La sous-routine odchyl calcule les incréments relatifs pour min max.

5- La sous-routine GEN génère les valeurs aléatoires de K(I).

6- Les sous-routines FCEL et OGRN introduisent le problème d'optimisation dans le programme.

IV.3.4.2 Les variables:**IV.3.4.2.1 variables d'entrée:**

N : Nombre de variables de décisions

M : Nombre de contraintes d'inégalités.

K : Nombre de fonctions objectives.

ILA : Nombre de points générés.

ICA : Précision pour comparer les incréments relatifs.

MET : $\begin{cases} 1- & \text{methode 1} \\ 2- & \text{methode 2} \end{cases}$

IPR : Si IPR = 0 aucun résultat intermédiaire.

Si IPR \neq 0 imprime toute solutions dans la région envisageable.

IX (J) : Nombre de valeurs discrètes que la j^{ème} variable peut prendre.

Si on a à faire: à une variable continue IX (J) = 1.

XA (J, I) : valeurs discrètes de la variable X_j avec $I = 1, 2, \dots, IX (J)$.

IV.3.4.2.2 variables de sorties:

Le programme sort:

- Les résultats de tous les points générés qui appartiennent à la région envisageable, (partiel qui a été effacée du fichier résultat à cause d'un manque d'espace, et de la non nécessité de toutes ces valeurs).

- En particulier le programme affiche toutes:

- Les solutions optimales paréto, avec.

- Toutes les variables de décision qui leurs correspondent (toutes les solutions optimales paréto vérifient les contraintes inégalités. Il est alors inutile de les afficher) d'une part.

D'autre part : Ce même programme

- La solution optimale min-max: affiche :

- Valeurs des variables de décision.

- Valeurs de fonctions objectives.

- Valeurs des incréments relatifs de chaque fonction.

- Valeurs des contraintes d'inégalités.

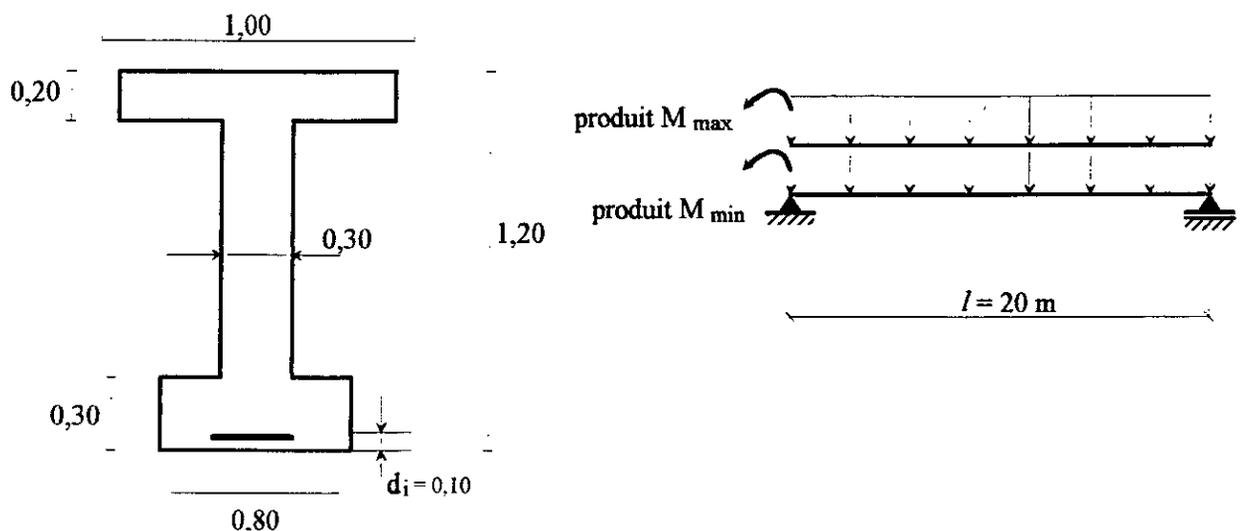
IV.4 Discussion des résultats:

IV.4.1 Influence du nombre de points générés:

Dans cette partie nous étudions l'influence du nombre de points générés ou solutions faisables par l'algorithme de Monté-Carlo, sur l'ensemble de paréto.

Pour cela nous avons choisi une poutre isostatique en béton précontraint que nous décrivons ci-après.

IV.4.1.a Description de notre exemple N° 1 (Section en double T):



Il s'agit d'une poutre isostatique de longueur $l = 20$ m soumise aux sollicitations M_{\min} (poutre non chargée) sous son poids propre seulement.

Avec : $M_{\min} = 0,85900$ MN.m et à un moment maximal $M_{\max} = 1,640$ MN.m sous un chargement réparti uniformément.

La section est en I comme indique ci-dessus.

Avec comme contraintes admissibles :

$$\sigma_{ts} = -3,8 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_{ti} = -2,7 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_{cs} = 21 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_{ci} = 19,2 \text{ MPa}.$$

Avec un enrobage des câbles de précontrainte égale à $d_i = 0,1$.

Les données de notre problème sont :

$$M_m = 0,85900 \text{ MN.m}$$

$$M_M = 1,640 \text{ MN.m}$$

$$\begin{cases} \sigma_{ts} = -3,8 \text{ MPa} \\ \sigma_{ti} = -2,7 \text{ MPa} \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} \sigma_{cs} = 21 \text{ MPa} \\ \sigma_{ci} = 19,2 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = 0,10 \text{ m} \\ L = 20 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{où } f_{c28} = 35 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad f_{c14} = 32 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ts} = -1,5 f_{t14} = -1,5 \cdot (0,6 + 0,06 f_{c14}) = -3,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ti} = -f_{t28} = -(0,6 + 0,06 f_{c28}) = -2,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{cs} = 0,6 f_{c28} = 21 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ci} = 0,6 f_{c14} = 19,2 \text{ MPa}$$

Introduit dans cet ordre dans le fichier de données on introduit de plus les données suivantes :

n : Nombre de variables de décision : 6.

m : Nombre de contraintes d'inégalité : 4.

k : Nombre de fonctions objectives : 2.

Nombre de points générés : 100, 1000, 5000,

Précision : 5.

Méthode : 1, 2 (2 de préférence : cette méthode utilise plus de mémoire que la 1^{ère}, l'ensemble des solutions optimales paréto devant être emmagasiné.

Bien sur on peut vouloir connaître cet ensemble afin de prendre la bonne décision.

La 2^{ème} méthode sera plus efficace pour des problèmes ayant un grand nombre de contraintes car le nombre de solutions optimales paréto sera assez petit.

La 2^{ème} méthode offre aussi la possibilité d'avoir une représentation graphique.

Sortie intermédiaire : ipr =

Si ipr = 0 aucun résultat intermédiaire (c'est pas intéressant).

Si ipr ≠ 0 imprime toutes solutions dans la région envisageable.

Pour notre exemple on choisira :

ipr = 1 (2^{ème} cas).

Soit alors le tableau des résultats obtenu pour les différents cas de nombre de points générés de 100 jusqu'à 10000.

Tableau N° 1:

Nombres de solutions générées	Nombres de solutions de paréto	Solution min-max (A ,P)
100	17	A = 0,67397 m ² ; P = 1,1464 MN
1000	33	A = 0,66496 m ² ; P = 1,1852 MN
5000	51	A = 0,66015m ² ; P = 1,1703 MN
6000	52	A = 0,66015 m ² ; P = 1,1703 MN
8000	59	A = 0,66015 m ² ; P = 1,1703 MN
9000	62	A = 0,65913m ² ; P = 1,1702 MN
10000	64	A = 0,65913 m ² ; P = 1,1702 MN

Cas pour lequel les bornes inférieurs et supérieures sont :

$$0,78 \text{ m} \leq X_1 \leq 0,82 \text{ m.}$$

$$0,98 \text{ m} \leq X_2 \leq 1,02 \text{ m.}$$

$$0,28 \text{ m} \leq X_3 \leq 0,32 \text{ m.}$$

$$0,18 \text{ m} \leq X_4 \leq 0,22 \text{ m.}$$

$$0,28 \text{ m} \leq X_5 \leq 0,32 \text{ m.}$$

$$L/20 \text{ m} \leq X_6 \leq L/14 \text{ m.}$$

On remarquera que d'après le tableau n° 1 des résultats sur l'ensemble des solutions de paréto obtenus en faisant varier le nombre de points générés ila de

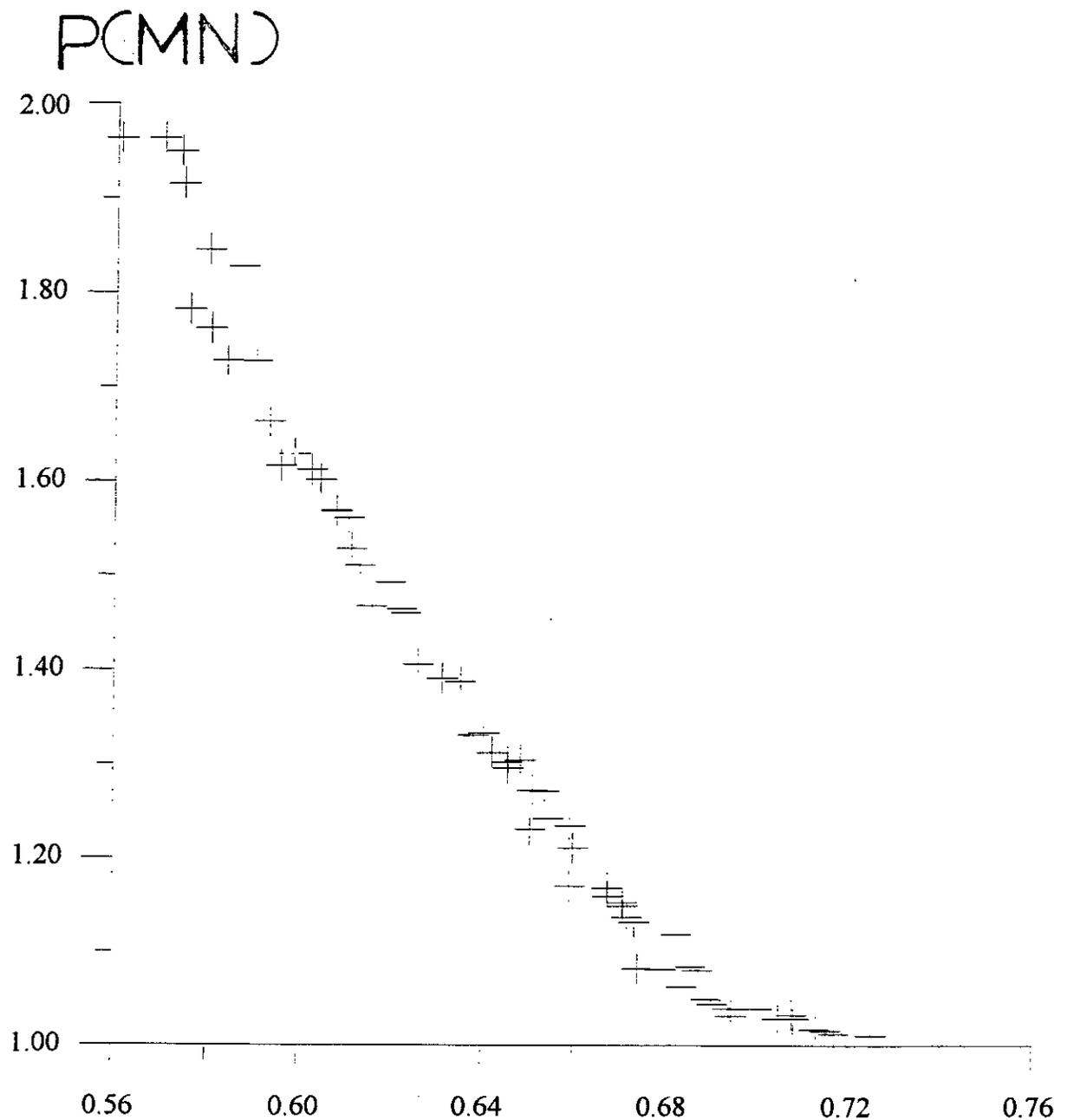
$$ila = 100 \text{ jusqu'à } ila = 10.000.$$

Qu'a partir de $ila = 8000$ on a à peu près toujours le même ensemble de paréto.

Conclusion:

Il nous semble intéressant de retenir de travailler qu'avec 10 000 points générées.

Nous avons d'ailleurs refait le test sur les deux autres exemples et il semble toujours intéressant de retenir que 10 000 points générées.



A(m²)

GRAPHE DE P=FONCT:A
POUR L'ENSEMBLE DE PARETO.
AVEC 10000 SOL GENEREES.

IV.4.2 Discussion sur la forme de l'ensemble de paréto:

IV.4.2.1 Description de l'exemple n°3:

Il s'agit comme précédemment d'une poutre en I isostatique de longueur $l = 41,5$ m sous deux chargements statiques réparties uniformément, en effet un chargement à vide sous son poids propre seulement c'est-à-dire sous M_m et un autre chargement sous M_m sous l'action d'une charge d'exploitation q_s qui produit le moment M_{qs}

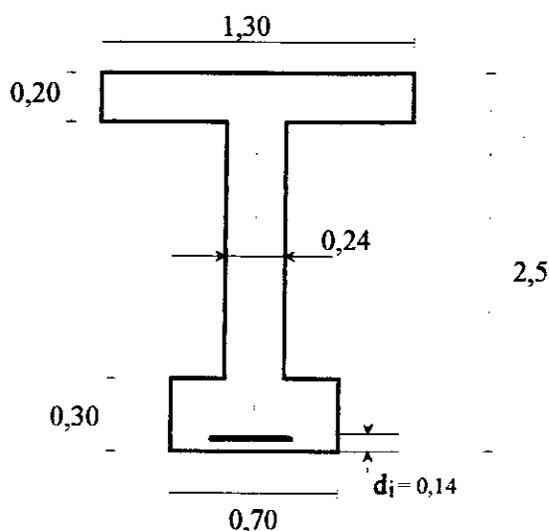
où $M_m = 5,3$ MN.m et $M_M = 12,2$ MN.m ($M_M = M_g + M_{qs}$)

avec comme contraintes admissibles :

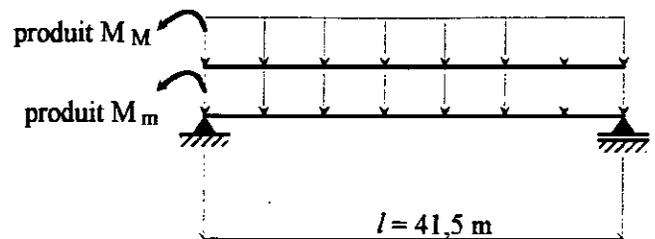
$$\sigma_{ts} = -3,6 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_{ti} = -2,4 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_{cs} = 18 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_{ci} = 15 \text{ MPa}.$$

Avec un enrobage des cables de précontrainte égale à 0,14 m.

a - Schéma de la section:



b - Schéma de la portée de la poutre et chargement correspondant



Cas pour lequel les bornes inférieures et supérieures sont :

$$0,65 \text{ m} \leq X_1 \leq 0,75 \text{ m}.$$

$$1,25 \text{ m} \leq X_2 \leq 1,35 \text{ m}.$$

$$0,25 \text{ m} \leq X_3 \leq 0,35 \text{ m}.$$

$$0,18 \text{ m} \leq X_4 \leq 0,22 \text{ m}.$$

$$0,22 \text{ m} \leq X_5 \leq 0,26 \text{ m}.$$

$$L/20 \text{ m} \leq X_6 \leq L/14 \text{ m}.$$

Pour le cas traiter avec 10 000 points générés ($n = 10.000$).

