

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

Genie Civil

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Etude statique et dynamique des
barrages par la methode des elements finis
et la methode des elements frontieres.*

Proposé par :

M^r BERRAH
M^r DEMIDEM

Etudié par :

M^r BENABDELHAK, N.
M^r BELAOURA, M.

Dirigé par

M^r BERRAH
M^r DEMIDEM

PROMOTION

juin 1994

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

Genie Civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Etude statique et dynamique des
barrages par la methode des elements finis
et la methode des elements frontieres.*

Proposé par :
M^r BERRAH
M^r DEMIDEM

Etudié par :
M^r BENABDELHAK, N.
M^r BELAOURA, M.

Dirigé par
M^r BERRAH
M^r DEMIDEM

PROMOTION
juin 1999

الموضوع:

تحليل سكوني و ديناميكي للسدود بطريقة العناصر المحدودة و طريقة المعادلات
التكاملية على الحدود

الملخص:

هدف هذا البحث هو معالجة السدود الثقيلة و السدود الترابية، لهذا الغرض طورت برامج
آلية بالتجزئات المنتهية و المعادلات على الحدود
قدمنا بعض الأمثلة العددية التي تبين مدى دقة هاتين الطريقتين

SUMMARY:

STATIC and dynamic analysis of dams by finite element methode and boundary
element metode.

AB stract

The aim of this researrch consists in the development of static and dynamic
analysis of earth dans and gravity dams. for this purpose, a finite elemènt
programmes and boundary element programmes have been developed.
a few numerical exemples are presented to demounstrate the degré of accurate
of these two méthods. ٤

SUJET

Analyse statique et dynamique des barrages par la méthode des éléments
frontières, et la methode des éléments finis.

RESUME

l'Objectif de cette recherche consiste en une analyse statique et dynamique des
barrages en terre et des barrages poids. Des programmes d'éléments finis et des
programmes d'éléments frontières ont été developpés à cet effet.
Quelques exemples numériques ont été présentés pour démontrer le degré de
puissance des deux méthodes

DEDICACES

- A mes parents,
- A toute ma famille,
- A tous mes amis.

Nourdine

- A ma mère,
- A mon père,
- A mes frères et soeurs,
- A tous mes amis,

Mebarek

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier nos deux promoteurs Mr. BERRAH et Mr. DEMIDEM pour leurs encouragements et l'aide précieuse qu'ils nous ont apportée tout au long de la réalisation de ce projet.

Nous remercions vivement pour l'aide que nous avons trouvée auprès de nos amis en post graduation notamment Melle AIMENE et Mr. HADID.

Nos remerciements vont également à l'ensemble des enseignants qui ont contribué à notre formation ainsi que l'ensemble des responsables du centre de calcul de l'E.N.P.

SOMMAIRE

- INTRODUCTION

CHAPITRE I : THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE

I-1 : Introduction

I-2 : Equations gouvernantes

I-2-1: Les équations différentielles d'équilibre

I-2-2: Les équations déformations-déplacements

I-2-3: Les équations intrinsèques du matériau

I-3 : Problèmes de l'élasticité plane

I-3-1 : Problèmes de contraintes planes

I-3-2 : problèmes de déformations planes

I-3-3 : Fonction de contraintes d'AIRY

CHAPITRE II : DYNAMIQUE DES STRUCTURES

II-1 : Introduction

II-2 : Caractéristiques essentielles d'un phénomène dynamique

II-3 : Formulation des équations de mouvement

II-3-1 : Principe de D'ALEMBERT

II-3-2 : Principe des déplacements virtuels

II-3-3 : Principe de HAMILTON

II-4 Exemple d'un système à un degré de liberté

II-4-1 Méthodes de formulation

a- Application du principe de D'ALEMBERT

b- Application du principe du travail virtuel

c- Application du principe de HAMILTON

II-4-2 Oscillations libres

CHAPITRE III : METHODE DES ELEMENTS FINIS

III-1 : Introduction

III-2 : Historique

III-3 : La méthode des éléments finis pour l'élasticité plane

III-3-1 Concepts d'éléments finis

III-3-2 Différents types de formulation

III-3-3 Evaluation de la matrice de rigidité

a- Choix de la fonction déplacement

b- Calcul de la matrice de rigidité de l'élément triangulaire

c- Propriétés de la matrice de rigidité

d- Généralisation au domaine entier-règle d'assemblage

III-3-4 Convergence de la méthode des éléments finis

a- Convergence monotone

b- Convergence non monotone

III-3-5 Formulation isoparamétrique

III-4 La méthode des éléments finis en dynamique

III-4-1 Equation d'équilibre dynamique

III-4-2 Détermination de la matrice masse

a- Matrice masse cohérente

b- Matrice masse concentrée à coefficients égaux

c- Matrice masse concentrée à coefficients inégaux

III-4-3 Vibrations libres des structures

CHAPITRE IV : METHODE DES RESIDUS PONDERES

IV-1 :Introduction

IV-2 :Diffinition de la méthode

IV-3 Méthodes de distribution de l'erreur

IV-3-1 :Méthode des moments

IV-3-2 :Méthode de collocation par points

IV-3-3 :Méthode de collocation par sous-domaines

IV-3-4 :Méthode de GALERKINE

IV-4 Performances des méthodes des résidus pondérés

CHAPITRE V : METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES

V-1 :Introduction

V-2 :Historique

V-3 :Formulation de l'équation intégrale

V-3-1 :identité de SOMI GLIANA

V-3-2 :Détermination de la solution fondamentale

V-3-3 Equation intégrale aux frontières

V-4 :Discrétisation de l'équation intégrale

V-4-1 Fonctions d'interpollations

a- Eléments constants

b- Eléments lineaires

c- Eléments quadratiques

V-5 :Mouvement de corps rigide

V-6 :Equation intégrale pour les points internes

V-7 :Problème de coin

V-8 Equations intégrales aux frontières en dynamique

V-8-1 Différentes approches dans l'analyse dynamique en B.E.M.

V-8-2 Equations gouvernantes et conditions aux frontières

V-8-3 Représentation matricielle en dynamique

a- Approximation de l'intégrale inertielle

b- Discrétisation de l'équation intégrale

c- Vibrations libres

CHAPITRE VI : METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES PROPRES

VI-1 : Introduction.

VI-2 : Propriétés fondamentales des systèmes propres.

- VI-2-1 : Valeurs propres.
- VI-2-2 : Vecteurs propres.
- VI-2-3 : Quotient de Rayleigh.
- VI-2-4 : Décalage des valeurs propres.
- VI-3 : Techniques d'approximation : L'analyse de Rayleigh-Ritz
- VI-4 : Méthodes de résolution des problèmes aux valeurs propres
 - VI-4-1 : Méthodes d'itérations vectorielles
 - a- L'itération inverse.
 - b- L'itération directe.
 - c- Convergence
 - VI-4-2 : Méthode de transformation : Méthode de JACOBI.
 - a- Description de la méthode de JACOBI
 - b- Algorithme de la méthode le JACOBI
- VI-5 : Résolution des problèmes de grande dimension : Méthode du sous-espace.
 - VI-5-1 Description de la méthode
 - VI-5-2 Algorithme de la méthode du sous-espace
 - VI-5-3 Convergence

CHAPITRE VII : PRESENTATION DES PROGRAMMES INFORMATIQUES

- VII-1 Introduction
- VII-2 Structure globale d'un programme informatique
- VII-3 Méthode de stockage des matrices globales
- VII-4 Les instructions d'efficacité de programmation
- VII-5 Présentation des programmes MEFSTAT et BEMSTAT
 - VII-5-1 Présentation du programme MEFSTAT
 - VII-5-2 Présentation du programme BEMSTAT
- VII-6 Présentation des programmes FEMDYN et BEMDYN
 - VII-6-1 Présentation du programme FEMDYN
 - VII-6-2 Présentation du programme BEMDYN

CHAPITRE VIII: APPLICATIONS

- VIII-1 Introduction
- VIII-2 Applications aux barrages poids
 - a- Cas statique
 - b- Cas dynamique
- VIII-3 Applications aux barrages en terre
 - a-Cas statique
 - b-Cas dynamique
- VIII-4 Interprétation des résultats

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

INTRODUCTION:

Motivé par les besoins des industries de pointe et soutenu par les progrès effectués dans le domaine des ordinateurs les techniques de calcul des structures ont connu un développement considérable, cette évolution rapide de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux, et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères.

Dans les problèmes relevant de la mécanique des structures on recherche la distribution des contraintes dans la structure étudiée. ainsi que le calcul des déplacements a fin de vérifier si les spécifications de flèches sont bien respectées, résoudre ces problèmes consiste en la détermination des équations régissant le comportement du système qui, sont des équations aux dérivées partielles dont la solution exacte est très rare. La méthode des éléments finis et la méthode des éléments frontières sont aujourd'hui les plus utilisées pour résoudre effectivement ces équations, elles nécessitent l'utilisation intensive de l'ordinateur.

Ces deux méthodes consistent à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elles font appel aux trois domaines suivants.

- Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur l'ordinateur.

Le travail effectué consiste en l'étude du comportement statique et dynamique des barrages par la méthode des éléments finis et la méthode des éléments frontières, l'étude statique nous permettra la distribution des contraintes et la détermination du champ de déplacements dans la structure étudiée.

L'étude dynamique consiste en l'investigation des modes propres de la structure en utilisant la méthode de superposition modale. C'est à dire la résolution du système propre $K\Phi = \omega^2 M\Phi$

ou ω est la pulsation propre et Φ et le vecteur propre.

CHAPITRE I

THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE

CHAPITRE I :

THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE

1 1 Introduction

Tous les matériaux possèdent, à un certain degré, la propriété d'être élastique, c'est à dire que si les forces extérieures qui provoquent la déformation d'un corps, ne dépassent pas une certaine limite, la déformation disparaîtra au même temps que la force qui lui donne naissance.

Pour ces matériaux élastiques, il existe une théorie dite « théorie d'élasticité » qui permet d'étudier le comportement des solides réels sous l'action de différents systèmes de forces, en se basant sur les hypothèses suivantes :

- ⇒ Les déformations sont supposées petites,
- ⇒ la loi de comportement reliant les contraintes et les déformations est linéaire,
- ⇒ le solide est élastique, homogène et isotrope.

1 2 Equations gouvernantes :

La théorie de l'élasticité consiste à formuler trois types d'équations :

- ⇒ Les équations d'équilibre,
- ⇒ les équations déformation – déplacement,
- ⇒ les lois intrinsèques du matériau.

1 2 1 Equations d'équilibre :

On considère un cube élémentaire dx_1, dx_2, dx_3 (fig1).

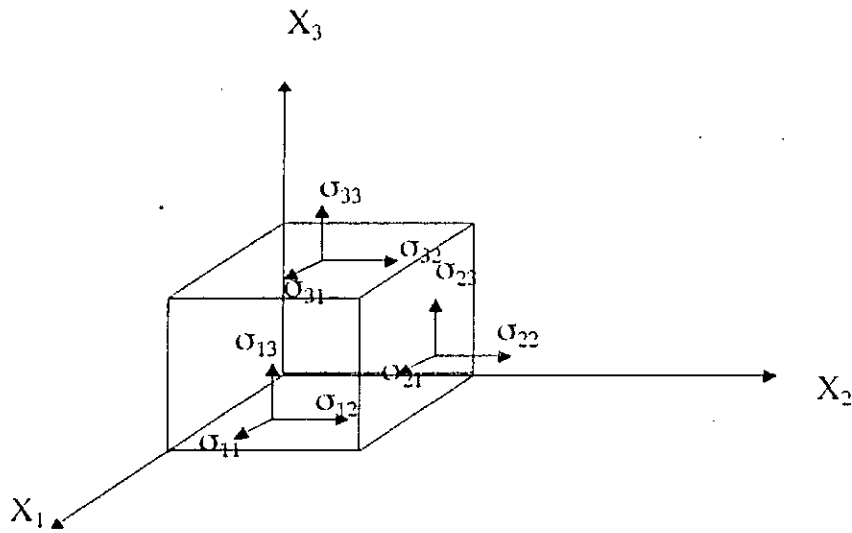


fig.1 : tenseur de contrainte

L'état de contraintes en un point du corps est défini par la tenseur de contrainte $[\sigma]$ tel que:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (I-1)$$

ou :

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}$$

Les composantes de ce tenseur doivent satisfaire les équations d'équilibre qui s'expriment comme suit :

$$\sigma_{ij,j} + b_j = 0 \quad (I-2); j = 1,2,3 \text{ et } i = 1,2,3$$

Où b_j représente les composantes des forces volumiques suivant la direction j .

1 2 2 Equations déformations-déplacements :

Pour les théories linéaires où les déformations sont faibles, on a :

$$\epsilon_{11} = \partial u / \partial x_1, \quad \epsilon_{22} = \partial v / \partial x_2, \quad \epsilon_{33} = \partial w / \partial x_3,$$

$$\epsilon_{12} = \partial u / \partial x_2 + \partial v / \partial x_1,$$

$$\epsilon_{23} = \partial v / \partial x_3 + \partial w / \partial x_2,$$

$$\epsilon_{13} = \partial w / \partial x_1 + \partial u / \partial x_3,$$

Sous forme matricielle, on a :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial / \partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial / \partial x_3 \\ \partial / \partial x_2 & \partial / \partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial / \partial x_3 & \partial / \partial x_2 \\ \partial / \partial x_3 & 0 & \partial / \partial x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

Pour le cas bidimensionnel, on a trois relations au lieu de six :

$$\epsilon_{11} = \partial u / \partial x_1,$$

$$\epsilon_{22} = \partial v / \partial x_2, \quad (1-4)$$

$$\epsilon_{12} = \partial u / \partial x_2 + \partial v / \partial x_1,$$

1 2 3 Equations intrinsèques de matériau :

La plus simple relation qui puisse exister entre contraintes et déformations est la relation linéaire de la forme :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1-5)$$

C_{ijkl} est un tenseur de quatrième ordre qui consiste en 81 termes qui sont indépendants de la position du point pour un matériau homogène, cependant, vu la symétrie des tenseurs σ_{ij} et ϵ_{kl} , le nombre de termes se réduit à 36.

L'équation (1-5) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

Matériaux isotropes :

Si les valeurs de contraintes C_{ij} sont indépendantes du système de coordonnées, le matériau est alors dit isotrope, et le nombre de constantes indépendantes est réduit à deux, les relations contraintes- déformations s'écrivent alors :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

Où λ et μ sont les coefficients de LAMÉ :

$$\lambda = \nu \cdot E / (1+\nu)(1- 2\nu).$$

$$\mu = G = E / 2(1+\nu).$$

E : module de Young.

ν : Coefficient de Poisson.

G : module d'élasticité transversale.

Maintenant, après avoir traité le problème en trois dimensions, on va le ramener à un problème dans le plan.

Pour ce cas, on considère les deux types de problèmes de l'élasticité plane.

1.3 Etat de contraintes planes :

Ce sont les problèmes concernant les structures où les dimensions suivant x_3 est très négligeable devant les dimensions dans le plan.

Considérons un cylindre de hauteur très petite par rapport aux dimensions dans le plan (x_1, x_2) (fig. 2)

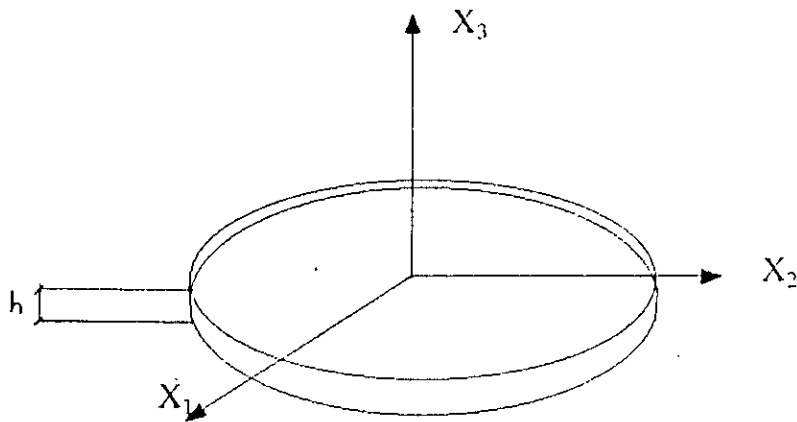


Fig.2 : Etat de contrainte plane

Dans ce cas :

$$\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$$

Pour un matériau isotrope, la loi de Hooke donne :

$$\epsilon_{11} = (\sigma_{11} / E) - (\nu\sigma_{22} / E).$$

$$\epsilon_{22} = -(\nu\sigma_{11} / E) + (\sigma_{22} / E). \quad (1-8)$$

$$\epsilon_{12} = (1+\nu)\sigma_{12} / E.$$

Ce qui implique :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

Les contraintes σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} sont indépendantes de x_3 , de même les déplacements seront des fonctions de x_1 et x_2 seulement :

$$U_1 = u_1(x_1, x_2),$$

$$U_2 = u_2(x_1, x_2).$$

1 4 Etat des déformations planes :

Considérons un cylindre élancé dont les dimensions suivant la direction x_3 est grande par rapport aux deux autres dans le plan x_1x_2 (fig-3)

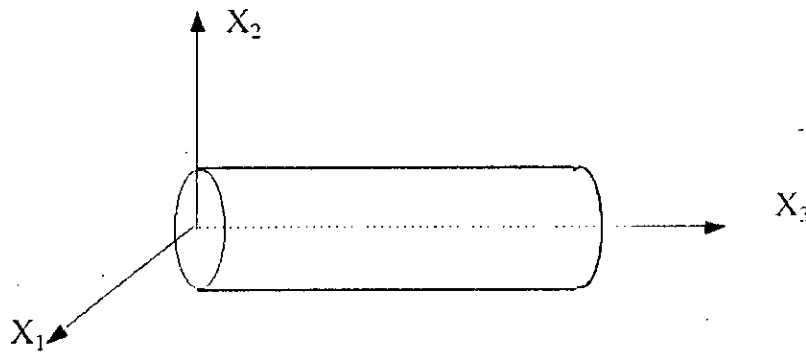


Fig-3 : Etat de déformation plane.

Dans ce cas on a :

$$\epsilon_{33} = \epsilon_{31} = \epsilon_{32} = 0$$

Les déplacements dans le plan (x_1, x_2) sont indépendants de x_3 :

$$U_1 = u_1(x_1, x_2),$$

$$U_2 = u_2(x_1, x_2).$$

Les contraintes sont données par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

Remarque :

On peut passer des formules relatives aux déformations planes aux formules relatives aux contraintes planes, en remplaçant le module de Young par :

$$E = E / (1 - \nu^2)$$

et le coefficient de Poisson est donné par: $\nu = \nu / (1 + \nu)$.

1.5 Fonction de contraintes d'Airy :

Dans les situations de déformations planes ou de contraintes planes, l'équation de compatibilité de Bertrami - Michell s'écrit en l'absence des forces volumiques :

$$\nabla^2_1 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \quad (1-11)$$

La méthode habituelle employée pour résoudre ces équations consiste à introduire une nouvelle fonction scalaire $\Phi(x, y)$ appelée fonction des contraintes d'Airy. Les contraintes sont reliées à cette fonction par :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \partial^2 \Phi / \partial x_2^2, \\ \sigma_{22} &= \partial^2 \Phi / \partial x_1^2, \\ \sigma_{12} &= \partial^2 \Phi / \partial x_2 \partial x_1, \end{aligned} \quad (1-12)$$

En substituant les expressions de σ_{11} et σ_{22} ci-dessus dans l'équation (1-11) on aboutit à :

$$\begin{aligned} \nabla^2_1 (\partial^2 \Phi / \partial x_2^2 + \partial^2 \Phi / \partial x_1^2) &= \nabla^2_1 (\nabla^2_1) \Phi = \nabla^4_1 \Phi = 0 \\ (\partial^4 \Phi / \partial x_1^4) + 2 (\partial^4 \Phi / \partial x_2^2 \partial x_1^2) + (\partial^4 \Phi / \partial x_2^4) &= 0 \end{aligned} \quad (1-13)$$

S'il est possible de trouver une fonction $\Phi(x, y)$ satisfaisant l'équation biharmonique (1-13) à l'intérieur du domaine, et tel que les contraintes et les déformations sur les frontières vérifient les conditions aux limites, alors la fonction $\Phi(x, y)$ donne la solution du problème.

CHAPITRE II

DYNAMIQUE DES STRUCTURES

CHAPITRE II: DYNAMIQUE DES STRUCTURES

II-1 Introduction

De nombreux problèmes d'analyse des structures, peuvent être traités par des méthodes d'analyse statique. Cependant il existe de nombreux cas, où l'on ne peut négliger les forces d'inertie et d'amortissement résultant de la variation des forces appliquées. En général, si la fréquence des forces appliquées est inférieure à $1/3$ de la fréquence propre fondamentale de la structure, le problème est quasi-statique. Mais dans le cas contraire, ou si la structure vibre librement, les termes inertiels et d'amortissement deviennent importants, on est alors amené à faire une étude dynamique du système.

Ce type d'étude a pour but des contraintes et des déplacements d'une structure soumise à un chargement dynamique arbitraire.

Les problèmes de dynamiques peuvent être divisés en deux catégories:

- Problèmes de propagation d'ondes
- problèmes dynamique des structures

II-2 Caractéristiques essentielles d'un phénomène dynamique:

Un phénomène dynamique est caractérisé par son évolution dans le temps, c'est à dire qu'il existe une succession de solutions du problème à tous instants. De plus l'existence des forces d'inerties est une caractéristique plus importante dans un problème de dynamique. Ces forces d'inerties résultent de l'accélération d'une structure répondant à un chargement dynamique.

II-3 Formulation des équations de mouvement:

Dans l'étude dynamique, on définit les équations de mouvement qui sont des expressions mathématiques définissant les déplacements dynamiques. Une fois résolues, elles permettent d'obtenir les déplacements recherchés. La formulation de ces équations, peut se faire par différentes méthodes.

II-3.1 Principe de D'ALEMBERT:

Les équations du mouvement dynamique quelconque sont les expressions de la deuxième Loi de NEWTON, selon laquelle le taux d'accroissement de la quantité de mouvement d'une masse quelconque 'm' est égale à la force qui lui est appliquée.

$$F(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) \quad (\text{II-1})$$

où $F(t)$: vecteur force appliquée,

$x(t)$: vecteur position de la masse m

Si l'on considère m constante au cours du temps, alors l'équation (II-1) devient:

$$F(t) = m \frac{d^2x}{dt^2} = m \ddot{x}(t) \quad (\text{II-2})$$

$m\ddot{x}(t)$ est appelée force d'inertie qui s'oppose à l'accélération de la masse m .

Cette loi est appelée principe de D'ALEMBERT.

II-3-2 Principe des déplacement virtuels:

Si un système qui est en équilibre sous l'action d'un ensemble de forces est soumis à un déplacement virtuel, alors le travail total effectué par les forces est nul.

Les équations de la réponse d'un système dynamique peuvent donc s'établir comme suit:

On relève toutes les forces agissant sur les masses du système, y compris les forces d'inerties définies par D'ALEMBERT, puis les équations du mouvement sont obtenus en considérant des déplacements virtuels correspondant à chaque degré de liberté, et en annulant le travail effectué.

II-3-3 Principe de HAMILTON:

Le principe de HAMILTON peut s'expliquer comme étant la somme nulle de la variation d'énergie cinétique et potentielle et de la variation du travail effectué par les forces non conservatrices.

Ce principe s'exprime comme suit:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (\text{II.3})$$

où T: est l'énergie totale du système

U: est l'énergie potentielle du système

W_{nc} : est le travail des forces non conservatrices

δ : variation subit durant l'intervalle du temps considéré.

II-4 Système à un degré de liberté:

Le modèle le plus simple du système à un degré de liberté est représenté dans la figure (II-1).



fig (II-1): système idéalisé à un degré de liberté

(a): composantes élémentaires; (b): force participant à l'équilibre.

II-4-1 Méthode de formulation:

a) Principe de D'ALEMBERT

L'équation d'équilibre de la masse m est donnée par:

$$F_d + F_s + F_1 = F(t) \quad (\text{II-4})$$

où F_1 : force d'inertie : $F_1 = m\ddot{x}$

F_s : force de rappel du ressort élastique: $F_s = kx$

F_d : force de viscosité: $F_d = c\dot{x}$

On reporte ces équations dans l'équation (II-4), on obtient:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (\text{II-5})$$

b) Principe des travaux virtuels:

Si on communique à la masse m un déplacement virtuel, alors le travail effectué par le système peut s'écrire:

$$-F_1 \delta x - F_2 \delta x - F_3 \delta x + F(t) \delta x = 0 \quad (\text{II-6})$$

En remplaçant les forces agissant par leurs valeurs, on obtient:

$$[-m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + F(t)] \delta x = 0 \quad (\text{II-7})$$

Comme δx est non nul, on peut facilement mettre cette équation sous la forme de l'équation (II-5)

c) Principe de HAMILTON:

L'énergie cinétique du système est donnée par:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (\text{II-8a})$$

L'énergie potentielle, qui représente simplement l'énergie de formation ** du ressort, est donnée par:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \quad (\text{II-8b})$$

Les forces non conservatrices sont la force d'amortissement F_d et la charge appliquée $F(t)$, leur travail s'exprime par:

$$\delta W_{nc} = F(t) \delta x - c \dot{x} \delta x \quad (\text{II-8c})$$

En reportant les équations (II-8) dans l'équation (II-3), on obtient:

$$\int_{t_1}^{t_2} [m\ddot{x} \delta \dot{x} - kx \delta x - c\dot{x} \delta x + F(t) \delta x] dt = 0 \quad (\text{II-9})$$

Or:

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x} \delta \dot{x} dt = m \dot{x} \delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{x} \delta x dt$$

Mais comme l'une des hypothèses du principe de HAMILTON est que la variation δx s'annule aux bornes d'intégration t_1 et t_2 , le premier terme est égal à zéro. Si on reporte alors dans l'équation (II-9), le résultat peut s'écrire:

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + F(t)] \delta x dt = 0 \quad (\text{II.10})$$

Cette équation n'est valable que si le terme entre crochets s'annule d'où on obtient la forme de l'équation (II-5).

II-4-2 Oscillation libre:

Les équations de mouvements de tout système à un degré de liberté peuvent se réduire à la forme:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

Parfois, le chargement peut être nul, les mouvements du système sont alors appelés oscillations libres, et l'équation précédente devient:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (\text{II-11})$$

Ces oscillations peuvent également être non amorties, c'est à

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (\text{II-12})$$

et la solution de ce type de problème est de forme sinusoidale.

CHAPITRE III

METHODE DES ELEMENTS FINIS

CHAPITRE III

PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

III. 1. Introduction

Au cours des dernières années, le calcul des structures de Génie civil par éléments finis a connu un développement considérable. en même temps, l'introduction de la dernière génération d'ordinateurs a rendu possible le calcul des structures d'une grande complexité telles les structures tridimensionnelles formées d'un ensemble de surfaces planes ou courbes (toitures en coques, réservoirs, ponts-caissons, etc...).

Avec la complexité grandissantes des structures calculées, il est vite apparu que l'exploitation pratique des programmes d'éléments finis rend nécessaire de résoudre de manière efficace deux problèmes essentiels :

- ◆ L'introduction des données qui peut être très laborieuse et leur vérification qui peut être malaisée, le risque d'erreurs non repérées étant très élevée.
- ◆ L'interprétation et la représentation des résultats que le nombre considérable de valeurs obtenues rend très longues et pénibles.

En ce qui concerne le premier aspect du problème, l'utilisateur doit transmettre au programme la description de l'ouvrage calculé sous forme de six groupes de données :

- ⇒ Paramètres généraux du problème (nombre de noeuds et d'éléments...)
- ⇒ Propriétés des matériaux utilisés.
- ⇒ Conditions aux limites.
- ⇒ Coordonnées des noeuds du maillage.
- ⇒ Spécification des éléments (type d'élément, son matériau, numéros de noeuds connectés à l'élément, épaisseur ou autre caractéristique géométrique).

⇒ Spécification des charges appliquées à la structure des différents cas de charge.

En ce qui concerne le deuxième aspect du problème, il est évident que la sélection et la combinaison des résultats de divers cas de charge en vue d'obtenir les sollicitations extrêmes aux divers endroits de l'ouvrage constitué par un grand nombre d'éléments devient vite un problème d'une grande ampleur. L'utilisation généralisée du traitement graphique présente aujourd'hui la solution la plus efficace des problèmes posés.

III. 2. Historique :

Au début du 19^{ème} siècle, les travaux de Navier (1819) sur les structures hyperstatiques; Maxwell (1864), Castigliano (1878), Mohr et d'autres sur les méthodes énergétiques constituèrent le point de départ logique de l'histoire de l'analyse des structures, c'est à cette période que les notions d'analyse des structures composées d'assemblage de barres ont été mises au point; présentant la méthodologie précédant l'analyse matricielle des structures.

Au cours du 20^{ème} siècle, vers 1920, Maney aux Etats-Unis et Ostenfeld au Danemark dégagèrent les idées de base d'une approche nouvelle de l'analyse des poutres en treillis et les ossatures; fondée sur le choix d'inconnues de déplacement.

