

10/96
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT Génie Civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE PAR ELEMENTS
FINIS DU COMPORTEMENT
DES CHAUSSEES

Proposé par :

M^r. S. BELKACEMI

Etudié par :

A. MEKAOUJ
D. BOUMEXERANE

Dirigé par :

M^r. S. BELKACEMI

PROMOTION

1995 - 1996

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT Génie Civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE PAR ELEMENTS

FINIS DU COMPORTEMENT

DES CHAUSSÉES

Proposé par :
M^r: S. BELKACEMI

Etudié par :
A. MEKAOUH
D. BOUMEZERANE

Dirigé par :
M^r: S. BELKACEMI

PROMOTION

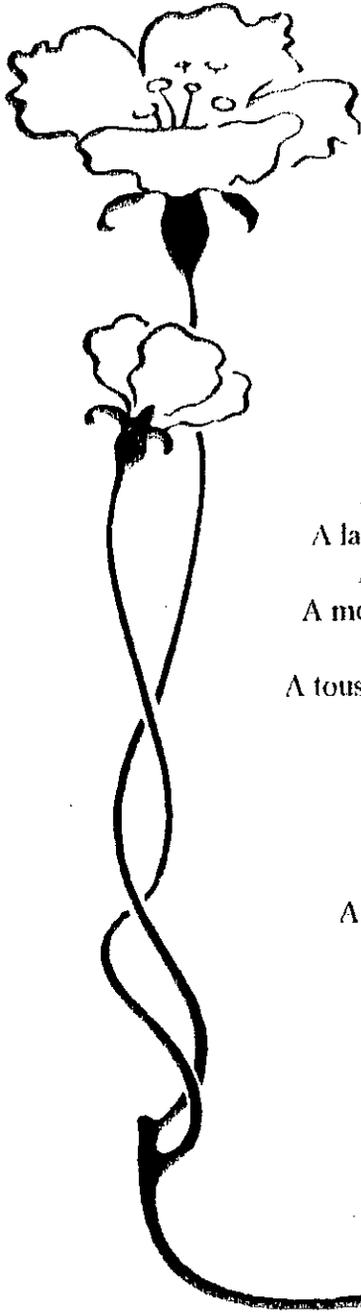
1995 - 1996

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier vivement notre promoteur Mr BELKACEMI pour ses conseils et ses orientations durant l'année.

Nos vifs remerciements vont aussi au personnel de la bibliothèque, du centre de calcul de l'ENP et celui du C.T.T.P.

Que tous nos enseignants, nos amis et ceux qui nous ont aidé de près ou de loin trouvent ici l'expression de nos remerciements et profondes reconnaissances.



A la mémoire de ma soeur bien-aimée.
A ma mère qui m'a tout donné.
A mon père qui m'a toujours encouragé.
A mes frères et ma soeur.
A tous mes amis et ceux qui me sont chers.

Abdelmadjid.

A mes parents.
A mes frères et à ma soeur.
A ma tante à qui je dois beaucoup.
A tous mes amis et proches.

Djamal-ddine.

Sujet : Etude par éléments finis du comportement des chaussées (souples).

Résumé :

Le présent travail consiste en l'étude par éléments finis du comportement des chaussées (souples).

A cet effet un modèle éléments finis 2 D est mis en oeuvre. De nombreux exemples sont présentés pour montrer l'influence des différents paramètres intervenant dans le dimensionnement des chaussées.

Subject : A finite element study of flexible roadway behaviour.

Abstract :

This work consist in a study of flexible roadways behaviour using finite elements.

A 2 D finite elements model is implemented. A several exemples are prsented to show the different parameters influence in the roadway dimension.

العنوان : دراسة تصرف الطرقات بطريقة العناصر المحدودة.

الخلاصة:

هدف هذا المشروع هو دراسة تصرف الطرقات بطريقة العناصر المحدودة.

لهذا الغرض تم وضع نموذج تناسلي الأبعاد. عدد معتبر من الأمثلة قدمت لتوضيح تأثير العوامل المختلفة في حساب الطرقات.

SOMMAIRE

Introduction générale.	1
<u>Chapitre I</u>	
Etude bibliographique	4
I-1 Introduction au dimensionnement des chaussées	5
I-1-1 Approche empirique	5
I-1-2 Approche théorique	6
I-1-3 Introduction aux modèles de la mécanique des chaussées	8
I-2 Modèles de chaussées	10
I-2-1 Modèle monocouche . Massif homogène	10
a) Hypothèses	10
b) Principales équations	11
I-2-2 Modèles bicouches	12
a) Hypothèses	12
b) Principales équations	12
I-2-3 Modèle multicouche	13
a) Hypothèses	14
b) Principales équations	14
I-2-4 Modèles de comportement réversible des matériaux	16
a) Comportement élastique linéaire	16
b) Paramètres de dimensionnement des chaussées	17
c) Exemple de chaussées souples	19
d) Conclusion	22

Chapitre II

Elasticité linéaire	23
II-1 Introduction	24
II-2 Equation gouvernante	24
II-3 Elasticité plane	27
II-4 Analyse des contraintes axisymétriques	29

Chapitre III

La méthode des éléments finis	32
III-1 Introduction	33
III-2 Historique	33
III-3 Les grandes lignes de la M.E.F	35
III-4 Différentes formulations	37
III-4-1 Formulation contraintes	37
III-4-2 Formulation déplacements	37
III-4-3 Formulation mixte	37
III-4-4 Formulation variationnelle	37
III-5-a Discrétisation du domaine	39
III-5-b Approximation sur l'élément	40
III-5-c Élément de référence	40
III-5-d Construction de la matrice élémentaire	40
III-5-e Assemblage	41
III-6 Convergence de la M.E.F	41

Chapitre IV

Généralités sur le dimensionnement des chaussées	42
par la M.E.F	
IV-1 Introduction	43
IV-2 Principe d'utilisation du programme M.E.F	43
IV-2-a Principe théorique	43
IV-2-b Description du problème	45
IV-2-c Principe de résolution	45
IV-2-d Condition aux limites	46
IV-2-e Paramètres d'entrée	46
IV-2-f Paramètres de sortie	46
IV-3 Formulation d'un problème axisymétrique par la M.E.F	47
a) Variables du problème axisymétrique	47
b) Matrice des relations cinématiques	48
c) Matrice de rigidité et vecteur forces élémentaires	50
d) Expression analytique des forces de surface	51
IV-4 Modélisation des chaussées par éléments finis	52
IV-4-1 Conditions aux limites et aux interfaces	53
IV-4-2 Prise en compte d'un jumelage par un calcul axisymétrique	54
IV-4-2-1 Principe de la méthode	54
a) Superposition des charges	54
b) Application au problème traité	55

Chapitre V

Présentation du programme M.E.F 56

Chapitre VI

Exemples d'application et comparaison des résultats 61

Chapitre VII

Conclusion et suggestions 76

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
École Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Le bon fonctionnement d'une structure de chaussée nécessite la prise en considération d'une façon avantageuse, des caractéristiques de résistance et de rigidité des matériaux qui constituent ses différentes couches.

Une chaussée est essentiellement destinée à supporter les actions mécaniques de véhicules, à les transmettre sur le terrain de fondation sous-jacent, sans qu'il y ait des déformations permanentes, ni dans le terrain ni dans la chaussée elle-même.

Le niveau de sollicitation de la structure est évalué à l'aide d'un modèle. La suite des équations du modèle prétend présenter d'une façon suffisamment réaliste les interactions entre les divers paramètres qui gouvernent le fonctionnement de la structure.

Les essais expérimentaux, in-situ ou en laboratoire, doivent permettre la mise au point d'un modèle pouvant simuler le comportement de toute la structure afin de lui proposer un dimensionnement plus rationnel.

Le problème réel de dimensionnement de chaussées est approché par un calcul axisymétrique.

Les approximations qui sont faites concernent essentiellement le passage d'un problème tridimensionnel à un problème axisymétrique tout en tentant de prendre en compte un maximum de paramètres qui caractérisent le problème réel.

Se basant sur des hypothèses plus ou moins réalistes, des théories ont pu voir le jour. Certaines tiennent compte du comportement plastique du sol, à l'encontre de la dite « théorie de l'élasticité ». Cette dernière suppose les

déformations proportionnelles aux contraintes, ce qui souvent n'est pas le cas du sol. Mais si nous considérons que les contraintes et les déformations engendrées sont assez faibles et loin de l'état de rupture plastique, nous pouvons supposer l'existence d'un rapport de proportionnalité entre elles.

Grâce à cette théorie, et en se basant sur des techniques de discrétisation, il y a eu l'apparition des méthodes numériques permettant la résolution de problèmes complexes (méthode des éléments finis, méthode des différences finies, ...).

Les méthodes de dimensionnement des chaussées ne sont en fait que des méthodes de vérification de structures de chaussées préalablement établies. Il y a donc auparavant une phase tout à fait essentielle qui est celle de la conception de la structure. Dans cette phase il faut déterminer le meilleur agencement possible des matériaux existants, en tenant compte de leur résistance aux actions du trafic et de l'environnement ainsi que de leurs particularités de mise en oeuvre.

Le présent travail est basé sur une méthode théorique de dimensionnement des chaussées qui est la méthode des éléments finis.

Ce travail sera divisé en cinq chapitres.

Chapitre 1

Après une petite introduction au dimensionnement des chaussées; une étude bibliographique au cours de laquelle, après un rappel historique sur les chaussées souples, un passage en revue des éléments de connaissance nécessaire pour modéliser au mieux les structures de chaussées souples et les matériaux qui les composent sera observé.

La conclusion de cette partie fait ressortir les perspectives que l'on veut atteindre.

Chapitre 2

Un bref rappel sur la théorie de l'élasticité linéaire (élasticité plane, axisymétrie) fera l'objet de ce chapitre.

Chapitre 3

Ce chapitre sera consacré à une introduction à la méthode des éléments finis avec les différentes formulations.

Chapitre 4

Une introduction au dimensionnement des chaussées par la M.E.F pour un problème axisymétrique sera développée dans ce chapitre.

Chapitre 5

Une présentation du programme M.E.F sera détaillée dans ce chapitre.

Chapitre 6

Dans cette partie une comparaison des résultats obtenus par la M.E.F et ceux des méthodes analytiques (calcul par le logiciel ALIZE) sera faite.

Chapitre 7

Conclusion et suggestions.

Chapitre I
Etude Bibliographique

I- Introduction au dimensionnement des chaussées.

La démarche de dimensionnement d'une structure de chaussée ne diffère pas fondamentalement de celle des autres structures, puisqu'il s'agit de déterminer les contraintes ou déformations des matériaux, et les comparer ensuite à des contraintes ou déformations admissibles.

Il existe, toutefois, deux approches différentes dans le dimensionnement des chaussées, celle relevant de l'empirisme et celle qui s'appuie sur la théorie.

I-1-1 Approche empirique.

Cette approche s'appuie sur l'observation du comportement sous trafic des chaussées réelles ou expérimentales. Il s'agit de se fixer, d'abord un critère pour définir la fin de la vie d'une chaussée, et à l'aide de ce critère, la durée de vie des sections observées est déterminée.

Sur cette population de sections expérimentales, des relations entre cette durée de vie et les caractéristiques géométriques des structures (épaisseurs des couches) ainsi que les propriétés mécaniques de la structure de chaussée et du sol de fondation sont établies (ce qui se fait en général par des méthodes statistiques de régression multiple).

Les essais AASHO (American Association Of State Highway Officials) correspondent à ce type de schéma.

Toutefois, cette approche purement empirique présente un certain nombre d'inconvénients :

- Pour connaître l'influence de nombreux paramètres comme les épaisseurs des différentes couches et les propriétés mécaniques des matériaux, il faut un nombre important de sections expérimentales, et le

coût est souvent très élevé. Sans négliger un facteur qui a son importance à savoir l'observation antérieure sur des sites similaires.

- Les relations obtenues par ce type d'analyse statistique par régression ne s'appliquent qu'aux matériaux étudiés, qu'aux conditions d'environnement de l'expérimentation et qu'aux sols-support rencontrés d'où une difficulté extrême de généraliser.

Remarque : Les essais AASHO ont porté sur un certain nombre de sections de chaussées (souples et rigides). Chacune des sections a reçu l'application d'un nombre important de charges roulantes pour permettre :

- De fixer des lois d'équivalence entre différentes charges.
- De relier statistiquement les déflexions à la structure de la chaussée.
- De définir un indice de qualité de service des chaussées et d'étudier les variations avec le trafic, en relation avec la structure de la chaussée.

(les essais AASHO on été réalisés entre 1957 et 1961).

I-1-2 Approche théorique.

Il s'agit d'établir un modèle de chaussée reproduisant le plus près possible le fonctionnement mécanique de la structure. A l'aide de ce modèle, on détermine les sollicitations que subissent les différents matériaux de la chaussée et le sol support sous l'effet d'un trafic donné, ensuite on compare ces sollicitations aux limites admissibles.

Pour déterminer les contraintes et les déformations dans les matériaux de chaussées et le sol-support on utilise des modèles mathématiques ainsi que certaines connaissances sur la théorie de la mécanique des milieux continus. ce qui est difficile en fait, c'est de modéliser le comportement des

matériaux de chaussée et du sol support de même que les sollicitations mécaniques et les conditions d'environnement.

La vérification mécanique porte sur deux points :

- Vérification vis-à-vis de la rupture par fatigue.
- Vérification vis-à-vis des déformations permanentes à la surface de la chaussée.

La première vérification consiste à ce que la rupture par fatigue ne se produit pas avant la fin de la durée de vie souhaitée ou bien d'éviter, si elle se produit en profondeur, qu'elle se manifeste en surface.

La seconde vérification consiste à éviter l'apparition de déformations excessives en surface pouvant entraîner des orniérages ou des défauts d'uni inacceptables.

En réalité les deux approches, empirique et théorique, ne sont pas si disjointes que ça, car elles comportent toutes les deux une phase expérimentale et les méthodes théoriques nécessitent un calage par référence au comportement des chaussées réelles.

I-1-3 Introduction aux modèles de la mécanique des chaussées.

La modélisation des chaussées a débutée en 1885, lorsque J. Boussinesq (1885) a proposé une solution analytique au problème du massif homogène semi-infini soumis à l'action d'une charge verticale de surface. Ce fût vers 1926, que Westergaard modélise un bicouche avec l'hypothèse d'une plaque fléchie reposant sur un sol support représenté par des ressorts de même rigidité. Ensuite arrive le modèle de Hogg (1938), qui remplace la modélisation en ressort du sol support de Westergaard par un massif de Boussinesq.

Jusqu'alors, les modèles proposés restaient restrictifs et n'assuraient pas une bonne répartition des contraintes sur le sol support constitué dans la plupart des cas d'un matériau de faible résistance. On pensa alors à intercaler entre la charge et le sol support plusieurs couches de rigidités décroissantes en profondeur afin de le soulager. Burmister propose le modèle analytique multicouche (1943), sur la base duquel le code de calcul ALIZE* du LCPC est fondé. Les calculs réalisés avec ALIZE ont permis d'élaborer un catalogue de structures de chaussées neuves.

En parallèle, avec l'évolution très rapide des moyens de calcul, la méthode des éléments finis fournit la base de plusieurs codes de calcul qui traitent les problèmes des chaussées.

Dans le cadre de ce travail, on ne s'intéresse qu'à l'aspect de modélisation des structures et la détermination des différentes inconnues par la méthode des éléments finis dans le cas du problème axisymétrique.

* ALIZE : Programme de calcul des chaussées élaboré par le L.C.P.C (Laboratoire Central des Ponts et Chaussées) basé sur la méthode de Burmister.

Une bonne modélisation repose sur une bonne connaissance des champs de contraintes et de déformations des matériaux soumis à divers chemins de sollicitation, c'est pour cette raison que les programmes d'essais sur éprouvettes et d'auscultations in-situ doivent être menés avec minutie.

I-1-4 Différentes catégories de chaussées.

On présente sur la figure 1-1 les différentes catégories de chaussées que l'on peut rencontrer.

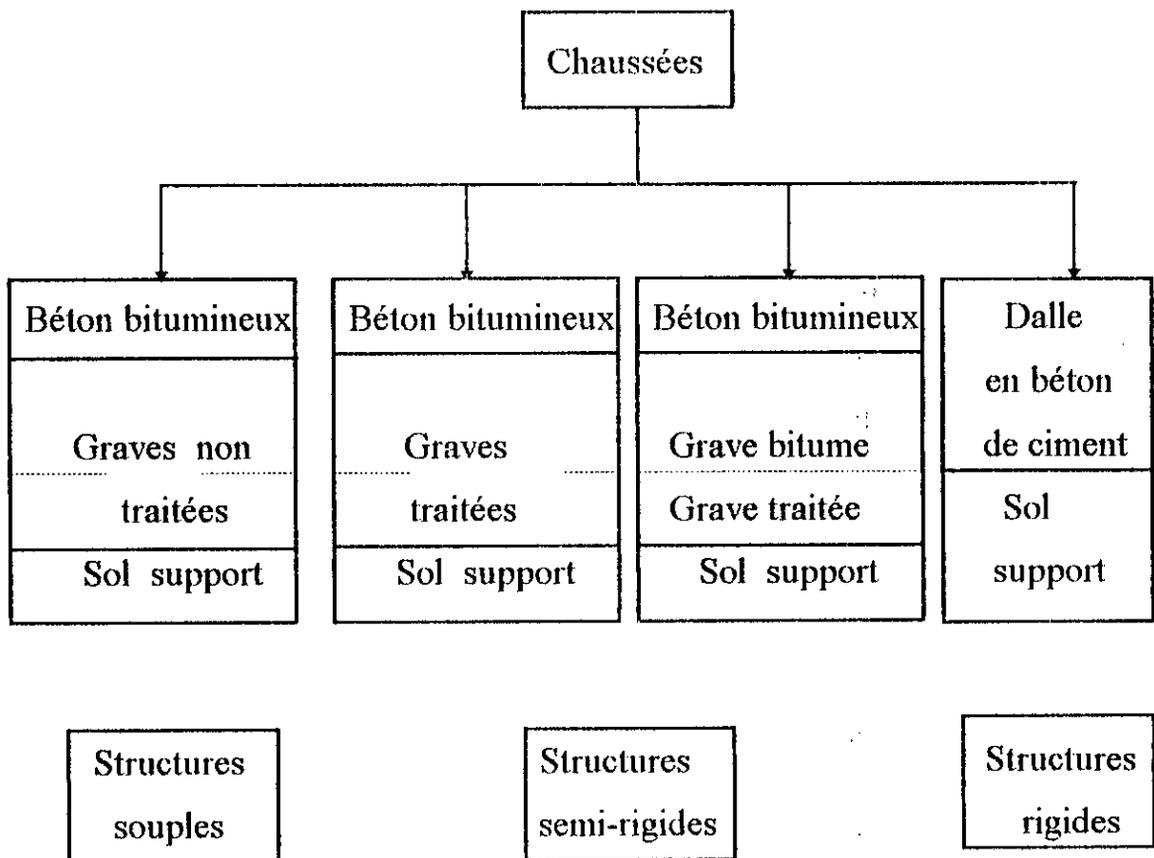


Fig. 1.1 Types de chaussées classiques.

I-2 Modèles de chaussées.

On présente dans ce paragraphe, un bref aperçu sur les modèles de chaussées qui ont fait l'objet d'études théoriques par certains auteurs. Pour ce qui concerne les chaussées souples, ces modèles présentent l'handicap de n'être adaptés qu'au comportement élastique linéaire des matériaux qui composent la structure. Néanmoins, ils permettent de valider les calculs effectués par la méthode des éléments finis avec le même type de comportement. Ceci apparaît notamment dans le cas du modèle de Burmister qui sert de base au programme de calcul ALIZE largement répandu dans les laboratoires des ponts et chaussées et dans la profession.

I-2-1 Modèle Monocouche-Massif Homogène.

Le modèle monocouche, proposé par J.Boussinesq (1885), considère un massif semi-infini soumis à une charge ponctuelle ou à une charge répartie (Fig. 1.2).

a) Hypothèses.

Les hypothèses de ce modèle sont les suivantes :

- Massif homogène équivalent à un espace semi-infini.
- Charge concentrée P , ou uniformément répartie q_0 sur un disque de rayon a .

