

2/95
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE DU COMPORTEMENT GEOMETRIQUE NON LINEAIRE DES SYSTEMES A TREILLIS

Proposé par :

M^{rs}: B. MEZAZIGH.
K. SILHADI.

Etudié par :

M^{rs}: H. AIROUCHE.
K. MEZIANI.

Dirigé par :

M^{rs}: B. MEZAZIGH.
K. SILHADI.

PROMOTION
JUN. 1995

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE DU COMPORTEMENT GEOMETRIQUE NON LINEAIRE DES SYSTEMES A TREILLIS

Proposé par :

Etudié par :

Dirigé par :

M^{rs}: B. MEZAZIGH.

M^{rs}: H. AIROUCHE.

M^{rs}: B. MEZAZIGH.

K. SILHADI.

K. MEZIANI.

K. SILHADI.

PROMOTION

JUIN 1995

Dédicaces

المركز الوطني للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE —
Ecole Nationale Polytechnique

C'est à :

- mes parents,

- ma famille,

- mes amis, celles et ceux qui

me sont chers

que je dédie ce modeste travail

HALIM.

Je dédie ce modeste travail à :

- ma mère, source d'amour et d'affection.

- mon père, qui m'a toujours offert un

soutien moral et matériel.

- mes frères et soeurs.

- tous mes amis.

KHALED.

Remerciements

Nous tenons à remercier tous nos professeurs, qui au cours de nos études, nous ont prodigué leurs enseignements, conseils et encouragements.

Aussi, nous remercions tous ceux qui ont permis la réalisation de cette thèse, ainsi que le personnel de la bibliothèque (Saleh, Karim, Krimo) et le personnel du centre de calcul.

Qu'il soit permis également d'exprimer notre gratitude, envers nos promoteurs M^{rs} B.MEZAZIGH et K.SILHADI pour leur encadrement durant toute l'année.

Sujet : Etude du comportement géométrique non-linéaire des systèmes à treillis.

Résumé : A partir du principe des travaux virtuels, et en utilisant une amélioration de la formulation Lagrangienne actualisée, permettant d'éliminer les rotations de corps rigide, est développée l'équation d'équilibre incrémentale non-linéaire.

Un programme mettant en oeuvre la méthode de résolution non linéaire, dite 'Arclength', est élaborée pour résoudre cette équation.

Des comparaisons sont faites avec les résultats obtenus par d'autres études.

Subject : Study of the geometrically nonlinear behaviour of trusses.

Abstract : From the principle of virtual displacements, and using an amelioration of the updated Lagrangian formulation, wich eliminate the rigid body rotations is developed the nonlinear incremental equation of equilibirium.

To solve this equation, a programme based on the nonlinear resolution "Arclength" method is evolved.

Comparisons are made with previous results in the numerical exemples.

Sommaire

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I: UNE PRESENTATION DE LA M.E.F	
I-1 Introduction	3
I-2 Concept de la méthode des éléments finis	5
I-3 Différentes formulation de la M.E.F	5
I-3-1 Formulation en déplacements	5
I-3-2 Formulation en contraintes	6
I-3-3 Formulations hybrides et mixtes	6
I-3-4 choix du type de formulation	6
I-4 La M.E.F considérée comme une minimisation de l'énergie potentielle	7
I.5 Critères de convergence	8
I-5-1 La compatibilité	8
I-5-2 La complétude	9
CHAPITRE II: FORMULATION NON-LINEAIRE ET DEVELOPPEMENT DE LA MATRICE RIGIDITE	
II-1 Introduction	14
II-2 Systèmes de référence et notations	14
II-3 Principe des déplacements virtuels et équations d'équilibre	16
II-4 Tenseur des déformations de Green-Lagrange	17
II-5 Le second tenseur des contraintes de Piolla Kirchhoff	18
II-6 Formulations Lagrangiennes	19
Formulation Lagrangienne actualisée	19
II-7 Formulation en éléments finis	20
II-8 Matrice de rotation pour un élément barre	23
II-9 Effet de la rotation de corps rigide sur l'énergie de déformation	27
II-10 Effet de la négligence des termes d'ordre supérieurs sur l'énergie de déformation	29
II-11 Description mixte	30

CHAPITRE III: METHODES D'ANALYSE NON-LINEAIRE

III-1 Introduction	33.
III-2 Les méthodes couramment utilisées	34.
III-2-1 La méthode directe	34.
III-2-2 La méthode incrémentale linéaire	37.
III-2-3 La méthode incrémentale non-linéaire	38.
III-3 La méthode "arclength"	40.
III-3-1 Developpement de la méthode	42.
III-3-2 Etude du paramètre α	44.
III-3-3 Etude du rayon Δl	45.
III-3-4 Choix de la méthode à utiliser	46.
III-3-5 Calcul du facteur de chargement	46.
III-4 Critères de convergence	48.

CHAPITRE IV: PRESENTATION DU PROGRAMME DE RESOLUTION

IV-1 Introduction	53.
IV-2 Allocation pseudo-dynamique des tables	55.
IV-3 La méthode ligne de ciel (skyline)	55.
IV-4 Lecture des données	57.
IV-5 Description du bloc non-linéaire	58.

CHAPITRE V: APPLICATIONS NUMERIQUES

- Application 1	69.
- Application 2	70.
- Application 3	73.
- Application 4	75.
- Conclusions	78.

CONCLUSION GENERALE

80.

ANNEXE

82.

BIBLIOGRAPHIE

Introduction

المركز الوطني للأبحاث والتقنية
BIBLIOTHÈQUE — المراجعين
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction

L'analyse des structures à treillis présente un grand intérêt pour différentes branches d'ingénierie.

Dans le passé, les méthodes d'analyse de ces structures, étaient principalement des méthodes analytiques ou des procédures classiques, basées sur les formules empiriques, données par des résultats expérimentaux. De telles méthodes sont nécessaires et désirables mais présentent tout de même un domaine d'application restreint, notamment lorsqu'il s'agit d'une analyse d'un problème non-linéaire.

En effet, un problème est dit non-linéaire pour deux raisons :

1- La première, lorsque les paramètres physiques supposés indépendants des déformations dans un problème linéaire, tel que les caractéristiques mécaniques du matériau (E , G ...) se trouvent être fonction des déformations. Dans ce cas, on parle de la non-linéarité matérielle.

2- La seconde, lorsqu'un grand changement de configuration a eu lieu, il y aura alors, des effets de second ordre à prendre en compte. Dans ce cas, on est en présence de la non-linéarité géométrique.

De nos jours, l'essor remarquable que connaissent les calculateurs électroniques et l'apparition des ordinateurs de haute puissance, donne un outil efficace pour une analyse non-linéaire complète.

Il est devenu apparent, que la solution d'un problème de stabilité des treillis, nécessite non seulement la détermination de la charge critique, mais aussi la construction de la courbe chargement-déformation non-linéaire. Ceci permet à l'ingénieur de mieux appréhender le comportement de la structure.

Il existe, actuellement, un nombre important d'articles présentant des procédures utilisant la méthode des éléments finis, pour construire cette courbe. Toutefois, vu la complexité relative de ces méthodes et l'existence des différences

(qu'elles soient majeures ou mineures) entre les différentes procédures, il est difficile de faire une synthèse claire de ces publications.

Dans ce présent travail, nous nous intéressons au comportement géométrique non-linéaire des treillis tridimensionnels. Notre étude repose sur formulation par éléments finis de ces structures en se basant sur la formulation Lagrangienne actualisée. Notre travail s'inscrit dans une série d'études visant à généraliser l'utilisation d'une amélioration de cette dernière qui permet d'éliminer les rotations des corps rigides. Il est question ici, de présenter le comportement non-linéaire des structures élastiques, et ce par la construction de la courbe chargement-déformation, en utilisant l'une des méthodes de résolution non-linéaire, en l'occurrence la méthode **arclength**. Cette méthode a la faculté de suivre l'évolution de la courbe chargement-déformation d'une façon très précise. Un programme mettant en oeuvre l'algorithme de cette méthode est établi, ce qui nous a permis de faire l'expérimentation numérique sur différents exemples.