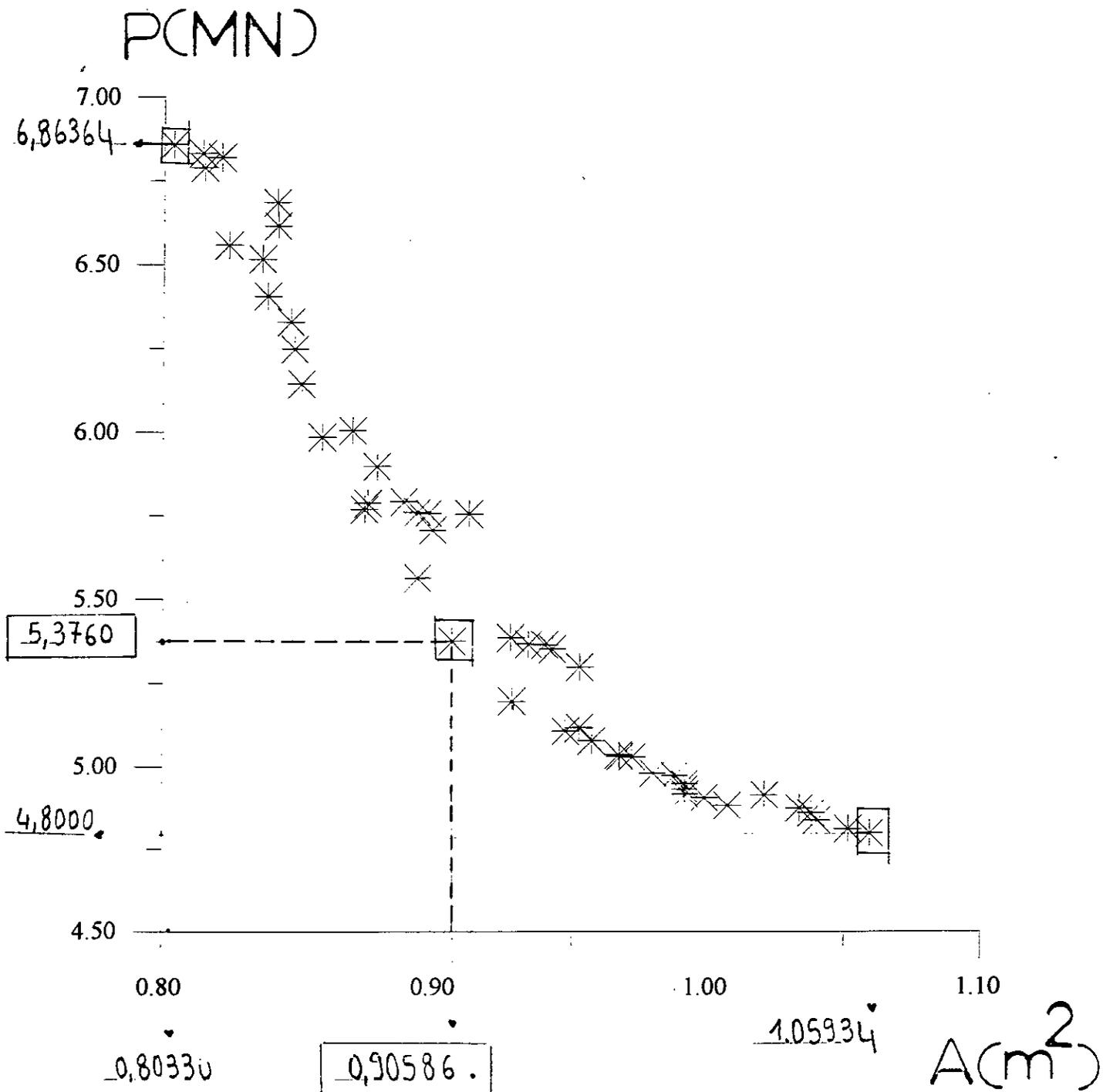
On remarque : que d'après le graphe donnant $p =$ fonction (A) pour les points représentant les solutions optimums, paréto tirées de l'ensemble des solutions générées, qu'il s'agit d'un ensemble de points qui s'aligne sur une courbe de forme *hyperbolique*.

Voir graphique : donnant la représentation de l'ensemble des solutions de paréto.

Du tel sorte qu'il soit proche du point O intersection des deux axes de coordonnées.

La solution min-max par définition : Elle est la plus proche de la solution idéale sachant cela ça veut dire que la solution min-max se situe au niveau de l'axe de symétrie ou au barycentre de l'ensemble de paréto c'est à dire que c'est le point le plus près de O (0 , 0).

Représentation de l'ensemble des solutions pareto.



LOCALISATION DE LA SOL: MIN. MA
 AVEC, ILA=10000

IV.4.3 Calcul pratique pour la détermination de la précontrainte d'une section en double T: Exemple N° 2

Ici nous comparons les résultats obtenus par un calcul manuel à ceux donnés par le programme.

En premier lieu on s'intéressera à un calcul manuel de la poutre indiqué ci-dessous.

Poutre qui est semblable à celle de l'ensemble N°1 à retenir sauf les deux dimensions particulières:

$$h = X_6 = 1,5 \text{ m} \quad \text{et} \quad l = 27,8.$$

Voir schéma de la poutre, où tous les données sont bien indiquées de plus des contraintes de traction et de compression.

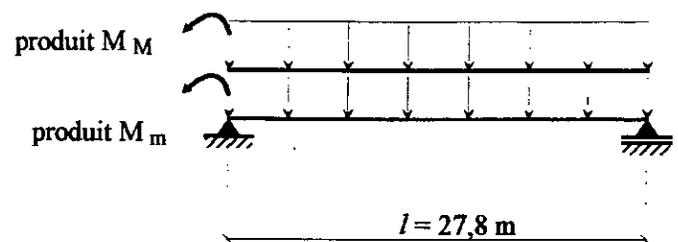
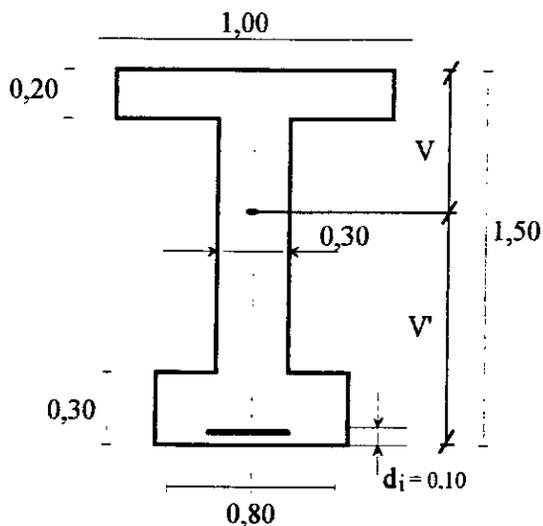
Données:

$$\bar{\sigma}_{ci} = \bar{\sigma}_{cs} = 14 \text{ MPa}$$

$$\text{Genre I: } \begin{cases} \bar{\sigma}_{ti} = 0 \\ \bar{\sigma}_{ts} = 0 \end{cases}$$

$$q_g = 18,5 \cdot 10^{-3} \text{ MN/ml.}$$

$$q_s = 22,85 \cdot 10^{-3} \text{ MN/ml.}$$



Pour démarrez, il faut calculer les caractéristiques géométriques de la section : C_i , C_s , V_i , V_s , I , B puis M_M et M_m enfin P .

IV.4.3.1 Caractéristiques géométriques:

- $B = 0,80 \times 0,30 + 0,20 \times 1,00 + (1,5 - 0,2 - 0,3) \cdot 0,3 = 0,74 \text{ m}^2$.
- $V_i = V' = 0,75135 \text{ m}$ (Voir formule de V' au chapitre IV.2.c)

D'où :

$$V_s = V = h - V' = X_6 - V' = 0,74865 \text{ m}$$

- $I = 0,19912 \text{ m}^4$ (Voir formule de I au chapitre IV.2.c)

$$\bullet C_s = \frac{I}{B \cdot V_i} = 0,35813 \text{ m}$$

$$\bullet C_i = \frac{I}{B \cdot V_s} = 0,35942 \text{ m}$$

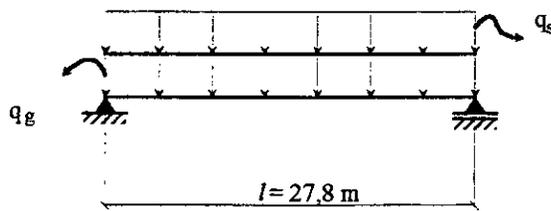
IV.4.3.2 Détermination de M_M et M_m :

- M_m , il faut calculer q_g (poids permanent).

$$q_g = 0,74 \cdot 25 \text{ KN/ml} = 18,5 \text{ KN/ml.}$$

$$q_g = 18,5 \cdot 10^{-3} \text{ MN/ml.}$$

En section médiane et l'état à vide $M = q \frac{l^2}{8} = M_g$



l : état choisie en réalisant bien la condition
 $X_6 \min \leq X_6 \leq X_6 \max$

$$\text{D'où : } M_m = q_g \frac{l^2}{8} \approx 1,787 \text{ MN.m.}$$

À l'état en charge $M_M = \Delta M + M_m$ et $q_s = 22,85 \cdot 10^{-3} \text{ MN/ml.}$

$$\text{Or : } \Delta M = q_s \frac{l^2}{8} \approx 2,207 \text{ MN.m} = M_{q_s}$$

$$\text{D'où : } M_M = 1,787 + 2,207 = 3,994 \text{ MN.m.}$$

IV.4.3 Détermination de la précontrainte et vérification des contraintes d'inégalités:

Données :

$$B = 0,74 \text{ m}^2.$$

$$I = 0,19912 \text{ m}^4$$

$$V_i = V' = 0,75135 \text{ m}$$

$$V_s = V = 0,74865 \text{ m}$$

$$C_s = 0,35813 \text{ m}$$

$$C_i = 0,35942 \text{ m}$$

$$M_m = 1,787 \text{ MN.m.}$$

$$M_M = 3,994 \text{ MN.m.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{et :} \quad \bar{\sigma}_{ci} = \bar{\sigma}_{cs} = 14 \text{ MPa} \\ \text{Genre I} \quad \bar{\sigma}_{ti} = \bar{\sigma}_{ts} = 0 \\ \quad \quad \quad d_i = 0,10 \text{ m} \end{array} \right.$$

D'où : la précontrainte est définie par :

$$P = \max \left\{ \begin{array}{l} P_1 = \frac{\Delta M}{\tau h} \\ P_2 = \frac{M_{\max}}{C_s + V_i - d_i} = \frac{M_M}{C_s + V_i - d_i} \end{array} \right.$$

$$\text{Soit :} \quad \rho = \frac{I}{B.V.V'} = 0,47837$$

$$\text{D'où :} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 = 3,07572 \text{ MN} \\ \text{et} \\ P_2 = 3,95649 \text{ MN} \end{array} \right.$$

$$\text{D'où } P_{\max} = P_2 \text{ ainsi } P = P_2 = 3,95649 \text{ et } e_0 = -(V' - d_i) = -(0,75135 - 0,1) = -0,65135 \text{ m}$$

De plus les quatre inéquations de limitation des contraintes de compression et de traction sont bien vérifiées.

En effet:

$$1 - g_1(\bar{x}) = -0,84 \leq 0 \quad \text{c'est vérifié.}$$

$$2 - g_2(\bar{x}) = 0,35 \geq 0 \quad \text{c'est vérifié.}$$

$$3 - g_3(\bar{x}) = 0 \geq 0 \quad \text{c'est vérifié.}$$

$$4 - g_4(\bar{x}) = -0,49 \leq 0 \quad \text{c'est vérifié.}$$

IV.4.3.4 Discussion des résultats obtenus avec un calcul pratique à la main et un calcul automatique en utilisant la méthode d'optimisation multicritères: pour l'exemple 2

En effet :

Un calcul de P à la main

On trouve comme résultat pour B et P :

$$B = 0,74 \text{ m}^2.$$

et

$$P = P_{\text{sur}} = 3,95649 \text{ MN}.$$

D'une part

Calcul de P en utilisant l'OMC

D'autre part la méthode d'OMC nous a permis de trouver les résultats pour les deux fonctions critères B et P tel que:

$$B = f_1 = 0,74615 \text{ m}^2.$$

et

$$P = f_2 = 3,5563 \text{ MN}.$$

Ces deux résultats sont ainsi proches les uns des autres de plus on remarque que pour les résultats obtenues par la méthode d'OMC : une légère augmentation de $B = f_1$ et qui est compensée par une diminution de la précontrainte $P = f_2$. Ce qui est logique et bénéfique, d'une part.

D'autre part pour les variables de décision et qui sont :

Pour la section de base

$$X_1 = 0,80$$

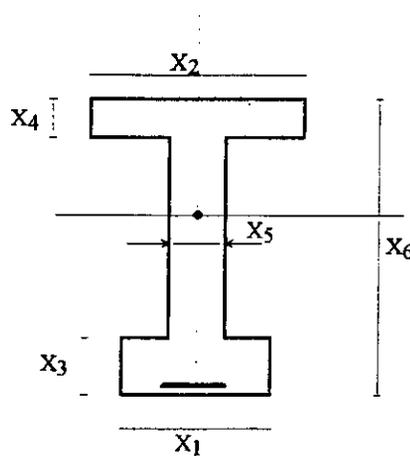
$$X_2 = 1,00$$

$$X_3 = 0,30$$

$$X_4 = 0,20$$

$$X_5 = 0,30$$

$$X_6 = 1,5$$



Section dét par la méthode d'OMC

$$X_1 = 0,79864$$

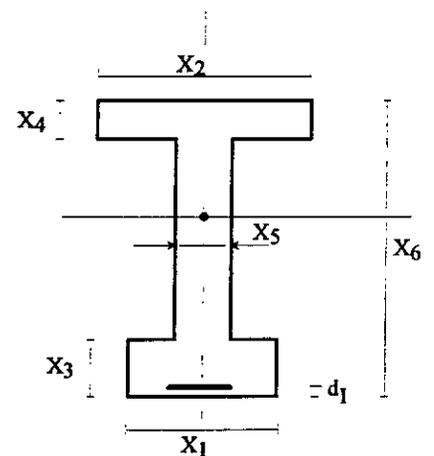
$$X_2 = 1,0010$$

$$X_3 = 0,29354$$

$$X_4 = 0,18227$$

$$X_5 = 0,28004$$

$$X_6 = 1,6516$$



On remarquera une nouvelle répartition des valeurs de variables de décisions de toutes manières ils restent tout de même proches des valeurs de variables de décision de base. Et pour chaque diminution d'une variable X_i , $i = 1,6$ sera compensée par une autre augmentation pour une autre variable X_i , en effet dans cet exemple X_1 , X_3 , X_4 , X_5 , dont la valeur qui a été diminué est compensées par une augmentation des variables X_2 et X_6 .

En effet par exemple $X_3 = 0,30$ avant transformation est devenue $X_3 = 0,29354$ m après, d'une part.

D'autre part pour $X_6 = 1,5$ m avant transformation deviendra $X_6 = 1,6516$ m après.

Globalement les résultats obtenus par le programme semblent valables en comparaison à ceux faits manuellement.

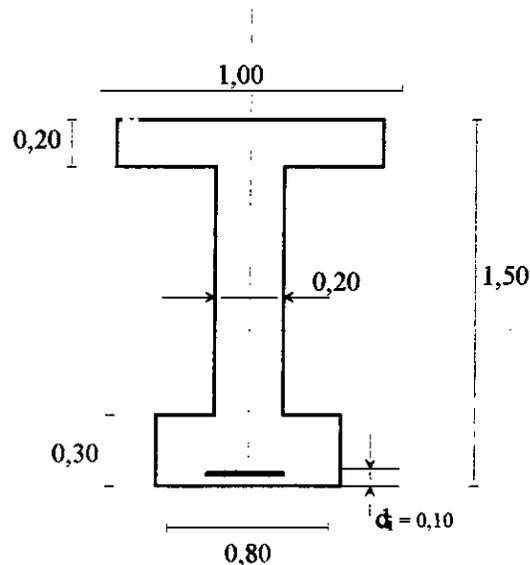
IV.4.4 Influence du choix des domaines de variation des variables de décision:

Dans cette partie on cherche à savoir l'influence de la variation de l'écart des domaines des variables de décision (X_1, X_2, \dots, X_5) sur l'ensemble des résultats tel que nombre des points de solution de périto. Ou variation des fonctions critères ou fonctions objectifs, etc.

Voir tableau de résultats ci-après.

IV.4.4.1 Présentation de l'exemple N° 4:

Il s'agit pour cette fois de la poutre dont la section droite est indiquée ci-dessous.

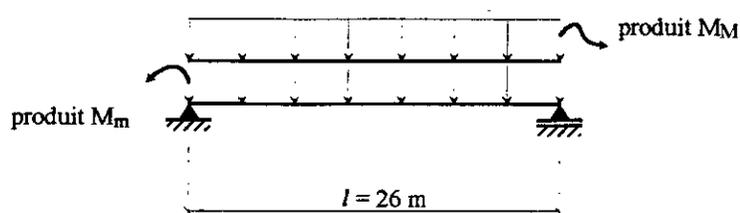


Poutre qui est soumise aux deux moments à vide et en charge.

telles que : M_m : Moments à vide dont la valeur est : $M_m = 1,352 \text{ MN.m}$.