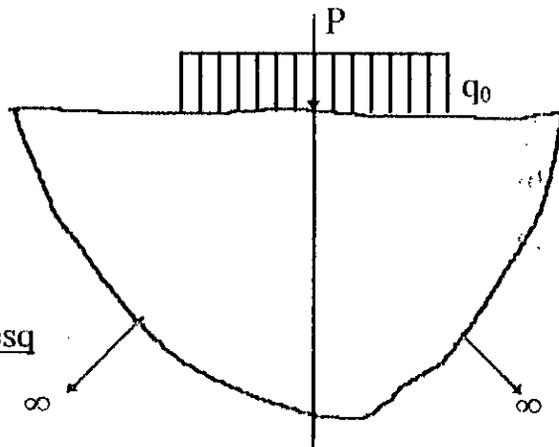


Fig. 1.2
Modèle de Boussinesq
1885

b) Principales équations.

On donne les expressions des contraintes et des déplacements pour chaque type de chargement (TIMOSHENKO et GOODIER, 1934).

- Pour P, charge concentrée avec $\rho = r^2 + z^2$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{P}{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} \rho^{-\frac{1}{2}} \right] - 3r^2 z \rho^{-\frac{5}{2}} \right\} \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \frac{P}{2\pi} (1-2\nu) \left\{ -\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} \rho^{-\frac{1}{2}} + z \rho^{-\frac{3}{2}} \right\} \\
 \sigma_{zz} &= \frac{-3P}{2\pi} z^3 \rho^{-\frac{5}{2}} \quad \text{et} \quad \sigma_{rz} = \frac{-3P}{2\pi} r z^2 \rho^{-\frac{5}{2}} \\
 W &= \frac{P}{2\pi E} \left[(1+\nu) z^2 r^{-\frac{3}{2}} + 2(1-\nu^2) \rho^{-\frac{1}{2}} \right] \\
 U &= \frac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{2\pi E} \left[z \rho^{-\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{1-2\nu} r^2 z \rho^{-\frac{3}{2}} \right]
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

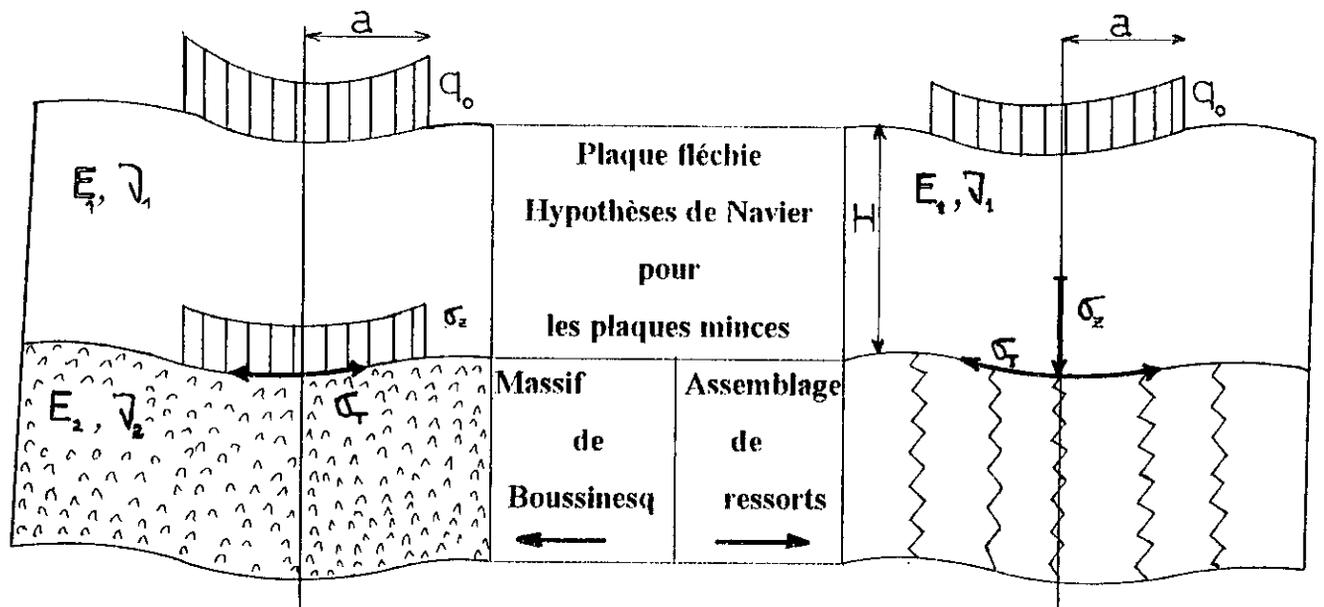
- Pour q_0 , charge répartie avec $\rho_a = a^2 + z^2$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} &= \frac{q_0}{2} \left[-(1+2\nu) + \frac{2(1+\nu)z}{\sqrt{\rho_a}} - \left(\frac{z}{\sqrt{\rho_a}} \right)^3 \right] \\
 \sigma_{zz} &= q_0 \left[-1 + \frac{z^3}{\rho_a^{\frac{3}{2}}} \right] \quad \text{et, avec } \psi = \frac{a}{r} \sin\theta, \text{ on a :} \\
 W &= \frac{4(1-\nu^2)q_0 r}{\pi E} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\psi^2} d\theta - \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\psi^2}} \right]
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

1-2-2 Modèles bicouches.

2-a) Hypothèses.

Hogg, 1938 et Westergaard 1926 ont étudié les solutions théoriques d'un modèle bicouche selon deux hypothèses concernant le sol support (figures 1.8.a et b).



a. Modèle de Hogg (1938)

b. Modèle de Westergaard

Fig. 1.8 Modèles bicouches.

2-b) Principales équations.

Dans le cas particulier où $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, l'expression de la contrainte de traction dans la plaque pour le modèle de Hogg est donné en (1.3), la fonction F dépendant de la rigidité de la plaque.

$$\sigma_r = \frac{P}{H^2} \frac{1+\nu}{2\pi} F \left(\frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{H^3}{a^3} \right) \quad (1.3)$$

L'expression de la contrainte de traction dans la plaque pour le modèle de Westergaard et dans le cas d'une charge circulaire au centre de la dalle donne une expression à rapprocher de celle fournie par le modèle de Hogg.

$$\sigma_r = \frac{P}{H^2} \frac{1+\nu}{2} F \left(\frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{H^3}{a^3} \right) \quad (1.4)$$

où : H : épaisseur de la première couche.

a : rayon du chargement.

On ne s'étendra pas plus sur ces modèles car ils n'interviendront pas dans notre travail. Pour plus de détails, on peut se référer à G.Jeufrroy et R.Sautery 1991.

I-1-3 Modèle multicouche.

Pour le modèle de Burmister, la structure comprend plusieurs couches, chacune de ces couches a un comportement élastique linéaire (G.Liautaud et P.Moreau, 1981). ces couches sont superposées et sont infinies dans la direction radiale. la dernière couche ayant une épaisseur infinie, le modèle occupe alors un domaine semi-infini (Fig. 1.4).

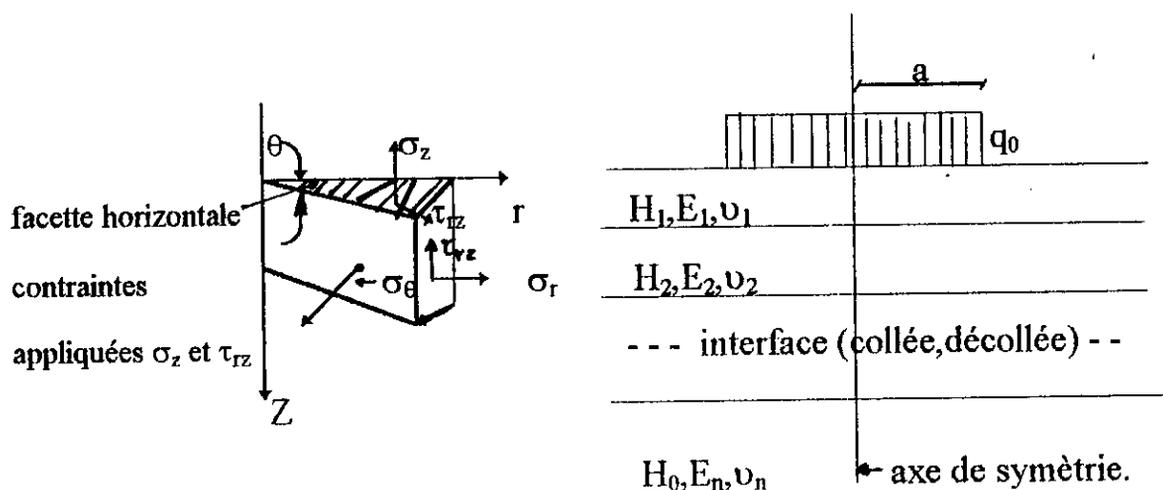


Fig. 1.4 Modèle de Burmister 1943.

a) Hypothèses.

Les hypothèses du modèle de Burmister sont les suivantes :

- Couches à comportement élastique linéaire.
- Structure semi-infinie.
- Interfaces collées ou décollées.
- Symétrie de révolution.

b) Principe de résolution.

Pour une structure comportant n couches, on cherche n fonctions définies, pour chaque couche i , par l'équation :

$$\Delta^2 \phi_i(r,z) = 0$$

où Δ^2 est l'opérateur biharmonique = $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)$

Cette équation devient beaucoup plus simple si l'on procède à une transformation de Henkel d'ordre zéro du plan (r,z) au plan (m,z) , on obtient alors :

$$\phi_i(r,z) \rightarrow \Phi_i(m,z) = \int_0^{+\infty} r J_0(mr) \phi_i(r,z) dm \quad (1.5)$$

où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre zéro. On aboutit à un système d'équations différentielles du quatrième ordre :

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - m^2 \right)^2 \Phi_i(m,z) = 0 \quad \text{où : } \Phi_i(m,z) = H_0(\phi_i(r,z)) \quad (1.6)$$

Les solutions de ces équations peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\Phi_i(m,z) = Y(m) \{ [A_i(m) + C_i(m)z] e^{mz} - [B_i(m) + D_i(m)z] e^{-mz} \} \quad (1.7)$$

$A_i(m)$, $B_i(m)$, $C_i(m)$ et $D_i(m)$: fonctions qui dépendent des conditions aux limites du problème et du type d'interface entre les couches (collée ou décollée).

$Y(m)$ est une fonction arbitraire; Burmister propose de prendre cette fonction égale à la transformée de Henkel d'ordre zéro de la fonction de charge $P(r)$.

La transformée inverse de Henkel permet de revenir à l'expression de $\phi_i(r, z)$ de la façon suivante :

$$\Phi_i(m, z) \rightarrow \phi_i(r, z) = \int_0^{+\infty} m J_0(mr) \Phi(m, z) dm \quad (1.8)$$

expression qui s'écrit explicitement :

$$\phi_i(r, z) = \int_0^{+\infty} m J_0(mr) Y(m) \{ [A_i(m) + C_i(m)z] e^{mz} - [B_i(m) + D_i(m)z] e^{-mz} \} dm \quad (1.9)$$

En appliquant les conditions aux limites et aux interfaces suivantes :

- A la surface ($Z = 0$), avec R_c le rayon de la charge, on a :
 $\sigma_{z1} = P$ pour $0 < r < R_c$ et $\sigma_{z1} = 0$ pour $r > R_c$
- Pour $Z \longrightarrow +\infty$ et pour une distance radiale fixée, les déplacements et les contraintes sont nuls, ce qui entraîne : $A_n(m) = C_n(m)$.
- Les interfaces étant collées, les conditions de continuité s'écrivent comme suit :

$$U_i = U_{(i+1)} ; w_i = w_{(i+1)} ; \sigma_{zi} = \sigma_{z(i+1)} ; \sigma_{rzi} = \sigma_{rz(i+1)}$$

On peut alors déterminer les expressions des contraintes et des déplacements par les équations de la mécanique des milieux continus en tout point de la structure.

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right] & ; & \quad \sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \Delta \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] \\
\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] & ; & \quad \sigma_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \\
W &= \frac{1 + \nu}{E} \left[(1 - 2\nu) \Delta \phi + \frac{\partial \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] \\
U &= \frac{1 + \nu}{E} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

I-2-4 Modèles de Comportement Réversible des Matériaux.

a) Comportement élastique linéaire.

Dans notre cas, on va considérer que toutes les couches composant la chaussée ont un comportement élastique linéaire isotrope, qui ont pour caractéristiques mécaniques :

- Le module d'élasticité : E constant.
- Le coefficient de poisson : ν constant.

Pour les problèmes axisymétriques, la matrice d'élasticité isotrope [D], telle que : $\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$ s'écrit comme suit :

$$[D] = \frac{E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

$$\text{avec : } \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} \text{ et } \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{rz} \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

b) Paramètres de dimensionnement des chaussées.

La durée de vie d'une chaussée est liée à la fatigue des matériaux qui la composent. Pour les sols supports, mis à part l'aspect de rupture plastique, la fatigue se traduit par des tassements. Enfin pour les matériaux granulaires, la fatigue reste très sensible à leur état hydrique qui provoque une chute de rigidité notable.

Le phénomène de fatigue des matériaux de chaussées est lié essentiellement au trafic.

1- Le trafic.

Le trafic et notamment le trafic poids lourds, est l'un des paramètres prépondérant du dimensionnement des chaussées; il est donc nécessaire de l'analyser en terme d'agressivité vis-à-vis des chaussées sur lesquelles il circule. Il intervient en fait d'abord dans le choix des matériaux puis dans le dimensionnement proprement dit.

2- Agressivité du trafic.

Le passage d'une charge lourde sur une chaussée provoque des dommages de différentes natures :

a) Le support de la chaussée, sol-support ou couche de forme en matériaux non traités, enregistre à chaque passage d'une charge, une déformation permanente fonction de la contrainte verticale qui lui est appliquée. L'accumulation de ces déformations permanentes se traduit à la surface de la chaussée par des déformations du profil.

b) Les structures de chaussées qui comportent des couches liées fléchissent à chaque passage de la charge. Ce fléchissement donne lieu, à la base de la

chaussée, à des contraintes de traction par flexion, la répétition de ces contraintes conduit à une accumulation de dommages de fatigue qui provoquera à terme la ruine de la chaussée (fissuration).

c) Le passage de charges peut aussi entraîner d'autres dommages dans la couche de la chaussée. Le revêtement peut s'user jusqu'à devenir glissant (efforts tangentiels). La répétition de contraintes verticales peut conduire sur certains revêtements, à un orniérage notable (fluage).

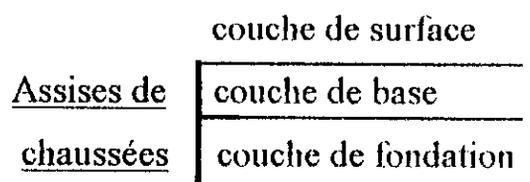
3) Les structures

Les structures ne font pas à proprement parler l'objet d'un calcul, mais plutôt d'une vérification à l'aide des méthodes présentées dans les chapitres précédents. Mais auparavant, un certain nombre de choix sont nécessaires quant à la conception même de la structure, ils ont trait :

- aux matériaux utilisables.
- à la nature de la couche de surface.
- au nombre de couches
- aux contraintes imposées par les conditions de réalisation.

4) Nombre de couches

Afin de limiter le nombre d'interfaces , qui sont bien souvent à l'origine des dégradations , et pour tenir compte des épaisseurs possibles avec les matériaux retenus, les structures comportent généralement trois couches.



5- Assises de chaussées.

Les couches de base et de fondation sont traitées par un même liant sauf dans le cas particulier de la structure mixte. Les épaisseurs des couches ont par ailleurs été choisies pour tenir compte des épaisseurs minimale et maximale permettant une mise en oeuvre (répandage et compactage) correcte des matériaux.

c) Exemple de chaussées souples.

*** Matériaux de chaussées souples.**

1- Le béton bitumineux (B.B)

Le béton bitumineux est un matériau utilisé comme couche de roulement pour les chaussées souples avec une épaisseur relativement faible ($< 15 \text{ cm}$) par rapport aux autres couches.

On adopte les valeurs suivantes du module d'élasticité et de l'allongement vertical à 10^6 cycles de changement par un essieu standard, $E=6000 \text{ MPA}$ et $\epsilon_6=150 \times 10^{-6}$ pour des températures entre 20 et $30 \text{ }^\circ\text{C}$.

On passe à des matériaux bitumineux plus rigides en utilisant des graves bitumes enrichies qui présentent des modules plus élevés, $E=9000 \text{ MPA}$ et des allongements plus faibles $\epsilon_6=90.10^{-6}$ à 120.10^{-6} pour des températures supérieures à $30 \text{ }^\circ\text{C}$.

Les valeurs de ϵ_6 sont des valeurs obtenues en laboratoires, elles sont multipliées par un coefficient de calage pour tenir compte du comportement sur route.

Etant donné la faible épaisseur de cette couche de matériau, on se contentera d'un comportement élastique linéaire en comportement

réversible. Bien que certains auteurs aient avancé dans la recherche concernant la fatigue de ces matériaux (ALIMANI 1988 et ZENZRI 1992).

2) Les graves non traitées (G.N.T)

Les G.N.T sont des matériaux souvent utilisés comme couches de base et de fondation de chaussées souples. Ces matériaux présentent les particularités suivantes :

- Selon les essais effectués au laboratoire à l'appareil triaxial à chargements répétés, on observe un comportement élastique non-linéaire (la rigidité dépend de l'état de contrainte qui règne dans le matériaux).
- Ce sont des matériaux dont le caractère non lié ne leurs permet pas de supporter de fortes tractions. La plupart des études entreprises ne tolèrent aucune contrainte de traction. Toutefois, il a été observé que le peu de cohésion que peuvent avoir ces matériaux surtout en présence d'eau provoquant une succion , leur assure une certaine résistance à la traction.

3) Le sol support.

La connaissance d'un sol support de chaussée repose en général sur une identification géotechnique qui s'appuie sur une classification des sols et sur une évaluation de sa capacité portante en fonction des paramètres d'état. L'Essai C.B.R¹ est souvent utilisé pour évaluer la portance des sols sensibles à l'eau. Souvent à partir de cet essai (C.B.R) on déduit la valeur du module de Young (E) directement utilisable dans le dimensionnement. Pour les sols de faible portance, des améliorations sont nécessaires pour réaliser le chantier dans des conditions convenables (traitement en place, utilisation de couches de forme en matériau non traité).

Si la prise en compte de cette portance, dite « portance à long terme » a son rôle pour le choix des épaisseurs du corps de chaussées, l'état du sol lors de l'exécution du chantier conditionnera souvent la qualité des travaux.

Certains auteurs, considèrent une variation du module d'élasticité (E) avec la profondeur du sol support.

Cette variation est représentée simplement par une subdivision de la couche de sol en sous-couches de même coefficient de Poisson et de module d'élasticité constant pour chaque sous-couche et qui augmente avec la profondeur. Dans le cadre de notre travail, le sol support est considéré comme un multicouches à comportement élastique linéaire.

1* Californian Bearing Ratio (Indice californien de portance).

D) Conclusion.

On a examiné dans cette partie les différents modèles de type analytique qui se sont succédés dans le temps. Les premiers modèles de type bicouche ont donné lieu à un certain nombre de jeux d'abaques (abaques de Burmister).

Les massifs à n couches ($n \geq 3$) n'ont pas donné lieu à des abaques, car trop de paramètres entrent en ligne de compte. Les déplacements sont de la forme :

$$D = \frac{1}{E_n} F \left(\frac{E_1}{E_n}, \frac{E_2}{E_n}, \dots, \frac{E_{n-1}}{E_n}, H_1, H_2, \dots, H_{n-1} \right)$$

il faut donc intervenir $2x(n-1)$ paramètres.

$$\text{La contrainte } \Sigma = G \left(\frac{E_1}{E_n}, \frac{E_2}{E_n}, \dots, \frac{E_{n-1}}{E_n}, H_1, H_2, \dots, H_{n-1} \right)$$

fait intervenir le même nombre de paramètres.

Le développement des méthodes numériques, et en particulier de la méthode des éléments finis, permet d'envisager l'utilisation de modèles plus réalistes.

La partie IV sera consacrée à la méthode des éléments finis et à la formulation du problème axisymétrique par la M.E.F, avec un rappel succinct de la théorie de l'élasticité.