Chapitre I

I- Une présentation de la MEF

I-1 Introduction

L'apparition de l'ordinateur, étend le domaine de conception de l'ingénieur. Ainsi il pourra réaliser des projets, de plus en plus complexes, où il est souvent contraint à l'éternel compromis entre, la contrainte de sécurité et le coût du projet.

Afin d'optimiser ce compromis, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement des systèmes physiques complexes. Il peut ainsi prévoir l'influence de ces décisions au moment de la conception du système.

Mathématiciens et ingénieurs ont développé, des équations aux dérivées partielles, permettant de décrire le comportement des systèmes physiques.

Les techniques mathématiques (analytiques) existantes limitent habituellement les possibilités de résolution exacte de ces équations .

Pour surmonter l'impossibilité de résoudre ces équations , différentes Méthodes ont été proposées à la fois par les ingénieurs et les mathématiciens.

Toutes ces Méthodes, impliquent une approximation dont on espère, qu'elle approche aussi précisément que possible, la solution exacte .

La Méthode des éléments finis est l'une des Méthodes, les plus fréquemment utilisées pour résoudre effectivement ces équations. Elle s'applique aux problèmes stationnaires ou dépendant du temps , linéaires ou non, à une , deux ou trois variables d'espace indépendantes.

Elle consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues, pour transformer les équations aux dérivées partielles, en équations algébriques.

Elle fait appel, aux trois domaines suivants.

-Sciences de l'ingénieur, pour construire les équations aux dérivées partielles.

-Méthodes numériques, pour construire et résoudre , les équations algébriques.

-Programmation et informatique, pour exécuter efficacement, les calculs sur ordinateur

1.2-Concept de la Méthode des éléments finis .

Le double processus, de subdivision de tous les systèmes, en composants élémentaires « éléments », dont le comportement peut être facilement appréhendé, et la juxtaposition de ces éléments pour reconstituer le système initial complet . Telle est l'idée mère de la Méthode des éléments finis; idée simple et géniale. Ses avantages et sa puissance apparaissent très clairement, lors de son application. Elle a un très vaste domaine d'application aux problèmes pratiques complexes.

1.3-Différentes formulations de la Méthode des éléments finis.

Suivant la grandeur sur laquelle on fait le choix d'un champ, et suivant les conditions que ce champ respecte, tant à l'intérieur de l'élément fini, que sur sa frontière , ou peut créer divers types de formulations d'éléments finis . Nous citerons ci-après les trois types de formulations connues.

1.3-1 Formulation en déplacement.

Cette Formulation est la plus fréquemment utilisée . Les éléments finis de cette catégorie sont basés, sur une approximation du champ des déplacements . Ils sont, en outre , qualifiés de conforme, si la continuité des déplacements est entièrement satisfaite le long des frontières entre éléments. Le champ des déplacements est déterminé de manière unique et détaillée dans la structure.

I-3-2-Formulation en contrainte

A l'inverse des précédents, ces éléments sont construits à partir d'une approximation du champ des contraintes. Ils sont en plus dits « Co-diffusifs » si les tractions de surface aux frontières sont continues, d'un élément à l'autre. Une structure composée de tels éléments est systématiquement trop souple.

I-3-3- Formulations hybrides et mixtes

Lorsque, l'approximation porte simultanément sur les champs des déplacements et contraintes, on obtient, selon la Formulation, un choix considérable de modèles qualifiés de mixtes pour certains et d'hybrides pour d'autres.

Ces modèles peuvent fournir d'excellents résultats.

I-3-4- Choix du type de Formulation

Pour notre cas, on a opté pour la Formulation en déplacements, car il est plus facile d'approcher des déplacements que des contraintes.

Les déplacements sont donc les inconnus de base. On approchera le champ de déplacement réel dans un élément, par des fonctions d'interpolation, ou fonctions de forme (généralement polynomiales), assurant la continuité des déplacements à l'interface de l'élément et aux noeuds. On choisira, donc une fonction permettant de définir de manière unique le champ de déplacement à l'intérieur de chaque élément fini, en fonction des déplacements de ses noeuds. Ces fonctions déplacements définissent l'état de déformation à l'intérieur de l'élément, en fonction des déplacements de ses noeuds. Les déformations jointes à d'éventuelles déformations initiales, et compte tenu des propriétés élastiques du matériau, définissent l'état de contrainte en tout point de l'élément et par conséquent sur ses frontières.

I -4- MEF considérée comme une minimisation de l'énergie potentielle.

La Méthode des éléments finis telle que nous l'avons décrite , consiste à minimiser l'énergie potentielle π pour un champ de déplacements imposé. On constate alors qu'elle est équivalente à la Méthode d'approximation de « Rayleigh- Ritz » . Cette Méthode consiste à exprimer l'énergie potentielle totale. Le champ de déplacement est supposé fonction d'un ensemble fini de paramètres inconnus. On forme alors un système d'équations complet représentant la minimisation de l'énergie potentielle totale par rapport à ces paramètres.

Le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale constitue un fondement rationnel de la Formulation directe des équations de rigidité des éléments.

$$\text{On a } \pi = \mu + \omega \quad (1-1)$$

π : L'énergie potentielle totale

μ : L'énergie de déformation du système

ω : L'énergie de déformation des charges extérieures

Parmi, tous les déplacements de forme admissible vérifiant les conditions de comptabilités, ceux qui satisfont aux conditions d'équilibre donnent à π une valeur stationnaire.

$$\delta\pi = \delta U + \delta\omega \quad (1-2)$$

On note que dans le domaine élastique π est non seulement stationnaire , mais passe aussi par un minimum qui correspond à l'équilibre stable. :

On note que dans le domaine élastique, π est non seulement stationnaire, mais passé aussi par un minimum qui correspond à l'équilibre stable, car :

$$\delta^2\pi = \delta^2U + \delta^2\omega \quad (1-3a)$$

d'où : $\delta^2\pi = 0$ (1-3b)

Remarque :

Comme la solution exacte correspond à un minimum de « π » donc la solution approchée obtenue par la Méthode des éléments finis à partir de la Formulation en déplacement fournira toujours une valeur approchée de π supérieure à la valeur exacte. On parle alors de la convergence par le haut.

I -5- Critères de convergence :

Pour assurer la convergence de la solution approchée vers la solution exacte, certaines conditions devront être vérifiées.

I -5-1- La compatibilité .

Les déplacements doivent être :

a/ Continus à travers les frontières

On a vu précédemment que le champ de déplacement s'exprime en fonction de quelques déplacements nodaux typiques seulement, choisis en quelques points isolés des frontières, il faut donc s'arranger pour garantir la continuité des déplacements tout le long des frontières en fonction seulement des déplacements nodaux. C'est là une des exigences les plus difficiles à remplir lors de la mise au point d'un modèle déplacement qui se veut conforme.

Enfin c'est la nature des déplacements qui décide des continuités à satisfaire. Il ne suffit pas que le champ des déplacements soit continu, parfois il faut encore assurer la continuité de ces dérivées (pente ,par exemple). Cette exigence de continuité assure qu'il ne se produit aucune discontinuité aux frontières (ou dislocations: sauts, fentes, trous....)

1 5-2- La complétude .

Un élément est dit complet , quant il permet la définition d'un champ de déplacements complet au sens de RITZ. En d'autres termes, lorsque la taille des éléments finis tend vers 0, les déplacements et déformations exactes tendent vers des constantes, dans chaque élément fini. Pour s'assurer de leur présence, il faut qu'elles soient contenues dans l'approximation. Ainsi , le champ de déplacements doit pouvoir représenter:

a/ Les modes rigides: c'est à dire, permettre à l'élément de se déplacer en bloc; comme un solide rigide, sans déformation ($\varepsilon_{ij} = 0 \Rightarrow$ sans contraintes, $\sigma_{ij} = 0$) ; cette exigence est physiquement évidente : il ne doit naître aucune contrainte sous déplacement rigide (rotation, translation).

b/ Les états de déformation constante ($\varepsilon_{ij} = \text{cste}$)

Le champ doit contenir les termes tels que les déformations qu'on en déduit par dérivation contiennent des constantes.