Et : M_M : Moments en charge dont la valeur est : $M_M = 3,283 \text{ MN.m}$.

Schéma:



Avec une longueur $l = 26 \text{ m}$.

Les contraintes admissibles de traction et de compression sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_{ts} = 0 \\ \sigma_{ti} = 0 \end{cases} \quad \text{Genre 1}$$

et :

$$\begin{cases} \sigma_{cs} = 14 \text{ MPa} \\ \sigma_{ci} = 14 \text{ MPa} \end{cases}$$

Et dont l'enrobage des câbles de précontrainte égal à $d_i = 0,1$.

Car pour lequel les bornes inférieures et supérieures sont :

$$0,78 \text{ m} \leq X_1 \leq 0,82 \text{ m.}$$

$$1,00 \text{ m} \leq X_2 \leq 1,40 \text{ m.}$$

$$0,28 \text{ m} \leq X_3 \leq 0,32 \text{ m.}$$

$$0,18 \text{ m} \leq X_4 \leq 0,22 \text{ m.}$$

$$0,18 \text{ m} \leq X_5 \leq 0,22 \text{ m.}$$

$$L/20 \text{ m} \leq X_6 \leq L/14 \text{ m.}$$

Parmi les variables de décision seule X_6 est une variable pour laquelle le domaine est défini par la pratique et la théorie des poutres en béton précontraint.

En effet on devra avoir approximativement $L/20 \text{ m} \leq X_6 \leq L/14 \text{ m}$ pour les autres variables, c'est à l'utilisateur de définir leurs domaines.

On travaillera avec un nombre de points générés $ila = 10\ 000$, on remarquera ainsi d'après ces données que les variables ont leur domaine qui est fixé très petit.

En effet :

$$0,78 \text{ m} \leq X_1 \leq 0,82 \text{ m.}$$

:

:

:

$$0,18 \text{ m} \leq X_5 \leq 0,22 \text{ m.}$$

Ainsi nous allons petit à petit augmenter la taille de chaque domaine et voir ce que ça change sur l'ensemble de paréto et la solution min-max.

En fixant l'ensemble des points générés à $ila = 10\ 000$ comme indiqué ci-dessus.

IV.4.4.2 Définition des différents cas:**a - Cas N° 1**

$$0,650 \text{ m} \leq X_1 \leq 0,950 \text{ m.}$$

$$1,00 \text{ m} \leq X_2 \leq 1,40 \text{ m.}$$

$$0,28 \text{ m} \leq X_3 \leq 0,32 \text{ m.}$$

$$0,18 \text{ m} \leq X_4 \leq 0,22 \text{ m.}$$

$$0,18 \text{ m} \leq X_5 \leq 0,22 \text{ m.}$$

$$1,300 \text{ m} \leq X_6 \leq 1,8571 \text{ m.}$$

b - Cas N° 2

$$0,650 \text{ m} \leq X_1 \leq 0,950 \text{ m.}$$

$$1,00 \text{ m} \leq X_2 \leq 1,40 \text{ m.}$$

$$0,100 \text{ m} \leq X_3 \leq 0,500 \text{ m.}$$

$$0,180 \text{ m} \leq X_4 \leq 0,220 \text{ m.}$$

$$0,180 \text{ m} \leq X_5 \leq 0,220 \text{ m.}$$

$$1,300 \text{ m} \leq X_6 \leq 1,8571 \text{ m.}$$

c - Cas N° 3

$$0,650 \text{ m} \leq X_1 \leq 0,950 \text{ m.}$$

$$1,00 \text{ m} \leq X_2 \leq 1,40 \text{ m.}$$

$$0,100 \text{ m} \leq X_3 \leq 0,500 \text{ m.}$$

$$0,150 \text{ m} \leq X_4 \leq 0,400 \text{ m.}$$

$$0,180 \text{ m} \leq X_5 \leq 0,220 \text{ m.}$$

$$1,300 \text{ m} \leq X_6 \leq 1,8571 \text{ m.}$$

d - Cas N° 4

$$0,650 \text{ m} \leq X_1 \leq 0,950 \text{ m.}$$

$$1,00 \text{ m} \leq X_2 \leq 1,40 \text{ m.}$$

$$0,100 \text{ m} \leq X_3 \leq 0,500 \text{ m.}$$

$$0,150 \text{ m} \leq X_4 \leq 0,400 \text{ m.}$$

$$0,150 \text{ m} \leq X_5 \leq 0,450 \text{ m.}$$

$$1,300 \text{ m} \leq X_6 \leq 1,8571 \text{ m.}$$

e - Cas N° 5

$$0,650 \text{ m} \leq X_1 \leq 0,950 \text{ m.}$$

$$1,00 \text{ m} \leq X_2 \leq 1,40 \text{ m.}$$

$$0,100 \text{ m} \leq X_3 \leq 0,500 \text{ m.}$$

$$0,150 \text{ m} \leq X_4 \leq 0,400 \text{ m.}$$

$$0,150 \text{ m} \leq X_5 \leq 0,450 \text{ m.}$$

$$1,300 \text{ m} \leq X_6 \leq 1,8571 \text{ m.}$$

avec 20 000 points générés

IV.4.4.3 Tableau de résultats:

N° de cas	Nombre de solutions de paréto	Solution : Min-Max (A,P)	Intervalle de P pour l'ensemble de paréto [P _{min} , P _{max}]	Intervalle de A pour l'ensemble de paréto [A _{min} , A _{max}]
1	31	A = 0,6164 m ² et P = 3,2289 MN	[2,8645 MN ; 4,1626 MN]	[0,55814 m ² ; 0,78028 m ²]
2	16	A = 0,53857 m ² et P = 3,1059 MN	[2,8359 MN ; 3,8186 MN]	[0,50073 m ² ; 0,71756 m ²]
3	19	A = 0,54035 m ² et P = 3,0914 MN	[2,8028 MN ; 3,7373 MN]	[0,50922 m ² ; 0,76429 m ²]
4	11	A = 0,5055 m ² et P = 3,0601 MN	[2,7628 MN ; 3,5912 MN]	[0,4878 m ² ; 0,69980 m ²]
5	13	A = 0,52873 m ² et P = 3,0556 MN	[2,7628 MN ; 3,5912 MN]	[0,48780 m ² ; 0,69980 m ²]

Le cas N°: 5 étant le même exemple traité qu'au N°: 4 en changeant seulement le nombre de points, génèresen penant comme valeur de $ila = 20\ 000$ (nombre de points génères) après l'avoir traité avec $ila = 10\ 000$ pour constater les changements qui peuvent se produire éventuellement.

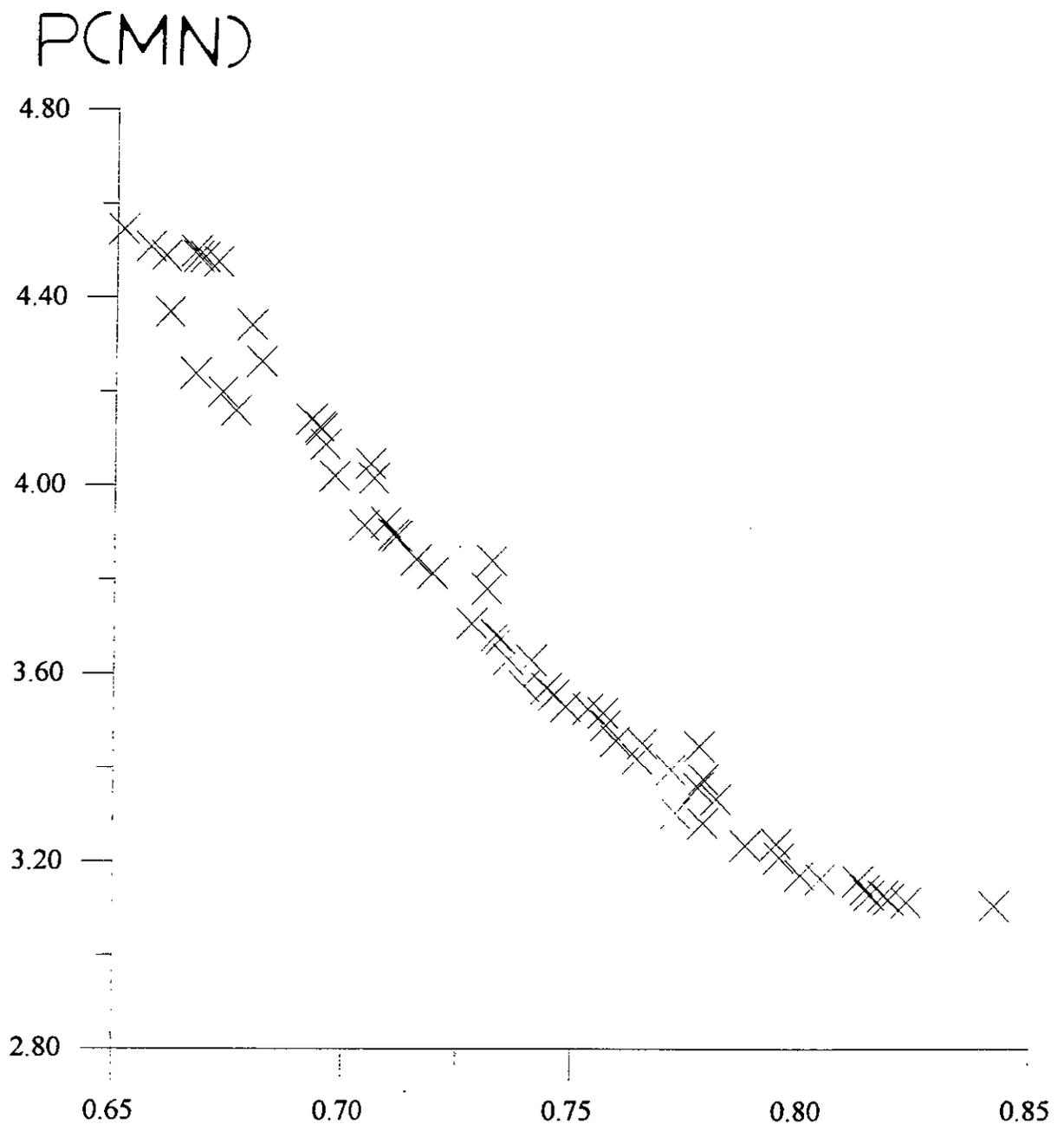
En effet :

On remarque ici que plus on relache les domaines des variables et plus la qualité des solutions de paréto obtenues s'améliore.

En particulier on remarque que la charge p et l'aire A diminuent en même temps. Ce qui veut dire que parmi tous les cas traités, il est plus intéressant de travailler avec des domaines tels que ceux décrits dans le cas N°: 5.

Par ailleurs il est intéressant aussi de relever que le nombre de solution de paréto diminue.

Nous nous sommes demandés si ce fait est lié à un nombre de points générés qui est insuffisant, compte tenu de la taille des nouveaux domaines, un calcul a été fait avec le cas N°: 5 en prenant 20 000 points générés, cela n'a pas beaucoup changé les résultats. Au contraire le nombre de solutions de paréto et les valeurs de p et A sont restés *très proches*.



REPRESENTATION DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS DE PARETO AVEC ILA=10000

Conclusion.



Conclusion

Comme conclusion générale du présent travail, on peut dire que la méthode *d'optimisation multicritère* appliquée en structure de Génie - civil.

Malgré son utilité est limitée du fait qu'elle dépend du nombre de variables de décision et des critères définissant le problème à traiter. Dans notre cas d'exemple nous avons pris six variables de décision, ce nombre ne doit pas être élevé, sinon le problème devient trop difficile à résoudre, en effet ces variables sont liées entre elles pour vérifier un certain nombre de contraintes dont le nombre doit être aussi limité, de même que pour les fonctions critères ou fonctions objectifs. (à minimiser ou à maximiser .)

Tout cela nous amène à recommander son utilisation à des problèmes de Génie - civil pas trop compliqués tel que :

- 1- Dimensionnement des poutres en béton armé.
- 2- Dimensionnement des poutres en béton précontraint (*cas de notre exemple*).
- 3- Dimensionnement d'une semelle de fondation.
- 4- Dimensionnement d'un mur de soutènement [Réf, bib 16].

Généralement où les variables de décision ne dépassent pas la borne de 10 dans notre exemple.

En premier lieu on discutera du nombre de contraintes noté $g_i(\bar{x}) \geq 0$ où $i = 1 \text{ m}$.

Ce nombre de contraintes définit un ensemble de solutions envisageables qui sera d'autant plus réduit qu'en augmentant le nombre de ces contraintes donc à un certain nombre de contraintes, cet ensemble pourra être réduit à quelques points solutions générées qui peuvent ne présenter aucune solutions de paréto par conséquent pas de solution min-max qui optimisent les fonctions critères, donc le problème sera sans solutions possible de paréto.

De la même manière on risque d'aboutir à la même conclusion c'est-à-dire pas de solution de paréto (donc pas de solution min-max) si on augmente beaucoup le nombre de fonctions critères à optimiser.

Il est par conséquent nécessaire de choisir des exemples de calcul où on peut éviter tous ces problèmes qui empêchent le déroulement logique de nos calculs d'encadrement des solutions générées et la recherche des solutions de paréto.

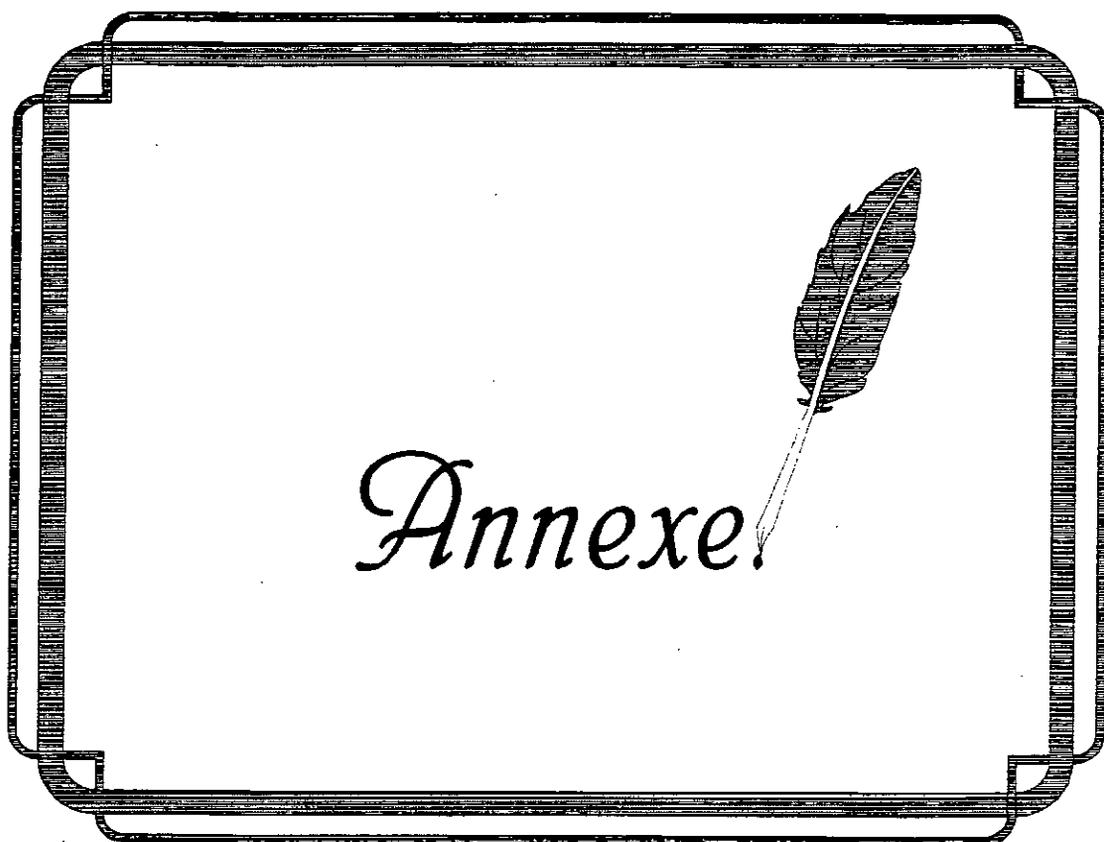
En fin l'algorithme Min Max vient apporter une réponse au problème du choix d'une solution de paréto. En effet le plus gros problème quant on met on oeuvre un programme d'optimisation multicritère réside dans le risque d'avoir un trop grand nombre d'éléments dans l'ensemble de paréto.