Cependant, des limitations sévères sur la taille des problèmes pouvant être traités, à cause des systèmes d'équations à résoudre prévalurent jusqu'à 1932, date à laquelle Hardy Cross introduisit la méthode de la distribution des moments, cette méthode rendit envisageable la résolution de problèmes considérablement plus complexes.

Avec le développement de l'ordinateur, la résolution des systèmes d'équations ne posait plus de problèmes, cela a provoqué un retour aux méthodes classiques d'analyse. De la naît « la méthode matricielle » utilisée surtout pour les structures treillis :

⇒ Méthode des forces : Argyris, Denke (1955).

⇒ Méthode des déplacements : Argyris, Turner (1956).

Enfin, les deux publications importantes de Argyris, Kelsey et de Turner, Clough, Martin, Topp qui marient les notions d'analyse des structures en treillis, et d'analyse des milieux continus et présentent les procédures qui en résultent sous forme matricielle, eurent une influence considérable sur le progrès de la méthode des éléments finis dans les années qui suivirent.

Les travaux de Courant (1940) ont présenté aussi un intérêt particulier en raison de leur orientation vers les phénomènes régis par des équations applicables dans d'autres domaines que celui de la mécanique des structures. Les bases théoriques de la MEF reposent d'une part sur la formule énergétique et la mécanique des structures, et d'autre part, sur les méthodes d'approximation; Ritz (1908), Galerkin (1915).

Dés 1960, la méthode des éléments finis subit un développement rapide dans plusieurs directions.

III. 3. La méthode des éléments finis pour l'élasticité plane :

III. 3. 1. Concept des éléments finis :

La M.E.F. fixe un certain nombre de principes qui facilitent l'approximation et surmonte les problèmes du passage du modèle réel au modèle mécanique :

- a) Le milieu continu est divisé par des lignes imaginaires en un certain nombre de parties dites «éléments finis ».
- b) Les éléments sont supposés reliés entre eux en un nombre fini de points nodaux situés en leurs frontières; les déplacements de ces points nodaux seront les inconnues de base du problème.
- c) On choisit une fonction permettant de définir de manière unique le champ de déplacement.

- d) Les fonctions de déplacements définissent l'état des déformations à l'intérieur d'un élément en fonction des déplacements nodaux, ces déformations définissent à leur tour l'état des contraintes en tout point de l'élément.
- e) On détermine un système de forces concentrées aux noeuds qui équilibrent les contraintes s'exerçant aux frontières.

III. 3. 2. Différents types de formulation :

Il existe trois classes de formulation pour la construction des équations algébriques d'une représentation complète par éléments finis :

- Formulation déplacement.
- Formulation contraintes.
- Formulation mixte.

Pour la première formulation, elle est pratiquement la plus utilisée dans la résolution par la M.E.F., elle suppose le champ de déplacement inconnu (Primaire du problème), à partir desquels seront déterminées les contraintes et les déformations en tout point du milieu, en utilisant les relations d'élasticité.

En ce qui concerne la deuxième formulation, elle consiste à définir un champ de contraintes assurant l'équilibre de l'élément. En résolvant ensuite les équations de compatibilité des déplacements, on obtient les forces.

En fin, la troisième formulation est un mélange des deux précédentes.

III. 3. 3. Evaluation de la matrice de rigidité :

a. Choix de la fonction de déplacement :

Les éléments finis formulés à partir de la méthode des déplacements sont basés sur une approximation du champ de déplacement, celui-ci est approximé par une fonction approchée dite fonction d'approximation par éléments finis qui nous permet de remplacer un système continu par un système discrétisé équivalent. Les fonctions choisies doivent respecter certaines conditions qui sont un guide pour choisir la forme de l'élément fini, le nombre et la position des noeuds, et enfin le nombre de degrés de liberté en chaque noeud.

b. Calcul de la rigidité de l'élément triangulaire :

L'élément utilisé pour l'étude de l'élasticité plane, est l'élément triangulaire à trois noeuds avec deux degrés de libertés pour chaque noeud à savoir deux translations u et v .

L'élaboration de la matrice des raideurs de l'élément utilisé passe par sept étapes de base.

Etape 1:

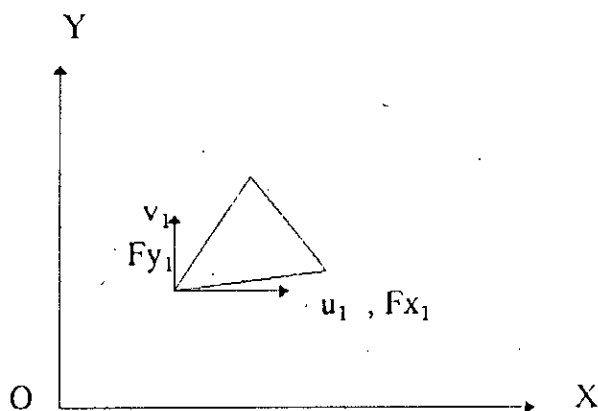


Fig.1 Eléments triangulaires

Cette étape consiste en un choix du système de coordonnées et la numérotation de l'élément de référence.(fig-1).

En utilisant la notation matricielle, le vecteur de déplacement au nœud i peut s'écrire :

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

et le vecteur force correspondant :

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \end{Bmatrix}$$

Les vecteurs déplacements et forces pour l'élément triangulaire s'écrivent:

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \end{Bmatrix}$$

Etape 2:

Elle concerne le choix de la fonction de déplacement qui peut être représentée par deux polynômes en x et y :

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

Sous forme matricielle on a :

$$\{\delta(x,y)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

Etape 3:

Cette étape consiste à exprimer les déplacements $\{\delta(x,y)\}$ dans l'élément en fonction des déplacements nodaux $\{\delta^e\}$.

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta(x_1, y_1) \\ \delta(x_2, y_2) \\ \delta(x_3, y_3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \end{Bmatrix} \{\alpha\}$$

$$\{\delta^e\} = [A] \{\alpha\} \Rightarrow \{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta^e\}$$

$$\{\delta(x,y)\} = [f(x,y)] [A]^{-1} \{\delta^e\}$$

$$\text{soit : } \{\delta(x,y)\} = [N(x,y)] \{\delta^e\}$$

Etape 4:

Elle consiste à relier les déformations $\{\epsilon(x,y)\}$ en chaque point de l'élément aux déplacements $\{\delta(x,y)\}$ et donc aux déplacements nodaux.

$$\{\epsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{cases} \epsilon_x = \partial u / \partial x \\ \epsilon_y = \partial v / \partial y \\ \epsilon_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{cases}$$

En remplaçant u et v par leur valeur, on aboutit à:

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [c] \{\alpha\}$$

en remplaçant $\{\alpha\}$ par $[A]^{-1} \{\delta^e\}$, on aboutit à:

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [c] [A]^{-1} \{\delta^e\}$$

ce qui peut être écrit:

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [B] \{\delta^e\}$$

$$\text{ou } [B] = [c] [A]^{-1}$$

Etape 5:

Cette étape consiste à relier les contraintes internes $\{\sigma(x,y)\}$ aux déformations $\{\varepsilon(x,y)\}$ par la biais de la loi de Hooke généralisée :

$$\{\sigma(x,y)\} = [\Delta] \{\varepsilon(x,y)\}$$

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec: } d_{11} = d_{22} = E(1-\nu) / [(1+\nu)(1-2\nu)]$$

$$d_{12} = d_{21} = E.\nu / [(1+\nu)(1-2\nu)]$$

$$d_{33} = E / [2.(1+\nu)]$$

$$\text{on a: } \{\sigma(x,y)\} = [\Delta][B]\{\delta^e\}$$

$$\{\sigma(x,y)\} = [H(x,y)]\{\delta^e\}$$

Etape 6:

Cette étape permet de trouver une relation entre les forces nodales et les déplacements.

En appliquant le théorème des travaux virtuels on a :

travail des forces extérieures = travail interne total

$$\begin{aligned}
 W_{\text{int}} &= \{\varepsilon(x, y)^*\}^T \{\sigma(x, y)\} \\
 \Rightarrow \int_V W_{\text{int}} \cdot dv &= \int_V \left\{ \varepsilon(x, y)^* \right\}^T \{\sigma(x, y)\} \cdot dv \\
 \text{or: } \{\varepsilon(x, y)^*\} &= [B] \{\delta^c\} ; \quad \{\sigma(x, y)\} = [\Delta][B] \{\delta^c\} \\
 \Rightarrow \int_V W_{\text{int}} \cdot dv &= \int_V [B]^T \{\delta^c\} [\Delta][B] \{\delta^c\} \cdot dv \\
 \text{et } W_{\text{ext}} &= \{\delta^c\}^T \{F^c\} \\
 \text{d'ou } \{F^c\} &= \left[\int_V [B]^T [\Delta][B] \cdot dv \right] \{\delta^c\} \\
 \text{or } \{F^c\} &= [K^c] \{\delta^c\} \\
 \text{d'ou } [K^c] &= \int_V [B]^T [\Delta][B] \cdot dv
 \end{aligned}$$

Etape 7:

Lors de cette étape, on doit exprimer le vecteur élémentaire des forces nodales et ceci à partir des charges cohérentes qui s'appliquent à l'élément considéré.

D'après le théorème des travaux virtuels :

$$\{F^c\} = \int_V [N]^T \{Q\} \cdot dv$$

ou $\{Q\}$: chargement cohérent

9. propriétés de la matrice de rigidité :

La matrice de rigidité $[k]$ est :

1. Symétrique en vertu du théorème de MAXWELL-BETTI.
2. Singulière avant l'introduction des conditions aux limites, ce qui explique le mode de déplacement rigide de l'élément.
3. Définie positive.

d. Généralisation au domaine entier - règle d'assemblage :

La phase d'assemblage consiste à construire les matrices $[k]$ et $\{F\}$ de la structure complète à partir des matrices caractéristiques des différents éléments $[k^e]$, $\{F^e\}$ préalablement cumulés.

En utilisant l'approche énergétique, on peut définir la méthode d'assemblage :

Soit π l'énergie potentielle totale de l'élément

$$\pi^e = 1/2 \{u^e\}^T [k^e] \{u^e\} - \{u^e\}^T \{F^e\} \quad (\text{III-1})$$

Si les éléments ont la compatibilité requise, l'énergie potentielle totale de la structure peut être obtenue par sommation des énergies potentielles totales élémentaires, soit:

$$\pi = \sum \pi^e = \sum \{1/2 \{u^e\}^T [k^e] \{u^e\} - \{u^e\}^T \{F^e\}\} \quad (\text{III-2})$$

La compatibilité des déplacements nodaux de la structure est obtenue en écrivant pour chaque élément une relation matricielle du type:

$$\{u^e\} = [\beta^e] \{u\} \quad (\text{III-3})$$

avec $[\beta^e]$: matrice de localisation ou de connectivité géométrique.

En utilisant les relations (III-1) et (III-3) on peut écrire :

$$\pi = \sum 1/2 \{u\}^T [\beta^e]^T [k^e] [\beta^e] \{u\} - \{u\}^T [\beta^e] \{F^e\}$$

$$\text{d'où } \pi = 1/2 \{u\}^T [k] \{u\} - \{u\}^T \{F\}$$

$$[K] = \sum [\beta^e]^T [k^e] [\beta^e] ; \text{ matrice de rigidité de la structure complète}$$

$$\{F\} = \sum [\beta^e] \{F^e\} : \text{ vecteur forces équivalentes.}$$

L'assemblage de la matrice de rigidité d'une structure s'effectue en additionnant bloc à bloc les sous-matrices de rigidité nodale de chaque élément.

III. 3. 4. Convergence de la méthode des éléments finis :

La convergence de la solution éléments finis vers la solution exacte au fur et à mesure que le nombre d'éléments augmente peut se faire soit de manière monotone soit de manière non monotone.

a. Convergence monotone:

Les éléments doivent être complets et compatibles.

a) - Élément complet:

Les fonctions de déplacement doivent être en mesure de représenter :

- déplacements de corps rigides.
- état de déformation constante.

b) - Élément compatible:

les déplacements au sein des éléments et à travers les limites séparant les éléments doivent être continus.

Physiquement, la compatibilité assure qu'il n'y aura pas apparition d'espaces ou vides entre éléments lorsque l'assemblage est fait.

b. Convergence non monotone :

En pratique, nous remarquons souvent que la solution éléments finis converge vers la solution exacte malgré l'emploi d'éléments ne préservant pas la continuité inter-

éléments. Il s'agit dans ce cas de convergence non monotone due à l'utilisation d'éléments incompatibles.

III-3-5 Formulation isoparamétrique :

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, et pour représenter de mieux une géométrie délicate des frontières de certains éléments. C'est un élément de forme simple, repéré dans un espace isoparamétrique qui peut être transformé en chaque élément réel par une transformation géométrique.

Un élément est dit isométrique si les fonctions de transformation géométriques sont identiques aux fonctions d'interpolations. Ceci implique que les noeuds géométriques soient confondus avec les noeuds d'interpolation. La représentation par éléments isoparamétrique a un grand intérêt, en effet elle simplifie le calcul au niveau des matrices de rigidité, et réduit le volume de calcul.

III-4 FORMULATION DE LA MEF EN DYNAMIQUE:

Comme en statique nous allons considérer

- La discretisation du domaine en éléments finis
- La formulation globale après assemblage

La discrétisation consiste à décomposer la structure en éléments finis, dans chaque élément, on définit une approximation des déplacements en fonction des coordonnées et du temps.

III-5-1 FORMULATION DES EQUATIONS D'EQUILIBRE EN DYNAMIQUES:

Equilibre des travaux virtuels des forces extérieures et intérieures donne:

$$\int_{V^e} \delta \underline{U}^T \underline{F} dv + \int_{S^e} \delta \underline{U}^T \underline{\phi} ds + \sum_{i=1}^n \delta \underline{U}_i^T P_i = \int_{V^e} (\delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} + \delta \underline{U}^T \rho \ddot{\underline{U}} + \delta \underline{U}^T \underline{k}_d \dot{\underline{U}}) dv \quad (\text{III.4})$$

où $\delta \underline{U}$ et $\delta \underline{\epsilon}$: sont les déplacements et les déformations

\underline{F} et $\underline{\phi}$: forces de volume et de surface

P_i et $\delta \underline{U}_i$: charges ponctuelles en "i" et les déplacements correspondants.

or $\underline{U} = H \hat{\underline{U}}$, on aura:

$$\delta \underline{U}^T \left[\int_{V^e} \underline{B}^T \underline{\sigma} dv + \int_{S^e} \rho H^T H dv \ddot{\underline{U}} \right] + \delta \underline{U}^T \left[\int_{V^e} \underline{k}_d H^T H dv \dot{\underline{U}} - \int_{V^e} H^T \underline{F} dv - \int_{S^e} H^T \underline{\phi} ds - \sum_{i=1}^n P_i \right] = 0 \quad (\text{III.5})$$

cette equation peut s'écrire:

$$[m] \ddot{\underline{U}} + [c] \dot{\underline{U}} + \underline{\Gamma}^{int} = \underline{\Gamma}^{ext} \quad (\text{III.6})$$

$[m] = \int_{V^e} \rho H^T H dv$:matrice masse élémentaire
$[c] = \int_{V^e} \underline{k}_d H^T H dv$:matrice d'amortissement élémentaire
$\underline{\Gamma}^{int} = \int_{V^e} \underline{B}^T \underline{\sigma} dv$:vecteur des forces internes élémentaire
$\underline{\Gamma}^{ext} = \int_{V^e} H^T \underline{F} dv$:vecteur des forces externes élémentaire

III-4-2 détermination de la matrice masse

la matrice masse est une distribution continue de masse, elle peut être soit cohérente, soit concentrée à coefficients égaux ou à coefficients inégaux.

a) matrice masse cohérente

lorsque le déplacement et la variation du champ accélération à travers l'élément sont décrits par les mêmes fonctions de

formes, la matrice masse est dite matrice de masse cohérente, elle est donnée par:

$$[m] = \int_{V^e} \rho H^T H dV \quad (III.7)$$

on note que la matrice masse est symétrique et définie positive

b) matrice masse concentrée à coefficients égaux:

la technique des masses concentrées consiste à discrétiser les masses soit au niveau élémentaire, au niveau de la structure complète de manière à obtenir une matrice masse diagonale, de la forme:

$$m_{ii} = \frac{1}{n} \int_{S^e} \rho dS \quad (III.8)$$

n: nombre de noeuds, i correspond aux translations

c) matrice masse concentrée à coefficients inégaux

cette matrice est diagonale, ses éléments sont les éléments diagonaux de la matrice masse cohérente que l'on multiplie de manière à préserver la masse totale de l'élément, les éléments de la matrice sont de la forme:

$$m_{ii} = \frac{[\int_{V^e} \rho H_i H_i dV] [\int_{V^e} \rho dV]}{\int_{V^e} [\sum_{i=1}^n \rho H_i H_i] dV} \quad (III.9)$$

où: $[\int_{V^e} \rho H_i H_i dV]$: élément diagonal de la matrice masse cohérente

$[\int_{V^e} \rho dV]$: masse totale de l'élément

$\int_{V^e} [\sum \rho H_i H_i] dV$: somme des éléments diagonaux de la matrice

III-4-3 vibrations libres

l'équation du mouvement d'un système discret en l'absence des forces extérieures et de l'amortissement est donné par:

$$K \hat{U} + M \ddot{U} = 0 \quad (III.10)$$

si à chaque degré de liberté de la structure, on associe un mouvement harmonique en phase avec les autres degrés de liberté, on aura:

$$\hat{U} = \phi \sin \omega t$$

et donc: $\ddot{U} = -\omega^2 \phi \sin \omega t$

ϕ : amplitude des degrés de libertés nodaux, ω : la pulsation.

L'équation (III.10) devient: $K \phi = \omega^2 M \phi \quad (III.11)$

la résolution de cette équation appelée "système propre" permet d'avoir n couples (ω^2, ϕ) définissant chacun un mode propre de vibrations libres d'une structure, le mode pour lequel ω^2 est la plus petite est appelé "mode fondamental"

CHAPITRE IV

METHODE DES RESIDUS PONDERES

CHAPITRE IV

METHODES DES RESIDUTS PONDERES

IV. 1. Introduction:

Les équations aux dérivées partielles sont des équations différentielles mettant en jeu plusieurs variables indépendantes, celle-ci sont des variables d'espace auxquelles s'ajoute le temps, lorsque l'équation traduit un phénomène d'évolution. Ces équations on les rencontre dans tous les domaines de la physique. L'écritures et la résolution des équations aux dérivées partielles s'adressent donc à un vaste public scientifique.

Les méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles sont classées en deux grandes familles radicalement différentes dans leurs principes. La première concerne les algorithmes basés sur les équations discrétisées des équations physiques continues ce sont les méthodes dites « d'approximation équations » ou encore « aux différences finies ».

La seconde famille regroupe les méthodes qui abordent le problème non plus par des équations approchées, mais directement par des modèles de solutions approchées: ce sont les méthodes « d'approximation de solution ».

Parmi ces méthodes d'approximation des solutions, on a la méthode des éléments finis, la méthode des résidus pondérés,...etc.

IV. 2. Définition de la méthode des résidus pondérés:

La méthode des résidus pondérés permet, en utilisant des fonctions de pondération, de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à une formulation intégrale.

Soit à résoudre le problème aux limites gouverné par l'équation aux dérivées partielles suivantes:

$$L(u_0) = b \quad (\text{IV-1}) \text{ dans } \Omega.$$

avec les conditions aux limites :

- Essentielles (déplacements). $S(u_0) = S$ sur Γ_1 (IV-2.a)

- Naturelles (tractions): $G(u_0) = g$ sur Γ_2 (IV-2.b)

avec $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ frontière du domaine Ω .

u_0 : Solution exacte du problème:

soit U : l'approximation de U_0 :

$$U = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k \quad (\text{IV-3})$$

Les ϕ_k : sont des fonctions d'approximation indépendantes si on reporte l'expression de U donnée par (IV-3) dans l'équation (IV-1), on obtient un résidu:

$$R = L(u) - b = L\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k\right) - b \quad (\text{IV-4})$$

Si u ne satisfait pas toutes les conditions aux frontières, deux autres fonctions d'erreurs sont à envisager :

- erreur sont les conditions essentielles:

$$R_1 = S(u) - S \neq 0 \quad (\text{IV-5a})$$

- erreur sont les conditions naturelles:

$$R_2 = G(u) - g \neq 0 \quad (\text{IV-5b})$$

Notre but est de minimiser les erreurs R_1 , R_2 et R sur Ω et Γ . On définit les fonctions de pondérations ψ_i et $\bar{\psi}_i$ appartenant à un espace linéairement indépendant:

$$\int_{\Omega} R \psi_i d\Omega + \int_{\Gamma} R' \bar{\psi}_i d\Gamma = 0 \quad (IV-6)$$

où R' : l'erreur sur la frontière Γ .

IV. 3. Méthodes de distribution de l'erreur :

IV. 3. 1. Méthode des moments:

La fonction de pondération du résidu est telle que:

$$\psi_i = x^j \quad j = 0, 1, 2$$

$$\int_{\Omega} (L(u) - b) \psi_j d\Omega = \int_{\Gamma} (L(u) - b) x^j d\Omega = 0 \quad (IV-7)$$

On suppose que U satisfait les conditions aux frontières donc: $R_1 = R_2 = 0$

IV. 3. 2. Méthode de collocation par points:

On essaye de satisfaire les équations gouvernantes en une série de points du Ω , appelés points de collocation

$$\text{soit: } U = \sum_{\kappa=1}^n \alpha_{\kappa} \phi_{\kappa} \quad (IV-8)$$

Le nombre de points de collocation est égale au nombre de paramètre α_{κ} . Dans ce cas les ψ_i sont des fonctions delta de DIRAK, dont les propriétés sont les suivantes:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x_i - \epsilon}^{x_i + \epsilon} \Delta(x_i) dx = 1 \quad (IV-9a)$$

$$\text{et } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Delta(x_i) dx = f(x_i) = f_i \quad (IV-9b)$$

où f_i : la valeur de la fonction au point i :

Dans le cas où les conditions aux frontières sont satisfaites:

$$\int_{\Omega} (L(u) - b) \Delta_i d\Omega = 0, \quad i=1, \dots, n \quad (\text{IV-10})$$

Δ_i : représente la fonction delta de DIRAK au point de collocation i : donc

$$R = L(u) - b = 0 \quad (\text{IV-11}) \text{ en } n \text{ points du domaine}$$

On détermine aussi les différentes valeurs des paramètres α_k :

IV. 3. 3. Méthode de collocation par sous-domaines:

La fonction de pondération du résidu est telle que :

$$\psi_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_i \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega_i \end{cases} \quad (\text{IV-12})$$

Soit les Ω_i des sous-domaines de Ω

On aura donc n équations de la forme:

$$(L(u) - b) d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV-13})$$

On note que l'intégrale de la fonction erreur est nulle sur les différentes régions de Ω_i du Ω

IV. 3. 4. Méthode de Galerkin :

Cette méthode consiste à choisir comme fonctions de pondération les fonctions de forme elle-même. C'est à dire: $\psi_i = \phi_i$

donc

$$(L(u) - b) \psi_i d\Omega = (L(u) - b) \phi_i d\Omega = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (\text{IV-14})$$

étant donné que : $U = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$

On définit une série de coefficient arbitraires $\delta\alpha_i$ tel que:

$$\delta u = \delta\alpha_1 \phi_1 + \dots + \delta\alpha_n \phi_n$$

$$\text{d'ou} \quad (L(u)-b) \text{ du } \delta\Omega = 0 \quad (\text{IV-15})$$

IV. 4. Les performances des méthodes de résidus pondérés:

Les méthodes de résidu pondérés, telles qu'elles viennent d'être présentées ont pour la faveur des utilisateurs qui leurs préfèrent souvent la méthode des différences finies. Cette préférence cependant n'est justifiée que pour de grands problème pour lesquels le domaine de définition et l'allure des solutions ont des formes compliqués qui nécessiteraient un nombre élevé de fonction de forme. La difficulté liée à la prise en compte de conditions aux limites qui ne peuvent pas être vérifiées par chacune des fonctions de forme, ajoute aussi à la relative complexité des méthodes de résidus pondérés et contribue sans doute à leur peu de succès.

Les méthodes de résidus pondérés restent cependant extrêmement efficaces pour résoudre des problèmes dont la géométrie est simple et principalement donc les problèmes unidimensionnels.

En particulier, les méthodes de collocation par points et de Gallerkin donnent des résultats remarquables à précision, donnée, la facilité de leur mise en oeuvre et la rapidité des calculs impliqués les rendent même souvent sans concurrence.

CHAPITRE V

*METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX
FRONTIERES*

CHAPITRE V Présentation de la méthode des équations intégrales aux frontières

V.1- INTRODUCTION:

La méthode des éléments finis est une méthode de discrétisation très puissante, utilisée pour la résolution de plusieurs problèmes dont la solution analytique n'est pas facilement obtenue. Le développement d'une autre méthode doit donc être justifiée par les avantages qu'elle présente par rapport à la précédente.

Dans son principe, la méthode des équations intégrales consiste à transformer les équations qui décrivent le comportement des fonctions à l'intérieur du domaine et sur ses limites, en une équation intégrales liant les fonctions inconnues aux fonctions connues en surface.

Autrement dit, pour tout point x de la surface limitant la structure considérée, l'équation intégrale relie les déplacements et les tensions en tous les points de cette surface, certains de ces termes sont connus par les conditions aux limites, les autres sont les inconnus du problème.

Après résolutions, on obtient les déplacements, les tensions et les contraintes en tous les points de la surface.

V.2- Historique:

C'est au département de Génie Civil (department of civil engineering) de l'université de southampton qu'une variante intéressante de la méthode des équations intégrales a été développée.

Ses auteurs lui ont donné le nom de boundary element method que l'on peut traduire par méthode de l'élément limite.

L'application de cette méthode pour formuler les solutions fondamentales, a été faite par FREDHOLM (1903) en se basant sur une procédure pour un champ potentiel en terme d'équations intégrales aux frontières BETTI et SOMIGLIANE ont examiné les problèmes de l'élastostatique par les équations intégrales aux frontières. En 1963, JAWSON et SYMM ont présenté une approche numérique pour la résolution de ces équations pour des problèmes bidimensionnels. RIZZO (1967) a développé une approche par équations intégrales qui traite des problèmes d'élastostatique CRUSE (1969) a étendu cette approche pour la résolution des problèmes tridimensionnels, puis en 1973, il applique la méthode pour l'analyse des contraintes en tridimensionnel. CROUCH (1976), LACHAT et WATSON (1977) et

WARDLE (1977) ont utilisé la formulation indirecte de la B.E.M. très récemment, certains auteurs tels que HUTCHINSON, NIWA et AL, NARDINI et BREBBIA se sont intéressés à la résolution des problèmes aux valeurs propres.

V.3- Formulation de l'équation intégrale

V.3.1- Identité de Somigliana:

Les équations intégrales gouvernantes pour l'élastostatique sont déduites en considérant les résidus pondérés.

On désire minimiser les erreurs développées par l'approximation numérique de l'équation gouvernante de l'élastostatique.

$$\sigma_{k,j} + b_k = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (V-1)$$

Mais qui doit nécessairement satisfaire les conditions suivantes:

- Conditions essentielles (conditions de déplacements)

$$U_k = \bar{U}_k \quad \text{sur } \Gamma_1$$

- Conditions naturelles (conditions en tractions)

$$P_k = \sigma_{k,j} n_j = \bar{P}_k \quad \text{sur } \Gamma_2$$

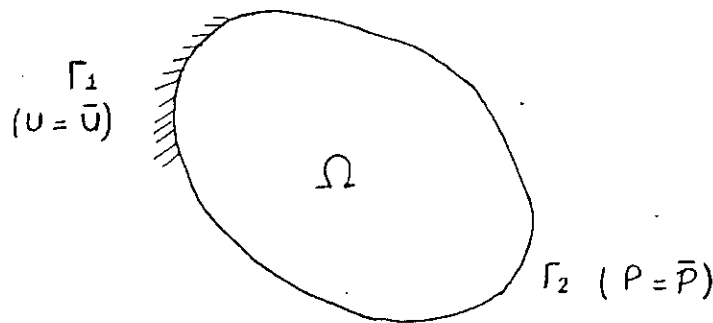


FIG. 1

On peut pondérer chaque équation par une fonction de type déplacement U^*_k , et orthogonaliser le produit:

$$1 = \int_{\Omega} (\sigma_{k,j} + b_k) U^*_k d\Omega = 0, \quad (V-2)$$

En faisant une intégration par partie:

$$I = \int_{\Omega} \sigma_{k;j} U_k^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega \quad (V-3)$$

On trouve:

$$\Pi = \int_{\Gamma} P_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{k;j} \varepsilon_{k;j}^* d\Omega \quad (V-4)$$

donc :

$$- \int_{\Omega} \sigma_{k;j} \varepsilon_{k;j}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma} P_k U_k^* d\Gamma \quad (V-5)$$

Or, on sait que les tenseurs contrainte et déformation sont systématiques c'est à dire:

$$\int_{\Omega} \sigma_{k;j} \varepsilon_{k;j}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{k;j}^* \varepsilon_{k;j} d\Omega \quad (V-6)$$

$$\Rightarrow \text{III} = - \int_{\Omega} \sigma_{k;j}^* \varepsilon_{k;j} d\Omega = - \int_{\Gamma} \sigma_{k;j}^* n_j U_k d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{k;j,i}^* U_k d\Omega \quad (V-7)$$

$$\text{III} = - \int_{\Gamma} P_k^* U_k d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{k;j,i}^* U_k d\Omega \quad (V-8)$$

On obtient :

$$\int_{\Omega} \sigma_{k;j,i}^* U_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma} P_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} P_k^* U_k d\Gamma \quad (V-9)$$

Maintenant, on considère la frontière divisée en deux parties Γ_1 et Γ_2 , et dans chaque partie on applique les conditions aux limites, on aura :

$$\int_{\Omega} \sigma_{k;j,i}^* U_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma_1} P_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{P}_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{U}_k P_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_k P_k^* d\Gamma \quad (V-10)$$

La barre (-) représente les valeurs connues des composantes des déplacements et de tractions.