Remarque

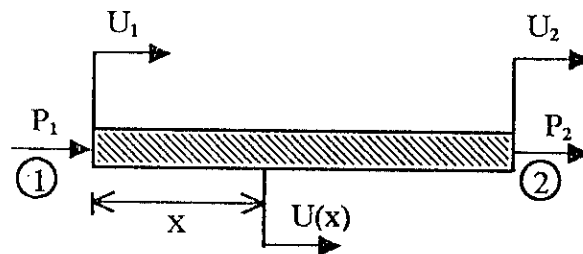
Il faut comprendre déformation au sens large : ε_x (dilatation) pour la traction ;
 $\frac{1}{\rho}$ (courbure) en flexion , etc.

En résumé, pour la Formulation en déplacements conformes, la solution approchée fournie par la méthode des éléments finis, tend vers la solution exacte, lorsqu'on divise toujours plus finement la structure étudiée, si les conditions suivantes sont remplies lors du choix du champ de déplacements.

- a - Le champ est continu et dérivable (dans l'élément)
- b - Le champ est cinématiquement admissible (appuis).
- c - Les déplacements sont continus aux frontières (l'élément est conforme).
- d - Le champ contient les modes rigides.
- e - Le champ contient les états de déformation constante.

I -6- Détermination de la matrice de rigidité élastique d'un élément treillis par la MEF :

Soit l'élément treillis soumis au forces constantes P_1 et P_2 , appliquées à ses noeuds ① et ②



On a :

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

La fonction de déplacement satisfaisante est :

$$U(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

$$U(x) = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

Pour les points ① et ②

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

Donc :

$$U(x) = [1 \quad x] \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

$$U(x) = \left\langle 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right\rangle \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$
$$= [N] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

Les déformations sont données par :

$$\varepsilon = [L] \{U(x)\} = [L] [N] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon = [B] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

où : $[L]$ est la matrice des opérateurs différentiels.

$$\text{Dans notre cas : } [L] = \begin{bmatrix} \partial \\ \partial x \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\varepsilon = \frac{1}{L} \langle -1 \quad 1 \rangle \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

Les contraintes sont données par la relation :

$$\sigma(x) = [D] \varepsilon(x)$$

$[D]$ = matrice d'élasticité

$[D] = E$

La matrice de rigidité est donnée par :

$$[K] = \int_v [B]^T [\Delta] [B] dv$$
$$= \int_v \left\langle -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle E \left\langle -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle dv$$

$$= EA \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -\frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} & 1 \end{bmatrix} dx$$

Donc :

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

CHAPITRE II

II-Formulation non-linéaire et développement de la matrice de rigidité élémentaire :

II-1- Introduction

L'analyse nonlinéaire des structures tridimensionnelles nécessite une formulation rigoureuse, claire et pratique. La formulation Lagrangienne se présente comme l'une des formulations les mieux adaptées à ce type de problèmes. En effet, celle-ci permet de suivre l'évolution du corps (solide) dans ses différentes configurations .

Dans ce chapitre, nous présenterons la formulation Lagrangienne actualisée. Aussi, nous développerons l'équation d'équilibre incrémentale, établie à partir, du principe des déplacements virtuels, tout en définissant les grandeurs ayant été introduites dans cette équation, à savoir le tenseur des déformations de Green-Lagrange et le second tenseur de contrainte de Piola - Kirchhoff.

En fin, nous terminerons par l'établissement des différentes matrices de rigidité.

II-2- Systèmes de référence et notations

Comme le montre la figure (2-1), la déformation du corps solide, peut être décrite par trois configurations.

- * La configuration initiale à $t = 0$, notée C_0 ; c'est l'état initial non déformé.
- * La configuration à l'instant t , notée C_t : c'est le premier état déformé, ou la dernière position de déformation connue.
- * La configuration à l'instant $t+\Delta t$ notée, $C_{t+\Delta t}$; c'est le second état de déformation, ou la position de déformation inconnue, adjacente à C_t .

Par ailleurs, il est nécessaire, d'associer au corps deux systèmes de coordonnées (fig 2-1).

- Un système de coordonnées globales, noté (X Y Z).
- Un système de coordonnées locales, continuellement attaché au corps, noté (x y z).

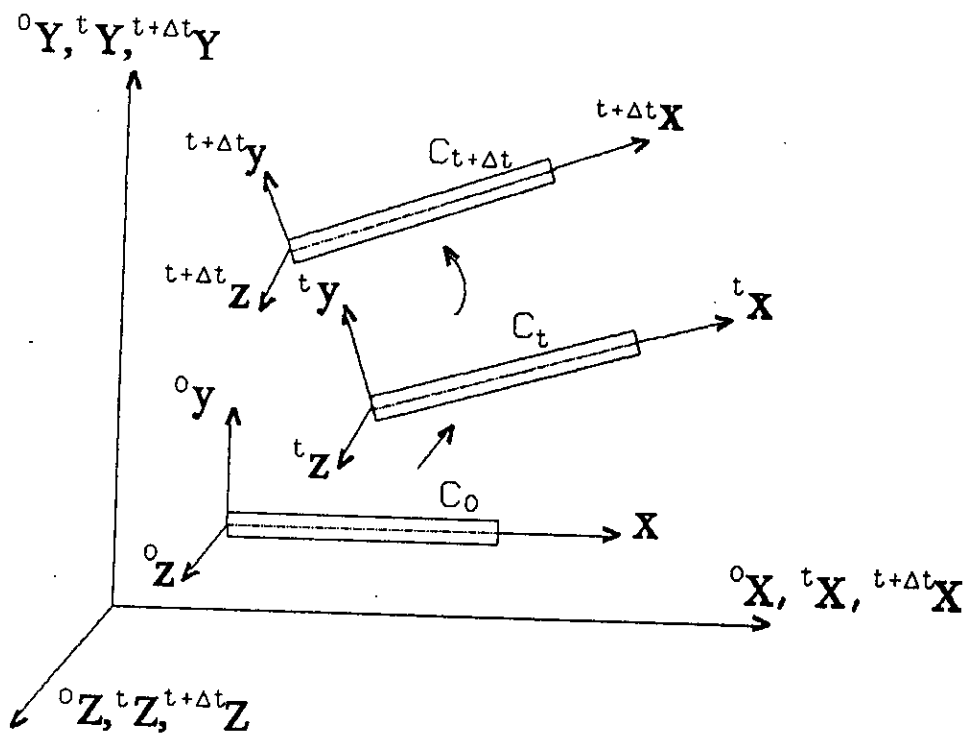


FIGURE 2-1: Mouvement d'un élément treillis

Notations

Les notations suivantes sont utilisées tout au long de notre étude .

* L'exposant et l'indice placés à gauche de la variable indiquent, respectivement, la configuration dans laquelle se produit cette variable et celle par rapport à laquelle elle est mesurée.

* L'absence de l'exposant signifie que la variable est un incrément entre les configurations C_t et $C_{t+\Delta t}$.

II-3- Principe des déplacements virtuels et équation d'équilibre.

Considérons l'élément barre de la figure 2-1. Le but de l'analyse non linéaire est de déterminer les différentes positions d'équilibre de cet élément pour tous les instants $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ etc

En supposant que les solutions correspondant aux intervalles de temps entre $t=0$ et t sont connues, l'équation d'équilibre pour le prochain instant $t+\Delta t$ est obtenue en utilisant le principe des déplacements virtuels.

Ce principe stipule que si un corps auquel on impose un système de déplacements virtuels compatibles (qui satisfait les conditions aux limites); est en équilibre; alors le travail virtuel effectué par les forces internes est égal au travail virtuel effectué par les forces externes, c'est à dire :

$$\int_{t+\Delta t} V \tau_{ij}^{t+\Delta t} \delta_{t+\Delta t} e_{ij}^{t+\Delta t} dV = {}^{t+\Delta t} \xi \quad (2-1)$$

${}^{t+\Delta t} \tau_{ij}$: tenseur des contraintes de Cauchy.

${}^{t+\Delta t} e_{ij}$: tenseur des déformations infinitésimales par rapport à la configuration à l'instant $t+\Delta t$.

${}^{t+\Delta t} \xi$: travail virtuel des forces extérieures.

$${}^{t+\Delta t}\xi = \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}f_i^V \delta U_i \quad {}^{t+\Delta t}dV + \int_{{}^{t+\Delta t}A} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta U_i \quad {}^{t+\Delta t}dA \quad (2-2)$$

${}^{t+\Delta t}f_i^V$, ${}^{t+\Delta t}f_i^S$ sont les composantes des vecteurs forces extérieures de volume et de surface, respectivement.