L'algorithme du Min Max a apporté une bonne réponse au cas que nous avons traité car il permet de sélectionner une solution moyenne (P_{moyen} et A_{moyen}).

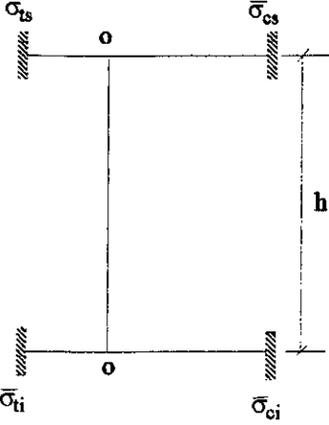
- Mais il se peut que des logiciels de graphisme en plusieurs dimensions permettent aux ingénieurs de visualiser l'ensemble de paréto afin de sélectionner une solution qui leur convient mieux suivant le cas à traiter.

Bibliographie

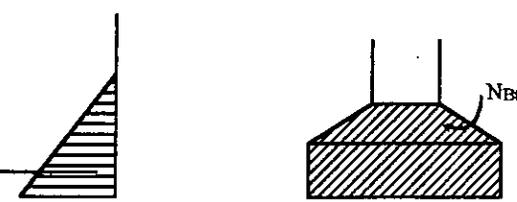
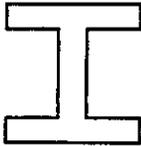
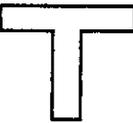
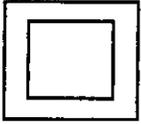
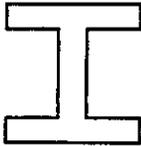
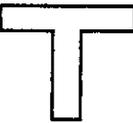
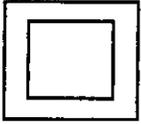
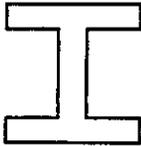
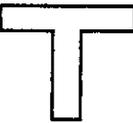
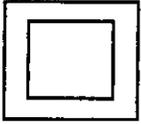
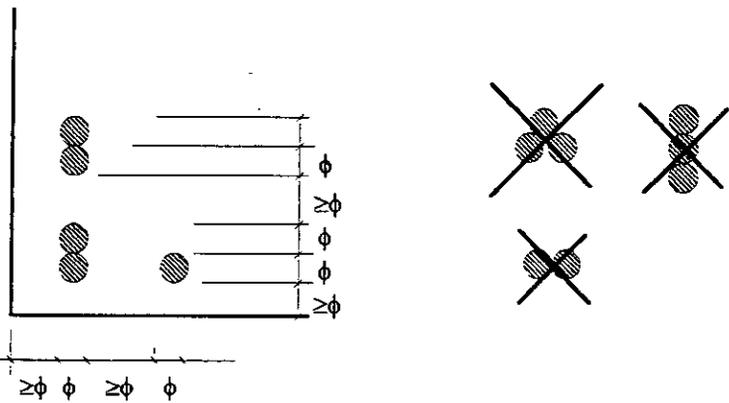
- [1] Multicriterion optimization in engineering with fortran programs. ANDRZEJ OSYCZKA.
- [2] Programmation mathématique (théorie et algorithmes). T.1 et T.2
M.MINOUX E.N.P : 518.5 MIN
- [3] Le béton précontraint aux états-limites.
- Cours de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées -. HENRY THONIER. 2^e Edition.
- [4] Cours pratique de béton précontraint.Règles B.P.E.L - G.DREUX
- J.MAZARS.
- M.RIMBOEUF.
- [5] Introduction à la pratique de l'optimisation. LUCAS PUN. B.N côte 476-438.
- [6] Approximation et optimisation. Tome 1 et 2. E.N.P 518.1 LAURENT.
- [7] Numerical methodes of mathematical optimization. E.N.P 518.1 KUNZI.
- [8] Optimisation méthodes numériques.E.N.P 518.1 AUS.
- [9] Programmation linéaire. E.N.P 518.1 ACHER. DUNOD (78).
- [10] Numerical method for contrained optimization. 65 -012-122 GILL.
- [11] Ingeneering optimization. 38.961 Département Génie industriel.
- [12] Non linear programming : theory and algorithmes. E.N.P 519.28 BAZARAA(79).
- [13] Non linéaire optimisation. Livre de l'U.S.T.H.B. 90 NON 982.
- [14] Dictionary of technical termes and phases. E.N.P 62.68 KEI.
- [15] Dictionary of technical termes. 413.164 GRISPO.
- [16] M^{lle} Fatiha YENOUNE. Optimisation multicritère des murs de soutènement.
Thèse de magistère en cours de rédaction. E.N.P. 97.
- [17] Fondation of structural multicriteria optimization -STEFAN JENDO-WOJCIECH MARKS
Institute of fundamental technological Research Warsaw; Poland.



Formulaire de calcul des éléments fléchis:

Unités	Efforts tranchants en MN, moments en MN.m, contraintes en MPa, longueurs en m, aciers en cm ² ou en mm ² . M_{max} = moment maximum, M_{min} = moment minimum, ΔM = variation du moment	
E.L.S	Béton : $f_{tj} = 0,06 f_{cj} + 0,6$; $f_{cj} = 0,685 f_{c28} \times \log(j + 1)$	
	Contraintes admissibles Compression $\bar{\sigma}_{cs}$ $\bar{\sigma}_{ci}$	0,5 f_{ci} combinaisons quasi-permanentes 0,6 f_{cj} autres cas
		Traction $\bar{\sigma}_{ts}$ $\bar{\sigma}_{ti}$ Classe I : 0 Classe II : 1,5 f_{tj} hors section d'enrobage. f_{tj} : En section d'enrobage en combinaisons rares ou en construction. O autre cas Classe III : Pas de limite sauf en section d'enrobage en combinaisons quasi-permanents : Autres cas.
	Acier $E_p = 2.10^5$ MPa fils et barres. $= 1,9.10^5$ MPa torons. $\sigma_{p0} = \text{Min}(0,80 f_{prg} ; 0,90 f_{peg})$. $\sigma_{p1} = 1,02 \sigma_{p0} - 0,8 \Delta\sigma_p \rightarrow P_1 = A_p \cdot \sigma_{p1}$ $\sigma_{p2} = 0,98 \sigma_{p0} - 1,2 \Delta\sigma_p \rightarrow P_2 = A_p \cdot \sigma_{p2}$	
	Section A_p $\Delta\sigma_D =$ Pertes instantanées + différées. Acier passif : $f_e =$ Limite élastique $\sigma_s =$ Contrainte	

	<p>Contraintes admissibles en classe III :</p> <p>$\bar{\sigma}_s = \text{Min} (2/3 f_c ; 150 \eta)$ Section d'enrobage en combinaisons rares ou en construction.</p> <p>$\bar{\sigma}_s = 60 \text{ MPa}$ Section d'enrobage en combinaisons fréquentes</p>
	<p>Sollicitations : $M = M_g + M_q$. Travée sur appuis simples</p> <p>$M_{\min} = M_g$</p> <p>$M_{\max} = M_g + M_q$. et $\Delta M = M_q$</p>
Flexion	<p>Contraintes : $\sigma = \frac{P}{S} \pm \frac{P \cdot e_0}{I/V} \pm \frac{M_g}{I/V} \pm \frac{M_q}{I/V}$</p>
	<p>Précontraintes (classe I et II) :</p> <p>$P_{\text{sous}} = \frac{\Delta M}{\rho h} + \frac{S}{h} (V \bar{\sigma}_{t_i} + V' \bar{\sigma}_{t_s})$ (Sous critique)</p> <p>$P_{\text{sur}} = \frac{M_{\max} + \rho S \cdot V \cdot \bar{\sigma}_{t_i}}{\rho V + V' - d'}$ (Sur critique)</p> <p>Où : $\rho = \frac{I}{B \cdot V \cdot V'}$</p>
	<p>Excentricité :</p> <p>$e_0 (\text{sous}) = \rho V - \frac{M_{\max} + \rho S \cdot V \cdot \bar{\sigma}_{t_i}}{P} = -\rho V' - \frac{M_{\min} - \rho S \cdot V' \cdot \bar{\sigma}_{t_s}}{P}$</p> <p>$e_0 (\text{sur}) = -(V' - d')$</p>

	<p>Inertie :</p> $\left(\frac{I}{V}\right)_{\text{sous}} = \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}_s} \quad \left(\frac{I}{V}\right)_{\text{sur}} = \frac{P \cdot \rho \cdot h}{\bar{\sigma}_{cs} + \frac{V}{V'} \cdot \bar{\sigma}_{ti}}$ $\frac{I}{V'} = \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}_i}$				
	<p>Acier passif (classe II et III) :</p> $A_s \geq \frac{B_t}{1000} + \frac{N_{Bt}}{f_e} \cdot \frac{f_{tj}}{\sigma_{bt}} \cdot N_{Bt}$ 				
	<p>Rendement : ρ</p> <table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 50%;"> 1/3</td> <td style="width: 50%;"> 0,45 à 0,55</td> </tr> <tr> <td> 0,4 à 0,5</td> <td> 0,55 à 0,65</td> </tr> </table>	 1/3	 0,45 à 0,55	 0,4 à 0,5	 0,55 à 0,65
 1/3	 0,45 à 0,55				
 0,4 à 0,5	 0,55 à 0,65				
<p>Dispositions constructives pour $\phi \geq 5$ cm</p>	<p>Poutres :</p> 				

1.1 Comment reconnaître section sous critique et section sur critique

On prend le cas particulier de la flexion en classe I.

Soit la précontrainte définie par le couple (p, e_0) .

- A la valeur minimale "sous critique" $P_I = P_{\text{sous}}$ correspond

$$\text{L'excentricité } e_{0I} = e_{0(\text{sous})} = \left(\rho V' + \frac{M_{\min}}{P} \right)$$

- A la valeur minimale "sur critique" $P_{II} = P_{\text{sur}}$ correspond

$$\text{L'excentricité } e_{0II} = e_{0(\text{sur})} = -(v' - d')$$

On sait pas ailleurs que l'effort nécessaire de précontrainte est d'autant plus grand que le module de l'excentricité est faible.

Ainsi si la section considérée est sous-critique.

$$|e_{0I}| < |e_{0II}| \quad \text{donc } P_I > P_{II}$$

Si la section considérée est surcritique $|e_{0II}| < |e_{0I}|$ donc $P_{II} > P_I$

En conséquence en présence d'une section de béton particulière, on calcule les deux valeurs P_I et P_{II} correspondantes, la valeur la plus grande est la précontrainte minimale qui doit être introduite dans la section.

Cas a:

$$\text{Si } P_I > P_{II} \text{ on est dans le cas sous critique } \Rightarrow -\rho V' - \frac{M_m}{P} \leq e_0 \leq \rho V - \frac{M_M}{P}$$

Cas b:

$$\text{Si } P_{II} > P_I \text{ on est dans le cas sur critique } \Rightarrow -(V' - d') \leq e_0 \leq \rho V - \frac{M_M}{P}$$

Ce raisonnement consiste à prendre la précontrainte la plus grande et la considérée comme minimale afin d'avoir une excentricité réalisable.

Il est évident que si on choisit comme excentricité $e_0 = e_{0II} = e_{0\text{sur}} = -(v' - d')$, dans les deux cas la précontrainte qui lui est associée est la plus convenable, dans le sens de minimiser la précontrainte P .

En effet pour le cas (a), ou $P_I \geq P_{II}$ et $|e_{0I}| < |e_{0II}|$ il suffira de choisir $P = P_{II}$ et

$$e_0 = e_{0II} = -(v' - d') \text{ pour réaliser la minimisation de la précontrainte } P.$$

Tandis que pour le cas (b) étant donnée que $P_{II} > P_I$ d'où : $|e_{0I}| > |e_{0II}|$ on choisira oligatoirement $P = P_{II}$ et $e_0 = e_{0II} = -(v' - d')$ qui sera prise comme une précontrainte minimale vu que sous la précontrainte $P = P_I$ l'excentricité est irréalisable.

1.2 Valeurs des tensions dans les armatures de précontrainte

On définit : σ_{p0} comme la tension maximale, à la mise en tension, évaluation des tensions dans les armatures de précontrainte.

1.2.1 Valeurs probables des tensions dans les armatures de précontrainte:

C'est la valeur de la tension appliquée diminuée des pertes:

$$\text{- Tension initiale probable : } \sigma_{pi}(x) = \sigma_{p0} - \Delta \sigma_i(x).$$

$$\text{- Tension finale probable : } \sigma_{p0}(x) = \sigma_{p0} - \Delta \sigma_i(x) - \Delta \sigma_d(x).$$

Ou tension moyenne.

1.2.2 Valeurs caractéristiques des tensions des armatures de précontrainte:

Les actions doivent être introduites dans les calculs avec leurs valeurs caractéristiques.

Pour la précontrainte elles sont:

$$\text{Valeur caractéristique maximale : } \sigma_{p1} = 1,02 \sigma_{p0} - 0,8 \Delta \sigma.$$

$$\text{Valeur caractéristique minimale : } \sigma_{p2} = 0,98 \sigma_{p0} - 1,20 \Delta \sigma.$$

$\Delta \sigma$: étant la somme des pertes à l'age considéré soit:

$$\Delta \sigma = \Delta \sigma_i \text{ à la mise en tension.}$$

$$\Delta \sigma = \Delta \sigma_i + \Delta \sigma_{dj} \text{ à un jour j.}$$

On voit que l'on prend 2% d'incertitude sur σ_{p0} qui est la valeur maximale; ceci est justifié par les contrôles effectués (pression au manomètre du vérin-mesure des allongements).

Par contre on prend 20% d'incertitude sur les pertes car elles résultent de calculs théoriques et ne font pas pour la plupart l'objet de contrôle.

Cet écart assez important justifie le fait qu'il ne fallait pas rechercher une trop grande précision dans le calcul des pertes.

1. La programmation dynamique:

La programmation dynamique n'est pas un algorithme, il s'agit plutôt d'un principe général applicable à de nombreux problèmes d'optimisation avec contraintes, linéaires ou non linéaires, en variables continues ou discrètes, mais possédant une certaine propriété dite de : *décomposabilité*.

La programmation dynamique permet de résoudre des problèmes caractérisés par *des décisions interdépendantes et séquentielles* le terme de "*programmation dynamique*" provient du fait que la méthode a d'abord été appliquée à l'optimisation des *systèmes dynamiques*, c'est-à-dire de systèmes évoluant au cours du temps et dont l'évolution peut être contrôlée par des variables de décision.

En effet *Ces décisions interdépendantes et séquentielles* peuvent être prises au cours d'un certain nombre de périodes de temps consécutives. Par exemple, considérons un gérant de production qui doit spécifier au début de chaque semaine la quantité à produire. Le choix d'un niveau de production pour une semaine donnée peut être influencé par les choix passés et peut influencer les *choix futurs*.

Ce pendant un tel ensemble de décisions ne sous-entend pas nécessairement des périodes de temps consécutives. L'allocation d'un budget à divers projets d'investissement nécessite l'attribution d'un certain montant à chaque projet.

Il s'agit là d'un ensemble de décisions interdépendantes et séquentielles sans intervention du facteur temps.

Dans la plupart des problèmes où l'on peut utiliser la programmation dynamique, on a le choix d'un grand nombre de décisions possibles.

La programmation dynamique permet, de ne pas envisager explicitement un certain nombre de combinaisons décisionnelles. Cette caractéristique permet d'économiser du temps de calcul pour des problèmes de grande dimension.

Il n'existe pas de formulation mathématique standardisée pour la programmation dynamique. Il s'agit plutôt d'une technique d'approche des problèmes qui doit être adaptée à chaque situation particulière. Elle a pour objectif l'optimisation d'un système qui prévaut au cours de plusieurs "*périodes*" consécutives distinctes.

L'analyse s'effectue par la décomposition du problème global en un certain nombre de sous problèmes et elle débute par l'étude de ceux qui chronologiquement se situent les derniers.