On intégrant deux fois par parties, on trouve:

$$\int_{\Omega} \sigma_{k;j,i}^* U_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega = \int_{\Gamma} P_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} P_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{P}_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{P}_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{U}_k P_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_k P_k^* d\Gamma \quad (V-11)$$

d'où :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{k;j,i}^* + b_k) U_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (P_k - \bar{P}_k) U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k - U_k) P_k^* d\Gamma \quad (V-12)$$

Cette expression est la condition générale de l'utilisation de l'équation intégrale au frontière.

Utilisons l'équation (V-12) comme fonction de pondération, la solution fondamentale obtenue pour un point chargé (i) dans une direction du vecteur unité e_l :

$$\sigma_{l;j}^* + \Delta^i e_l = 0 \quad (V-13)$$

Où : Δ_i : fonction Delta de DIRAK, dont les propriétés sont les suivantes:

$$\begin{cases} \Delta_i \rightarrow 1 & \text{au point } x = x_i \\ \Delta_i = 0 & \text{au point } x = x_i \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} \Delta^i d\Omega = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} f(x) \Delta^i d\Omega = f(x_i)$$

La solution fondamentale peut s'écrire:

$$U_k^* = U_{Lk}^* e_L, \quad P_k^* = P_{Lk}^* e_L \quad (V-14)$$

Où P_{Lk}^* , U_{Lk}^* sont les K ième composantes de tractions et déplacements dû au point chargé dans une direction L de l'équation (V-12).

$$\int_{\Omega} \sigma_{k;j}^* U_k d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{l;j}^* U_L d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta^i U_L e_L d\Omega = - U_L^i e_L \quad (V-15)$$

U_L^i : représente la l ième composante du déplacement au point (i) l'équation (V-12) peut maintenant s'écrire.

$$\hat{U}_l + \int_{r_1} P_{Lk}^* \bar{U}_k + \int_{r_2} P_{Lk}^* U_k d\Gamma = \int_{r_1} U_{Lk}^* P_k d\Gamma + \int_{r_2} U_{Lk}^* \bar{P}_k d\Gamma + \int_{\Omega} b_k U_{Lk}^* d\Omega \quad (V-16)$$

Cette équation est connue sous le nom de "l'identité de Somigliana" elle donne les valeurs de déplacement à n'importe quel point du domaine dont les termes sont en fonction des valeurs frontières U_k et P_k .

V.3.2 Détermination de la solution fondamentale:

La formulation des équations intégrales aux frontières pour l'élastostatique exige de connaître la solution des problèmes d'élasticité correspondant à un domaine infini, chargé avec une force unitaire concentrée en un point, chargé avec une force unitaire concentrée en un point. C'est la solution fondamentale de l'élastostatique trouvée par Kelvin.

L'équation d'équilibre exprimé en terme de déplacement, est donné par l'équation de Navier:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{mm} + \epsilon_{ij} \right] \quad (V-17)$$

relation déformation déplacement:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}] \quad (V-18)$$

donc:

$$\left(\frac{1}{1-2\nu}\right) u_{j,i} + u_{i,j} + \frac{1}{\mu} b_i = 0 \quad (V-19)$$

La solution de Kelvin est obtenue de l'equation (5-19), lorsque une force unitaire appliqué au point i, dans la direction du vecteur unitaire e_i :

$$b_i = \Delta^i e_i \quad (V-20)$$

Pour faciliter le calcul de la solution fondamentale, nous utilisons la représentation déplacements, dont les termes sont les vecteurs de GALERKIN, soit G le vecteur pour lequel les composantes déplacements, sont obtenues par:

$$U_j = G_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,jm} \quad (V-21)$$

L'equation de NAVIER sera:

$$G_{i,mmjj} + \frac{1}{\mu} \Delta^i e_i = 0 \quad (V-22)$$

Ou encore:

$$\nabla^2 (\nabla^2 G_i) + \frac{1}{\mu} \Delta^i e_i = 0 \quad (V-23)$$

Cette equation peut s'ecrire pour un cas tridimensionnel, ou bidimensionnel en déformations planes.

$$\nabla^2 (F_i) + \frac{1}{\mu} \Delta^i e_i = 0 \quad (V-24)$$

où :

$$F_i = \nabla^2 G_i$$

La solution homogène de l'equation (V-24) donne:

$$\nabla^2 F_i = 0 \quad (V-25)$$

En utilisant les coordonnées polaires :

$$\nabla^2 F_i = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_i}{\partial r} \right) = 0 \quad (V-26)$$

L'equation (V-25) aura pour solution:

$$F_i = c_1 \ln(r) + c_2 \quad (V-27)$$

où: r : distance entre le point considéré et le point d'application de la force unitaire en "i"

pour déterminer c_1 il faut intégrer l'equation (V-24), on obtient:

$$\nabla^2 F_1 = -\frac{1}{\mu} \Delta_1 \quad (V-28)$$

d'où :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 F_1 d\Omega = \int_{\Omega} -\frac{1}{\mu} \Delta_1 d\Omega = -\frac{1}{\mu} e_1 \quad (V-29)$$

Cette integrale présente une singularité, puisque :

$$\begin{cases} \nabla^2 F_1 = 0 & \text{pour } r \neq 0 \\ \nabla^2 F_1 = -\frac{1}{\mu} \Delta_1 & \text{pour } r = 0 \end{cases}$$

donc pour surmonter cette singularité, on écrit l'équation

(V-29) comme suit :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 F_1 d\Omega = \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \nabla^2 F_1 d\Omega + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla^2 F_1 d\Omega = -\frac{1}{\mu} e_1 \quad (V-30)$$

ou Ω_ε est un disque de rayon r_0 qui tend vers 0

$$\text{donc} \quad \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \nabla^2 F_1 d\Omega = 0 \quad (V-31)$$

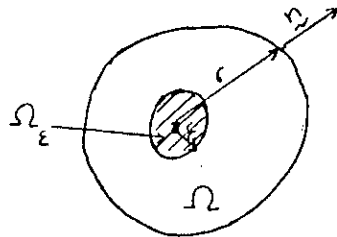


FIG. 2

en appliquant la 2ème formule de Green pour l'équation (V-30) on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 F_1 d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial n} d\Gamma = -\frac{1}{\mu} e_1 \quad (V-32)$$

la solution sera donc :

$$G_1 = \frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) e_1 \quad (V-33)$$

or, on sait que :

$$G_1 = G_{1k} e_k$$

d'où :

$$G_{1k} = G \delta_{1k}$$

avec :

$$G = \frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (V-34)$$

tel que G_{jk} est la composante k du vecteur galerkin en tout point, quand une force unitaire concentrée est appliquée en

"i" dans la direction "l".

Le déplacement en un point du domaine infini causé par cette force unitaire s'écrit:

$$U_k^* = U_{lk}^* e_l \quad (V-35)$$

U_{lk}^* : déplacement à n'importe quel point dans la direction k lorsque une force unitaire est appliquée en "i" dans la direction "l" suivant la définition (V-21) on peut écrire:

$$U_{lk}^* = G_{lk,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{lm,lk} \quad (V-36)$$

or: $G = \frac{1}{8\pi\mu} r$, on obtient:

$$U_{lk}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{lk} + r_{,l} r_{,k} \right] \quad (V-37)$$

où:

$$r_{,l} = \frac{\partial r}{\partial x_l}, \quad r_{,k} = \frac{\partial r}{\partial x_k}$$

Les contraintes à n'importe quel point interne peut s'écrire en utilisant les relations contraintes déformations:

$$\sigma_{kj}^* = S_{lkj}^* e_l$$

avec:

$$S_{lkj}^* = \left[\frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)} \delta_{kj} U_{lm,lm}^* + \mu (U_{lk,lj}^* + U_{lj,lk}^*) \right] \quad (V-38)$$

En remplaçant la dérivée de l'équation (V-37) dans l'équation (V-38) on obtient les tractions:

$$P_{lk}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \delta_{lk} + 2 r_{,l} r_{,k} \right\} + (1-2\nu) (n_l r_{,lk} - n_k r_{,ll}) \right] \quad (V-39)$$

V.3.3- Equation intégrale aux frontières:

L'identité de SOMIGLIANA valable que si le point source "i" se trouve à l'intérieur du domaine Ω ; donc il est intéressant d'examiner le cas limite où le point source sur la frontière G du domaine Ω

or, quand "i" est pris sur la frontière, l'intégrale aura une singularité pour y remédier, on suppose un secteur de disque, dont le rayon est petit, au niveau du point "i" situé sur une frontière régulière (lisse)

U^i et P^i sont des éléments des déplacements et des tractions nodaux de dimension $3 \times q$ (3D), et $2 \times q$ (2D), où q est le nombre de noeuds dans l'élément.

U et P sont des déplacements et tractions à n'importe quel point de la frontière.

La solution fondamentale est exprimée par :

$$P^* = \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix} \quad U^* = \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* \end{bmatrix}$$

matrice dont les composantes P^*_{ik} sont les tractions dans la direction k dues à une force unitaire en un point "i" dans la direction i .

matrice dont les composantes U^*_{ik} sont les déplacements dans la direction k dus à une force unitaire en un point "i" dans la direction i .

$$U = \Phi U^i \quad P = \Phi P^i \quad (V-14)$$

En discrétisant la frontière, nous obtenons pour un point nodale l'équation :

$$C^i U^i + \int_{\Gamma} P^* U^* d\Gamma = \int_{\Gamma} U^* P^* d\Gamma + \int_{\Omega} b^* d\Omega \quad (V-15)$$

L'équation (V-40) peut s'écrire :

$c_i = 1/2$ pour une surface lisse à la frontière

$$C^i U^i + \sum_{n \in \Gamma} \int_{\Gamma} P^* \Phi d\Gamma = \sum_{n \in \Gamma} \int_{\Gamma} U^* \Phi d\Gamma + \int_{\Omega} b^* d\Omega \quad (V-16)$$

Ne: nombre d'éléments total à la surface:

Γ_j : surface de l'élément "j"

On note que le domaine est divisé en M éléments internes dans lesquels les forces doivent être calculées.

Les intégrales de l'équation (V-46) sont résolues numériquement en particulier si l'élément est courbé, il est difficile d'intégrer analytiquement, les fonctions d'interpolation à s'exprimer dans un système homogène de coordonnées, puis de transformer du système et au système globale X^i .

L'équation (V-46) peut s'écrire dans ces coordonnées:

$$c^i u_i + \sum_{j=1}^{Ne} \left\{ \int_{\Gamma_j} P^* \Phi |G| d\xi_1 d\xi_2 \right\} u^j = \sum_{j=1}^{Ne} \left\{ \int_{\Gamma_j} U^* \Phi |G| d\xi_1 d\xi_2 \right\} P^j + \sum_{s=1}^M \left\{ \int_{\Omega^s} U^* b |J| d\xi_1 d\xi_2 d\eta \right\} \quad (V-47)$$

On appliquant l'intégration numérique sur (V-47), on obtient :

$$c^i u_i + \sum_{j=1}^{Ne} \left\{ \sum_{k=1}^L w_k (P^* \Phi)_k |G| \right\} u^j = \sum_{j=1}^{Ne} \left\{ \sum_{k=1}^L w_k (U^* \Phi)_k |G| \right\} P^j + \sum_{s=1}^M \left\{ \sum_{p=1}^r w_p (U^* b)_p |J| \right\} \quad (V-48)$$

L: Nombre de points d'intégration, à la surface de l'élément

w_k : La fonction de pondération

r: nombre de points internes

$(P^* \Phi)$, $(U^* \Phi)$ et $(U^* b)$ sont évalués aux points d'intégration

G: Jacobien de la transformation du système de coordonnées dans

J: Jacobien de la transformation du système de coordonnées dans W.

L'équation est écrite ensuite:

$$c^i u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} P^j + \sum_{s=1}^M B^{is} \quad (V-49)$$

Si on pose :

$$\begin{cases} H^{ij} = \hat{H}^{ij} & i \neq j \\ H^{ij} = \hat{H}^{ij} + c^i & i = j \end{cases} \quad (V-50)$$

Pour un noeud "i", l'équation (V-49) devient:

$$\sum_{j=1}^N H^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} P^j + \sum_{s=1}^M B^{is} \quad (V-51)$$

La contribution de tous les noeuds "i" peut s'écrire

$$HU = GP + B \quad (V-52)$$

U et P représentent toutes les valeurs de déplacements et de tractions avant l'application des conditions aux limites, ces conditions sont introduites en réarrangeant les colonnes de H et G de manière à passer tous les inconnus au vecteur x, le système final d'équation est:

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad (V-53)$$

à noter que le vecteur B est incorporé en F.

$$\begin{aligned}
 (V-57) \quad \begin{cases} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{cases} [\phi_1 \phi_2 \phi_3] &= \phi_1 p_1 + \phi_2 p_2 + \phi_3 p_3 = \left(\frac{1}{2}\right) \\
 \begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{cases} [\phi_1 \phi_2 \phi_3] &= \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \phi_3 u_3 = \left(\frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Le plus simple élément quadratique est un élément à trois nœuds qui exige des transformations.

c- Éléments quadratiques :

$$\begin{aligned}
 (V-56) \quad \phi_2 &= \frac{1}{2} (1 + \frac{x}{L}) \\
 \phi_1 &= \frac{1}{2} (1 - \frac{x}{L})
 \end{aligned}$$

Les deux fonctions d'interpolation utilisées sont :

$$(V-55b) \quad p(\frac{x}{L}) = \phi_1 p_1 + \phi_2 p_2 = [\phi_1 \phi_2] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$(V-55a) \quad u(\frac{x}{L}) = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 = [\phi_1 \phi_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Les valeurs de U et P à n'importe quel point de l'élément peuvent être définies, comme des valeurs nodales en ce point, en utilisant une interpolation linéaire (ϕ_1, ϕ_2) .

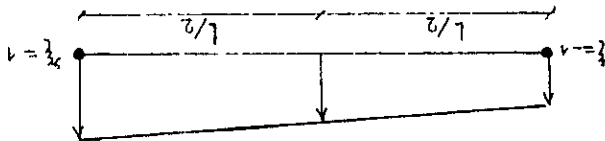


Fig. 5: Définition de l'élément linéaire

Pour l'élément linéaire, on considère une variation linéaire de U et P dans ce cas les nœuds se trouvent à l'intersection de deux éléments

b- Éléments linéaires:

$$(V-54) \quad c^T u^e + \int_{\Omega} p^* \rho^T \{u^e\} = \int_{\Omega} u^* \rho^T \{p^e\} + \int_{\Omega} u^* b \rho \Omega$$

Les nœuds se trouvent au milieu de l'élément. On suppose une variation constante de déplacement et de la traction sur tout l'élément. Dans ce cas la fonction de forme est $\phi=1$. L'équation intégrale s'écrit

a- Éléments constants:

V-4.1- Fonction d'interpolation:

En résolvant le système (V-53) toutes les valeurs à la frontière sont déterminées.

où les fonctions d'interpolation sont :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) & \phi_2 &= (1 - \xi) (1 + \xi) \\ \phi_3 &= \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) \end{aligned} \quad (V-58)$$

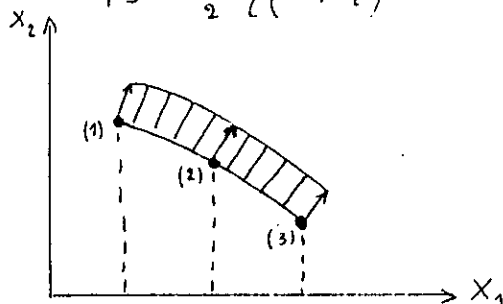


FIG. 6:
element quadratique

V-5 Mouvement de corps rigide:

Des difficultés apparaissent au moment du calcul de H^{ij} dans H en particulier aux coins, dues à la singularité de la solution fondamentale. On suppose un déplacement d'un corps rigide dans la direction de l'une des coordonnées cartésiennes, la traction et le vecteur force doit être égale à Zéro.

de (V-52), on a:

$$H^{iq} = 0 \quad (V-59)$$

1^q : Vecteur pour tous les noeuds ayant un déplacement unitaire suivant la direction "q" ($q=1,2$ ou 3) et un déplacement nul dans les autres directions l'equation (V-59) est satisfaite pour tout déplacement du corps rigide.

$$H^{ii} = - \sum_{j=1}^N H^{ij} \quad (V-60)$$

Ceci est vrai pour un domaine fermé

Pour une région infinie ou semi-infinie, l'equation

(V-60) doit être modifiée, si le déplacement du corps rigide est prescrit à la frontière, on obtient:

$$H^{ii} = I - \sum_{j=1}^N H^{ij} \quad (V-61)$$

V.6. Equations intégrales pour les points internes:

L'identité de SOMIGLINA donne les déplacements à n'importe quel point interne en fonction des déplacements, et des tractions à la frontière

On considère :

$$U^i = \sum_{j=1}^{Nc} \left\{ \int_{\Gamma_j} U^* \Phi \, d\Gamma \right\} P^j - \sum_{j=1}^{Nc} \left\{ \int_{\Gamma_j} P^* \Phi \, d\Gamma \right\} U^j$$

Sous forme matricielle:

$$U^i = \sum_{j=1}^N G^{ij} P^j - \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} + \sum_{s=1}^m B^{is} \quad (V-62)$$

Les termes G_{ij} et H_{ij} consiste en une intégrale sur les éléments auquel le noeud "j" appartient.

Ces intégrales ne contiennent aucune singularité et sont facilement calculées pour un cas isotrope, les contraintes internes sont calculées par différentiation des déplacements aux points internes.

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (V-63)$$

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} P_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} U_k d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij} b_k d\Omega$$

D_{kij} et S_{kij} sont des tenseurs d'ordre trois.

$$D_{kij} = \frac{1}{r^3} \left\{ (1-2\nu) \left\{ \delta_{ki} r_{ij} + \delta_{kj} r_{ii} - \delta_{ij} r_{ik} \right\} + \beta r_{ii} r_{ij} r_{ik} \right\} \frac{1}{4\pi\alpha(1-\nu)} \quad (V-64)$$

$$S_{kij} = \frac{2\mu}{r^3} \left\{ \beta \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} r_{ik} + \nu (\delta_{ik} r_{ii}) - \nu r_{ii} r_{ij} r_{ik} \right] + \beta \nu (\eta_i r_{ij} r_{ik} + \eta_j r_{ii} r_{ik}) + (1-2\nu) (\beta \eta_k r_{ii} r_{ij} + \eta_j \delta_{ik} + \eta_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) \eta_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\pi\alpha(1-\nu)} \quad (V-65)$$

avec :

$$r_{ii} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\delta_i^B}{r^B} \quad , \quad r_{ij} = \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{\delta_j^B}{r^B} = \frac{x_j^B - x_j^L}{|r|} \quad (V-66)$$

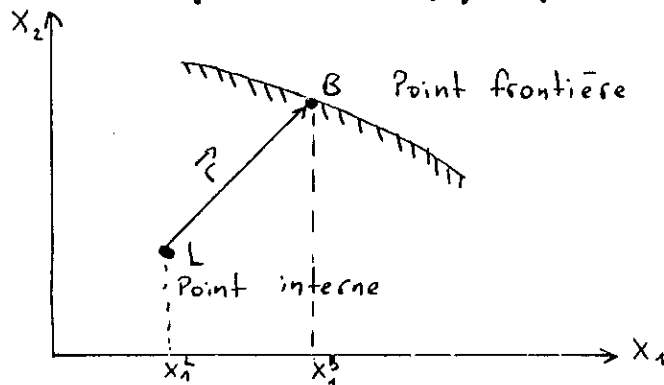


FIG. 7:

Définition des dérivées exigées par la formule des contraintes internes

V-7 Problème de coin:

Lorsque le noeud est localisé dans une surface non lisse de la frontière, ou bien un coin pour un cas 2D, des discontinuités dans les tractions peuvent se produire, ceci implique que si les tractions nodales sont inconnus, le nombre d'équation en ce noeud est inférieur au nombre d'inconnus.

Pour expliquer le problème, on considère un coin bidimensionnel.

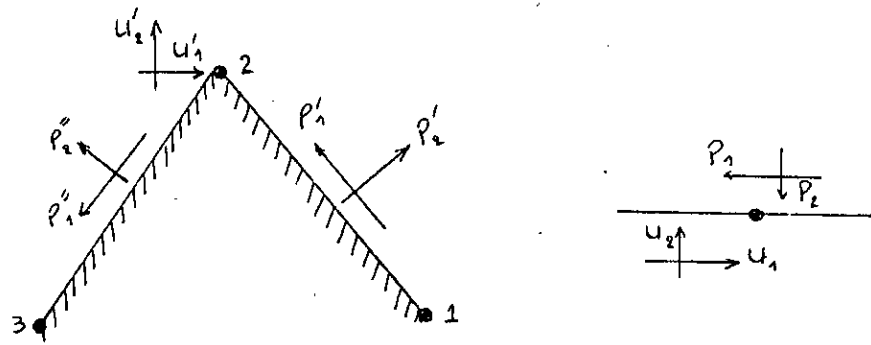


FIG 8. COIN CONTINU EN NOEUD

SURFACE LISSE

Lorsque les tractions de part et d'autre du coin sont connues, seulement les déplacements sont inconnus, ou si les deux composantes de déplacement et une traction sont connues, les trois autres composantes de traction sont inconnues, alors le problème est résolu sans difficulté.

Si les deux composantes déplacements sont connues, mais les tractions sont inconnues, alors un traitement spécial au niveau du coin est nécessaire pour résoudre le problème, on dédouble le noeud au coin, la géométrie du problème est légèrement modifiée, et seulement deux tractions sont assignées pour chaque noeud, la distance entre les deux noeuds au coin doit être très petite.

Lorsque le noeud est dédoublé, on suppose une petite ouverture entre les deux noeuds.

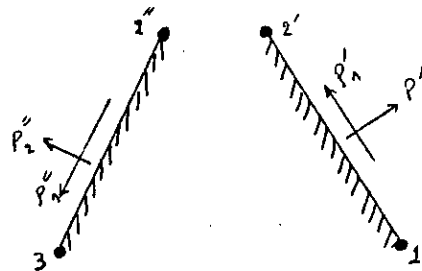


FIG.9

ou bien un petit élément est supposé entre les deux noeuds

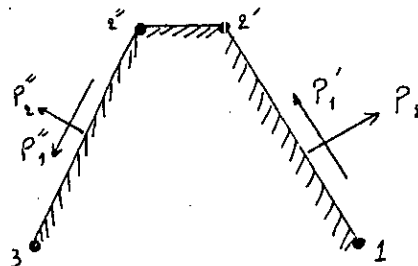


FIG.10

Une autre version est d'utiliser des éléments discontinus.

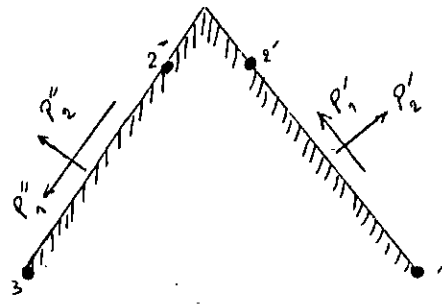


FIG. 11

V.8 Equations intégrales aux frontières en dynamique:

V.8.1. Différentes approches dans l'analyse dynamique en BEM:

Il existe différentes approches pour traiter des problèmes dépendants du temps avec la BEM.

La première approche est adoptée par RIZZO et CRUSE (1968) qui consiste à transformer de la place ou de Fourier pour éliminer le temps et donc retrouver les équations elliptiques une inversion numérique est alors utilisée pour ramener la solution dans un domaine temporel.

Cette approche est utilisée en fonctions avec les solutions fondamentales de la transformer de la place.

La méthode n'était pas un succès dû à l'utilisation de faibles fonctions (interpolation constante) et des transformations inverses non précises.

En 1983 NARAYANAN et BESKOS ont introduit des éléments isoparamétriques (interpolation quadratique) et une méthode d'inversion précise de Dubin.

La 2ème approche est adoptée par NIWA (1980) et Monolis (1983) celle-ci utilise une solution fondamentale dépendante du temps pour former une équation intégrodifférentielle dans l'espace-temps on trouve la solution à travers une forme discrétisée en temps cette approche est avantageuse dans l'analyse non linéaire l'inconvénient est dans l'utilisation des données complexes.

Une 3ème approche est proposée par NARDINI et BREBIA (1982) dans laquelle l'approximation de la matrice masse est formée et donc le problème aux valeurs propres peut être résolu utilisant des données réelles.

V.8.2. Equation gouvernantes et conditions aux frontières:

Les équations fondamentales en dynamique pour un solide homogène élastique et linéaire sont:

* Equation de mouvement

$$\sigma_{jk,ij} + b_k = \rho \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2} \quad (V-67)$$

* Equation constitutive:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (V-68)$$

* Equation cinématique:

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (V-69)$$

En remplaçant les équations (V-68) et (V-69) dans (V-67), on obtient

$$(\lambda + \mu) U_{j,ijk} + \mu U_{k,ijj} + b_k = \rho \ddot{U}_k \quad (V-70)$$

$$\text{où : } \ddot{U}_k = \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2} \quad (\text{V-71})$$

L'équation (V-70) est dite équation de Navier-cauchy les conditions aux frontières sont:

- Essentielles $U = \bar{U}$ sur G_1
- Naturelles $P = \bar{P}$ sur G_2

Les conditions initiales sont:

$$U_i(x, t) = U_i^0(x) \quad (\text{V-72})$$

$$t = t_0 \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et } G$$

V.8.2. Représentation matricielle en dynamique :

Les travaux de Nardini et Brebia se sont concentrés sur la formulation du terme d'inertie ou matrice masse seulement en fonction des noeuds de la frontière.

L'idée de base de cette formulation consiste à utiliser les solutions fondamentales en statique établies par Kelvin au cas dynamique.

La forme intégrale de (V.67) est :

$$\int_{\Omega} \sigma_{k;ij}^* U_{ik}^* d\Omega - \rho \int_{\Omega} \ddot{U}_k U_{ik} d\Omega = 0 \quad (\text{V.73})$$

la première intégrale de (V.73) est exprimée par son équivalent sur la frontière

$$C_{ik} U_k + \int_{\Gamma} P_{ik}^* U_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ik}^* P_k d\Gamma \quad (\text{V.74})$$

a) Approximation de l'intégrale inertielle:

La seconde intégrale dans (V.73) traduisant les amplitudes à l'intérieur du domaine, représente le terme d'inertie.

Pour formuler le problème en terme d'inconnues sur la frontière on exprime les déplacements $U_k(x,t)$ comme suit:

$$U_k(x, t) = \alpha_k^j(t) + f^j(x) \quad (\text{V.75})$$

où $f^j(x)$: fonctions de coordonnées

$\alpha_k^j(t)$: fonctions inconnues dépendantes du temps

L'intégrale inertielle s'écrit donc:

$$\int_{\Omega} \ddot{U}_k U_{ik}^* d\Omega = \ddot{\alpha}_k^j \int_{\Omega} f^j U_{ik}^* d\Omega \quad (\text{V.76})$$

Pour ramener l'équation (V.76) à son équivalent sur la frontière, on peut associer les fonctions f^j au champ déplacement ψ_{km}^j et le champ contrainte correspondant est donné par:

$$\tau_{km,m}^j = \delta_{ik} f^j \quad (\text{V.77})$$

L'équation intégrale obtenue après la transformation de l'équation (V.76)

$$\ddot{\alpha}_k^j \int_{\Omega} f^j U_{ik}^* d\Omega = \ddot{\alpha}_i^j \left\{ -c_{ik} \Psi_{ik}^j + \int_{\Gamma} U_{ik}^* \eta_{ik}^j d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ik}^* \Psi_{ik}^j d\Gamma \right\} \quad (V.78)$$

où: Ψ_{ik}^j : champ de déplacement résultant de la force volumique

η_{ik}^j : les tractions correspondantes sur la frontière

L'équation (V.67) devient après cette transformation :

$$c_{ik} u_k - \int_{\Gamma} U_{ik}^* P_k d\Gamma + \int_{\Gamma} P_{ik}^* u_k d\Gamma = P \left\{ c_{ik} \Psi_{ik}^j - \int_{\Gamma} U_{ik}^* \eta_{ik}^j d\Gamma + \int_{\Gamma} P_{ik}^* \Psi_{ik}^j d\Gamma \right\} \ddot{\alpha}_i^j \quad (V.79)$$

Les fonctions Ψ satisfaisant l'équation (V.79) sont de la forme :

$$\Psi_{ik} = \left[\left(3 - \frac{10}{3} \nu \right) \delta_{ik} - r_i r_k \right] \frac{R^3}{30(1-\nu)} \quad (V.80)$$

où $R(A_j, X)$: distance du point d'application des fonctions f au point considéré, tel que

$$f^j(x) = R(A_j, x) \quad (V.81)$$

r_i, r_k : les cosinus directeurs des rayons liant les points A_j et X .