δU_i : La i ème composante du vecteur des déplacements virtuels

Comme, les composantes du tenseur de contrainte de Cauchy, et celles du tenseur des déformations infinitesimales changent lors de la rotation du corps rigide et induisent ainsi des efforts parasites pouvant conduire à des résultats inattendus, ces tenseurs ne doivent pas être utilisés directement.

Pour pallier à ce problème, d'autres grandeurs doivent être utilisées, il s'agit du second tenseur des contraintes de Piola Krichhoff et du tenseur des déformations de Green-Lagrange. Et ce pour différentes raisons:

1- Ils sont énergiquement conjugués : ceci implique que les équations développées pour les petits déplacements peuvent être employées en grands déplacements.

2- Ils sont univariants lors, d'une rotation de corps rigide . Ce qui veut dire que seules les déformations pures du corps, produiront une variation dans les composantes du tenseur des contraintes.

II -4- Tenseur des déformations de Green Lagrange.

Par définition, le tenseur des déformations de Green-Lagrange est donné comme suit:

$${}^{t+\Delta t}{}^0\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^{t+\Delta t}{}^0U_{i,j} + {}^{t+\Delta t}{}^0U_{j,i} + {}^{t+\Delta t}{}^0U_{k,i} \cdot {}^{t+\Delta t}{}^0U_{k,j} \right) \quad (2-3)$$

Tel que :

$${}^{t+\Delta t}{}^0U_{i,j} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}{}^0U_i}{\partial {}^0X_j} \quad (2-3a)$$

Par ailleurs le tenseur des déformations de Green-Lagrange relatif à la configuration C_t s'écrit

$${}^{t+\Delta t}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) + \frac{1}{2} (U_{k,i} U_{k,j}) \quad (2-4)$$

$${}^{t+\Delta t}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \mathbf{e}_{ij} + \boldsymbol{\eta}_{ij} \quad (2-5)$$

La relation (2-5) représente la décomposition du tenseur des déformations de Green-Lagrange en deux tenseurs . L'un linéaire noté \mathbf{e}_{ij} et l'autre non-linéaire noté $\boldsymbol{\eta}_{ij}$,

$$\text{tel que } \mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (2-5a)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{ij} = \frac{1}{2} (U_{k,i} \times U_{k,j}) \quad (2-5b)$$

II-5- Le second tenseur des contraintes de Piolla-Kirchhoff :

Le second tenseur des contraintes de Piolla Kirchhoff est obtenu à partir du tenseur de contrainte de Cauchy . En effet ils sont reliés par la relation suivante:

$${}^o \boldsymbol{\sigma}_{ij} = \frac{\rho}{\rho_t} {}^o X_{i,k} {}^t \boldsymbol{\tau}_{ij} {}^o X_{j,k} \quad (2-6)$$

${}^t \boldsymbol{\sigma}$: Second tenseur des contraintes de piolla Krichhoff

$\frac{\rho}{\rho}$: rapport des densités au temps $t=0$ et t

${}^t \boldsymbol{\tau}_{ij}$: tenseur de contrainte de Cauchy.

${}^o X$: Vecteur gradient des déformations à l'état C_t relatif à la configuration C_0 .

II-6- Formulation Lagrangienne.

On distingue deux types de formulations Lagrangiennes.

-Formulation Lagrangienne totale.

-Formulation Lagrangienne actualisée.

Dans notre étude, on utilisera la formulation Lagrangienne actualisée, car les équations d'équilibres devront être obtenues dans la configuration courante. Par conséquent une description détaillée de cette formulation est donnée dans ce qui suit.

Formulation Lagrangienne actualisée

Dans cette formulation, toutes les variables statistiques et cinématiques sont repérées (mesurées) par rapport à la dernière configuration connue (C_t).

En remplaçant les tenseurs de Cauchy et de déformation infinitésimales, respectivement, par le second tenseur des déformations de Green Lagrange dans l'équation (2-1) on aura:

$$\int_{t+\Delta t}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^t dv = \int_{t+\Delta t}^{t+\Delta t} \xi \quad (2-7)$$

$t + \Delta t$

tel que :

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} = {}^t \sigma_{ij} + {}^t \sigma_{ij} \quad (2-7a)$$

Remarquons que ${}^t \sigma_{ij}$ n'est autre que ${}^t \tau_{ij}$

$${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = {}^t \epsilon_{ij} = e_{ij} + {}^t \eta_{ij} \quad (2-7b)$$

En considérant les lois constitutives entre l'incrément de contrainte et celui des déformations.

$${}^t \sigma_{ij} = {}^t C_{ijkl} {}^t \epsilon_{kl} \quad (2-8)$$

En substituant , (2-8) dans (2-7) on aura :

$$\int_{t_V} {}^t C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} dV + \int_{t_V} {}^t \tau_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} \xi \quad (2-9)$$

En remplaçant la valeur de ${}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij}$ donnée par l'équation (2-7b) dans (2-9) on aura:

$$\begin{aligned} & \int_{t_V} {}^t C_{ijkl} e_{kl} \delta e_{ij} dV + \int_{t_V} {}^t C_{ijkl} \eta_{kl} \delta e_{ij} dV \\ & + \int_{t_V} {}^t C_{ijkl} e_{kl} \delta \eta_{ij} dV + \int_{t_V} {}^t C_{ijkl} \eta_{ij} \delta \eta_{ij} dV \\ & + \int_{t_V} {}^t \tau_{ij} \delta \eta_{ij} dV + \int_{t_V} {}^t \tau_{ij} \delta e_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} \xi \end{aligned} \quad (2-10)$$

II-7- Formulation en éléments finis.

Considérons, un élément de treillis (élément barre) de longueur L (fig 2-2) . A et B sont les noeuds de cet élément et (U_x, U_y, U_z) sont les déplacements suivants les axes X,Y,Z, respectivement.

On adopte un champ de déplacement linéaire pour les déplacements U_x, U_y, U_z .

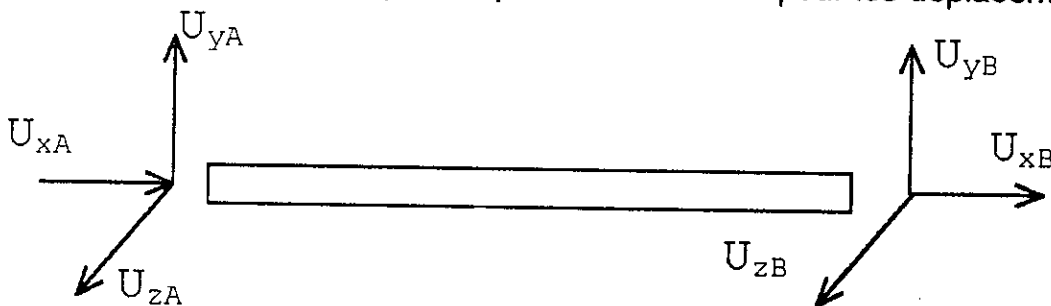


figure 2-2 Degrés de liberté d'un élément barre

En utilisant les notations $\langle \rangle$ pour le vecteur ligne et $\{ \}$ pour le vecteur colonne, les déplacements peuvent être exprimés sous cette forme.

$$\begin{aligned}
 U_x &= \langle n1 \rangle \{U_x\} \\
 U_y &= \langle n1 \rangle \{U_y\} \\
 U_z &= \langle n1 \rangle \{U_z\}
 \end{aligned}
 \tag{2-11}$$

$$\text{Tel que } \langle n1 \rangle = \langle (1-i) \quad i \rangle \tag{2-12}$$

avec $i = x/L$

Les degrés de liberté de l'élément sont indiqués dans la figure 2-2. Aussi on aura :

$$\begin{aligned}
 \langle U_x \rangle &= \langle U_{xA} \quad U_{xB} \rangle \\
 \langle U_y \rangle &= \langle U_{yA} \quad U_{yB} \rangle \\
 \langle U_z \rangle &= \langle U_{zA} \quad U_{zB} \rangle
 \end{aligned}$$

Comme le champ de déplacement adopté est linéaire suivant X, Y et Z, et comme il est fonction seulement de la composante X, alors les tenseurs des déformations linéaire et non linéaire se réduisent, respectivement, à :

$$e_x = U_{x,x} = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{\Delta U_x}{L} \tag{2-14a}$$

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2} (U_{x,x}^2 + U_{y,x}^2 + U_{z,x}^2) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\Delta U_x}{L} \right)^2 + \left(\frac{\Delta U_y}{L} \right)^2 + \left(\frac{\Delta U_z}{L} \right)^2 \right\} \tag{2-14b}$$

tel que :

$$\begin{cases}
 \Delta U_x = U_{xB} - U_{xA} \\
 \Delta U_y = U_{yB} - U_{yA} \\
 \Delta U_z = U_{zB} - U_{zA}
 \end{cases}$$

Aussi, la déformation axiale ϵ_{xx} est la seule composante non nulle, du tenseur des déformations de Green Lagrange. Ainsi la loi constitutive du matériau donnée par l'équation (2-8) devient :

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} \quad (2-15)$$

E , représente le module de Young.