Où (opt = Min ou Max)

2.2 Extension du théorème d'optimalité au cas avec contraintes:

Le théorème d'optimalité se généralise immédiatement au cas (plus intéressant en pratique) de l'optimisation avec contraintes considérons le problème :

opt $f(x, y)$ sous la contrainte $(x, y) \in \Omega$

Où opt Min ou Max, et où Ω est l'ensemble des solutions du problème

$(\Omega \subset \mathfrak{R}^{k+1}, \Omega \neq \emptyset)$

Pour tout x réel, notons

$$\Omega_x = \{y/y \in \mathfrak{R}^k, (x, y) \in \Omega\}$$

On peut énoncer:

Théorème 1': (théorème d'optimalité: cas avec contraintes)

Si f est décomposable avec $f(x, y) = f_1(x, f_2(y))$ alors :

$$(2) \quad \begin{array}{l} \text{opt } \{f(x, y)\} \\ (x, y) \in \Omega \end{array} = \begin{array}{l} \text{opt } \{f_1(x, \text{opt } \{f_2(y)\})\} \\ x \quad y \in \Omega \end{array}$$

2.3 La notion d'état en programmation dynamique:

Reprenons l'ensemble du paragraphe précédent où l'on cherchait à résoudre:

$$\begin{cases} \text{opt } f(x, y) \\ (x, y) \in \Omega \end{cases}$$

Où f est décomposable et se met sous la forme:

$$f(x, y) = f_1(x, f_2(y))$$

D'un point de vue pratique, si l'on suppose que l'ensemble des solutions Ω est a priori quelconque, la recherche de l'optimum de f sur Ω par la formule de décomposition (2):

$$\begin{array}{l} \text{opt } \{f_1(x, \text{opt } \{f_2(y)\})\} \\ x \quad y \in \Omega_x \end{array}$$

Est équivalente à:

- Déterminer pour chaque x la valeur de la fonction φ

$$\varphi(x) = \text{opt } \{f_2(y)\}$$

$$y \in \Omega_x$$

- Puis, déterminer l'optimum en x de la fonction:

$$\psi(x) = f_1(x, \varphi(x))$$

On remarque alors que ceci est strictement équivalent au calcul du minimum de $f(x, y)$ par "énumération" de tous les $(x, y) \in \Omega$. La formule (2) ne fait que préciser l'ordre dans lequel "L'énumération" des éléments de Ω est effectuée.

2.4 Le principe d'optimalité:

Ce principe peut être résumé par : "Toute solution optimale ne peut être formée que par des solutions partielles optimales".

2.5 Exemples de fonctions décomposables:

La principale classe générale de fonctions décomposables utilisée en pratique est constituée de fonctions de la forme:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \square f_2(x_2) \square \dots \square f_n(x_n)$$

Où \square est un opérateur de composition.

De telles fonctions étant évidemment séparables, il suffira de vérifier que l'opérateur de composition \square satisfait la propriété de monotonie.

Examinons les cas particuliers les plus fréquemment rencontrés dans les applications.

a- Cas de fonctions additives: exemple n°: 3 traité dans notre projet dans le chapitre n°: III.

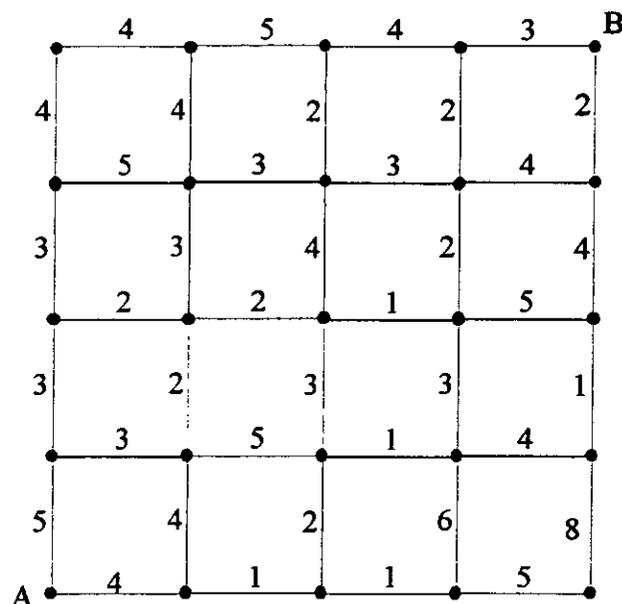
On a alors \square addition des réels, de telles fonctions sont *evidemment* décomposables et *également de produit* décomposables au sens strict.

b- Cas de produit de fonctions réelles positives ou nulles:

On a alors \square = multiplication des réels. Dans ce cas, pour obtenir la propriété de monotonie, il faut supposer que les fonctions élémentaires qui composent la fonction f , sont positives ou nulles. Pour obtenir la propriété de monotonie au sens strict, il faut exclure l'élément 0, autrement dit supposer que les fonctions élémentaires f_1, f_2, \dots, f_n sont toutes strictement positives.

Remarquons que le cas d'un produit de fonctions réelles toutes strictement positives se ramène immédiatement à une fonction additive en prenant le logarithme de la fonction (comme le logarithme est une fonction monotone croissante, il est équivalent d'optimiser f ou $\log(f)$).

2.6 L'histoire d'O (exemple de calcul du plus court chemin):



- fig 2.1 -

Le problème est d'aider O à se rendre le plus rapidement de A à B. Les nombres indiqués sur chaque bloc de la figure 2.1 représentent le temps nécessaire (en minutes) pour parcourir ce bloc.

A quelle heure au plutôt pourra -t-elle atteindre le carrefour B? le problème posé est en effet un cas particulier d'un problème de "plus court chemin dans un réseau".

Une solution possible serait d'énumérer tous les chemins entre A et B (on ne considère que les chemins qui progressent "régulièrement" de A vers B; c'est-à-dire qu'à un carrefour donné, O ne peut se déplacer que vers le haut ou vers la droite *sur le graphique*).

C'est une opération longue et fastidieuse puisqu'il existe 70 chemins différents; de plus, il est difficile d'être certain de ne pas commettre d'omissions ou de répétitions.

Une autre approche consisterait à choisir à chaque carrefour le bloc le plus court. Partant de A, nous nous déplacerions horizontalement (*puisque $4 < 5$*), horizontalement encore trois fois (*puisque $1 < 4$, $1 < 2$ et $5 < 6$*) et finalement verticalement quatre fois (nous n'avons plus le choix). Le temps de parcours total le long de ce chemin est : $4 + 1 + 1 + 5 + 8 + 1 + 4 + 2 = 26$ minutes.

Ce temps est supérieur au temps de parcours optimal (qui est, comme nous allons le montrer, de 18 minutes). Il est facile de comprendre intuitivement que cette dernière approche n'est pas satisfaisante :

En voulant gagner du temps dès le début, on risque d'être pris un peu plus loin dans une zone où les blocs sont très longs :

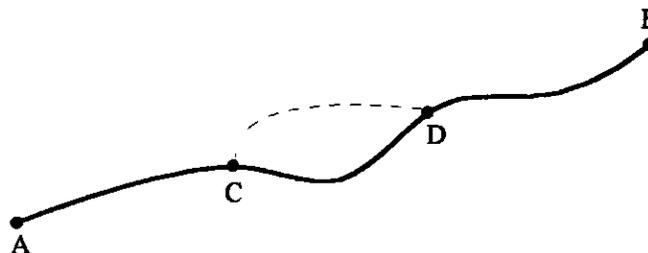
L'avantage initial est ainsi perdu et on risque également une lourde pénalité.

L'approche de la programmation dynamique repose sur l'idée suivante :

Un chemin ne peut être optimal que si chacune des sous composantes de ce chemin est elle même optimale.

Considérons par exemple un chemin optimal entre A et B (représenté sur la figure 2.2 par une ligne quelconque).

Prenons deux points intermédiaires C et D le long de ce chemin.



- fig 2.2 -

La partie CD du chemin AB constitue un chemin optimal de C à D.

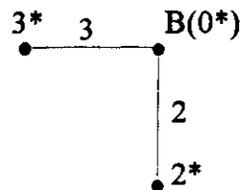
En effet, s'il existait un chemin plus court entre C et D (tel que le chemin représenté en pointillé sur la figure 2.2).

Le chemin AC + CD (pointillé) + DB serait plus court que le chemin initial entre A et B; ce qui est impossible puisqu'on a supposé que ce chemin est le plus court. Par conséquent, chaque sous chemin du chemin AB est lui même un chemin optimal entre l'origine et l'extrémité considérées. Etant donné qu'il est plus facile de trouver le chemin optimal pour un "petit" problème que pour un "grand" problème, nous allons commencer par chercher le plus court chemin pour un sous problème du problème initial.

Nous avons indiqué que la démarche de la programmation dynamique consiste à étudier d'abord les sous problèmes qui se situent chronologiquement les derniers.

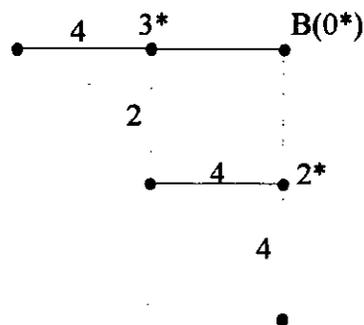
Dans le cas présent, le premier sous-problème est trivial : quel est le temps minimum pour aller de B à B? la réponse est évidemment zéro et on ne peut pas faire mieux !

Reculons maintenant d'un bloc. Quel est le temps de parcours minimum jusqu'à B? cela dépend du coin où l'on se trouve.



Si l'on se trouve au coin situé à gauche de B, le temps de parcours minimum est 3, ce que l'on indique en mettant 3^* au dessus de ce carrefour (l'étoile signale qu'il s'agit du temps minimum entre ce carrefour et B). De même si l'on se trouve au coin situé en dessous de B, le temps de parcours minimum est 2.

Nous avons résolu le deuxième sous problème : Lorsque O se trouve à un bloc de B, nous connaissons le temps minimum pour se rendre en B. Reculons à nouveau d'un bloc. Nous avons la situation suivante:

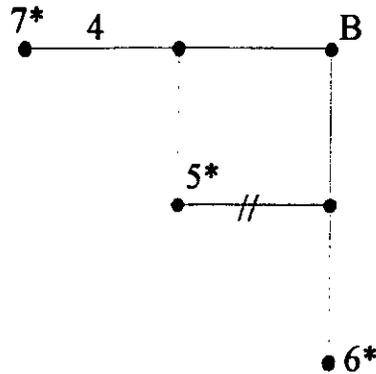


On peut se trouver dans l'un des trois carrefours possibles.

Commençant en haut et à gauche, le temps de parcours le long du chemin unique est $4 + 3^* = 7^*$.

De même, en bas et à droite $4 + 2^* = 6^*$. Le carrefour du milieu présente un choix :

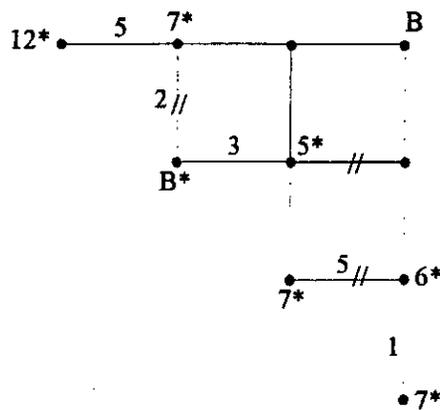
Nous pouvons nous déplacer vers le haut et à droite pour un temps de parcours de $2 + 3^* = 5$, ou vers la droite et en haut pour un temps de parcours de $4 + 2^* = 6$. La première altérative est évidemment la meilleure. Nous avons donc résolu le troisième sous problème.



Rappelons que nous ne considérons pas les chemins qui ne se dirigent pas régulièrement vers B (comme par exemple un chemin qui traverserait un bloc vers la gauche ou vers le bas).

La barre sur le bloc à droite du 5* indique qu'il n'est jamais optimal de traverser ce bloc.

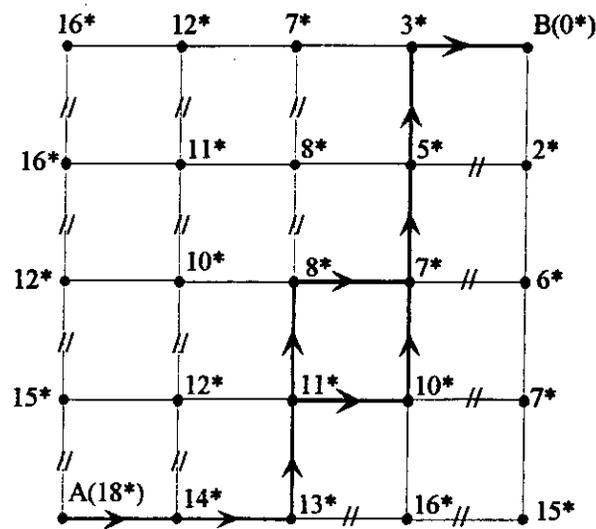
Nous construisons maintenant le quatrième sous problème en ajoutant un bloc supplémentaire à parcourir.



On peut se trouver à l'un des quatre carrefours possibles. Commenant en haut et à gauche, le temps de parcours le long du chemin unique est $5 + 7^* = 12^*$. Pour le carrefour suivant nous avons le choix entre $2 + 7^* = 9$ et $3 + 5^* = 8$; nous choisissons donc le chemin de longueur 8^* . De même pour le carrefour suivant nous avons $7^* = \text{minimum} \{2 + 5^*, 5 + 6^*\}$. En fin pour le dernier carrefour $7^* = 1 + 6^*$. N'oublions pas de barrer le premier bloc du chemin rejeté dans chacun des deux cas où un choix se présente.

En continuant de façon identique, nous arriverons au neuvième sous-problème. On ne peut alors se trouver qu'au carrefour A.

La figure 2.3 indique le temps de parcours minimum à partir de chaque carrefour pour se rendre en B. On remarquera, en particulier, que le temps minimum de parcours entre A et B est de 18 minutes.



- Fig 2.3 -

Nous avons maintenant terminé l'analyse des sous-problème du problème initial et nous avons obtenu le temps de parcours minimum. Il nous faut maintenant aider 0 à retracer le (ou les) chemin (s) optimal (optimaux). La démarche de la programmation dynamique consiste, une fois l'analyse des sous-problèmes terminée, à revenir en arrière à partir des sous-problèmes qui sont chronologiquement les premiers.

Nous allons donc partir de A et traverser les arcs non barrés.

On voit sur la figure 2.3 que l'on obtient deux chemins optimaux (renforcés) puisque le quatrième bloc à parcourir peut être choisi indifféremment de deux façons.

L'exemple de l'histoire d'O, malgré ses dimensions modestes, va nous permettre de réaliser l'importance de la réduction du nombre d'opérations nécessaires pour déterminer le temps de parcours minimal.

Supposons, en effet, que l'on dispose de la liste des 70 chemins possibles entre A et B. A fin de trouver le plus court chemin, il faut calculer la longueur de chacun d'entre eux (7 additions par chemin, soit un total de 490 additions) et comparer ces 70 nombres afin de choisir le plus petit (69 comparaisons).

Si au contraire, nous utilisons l'approche illustrée ci-dessus, on voit, par exemple, que pour le quatrième sous-problème il est nécessaire de faire six additions et deux comparaisons. Le lecteur peut vérifier que, pour l'ensemble des neuf sous-problèmes, il faut effectuer 40 additions et 16 comparaisons, la comparaison du nombre de calculs nécessaires à la *programmation dynamique* (40 additions, 16 comparaisons) par rapport à l'énumération directe (490 additions, 69 comparaisons) illustre l'efficacité de l'approche dynamique pour des problèmes de ce types.

1 Exemple d'un pont à poutre sous chaussées:

Flexion à l'E.L.S en classe III:

Nous nous proposons de dimensionner les poutres d'un pont de $41,5 m$ de portée à poutres sous chaussée et dont le profil en travers est indiqué sur la figure B.1.

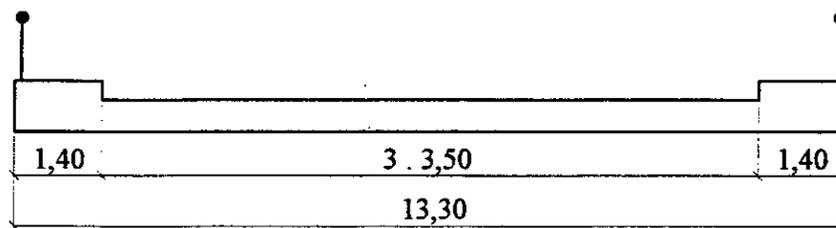


Fig. B.1 : Section transversale du tablier.