Les fonctions η_{ik}^j sont obtenues en dérivant l'équation (V.80) et en remplaçant dans (V.67), et sachant que:

$$\eta_{ik} = S_{ikj} n_j$$

On obtient:

$$\eta_{ik} = \frac{\mu r^2}{30(1-\nu)} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (8-10\nu) \delta_{ik} - 2 r_i r_k \right\} + 2(1-5\nu) \left\{ r_{ik} n_i - r_{i2} n_k \right\} + 6 r_{ik} n_i \right] \quad (V.82)$$

b) Discretisation de l'équation intégrale

si on déplace le point source en tout point de la frontière, l'expression (V.80) conduit au système d'équations s'écrivant matriciellement

$$[c] \{u\} - \int_{\Gamma} [U^*] \{P\} d\Gamma + \int_{\Gamma} [P^*] \{u\} d\Gamma = P \left\{ [c] [\Psi]^j - \int_{\Gamma} [U^*] [\Psi]^j d\Gamma + \int_{\Gamma} [P^*] [\Psi]^j d\Gamma \right\} \ddot{\alpha}_i^j \quad (V.83)$$

Les déplacements et tractions sont interpolés comme suit :

$$\{u\}^j = [\Phi] \{u\}_e^j, \quad \{P\}^j = [\Phi] \{P\}_e^j \quad (V.84)$$

de même :

$$[\dot{\Psi}]^j = [\phi] [\Psi]_e^j \quad \text{et} \quad (V.85)$$

$$[\eta]^j = [\phi] [\eta]_e^j$$

$$[\eta]^d = [\phi] [\eta]_e^d \quad (V.86)$$

donc: (V.83) devient :

$$[c] \{u\} - [g] \{P\}_e + [h] \{u\}_e = -\rho \{ [c] [\psi]^d - [g] [\eta]_e^d + [h] [\psi]_e^d \} \{ \ddot{\alpha} \}^d \quad (V.87)$$

$$\text{où : } [g] = \int_{\Gamma_e} [u^*] [\phi] d\Gamma \quad (V-88)$$

$$[h] = \int_{\Gamma_e} [P^*] [\phi] d\Gamma \quad (V-89)$$

L'équation (V-87) s'écrira donc dans sa forme compacte

$$[H] \{u\} - [G] \{P\} - \rho \{ [H] [\psi] - [G] [\eta] \} \{ \ddot{\alpha} \} = 0 \quad (V-90)$$

Les matrices [H] et [G] sont celles déterminées dans le cas statique

Si A_n représente le nième noeud de la frontière, l'équation (V-90) devient :

$$\ddot{U}_i (A_n, t) = \alpha_i^j (t) f^j (A_n) \quad (V-91)$$

Où $\ddot{U}_i (A_n, t)$ est l'accélération du nième noeud dans la direction i, en appliquant l'équation (V-91) en tous les noeuds de la frontière, on obtient :

$$\{ \ddot{u} \} = [F] \{ \alpha \} \quad (V-92)$$

L'équation (V-91) projetée dans (V-) donne :

$$[H] \{u\} + [M] \{ \ddot{u} \} = [G] \{P\} \quad (V-93)$$

où :

$$[M] = -\rho \{ [H] [\psi] - [G] [\eta] \} [E] \quad (V-94)$$

En considérant les frontières 1 et 2, les tractions sur 1 peuvent être éliminées de l'équation (V-94), il résulte alors :

$$[\hat{H}] \{u_2\} + [\hat{M}] \{ \ddot{u}_2 \} = [\hat{G}] \{P_2\} + [\hat{H}] \{u_1\} + [\hat{M}] \{ \ddot{u}_1 \} \quad (V-95)$$

$$\text{où : } \begin{aligned} [\hat{A}] &= [A_{22}] - [G_{21}] [G_{11}]^{-1} [A_{12}] \\ [\hat{A}] &= [G_{21}] [G_{11}]^{-1} [A_{11}] - [A_{21}] \end{aligned} \quad (V-96)$$

où : A représente H ou M ou G

(V-97)

où A représente les matrices H ou M ou G

V.8.3. Les vibrations libres :

Le problème de vibrations libre de la structure est réduit en un problème algébrique de valeurs et vecteurs propres.

En absence de forces excitatrices, le champ de déplacement résultant est harmonique de la forme

$$U(x, t) = U(x) e^{-i\omega t} \quad (V-98)$$

où $U(x)$: amplitude d'un point à la position x

ω : Fréquence angulaire

Il résulte alors :

$$\{\ddot{u}_e\} = -\omega^2 \{u_e\} \quad (V-99)$$

L'équation devient après substitution de l'équation (V-98) :

$$[\hat{H}] \{u_e\} = \omega^2 [\hat{M}] \{u_e\} \quad (V-100)$$

L'équation (V-100) traduit le problème général de valeurs propres.

CHAPITRE VI

METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES PROPRES

CHAPITRE VI

Méthodes de Résolution des Systèmes Propres

VI-1- Introduction

L'analyse dynamique par MEF d'une structure sans amortissement revient à résoudre l'équation:

$$M \ddot{x} + K x = F(t) \quad (VI-1)$$

Pour la résolution de cette équation, deux approches fondamentales, sont envisageables, l'une d'entre elles consiste à résoudre ce système différentiel par intégration directe, l'autre consiste à définir la solution dans la base des modes propres de vibrations de la structure.

celle-ci est appelée METHODE DE SUPERPOSITION MODALE, et elle est la plus largement utilisée en analyse dynamique.

la résolution de l'équation (VI-1) suppose que la structure est faiblement amortie, et c'est le cas le plus fréquent pour de nombreux domaines d'application. la méthode de superposition modale utilise donc les modes propres réels de la structure non amortie. on se ramène donc à la résolution du problème aux valeurs propres sous sa forme générale:

$$K \phi = \lambda M \phi \quad (VI-2)$$

les valeurs propres λ_i sont les carrés des pulsations propres et les vecteurs propres ϕ_i sont les vecteurs des déplacements de la structure définissant les modes propres de la structure.

Donc c'est la solution du système (VI-2) qui constitue le problème aux valeurs propres.

VI-2- Propriétés fondamentales des systèmes propres:

Les méthodes de résolution du système (VI-2), dit système propre sont basées sur les propriétés de celui-ci:

VI-2-1 valeurs propres:

la résolution de l'équation (VI-2) donne n valeurs propres auxquelles correspondent n vecteurs propres ϕ_i , chaque couple (λ_i, ϕ_i) satisfait l'équation (VI-2), c'est à dire:

$$K \phi_i = \lambda_i M \phi_i \quad (VI-3)$$

le système (VI-2) peut s'écrire sans la forme

$$(K - \lambda M) \phi = 0 \quad (VI-4)$$

pour obtenir des vecteurs ϕ_i non nuls de façon que (VI-4) soit satisfaite, il faut que $(K - \lambda M)$ soit singulière:

$$\text{Det}(K - \lambda M) = 0 \quad (VI-5)$$

l'équation (VI-5) correspond à la recherche des racines λ_i

d'un polynôme d'ordre n . or il n'existe pas de méthodes directes de résolution pour $n > 4$, de plus, il est difficile de construire explicitement le polynôme pour de grands systèmes. c'est la raison pour laquelle on a recours à des méthodes itératives.

VI-2-2 Vecteurs Propres

pour le calcul des vecteurs propres, on peut utiliser les algorithmes de résolution des problèmes statiques, en effet si dans le système $ku = F$, on remplace le vecteur F par $\lambda M\phi$, on aura alors $u = \phi$

vu la singularité de $(k - \lambda M)$, Les vecteurs propres ne sont connus qu'à une constante multiplicative près. Alors, ceux-ci ne sont définis que par leur direction dans l'espace.

les vecteurs propres satisfont les relations d'orthogonalité suivantes:

$$\phi^T k \phi = \Lambda \quad (\text{VI-6a})$$

$$\phi^T M \phi = I \quad (\text{VI-6b})$$

où ϕ matrice modale, où sont stockés les vecteurs propres par colonnes. Λ est une matrice diagonale dont les termes sont les valeurs propres.

VI-2-3- Quotient de Rayleigh:

on appelle quotient de rayleigh du mode de déplacement ϕ , le rapport:

$$p(\phi) = \frac{\phi^T k \phi}{\phi^T M \phi} \quad (\text{VI-7})$$

le quotient de Rayleigh d'un vecteur propre correspond à sa valeur propre.

si la matrice M est définie positive alors $P(\phi)$ a des valeurs finies telles que:

$$0 < \lambda_1 < p(\phi) < \lambda_n < \infty \quad (\text{VI-8})$$

VI-2-4- Décalage des valeurs propres:

une des techniques les plus répandues dans la résolution des problèmes aux valeurs propres est le décalage. cette technique améliore la vitesse de convergence en transformant la matrice k en :

$$\tilde{k} = k - \varphi M \quad (\text{VI-9})$$

où φ est la valeur du décalage .

l'équation (VI-2) peut s'écrire:

$$\tilde{k} \psi = \mu M \psi \quad (\text{VI-10})$$

ou encore:

$$k \psi = (\mu + \varphi) M \psi \quad (\text{VI-11})$$

on peut alors faire l'identification suivante, provenant de l'unicité de la solution:

$$\phi = \psi \quad (\text{VI-12})$$

$$\text{et} \quad \lambda = \mu + \varphi \quad (\text{VI-13})$$

VI-3- Technique d'approximation: L'analyse de Rayleigh-Ritz

c'est une technique utilisée pour approcher les plus petites valeurs propres et les vecteurs propres du problème $k \phi = \lambda M \phi$ on suppose que les matrices k et M sont définies positives. on considère le principe de minimisation du quotient de Rayleigh-Ritz:

$$\lambda = \min P(\phi) \quad (\text{VI-14})$$

où le minimum est pris parmi tous les vecteurs possibles ϕ et $P(\phi)$ est le quotient de Rayleigh:

$$P(\phi) = \frac{\phi^T k \phi}{\phi^T M \phi} \quad (\text{VI-15})$$

$P(\phi)$ a des valeurs finies car M est définie positive:

$$0 < \lambda_1 < P(\phi) < \lambda_n < \infty \quad (\text{VI-16})$$

Dans l'analyse de Rayleigh-Ritz, on considère un ensemble de vecteurs $\bar{\phi}$ qui sont des combinaisons linéaires des vecteurs de Ritz ψ_i , $i=1, \dots, q$ c'est à dire:

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^q x_i \psi_i \quad (\text{VI-17})$$

où x_i sont les coordonnées de Ritz.

le but de l'analyse de Rayleigh-Ritz est de déterminer les vecteurs spécifiques qui approchent les vecteurs recherchés de la meilleure manière.

le quotient de rayleigh du vecteur $\bar{\phi}$ est:

$$P(\bar{\phi}) = \frac{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q x_i x_j \bar{k}_{ij}}{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q x_i x_j \bar{m}_{ij}} = \frac{\bar{k}}{\bar{m}} \quad (\text{VI-18})$$

la condition de minimisation de $P(\phi)$ s'écrit:

$$\frac{\partial P(\bar{\phi})}{\partial x_i} = \frac{2 \bar{m} \sum_{j=1}^q x_j \bar{k}_{ij} - 2 \bar{k} \sum_{j=1}^q x_j \bar{m}_{ij}}{\bar{m}^2} \quad (\text{VI-21})$$

en substituant $P = \bar{k}/\bar{m}$, cette condition s'écrit:

$$\sum_{j=1}^q (\bar{k}_{ij} - P \bar{m}_{ij}) x_j = 0 \quad i=1, \dots, q \quad (\text{VI-22})$$

ou sous forme matricielle:

$$\bar{k}x = p\bar{M}x \quad (\text{VI-23})$$

où \bar{k} et \bar{M} sont toutes les deux d'ordre qxq .

la résolution de l'équation donne q valeurs propres p_1, \dots, p_q , qui sont des approximations aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ et q vecteurs propres

$$x_1^T = [x_1^1 \quad x_2^1 \quad \dots \quad x_q^1] \quad (\text{VI-24})$$

$$x_q^T = [x_1^q \quad x_2^q \quad \dots \quad x_q^q]$$

les vecteurs propres x_i sont utilisés pour calculer les vecteurs propres $\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_q$ qui approchent les vecteurs propres ϕ_1, \dots, ϕ_q :

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^q x_i \psi_i \quad (\text{VI-25})$$

la caractéristique importante des valeurs propres calculées P_1, \dots, P_q , qu'elles constituent des approximations aux bornes supérieures de celles que l'on recherche:

$$\lambda_1 < P_1, \lambda_2 < P_2, \dots, \lambda_q < P_q < \lambda_n \quad (\text{VI-26})$$

D'une manière générale, pour obtenir P_i et $\bar{\phi}_i$ on minimise

$P(\bar{\phi})$ avec les conditions d'orthogonalité: $\bar{\phi}^T M \phi_j = 0, j = 1, 2, \dots, q$

les vecteurs de Ritz peuvent être calculés pour un problème dynamique à partir de la solution du problème statique: $k\Psi = R$

où Ψ est une matrice nxq qui stocke les q vecteurs de Ritz.

$$\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_q)$$

l'analyse se poursuit en projetant les matrices k et M sur le sous-espace de Ritz; c'est à dire que l'on calcule:

$$\bar{k} = \Psi^T K \Psi \quad (\text{VI-27})$$

$$\bar{M} = \Psi^T M \Psi \quad (\text{VI-28})$$

on résout après le système propre:

$$\bar{k}x = \bar{M}xP \quad (\text{VI-29})$$

où P est une matrice diagonale stockant les P_i et x est une matrice contenant les M-orthogonaux vecteurs $X_i, i=1,2,\dots,q$. le calcul des approximations des vecteurs propres de $k\phi = \lambda M\phi$ se fait selon:

$$\bar{\phi} = \Psi x \quad (\text{VI-30})$$

VI-4- Méthodes de résolution des problèmes aux valeurs propres:

les méthodes de résolution des problèmes aux valeurs propres sont de nature itératives, car résoudre un problème aux valeurs propres revient à calculer les racines d'un polynôme $P(\lambda)$ d'ordre n.

Selon les propriétés sur lesquelles est basé l'algorithme de résolution, nous distinguons deux catégories de méthodes:

- les méthodes d'itérations vectorielles qui opèrent sur les vecteurs propres dont la propriété de base est:

$$k\phi_i = \lambda_i M\phi_i \quad (\text{VI-31})$$

- Les méthodes de transformation qui opèrent sur les vecteurs propres, dont la propriété de base est:

$$\bar{\phi}^T M \phi = I \quad (\text{VI-32})$$

$$\bar{\phi}^T k \phi = \Lambda \quad (\text{VI-33})$$

VI-4-1- Méthodes d'itérations vectorielles:

a- L'itération inverse:

c'est une technique très utilisée pour évaluer la plus petite valeur λ_1 et le vecteur propre qui lui correspond ϕ_1 .

l'équation de base utilisée par cette méthode s'écrit:

$$k \bar{X}_{k+1} = M X_k \quad (\text{VI-34})$$

en supposant un vecteur initial \bar{x}_1 , on évalue à chaque itération.

$k; k = 1, 2, \dots$, le vecteur qui possède une direction plus proche de celle du vecteur de l'itération précédente, mais d'amplitude différente, c'est pourquoi une technique de normalisation lui est associée, d'où:

$$X_{k+1} = \frac{\bar{X}_{k+1}}{(\bar{X}_{k+1}^T M \bar{X}_{k+1})^{1/2}} \quad (\text{VI-35})$$

l'équation (VI-18) assure la M-normalité de X_{k+1} d'où:

$$X_{k+1}^T M X_{k+1} = I \quad (VI-36)$$

l'algorithme de l'itération inverse s'énonce comme suit:

$$k \bar{X}_{k+1} = Y_k \quad (VI-37)$$

$$\bar{Y}_{k+1} = M \bar{X}_{k+1} \quad (VI-38)$$

$$\rho(\bar{X}_{k+1}) = \frac{\bar{X}_{k+1}^T Y_k}{\bar{X}_{k+1}^T \bar{Y}_{k+1}} \quad (VI-39)$$

$$Y_{k+1} = \frac{\bar{Y}_{k+1}}{(\bar{X}_{k+1}^T \bar{Y}_{k+1})^{1/2}} \quad (VI-40)$$

avec: $Y_{k+1} \rightarrow M \Phi_1$ et $\rho(\bar{X}_{k+1}) \rightarrow \lambda_1$, quand $k \rightarrow \infty$

la convergence est alors testée sur cette valeur propre λ_1 donné par le quotient de Rayleigh, celle-ci est atteinte lorsque:

$$\frac{|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|}{\lambda_1^{(k+1)}} < \text{tol} \quad (VI-41)$$

-2s

où tol = 10 si la valeur propre λ_1 est recherchée avec une précision de 2s chiffres.

b- l'itération directe:

la méthode de l'itération directe est complémentaire à celle de l'itération inverse, elle est utilisée pour évaluer la plus grande valeur propre λ_n et le vecteur propre qui lui correspond Φ_n . dans cette méthode, la matrice M est supposée définie positive, et triangularisée. l'algorithme de l'itération directe est analogue à celui de l'itération inverse:

$$M \bar{X}_{k+1} = Y_k \quad (VI-42)$$

$$\bar{Y}_{k+1} = k \bar{X}_{k+1} \quad (VI-43)$$

$$\rho(\bar{X}_{k+1}) = \frac{\bar{X}_{k+1}^T \bar{Y}_{k+1}}{\bar{X}_{k+1}^T Y_k} \quad (VI-44)$$

$$y_{k+1} = \frac{\bar{y}_{k+1}}{(\bar{x}_{k+1} \ y_k)^{1/2}} \quad (\text{VI-45})$$

où : $y_{k+1} \rightarrow M\phi_n$ et $P(X_{k+1}) \rightarrow \lambda_n$, quand $k \rightarrow \infty$
 la convergence est mesurée de la même manière que dans l'itération inverse et avec l la dernière itération on a:

$$\lambda_n = \rho(\bar{x}_{l+1}) \quad (\text{VI-46})$$

$$(\text{VI-47})$$

$$\phi_n = \frac{\bar{x}_{l+1}}{(\bar{x}_{l+1}^T \ y_l)^{1/2}}$$

c- Convergence:

l'équation fondamentale de l'itération inverse est:

$$kX_{k+1} = MX_k \quad (\text{VI-48})$$

pour obtenir la convergence de processus, il est plus commode d'effectuer un changement de base en écrivant l'équation (VI-48) dans la base formée par les vecteurs propres. on peut écrire pour un vecteur :

$$X_k = \phi Z_k \quad (\text{VI-49})$$

où ϕ : la matrice modale. $\phi = (\phi_1 \dots \phi_n)$

l'équation (VI-48) devient:

$$k\phi Z_{k+1} = M\phi Z_k \quad (\text{VI-50})$$

en multipliant les deux membres de l'équation (VI-50) à gauche par ϕ^{-1} et en utilisant les relations d'orthogonalité $\phi^{-1} k \phi = \Lambda$ et $\phi^{-1} M \phi = I$ on obtient:

$$\Lambda Z_{k+1} = Z_k \quad (\text{VI-51})$$

en comparant (VI-40) et (VI-51) on voit que les itérations sont de la même forme avec $k=\Lambda$ et $M=I$ sauf qu'il est plus facile de rechercher les propriétés de convergence du système de l'équation (VI-51) puisque les valeurs propres sont les éléments diagonaux de la matrice Λ et les vecteurs propres sont des vecteurs unitaires e_i avec

$$e_i = (00 \dots 1 \dots 00) \quad (\text{VI-52})$$

↑
i eme composante

on suppose:

$$Z^T = (11 \dots 1) \quad (VI-53)$$

en utilisant (VI-51):

$$Z_{l+1}^T = \left[\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^l \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^l \dots \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^l \right] \quad (VI-54)$$

en multipliant (VI-54) par $(\lambda_1)^l$:

$$\bar{Z}_{l+1}^T = \left[1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^l \dots \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^l \right] \quad (VI-55)$$

on remarque que si λ_1 est la plus petite valeur propre alors :

$$\bar{Z}_{l+1}^T \rightarrow e_1 \text{ quand } l \rightarrow \infty$$

pour connaître l'ordre et la vitesse de la convergence, on utilise la définition de celle-ci donnée par:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{|\bar{Z}_{l+1}^T - e_1|}{|Z_l^T - e_1|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (VI-56)$$

de là on voit que la convergence se fait linéairement avec une vitesse égale à λ_1/λ_2

en considérant la dernière iteration pour laquelle $k=L$

$$\rho(Z_{L+1}) = \frac{\lambda_1 \sum_1^n (\lambda_1/\lambda_i)^{2L-1}}{\sum_1^n (\lambda_1/\lambda_i)^{2L}} \quad (VI-57)$$

$$\text{et } \lim_{L \rightarrow \infty} \rho(Z_{L+1}) = \lambda_1 \quad (VI-58)$$

la convergence est également linéaire mais avec une vitesse $(\lambda_1/\lambda_2)^2$.

en général la vitesse de convergence d'un vecteur propre est donnée par (λ_1/λ_m) tandis que celle de la valeur propre est $(\lambda_1/\lambda_m)^2$ avec λ_m est la première valeur propre supérieur à λ_1 .

VI-4-2- Methode de transformation: Methode de JACOBI

a- Description de la methode de JACOBI:

la methode de JACOBI a été développée pour résoudre le problème standard $K\phi = \lambda\phi$ ($M=1$). Néanmoins on peut l'appliquer au problème aux valeurs propres sous forme générale: $k\phi = \lambda M\phi$

$$\alpha = \frac{\bar{k}_{ij}^{(k)}}{X}, \quad \gamma = -\frac{\bar{k}_{ij}^{(k)}}{X} \quad (\text{VI-65})$$

où X est donné par:

$$X = \frac{\bar{k}^{(k)}}{2} + \text{sign}(\bar{k}^{(k)}) \sqrt{\left(\frac{\bar{k}^{(k)}}{2}\right)^2 + \bar{k}_{ij}^{(k)} \bar{k}_{jj}^{(k)}} \quad (\text{VI-66})$$

si la matrice M est définie positive, alors:

$$\left(\frac{\bar{k}^{(k)}}{2}\right)^2 + \bar{k}_{ii}^{(k)} \bar{k}_{jj}^{(k)} > 0$$

cette transformation n'est appliquée que si l'élément considéré est plus grand que la tolérance dynamique du cycle.

En pratique, on compare à la tolérance les facteurs de couplage entre i^{ème} cycle et le j^{ème} degré de liberté défini par:

$$F_k = (k_{ij} / k_{ii} k_{jj})^{1/2} \quad \text{et} \quad F_M = (m_{ij} / m_{ii} m_{jj})^{1/2}$$

de plus, il est nécessaire de tester la convergence des valeurs propres. si l est la dernière itération, la convergence est atteinte si:

$$\left| \frac{\lambda_i^{(l+1)} - \lambda_i^{(l)}}{\lambda_i^{(l+1)}} \right| \leq 10^{-s} \quad (\text{VI-67})$$

$i = 1, \dots, n$

on doit aussi tester si les termes extra-diagonaux sont assez petits, c'est à dire:

$$\left[\frac{k_{ij}^{(l+1)}}{k_{ii}^{(l+1)} k_{jj}^{(l+1)}} \right]^{1/2} \leq 10^{-s}, \quad \left[\frac{m_{ij}^{(l+1)}}{m_{ii}^{(l+1)} m_{jj}^{(l+1)}} \right]^{1/2} \leq 10^{-s} \quad (\text{VI-68})$$

$$\forall i, j \text{ et } i < j$$

-2s

dans ce cas, la tolérance requise est de 10^{-2s}

b- algorithme de la méthode de JACOBI

définir la précision de convergence requise e

pour chaque cycle s:

définir la tolérance dynamique $\epsilon_s = 10^{-2s}$

pour chaque ligne $i = 1, 2, \dots, n$

pour chaque colonne $j = i+1, \dots, n$

calculer les facteurs de couplage.

$$F_k = \frac{|k_{ij}|}{\sqrt{k_{ii}k_{jj}}}$$

$$F_M = \frac{|m_{ij}|}{\sqrt{m_{ii}m_{jj}}}$$

$$\text{Si } F_k > \varepsilon_s \text{ ou } F_M > \varepsilon_s$$

* calculer α et γ par les equations (VI-53) à (VI-55)

* transformer les matrices k et M

Colonne i = colonne i + γ colonne j.

colonne j = colonne j + α colonne i.

puis

ligne i = ligne i + δ ligne j

ligne j = ligne j + α ligne i

* modifier les vecteurs propres ϕ

colonne i = colonne i + δ colonne j

colonne j = colonne j + α colonne i

calculer les valeurs propres

$$\lambda_i = \frac{k_{ii}}{m_{ii}}$$

Tester la convergence

$$\left| \frac{\lambda_i^{(s+1)} - \lambda_i^{(s)}}{\lambda_i^{(s+1)}} \right| \leq \varepsilon, \quad \lambda_i^{(s)} = \frac{k_{ii}^{(s)}}{m_{ii}^{(s)}}, \quad \lambda_i^{(s+1)} = \frac{k_{ii}^{(s+1)}}{m_{ii}^{(s+1)}} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\left[\frac{(k_{ij}^{(s+1)})^2}{k_{ii}^{(s+1)} k_{jj}^{(s+1)}} \right]^{1/2} \leq \varepsilon, \quad \left[\frac{(m_{ij}^{(s+1)})^2}{m_{ii}^{(s+1)} m_{jj}^{(s+1)}} \right]^{1/2} \leq \varepsilon, \quad \forall i, j, i < j$$

VI-5-Resolution des problèmes de grande dimension: Methode du sous-espace

un systeme est dit de grand ordre lorsque le cout d'investigation (temps machine) des plus petites valeurs propres est nettement inférieur à celui de toutes les valeurs propres du système.

une des methodes qui s'applique dans ce cas, est la methode du sous-espace qui s'est avérée très performante pour le calcul des p première valeurs propres d'un système de grand ordre. cette methode combine essentiellement l'analyse de Rayleigh-Ritz et l'itération inverse.

VI-5-1- Description de la methode:

on passe de l'itération k à l'itération k+1.

on demarre avec q vecteurs initiaux rongsés dans la matrice X1, on exécute une itération inverse pour calculer simultanément les q vecteurs de Ritz.

$$K \bar{X}_2 = M X_1 \quad (\text{VI-69})$$

avant d'entamer une nouvelle itération en utilisant les nouveaux vecteurs améliorés, deux opérations doivent être effectuées:

- une normalisation
- une orthogonalisation.

la première opération maintient les normes des vecteurs raisonnables, tandis que la deuxième les orthogonalise de façon à les faire tendre chacun vers un mode différent. ces opérations peuvent être accomplies de plusieurs manières, mais il est convenable de le faire selon l'analyse de Rayleigh-Ritz qui est:

1- projeter K et M sur le sous-espace engendré par X_2 :

$$k_2 = \bar{X}_2^T K \bar{X}_2 \quad (\text{VI-70})$$

$$M_2 = \bar{X}_2^T M \bar{X}_2 \quad (\text{VI-71})$$

2- Résoudre le problème :

$$k_2 Q_2 = M_2 Q_2 \Lambda_2 \quad (\text{VI-72})$$

enfin on calcule les nouveaux vecteurs normalisés et orthogonalisés :

$$X_2 = \bar{X}_2 Q_2 \quad (\text{VI-73})$$

et on réitère le processus.

VI-5-2-algorithme de la méthode du sous-espace:

$$K \bar{X}_{k+1} = Y_k \quad (\text{VI-74})$$

$$k_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T Y_k \quad (\text{VI-75})$$

$$\bar{Y}_{k+1} = M \bar{X}_{k+1} \quad (\text{VI-76})$$

$$M_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T \bar{Y}_{k+1} \quad (\text{VI-77})$$

$$k_{k+1} Q_{k+1} = M_{k+1} Q_{k+1} \Lambda_{k+1} \quad (\text{VI-78})$$

$$Y_{k+1} = \bar{Y}_{k+1} Q_{k+1} \quad (\text{VI-79})$$

avec : $\Lambda_{k+1} \rightarrow \Lambda$ et $\bar{Y}_{k+1} Q_{k+1} \rightarrow \Phi$ quand $k \rightarrow \infty$

VI-5-3- Convergence

En general les modes les plus bas convergent le plus rapidement, et le processus n'est poursuivi que jusqu'à ce que tous les p modes désirés soient obtenus avec la précision voulue.