Les vecteurs forces élémentaires dans les configuration C_t et $C_{t+\Delta t}$ sont

$${}^{t+\Delta t}f = \{ {}^{t+\Delta t}F_{xa} \quad {}^{t+\Delta t}F_{ya} \quad {}^{t+\Delta t}F_{za} \quad {}^{t+\Delta t}F_{xb} \quad {}^{t+\Delta t}F_{yb} \quad {}^{t+\Delta t}F_{zb} \} \quad (2-16)$$

$${}^t f = \{ {}^tF_{xa} \quad {}^tF_{ya} \quad {}^tF_{za} \quad {}^tF_{xb} \quad {}^tF_{yb} \quad {}^tF_{zb} \}$$

En remplaçant, toutes les grandeurs développées ci-dessus par leurs valeurs dans l'équation (2-10) on aura les relations suivantes :

$$(a) - \int_V E e_{xx} \delta e_{xx} dv = \langle \delta U \rangle [k_e] \{U\} \quad (2-17a)$$

$$(b) - \int_V E \tau_{xx} \delta \eta_{xx} dv = \langle \delta U \rangle [k_G] \{U\} \quad (2-17b)$$

$$(c) - \int_V E e_{xx} \delta \epsilon_{xx} dv = \frac{1}{2} \langle \delta U \rangle [k_2] \{U\} \quad (2-17c)$$

$$(d) - \int_V E \eta_{xx} \delta \epsilon_{xx} dv = \frac{1}{3} \langle \delta U \rangle [k_3] \{U\} \quad (2-17d)$$

$$(e) - \int_V E \eta_{xx} \delta e_{xx} dv = \frac{1}{2} \langle \delta U \rangle [k_1] \{U\} \quad (2-17e)$$

$$(f) - \int_V \tau_{xx} \delta e_{xx} dv = \langle \delta U \rangle \{f\} \quad (2-17f)$$

$$(g) - {}^{t+\Delta t}\xi = \langle \delta U \rangle \{ {}^{t+\Delta t}f \} \quad (2-17g)$$

Dans lesquelles les conditions équilibre suivantes sont utilisées.

$${}^tF_X = \int_A {}^t\tau_{xx} dA = -{}^tF_{X_A} = {}^tF_{X_B} \quad (2-18)$$

où :

$[k_e]$ matrice de rigidité élastique

$[k_g]$ matrice de rigidité géométrique.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}[K1] \\ \frac{1}{2}[K2] \\ \frac{1}{3}[K3] \end{array} \right\} \text{matrices de rigidité d'ordres supérieurs fonctions des déplacements}$$

Le développement de ces matrices de rigidité est donné en annexe.

Une fois la matrice de rigidité locale calculée, on doit la transformer dans le repère globale par la relation suivante :

$$[K_{\text{glob}}] = [T]^t [K_{\text{loc}}] [T]$$

Tel que : $[T]$ matrice de rotation

1-8- Matrice de rotation T pour un élément barre:

Le passage du système d'axes local x, y, z au système d'axes global $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ nécessite l'utilisation d'une matrice de transformation (6x6) :

$$T = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

où:

$$t = \begin{bmatrix} \theta_{\bar{x}\bar{x}} & \theta_{\bar{x}\bar{y}} & \theta_{\bar{x}\bar{z}} \\ \theta_{\bar{y}\bar{x}} & \theta_{\bar{y}\bar{y}} & \theta_{\bar{y}\bar{z}} \\ \theta_{\bar{z}\bar{x}} & \theta_{\bar{z}\bar{y}} & \theta_{\bar{z}\bar{z}} \end{bmatrix}$$

θ_{ij} sont les cosinus directeurs .

Les trois termes de la première ligne de la matrice t sont définis en fonction des coordonnées des noeuds par:

$$\theta_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{X_B - X_A}{L} = e$$

$$\theta_{y\bar{x}} = \frac{Y_B - Y_A}{L} = f$$

$$\theta_{z\bar{x}} = \frac{Z_B - Z_A}{L} = g$$

$$\text{où: } L = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

est la longueur de l'élément

Pour déterminer les six autres termes, considérons une situation particulière où la barre est orientée de sorte que les axes principaux soient portés par les plans vertical et horizontal (c'est généralement le cas en pratique).

Sur la figure (2-3), la barre AB est reperée dans les systèmes d'axes global et local. Les origines des deux systèmes sont choisies de sorte qu'elles soient confondues, cela ne changera en rien la matrice de rotation.

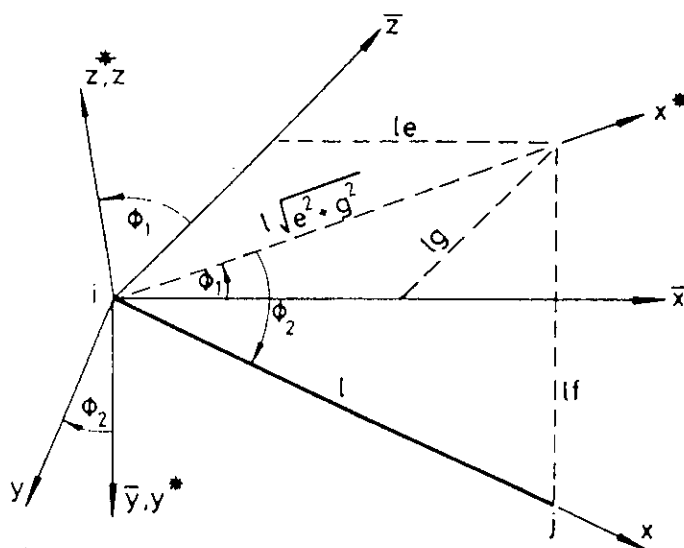


Figure (II-3) Systèmes de coordonnées pour un élément treillis

Les cosinus directeurs pour les axes y et z peuvent être déterminés par des considérations géométriques directes, mais ils sont plus facilement déterminés en considérant deux transformations ou rotations successives des axes.

Le but est de trouver la matrice de passage du repère global ou repère local.

Les deux rotations successives sont comme suit :

a) Entre le système d'axes $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ et un système intermédiaire $x^* y^* z^*$. Ce dernier est obtenu par une rotation d'un angle Φ_1 autour de l'axe \bar{y} (figure 2-4 (a)).

On obtient le système d'équation suivant:

$$\begin{Bmatrix} U_x^* \\ U_y^* \\ U_z^* \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & 0 & \sin \phi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_1 & 0 & \cos \phi_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_x \\ \bar{U}_y \\ \bar{U}_z \end{Bmatrix}$$

b) Entre le système d'axes intermédiaire et le système d'axes local. Ce dernier est obtenu par une rotation d'un angle Φ_2 autour de l'axe z^* (figure 2-4 (b)).