Chapitre II
Elasticité Linéaire

II- Théorie de l'élasticité.

II-1 Introduction.

Depuis toujours on sait qu'un corps solide soumis à l'action de forces extérieures subit des déformations ou des déplacements relatifs. Si les déformations sont petites, ne dépassent pas une certaine valeur limite, après enlèvement des forces extérieures elles disparaissent. On dit que le corps est parfaitement élastique.

La théorie de l'élasticité repose sur la détermination d'un état de contrainte ou de déformation à l'intérieur d'un corps solide soumis à des forces de volume et/ou à des forces de surface.

Les principales hypothèses sur lesquelles elle se base sont : la linéarité des relations contraintes-déformations, le milieu est homogène et isotrope et les déformations engendrées sont petites.

II-2 Equation gouvernante.

a) Equation d'équilibre.

L'état de contrainte en un point est caractérisé par le tenseur de contrainte suivant :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

σ_{ij} avec : i : indique la force qui est normale à X_j .

j : indique la direction.

Comme le tenseur est symétrique $\Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

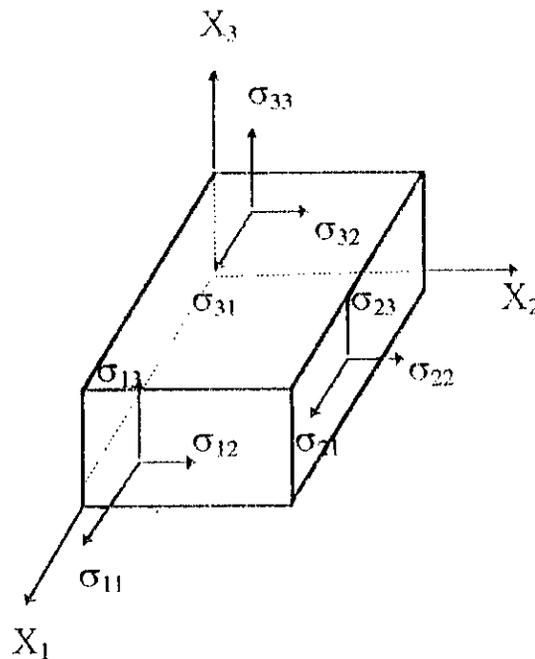


Fig. 1
Etat plan de contrainte

L'équation d'équilibre statique en tout point d'un milieu R est comme suit :

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad ; \quad i = 1,3 \quad \text{et} \quad j = 1,3$$

dans lesquelles :

F_i : représente les composantes des forces volumiques suivant les directions i .

$\sigma_{ij,j}$: dérivée de σ_{ij} par rapport à j .

b) Equation de compatibilité.

Soient six composantes de déformations $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$ et trois (03) composantes de déplacement U_x, U_y, U_z .

Alors il est possible de se donner trois (03) fonctions suffisamment dérivables et d'en déduire les six (06) fonctions ϵ_{ij} . Par contre, il n'est pas

possible de se donner arbitrairement six (06) fonctions ϵ_{ij} et d'en déduire les trois fonctions de déplacement.

Il devrait par conséquent exister trois (03) relations liant les ϵ_{ij} d'un point de vue mathématique. Ces relations expriment les restrictions sur la forme de ϵ_{ij} pour que le système d'équations différentielles soit intégrable.

Les conditions d'intégrabilité assurent l'existence du champ de déplacement et son unicité. En fait, les déplacements sont obtenus à des constantes près qui sont déterminées par des conditions aux limites.

c) Equation Déformation-Déplacement.

L'état de déformation $[\epsilon]$ en un point caractérisé par le tenseur suivant :

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2}).$$

$[\epsilon]$ tenseur symétrique.

Les relations déformation-déplacement pour la théorie linéaire au nombre de six (06) sont données par les équations : $\epsilon_{ij} = (U_{i,j} + U_{j,i})/2$ (II.3).

d) Equations Contraintes-Déformations.

La loi de Hooke généralisée pour un matériau isotrope s'écrit de façon indicelle comme suit :

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \epsilon_{pp} \cdot \delta_{ij} + 2 \mu \cdot \epsilon_{ij} \quad (\text{II.4}).$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda \cdot \delta_{ij}}{2\nu(3\lambda + 2\nu)} \cdot \sigma_{pp} + \frac{1}{2\nu} \cdot \sigma_{ij} \quad (\text{II.5}).$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{pp} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}$$

δ_{ij} symbole de CRONECKER.

II-3 Elasticité Plane.

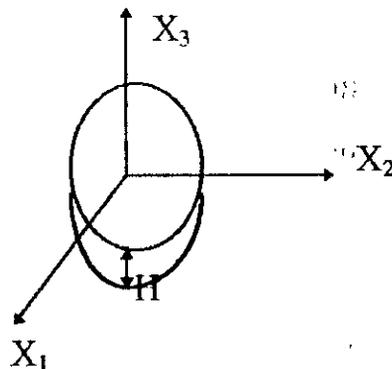
Lorsqu'on est en présence de problèmes tridimensionnels, dans une large mesure, les problèmes de la théorie de l'élasticité sont simplifiés.

II-3-1 Etat de contrainte plane.

Cet état de contrainte peut être défini comme suit :

- L'épaisseur du corps est très petite comparée aux dimensions caractéristiques suivant X_1 et X_2 .
- Aucune force de surface n'agit sur les faces limitant le solide à $x_3 = \pm h/2$
- Les forces agissant sur la face limite cylindrique sont planes et indépendantes de X_3 donc $\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$ dans tout le volume et σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} sont indépendantes de X_3 .

Etude de contrainte
plane



Pour un matériau isotrope, la loi de Hooke s'écrit comme suit :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu\sigma_{22}}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\nu\sigma_{11}}{E} + \frac{\sigma_{22}}{E}$$

$$\varepsilon_{12} = 1 + \nu - \frac{\sigma_{12}}{E} \quad ; \quad \sigma_{33} = \frac{\nu}{E} [\sigma_{11} + \sigma_{22}]$$

Les relations contraintes-déformations sont :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II. 6}).$$

II-3-2 Etat de déformation plane.

Un cas de déformation plane se présente généralement lorsque la dimension d'un corps dans une direction est très étendue par rapport aux deux autres directions, par exemple un long cylindre prismatique soumis à une force latérale uniformément distribuée le long de l'axe Z. figure (2 .1).

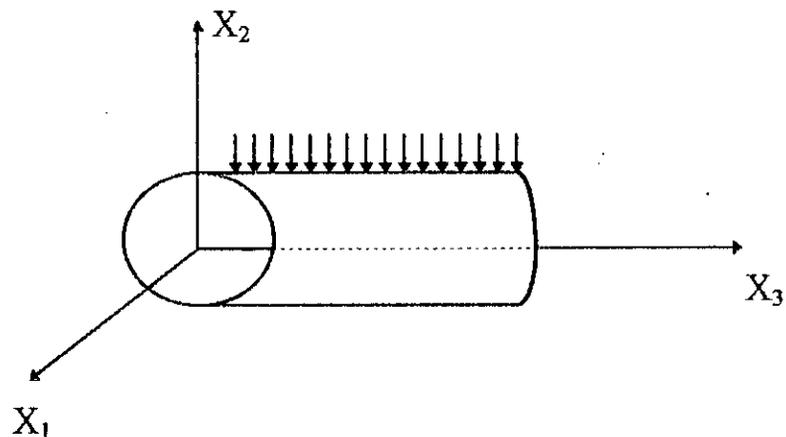


Fig.2.1 Cylindre long chargé latéralement
(Etat de déformation plane)

Les forces de volume et de surface agissent sur la surface limite du cylindre soit dans le plan « pas de composante suivant X3 » et ne sont pas fonction de X3. On peut admettre alors que les déplacements plans U1 et U2 ne dépendent pas de X3 et que U3 = 0.

Les relations contraintes-déformations sont :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.7}).$$

II-4 Analyse des contraintes axisymétriques.

Dans la pratique le problème de la distribution des contraintes dans les corps à symétrie de révolution soumis à un chargement ayant la même symétrie est très important. Le problème théorique est analogue à celui des contraintes planes ou des déformations planes car il est, ici encore, bidimensionnel.

En symétrie de révolution, la composante radiale du déplacement produit automatiquement une déformation tangentielle et comme la contrainte correspondante est sûrement différente de Zéro, il faut faire intervenir une quatrième composante des déformations et des contraintes.

C'est là que réside la différence essentielle de la symétrie de révolution.

II-4-a Déformations (totale).

Il y a quatre composantes possibles (non nulles) d'une déformation axisymétrique. La figure (2.2) montre ces déformations et les contraintes associées.

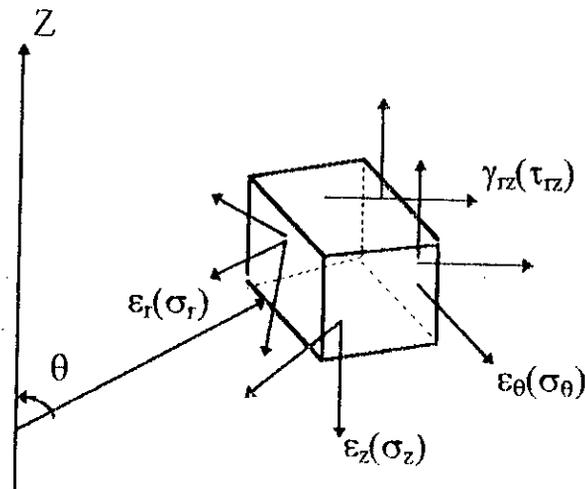


Fig. 2.2 Déformations et contraintes axisymétriques.

Le vecteur déformation en fonction des déplacements en un point est :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{U}{r} \\ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial r} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}$$

Le vecteur S dépend désormais de r et z , de sorte que les déformations ne sont plus constantes par élément comme dans le cas des contraintes ou des déformations planes.

II-4-b Les contraintes.

Les contraintes sont variables dans l'élément, il est alors commode d'en calculer la moyenne au centre de gravité de chaque élément.

$$\sigma = D (\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \quad (\text{II.9}).$$

ε_0 = déformations initiales.

σ_0 = contraintes initiales.

D = matrice d'élasticité.

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{II.10}).$$

Chapitre III
La méthode des éléments finis.
M.E.F

12 5

III- Concepts d'éléments finis.

III-1 Introduction.

Actuellement, la méthode des éléments finis, est en passe de devenir l'une des méthodes les plus utilisées pour résoudre un certain type de problèmes qui se posent à l'ingénieur plus particulièrement ceux spécialisés en Génie-civil.

Le principe de base consiste à : discrétiser le domaine géométrique à étudier, en sous domaines simples appelés éléments finis (ayant des dimensions finies et non infinitésimales) ensuite; à utiliser une approximation nodale sur chaque élément, et pour reconstituer le domaine original, il faudra faire un assemblage.

Les formes géométriques complexes peuvent être discrétisées pour un maillage irrégulier. Les formes géométriques simples peuvent l'être par un maillage régulier (comportant un même type d'éléments, quadrilatéral par exemple). Toutefois, l'utilisation de maillage irrégulier exige un grand effort de programmation.

III-2 Historique.

La M.E.F est le résultat de deux aspects, l'un mathématique et l'autre se basant sur les sciences de l'ingénieur. Le domaine mathématique remonte aux travaux de Gauss (1775), Galerkin (1915) ainsi que les méthodes variationnelles de Rayleigh et Ritz à la fin du siècle dernier.

Newmark, Hrenikoff et Henry dans les années quarante ont abordé le domaine de structures continues en faisant des approximations sur de

Dans les années cinquante Agyris, Turner et Clough ont fait une analogie directe en adoptant un comportement simplifié pour de petites portions. Ils ont utilisé des panneaux triangulaires pour représenter des milieux élastiques bi-dimensionnels. A chaque panneau est associé une matrice de rigidité élémentaire. L'assemblage a donné lieu à une matrice globale.

Dans les années soixante fut utilisée la notion d'énergie par Agyris et Kelsey et ils firent appel à des méthodes mathématiques (Principes variationnels, résidus pondérés).

La méthode est ensuite formulée à partir de considérations énergétiques et variationnelles dans les années 70 (Zienkiewicz), d'où le modèle mathématique des éléments finis.

III-3 Les grandes lignes de la M.E.F.

Pour résoudre un problème physique par éléments finis; il est suivi, en général, le cheminement suivant :

Etape1 :

Pour appliquer la M.E.F dans bon nombre de problèmes d'ingénierie, qui sont généralement décrits par des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles, il est fait appel à une réécriture sous forme intégrale de ces équations.

Etape2 :

La division en sous-domaines; il s'agit de décomposer le domaine d'étude, en sous-domaines (éléments) et de calculer les connectivités de chacun et les coordonnées de ses noeuds. C'est l'étape de préparation des données géométriques.

Etape 3 :

Approximation sur un élément; la variable étudiée (Déplacement, Pression, Température) est approximée en chaque élément, par une fonction linéaire, polynomiale ou autre. Le degré du polynôme d'interpolation est relié au nombre de noeuds de l'élément. C'est l'étape de la construction des matrices élémentaires.

Etape 4 :

Assemblage; le système algébrique à résoudre pour les valeurs nodales des variables physiques s'obtient par assemblage des propriétés de

l'élément (masse, rigidité) en utilisant ses connectivités et les différentes coordonnées de ses noeuds.

Etape 5 :

Plusieurs méthodes de résolution existent, il s'agit d'adapter la méthode adéquate au problème traité (problème linéaire, problème stationnaire, transitoire, ... et autres).

Propriétés de la matrice de rigidité.

La matrice de rigidité $[K^e]$ a trois propriétés fondamentales :

1. La symétrie : En vertu du théorème de Maxwell-Betti ; $[K^e]$ est symétrique.
2. Singulière : Avant l'introduction des conditions aux limites, $[K^e]$ est singulière, ce qui explique le mode de déplacement rigide de l'élément. (L'énergie de déformation est nulle).
3. Définie positive : Lorsque des forces appliquées à une structure provoquent des déformations, le travail effectué est emmagasiné sous forme d'énergie de déformation; cette énergie de déformation est toujours positive ou nulle; et s'écrit sous forme $U = \frac{1}{2} \{ \hat{U} \} [K] \{ U \} \geq 0$

III-4 Différentes formulations.

Parmi les formulations d'éléments finis en mécanique des structures existantes, on cite :

III-4-1 Formulation contraintes ou équilibre.

Le principe de cette formulation est de se donner une approximation soit sous forme d'un champ de contraintes en équilibre ou soit sous forme d'une fonction de contraintes. Elle se base sur la théorie de l'énergie complémentaire.

III-4-2 Formulation déplacements.

Dans cette formulation l'approximation donnée est un champ de déplacement, elle se base sur la stationnarité de l'énergie potentielle.

III-4-3 Formulation mixte.

Pour ce qui concerne celle-ci, le champ de déplacement et de contraintes sont considérés comme inconnus primaires du problème; d'où le nom mixte.

La formulation la plus utilisée en M.E.F est celle des déplacements.

III-4-4 Formulation variationnelle.

L'un des concepts essentiels pour la résolution des équations aux dérivées partielles est le principe des travaux virtuels. Principe formulé en

termes d'égalité des travaux effectués par les forces extérieures et intérieures lors d'un déplacement virtuel. Les déplacements sont remplacés par les fonctions arbitraires continues sur le domaine, et l'équation est réécrite sous forme intégrale.

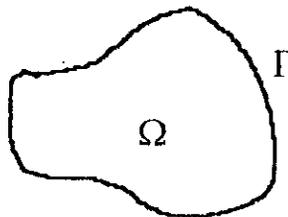
* Un problème classique s'énonce comme suit :

Trouver une fonction $U \in V$; V espace des fonctions tel que :

$$A(U) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$B(U) = 0 \quad \text{dans } \Gamma$$

avec : $A(U)$ ensemble des équations gouvernantes sur le domaine Ω , et $B(U)$ ensemble des conditions aux limites que la fonction U doit vérifier au contour de Γ .



Le problème variationnel associé s'écrit :

Trouver $U \in V$ tels que :

$$\forall \Psi \in V : \int_{\Omega} \Psi A(U) d\Omega = 0$$

et pour satisfaire les conditions aux limites ,

vérifier que :

$$\int_{\Gamma} \Psi B(U) d\Gamma = 0$$

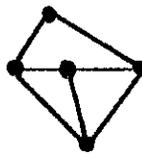
L'obtention de ce type de formulation intégrale se fait en général par la méthode des résidus pondérés (GALERKIN), il s'agit de choisir $\Psi = \delta U$ (perturbation de la fonction recherchée) et d'utiliser l'approximation nodale pour la discrétisation.

III-5-a Discrétisation du domaine.

Pour effectuer une discrétisation par éléments finis, il faut respecter certaines règles pour les éléments.

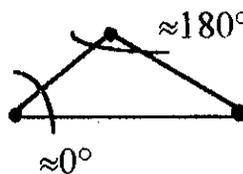
- Un noeud d'élément ne doit jamais être intérieur à un côté d'un autre du même type.

Exemple :



- Eviter les angles trop proches de 0° ou 180° .

Exemple :



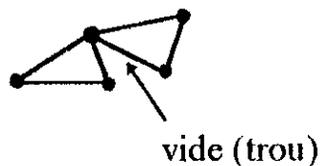
- Le recouvrement est exclu.

Exemple :



- Les trous entre les éléments ne sont pas admis.

Exemple :



III-5-b Approximation sur l'élément.

L'élément étant défini, il est possible de remplacer la fonction exacte par une approximative.

Il est souvent fait appel à des fonctions et polynômes faciles à mettre en oeuvre sur ordinateur.

III-5-c L'élément de référence.

La formulation devient complexe lorsque l'élément contient un nombre élevé de noeuds ou des côtés curvilignes . Pour cela, il est fait appel à un plan de référence simple.

Une transformation géométrique permettra de faire le lien entre l'élément réel et l'élément de référence (et ainsi travailler en coordonnées locales de référence).

III-5-d Construction des matrices élémentaires.

En utilisant la méthode de GALERKIN (en général) l'obtention des matrices élémentaires se fait par l'utilisation de la perturbation δU dans $\int_{\Omega} \Psi A(U) d\Omega = 0$ avec $U = \langle N \rangle \{U_n\}$

N = fonctions de forme.

U_n = valeurs aux noeuds.

$\Psi = \delta U$

$$\delta U = N \delta U_n = \langle \delta U_n^T \rangle \{N\}$$

III-5-e Assemblage.

La solution complète d'un système ne s'obtient que si la condition d'équilibre global est satisfaite.

Comme cette solution est vérifiée à l'intérieur de l'élément (par la formulation de la matrice élémentaire). Il ne reste qu'à la vérifier au niveau de chaque noeud.(i.e déterminer les contributions des éléments auxquels appartient un noeud donné « i »).

Une fois l'assemblage effectué, il s'agira d'introduire les conditions aux limites et de résoudre ensuite le système considéré ($[K] \{U\} = \{F\}$).

III-6 Convergence de la M.E.F

La performance de l'analyse d'un problème donné par éléments finis dépend essentiellement du nombre d'éléments utilisé et de l'approximation dans chacun des éléments. La solution doit converger lorsque le nombre augmente, tout en sachant que l'élément doit être complet et compatible (conforme).

« complet » signifie que les déplacements du corps rigide doivent être effectués par l'élément sans se déformer ni développer des contraintes à l'intérieur.

« la compatibilité » assure la continuité de la fonction dans l'élément et entre éléments.

Chapitre IV
Généralités sur le dimensionnement des
chaussées par la M.E.F

IV-1 Introduction.

Le principe de calcul consiste à modéliser une structure, que ce soit une chaussée neuve ou une chaussée ancienne à renforcer, de manière à calculer les contraintes ou les déplacements provoqués par une charge type unitaire. On cherche ensuite la contrainte maximale susceptible d'engendrer la rupture de la structure et on la compare à la limite admissible du matériau considéré.

La fiabilité du calcul dépendra de la qualité des hypothèses qui seront faites, tant sur les propriétés mécaniques des matériaux que sur leurs caractéristiques physiques en place, c'est à dire épaisseur et dispersion, nature des liaisons entre couches etc ...

C'est donc à cet endroit que devront se joindre la science et l'art de l'ingénieur, les connaissances théoriques sanctionnées par l'expérience de la pratique.