L'expérience montre qu'il est plus rapide d'utiliser un sous-espace de dimension q en ne vérifiant que la convergence des p plus petites valeurs propres. q est choisie de la façon suivante.

$$q = \min(p+8, 2p) \quad (\text{VI-80})$$

enfin, la convergence de cette méthode, n'est testée que sur les p premiers couples. la convergence, avec la précision requise tol , est donc atteinte si:

$$\frac{|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}|}{\lambda_i^{(k+1)}} \leq \text{tol} \quad (\text{VI-81})$$

$i = 1, \dots, p$

CHAPITRE VII

*PRESENTATION DES PROGRAMMES
INFORMATIQUES*

CHAPITRE VII Présentation des programmes informatiques

V.II.1. Introduction:

L'utilisation des deux méthodes éléments finis et équations intégrales aux frontières, est basée sur l'algèbre matricielle, et l'utilisation de l'ordinateur comme outil de calcul. Contrairement à la méthode des équations intégrales aux frontières dont les matrices sont pleines et réduites, l'analyse de type éléments finis nécessite la construction des matrices globales de grand ordre, occasionnant des erreurs d'arrondi: parfois énormes, cependant ces matrices sont symétriques et creuses, c'est à dire qu'elles ne contiennent que très peu de termes non nuls il convient donc de mettre en oeuvre des techniques particulières pour éviter de stocker les termes nuls, et de réduire ainsi le nombre d'opérations à effectuer.

L'efficacité d'un programme informatique dépend essentiellement de deux facteurs qui sont:

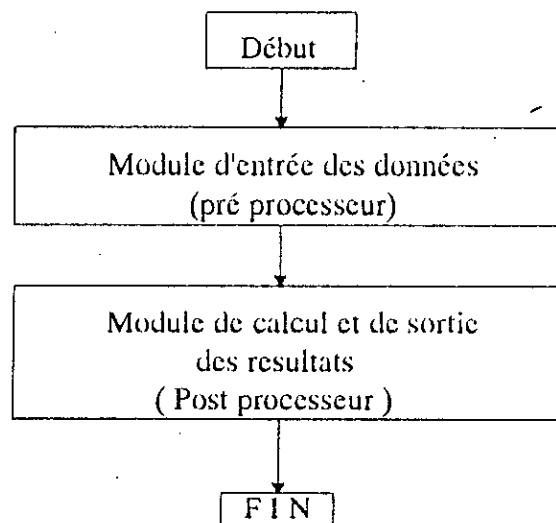
- 1- le coût en temps de calcul et en place mémoire
- 2- les techniques numériques utilisées.

Nous examinerons dans cette partie, les étapes du développement d'un programme de calcul par les deux méthodes mettant en oeuvre la théorie des chapitres précédents, les programmes qui sont présentés dans le présent chapitre sont élaborés pour l'étude des problèmes bidimensionnels d'élasticité plane (déformation plane)

VII.2. Structure globale d'un programme informatique:

Les programmes que nous avons développés, présentent une structure modulaire, pour le rendre aisément modifiable et facile à comprendre ils sont décomposés essentiellement en deux parties.

- Module d'entrée des données (preprocesseur)
- Calcul et sortie des résultats (post processeur)



Dans la pratique chaque module peut être très complexe, les chapitres suivants traitent en détail chacun des programmes. Cette partie est divisée en deux chapitres, décrivent respectivement le cas statique et le cas dynamique des deux méthodes.

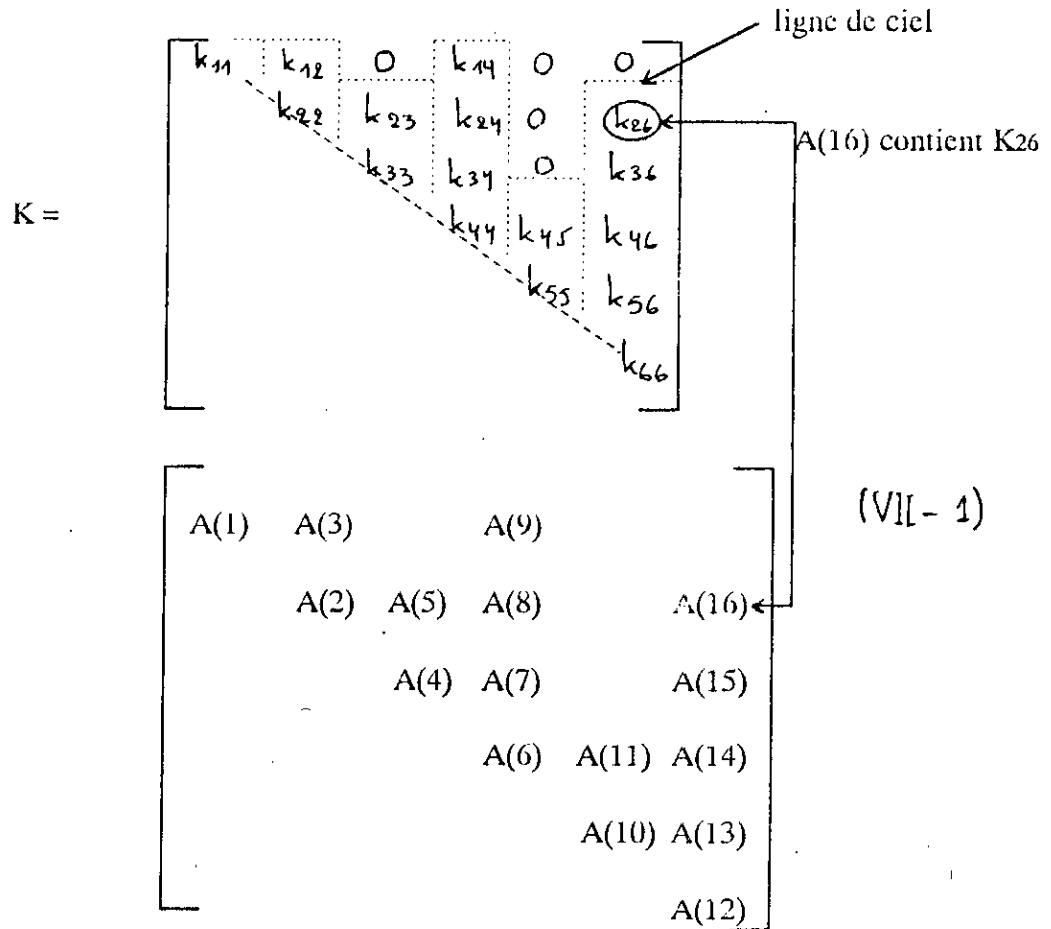
VII.3. Méthode de stockage des matrices globales:

Il existe plusieurs techniques de stockage des matrices symétriques et creuses, comme le stockage en bande, stockage par la méthode frontales, stockage en ligne de ciel "skyline". Cette dernière est probablement la plus performante, elle consiste à ranger dans un tableau à une seule dimension, les termes $k(i,j)$ de la matrice, afin d'éviter le stockage de termes nuls inutilement soit une matrice k d'ordre n , on définit les lignes de ciel m_j ,

$j = 1, 2, \dots, n$, comme étant les premiers termes non nuls chaque colonne de k .

Les différences $(j - m_j)$ $j = 1, 2, \dots, n$ définissent les hauteurs de colonnes de la matrice k .

Connaissant les hauteurs de colonnes, celles-ci, en incluant les termes diagonaux sont successivement rangées dans le tableau A comme le montre la figure ci-dessous.



TECHNIQUE DE STOCKAGE EN LIGNE DE CIEL

A noter que les éléments diagonaux dans K, sont repérées dans un tableau (KLD), à une dimension, appelé pointeur, c'est à dire l'indice des éléments $k(i,i)$ dans A est noté KLD(i).

Les éléments hors diagonal, peuvent être repéré dans A par:

$$K(i,j) = A (KLD(j) + j-i) \quad (\text{VII-2})$$

Les éléments de kLD sont relié aux lignes de ciel (termes de haut de colonnes) par:

$$IKD(j+1) = KLDd(j)+1-mj \quad (\text{VII-3})$$

à noter que la numérotation optimale des noeuds, réduit considérablement la place mémoire et le nombre d'opérations.

VII-4 Les instructions d'efficacité de programmation:

Pour que la logique des programmes développés soit facile à comprendre, chacun d'eux est divisé en un ensemble de sous-programmes, où le transfert des paramètres se fait par des instructions common, c'est dernier ont pour rôle de minimiser les pertes de temps provoqués par les appels d'arguments dans un sous-programme. Les instructions common créent des zones communes de données, et établissent une correspondance entre des variables de programmes et sous-programme différents, elles se présentent sous deux formes: le common blan et le common étiqueté.

VII.5. Presentations des programmes MEFSTAT ET BEMSTAT

En premier lieu, nous exposerons les programmes MERSTAT et BEMSTAT développés en statique, avec une description relativement détaillée, ceci permettra de comprendre les problèmes posés par la programmation relativement complexe des deux méthodes.

VII.5.1. Présentation du progmmma MEFSTAT:

MEFSTAT est le programme éléments finis utilisant l'élément triangulaire à trois noeuds (deux degrés de liberté par noeud), à savoir deux translations U et V
Le programme inclut quelques blocs caractéristiques, qui sont:

Lecture, organisation des données

Lire et imprimer:

- _Les coordonnées des noeuds
- _Les connectivités des éléments
- _Les paramètres physiques
- _Les sollicitations
- _Les conditions aux limites

Construction de la matrice et vecteurs globaux: $[K]$ et $\{F\}$

Pour chaque élément

- .Extraire les informations liées à cet élément
- .Construire la matrice et le vecteur élémentaire $[K]$ et $\{F\}$
- .Assembler $[K]$ et $\{f\}$ dans $[K]$ et $\{F\}$

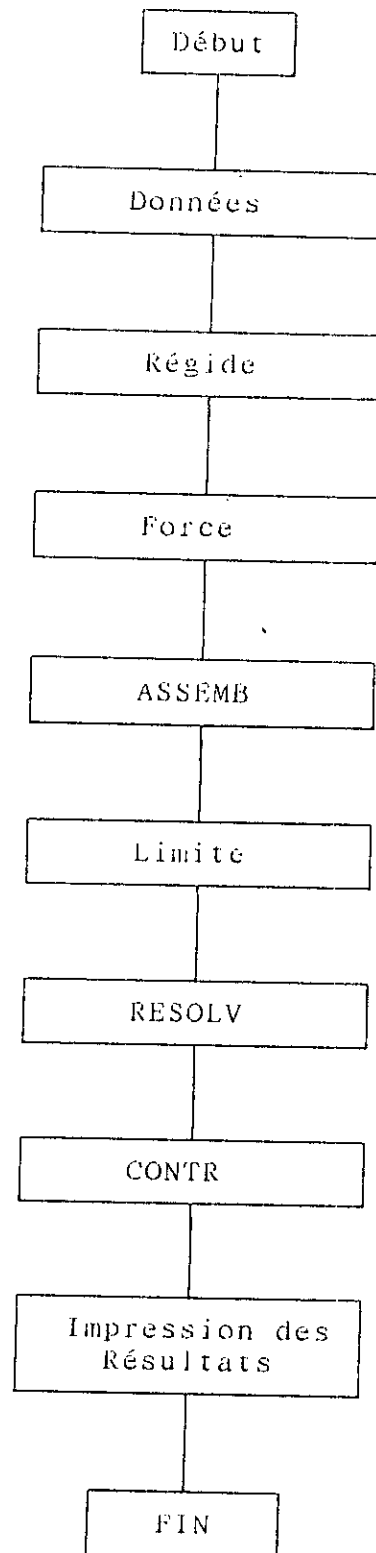
Résolution du système d'équations $[K]\{U\} = \{F\}$

- .Modifier $[K]$ et $\{F\}$ pour prendre en compte les conditions aux limites
- .Factorisation de $[K]$
- .Calculer la solution $\{U\}$

Impression des résultats

- .Calculer les variables additionnelles
- .Imprimer les résultats .

MEFSTAT est représenté sous forme d'organigramme, constitué de plusieurs sous-routines effectuant des opérations différentes.



Organigramme Général du Programme "MEFSTAT"

*** Subroutine données:**

Cette subroutine permet de:

- Lire toutes les informations nécessaires, concernant les caractéristiques géométriques et mécaniques de structure à étudier
- créer des tables de coordonnées et connectivités, il est à noter que le sens de numérotations des noeuds se fait selon le sens trigonométrique.

*** Subroutine Rigide:**

Elle permet de calculer les éléments de la matrice de rigidité élémentaire.

*** Subroutine force:**

La subroutine remplace les charges réparties par des charges ponctuelles équivalentes appliquées aux noeuds le traitement des charges réparties est présenté dans l'appendice.

*** Subroutine ASSEMB:**

Cette subroutine effectue l'opération d'assemblage à partir des matrices élémentaires [k] et les vecteurs élémentaires f, pour construire le système d'équations global:

$$[k] U_n = F \quad (\text{VII-4})$$

En utilisant:

- la continuité des déplacements aux noeuds.
 - l'équilibre des forces qui se traduit, en chaque noeud "i" par $\sum P_i^e = 0$.
- Il est à noter que la matrice global [k] est stockée en ligne de ciel déjà présentée.

*** Subroutine LIMITE:**

Cette subroutine permet la structuration suivante: vecteur force, de manière à tenir compte des degrés de libertés actifs, et supprimer les degrés de liberté inactifs (imposés)

*** Subroutine RESOLV:**

Cette subroutine permet la résolution d'un système linéaire à matrice symétrique, stocker en ligne de ciel. On distingue deux opérations essentielles

a) factorisation de la matrice [k] par la méthode de CHOLESKY qui se trouve être la plus appropriée, car la matrice [k] est symétrique et définie positive:

$$[K] = [L]^T [L] \quad (\text{VII-5})$$

Où: [L] est une matrice triangulaire supérieure, dont les éléments sont données par les expressions suivantes:

$$L_{pp} = \sqrt{k_{pp} - \sum_{k=1}^{p-1} L_{kp}^2} \quad j = p+1, \dots, n$$

$$L_{pj} = \left[k_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} L_{kp} L_{kj} \right] \quad p = 2, \dots, n \quad (\text{VII-6})$$

b) résolution du système:

le résolution se fait en deux étapes:

$$-[L]^T \{Y\} = \{F\} \quad (\text{VII-7})$$

$$-[L] \{U\} = \{Y\} \quad (\text{VII-8})$$

***Subroutine CONTR:**

Cette subroutine calcule les contraintes pour chaque éléments.

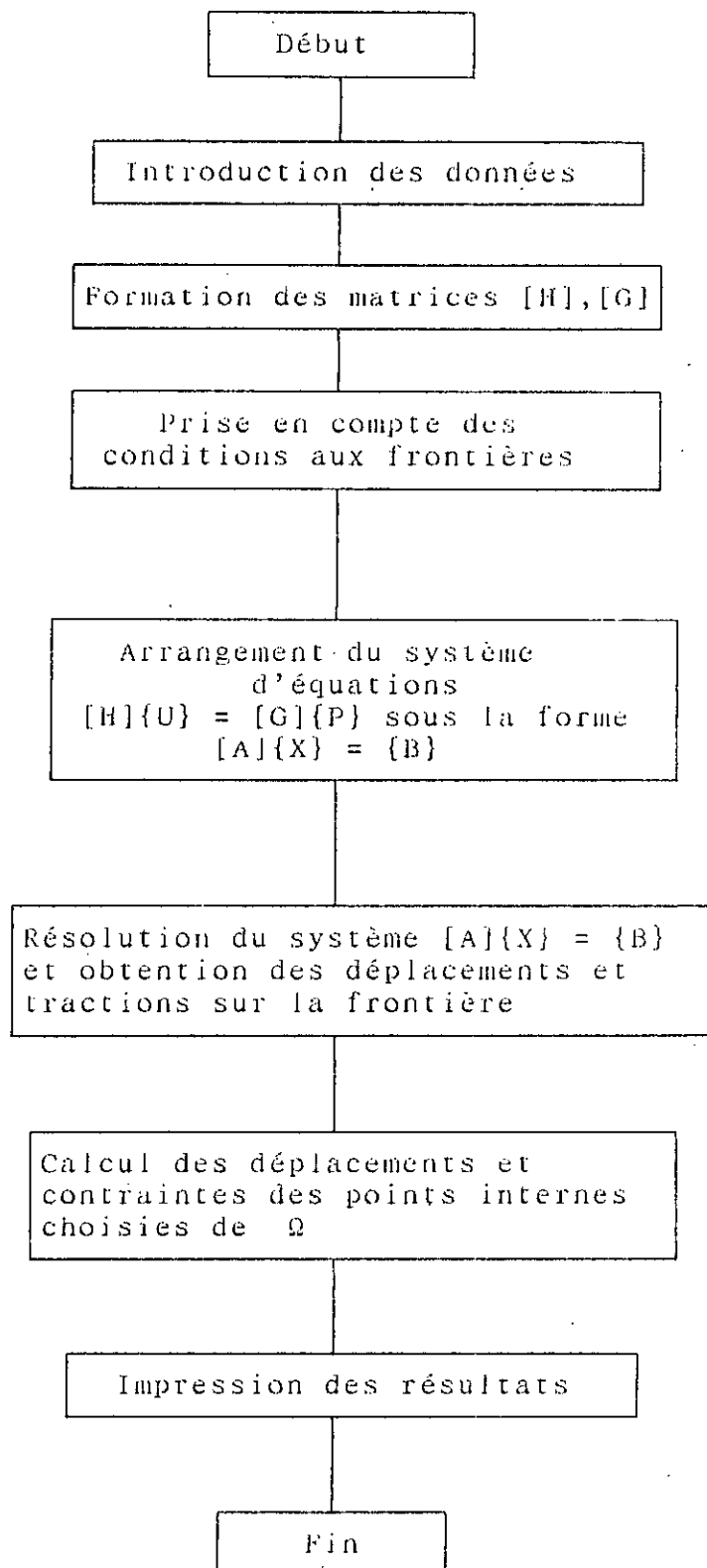
VII.5.2. Présentation du programme BEMSTAT:

Il a été montré, que la méthode des éléments frontière est une méthode souple et efficace, sa mise en oeuvre sur ordinateur. Est d'autan plus nécessaire que les equations intégrales à résoudre sont compliquées.

Nous examinerons dans ce qui suit les étapes de développement de deux programmes BEMSTAT (1) et BEMSTAT (2) utilisant l'interpolation quadratique et l'interpolation linéaire respectivement.

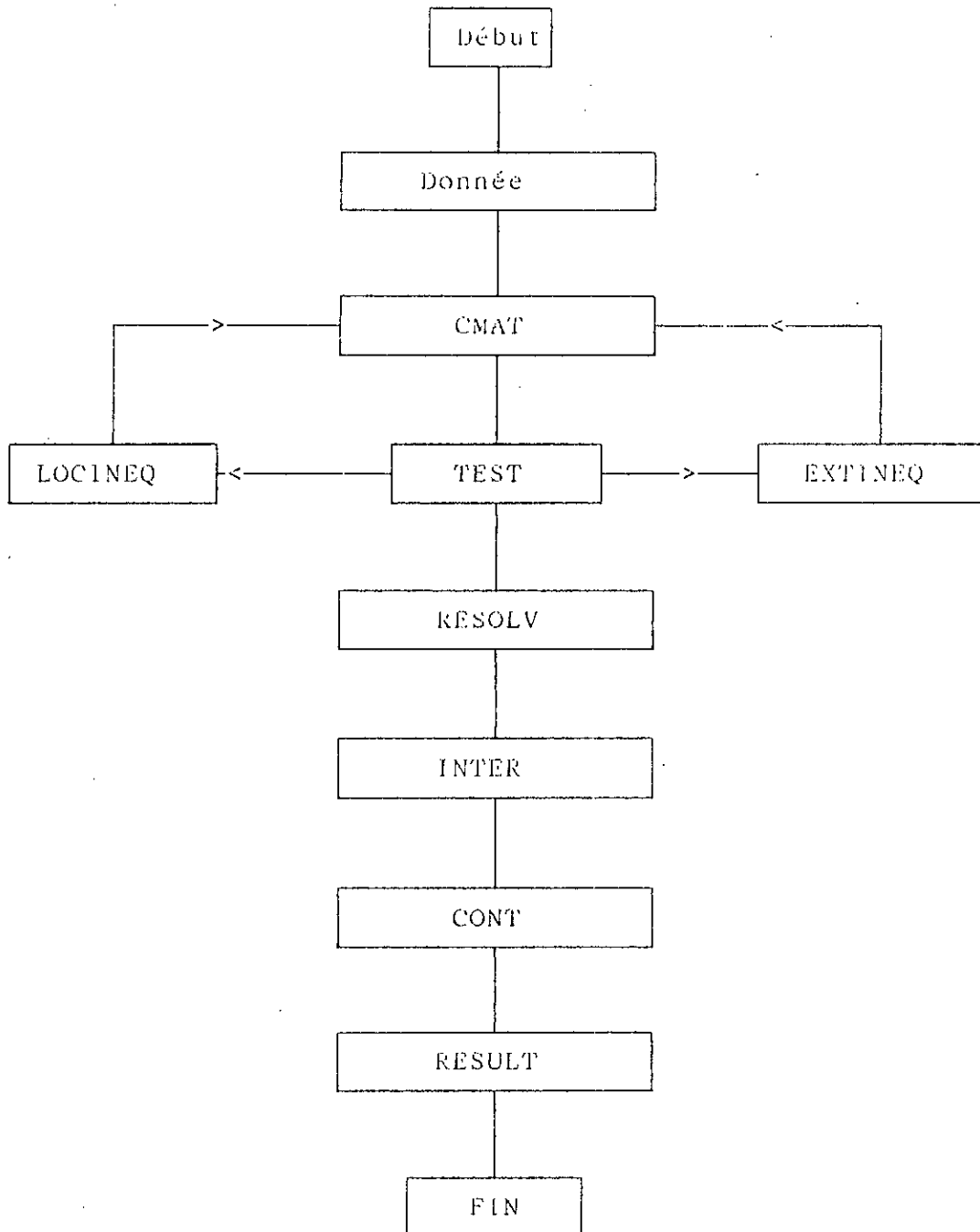
Il est à noter que la programmation utilisant l'élément constant est un cas particulier de l'interpolation linéaire où les fonctions d'interpolation sont constantes.

Ces deux programmes ont la structure suivante :



On note que la définition de l'élément constant, de l'élément linéaire, et de l'élément quadratique est présentée dans le chapitre (n° V).

BEMSTAT est représenté sous forme d'organigramme, constitué de plusieurs sous-routines :



Organigramme Général du programme "BEMSTAT"

* Sous-programme DONNEE:

Cette subroutine permettra de lire toutes les informations nécessaires au déroulement du programme à partir d'un fichier de données:

- le déroulement d'élément de la frontière, le nombre de surface, intégrantes, le nombre de points internes.
- les propriétés du matériau
- les coordonnées des noeuds de la frontière qui seront lus dans le sens trigonométrique pour un problème interne.
- conditions aux frontières: pour chaque élément linéaire, six valeurs du code et six valeurs des paramètres connus seront nécessaires, c'est une façon de résoudre le problème de coin, en permettant aux contraintes d'avoir des valeurs différents aux noeuds qui relient deux éléments successifs:

Si code = 0 ==> le déplacement est connu

Si code = 1 ==> la traction est connue.

coordonnées des points intérieures choisies

* Sous programme emat

Cette subroutine construit les matrices [H] et [G], en faisant appel à deux sousroutines extineq et locineq pour le calcul des matrices élémentaires Hw et Gw

* Sous programme EXTINEQ

Cette subroutine, calcule les coefficients h et g qui vont rattacher le point de collation avec l'élément frontière où il y a intégration, une formulation isoparamétrique est utilisée

$$\begin{cases} H_w = \int_{\Gamma_j} P^* \phi d\Gamma = \int_{\Gamma_j} P^* \phi |G| d\xi \\ G_w = \int_{\Gamma_j} U^* \phi d\Gamma = \int_{\Gamma_j} U^* \phi |G| d\xi \end{cases} \quad (\text{VII-9})$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{cases} H_w = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} |G| d\xi \\ G_w = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} |G| d\xi \end{cases} \quad (\text{VII} - 10)$$

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 : sont des fonctions d'interpolation quadratique tel que :

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1), \quad \phi_2 = (1 - \xi^2), \quad \phi_3 = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) \quad (\text{VII-11})$$

$|G|$: est le jacobien tel que

$$|G| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \left\{ \left(\frac{dX}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dY}{d\xi} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{VII-12})$$

Les termes de HW et GW sont obtenus, en utilisant l'intégration par quadrature de GAUSS :

$$H_w = \sum_{s=1}^m P^*(\xi_s) \phi_1(\xi_s) w_s |J| + \sum_{s=1}^m P^*(\xi_s) \phi_2(\xi_s) w_s |J| + \sum_{s=1}^m P^*(\xi_s) \phi_3(\xi_s) w_s |J| \quad (\text{VII-13})$$

$$G_w = \sum_{s=1}^m U^*(\xi_s) \phi_1(\xi_s) w_s |J| + \sum_{s=1}^m U^*(\xi_s) \phi_2(\xi_s) w_s |J| + \sum_{s=1}^m U^*(\xi_s) \phi_3(\xi_s) w_s |J| \quad (\text{VII-14})$$

où : ξ_s : Point de GAUSS

w_s : Facteur de pondération de GAUSS

*Sous-programme LOCINEQ:

Cette subroutine calcule les intégrations aux points singuliers, c'est à dire l'intégration est effectuée sur l'élément appartenant le point de collocation.

G_w est calculé en utilisant une procédure spéciale d'intégration.

$$\int_{-1}^1 f(\xi) \log(1/\xi) d\xi = \sum_{s=1}^m w_s f(\xi_s) \quad (\text{VII-15})$$

où ξ_s : coordonnée du point d'intégration.

w_s : facteur de pondération

Les termes $H(i,i)$ de la matrice globale, sont calculé en considérons le mouvement du corps rigide voir (chapitV)

Les matrices élémentaires H_w et G_w seront assemblées dans les matrices globales H et G au fur et à mesure.

Une fois les matrices formées, on procédera un réarrangement du système d'equation obtenu sous la forme $[A] X = B$ après introduction des conditions aux limites.

où: X : est le vecteur des inconnus.

A : matrice dont les colonnes sont une combinaison de celles des matrices H et G .

B : est un vecteur connu, obtenu en multipliant les conditions aux frontières connues, avec les termes du rang correspondant des matrices H et G .

*** Sous-programme RESOLOV:**

Cette subroutine permet la résolution du système $AX=B$, en utilisant la méthode d'élimination de gauss, avec pivotation et ceci en deux étapes:

a) Triangularisation:

Elle s'effectue selon l'algorithme suivant:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - (a_{ij}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}) a_{kj}^{(k-1)} & i = k+1, n & \quad j = k+1, n \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - d(a_{ij}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}) b_k^{(k-1)} & k = i, n+1 \end{aligned} \quad (VII-16)$$

b) Résolution

Elle consiste à la résolution du système triangulaire supérieur par substitution inverse selon l'algorithme suivant:

$$\begin{aligned} x_n &= b_n / a_{nn} \\ x_i &= [b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j] / a_{ii} \quad i = n-1, \dots, 1 \end{aligned} \quad (VII-17)$$

*** Sous-programme INTER:**

Une fois toutes les inconnues sur la frontière sont connues, ces dernières sont utilisées pour calculer les contraintes et les déplacement aux points internes préalablement choisis.

*** Sous-programme CONT :**

Les coefficients S et D sont évalués en utilisant la méthode de quadrature de GAUSS, la procédure est similaire à celle utilisée dans la subroutine EXTINEQ

*** Sous-programme RESULT:**

Les subroutine imprime les résultats suivants dans un fichier de sortie:

- Déplacement de chaque noeud à la frontière suivant les deux sens x et y.
- Contraintes avant et après chaque noeud de la frontière.
- Déplacement des points internes choisis
- Contraintes pour les points internes choisis

*** Remarque:**

Pour l'interpolation linéaire, les coefficients $G_w(i,i)$ sont calculés analytiquement les deux fonctions d'interpolation utilisées sont

$$\phi_2 = 1/2 (1 - \xi), \quad \phi_1 = 1/2 (1 + \xi) \quad (\text{VII-18})$$

VII.6) PRESENTATION DES PROGRAMMES (MEFDYN et BEMDYN)

Résoudre un problème de valeurs propres, consiste à trouver des couples $\lambda_i, \{x_i\}$ qui a satisfont la relation suivante :

$$[K] \{x_i\} = \lambda_i [M] \{x_i\} \quad (\text{VII.19})$$

Ce type de problème apparait dans plusieurs domaines, par exemple dans la recherche de la charge critique de flambement linéaire d'une structure, dans le domaine de vibration de structure, ... Le but des programmes FEMDYN et BEMDYN est la détermination des modes propres de vibration d'une structure.