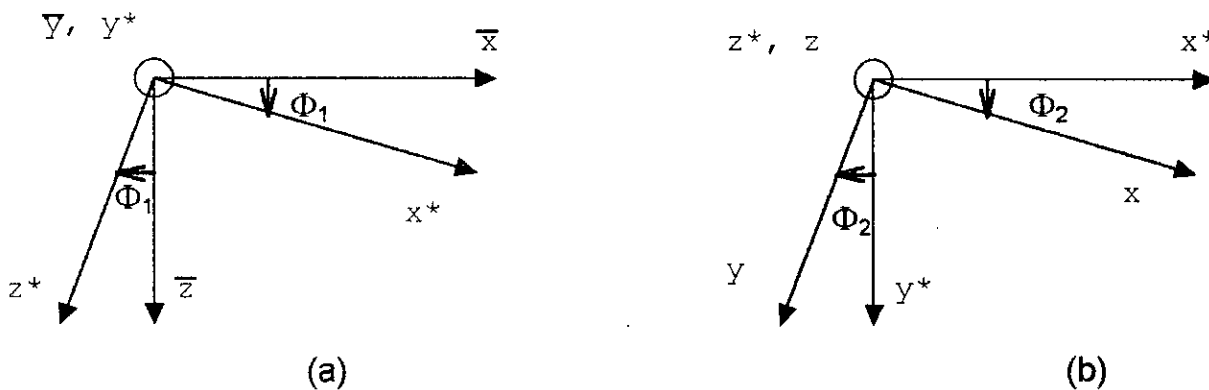


Figure (II-4) Transformation d'axes:

(a) entre les systèmes $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ et $x^* y^* z^*$

(b) entre les systèmes $x^* y^* z^*$ et xyz

On obtient le système d'équations:

$$\begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & \sin \phi_2 & 0 \\ -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x^* \\ U_y^* \\ U_z^* \end{Bmatrix}$$

Donc :

$$\begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & \sin \phi_2 & 0 \\ -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & 0 & \sin \phi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_1 & 0 & \cos \phi_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_x \\ \bar{U}_y \\ \bar{U}_z \end{Bmatrix}$$

ou bien :

$$\begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{Bmatrix} = [t] \begin{Bmatrix} \bar{U}_x \\ \bar{U}_y \\ \bar{U}_z \end{Bmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} \sin \phi_1 &= g/(e^2 + g^2)^{1/2} & \cos \phi_1 &= e/(e^2 + g^2)^{1/2} \\ \sin \phi_2 &= f & \cos \phi_2 &= (e^2 + g^2)^{1/2} \end{aligned}$$

La matrice t est donnée alors par :

$$\begin{bmatrix} e & f & g \\ \frac{-ef}{(e^2 + g^2)^{1/2}} & (e^2 + g^2)^{1/2} & \frac{-fg}{(e^2 + g^2)^{1/2}} \\ \frac{-g}{(e^2 + g^2)^{1/2}} & 0 & \frac{e}{(e^2 + g^2)^{1/2}} \end{bmatrix}$$

Pour un élément vertical, c'est à dire un élément pour lequel l'axe x est parallèle à l'axe y, la matrice de rotation t prend les deux formes suivantes, suivant que les deux axes x et \bar{y} soient orientés dans le même sens ou non :

$$t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou bien :

$$t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II-9 Effet de la rotation de corps rigide sur l'énergie de déformation :

L'équation d'équilibre développée aux paragraphes précédents est établie en fonction du tenseur de déformations de Green-Lagrange et du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff. Ces tenseurs sont invariants lors d'une rotation de corps rigides. Ainsi une rotation rigide n'engendre aucune variation dans les composantes de l'équation d'équilibre. Ceci peut être facilement vérifié par l'intermédiaire de l'énergie de déformation :

$$V = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon \, dv = \frac{1}{2} \int_V E \epsilon \cdot \epsilon \, dv. \quad (2-20)$$

Pour un élément treillis à section constante, cette équation se réduit à :

$$V = \frac{1}{2} EA \int_0^l \epsilon_x^2 \, dx. \quad (2-21)$$

où ϵ_x est le tenseur de déformations de Green-Lagrange.

$$\epsilon_x = e_x + \eta_x$$

$$\epsilon_x = U_{x,x} + \frac{1}{2} (U_{x,x}^2 + U_{y,x}^2 + U_{z,x}^2) \quad (2-22 a)$$

soit donc :

$$V = \frac{EA}{2} \int_0^l (e_x^2 + 2e_x \eta_x + \eta_x^2) dx \quad (2-22 b)$$

Pour un mouvement plan on a :

$$V = \frac{EAL}{2} \left[U_{x,x}^2 + (U_{x,x}^3 + U_{x,x} + U_{y,x}^2) + \frac{1}{2} (U_{x,x}^2 \times U_{y,x}^2) + \frac{1}{4} (U_{x,x}^4 + U_{y,x}^4) \right]$$

(2-23)

Sous un mouvement de rotation de corps rigide de 90° dans le sens trigonométrique, Figure (2-5), on aura :

$$U_{x,x} = \frac{U_{xB} - U_{xA}}{L} = -1, \quad U_{y,x} = \frac{U_{yB} - U_{yA}}{L} = 1$$

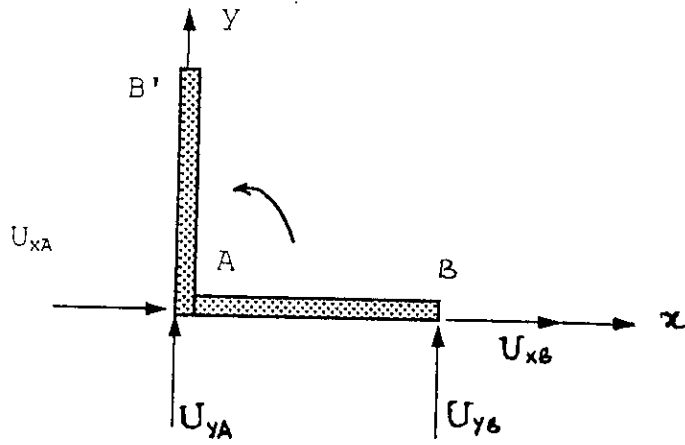


Figure (2-5)

En remplaçant ces termes dans l'équation (2-23), nous obtenons une valeur nulle de l'énergie de déformation ($V = 0$).

II-10- Effet de la négligence des termes d'ordres supérieurs sur l'énergie de déformation:

Afin de faciliter l'analyse , plusieurs suppositions ont été faites par de différents chercheurs.

Par exemple , Mallet et Marcal [15] ont négligé le terme $U_{x,x}^2/2$ dans l'équation (2-2)

Sous cette hypothèse , l'énergie de déformation devient :

$$V = \frac{EAL}{2} \left(U_{x,x}^2 + U_{x,x} U_{y,x}^2 + \frac{1}{4} U_{y,x}^4 \right) \quad (2-24)$$

En utilisant une interprétation différente de la déformation , Hangai et Kawamata [12] ont trouvé la valeur suivante de l'énergie de déformation:

$$V = \frac{EAL}{2} \left(U_{x,x}^2 + U_{x,x} U_{y,x}^2 + \frac{1}{4} U_{y,x}^4 - U_{x,x}^2 U_{y,x}^2 \right) \quad (2-25)$$

Pour l'élément treillis de la figure (2-5) qui subit une rotation de corps rigide de 90° , et en remplaçant par les valeurs $U_{x,x}$ et $U_{y,x}$ correspondantes dans les équations (2-24) et (2-25) , on obtient des valeurs non nulles de l'énergie de déformation , c'est à dire $EAL/8$ et $-3 EAL/8$.

De même si on ne prend en considération que les termes de la matrice de rigidité élastique k_e et la matrice géométrique k_g , c'est à dire que si on néglige le terme η_x^2 dans l'équation (2-22b), l'énergie de déformation sera donnée par :

$$V = \frac{EAL}{2} \left[U_{x,x}^2 + U_{x,x}^3 + U_{x,x} U_{y,x}^2 \right] \quad (2-26)$$

et pour l'élément treillis précédent :

$$V = - EAL / 2$$

On obtient des résultats équivalents pour une rotation d'un angle autre que 90° .

On peut conclure alors, que les termes d'ordres supérieurs doivent être pris en compte dans la relation déplacement-déformation, quand il y a présence de rotations en plus des grands déplacements.

2-11 Description mixte :

Dans une analyse du comportement géométrique des poutres spatiales, l'étude [16] a montré que le négligence des termes de déformation d'ordres supérieurs, n'influe pas sur la réponse de la structure si les rotations de corps rigide sont éliminées. En s'inscrivant dans une série d'études visant à généraliser cette constatation pour d'autres éléments, nous allons montrer dans cette section que cette proposition reste valide pour les éléments treillis.