IV-2 Principe d'utilisation du programme M.E.F.

a) Principe théorique.

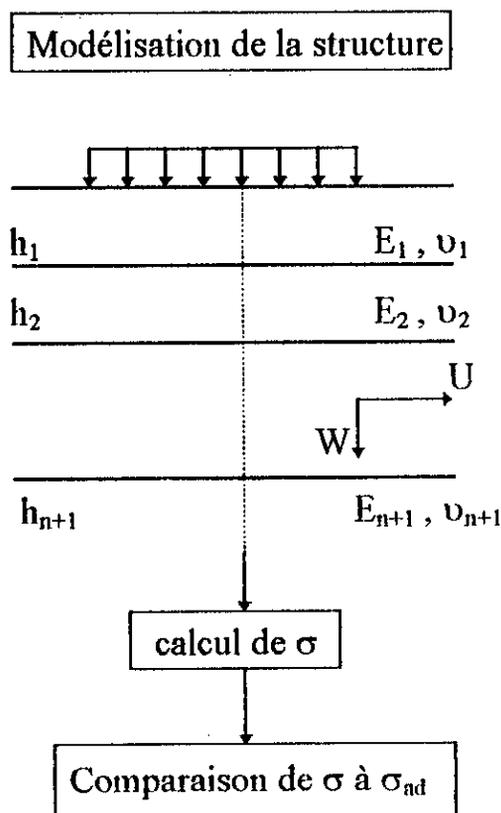
Le programme de calcul (M.E.F) à réaliser permettra de déterminer à partir d'un modèle multicouche élastique les contraintes, déformations et déplacements à différents niveaux et distances de charges représentées par une empreinte généralement circulaire.

Le principe d'utilisation du programme est donc le suivant :

- modélisation d'une structure : choix du nombre de couches, de leurs épaisseurs, des caractéristiques des matériaux constitutifs (module de Young et coefficient de Poisson).

- recherche de la contrainte maximale susceptible d'engendrer la dégradation d'une couche, pour la charge type.
- comparaison de cette contrainte avec la valeur limite admissible découlant de la loi de fatigue du matériau considéré, pour l'intensité d'application de la charge type, déterminée à partir du trafic supportable souhaité.

Un calcul de chaussée effectué à partir de ce programme fait appel donc à la fois à des données théoriques (calcul des contraintes, déformations) à des données expérimentales (caractéristiques des matériaux) et à la connaissance de l'ingénieur (choix du modèle, liaison, épaisseurs de base, etc...). Ceci peut être schématisé de la manière suivante :



* Nécessite une bonne connaissance pratique et expérimentale des chaussées et des matériaux pour aboutir à la définition d'un modèle

* Calcul théorique des contraintes connaissance expérimentale de la charge type engendrant σ cependant nécessaire.

b) Description du problème.

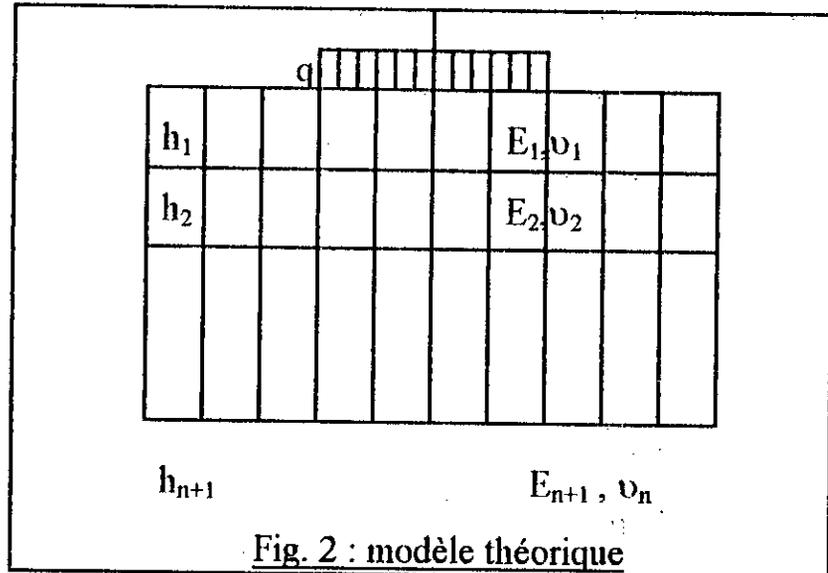


Fig. 2 : modèle théorique

n couches horizontales d'épaisseur h_i de module d'élasticité E_i et de coefficient de Poisson ν_i surmontant un massif semi-infini. Cette structure stratifiée peut être soumise à divers types de charges de révolution de rayon a .

c) Principe de résolution : (M.E.F)

On considère que le milieu est élastique, linéaire, isotrope. La théorie de l'élasticité plane est applicable dans ce cas. Il s'agit d'un problème axisymétrique à chargement circulaire uniforme. On cherche à résoudre le système d'équation $[K] \{U\} = \{F\}$ dont les inconnues sont les déplacements $U_i (u_i, w_i)$. Une fois les déplacements déterminés, on calcule les contraintes $\{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}\}$ par la relation de l'élasticité. Ceci, après introduction des conditions aux limites.

$[K]$: matrice de rigidité globale du milieu.

{F} : vecteur force globale.

{U} : Déplacements des noeuds.

d) Conditions limites.

- En surface :
$$\begin{cases} \sigma_z = q(r) = q_0 & \text{si } r \leq a \\ \tau_{rz} = 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$
- Aux limites :
$$\begin{cases} \text{Continuité des déplacements et des contraintes} \\ \text{(couches collées).} \end{cases}$$

e) Les paramètres d'entrée :

- Caractéristiques géométriques et mécaniques des différentes couches composant la structure.
- Conditions d'interfaces à chaque interface, une même structure peut comporter des couches collées ou non collées.
- La charge est caractérisée par son rayon d'application et par son intensité.

f) Paramètres de sortie.

En chaque point, on détermine :

- Les deux déplacements suivant r et z.
- Les quatre contraintes de l'axisymétrie : σ_r , σ_θ , σ_z et τ_{rz} .

IV-3 Formulation d'un problème axisymétrique

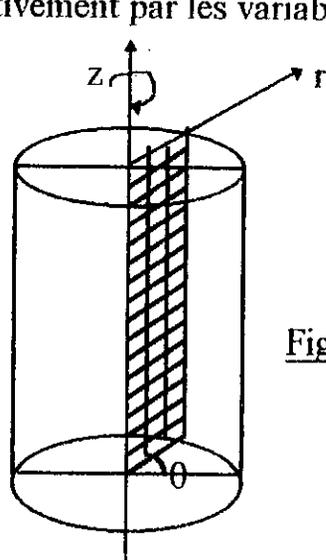
IV-3 Formulation d'un problème axisymétrique
par la méthode des éléments finis.

a) Variables du problème axisymétrique.

Bien que le problème des chaussées soit en réalité tridimensionnel, la plupart des logiciels spécialisés ont recours à la simplification qu'offre une formulation du type axisymétrique afin que les matrices de rigidité à manipuler n'aient pas besoin de grands espaces mémoires (Fig. 3.0).

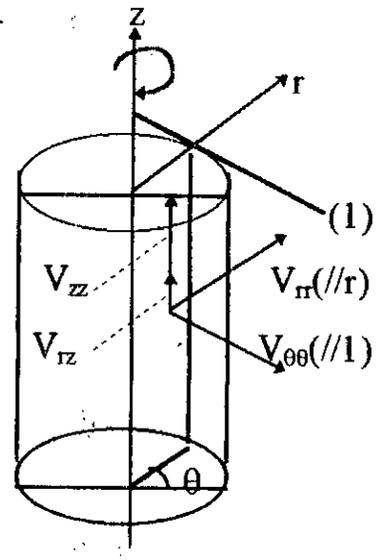
Les variables de position qui interviennent sont : la position radiale r , la position angulaire θ et la côte z (Fig. 3.0a).

Les variables de déplacement sont : le déplacement radial U et le déplacement vertical W . Les contraintes et déformations sont représentées respectivement par les variables V (Fig. 3.0b).



a- Axes.

Fig. 3.0 : Problème
axisymétrique



b- variables

b) Matrice des relations cinématiques.

En passant à la formulation par éléments finis, si l'on note par ξ et η les variables de position de l'élément de référence (élément rectangulaire à 4 noeuds) utilisé, les relations cinématiques liant les déformations aux déplacements s'écrivent :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = U / r$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

$$2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \quad (3.1)$$

Dans les relations (3.1) , les variables U et W sont respectivement les déplacements radiaux et axiaux. Dans notre cas, les éléments étant rectangulaires, ces relations se simplifient.

Sachant que :

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0$$

on obtient alors :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} \quad ; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U}{r} \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}$$
$$2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \quad (3.2)$$

et si l'on note :

\underline{O}^T : Le vecteur ligne nul.

$\underline{N}(\xi, \eta)^T$: Le vecteur ligne des fonctions d'interpolation de l'élément de référence considéré.

Les éléments de la matrice des relations cinématiques \underline{B} sont alors :

$$\underline{B}_1^T = \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \xi} \underline{N}(\xi, \eta)^T$$

$$\underline{B}_2^T = \frac{1}{r} \underline{N}(\xi, \eta)^T$$

$$\underline{B}_3^T = \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} \underline{N}(\xi, \eta)^T \quad (3.3)$$

et l'expression matricielle des relations cinématiques s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_1^T & \underline{O}^T \\ \underline{B}_2^T & \underline{O}^T \\ \underline{O}^T & \underline{B}_3^T \\ \underline{B}_3^T & \underline{B}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

où n est le nombre de noeuds de l'élément (n=4 dans notre cas).

Si l'on appelle \underline{U}_e le vecteur des déplacements nodaux, l'équation (3.4) s'écrit simplement :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{U}_e \quad (3.5)$$

c) Matrice de rigidité et vecteur forces élémentaires.

*** Expression générale.**

Si l'on adopte la notation suivante :

f_v : charge de volume.

f_s : charge de surface.

$\underline{\underline{D}}_e$: matrice d'élasticité.

$\underline{\underline{J}}$: matrice Jacobienne.

En sachant que :

$$\det \underline{\underline{J}} = \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (3.6.a)$$

$$J_s = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)_{\eta=1}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)_{\eta=1}^2} \quad (3.6.b)$$

expressions qui se simplifient dans le cas d'éléments rectangulaires, selon :

$$\det \underline{\underline{J}} = \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad ; \quad J_s = \left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)_{(\eta=1)} \quad (3.7)$$

La matrice de rigidité élémentaire, dans le plan de référence, s'écrit :

$$\underline{\underline{K}} = 2\pi \int_{v_{ref}} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}_e \underline{\underline{B}} \cdot r \cdot \det \underline{\underline{J}} dV \quad (3.8)$$

Le vecteur élémentaire des forces volumiques dues au poids propre s'écrit, dans le plan de référence, comme suit :

$$\underline{\underline{P}}_v^T = 2\pi \int_{v_{ref}} \underline{\underline{N}}^T f_v \cdot r \cdot \det \underline{\underline{J}} dv \quad (3.9)$$

Le vecteur élémentaire des forces surfaciques dues à la surcharge des véhicules s'écrit, dans le plan de référence, comme suit :

$$\underline{\underline{P}}_s^T = \underline{\underline{P}}^T = 2\pi \int_{S_{ref}} \underline{\underline{N}}^T f_s \cdot r \cdot J_s \cdot dS \quad (3.10)$$

On donne aussi les expressions analytiques des vecteurs forces de surface. Le chargement est possible en surface, il peut s'appliquer sur toute la largeur de la zone (Fig. (3.1)). Les forces équivalentes en axisymétrie sont représentées sur les figures (3.1.a & 3.1.b). Sur la figure 3.1, on définit les dimensions L (sens radial) et L' (sens vertical) de l'élément réel.

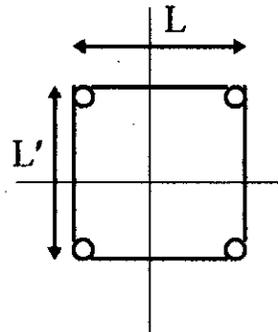


Fig.3.1 : Longueurs de l'élément réel.

d) Expression analytique des forces de surface.

Les forces de surface ont pour expression analytique :

$$P_j = \frac{2}{15} \pi \cdot L [(C_{i+1} - C_i)L - 5R_1 C_i]$$

$$P_{j+1} = -\frac{4}{15} \pi \cdot L [(7C_{i+1} + 3C_i)L + 5R_1 (C_i + C_{i+1})] \quad (3.11)$$

$$P_{j+2} = -\frac{2}{15} \pi [(9C_{i+1} + C_i)L + 5R_1 C_i]$$

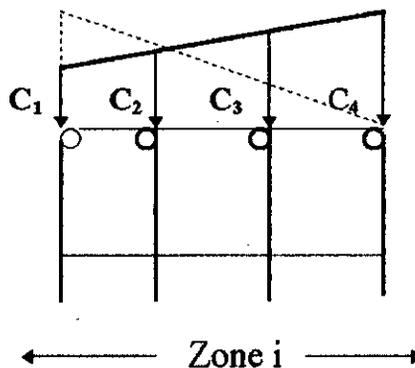


Fig.3.1.a. Chargement trapézoïdal d'une zone i

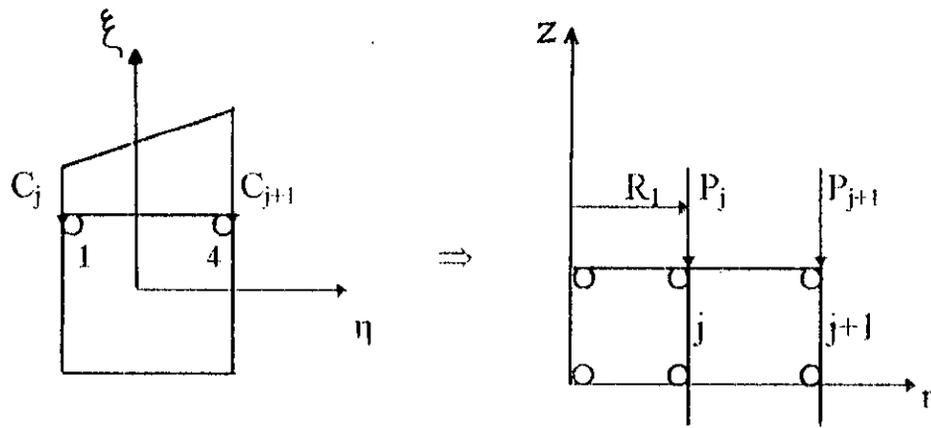


Fig. 3.1.b : Forces modèles verticales équivalentes.

IV-4 Modélisation des chaussées par éléments finis.

Le maillage automatique du programme réalisé découpe la structure en couches superposées de matériaux à caractéristiques mécaniques différentes et en zones horizontales de même caractéristiques mécaniques. Chaque hauteur de couche ou largeur de zone peut comprendre un certain nombre d'éléments constants (Fig. 3.3). Ce procédé permet de raffiner le maillage à tout endroit voulu de la structure.

Les éléments finis sont des éléments quadrilatéraux à quatre (04) noeuds, et l'intégration numérique des fonctions se fait sur les quatre points de Gauss. Les axes sont orientés de gauche à droite pour r et de bas en haut pour z (Fig. 3.3).

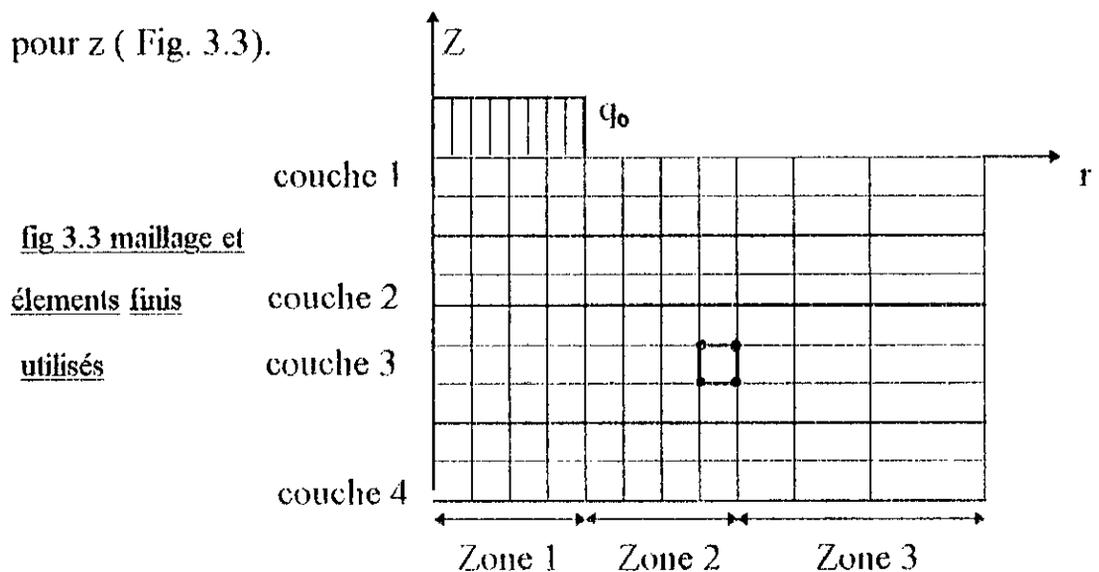


fig 3.3 maillage et éléments finis utilisés

IV-4-1 Conditions aux limites et aux interfaces.

Les interfaces entre les couches de matériaux sont supposées parfaitement collées. Dans ce cas, les couches assurent la continuité des contraintes verticales et de cisaillement, et les déplacements horizontaux et verticaux. Les conditions aux limites des déplacements se présentent sous trois (03) options :

- Option 1 : $U = W$ (fond) et $U = 0$ (Axe et bord droit).
- Option 2 : $U = W$ (fond et bord droit) et $U = 0$ (Axe).
- Option 3 : $W = 0$ (fond) et $U = 0$ (axe et bord droit).

Les conditions aux limites en contraintes sont représentées sur la figure (3.2). Pour le calcul des structures des chaussées, l'option 1 est la plus utilisée figure (3.2).

Pour le cas étudié, la force de surface a pour valeur :

$$F_i = \int (r_{i+1}^2 - r_i^2) q_0.$$

l.q : q_0 = charge répartie due aux pneus.

r_i = rayon de la charge au noeud i.

F_i = force de surface qui revient au noeud.

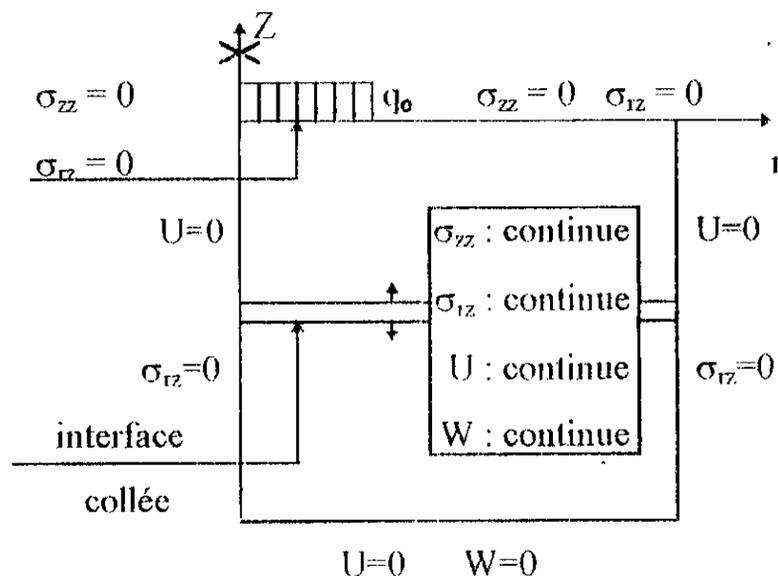


Fig. 3.2 : Conditions aux limites en contraintes
et option 1 en déplacements.

IV-4-2 Prise en compte d'un jumelage par un calcul axisymétrique.

Pour calculer une structure de chaussée à comportement linéaire sous l'effet d'un jumelage, il serait intéressant d'utiliser une méthode approchée utilisant une formulation axisymétrique.

IV-4-2-1 Principe de la méthode.