VII.6.1- Présentation du programme FEMDYN

Le programme FEMDYN est le programme développé pour résoudre le problème aux valeurs propres, régit par l'équation.

$$K \phi = \lambda M \phi \quad (\text{VII.20})$$

où : [K] : matrice de rigidité de la structure.

[M] : matrice masse.

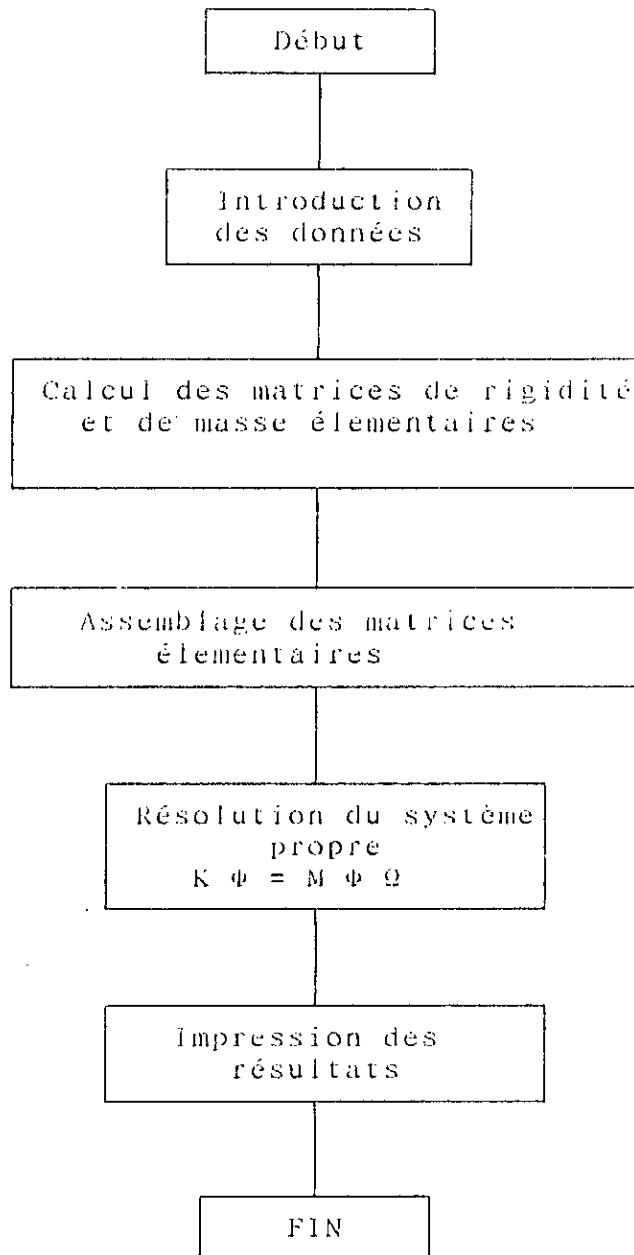
$\{X_i\}$: vecteur déplacement définissant le $i^{\text{ème}}$ mode propre de vibration.

$\lambda_i = \omega^2$: est le carrée de la pulsation correspondante.

- Structure globale du programme FEMDYN

Les quantités de données manipulées par un programme d'élément finis, sont très importantes, il convient donc de faire recours à des techniques de stockage particulières, comme la technique de stockage en ligne de ciel.

La méthode "ligne de ciel" est utilisée dans le programme FEMDYN pour le stockage de la matrice de rigidité et la matrice masse.



Organigramme Général du Programme "FEMDYN"

Méthodes de résolution :

La programmation doit être efficace pour minimiser le coût de traitement sur l'ordinateur, cette efficacité peut être très liée aux techniques numériques utilisées. Parmi les méthodes de résolution des systèmes propres exposées dans le chapitre (VI), nous avons opté pour la méthode du sous-espace pour deux raisons essentielles.

La première est que le système propre à résoudre est de grande dimension, et la seconde est que nous ne nous intéressons qu'à la détermination des plus petites valeurs propres et vecteurs propres correspondants.

Le programme est constitué de plusieurs sous-routines :

* Sous-programme SPACE

Dans cette sous-routine, on met en application l'algorithme de la sous-espace suivant :

$$K \bar{X}_{k+1} = Y_k \quad (\text{VII.21})$$

$$K_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T Y_k \quad (\text{VII.22})$$

$$Y_{k+1} = M \bar{X}_{k+1} \quad (\text{VII.23})$$

$$M_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T \bar{Y}_{k+1} \quad (\text{VII.24})$$

$$K_{k+1} Q_{k+1} = M_{k+1} Q_{k+1} \Lambda_{k+1} \quad (\text{VII.25})$$

$$Y_{k+1} = Y_{k+1} Q_{k+1} \quad (\text{VII.26})$$

* Sous-programme DECOMP

Cette sous-routine, a pour rôle la factorisation de K sous la forme

$$K = LDL^T \quad (\text{VII.27})$$

où L : matrice triangulaire inférieure dont les termes diagonaux sont tous égaux à 1.

D : matrice diagonale

* Sous-programme RESOLV

Il permet la résolution du système linéaire suivant :

$$K \bar{X}_{k+1} = Y_k \quad (\text{VII.28})$$

en deux étapes :

$$L V = Y_k \quad (\text{VII.29})$$

$$D L^T \bar{X}_{k+1} = V \quad (\text{VII.30})$$

Cette subroutine est exécutée pour la résolution de Q systèmes linéaires.

* Sous-programme JACOBI

Cette subroutine exécuté l'algorithme de JACOBI, présenté dans le chapitre (VI), ceci permet la résolution du système propre d'ordre q, suivant :

$$K_{k+1} Q_{k+1} = M_{k+1} Q_{k+1} \Lambda_{k+1} \quad (\text{VII.31})$$

L'expérience montre que :

$$q = \text{Min}(2 * \text{NVALP}, \text{NVALP}+8) \quad (\text{VII.32})$$

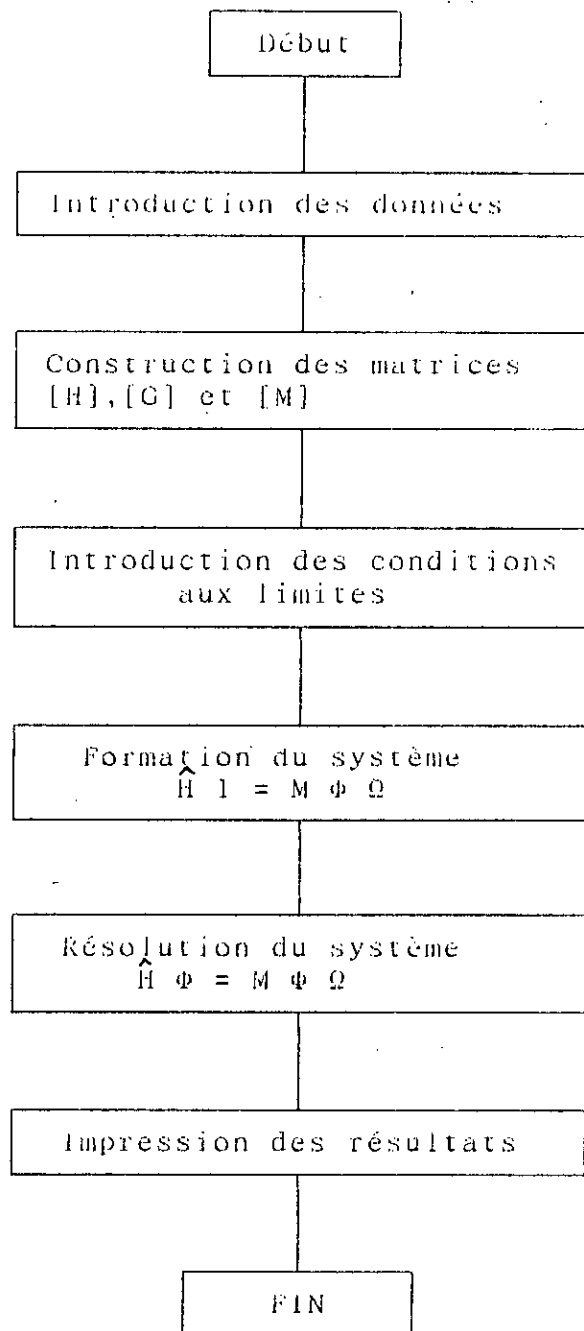
où NVALP : nombre de valeurs propres requises.

VII.6.2- Présentation du programme BEMDYN

Le programme BEMDYN est le programme élément frontière, adaptant l'approche proposée par BREBIA et NARDINI pour former la matrice masse. Le problème aux valeurs propres à résoudre est le suivant

$$\hat{H} \Phi = \lambda \hat{M} \Phi \quad (\text{VII.33})$$

- Structure globale du programme BEMDYN



Organigramme Général du Programme "BEMDYN"

- Formation des matrices H, G et M

Les matrices H et G sont celles établies en statique, la détermination de la matrice masse est l'étape la plus importante lors de l'élaboration du programme BEMDYN. En effet trois autres matrices $[\Psi]$, $[\eta]$ et $[F]$ sont construire.

- Formation du système propre

On réarrange les matrices H et M de manière à tenir compte des conditions aux limites, puis on construit les matrices \hat{H} et \hat{M} présentées dans le chapitre (V).

- Méthode de résolution

Les matrices $[\hat{H}]$ et $[\hat{M}]$ sont pleines et non symétriques pour utiliser la subroutine sous-espace développé dans le programme FEMDYN, conçue pour traiter des matrices symétriques définies positives, à la résolution du système (VII.19), nous procédons à une symétrisation des deux matrices :

$$\hat{H}_{ij} = \frac{\hat{H}_{ij} + \hat{H}_{ji}}{2} \quad (\text{VII.34})$$

$$H_{ij} = \frac{\hat{M}_{ij} + \hat{M}_{ji}}{2} \quad (\text{VII.35})$$

CHAPITRE VIII

APPLICATIONS

CHAPITRE VIII APPLICATIONS

VIII- introduction

les programmes informatiques précédemment exposés, ont été déroulés pour analyser le comportement statique et dynamique des barrages. Les quelques applications que nous avons traitées consistent à étudier ce comportement pour les deux types de barrages, barrage poids et barrage en terre.

pour les deux types de structure nous avons utilisé une discrétisation par des éléments triangulaires en MEF et par des éléments quadratiques et linéaires en MEIF, les résultats obtenus sont représentés par :

* Courbes comparatives et courbes de convergences des déplacements et des contraintes en statique.

* Tableaux comparatifs des périodes propres de vibration

VIII-2 barrage poids

a) cas statique

données

$$b = 5\text{m}, \quad \nu = 0.15, \quad H = 10\text{m}, \quad E = 1.2\text{E}4 \text{ Mpa}$$

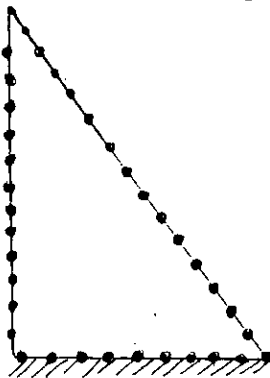
$$e_p = 1\text{m}, \quad \delta = 0.01 \text{ Mpa}$$

e_p : épaisseur de l'élément

δ : masse volumique de l'eau

ν : coefficient de Poisson

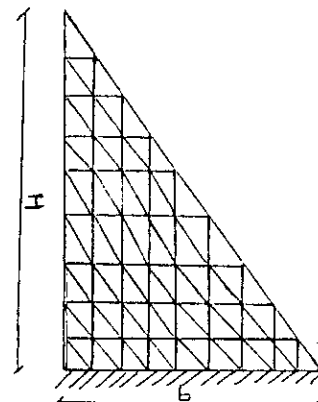
E : module de Young



discrétisation par M.E.I.F

(60) éléments quadratiques

(120) éléments linéaires



discrétisation par M.E.F

(256) éléments

triangulaire

figure (VIII-1): génération automatique de maillage

b) Cas dynamique

Données

$E/\rho = 4.8E3$

$\nu = 0.15$

ρ : la densité du béton

modèle de masse : matrice masse cohérente

	Nombres d'élts.	MODES PROPRES DE VIBRATIONS					
		1	2	3	4	5	6
MEF	256	1.344	0.508	0.386	0.275	0.177	0.168
BEM	211	1.352	0.521	0.402	0.309	0.180	0.170

tableau (VIII-1): les périodes propres de vibration

VIII-3 barrage en terre

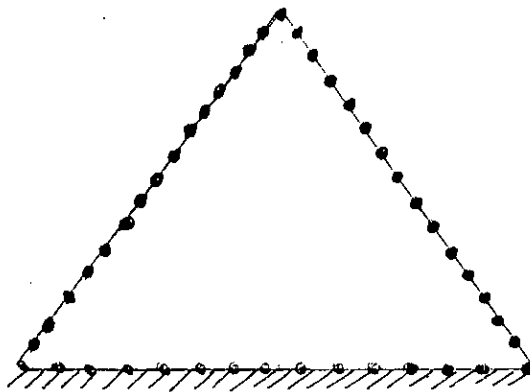
a) Cas statique

Données

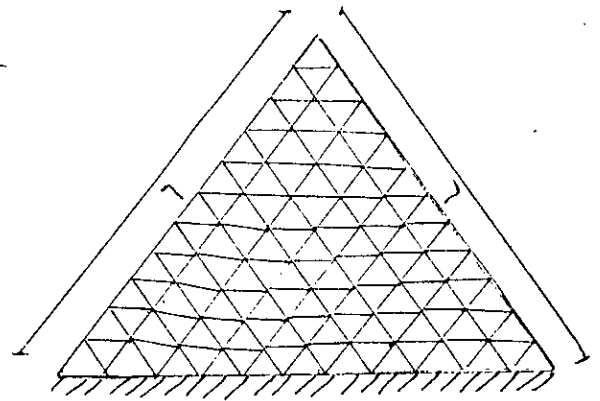
$L=12m, \nu = 0.33, ep=1m,$

$E=200 \text{ Mpa},$

$\delta = 0.01$



discrétisation par M.E.I.F
 (65) éléments quadratiques
 (136) éléments linéaires



discrétisation par M.E.F
 (256) éléments
 triangulaires

figure (VIII-2) : génération automatique de maillage

b) Cas dynamique

Données

$$E/\rho = 70.074$$

$$\nu = 0.33$$

Modèle de masse : matrice masse cohérente

	Nombres d'élts	MODES PROPRES DE VIBRATIONS					
		1	2	3	4	5	6
MEF	256	4.534	2.703	2.440	1.626	1.606	1.405
BEM	211	4.603	2.782	2.504	1.674	1.663	1.533

tableau (VIII-2): les périodes propres de vibration

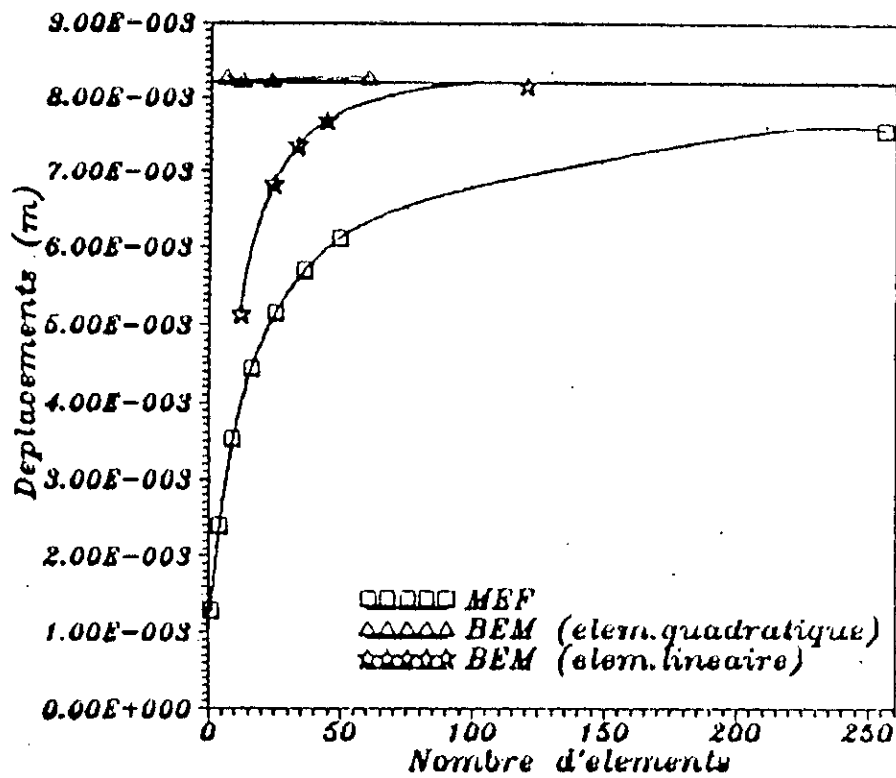


Fig 2-1: Courbe de convergence des déplacements
($x=0, y=10m$)

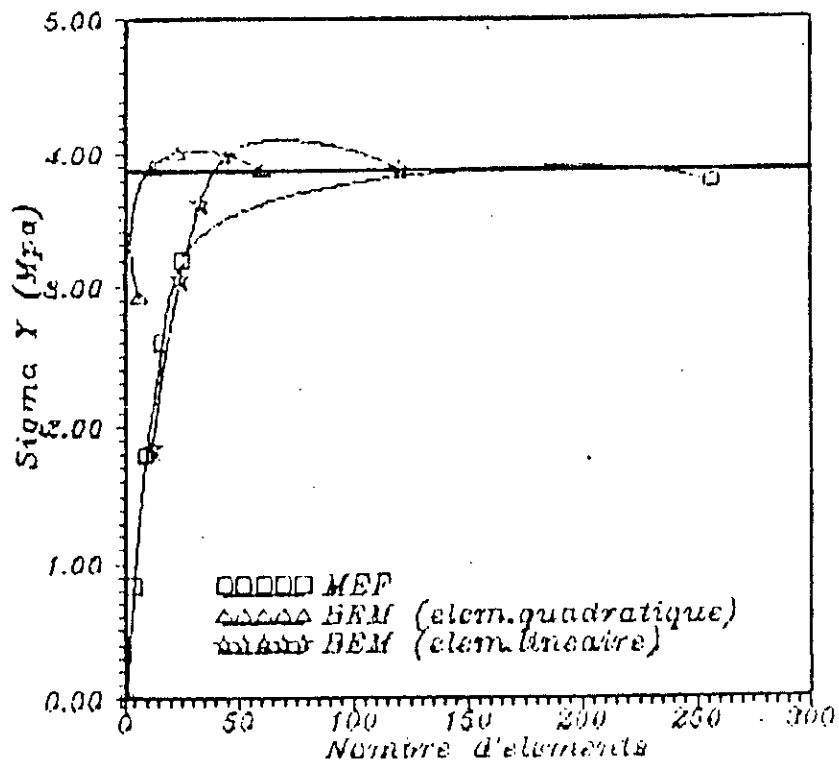


Fig 2-2: Courbe de convergence des contraintes

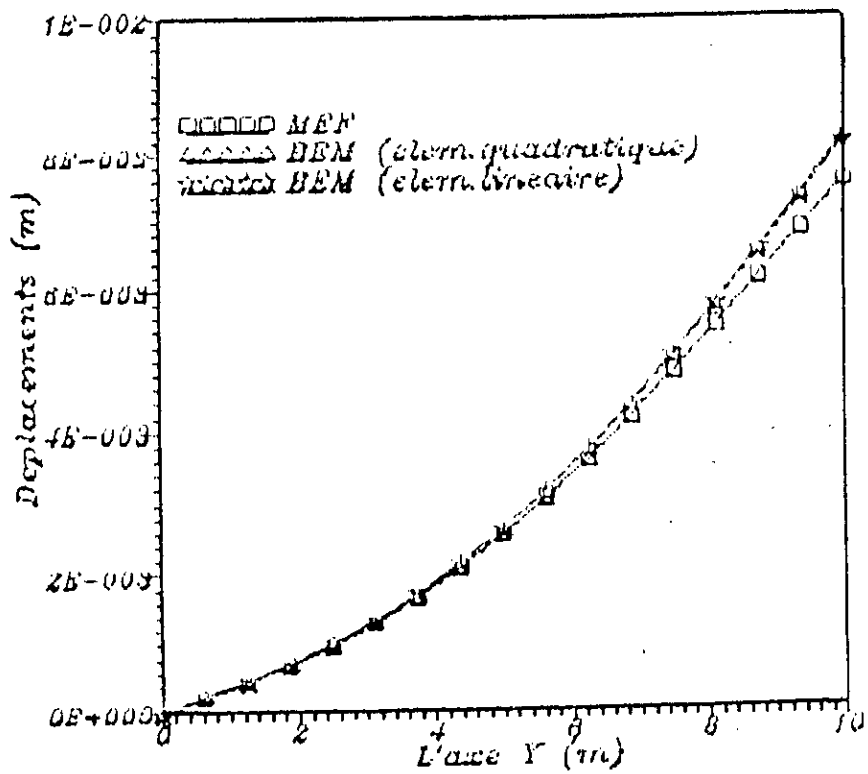


fig 2-3: Courbe comparative des déplacements
 (surface en contact avec l'eau)
 (barrage $h=10m, b=5m$)

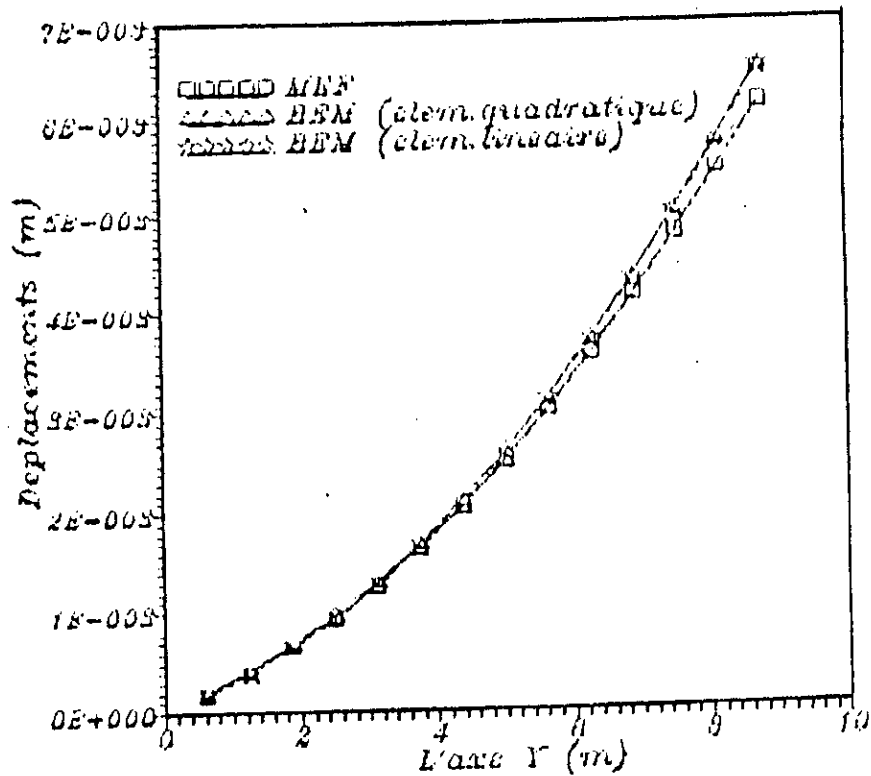


fig 2-4: Courbe comparative des déplacements
 (points internes du barrage)
 (barrage $h=10m, b=6m$)

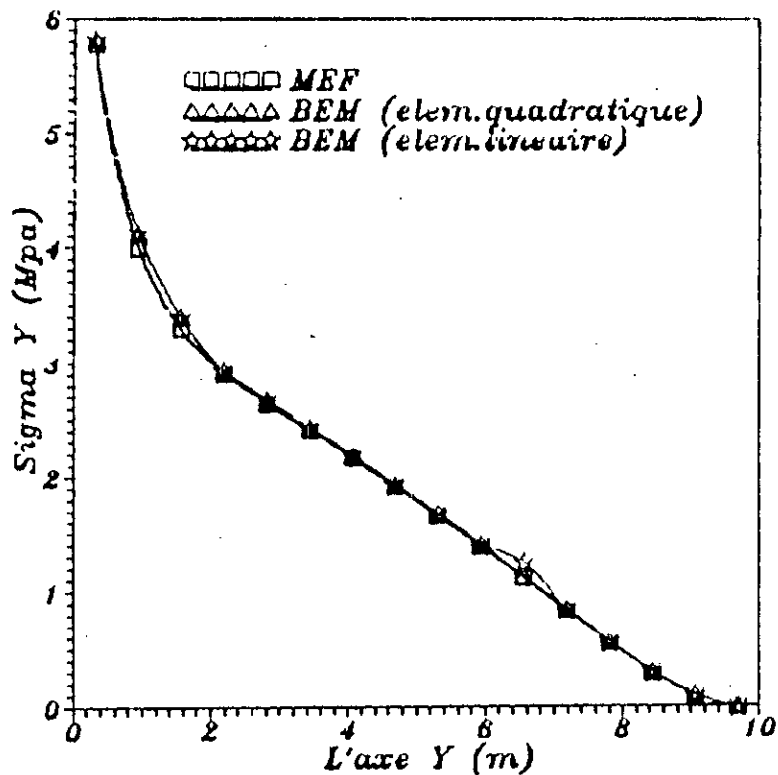


FIG 2-5: Courbe comparative des contraintes (surface en contact avec l'eau) (barrage $h=10m, b=5m$)

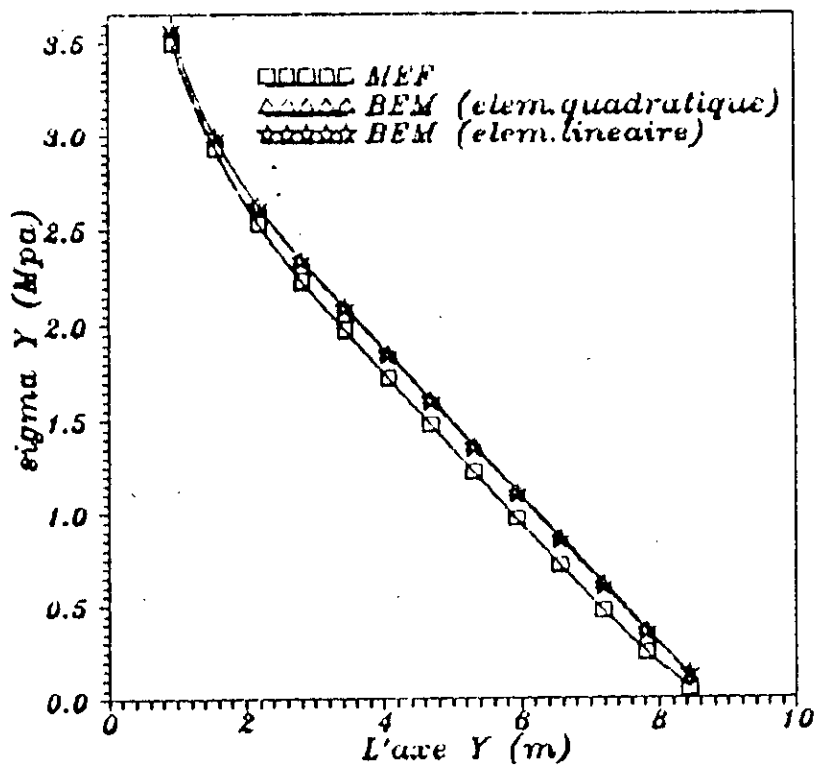


fig 2-6: Courbe comparative des contraintes (points internes du barrage) (barrage $h=10m, b=5m$)

Fig 2-7: Courbe comparative des contraintes
(surface en contact avec l'eau).
(barrage h=10m, b=5m)