En effet, après avoir subi une rotation de corps rigide, l'élément treillis de la figure (2-5) passe du dernier état déformé connu C_t , à état déformé actuel $C_{t+\Delta t}$.

La longueur de la barre à C_t est tL et sa longueur à $C_{t+\Delta t}$ est ${}^{t+\Delta t}L$, avec :

$${}^{t+\Delta t}L = \sqrt{({}^tL + \Delta U_x)^2 + \Delta U_y^2 + \Delta U_z^2} \quad (2-27)$$

Par rapport à la configuration C_t , le vecteur déplacement dû à la rotation est :

$$U_r = \{0 \ 0 \ 0 \ -{}^tL \ {}^tL \ 0\}$$

$$\text{Donc : } {}^{t+\Delta t}L = \sqrt{({}^tL + (-{}^tL + 0))^2 + ({}^tL - 0)^2 + 0} \quad (2-28)$$

$$\text{et : } {}^{t+\Delta t}L = {}^tL$$

Le vecteur déplacement exprimé à la configuration $C_{t+\Delta t}$ est donc :

$$U_r = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}$$

Ce qui annule l'énergie de déformation.

Ce résultat, nous permettra d'enlever les difficultés trouvées en employant la formulation Lagrangienne actualisée, où toutes les variables sont mesurées par rapport à la dernière configuration connue C_t .

En effet en utilisant la relation (2-28) , on obtient la longueur de la barre à la configuration $C_{t+\Delta t}$, mesurée par rapport à $C_{t+\Delta t}$, toujours. Cette valeur de la longueur est employée pour déterminer les déplacements et les forces mesurés par rapport à $C_{t+\Delta t}$.

Pour les problèmes ou il y a présence de petites déformations avec rotation et grands déplacements, négliger les matrices k_1 , k_2 et k_3 tout en employant la technique précédente appelée dans la référence [16] **description mixte**, a pour effet de garder l'énergie de déformation toujours nulle. Les forces restent axiales à chaque fois qu'on passe de C_t à $C_{t+\Delta t}$.

On peut conclure donc , que cette technique joue le même rôle que celui des matrices k_1 , k_2 et k_3 , et cela est d'un grand intérêt dans les calculs numériques .

Chapitre III

III - Méthodes d'analyse non-linéaire

III -1- Introduction :

Actuellement, l'analyse non-linéaire est devenue une nécessité avec l'accroissement du besoin de réaliser des constructions de plus en plus complexes et sûres .

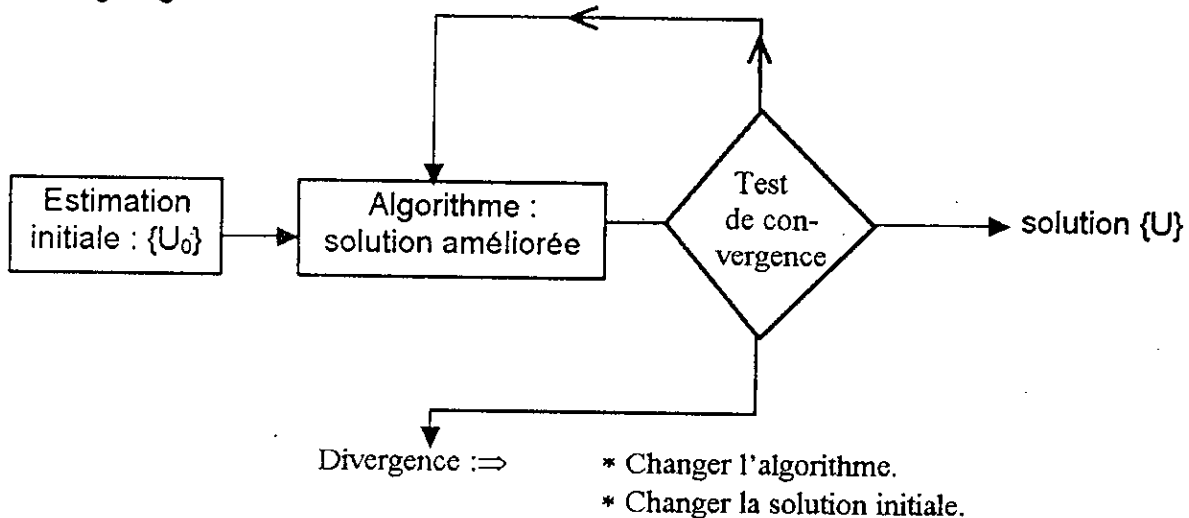
L'analyse non-linéaire par la méthode des éléments finis requiert le développement d'un modèle numérique performant, et l'utilisation d'un algorithme sûr pour la résolution des équations incrémentales du mouvement.

Cependant , étant donné le coût considérablement élevé de ce dernier, et le fait que la solution des problèmes ^{non}linéaires n'est pas unique - contrairement à celle des problèmes linéaires- et n'est pas toujours la bonne, la sélection d'une méthode de résolution non-linéaire efficace devient fondamentale.

En effet, l'analyste doit, tout d'abord comprendre le problème physique et connaître toutes les stratégies de résolution. Une stratégie unique ne donnera pas toujours de bons résultats et peut être inefficace pour certains problèmes . Nous proposons dans ce chapitre d'examiner brièvement les méthodes numériques les plus utilisées afin de déterminer la plus performante.

Pour toutes ces méthodes, résoudre le système $\{F\} = [K] \{U\}$ revient à chercher un vecteur $\{U\}$ qui rend le résidu $\{r(U)\} = \{F\} - [K] \{U\}$ aussi proche que possible de zéro. La solution exacte $\{u\}$ rend $\{r(U)\}$ égal à zéro .

La recherche de la solution $\{U\}$ se fait de manière itérative, suivant l'organigramme suivant :



Il existe essentiellement trois classes de méthodes:

- * Les méthodes basées sur le contrôle en chargement .
- * Les méthodes basées sur le contrôle en déplacement.
- * Les méthodes mixtes (arclength).

Parmi les méthodes de contrôle en chargement, on distingue :

- La méthode directe
- La méthode incrémentale linéaire.
- La méthode incrémentale non-linéaire.

Dans la section prochaine de ce chapitre, nous allons voir brièvement les différentes méthodes couramment utilisées, et dans la section qui suit nous allons détailler la méthode qui nous intéresse, la méthode arclength.

III-2- Les méthodes couramment utilisées.

III-2-1- La méthode directe

Dans cette méthode, la déformation correspondant à un chargement donné, le long de la courbe chargement déformation, est obtenue en appliquant la charge entière en un seul pas. Il est donc question de déformations et chargements totaux et non incrémentaux, comme ça sera le cas dans les deux autres méthodes.

Cette méthode est généralement utilisée pour obtenir la déformation correspondant à une valeur donnée de la charge entière, on répète continuellement la méthode en augmentant à chaque fois la valeur de la charge. La matrice de rigidité totale est utilisée pour déterminer le déplacement total correspondant à l'application de la charge totale.

Vu que cette matrice de rigidité $[K]$ est fonction des déplacements, qui sont eux connus, une procédure itérative est nécessaire pour résoudre l'équation :

$$[K] \{U\} = \{F\}.$$

La procédure itérative est indiquée sur la figure (3-1) .