Pour approcher la solution de calcul sous un jumelage, on utilise le principe de superposition dont on rappelle les grandes lignes.

a) Superposition des charges.

Le principe de superposition exprime une correspondance linéaire entre la donnée (champ de force P) et la solution (champ de contrainte $\underline{\sigma}$, de déformation $\underline{\varepsilon}$ et de déplacement \underline{U}).

En application au problème traité, on note q^g et q^d respectivement la charge de gauche et la charge droite dont les vecteurs forces correspondants sont P^g et P^d .

Les solutions correspondant à chacune de ces charges prises séparément sont : $(\underline{\sigma}^g, \underline{\varepsilon}^g, \underline{U}^g)$ et $(\underline{\sigma}^d, \underline{\varepsilon}^d, \underline{U}^d)$.

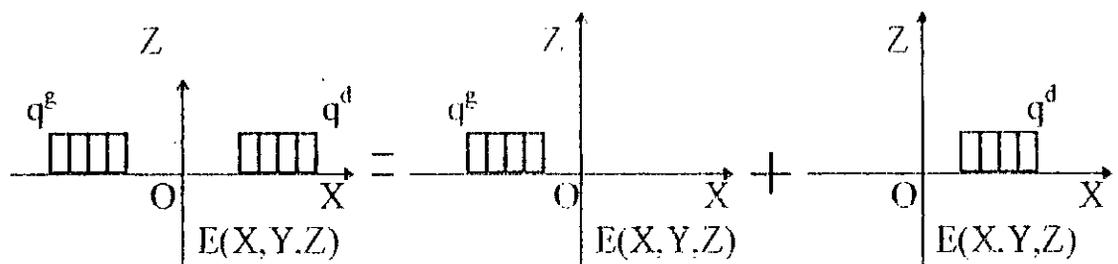
L'application du principe de superposition donne la solution :

$$(\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^g + \underline{\sigma}^d ; \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^g + \underline{\varepsilon}^d ; \underline{U} = \underline{U}^g + \underline{U}^d) \text{ correspondant à } \underline{P} = \underline{P}^g + \underline{P}^d.$$

b) Application au problème traité.

Le principe de superposition s'applique dans le cas d'un milieu élastique linéaire axisymétrique soumis à une charge axisymétrique.

Pour le cas du chargement considéré (jumelage), l'application du principe de superposition est possible si les comportements élastiques linéaires, dans les couches de matériaux sont connus.



Superposition des charges

Etant donné la symétrie du problème par rapport au plan (O, Y, Z), il suffit de considérer le problème de base schématisé

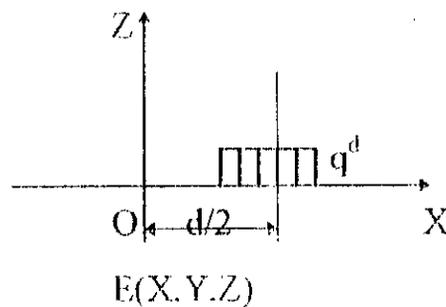


Fig. Problème à résoudre

Chapitre V

Présentation du programme M.E.F

Introduction.

Comme il a été déjà établi dans le chapitre précédent, le vecteur Force $\{F\}$ est relié au vecteur déplacement $\{U\}$ par l'équation suivante :

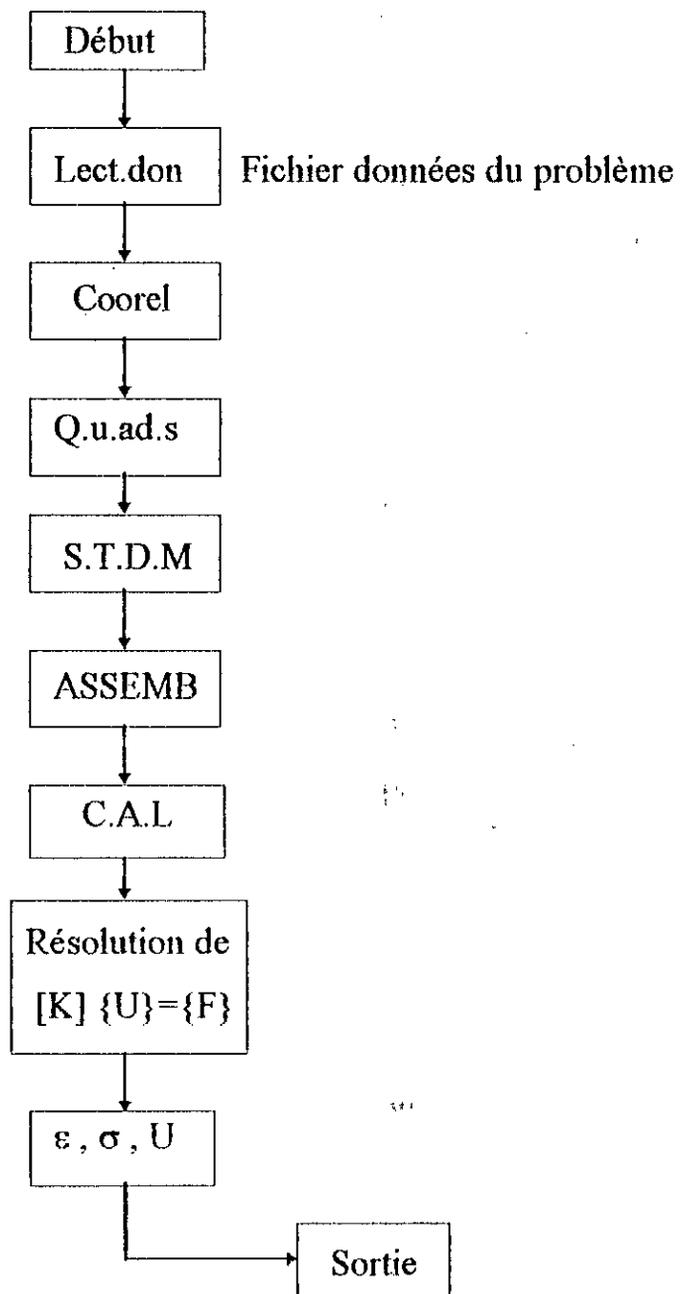
$$\{F\} = [K].\{U\} \quad ; \quad [K] \text{ matrice de Rigidité .}$$

Les quantités inconnues dans cette équation sont les déplacements , et l'objet de la résolution est la détermination des déplacements nodaux $\{U\}$. Le travail numérique qui permet la mise en oeuvre de cette étude pour toute structure réelle rend l'utilisation de calculateurs numériques essentielle à l'application de la M.E.F.

Pour notre étude , nous avons élaboré un programme utilisant les éléments rectangulaires à quatre noeuds. Il permet de déterminer les déplacements, les contraintes et les déplacements dans les éléments de la structure. Une fois calculées , les contraintes et les déformations seront comparées à des valeurs limites admissibles des matériaux utilisés.

Programme : D. C. M. E. F

Le programme élaboré est constitué de dix grandes parties (sous-programmes), chacun d'eux ayant une fonction particulière qui sera définie ultérieurement.



Les Sous Programmes

* Sous-programme ASSEMB :

Permet de faire l'assemblage des matrices rigidité élémentaires, et des vecteurs forces élémentaires , en utilisant les localisations de chaque élément .

* Sous-programme PROP :

Permet d'écrire les propriétés de tous les éléments sur fichier. Il suffit de lui donner le nombre de couches et les caractéristiques de chaque couche (Coefficient de Poisson et module de Young).

* Sous-programme CONNEC :

Il permet de faire les connexions relatives à chaque élément .La numérotation se faisant dans le sens des aiguilles d'une montre.

* Sous-programme LOCEF :

Sous-programme qui permet de faire la localisation des degrés de liberté relatifs à chaque élément, rappelons que le degré de liberté de chaque noeud étant égal à deux (02) : un déplacement horizontal et un déplacement vertical.

* Sous-programme VFEL :

Il permet de faire la répartition de la charge q (répartie en KN/m^2) entre tous les noeuds chargés , il suffit de lui donner le chargement global , et les numéros des noeuds chargés .

* Sous-programme COOREL :

Permet de calculer les coordonnées de tous les noeuds avec raffinement. Il suffit de lui donner les rayons et les épaisseurs des couches.

* Subroutine Quads :

Cette subroutine a pour rôle de déterminer ou de calculer les matrices élémentaires de tous les éléments. Ceci, à partir des fonctions de formes et de leurs dérivées par des éléments de référence.

* Subroutine STDM :

Elle permet d'évaluer la matrice de transformation B de déformation-déplacement au point (r,s) de l'élément de référence pour un élément quadrilatéral.

* Subroutine C.A.L :

Afin de supprimer la singularité de la matrice de rigidité globale (K) , il faut introduire les conditions aux limites (déplacements et forces). Tel est le but ou l'objectif de ce sous-programme.

* Subroutine de GAUSS J :

Subroutine de résolution du système $[K] \{U\} = \{F\}$ par la méthode d'élimination de GAUSS, ce système est résolu après modification de la matrice $[K]$ et du vecteur $\{F\}$ pour tenir compte des CAL.

Vue la nature du problème, les noeuds doivent être correctement numérotés, et les termes non nuls de $[K]$ sont concentrés dans une bande étroite et adjacente à la diagonale principale. Ce qui nous amène à faire un stockage par ligne de ciel.

Chapitre VI

Exemples d'application et Comparaison des Résultats

Interprétation des résultats

- Les figures (6.1) et (6.2) de distribution des contraintes radiales dans la couche de roulement et dans la couche de base, indiquent que la différence entre valeurs limites des contraintes radiales est très significative (traction : 100KPa dans la couche de roulement et 30KPa dans la couche de base. Compression : 400KPa dans la couche de roulement et 3KPa dans la couche de base).

Cette différence notable nous informe sur la distribution des contraintes radiales entre les différents milieux, ie : une concentration en grande partie dans la couche de roulement caractérisée par un module de rigidité relativement important, ce qui amène à étudier les effets des charges dans cette couche. La couche de roulement sert à réduire les effets des charges sur les couches inférieures, elle joue un rôle important dans les chaussées.

Toutefois la couche de roulement à elle seule n'est pas suffisante. Ainsi apparaît la nécessité d'une deuxième couche dite de base, car le module du sol-support est toujours faible(un bon sol-support correspond à 100MPa environ).

- La figure (6.3) des déformations à la base de la couche de roulement indique un allongement dans la région chargée et une atténuation des déformations radiales au delà d'une certaine distance (1m).

- La figure (6.6) montre la distribution des déplacements verticaux en surface, le long d'une distance de 1m à partir de l'axe de la charge, comparés à ceux obtenus par le logiciel ALIZE qui se base sur l'approche analytique du problème.

261 éléments sont utilisés dans un massif de 2m de largeur et 3m de profondeur. il est à noter que les points de la figure ALIZE ont été reportés à partir d'un graphe.

- Les valeurs limites des figures (6.7) et (6.8) montrent le rôle du module de rigidité de la couche de roulement et la variation des contraintes radiales à la base de cette couche. Ces figures montrent aussi qu'un module de rigidité élevé dans la couche de roulement absorbe une grande partie des charges.

- La figure (6.9) indique; pour un bi-couche ;l'influence de l'épaisseur de la couche de roulement sur les déformations à sa base. plus l'épaisseur de la couche est grande, moindre est la déformation.

- Les figures (6.10) et (6.11) indiquent l'influence de l'épaisseur de la couche de roulement sur les déformations radiales et sur les contraintes radiales en couche de base. plus l'épaisseur est grande ,moindre est l'effet sur la couche de base

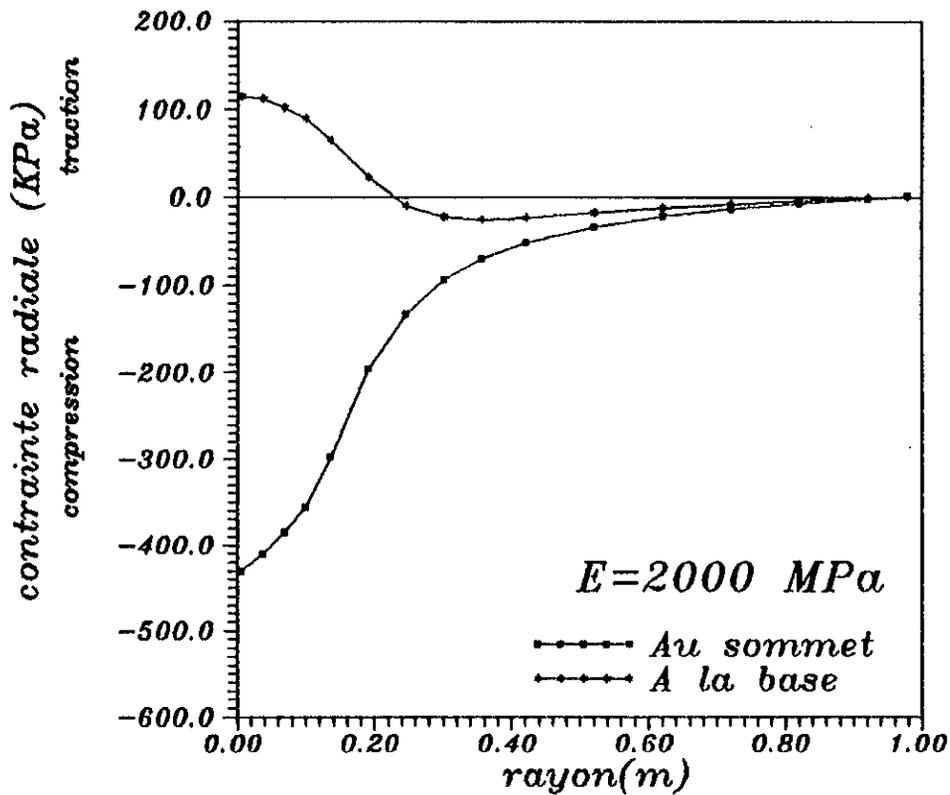
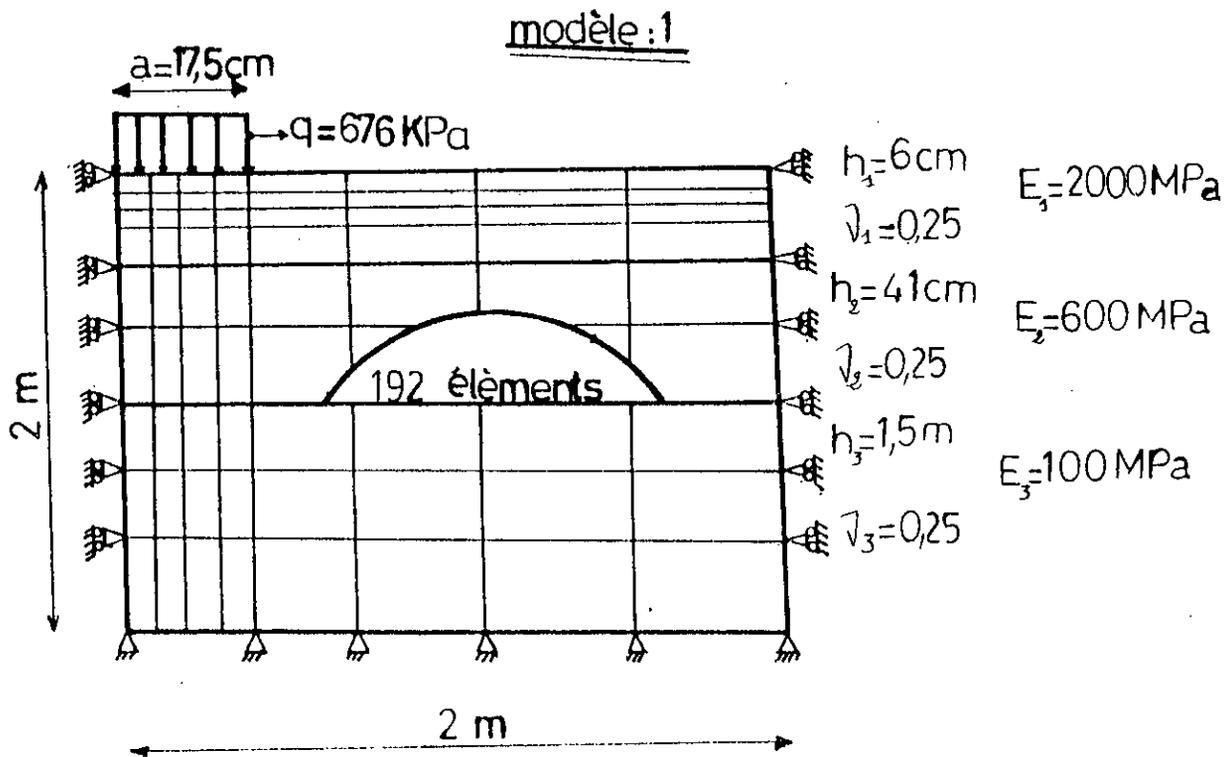