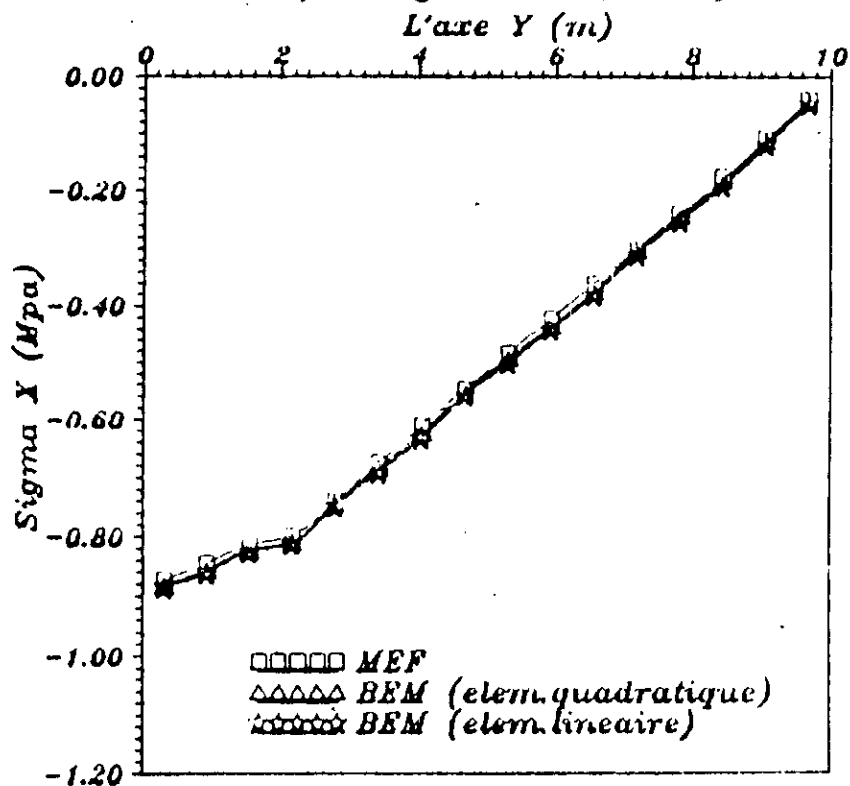
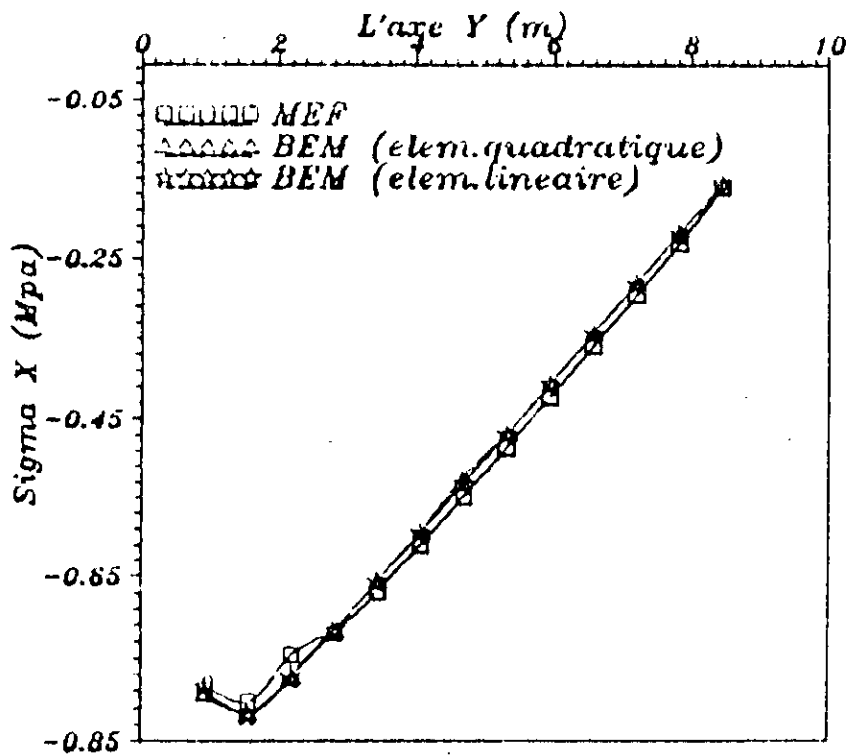


Fig 2-8: Courbe comparative des contraintes
(points internes)
(barrage h=10m, b=5m)



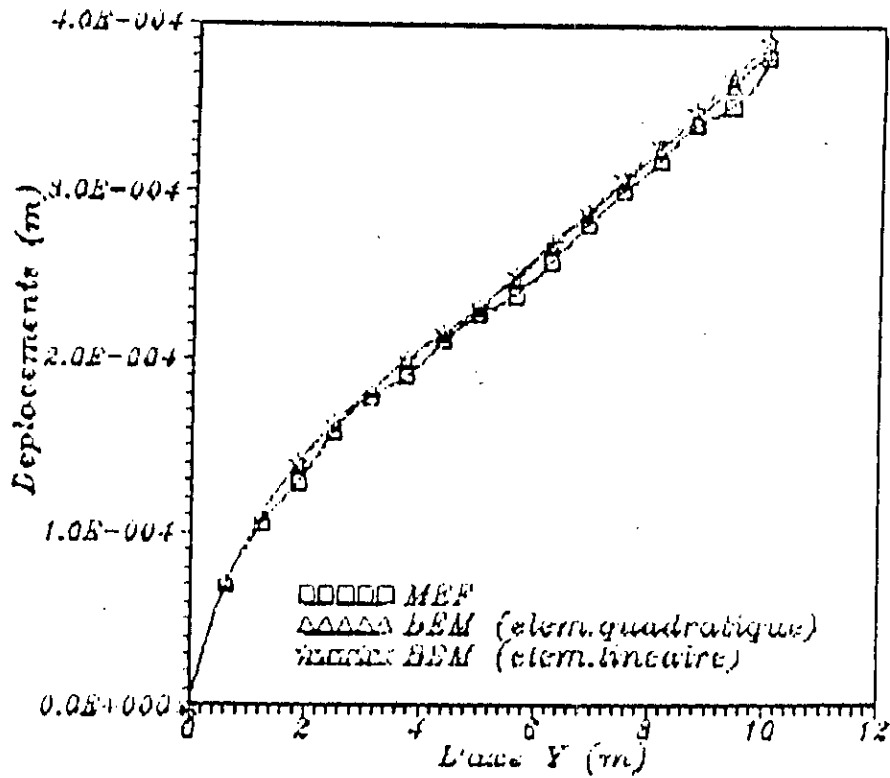


Fig 2-9: Courbe comparative des déplacements (surface en contact avec l'eau) (hauteur chargée=5m)

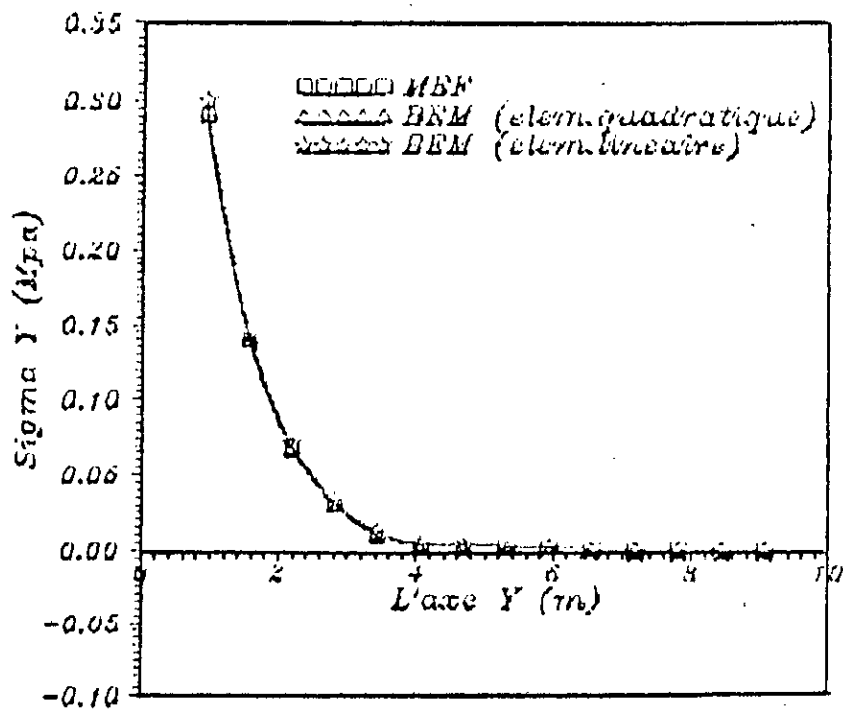


Fig 2-10: Courbe comparative des contraintes (surface en contact avec l'eau) (hauteur chargée=5m)

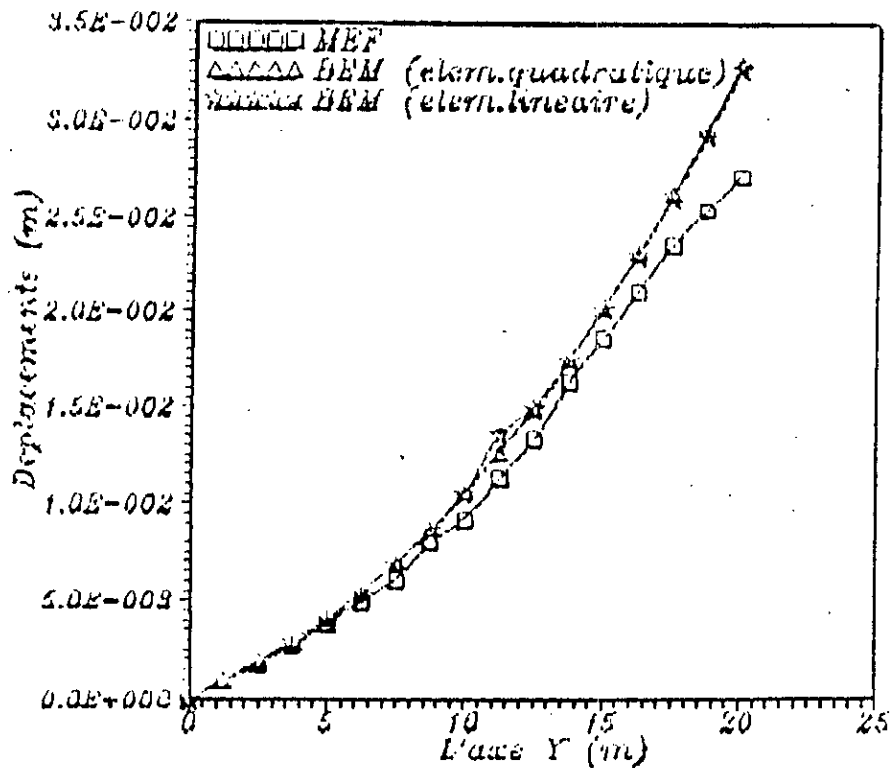


Fig 2-11: Courbe comparative des déplacements (surface en contact avec l'eau) (barrage $h=20m, b=10m$)

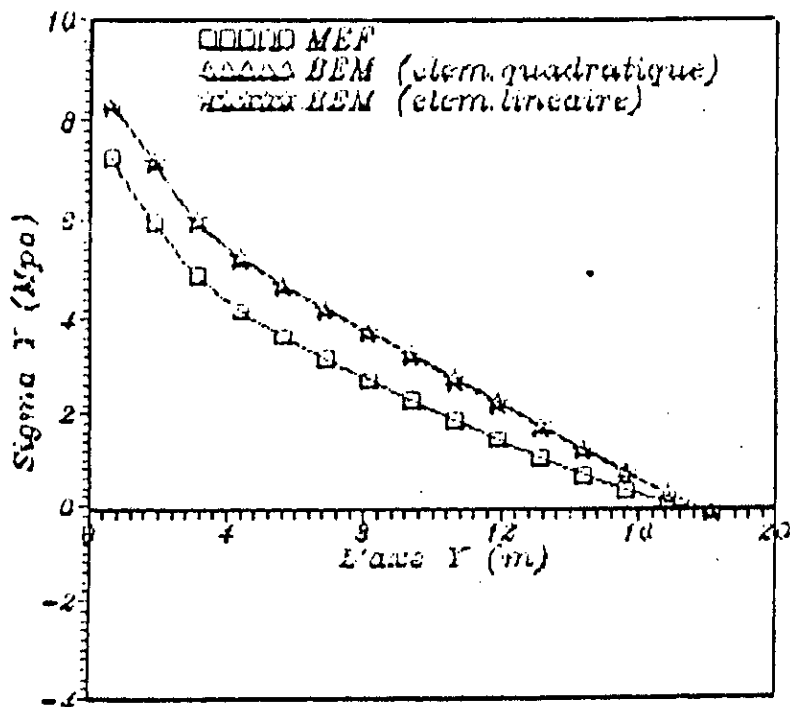


Fig 2-12: Courbe comparative des contraintes (surface en contact avec l'eau) (barrage $h=20m, b=10m$)

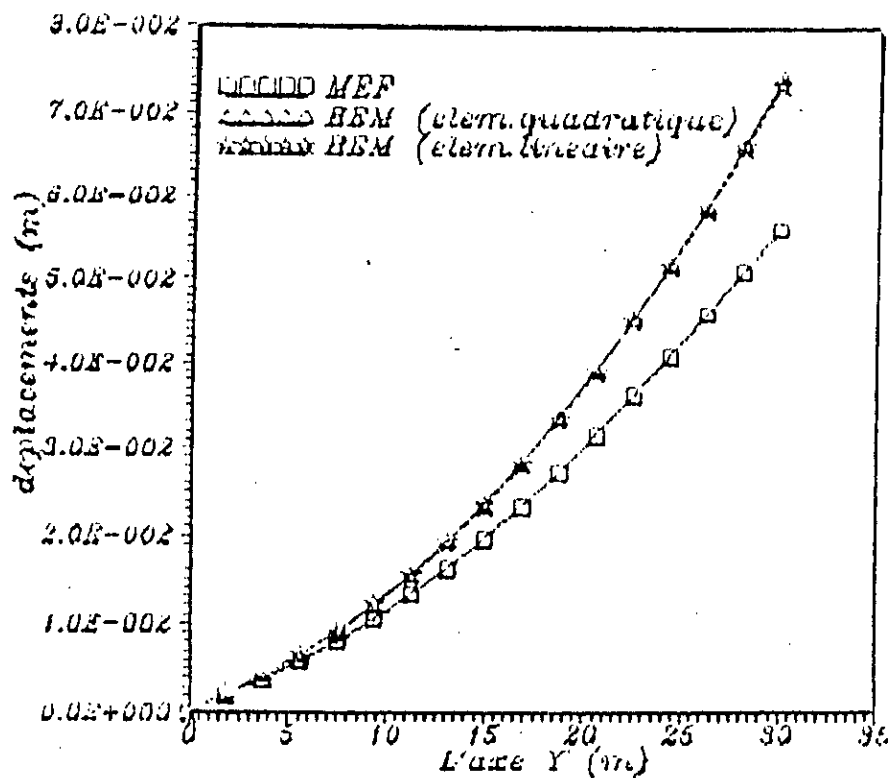


Fig 2-13: Courbe comparative des déplacements (surface en contact avec l'eau) (barrage h=30m, b=15m)

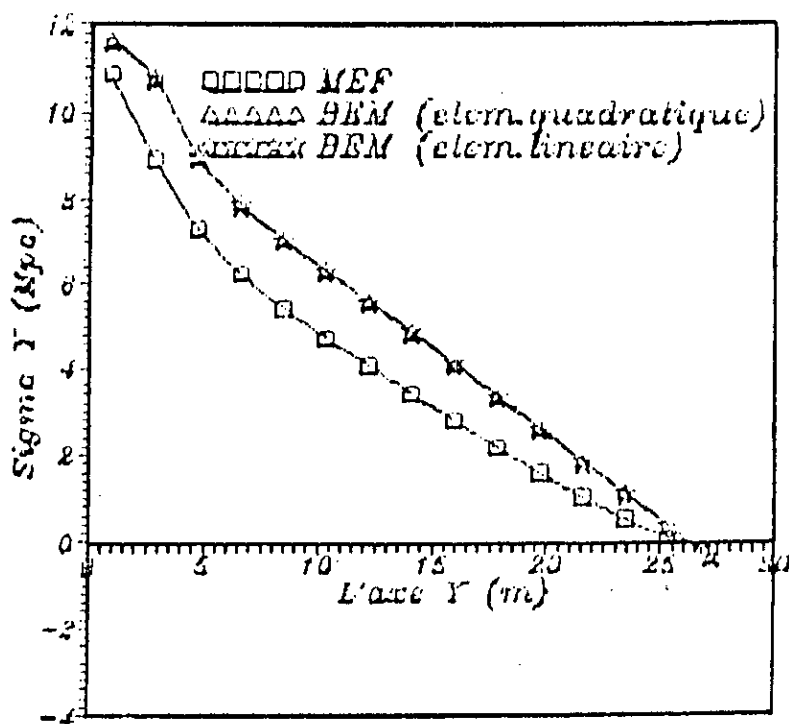


Fig 2-14: Courbe comparative des contraintes (surface en contact avec l'eau) (barrage h=30m, b=15m)

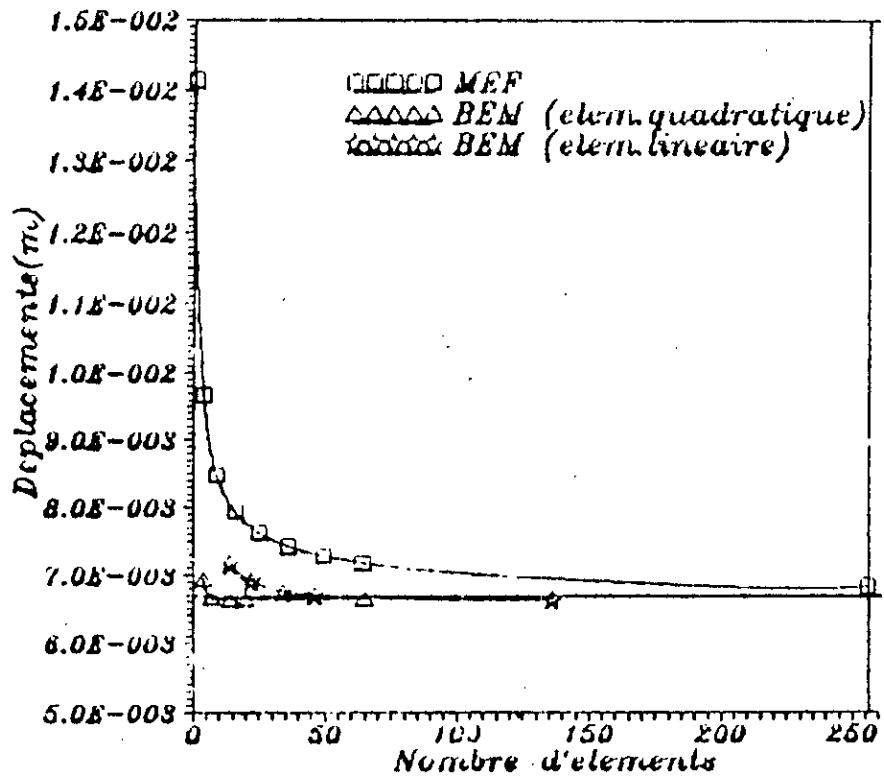


Fig 3-1: Courbe de convergence des déplacements ($x=0, y=0$)

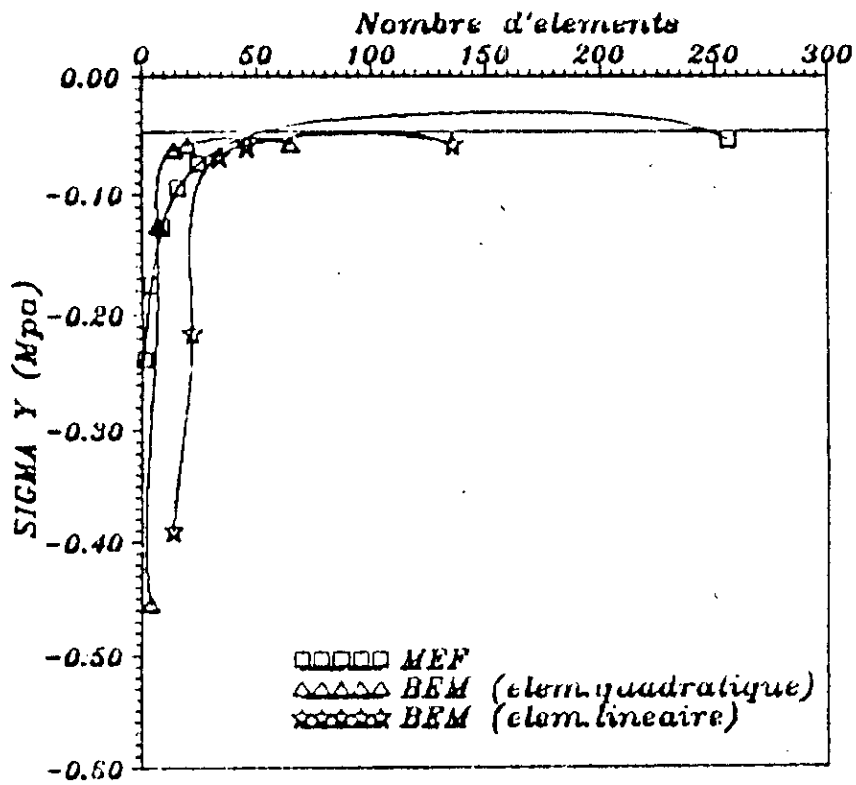


Fig 3-2: Courbe de convergence des contraintes

Fig 2-4: Courbe comparative des déplacements (points inférieurs, barrage = 12m)

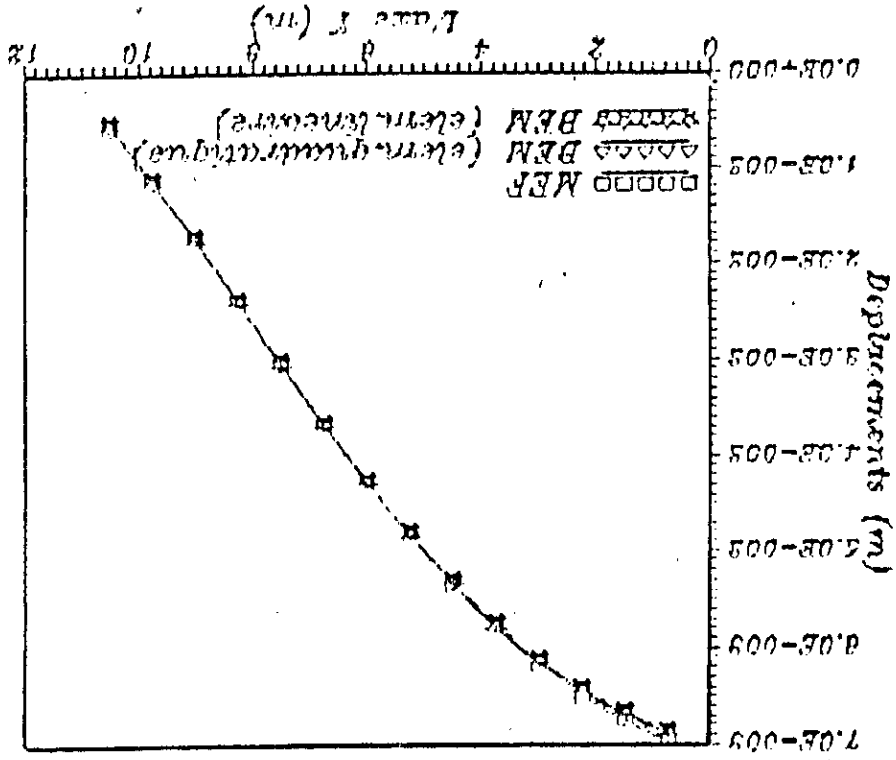
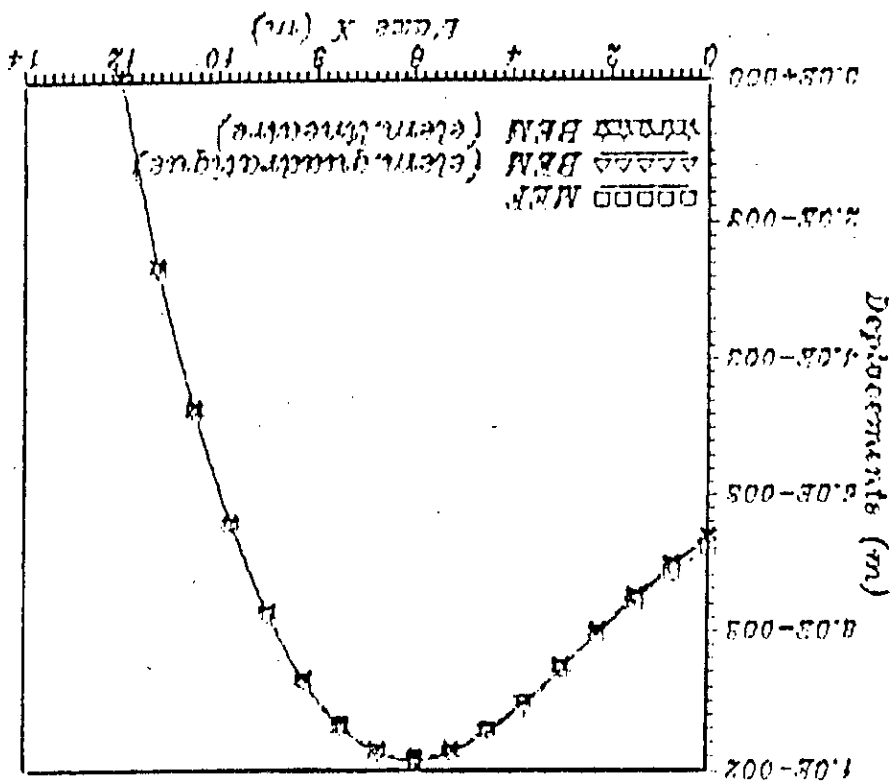


Fig 2-3: Courbe comparative des déplacements (courbe en contact avec l'eau) (barrage = 12m)



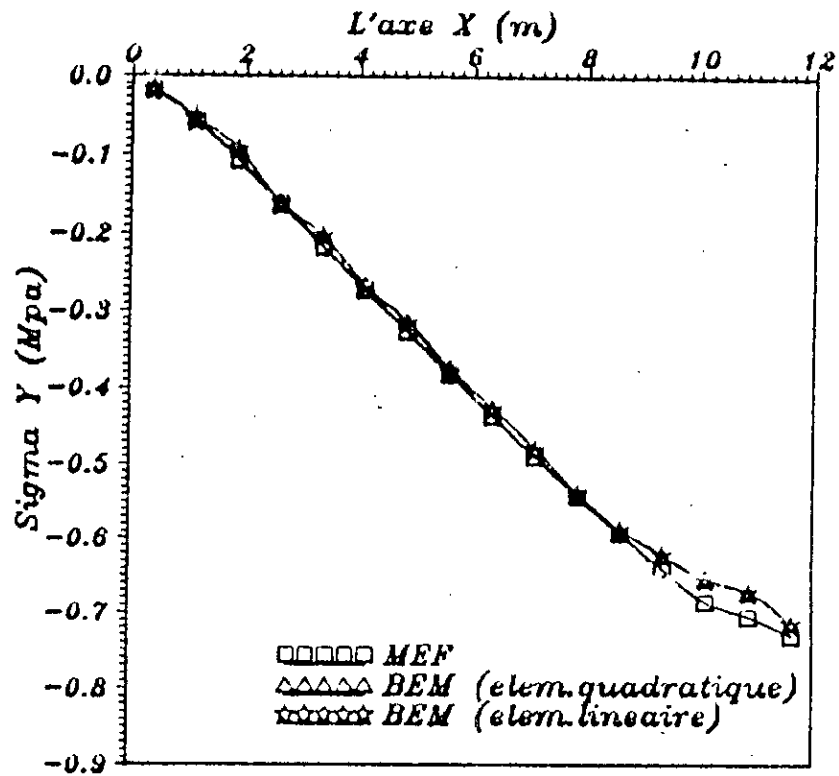


Fig 3-5: Courbe comparative des contraintes (surface en contact avec l'eau, l=12m)

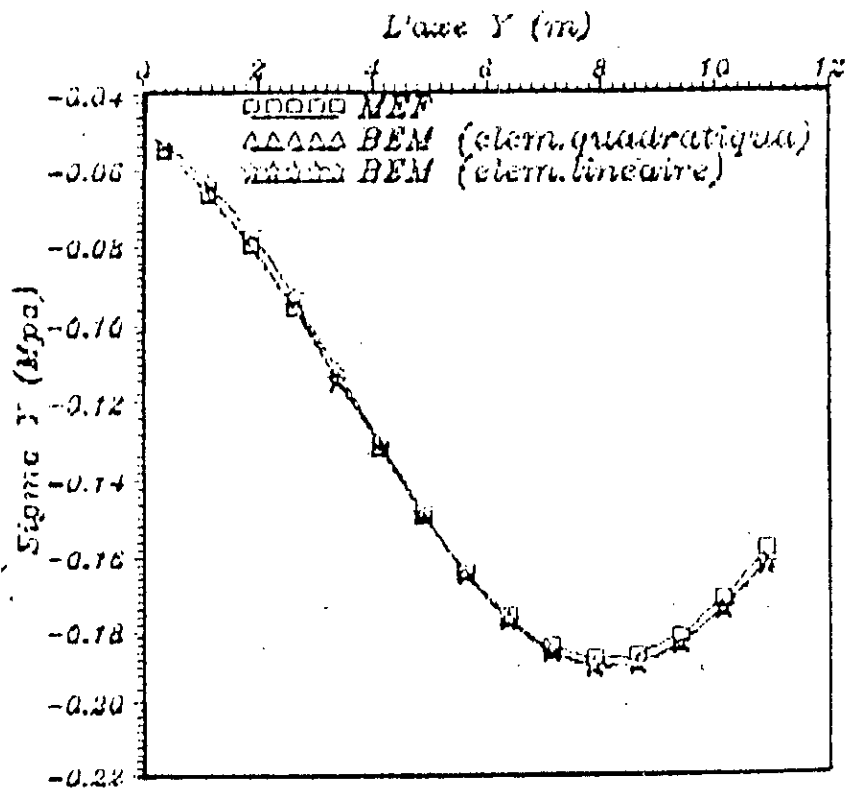


Fig 3-6: Courbe comparative des contraintes (points internes, barrage l=12m)