1.1 Données:

1.1.1 Béton:

$$f_{c\ 28} = 30 \text{ MPa.}$$

$$f_{t\ 28} = 2,4 \text{ MPa.}$$

1.1.2 Acier de précontrainte:

Câbles à bases de Torons T 15:

- Limite élastique : $f_{peg} = 1623 \text{ MPa.}$
- Limite de rupture : $f_{prg} = 1814 \text{ MPa.}$
- Relaxation : $\rho_{1000} = 2,5.$
- Section pour 1 T15 = $139 \text{ mm}^2.$
- Diamètre gaine de 9 à 12 T15 : $\phi_g = 79 \text{ mm.}$
- 5 à 7 T15 : $\phi_g = 71 \text{ mm.}$
- 8 T15 : $\phi_g = 76 \text{ mm.}$

1.1.3 Charges:

En dehors du poids mort des poutres et du hourdis on prendra en compte:

- Les superstructures du tablier: 31 KN/m pour l'ensemble.
- Les charges routières d'exploitation : $8,85 \text{ KN/m}^2.$

Les poutres sont mises en place par levage et / ou ripage. Puis le complément de hourdis et d'entretoise est coulé pour assurer une continuité transversale à l'ensemble et augmenter son inertie.

On met alors, après durcissement de ce béton de deuxième phase, une deuxième famille de câble, ancrés à l'extrados du tablier par suite du manque de place en extrémité des poutres. On procède en suite à la réalisation des superstructures trottoirs, chaussées, garde corps.

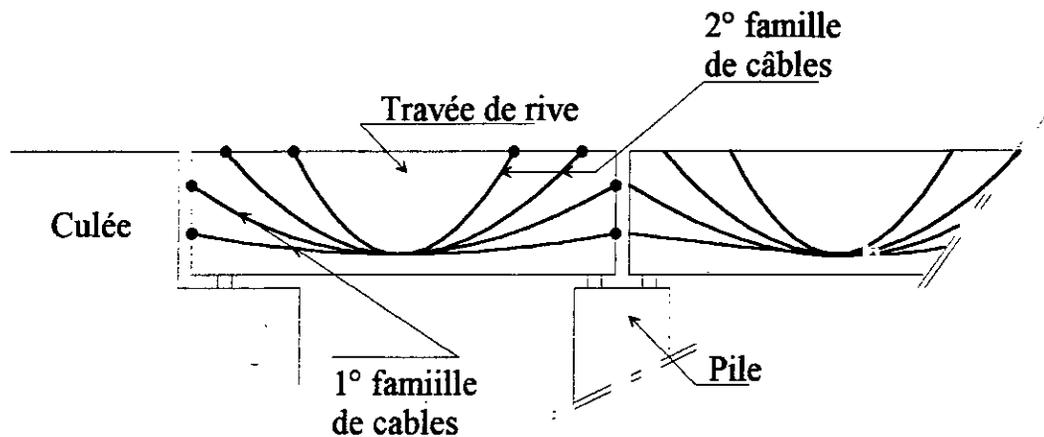


Fig. B.3 : Cablage.

1.4 Nombre de poutres:

- Pour ce type d'ouvrage, la hauteur de la poutre est de l'ordre de $1/15$ à $1/18$ de la portée c'est-à-dire $1/18 \cdot L \leq h \leq 1/15 \cdot 15 L$ où L est la longueur d'une travée indépendante, nous prendrons $h = 2,50$ m soit $1/16,6 \cdot L$.

- L'espacement entre axe des poutres est de l'ordre de 2,5 m à 3,5 m en fonction de l'épaisseur du hourdis, nous prendrons 3,0 m.

- La largeur de la table supérieure de la poutre préfabriquée est de l'ordre de 0,5 à 0,7 h soit la valeur 1,30 m à retenir cette largeur intervient:

- Dans le poids de l'élément préfabriqué avec les problèmes de manutention que cela pose.
- Dans la résistance à la mise en tension des câbles de la première famille.
- Dans la résistance au déversement de la poutre préfabriqué, spécialement lors de sa manutention. Les amorces d'entretoises jouent un rôle de raidisseurs.
- Dans la possibilité d'éviter d'avoir à couler un complément de hourdis à l'extérieur des poutres de rive, dans les conditions difficiles de porte-à-faux.

En effet avec un nombre de 4, on aura un débord de 2,15 m, supérieur à la moitié de l'entre axe.

Tandis qu'avec 5 poutres figure B.4 le débord de rive est de $(13,3 - 4 \times 3) / 2 = 0,65$ m, ce qui correspond à une largeur de poutre préfabriquée de 1,3 m, valeur déjà choisie par ailleurs on évitera ainsi un bétonnage extérieur en porte à faux figure B.5.

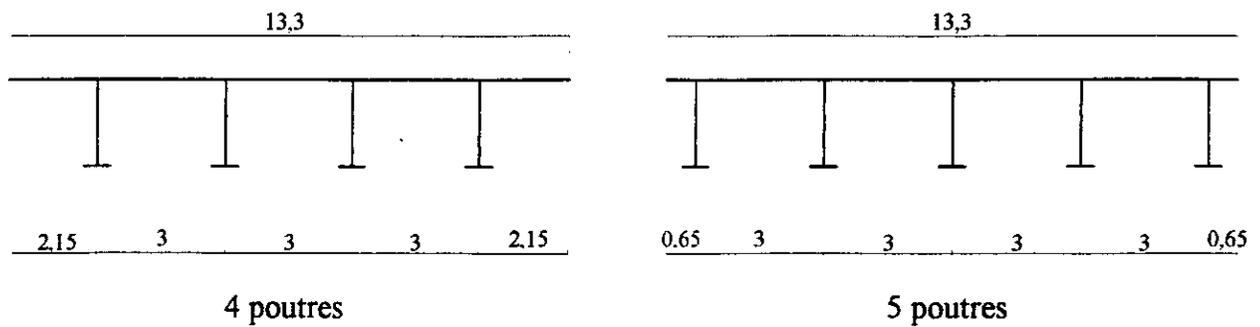


Fig. B.4 : Choix du nombre de poutres.

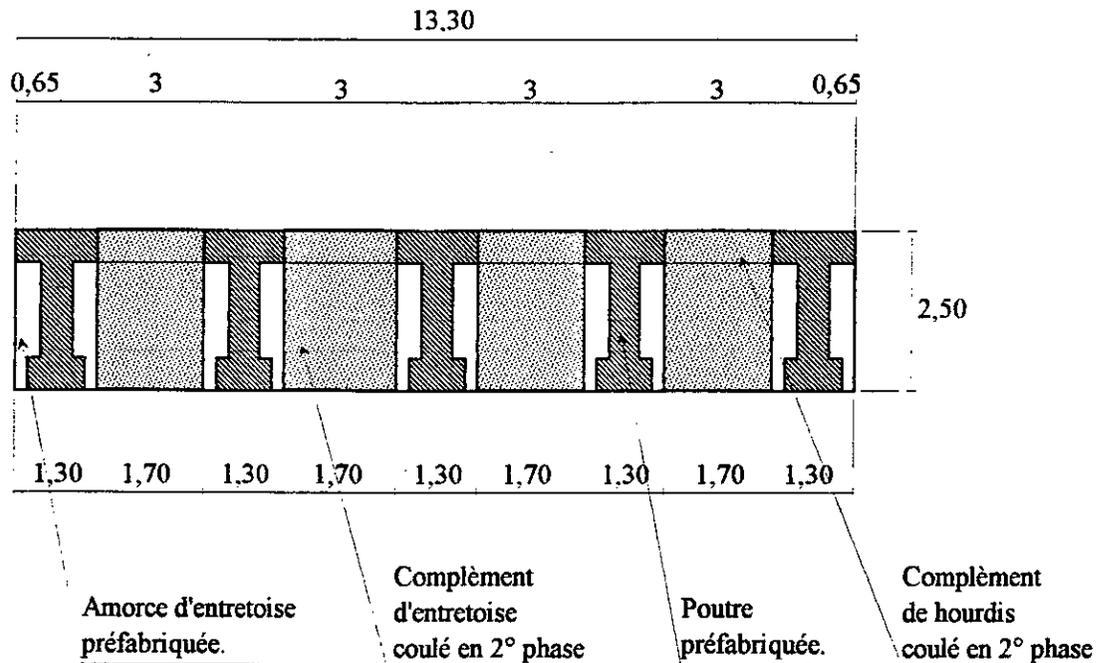


Fig. B.5 : Coupe transversale du tablier.

1.5 Géométrie des poutres préfabriquées:

1.5.1 Epaisseur de l'âme:

L'épaisseur de l'âme dépend en général:

- De la résistance à l'effort tranchant.
- Des conditions d'enrobage des câbles.

En béton précontraint, c'est souvent cette deuxième condition qui prévaut.

Si l'on suppose que l'on utilisera des câbles 8 T15 au moins de diamètre maximum 76 mm.

Etant donné que la dimension maximum des granulats C_g étant de 25 mm, on réservera $1,5C_g = 1,5 \cdot 25 \approx 38$ mm minimum entre les aciers pour permettre un bétonnage correct.

Le diamètre des aciers longitudinaux de peau est supposé égal à 10 mm.

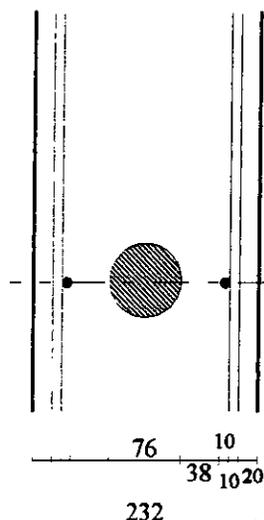


Fig. B.6 : Disposition du câble et des aciers dans l'âme.

On retiendra par conséquent $b_0 = 0,24$ m en section médiane. La vibration devra être extérieure (coffrages vibrants) vu qu'on n'a pas prévu de cheminée de vibration.

1.5.2 Epaisseur du hourdis coulé en place en deuxième phase:

Les valeurs courantes de l'épaisseur du hourdis en fonction de la distance l_1 entre axe des poutres sont données dans le tableau suivant:

l_1 : m	2,50	3,00	3,50	3,75	4,00
h_0 : cm	17	18	20	21	22

Nous retiendrons pour $l_1 = 3$ m une épaisseur $h_0 = 0,18$ m.

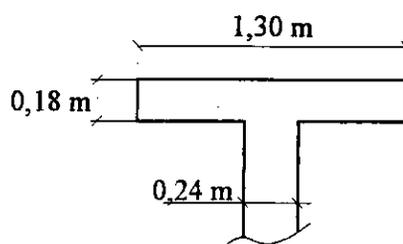


Fig. B.7 : Dimensions de la table.

Remarque: On admettra que la vibration est parfaite et que la disposition de la matière est homogène.

1.5.3 Talon de la poutre:

Le rôle du talon de la poutre est:

- De contenir les câbles en partie inférieure de la poutre en respectant les conditions d'enrobage.

- De résister à la compression due au moment minimum.

Cette dernière condition s'écrit en section sous-critique ou sur-critique :

$$\frac{I}{V'} \geq \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}_i}$$

Les charges routières d'exploitation valent : $q = 8,85 \text{ KN/m}^2 \cdot 3 \text{ m} = 26,55 \text{ KN/ml}$.

q : Charge d'exploitation répartie par mètre linéaire

Avec : $\Delta M = q \frac{L^2}{8} = 26,55 \times (41,5)^2 / 8 \times 10^{-3} \text{ MN.m}$.

Soit : $\Delta M = 5,716 \text{ MN.m}$.

Or les charges routières doivent être majorées de 20% et nous devons appliquer un coefficient majorateur pour tenir compte de la répartition transversale des charges que nous prendrons égale à 1,05 à priori.

D'où :

$$\Delta M = 5,716 \cdot 1,2 \cdot 1,05 = 7,202 \text{ MN.m}$$

et

$$\Delta \bar{\sigma}_i = 15 - (-2,4) = 17,4 \text{ MN/m}^2 = 17,4 \text{ MPa}$$

D'où :

$$\frac{I}{V'} \geq \frac{7,202}{17,4} = 0,414 \text{ m}^3$$

La poutre définitive est schématisée sur la figure B.8. En se fixant une hauteur de talon de 0,3 m, soit environ $4 \phi_g = 4 \times 7,6 \text{ cm} = 30,4 \text{ cm}$ pour loger deux câbles superposés.

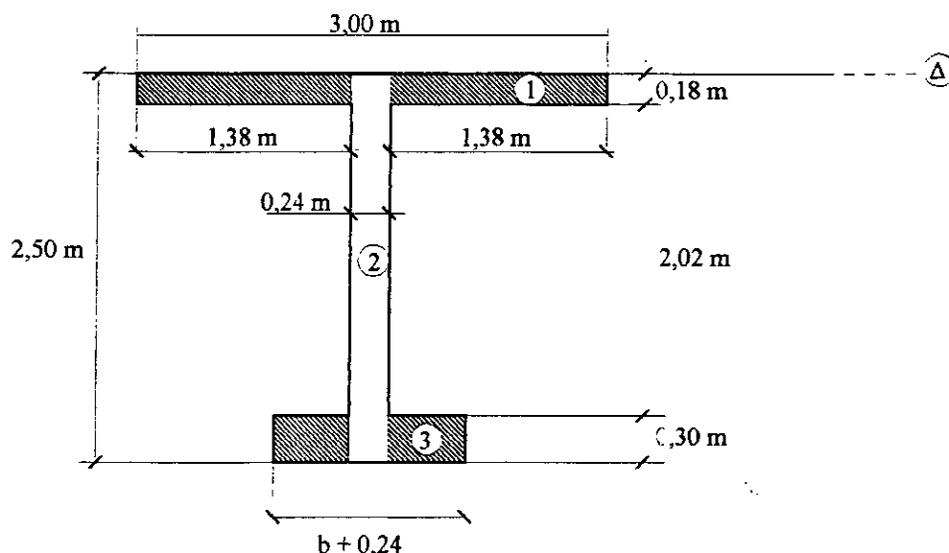


Fig. B.8 : Décomposition de la section en rectangles.

Les caractéristiques géométriques de la section sont calculées dans le tableau B.1.

Tableau B.1

Section N° :	b × h	Aire	Distance de G à l'axe Δ	Moment statique /Δ	$\frac{2}{3}$ h ou d	Inertie /Δ	Inertie propre
1	2,76×0,18	0,4968	× 0,09	= 0,04471	×2/3×0,18	=0,005365	—
2	0,24×2,5	0,6000	× 1,25	0,75000	×2/3× 2,5	1,2500	—
3	b×0,3	0,3×b	× 2,35	0,705 b	× 2,35	1,65675 b	0,00225 b
Total	S =	1,0968 +0,3 b	μ =	0,79471 +0,705 b		1,255365 +1,659 b	

D'où :

$$V = \frac{\mu}{S} = \frac{0,79471 + 0,705b}{1,0968 + 0,3b}$$

Et :

$$V' = h - v = \frac{1,94729 + 0,0450b}{1,0968 + 0,3b}$$

$$I = I_{/\Delta} - s \cdot v^2 = \frac{SI_{/\Delta} - \mu^2}{S} = \frac{0,74532 + 1,07566b}{1,0968 + 0,3b}$$

D'où :

$$\frac{I}{V'} = \frac{0,74532 + 1,07566b}{1,9473 + 0,045b} = 0,414 \text{ m}^3$$

D'où l'inconnue : $b = 0,060858 / 1,05703 = 0,058 \text{ m}$.

Or, nous devons loger les câbles à l'intérieur du talon dans la partie médiane de la poutre (mi-portée). Avec quatre câbles par lit, nous aurons besoin d'une largeur totale de :

$$9 \phi_g = 9 \times 7,6 \text{ cm} = 68,4 \text{ cm}.$$

Nous prendrons donc $b = 0,70 \text{ m}$.

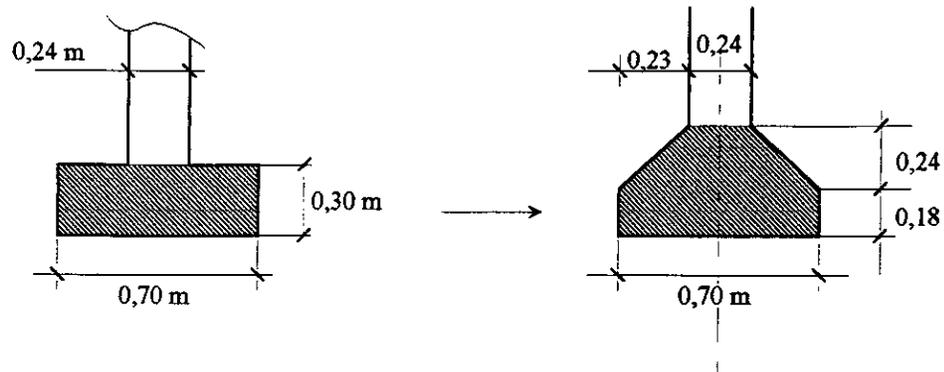


Fig. B.9 : Géométrie du talon.