fig 8.1 -contraintes radiales-
sommet et base de la couche de roulement

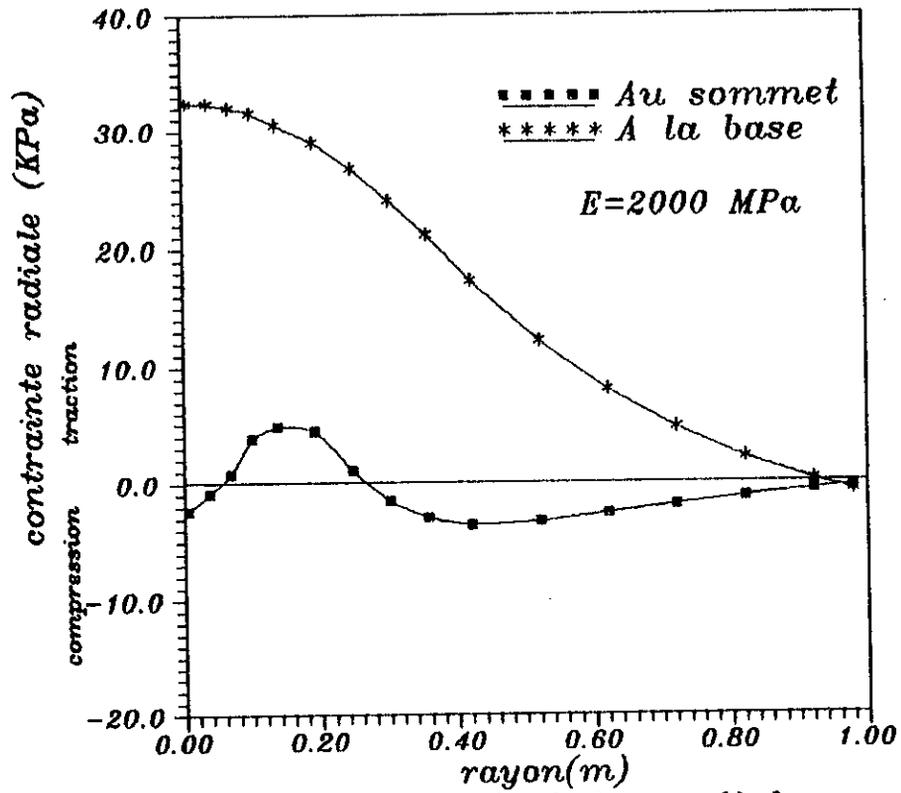


fig 6.2 - contraintes radiales - base et sommet de la couche de base

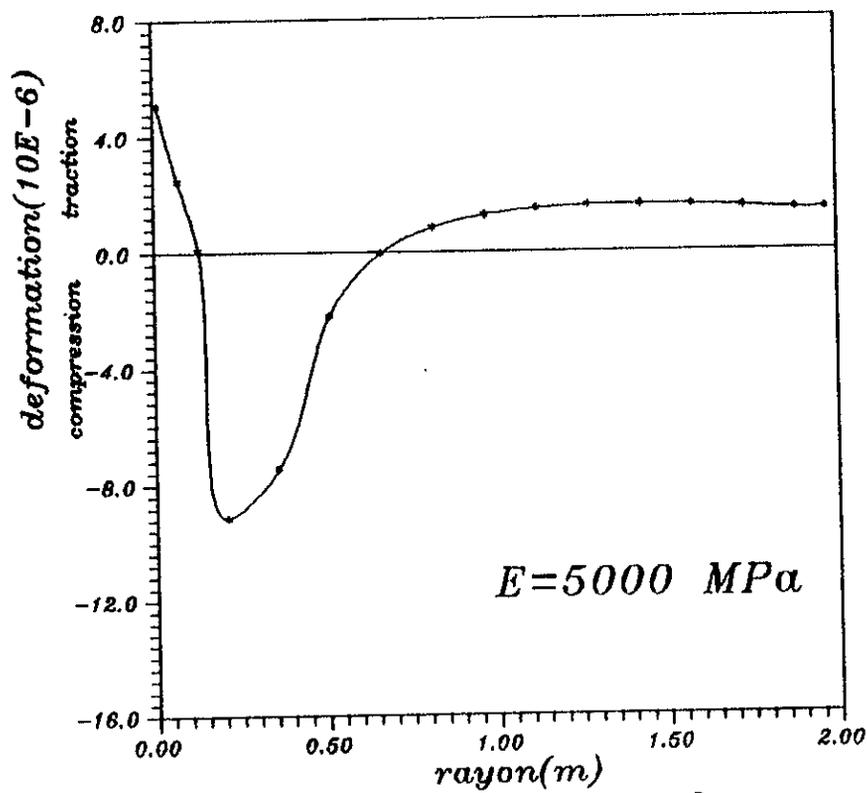
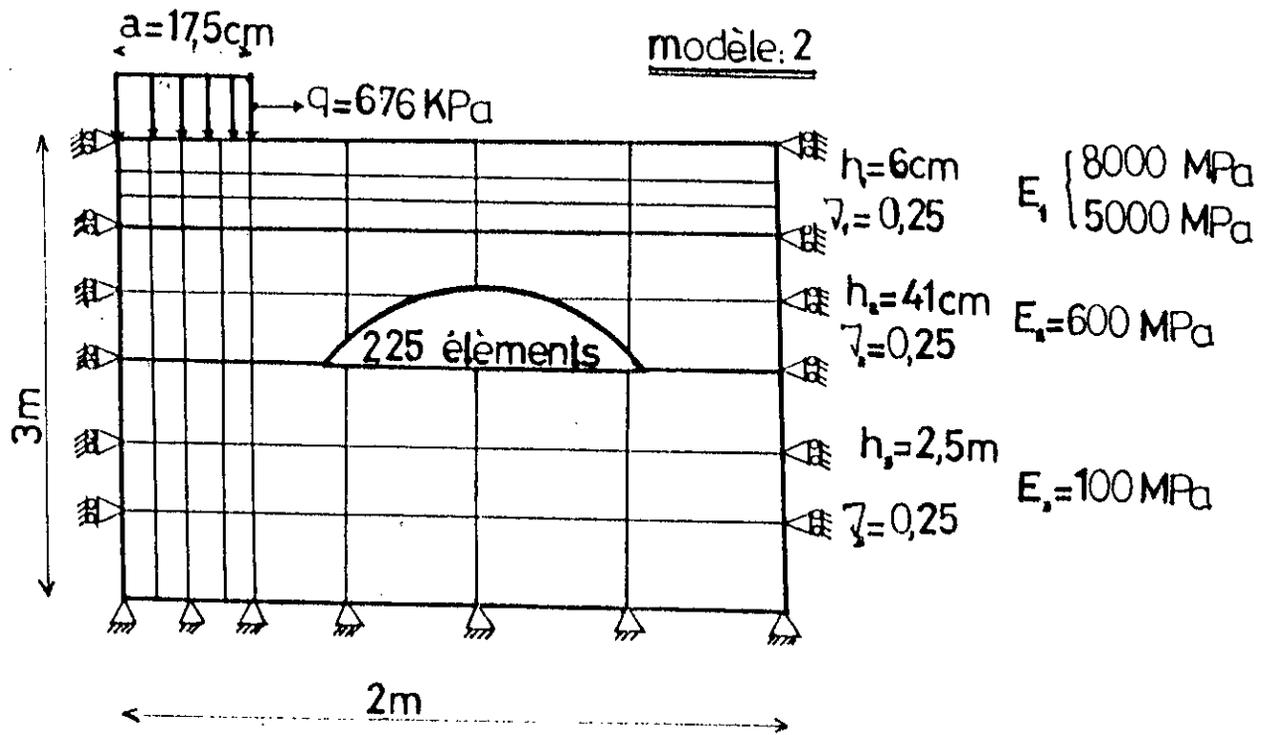


fig 6.3 déformations radiales à la base de la couche de roulement

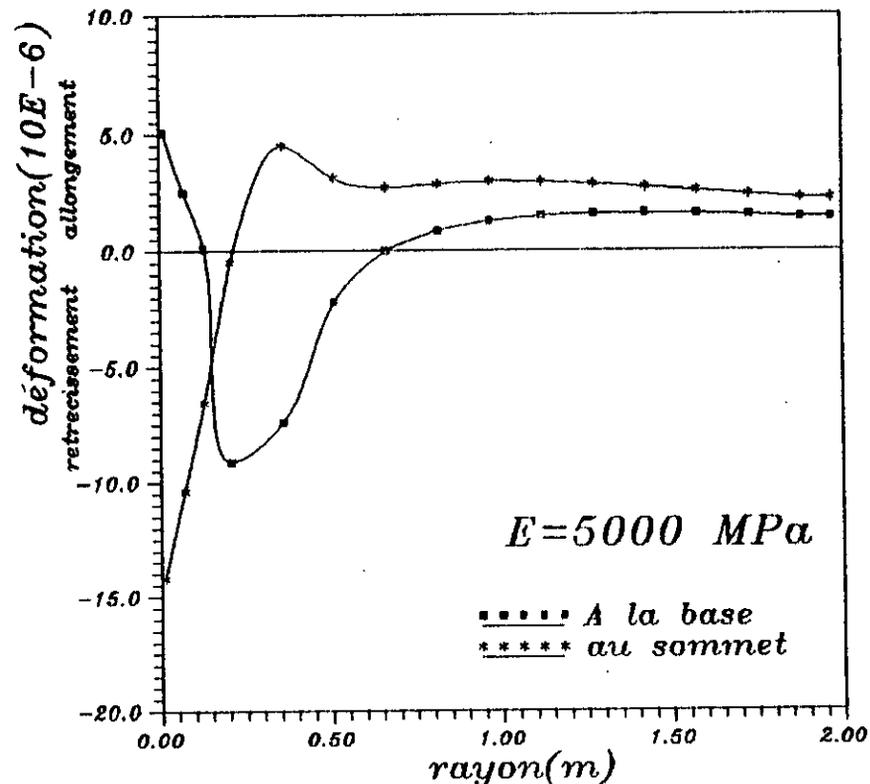
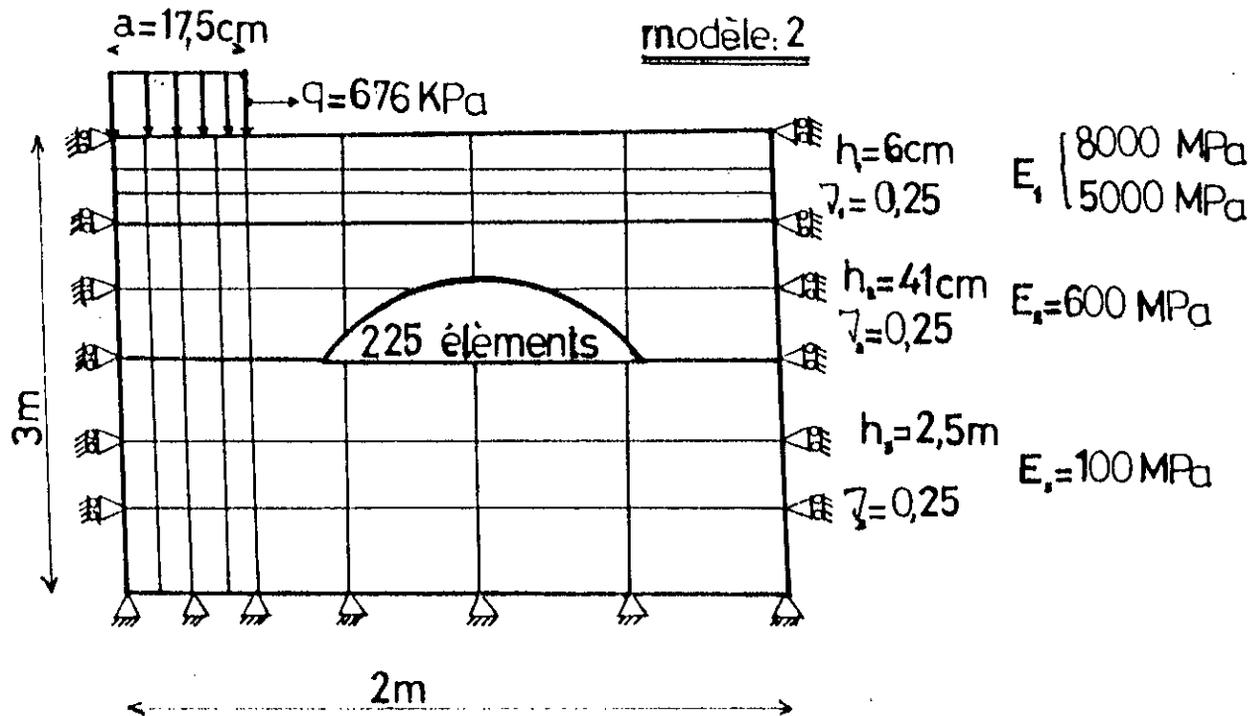


fig 6.4 Deformations radiales à la base et au sommet de la couche de roulement

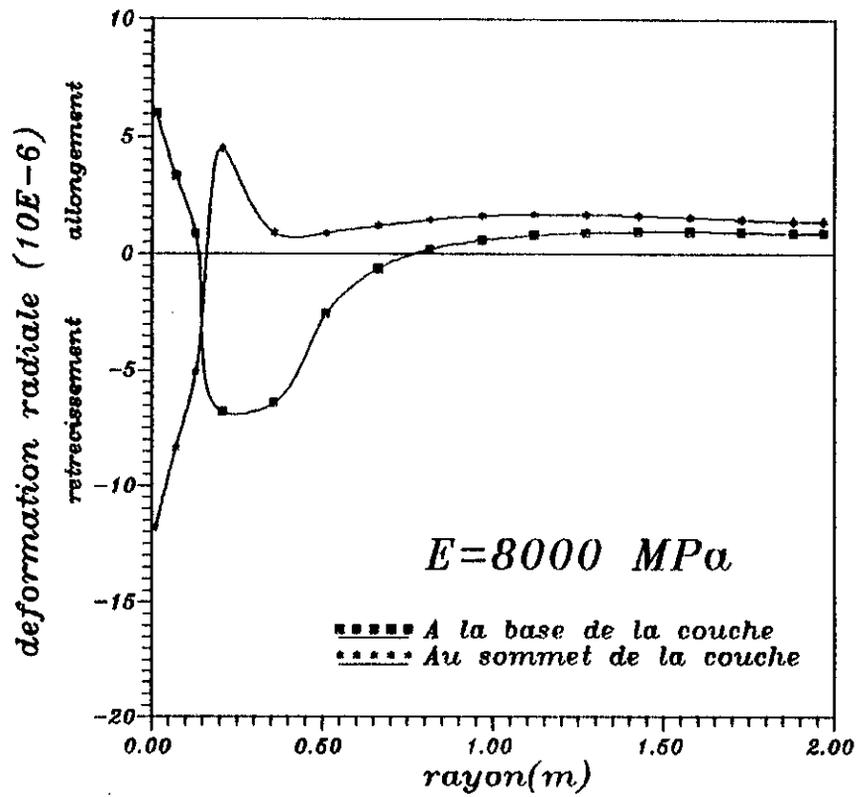


fig 6.5 Variation de la deformation radiale dans la couche de roulement le long de la distance radiale

modèle :3

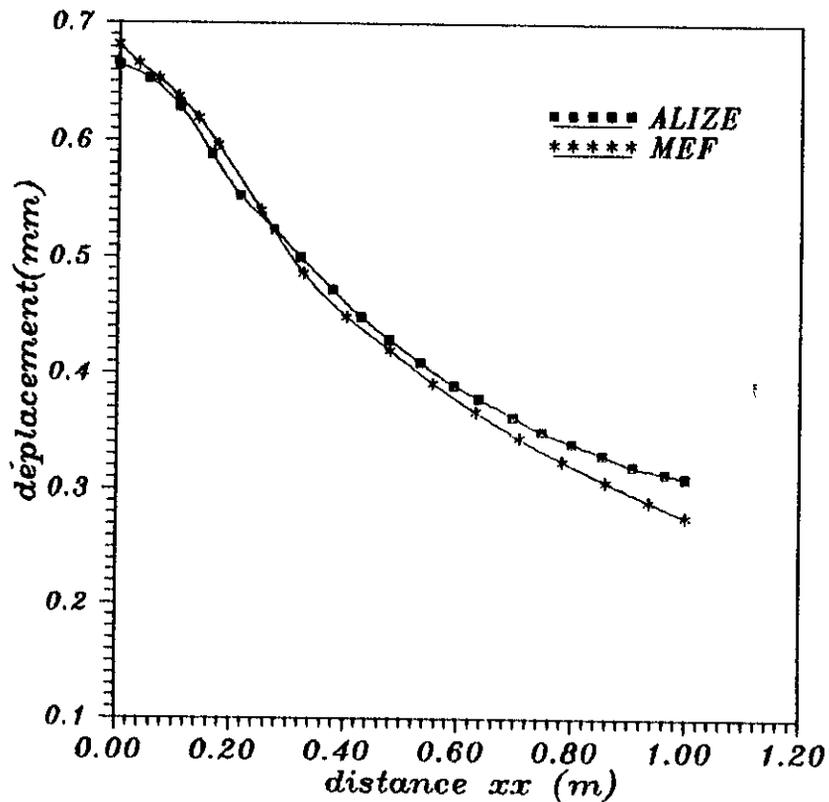
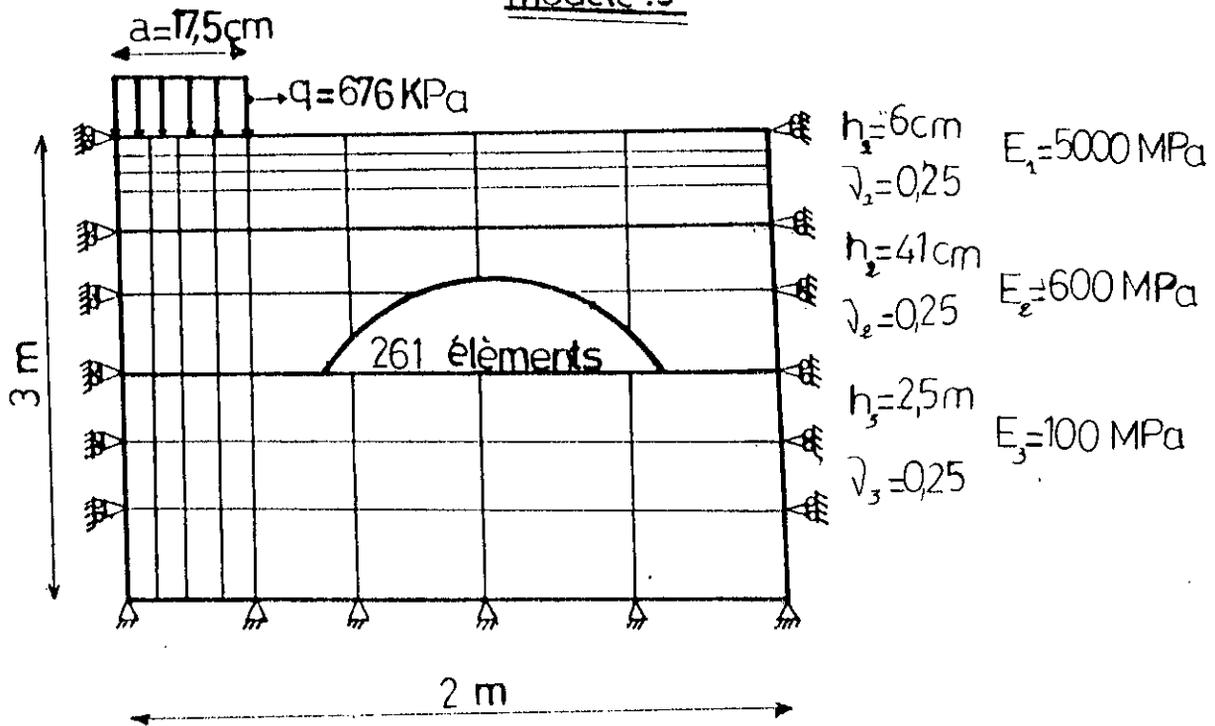


fig 6.8 comparaison des courbes de déplacement vertical à la surface de la chaussée entre ALIZE et MEF

modèle : 4

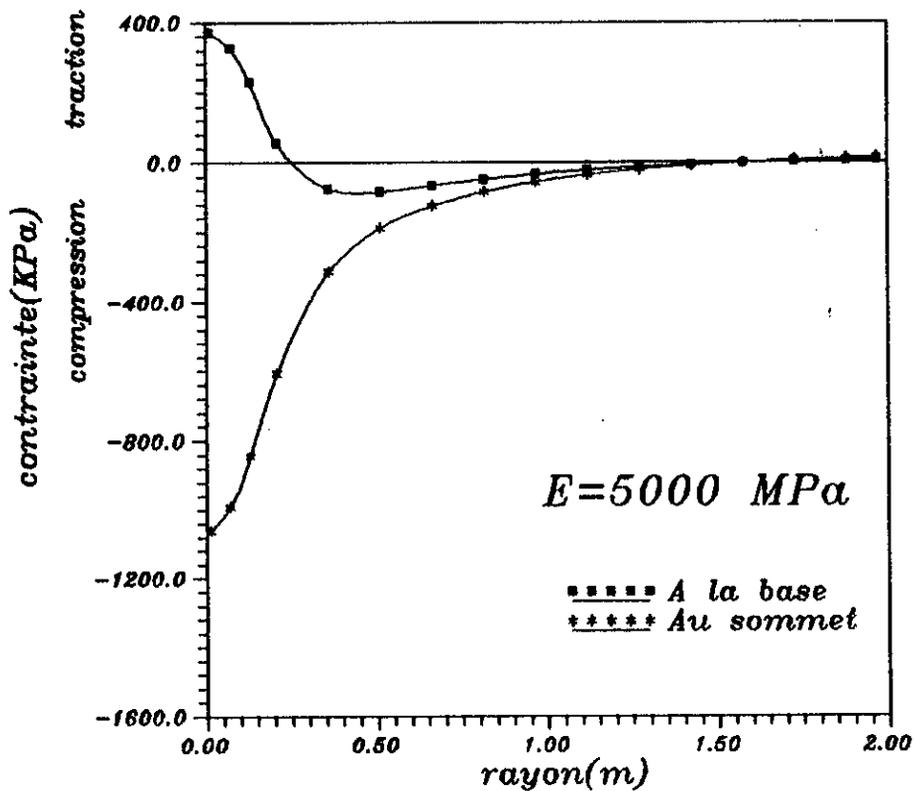
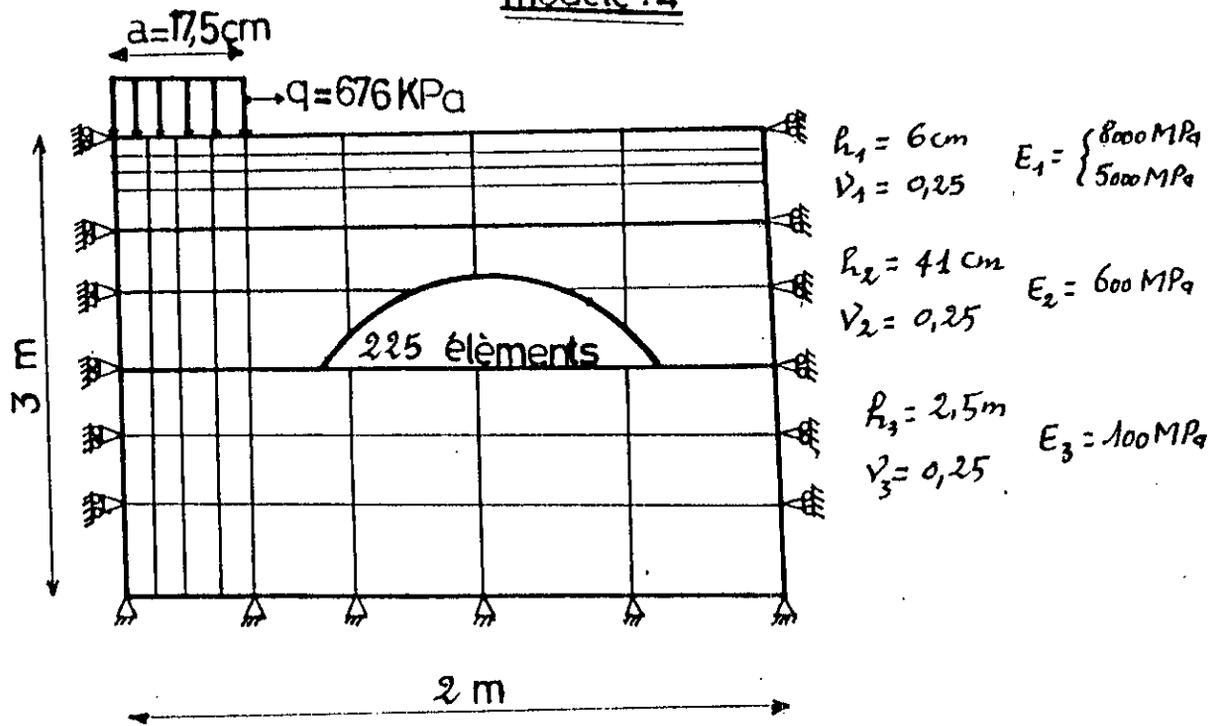