Fig 5-7: Courbe comparative des contraintes
(surfaces en contact avec l'eau)
(barrage l=12m)

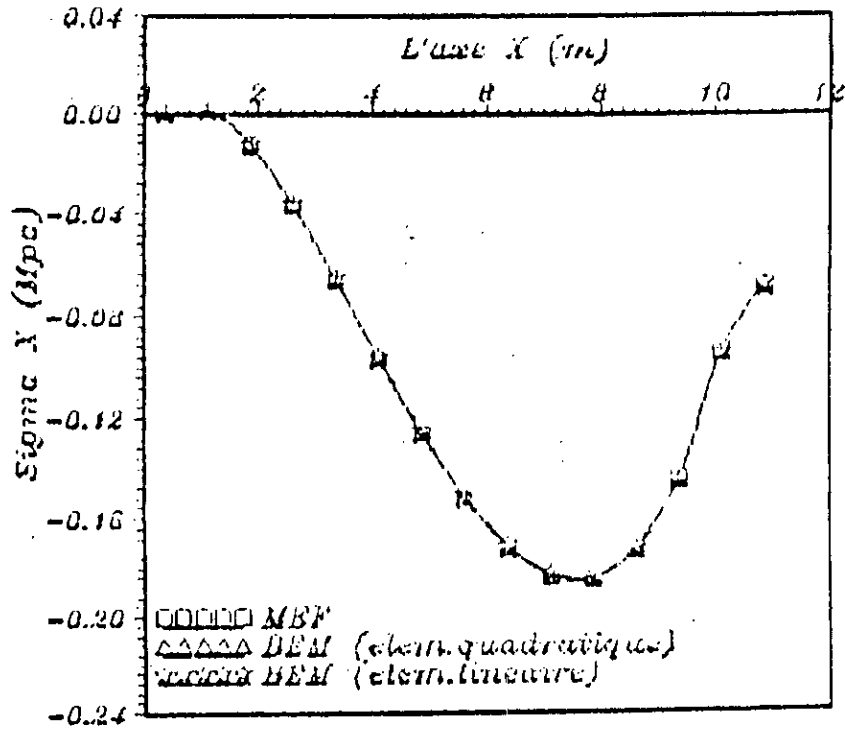
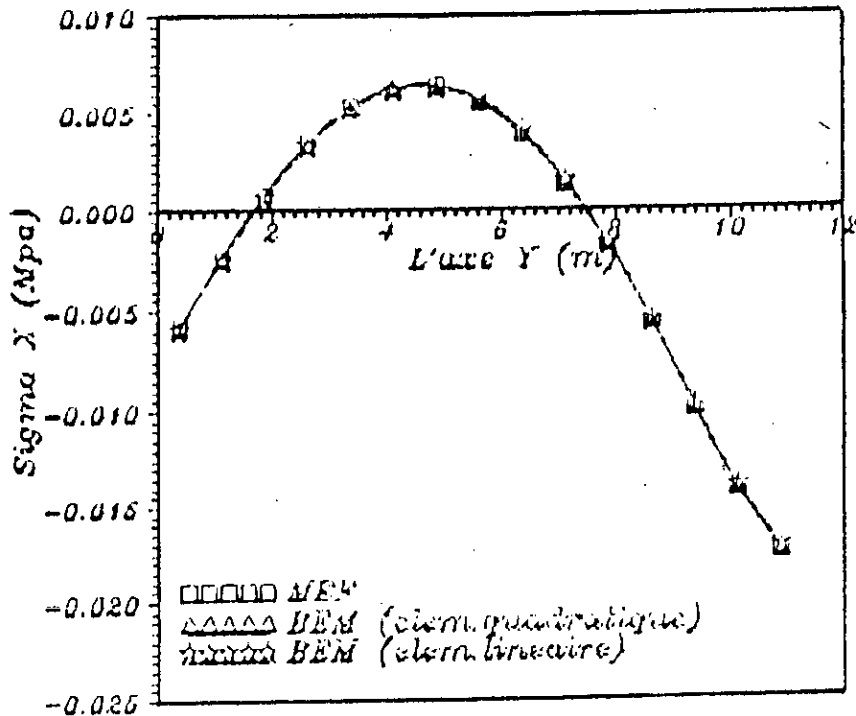


Fig 5-8: Courbe comparative des contraintes
(points internes, l=12m)



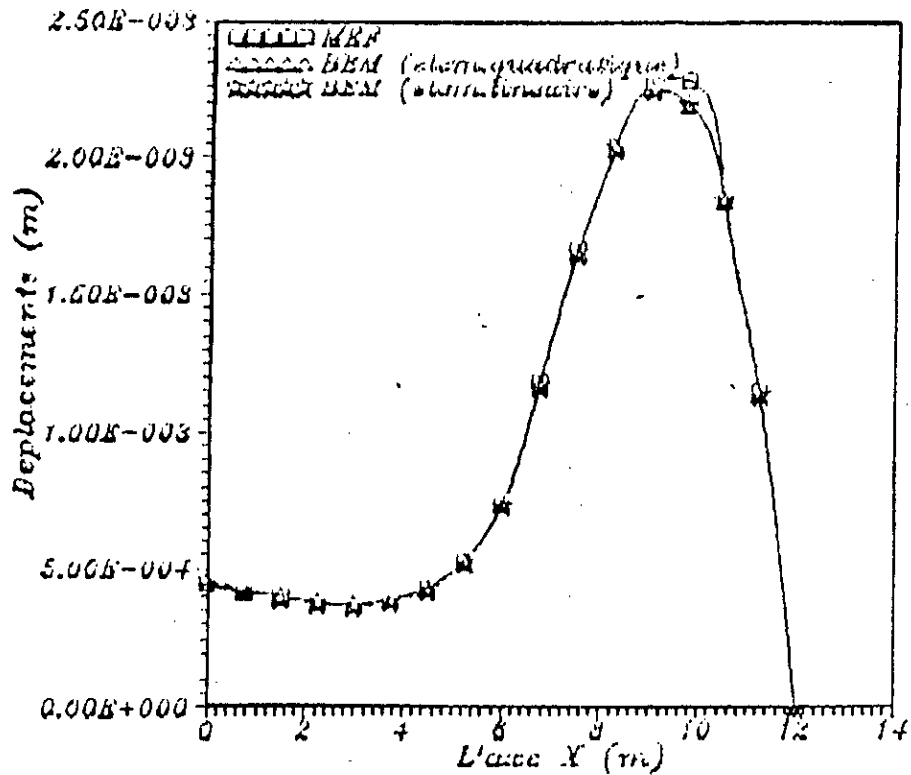


Fig 8-9: Courbe comparative des déplacements (surface en contact avec l'eau) (hauteur chargée=6m)

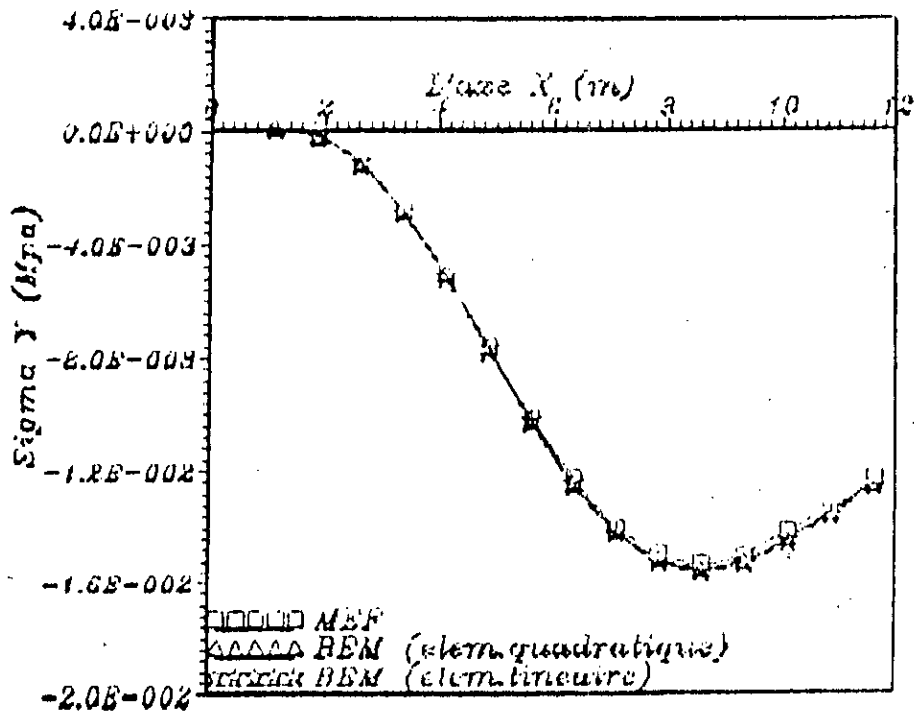


Fig 8-10: Courbe comparative des contraintes (surface en contact avec l'eau) (hauteur chargée=6m)

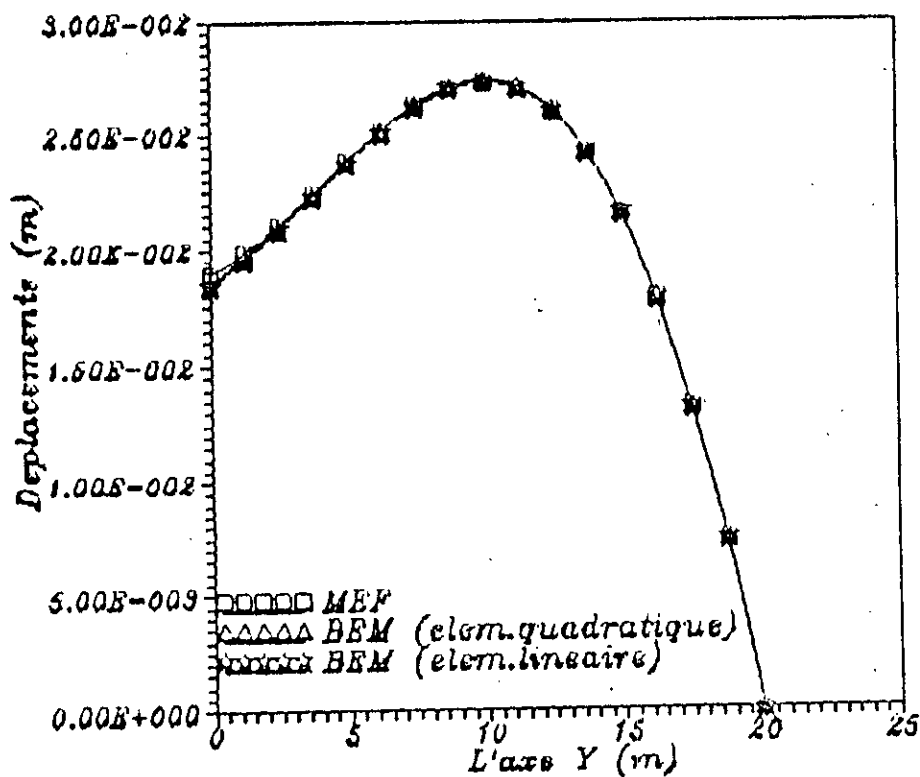


Fig 3-11: Courbe comparative des déplacements
(surface en contact avec l'eau)
(barrage l=20m)

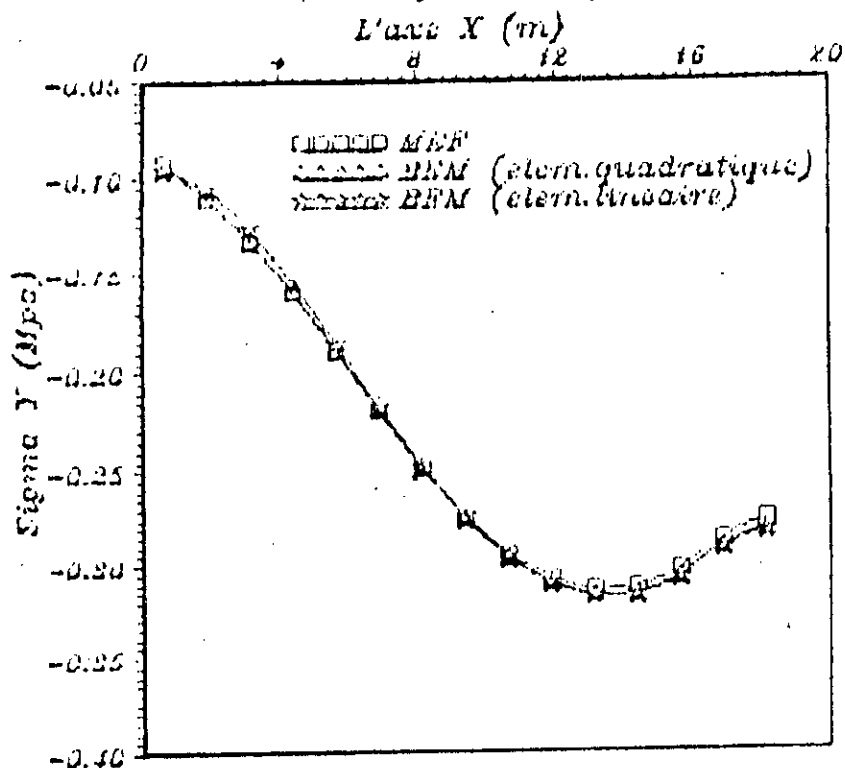


Fig 3-12: Courbe comparative des contraintes
(surface en contact avec l'eau)
(barrage l=20m)

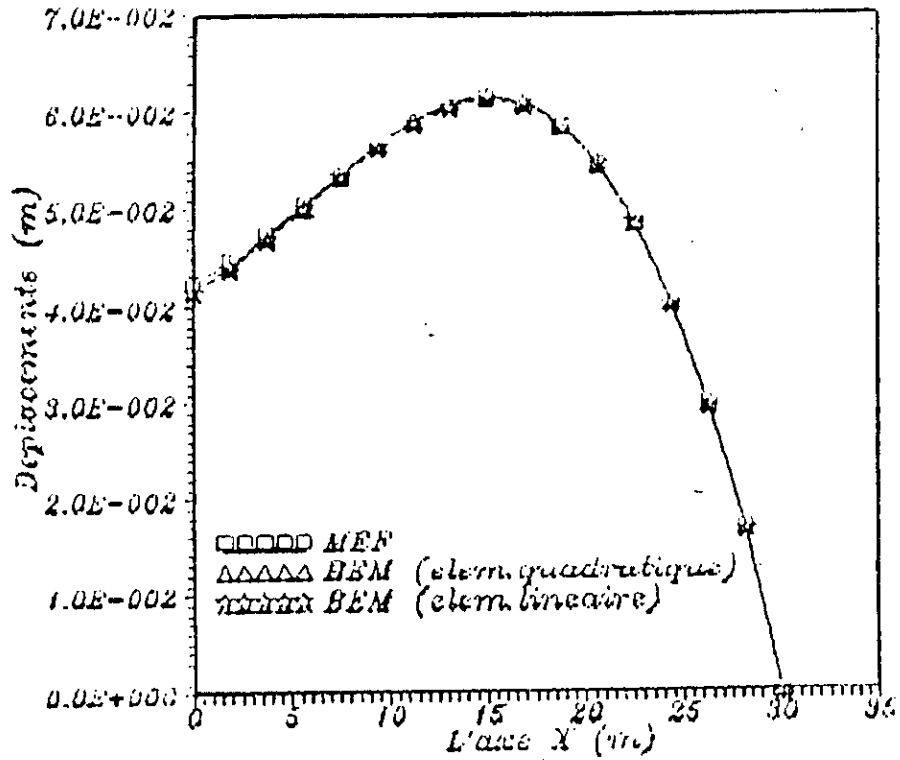


Fig 3-13: Courbe comparative des déplacements (surface en contact avec l'eau) (barrage $l=30m$)

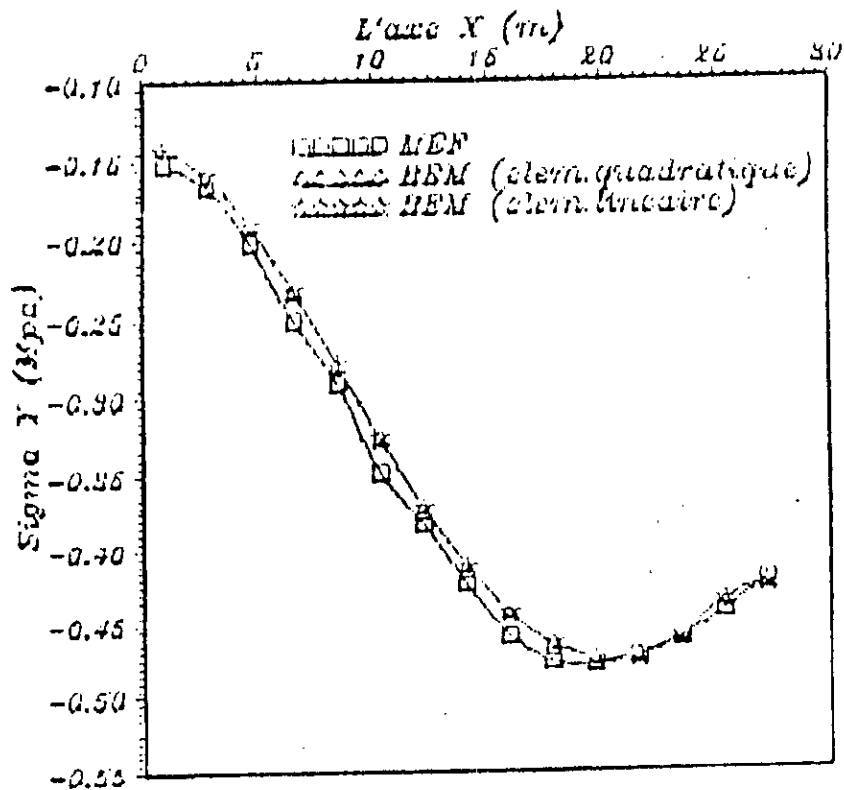


Fig 3-14: Courbe comparative des contraintes (surface en contact avec l'eau) (barrage $l=30m$)

VIII-4 Intèrprétation des resultats:

Les applications qu'on a traité dans notre étude, nous permet de bien voir le comportement statiques et dynamique des barrages, ainsi que le degré de puissance de chaque méthode.

Les résultats obtenus pour ces applications, peuvent être interpreter comme suit:

1- partie statique:

*. Courbes de convergence

La structure est discretisée par des éléments triangulaires pour le M.E.F, et par des éléments quadratiques et linéaires pour la B.E.M. Le raffinement du maillage, permet d'obtenir des courbes de convergences des contraintes et des déplacements. On remarque que la représentation par les deux méthodes procure des solutions approchées qui convergent vers la solution exacte, mais la convergence par l'élément quadritique (60 éléments pour le barrage poids et 65 éléments pour le barrage en terre) est plus rapide que la convergence pour l'élément linéaire (120 éléments et 136 éléments), tandis que pour le M.E.F (256 éléments) elle necessite plus de temps de calcul et un raffinement de maillage plus élevé.

On peut conclure que l'élément quadratique est excellent pour les problèmes d'élasticité plane.

*. Courbe comparatives

Vu que nous avons atteint la convergence par les deux méthodes avec le maillage précédent, nous avons utilisé ce maillage pour comparer les déplacements et les contraintes dans le barrage.

En effet pour les courbes de contraintes, qu'elles ont le même ordre de grandeur, cependant, leurs intensités se trouvent à être importantes au droit de l'encastrement, et vont en diminuant jusqu'elles s'annulent au niveau du sommet du barrage.

Cela s'explique par le fait du chargement linéaire appliqué (l'action de l'eau) qui se trouve être maximum en bas du

barrage, et s'annule au sommet.

Pour les courbes de déplacement, on remarque que les résultats obtenus par les deux méthodes ont le même ordre de grandeur, et donnent des courbes ayant les mêmes allures.

En effet, le barrage poids se comporte comme une console de profil triangulaire, dont les déplacements sont nuls à l'encastrement et vont en augmentant jusqu'à atteindre le maximum au sommet, tandis que pour les barrages en terre, on remarque que le déplacement est nul à l'encastrement, et va en augmentant jusqu'à un certain point où il commence à diminuer en s'approchant du sommet, ceci est dû à sa structure géométrique qui fait en sorte que sa partie aval contribue à sa résistance à la compression de l'eau.

2- Partie dynamique

Les résultats obtenus consistent en la détermination des valeurs et vecteurs propres d'un barrage poids et d'un barrage en terre soumis à des vibrations libres non amorties, seuls les premiers modes dans un classement par valeur décroissantes de périodes propres sont à retenir, car eux seuls sont excités de façon notable, de plus les modes élevés n'ont pas de sens physique car ils peuvent provenir d'un manque de précision du modèle dû, par exemple à la concentration des masses aux noeuds.

Une comparaison entre les valeurs des périodes propres obtenus par la M.E.F et la M.E.LF pour les six premiers modes de vibrations à montrer que les résultats ont le même ordre de grandeurs.

Nous pouvons remarquer enfin, que les fréquences trouvées dans le barrage terre sont inférieures à ceux trouvées en barrage poids, cela s'explique par la rigidité importante de ces derniers d'où leur utilisation dans les zones sismiques.

CONCLUSIOIN

Conclusion:

Dans le cadre de notre étude, nous avons utilisé la méthode des éléments finis et la méthode des éléments frontière pour l'analyse statique et dynamique des barrages.

Une étude comparative entre les deux méthodes nous a permis d'évaluer le degré de puissance de chacune d'elle.

En effet, dans la méthode des éléments frontières la discrétisation n'impliquant que le frontière du domaine, les paramètres inconnus du problèmes interviennent en nombre beaucoup plus réduit, ce qui constitue un avantage économique, en temps de calcul et en place mémoire, un autre avantage de la méthode, réside de façon évidente dans la vitesse de convergence et la précision des résultats obtenus, cela est dû aux bonne propriétés de convergence de la formulation mixte utilisée par cette dernière.

les conclusions à tirer sont exposées ci dessous:

1- l'étude par la méthode des éléments frontières, deux éléments, l'un quadratique, l'autre linéaire ont été utilisés avec succès pour l'analyse statique des barrages, celle ci a montré que les résultats obtenus par ces deux éléments étaient très précis (très proche de la solution exacte).

2- l'utilisation en MEF des éléments triangulaires simples était d'une extrême simplicité, et d'une utilisation pratique, mais au prix d'une dépense considérable en temps calcul et en place mémoire, en effet, l'obtention d'une solution satisfaisant les exigences de précision avec ce type d'élément nécessite une augmentation importante de la finesse du maillage, d'où l'intérêt d'utiliser des éléments isoparamétriques.

3- une comparaison entre les valeurs propres obtenues par les deux méthodes a montré que les résultats sont du même ordre de grandeur, cependant la construction de la matrice masse en MEF présente l'avantage d'être d'une plus grande simplicité de programmation.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- 1-Y. AIMENE; "Investigation des comportements statiques et dynamiques des voiles par la méthode des éléments finis".
Projet de fin d'étude ENP (1993)
- 2-K.J.BATHE; "Finite élément procedures in engineering analysis".
Prentice - Hall (1982)
- 3-M.K.BERRAH; "Notes de cours de la mécanique des milieux continus".
ENP.
- 4-A.A.BENAZZOUZ, M.HADID; "Méthode des éléments finis".
Mini-projet ENP (1993).
- 5-C.A.BREBBIA, J.DOMINGUEZ; "Boundary éléments an introductory course".
MC GRAW-HILL, Booke Company.
- 6-M.DEMIDEM; "Notes de cours de calcul automatique des structures".
ENP.
- 7-G.DHATT, G.TOUZOT; "Une représentation de la méthode des éléments finis".
Maloine S.A Editeur ,Paris (1973).
- 8-J.F.IMBERT; "Analyse des structures par éléments finis".
CEPAD (1984).
- 9-CH. MALLET, J.PACQUANT; "Les barrages en terre".
EUROLLES (1951).
- 10-H. PRESS; "Les barrages de vallée".
DUNOD, Paris (1958).
- 11-O.RAHMANI, S.KEBDANI; "Introduction à la méthode des éléments finis".
O.p.U
- 12-k.C.ROCKEY, H.R.EVANS, D.W.GRIFFITHS, D.A.NETHERCOT;
"Introduction à la méthode des éléments finis"
EYROLLES, Paris (1979)
- 13-R.TINAWI; "Introduction aux éléments finis"
E.P.MONTREAL (1981)
- 14-S.TIMOSHENKO; "Théorie de l'élasticité"
LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE CH.Béranger (1948)
- 15-O.C.ZIENKIEWICZ; "La méthode des éléments finis"
MC GRAW-HILL (1979)

ANNEXE

1-Introduction

Nous avons supposé dans notre étude, que les charges agissent sur la structure étaient ponctuelles. Néanmoins il existe plusieurs cas où les structures sont soumises à des charges réparties. Pour pouvoir utiliser dans ce cas la technique des éléments finis, on doit remplacer ces charges réparties par des charges ponctuelles équivalentes appliquées aux noeuds. Pour cela, il faut que les travaux virtuels des charges réparties et des charges ponctuelles soient égaux.

2- Charge répartie sur une surface

Soit des forces réparties sur une surface d'un élément bidimensionnel, représentées par un vecteur $q(x,y)$ de composantes x,y , leur travail dû à un déplacement virtuel sera:

$$Q_{c,r} = (dU \cdot x + dV \cdot y) dS \quad (1)$$

L'intégral dans ce cas étant prise sur la surface où la force est répartie:

$$Q_{c,r} = \int_S \begin{Bmatrix} dU \\ dV \end{Bmatrix}^T \{q(x,y)\} dS \quad (2)$$

Avec:

$$\begin{Bmatrix} dU \\ dV \end{Bmatrix}^T = \{d\delta(x,y)\}^T = \{[\phi(x,y)][A]^{-1}\}^T \{d\delta^e\}^T \quad (3)$$

où $\{\delta^e\}$: Déplacements aux noeuds de l'élément

$$Q_{c,r} = \{d\delta^e\}^T [A]^{-1T} \int_S [\phi(x,y)]^T \{q(x,y)\} dS \quad (4)$$

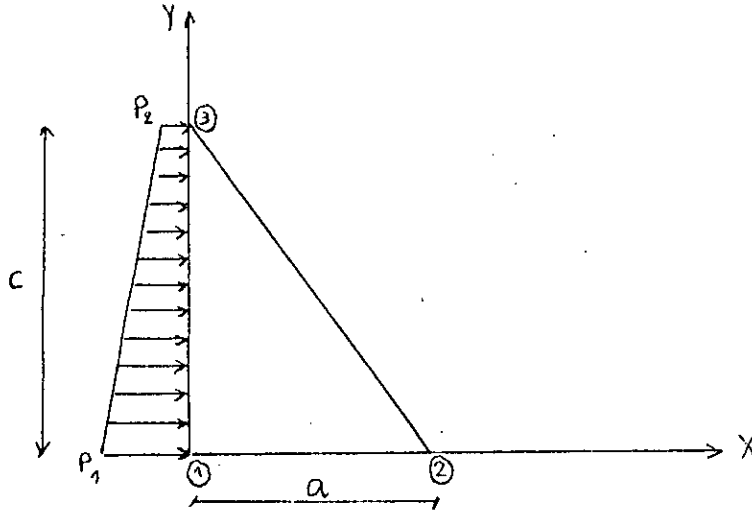
Le travail virtuel des forces équivalentes $\{N\}$ est:

$$Q_{c,p} = \{d\delta^e\}^T \cdot \{N\} \quad (5)$$

L'égalisation des deux travaux, nous donnera donc:

$$\{N\} = [A^{-1}]^T \int_S [\phi(x,y)]^T \{q(x,y)\} dS \quad (6)$$

2-1 Charges répartie sur un élément triangulaire:



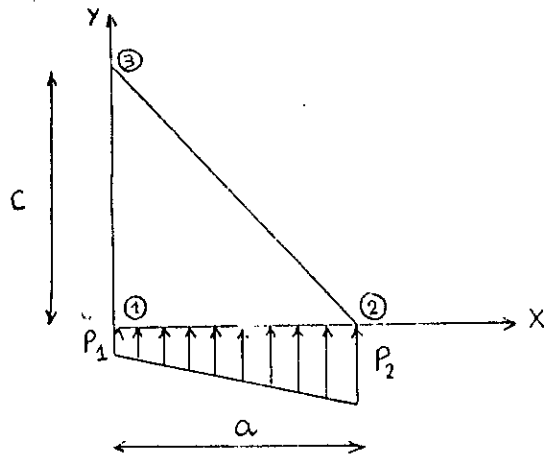
fig(-1)

a- Chargement suivant l'axe x

On trouve d'après la relation (-6):

$$\{N\} = \frac{h \cdot c}{6} \begin{bmatrix} P_2 + 2P_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2P_2 + P_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

b- Chargement suivant l'axe y



fig(-2)