1.5.4 Entretoises:

Les entretoises sont destinées à empêcher le déversement du talon de la poutre lorsqu'il est comprimé et à répartir les charges concentrées subies par une poutre sur les autres poutres.

Nous disposerons les entretoises à mi-travée sur appuis et au 1/4 de travée, leur épaisseur sera déterminée principalement par des considérations de bétonnage. Si elles sont précontraintes avec des câbles dont le diamètre de la gaine est de 53 mm l'épaisseur est déterminée sur figure B.10.

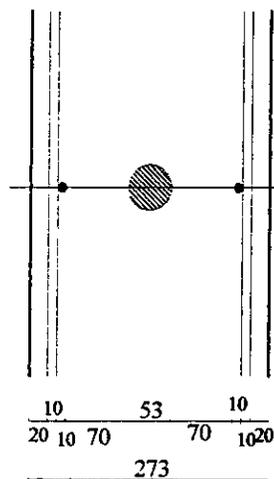


Fig. B.10 : Disposition des armatures dans l'entretoise.

Soit 28,0 cm.

1.6 Détermination de la précontrainte:

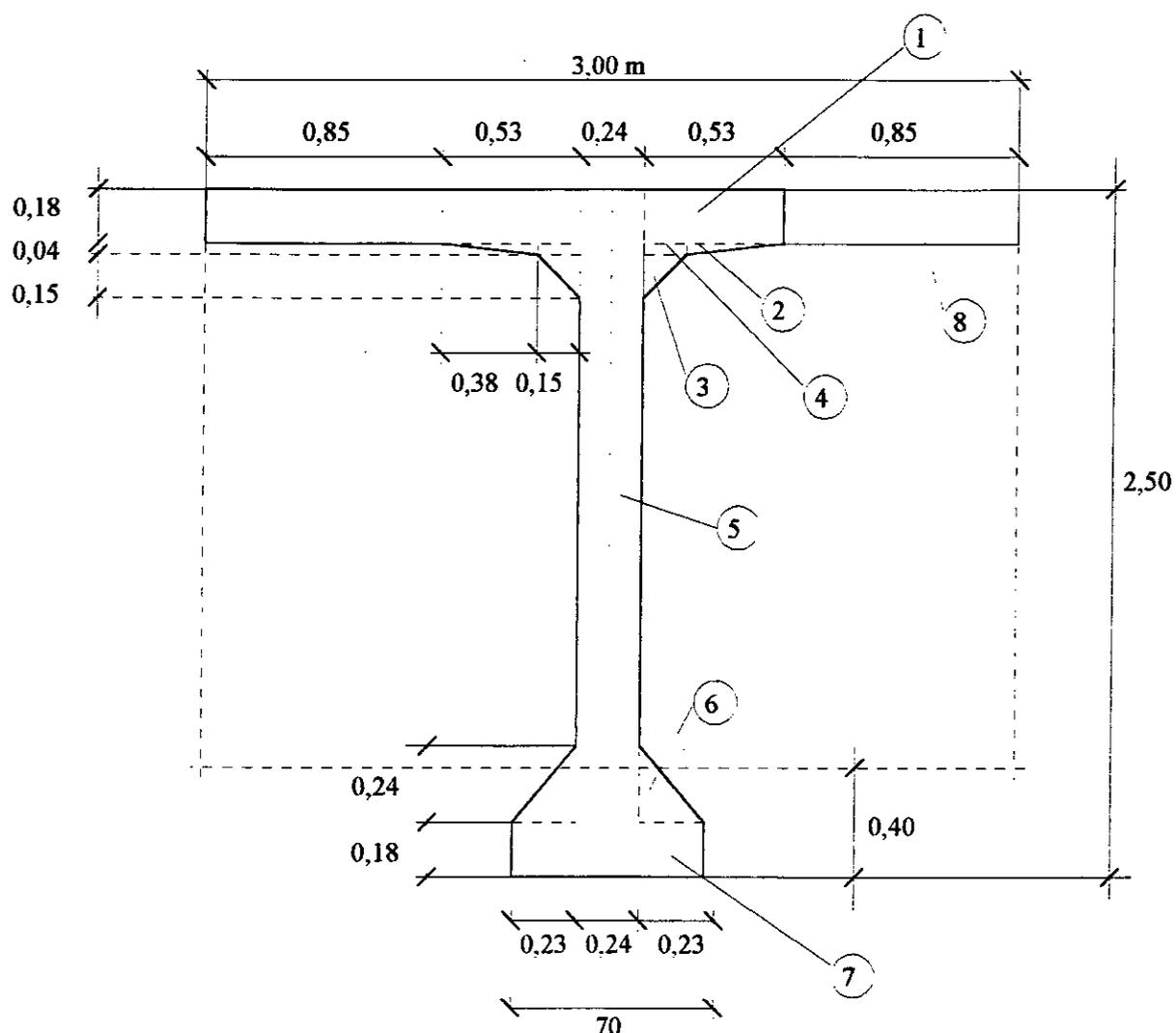


Fig. B.11 : Section transversale d'une poutre.

Tableau B.2

Section N° :	b × h	Section m ²	Distance de G à Δ = d	Moment statique μ	S.d ² = I _{Δ1}	Inertie propre I ₀	I _Δ = I _{Δ1} + I ₀
1	1,06 × 0,18	0,1908	0,09	0,017172	0,001545	0,000515	0,0020600
2	0,76/2×0,04	0,0152	0,19333	0,002939	0,000568	0,0000014	0,0005694
3	0,30/2×0,15	0,0225	0,27	0,006075	0,0016403	0,0000281	0,0016684
4	0,30 × 0,04	0,0120	0,200	0,00240	0,000480	0,0000016	0,0004816
5	0,24 × 0,04	0,6000	1,250	0,7500	0,937500	0,3125000	1,250000
6	0,46/2×0,24	0,0552	2,240	0,123648	0,2769715	0,0001766	0,2771481
7	0,46 × 0,18	0,0828	2,410	0,199548	0,4809107	0,0002236	0,4811343
Poutre préfabriquée		0,9785	-	1,101782	-	-	2,013062
8	1,70 × 0,18	0,306	0,09	0,02754	0,0024786	0,0008262	0,0033048
Section complète		1,2845	-	1,129322	-	-	2,016367

Tableau B.3

	Unités	Poutre préfabriquée	Section complète
Section S	m ²	0,9785	1,2845
c.d.g = $\mu/S = v$	m	1,1260	0,8792
$v' = h - v$	m	1,3740	1,6208
$I = I_{\Delta} - S.v^2$	m ⁴	0,77245	1,02346
I/v	m ³	0,6860	1,1641
I/v'	m ³	0,5622	0,6315
ρ	-	0,5103	0,5591

1.6.1 Actions:

Poids propre:

- Poutre seule : $0,9785 \times 25 \cdot 10^{-3} = 0,02446 \text{ MN/m}$.
 - Hourdis deuxième phase : $0,306 \times 25 \cdot 10^{-3} = 0,00765 \text{ MN/m}$.
 - Amorce entretoise (préfabriquée) :

$$= (2,10 \times 0,53 \times 2 - 0,1908 - 0,0152 - 0,0225 - 0,012) \times 25 \cdot 10^{-3} \times 0,28$$

$$= 0,013897 \text{ MN}$$
 - Complément entretoise (csp) = $(2,1 - 0,18) \times 0,85 \times 0,28 \times 25 \cdot 10^{-3} \times 2$

$$= 0,02283 \text{ MN}$$
 - Superstructures : 31 KN/m pour cinq poutres soit : 6,2 KN/m par poutre.
 - Charges d'exploitation : $8,85 \text{ KN/m}^2 \times 3 \text{ m}$ soit : 26,55 KN/m par poutre.
- CSP : Coulé sur place.

1.6.2 Moments de calcul en E.L.S:

- Poutre préfabriquée sans entretoise :

$$M_{g1} = g_1 \times \frac{L^2}{8} = 0,02446 \times (41,5)^2 / 8 = 5,266 \text{ MN.m}$$

- Amorces des entretoises : Figure B.12

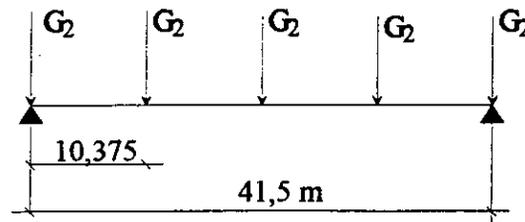


Fig. B.12 : Position des entretoises.

$$M_{g_2} = 10,375 G_2 \times (41,5)^2 / 4 G_2 = 20,75 \times 0,0139 \\ = 0,288 \text{ MN.m.}$$

- Complément du hourdis :

$$M_{g_3} = 0,00765 \times (41,5)^2 / 8 = 1,647 \text{ MN.m.}$$

- Complément des entretoises :

$$M_{g_4} = 20,75 \times 0,02283 = 0,474 \text{ MN.m.}$$

- Super structures:

$$M_S = S \times \frac{L^2}{8} = 6,2 \times ((41,5)^2 / 8) \cdot 10^{-3} = 1,335 \text{ MN.m.}$$

- Charges d'exploitation avec : $1,2 \cdot 26,55 \text{ Mn/m} = 31,86 \text{ Mn/m.}$

$$M_q = q \times \frac{L^2}{8} = 31,86 \times ((41,5)^2 / 8) \cdot 10^{-3} = 6,859 \text{ MN.m.}$$

1.6.3 Contrainte initiale des câbles:

Les pertes instantanées lors de la mise en tension sont de l'ordre de 10%.

Avec :

$$\sigma_0 = \text{Min} [0,80.F_{prg} ; 0,90.F_{peg}]$$

$$\sigma_0 = \text{Min} [0,80 \times 1814 ; 0,90 \times 1623] = 1451 \text{ MPa.}$$

D'où : $\sigma_i = 0,9 \cdot 1451 = 1306 \text{ MPa.}$

1.6.4 Excentricité:

Nous supposons, compte tenu de la portée et du rapport (charges permanentes / charges variables) élevé, que la section est sur-critique, l'excentricité vaudra donc :

- Première famille de câbles (figure B.13)

$$e_0 = -(1,3748 - 0,114)$$

$$= -1,260 \text{ m.}$$

- Deuxième famille de câbles (figure B.14)

$$e_0 = -(1,6208 - 0,152)$$

$$= -1,469 \text{ m.}$$

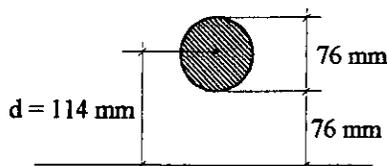


Fig. B.13 : Position d'un câble.

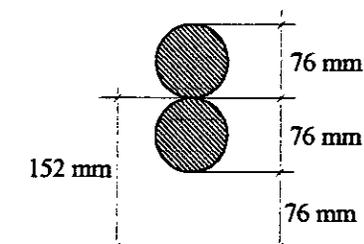


Fig. B.14 : Position de deux câbles.

1.6.5 Nombre de câbles de la première famille :

Pour la première famille, les deux phases les plus défavorables sont:

- Leur mise en tension.

- Juste avant la mise en tension de la deuxième famille et après bétonnage du hourdis et des entretoises complémentaires le calendrier des opérations est supposé le suivant :

Phase	a	b	c	d	e
Date	t_a	t_b	t_c	t_d	$t_e = \infty$
Poutre Préfabriquée	Coulage du béton de 1 ^{er} phase	Mise en tension des câbles de la 1 ^{er} famille			
	Précontrainte = Résistance =	$P_0 = 1,1 \cdot P_i$ (1) $P_i = 1,2 \cdot P_A$ $f_{cjb} = 20 \text{ MPa}$	- -	$1,1 \cdot P_A$ $f_{cj} = 25 \text{ MPa}$	P_A $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$
Béton coulé en place	-	-	Coulage du béton de deuxième phase	Mise en tension des câbles de la 2 ^{ème} famille	
	Précontrainte = Résistance =	- -	- -	$P_0 = 1,1 \cdot P_i$ $P_i = 1,15 \cdot P_B$ $f_{cj} = 20 \text{ MPa}$	P_B $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$

$$(1) \quad p_0 = \text{précontrainte à l'ancrage avant pertes} = A_p \cdot \sigma_{p0}$$

$$\text{Avec : } \sigma_{p0} = \text{Min} [0,80 f_{prg} ; 0,9 f_{peg}] = \text{Min} [0,80 \times 1814 ; 0,9 \times 1623] = 1451 \text{ MPa.}$$

p_i = précontrainte initiale après pertes instantanées et avant pertes différées.

P_A ou P_B = précontrainte finale des 1^{er} et 2^{ème} familles de câbles.

Les pertes instantanées et différées ont été estimées en fraction de P_A , P_B .

• A la mise en tension de la première famille (phase b), les contraintes devront satisfaire les conditions de contraintes admissibles figure B.15.

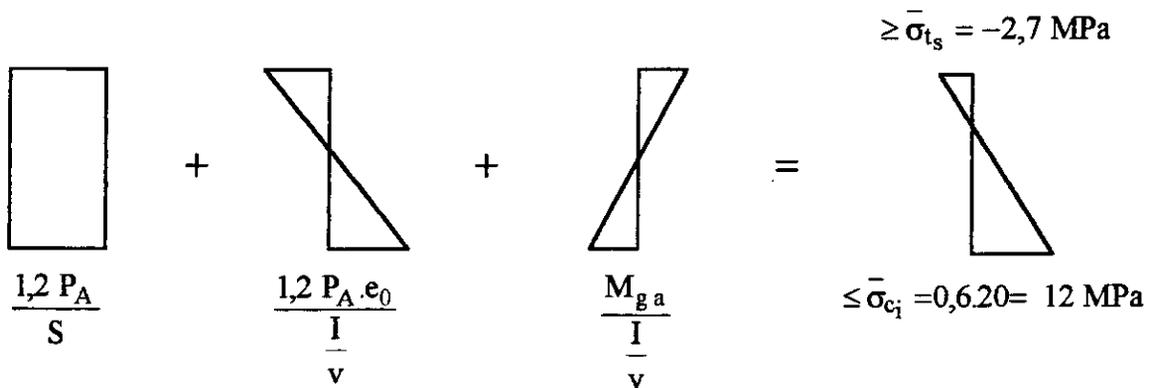


Fig. B.15 : Contraintes admissibles.

Avec :

M_{ga} correspondant au poids propre de la poutre seule et des amorces des entretoises.

$$M_{ga} = M_{g1} + M_{g2} = 5,266 + 0,288 = 5,554 \text{ MN.m.}$$

D'où :

$$\frac{1,2 \cdot P_A}{0,9785} - \frac{1,2 \cdot P_A \times 1,260}{0,6860} + \frac{5,554}{0,6860} \geq -2,70 \rightarrow \boxed{P_A \leq 11,03 \text{ MN}}$$

$$\text{Et : } \frac{1,2 \cdot P_A}{0,9785} + \frac{1,2 \cdot P_A \times 1,260}{0,5622} - \frac{5,554}{0,5622} \leq 12 \rightarrow P_A \leq 5,58 \text{ MN}$$

$$\text{D'où : } P_A \leq 5,58 \text{ MN}$$

• Avant la mise en tension de la deuxième famille et après bétonnage de deuxième phase (phase d^{*}).

Les caractéristiques mécaniques sont les mêmes que précédemment et le moment vaut:

$$M_{gd} = M_{ga} + 1,647 + 0,474 = 7,675 \text{ MN.m.}$$

Le diagramme des contraintes à vérifier est celui de la figure B.16.

1.6.6 Contrainte dans le béton en phase d⁻:

Après coulage du béton de 2^{ème} phase et avant mise en tension des câbles de la 2^{ème} famille, les contraintes sont alors données dans le diagramme de la figure B.17, avec:

$$P = 1,1 P_A = 4,71 \text{ MN.}$$

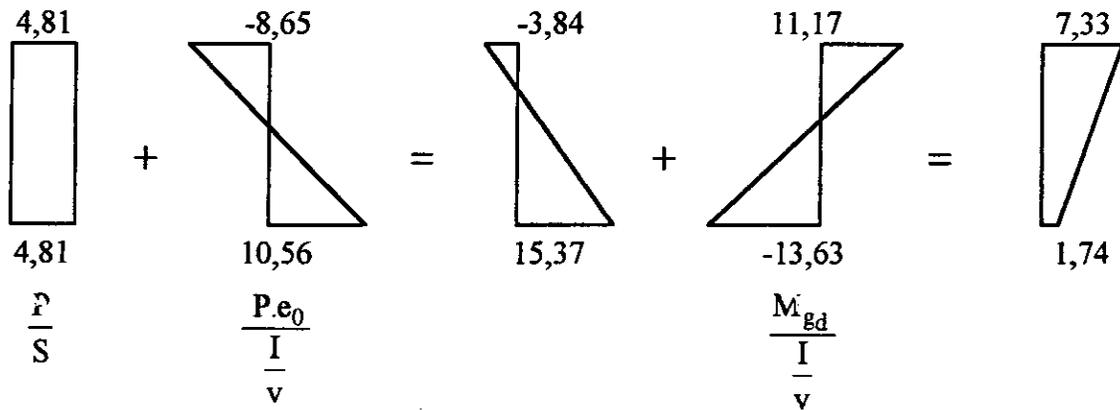


Fig. B.17 : Diagramme des contraintes.