fig 6.7 Contraintes radiales au sommet et a la base de la couche de roulement

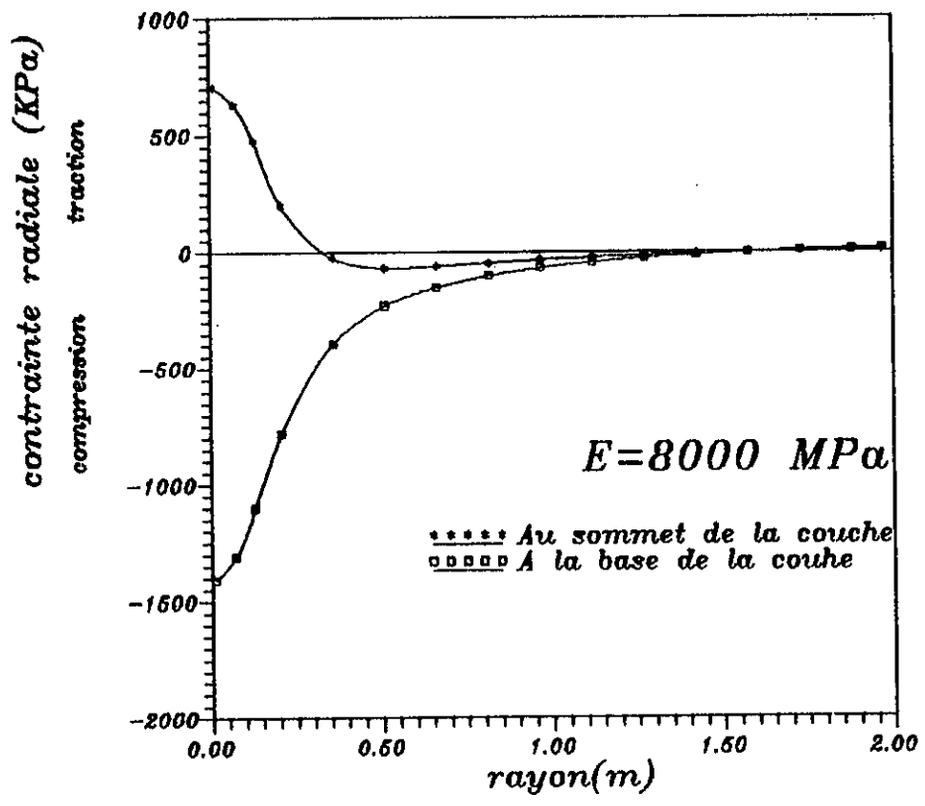


fig 6.8 Contraintes radiales a la base et au sommet de la couche de roulement

modèle : 5

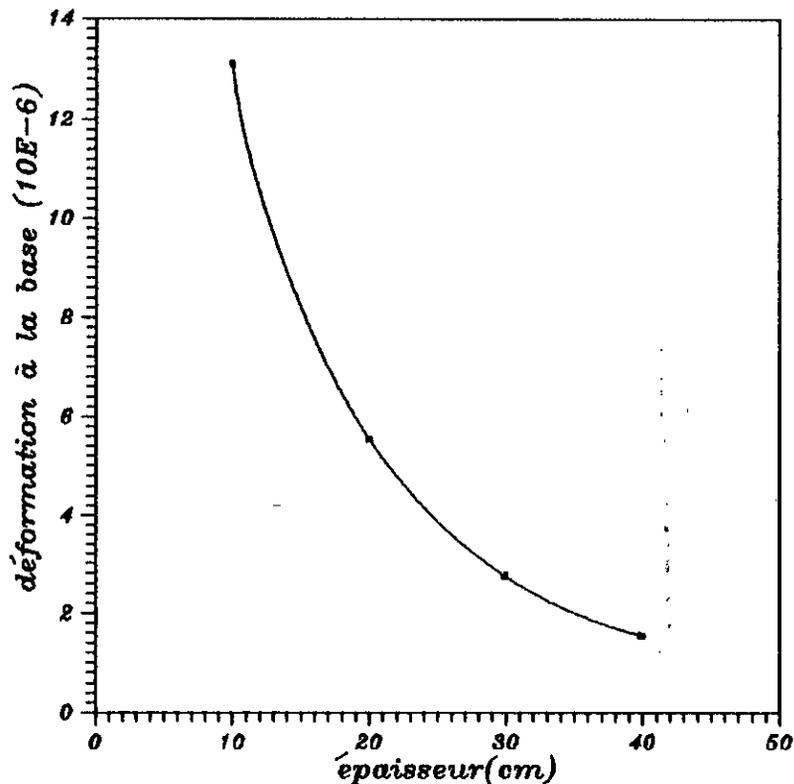
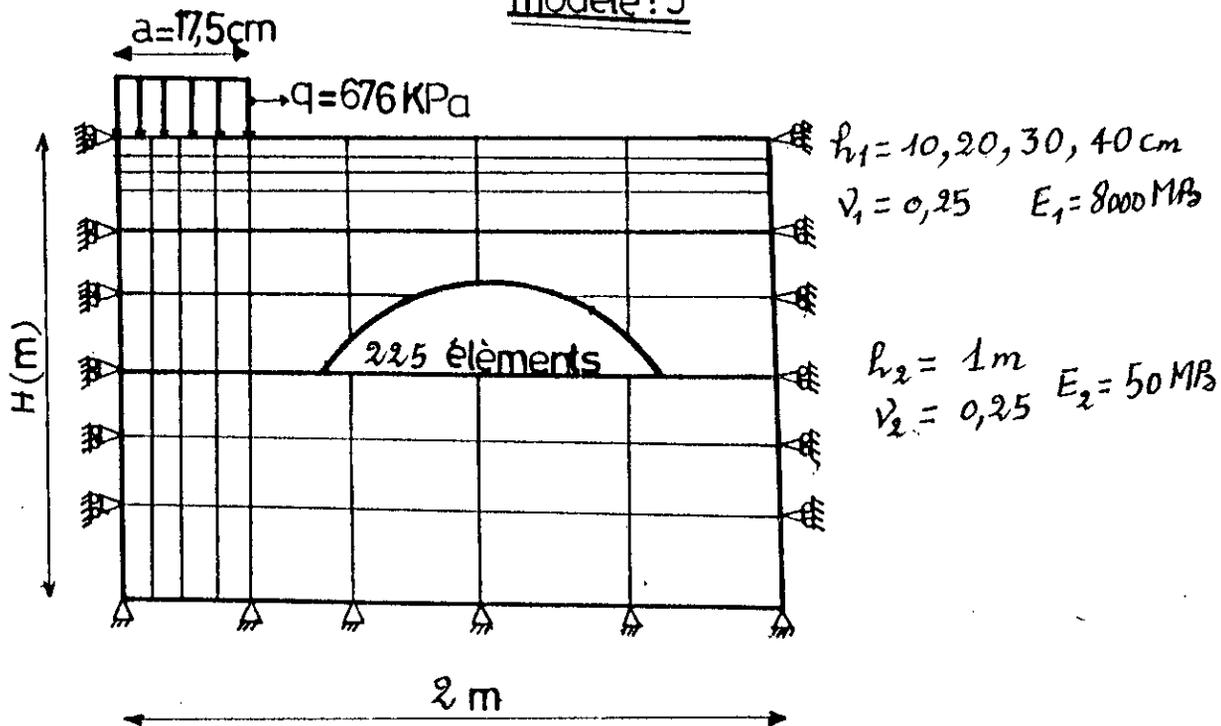


fig 6.9 Variations de l'allongement en fonction de l'épaisseur de la couche de roulement

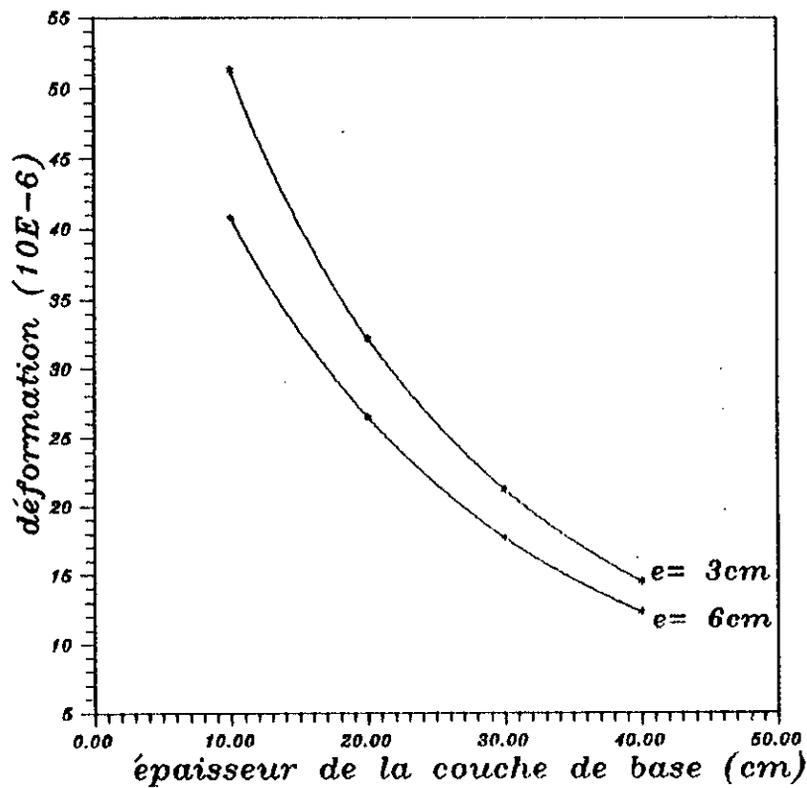
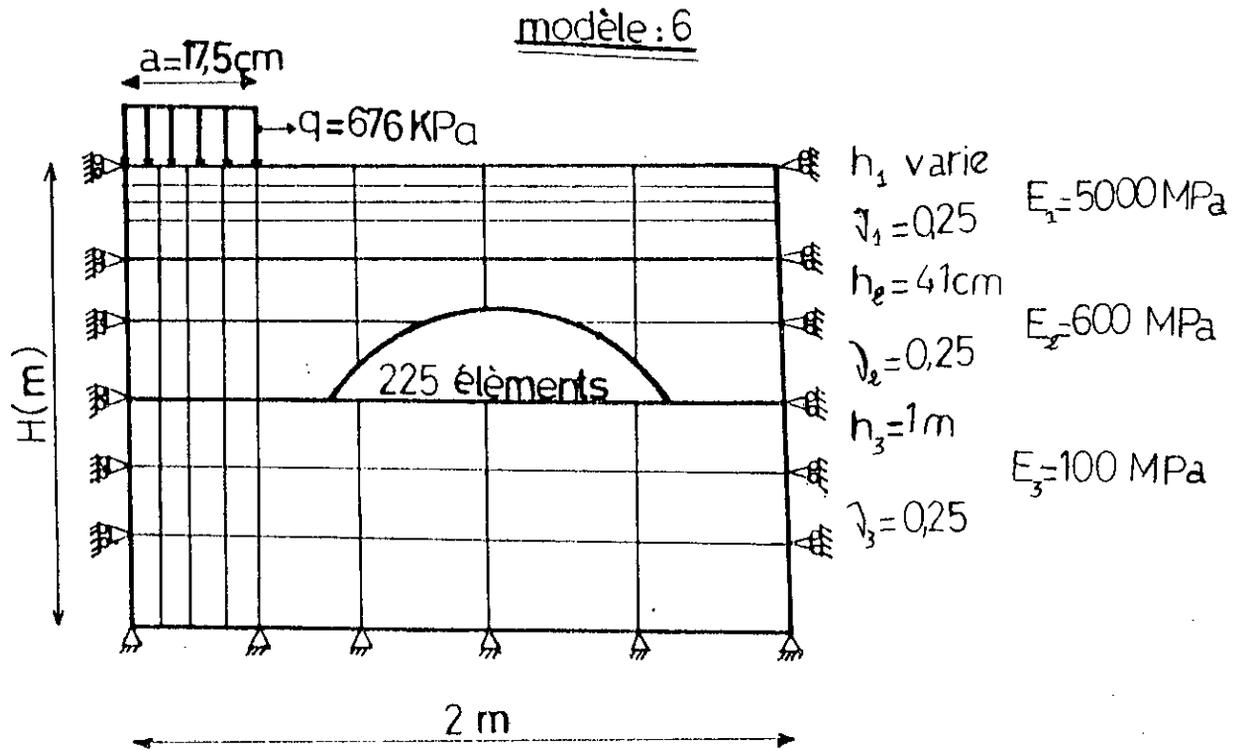


fig 6.10 Influence de l'épaisseur de la couche de roulement sur les déformations radiales en couche de base

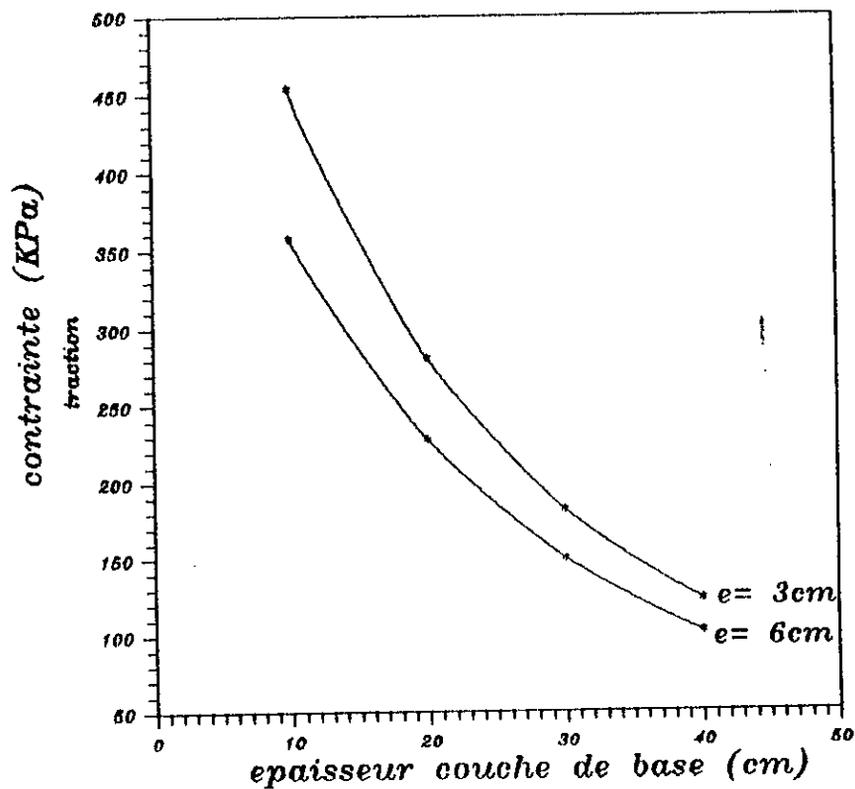
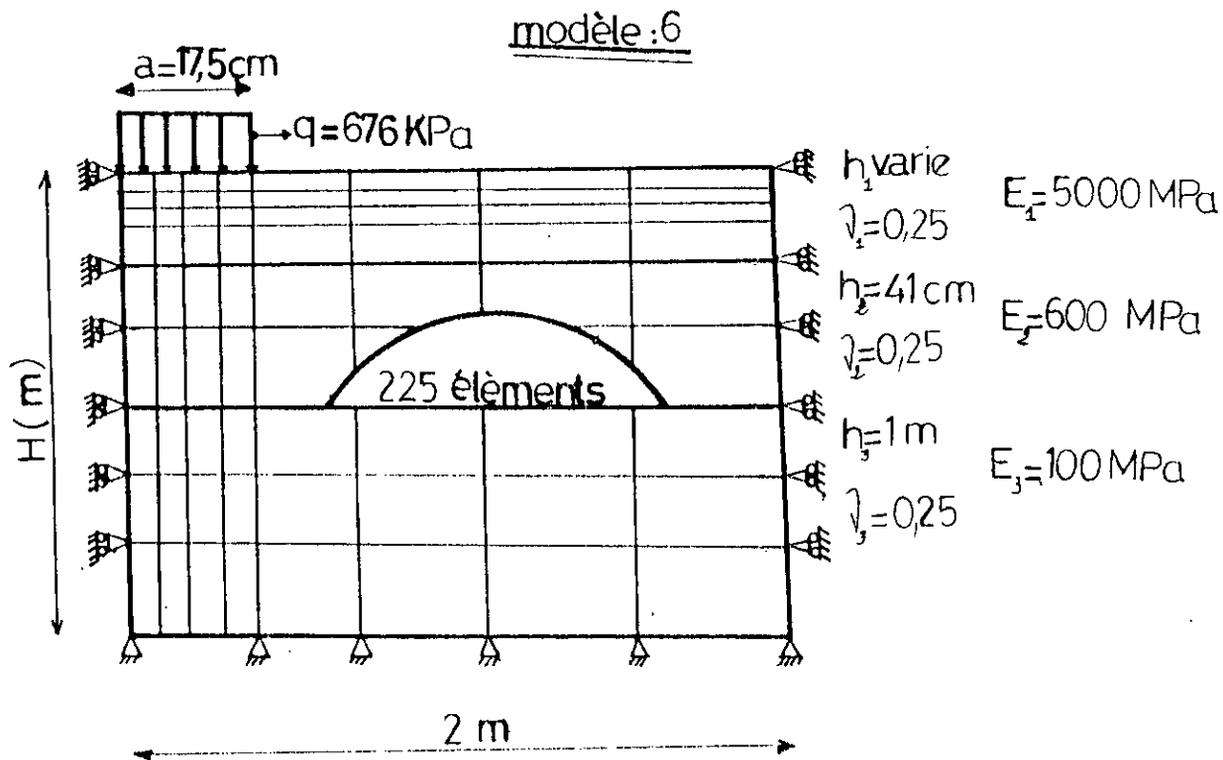


fig 6.11 Influence de l'épaisseur de la couche de roulement sur les contraintes radiales en couche de base