1.6.7 Précontrainte de la deuxième famille de câble:

En phase finale on devra satisfaire les conditions de contraintes admissibles de la figure B.18 (phase e) en combinaisons rares, on ajoutera au diagramme phase d⁻ précédent, les contraintes dues aux pertes 0,1 P_A entre phase d et e de la première famille de câbles.

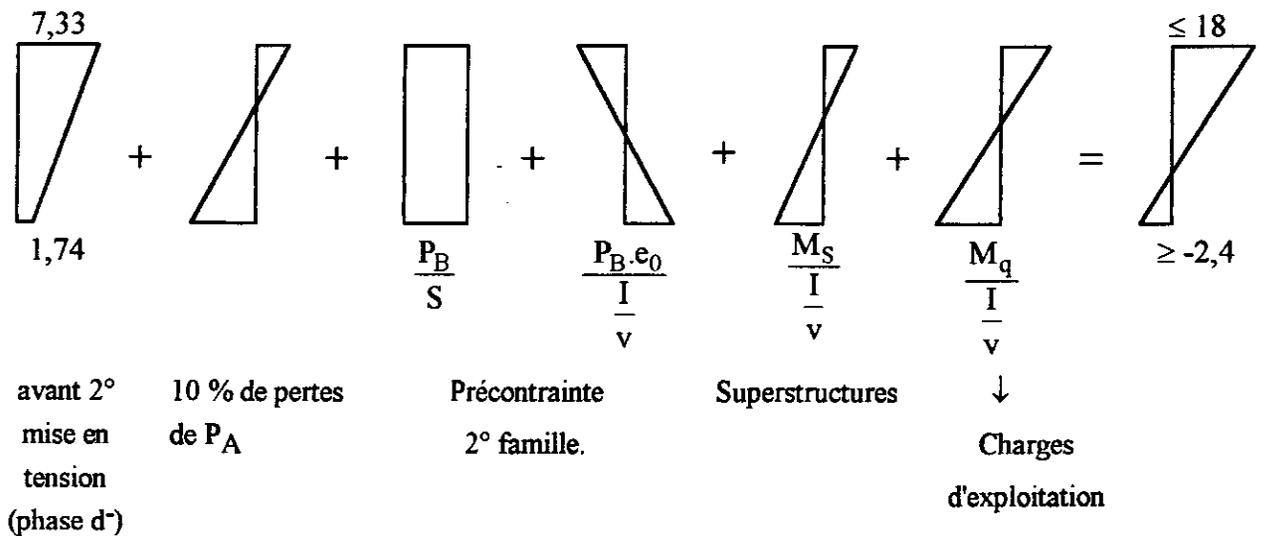


Fig. B.18 : Diagramme des contraintes.

$$(\bar{\sigma}_{cs} = 0,6 \cdot 25 = 15 \text{ MPa})$$

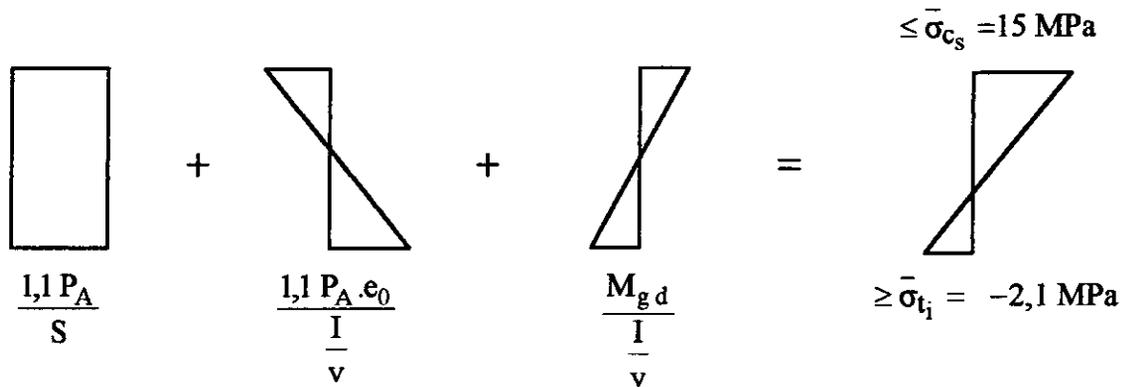


Fig. B.16 : Contraintes admissibles.

Remarque:

La section de béton n'est pas la même en construction et en phase définitive.

D'où:

$$\frac{1,1 P_A}{0,9785} - \frac{1,1 P_A \times 1,260}{0,6860} + \frac{7,675}{0,6860} \leq 15 \quad \rightarrow \quad P_A \geq -4,26 \text{ MN}$$

$$\text{Et: } \frac{1,1 P_A}{0,9785} + \frac{1,1 P_A \times 1,260}{0,5622} - \frac{7,675}{0,5622} \geq -2,1 \quad \rightarrow \quad P_A \geq 3,21 \text{ MN}$$

Soit: $P_A \geq 3,21 \text{ MN}$.

On devra alors avoir:

$$3,21 \text{ MN} \leq P_A \leq 5,58 \text{ MN}.$$

La précontrainte à l'ancrage vaut: $P_0 = 1,1 \times 1,2 P_A$.

$$\text{Donc: } 4,24 \leq P_0 = A P_1 \times \sigma P_0 \leq 7,36 \text{ MN}.$$

Or comme : $\sigma_{p0} = 1451 \text{ MPa}$, on trouve $2922 \text{ mm}^2 \leq A_{p1} \leq 5072 \text{ mm}^2$.

Où M_1 torons T15 de 139 mm^2 : $21 \leq M_1 \leq 36$.

Nous prendrons quatre câbles 7 T15 pour la 1^{er} famille.

D'où:

$$P_A = 4 \times 7 \times 139 \times 10^{-6} \times 1451 / (1,10 \times 1,2) = 4,28 \text{ MN}.$$

Soit : $P_A = 4,28 \text{ MN}$.

$0,1 P_A \left(\frac{1}{S} \pm \frac{e_0 V}{I} \right)$ sur la section $(S, I/V, I/V)$ totale.

Soit avec 10% de $P_A = 0,428$ MN, en section complète de béton.

$$7,33 + (-0,428 + P_B) \times \left(\frac{1}{S} \pm \frac{e_0}{I/V} \right) + \frac{M_s}{I/V} + \frac{M_a}{I/V} \leq 18$$

$$7,33 + (-0,428 + P_B) \times \left(\frac{1}{1,2845} - \frac{1,469}{1,1641} \right) + \frac{1,335}{1,1641} + \frac{6,859}{1,1641} \leq 18$$

Soit : $P_B \geq -7,125$ MN

Et : $1,74 + (-0,428 + P_B) \times \left(\frac{1}{1,2845} + \frac{1,469}{0,6315} \right) - \frac{1,335}{0,6315} - \frac{6,859}{0,6315} \geq -2,4$

Soit : $P_B \geq 3,26$ MN

Soit finalement : $P_B \geq 3,26$ MN

D'où P_0 à l'ancrage avant pertes:

$$P_0 = 1,15 \times 1,1 \times P_B \geq 4,124 \text{ MN.}$$

$$A_{P_2} = \frac{P_0}{\sigma_{P_0}} = \frac{4,125 \times 10^6}{1451} = 2842 \text{ mm}^2$$

Soit : $n_2 \geq \frac{2842}{139} = 20,5$ torons

Nous retiendrons 2 câbles de 5 T15 + 2 câbles de 6 T15.

Remarque:

Le même nombre que la première famille pour les grouper par paquets de deux câbles verticalement.

D'où : $A_{P_2} = 22 \times 139 = 3058 \text{ mm}^2$

$$P_0 = 1451 \times 3058 \cdot 10^{-6} = 4,437 \text{ MN.}$$

Soit : $P_B = \frac{P_0}{1,1 \times 1,15} = 3,51 \text{ MN}$ $P_B = 3,51 \text{ MN.}$

Et le diagramme des contraintes finales figure B.19.

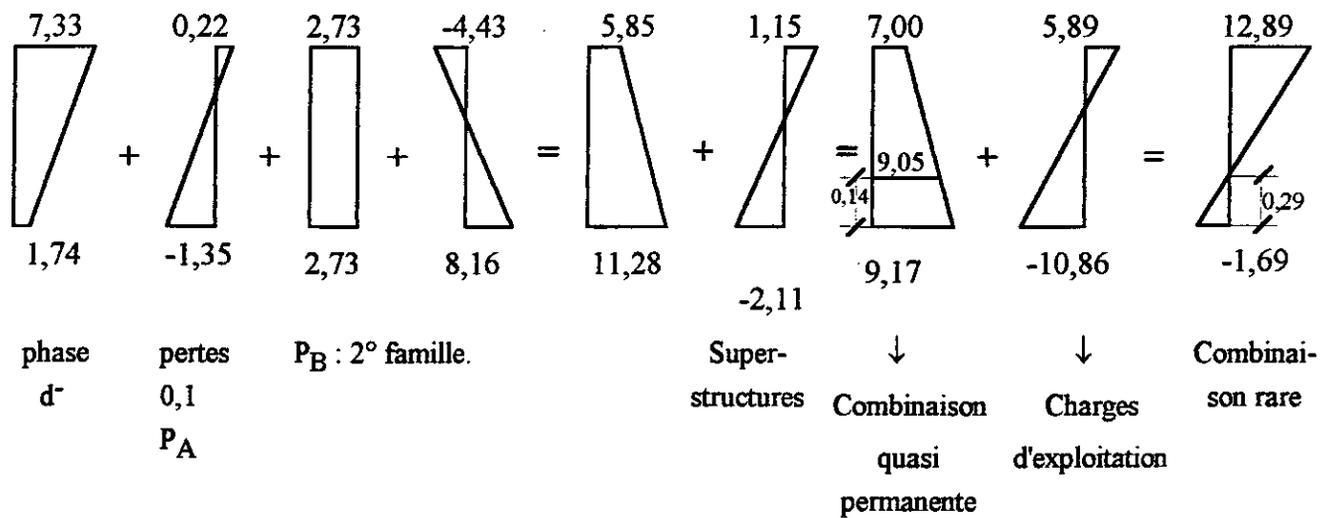


Fig. B.19 : Diagramme des contraintes.

On constate:

- Une contrainte presque constante sur la section sous charges quasi-permanentes (a vide), nous serons ainsi assurés d'avoir très peu de déformations à vide.

- Une contrainte en fibre supérieure de 12,89 MPa inférieure à la contrainte admissible de 18 MPa.

- Une faible traction sous combinaisons rares en fibre inférieure dans la zone d'enrobage

-1,69 < -2,4 MPa = $\bar{\sigma}_{ti}$ qui nécessite des armatures de traction A_s telles que:

$$A_s \geq \frac{B_t}{1000} + \frac{N_{bt}}{f_e} \cdot \frac{f_{tj}}{\sigma_{Bt}}$$

Avec: B_t = 0,197 m² (figures B.19 et B.20)

N_{bt} = 0,178 MN.

f_{tj} = 2,4 MPa.

$$\text{D'où: } A_s = \left(\frac{0,197}{1000} + \frac{0,178}{400} \times \frac{2,4}{1,69} \right) \times 10^4$$

Finalement A_s = 8,29 cm² soit 5 HA16.

1.6.8 Dispositions des câbles dans le talon à mi-portée: figure B.20

Pour pouvoir loger la deuxième famille de câbles avec un enrobage suffisant en partie supérieure du talon, nous devons modifier légèrement les dimensions du talon, ce qui ne change pratiquement rien aux résultats précédents.

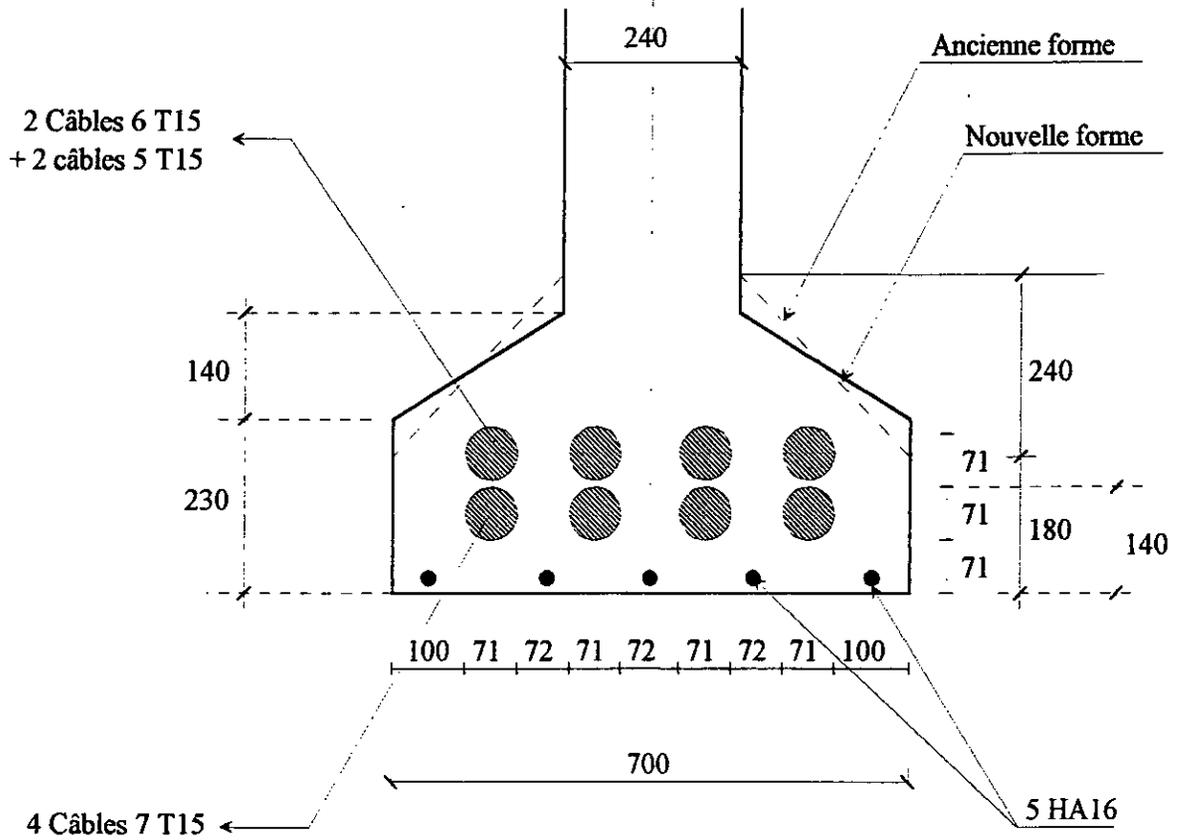


Fig. B.20 : Ferrailage du talon à mi-travée (côtes en mm).

De la même manière on risque d'aboutir à la même conclusion c'est-à-dire pas de solution de paréto (donc pas de solution min-max) si on augmente beaucoup le nombre de fonctions critères à optimiser.

Il est par conséquent nécessaire de choisir des exemples de calcul où on peut éviter tous ces problèmes qui empêchent le déroulement logique de nos calculs d'encadrement des solutions générées et la recherche des solutions de paréto.

En fin l'algorithme Min Max vient apporter une réponse au problème du choix d'une solution de paréto. En effet le plus gros problème quant on met on oeuvre un programme d'optimisation multicritère réside dans le risque d'avoir un trop grand nombre d'éléments dans l'ensemble de paréto.

L'algorithme du Min Max a apporté une bonne réponse au cas que nous avons traité car il permet de sélectionner une solution moyenne (P_{moyen} et A_{moyen}).

- Mais il se peut que des logiciels de graphisme en plusieurs dimensions permettent aux ingénieurs de visualiser l'ensemble de paréto afin de sélectionner une solution qui leur convient mieux suivant le cas à traiter.