modèle : 7

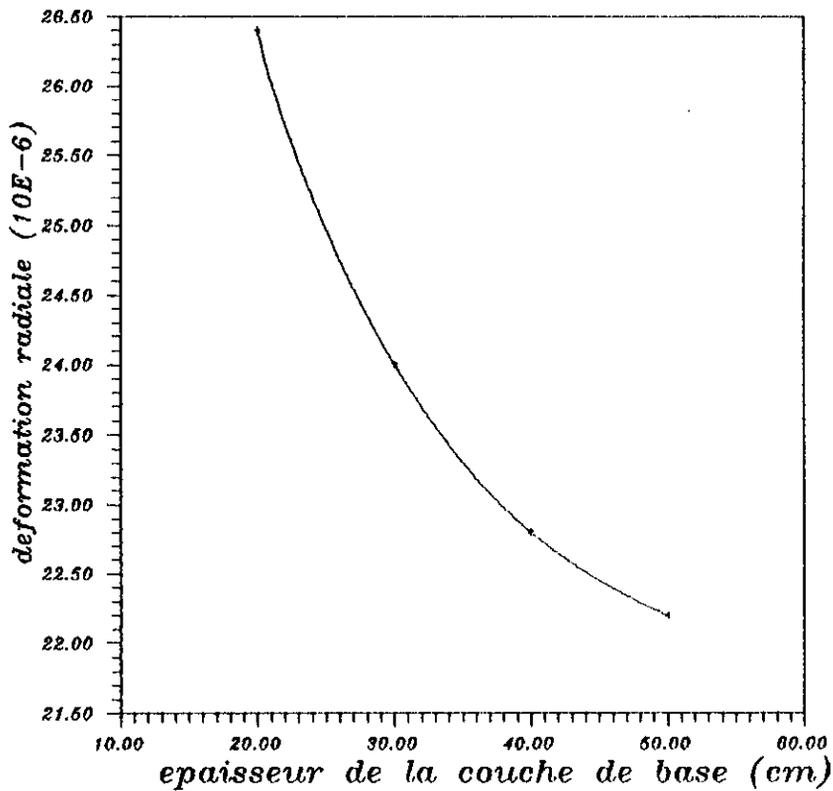
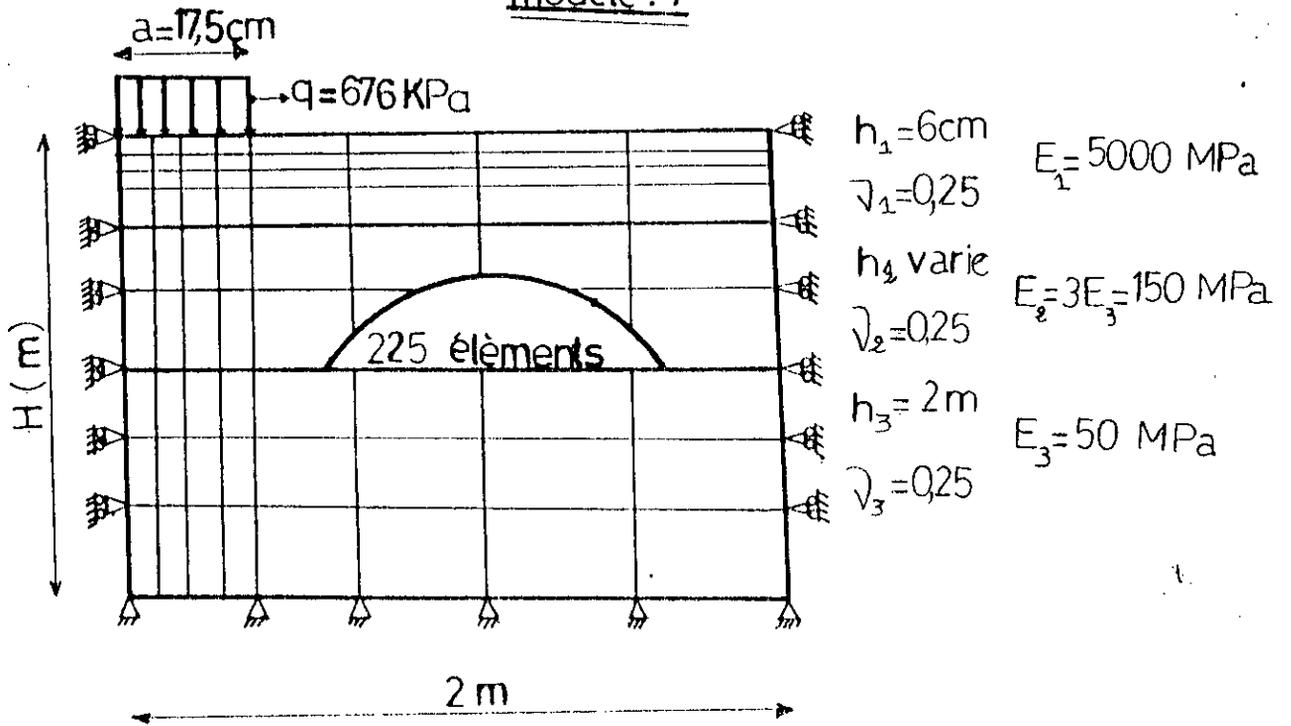


fig 6.12 Variation des déformations radiales a la base de la couche de roulement en foction de l'epaisseur de la couche base

CHAPITRE VII

CONCLUSION ET SUGGESTIONS

CONCLUSION ET SUGGESTIONS

L'étude du comportement des chaussées ou de distribution des charges par des méthodes théoriques ou expérimentales est complexe. Cette complexité, et les approximations qu'il est nécessaire de faire, font que, l'établissement d'un modèle d'étude théorique des chaussées, qui puisse au mieux représenter ce comportement, dépend essentiellement des hypothèses préalablement posées.

Un modèle d'éléments finis bidimensionnel pour l'étude des chaussées dans le cas d'un chargement statique équivalent par des essieux standards a été présenté et mis en oeuvre.

Dans ce modèle, la chaussée est discretisée en éléments finis et la formulation se base sur l'approche déplacement en axisymétrie.

Le programme élaboré permet, dans un domaine supposé élastique linéaire d'étudier principalement la répartition des contraintes et déformations radiales ainsi que les déplacements verticaux au niveau de la couche de roulement et de la couche de base.

Les résultats obtenus indiquent une concentration des contraintes radiales au niveau de la couche supérieure (de roulement) au voisinage de la charge. Ces résultats imposent un choix particulier des matériaux à utiliser dans la couche de roulement.

La seconde couche (dite de base) sert généralement d'intermédiaire entre la couche de roulement (de module de rigidité important) et la couche du sol - support (dite de fondation et qui a un module de rigidité faible par rapport à la première). Elle transmet à son tour une partie des sollicitations au sol - support.

La nature des liaisons entre couches des chaussées nécessite beaucoup d'attention.

Les couches collées présentent l'avantage d'une continuité supposée des contraintes et des déplacements. Notre étude a été effectuée en tenant compte de cet aspect.

L'étude effectuée sur le comportement des chaussées permet dans le cas d'un milieu élastique linéaire, isotrope, de passer à un stade préliminaire dans le dimensionnement de ce type de structure. C'est à dire un dimensionnement qui ne tient compte que de la rigidité des matériaux et de leurs épaisseurs.

Nous avons essayé d'étudier l'effet de la rigidité et de l'épaisseur des différents matériaux constituant la chaussée sur le comportement de celle-ci. Toutefois il reste à examiner l'influence d'autres paramètres par exemple la température et l'observation du comportement sous trafic des chaussées réelles construites conformément à une méthode donnée.

Cette étude reste limitée aux hypothèses émises (comportement linéaire élastique, chargement statique équivalent). La prise en considération de la non linéarité du comportement des matériaux constituant la chaussée et de la nature des liaisons entre couches (collées - décollées) peut constituer une suite à notre étude, de même que la simulation d'un cas freinage.

Annexe

Approximation sur l'élément:

La fonction approchée est exprimée par:

$$U = \sum_{i=0}^n a_i x^n \quad (1)$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$\langle f_n \rangle \{a_n\} \equiv [f_n] \cdot [a_n] \quad (2)$$

Cette forme d'approximation est appelée polynomiale.

$$U_i = \langle f_{ij} \rangle \{a_j\} \quad (3)$$

$$\{U_n\} = \begin{bmatrix} \langle f_{i1} \rangle & \{a_1\} \\ \langle \dots \rangle & \{ \dots \} \\ \langle f_{in} \rangle & \{a_n\} \end{bmatrix} = [F_n] \cdot [a_n] \quad (4)$$

U_n : Valeurs aux noeuds.

F_n : Valeurs des polynômes aux noeuds (x_i, y_i)

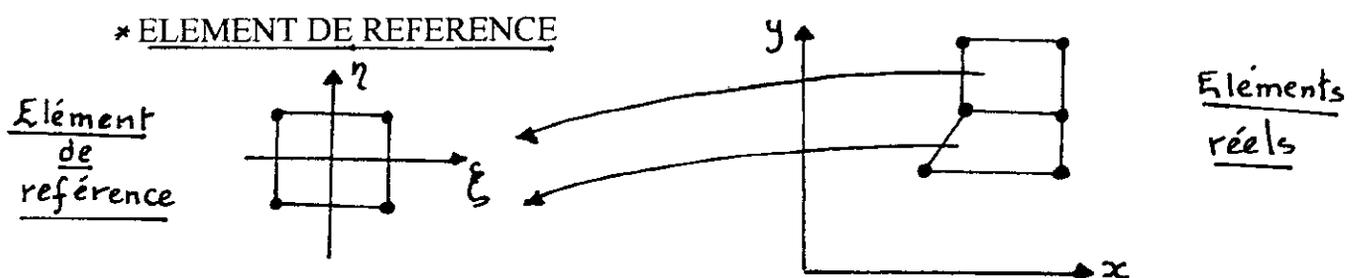
a_n : Variables généralisées

$$(4) \Rightarrow \text{on tire les } a_n : \{a_n\} = [p_n]^{-1} \{u_n\}$$

$$\text{dans (2)} \Rightarrow U = \langle P \rangle [P]^{-1} \cdot \{U_n\}$$

$$U = \langle N \rangle \{U_n\}$$

C'est la forme la plus utilisée par le fait que ses variables sont les valeurs de la fonction aux noeuds, donc la résolution donne directement ces valeurs, on évite leur calcul à l'avance. Elle est appelée APPROXIMATION NODALE.



cette methode est conditionnée par l'existence d'une relation bijective entre les coordonnées cartésiennes $X\{x,y\}$ et les coordonnées locales $\xi \{\zeta,\eta\}$

$$X = f(\xi)$$

$$x = N\{X_n\} ; \quad y = N\{Y_n\}$$

pour le cas bidimensionnel

$$x = \langle N(\xi, \eta) \rangle \{X_n\} ; \quad y = \langle N(\xi, \eta) \rangle \{Y_n\}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial \xi} = \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} = \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{Bmatrix} N_{,\xi} \\ N_{,\eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}}_{[J]} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix}$$

[J] est appelée matrice jacobienne de l'élément.

$$dx dy = \det(J) d\xi d\eta$$

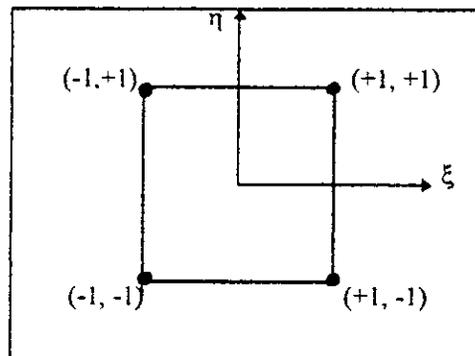
*** L'élément utilisé :**

C'est un élément quadrilatéral à 4 noeuds.

$$\langle N \rangle = 0.25 \langle (1-\xi)(1-\eta) \quad (1+\xi)(1-\eta) \quad (1+\xi)(1+\eta) \quad (1-\xi)(1+\eta) \rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\rangle = 0.25 \langle -1+\eta \quad 1-\eta \quad 1+\eta \quad -1-\eta \rangle$$

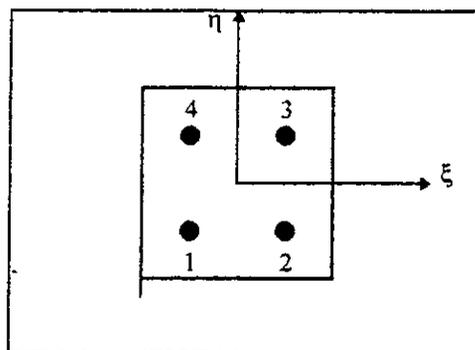
$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\rangle = 0.25 \langle -1+\xi \quad -1-\xi \quad 1+\xi \quad 1-\xi \rangle$$

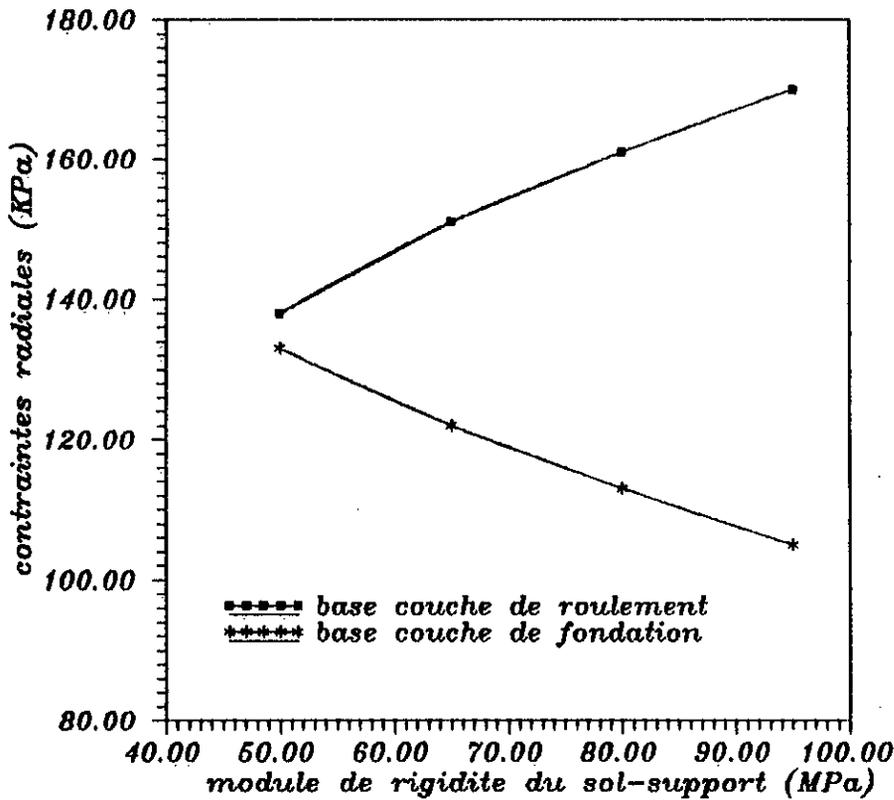
***Points de quadrature de Gauss:**

Elément rectangulaire:

ξ_i	a	-a	-a	a
η_i	b	b	-b	-b

$$a = b = 0.5773502691896$$





couche:
 $E_1 = 5000 \text{ MPa}$
 $E_2 = 600 \text{ MPa}$
 $E_3 = \text{varie}$
 $h_1 = 6 \text{ cm} \quad \nu_1 = 0,25$
 $h_2 = 41 \text{ cm} \quad \nu_2 = 0,25$
 $h_3 = 2 \text{ m} \quad \nu_3 = 0,25$

fig I Variation des contraintes radiales a la base des couches de fondation et de roulement en fonction de la rigidite du sol-support

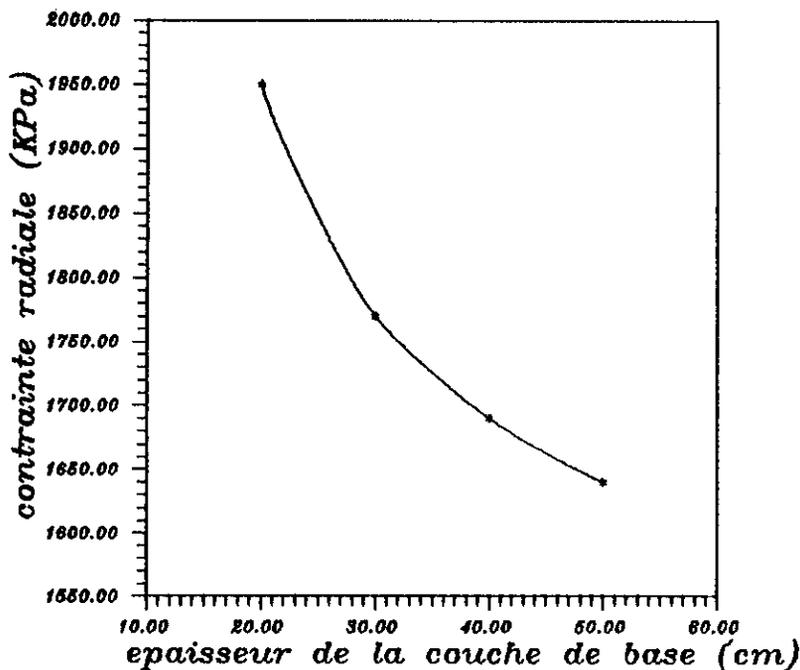


fig II Variation des contraintes radiales a la base de la couche de roulement en fonction de l'epaisseur de la couche de base

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- (1) **K.J. BATHE and E.L. WILSON**
« NUMERICAL METHODS IN FINITE ELEMENT ANALYSIS »
PRENTICE-HALL (1979).
- (2) **A. BAUCHERON DE BOISSOU DY, J.P. MARCHAND**
« PRATIQUE D'ALIZE III »
L.C.F.C (SEPTEMBRE 1981).
- (3) **BATOS et G.DHAT**
« MODELISATION DES STRUCTURES PAR ELEMENTS FINIS »
VOLUME 1 SOLIDES ELASTIQUES
HERMES 1990
- (4) **J.COSTET et G.SANGLERAT**
« COURS PRATIQUE DE MECANIQUE DES SOLS »
BORDAS (1975).
- (5) **G.DHAT et G.TOUZOT**
« UNE PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS »
MALOINE EDITEUR (1984)
- (6) **R.H. GALLAGHER**
« INTRODUCTION AUX ELEMENTS FINIS »
EYROLLES PARIS (1979).
- (7) **BERNARD ECKMANN** (*Centre de recherche ESSOSAF*)
« MOEBIUS » UN LOGICIEL DE CALCUL POUR LA MECANIQUE DES CHAUSSEES
REVUE GENERALE DES ROUTES ET DES
AERODROMES (MARS 1987)
- (8) **GERMAIN**
« COURS DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS »
TOME 1. PRESSE ENPC (1990)
- (9) **SAMY GUEZOULI**
« COMPORTEMENT DES CHAUSSEES SOUPLES : MODELISATION ET SIMULATION
NUMERIQUE »
THESE DE DOCTORAT , UNIVERSITE DE NANTES
(SEPTEMBRE 1994)

(10) J.L. PAUTE (Laboratoire regional des ponts et chaussées ST. BRIEUC)
« LES GRAVES NON TRAITÉES » JOURNÉE D'ÉTUDE (5 et 6 JANVIER 1995)

(11) L.L. PAUTE , PIERRE HORNYCH , J.P. BENABEN
« COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES GRAVES NON TRAITÉES »
BULLETIN DE LIAISON . LABORATOIRE PONTS ET CHAUSSEES (1990)

(12) CHRISTIAN PEYRONE , GILBERT CAROFF
« DIMENSIONNEMENT DES CHAUSSEES »
E.N.P.C (1984)

(13) LENNETH ROCKEY ET WILLIAM GRIFFITHS
« INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS »
EDITIONS EYROLLES (1979)

(14) ALAIN VERGNE , MAURICE LEMAIRE , SERGE CAPERA
« MODELE MULTICOUCHE DE COMPORTEMENT D'UNE STRUCTURE ROUTIERE »
ANNALES DE L'INSTITUT TECHNIQUE DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS ,
N°390.

JANVIER 1981 .

(15) O.C. ZIENKIEWICZ AND R.L. TAYLOR
« THE FINITE ELEMENT METHOD » *Basic formulation and linear problems*
Mc. GRAW HILL COMPANY 1989

(16) L. SUKLJE
« RHEOLOGICAL ASPECTS OF SOIL MECHANICS »
UNIVERSITY OF LJUBLJANA, YUGOSLAVIA 1969.

(17) M.E. MAN
« FOUNDATIONS OF THEORETICAL SOIL MECHANICS »
Mc GRAW HILL BOOK COMPANY 1966

(18) H.G. ROULOS AND E.H. DAVIS
« ELASTIC SOLUTIONS FOR SOIL AND ROCK MECHANICS »
JOHN WILEY AND SONS, N.Y 1974

(19) FREMOND ET MUCCI
« COMPORTEMENT DES CHAUSSEES RIGIDES ET APPLICATION A LEUR
DIMENSIONNEMENT »