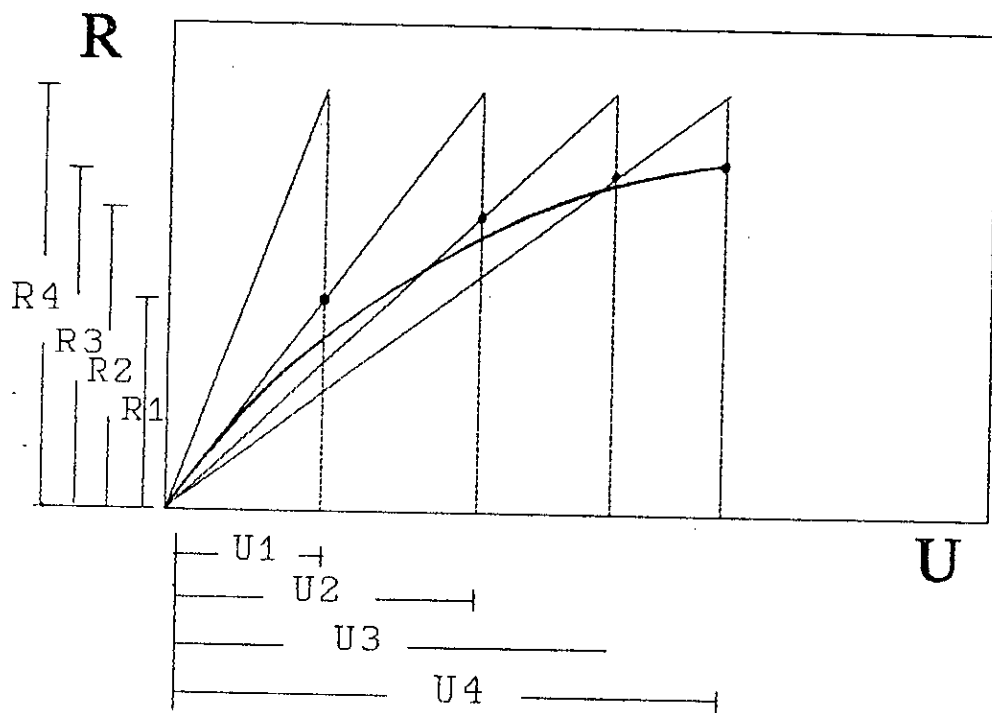


FIGURE 3-1 : Méthode directe

On note ici que, vu que la charge totale est appliquée à la structure initiale indéformée, pour chaque étape de la procédure itérative, la matrice de transformation [T] reste inchangée . Elle est toujours basée sur la géométrie indéformée initiale.

III-2-2 Méthode incrémentale linéaire.

Dans la méthode incrémentale linéaire, la courbe chargement déformation non-linéaire est construite en employant la procédure linéaire en plusieurs incréments. La charge est appliquée en une série de petits incréments, et pour chaque incrément, la variation de la déformation est déterminée en utilisant une analyse linéaire.

Une matrice de rigidité $[k_i]$ dite tangente, et dépendant seulement de la géométrie et des forces internes existantes au début de chaque incrément, est utilisée pour calculer la variation de la déformation due à l'incrément de chargement. Cette matrice $[k_i]$ reste constante durant le calcul des incréments de déplacements, et une solution unique de l'équation suffit pour obtenir les résultats désirés.

Pour que le résultat soit bon, il faut choisir des pas de chargement très petits.

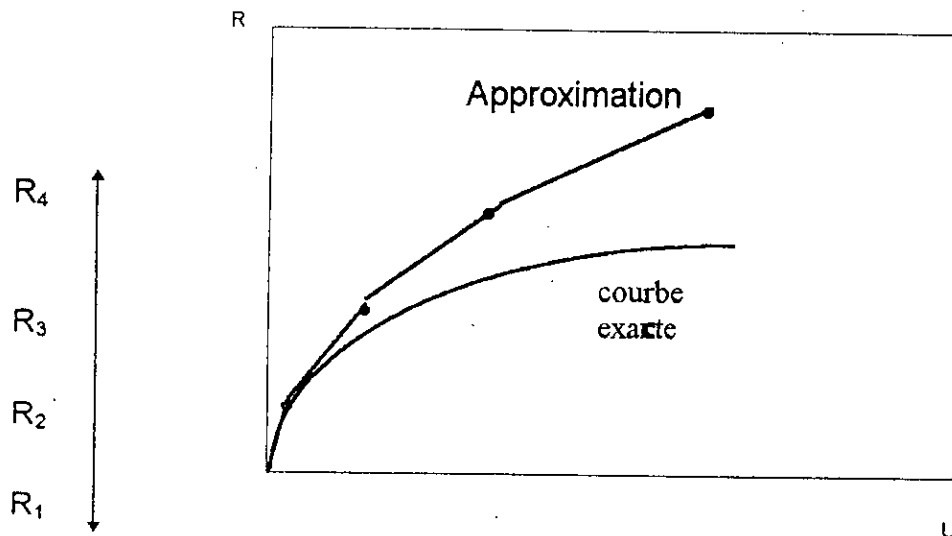


Figure 3-2 méthode incrémentale linéaire

III-2-3 La méthode incrémentale non-linéaire :

La méthode incrémentale non-linéaire est similaire à la méthode précédente dans le fait que pour les deux méthodes, la charge est appliquée sous la forme de plusieurs incréments et que sous chaque incrément, on calcule la variation du déplacement. La différence entre les deux méthodes réside dans la façon avec laquelle sont obtenues les variations de déplacement.

Par opposition à la méthode précédente, la méthode incrémentale non - linéaire emploie une matrice de rigidité incrémentale qui dépend des forces internes et des déplacements développés durant le pas de chargement. Cette matrice ne peut, évidemment pas être évaluée au début du pas de charge . Au lieu de cela, on utilise des itérations pour adapter la matrice de rigidité aux différentes approximations successives des incréments de chargement.

Quoiqu'il existe plusieurs façons d'effectuer les itérations, les méthodes de Newton-Raphson et de Newton-Raphson modifiée (NR) et (mNR) sont les plus utilisées.

Sur la figure (3-3) est indiquée la procédure itérative incrémentale à l'aide de laquelle l'incrément de déplacement $\{ U \}$, correspondant à l'incrément de chargement $\{ \Delta R \}$, est déterminé.

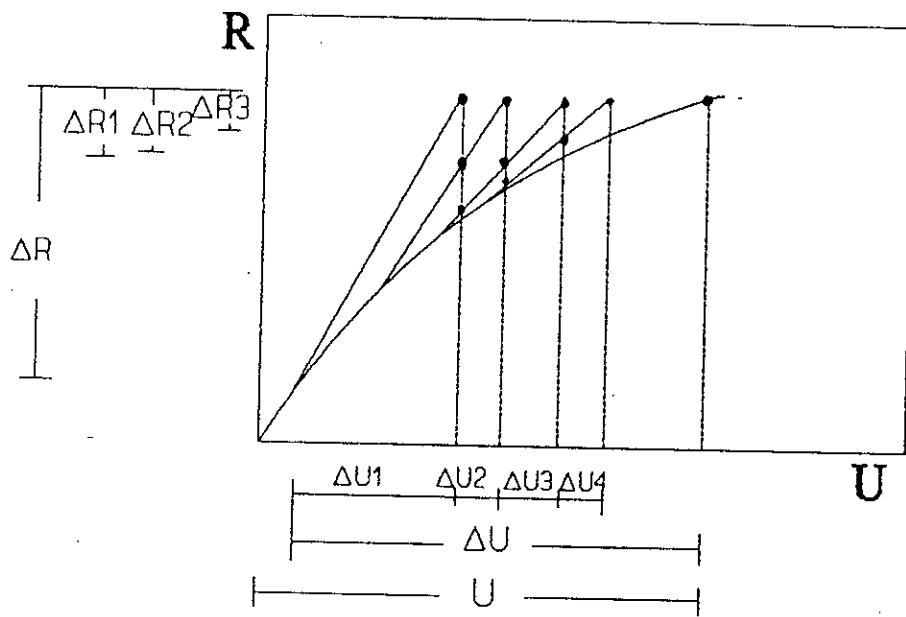


FIGURE 3-3: Méthode incrémentale non-linéaire

III-3 La méthode « arclength »:

Pour la plus grande partie de problèmes pratiques, il n'est pas nécessaire de tracer une courbe chargement /déplacement telle que celle sur la figure(3-4).

Néanmoins, la prédiction de la réponse dans la partie post-critique est essentielle pour déterminer la capacité de la structure à supporter des charges pour de grandes valeurs de déplacements.

La méthode de NR, telle que conventionnellement utilisée peut avoir des difficultés à dépasser le point limite sur la courbe à cause de la singularité de la matrice de rigidité tangente dans cette région. Il y aura, donc un échec de la procédure au voisinage de ce point. Cela implique deux inconvénients:

a/ La charge de rupture déterminée peut sous estimer la capacité réelle de chargement de la structure, car la divergence peut être due à l'échec de la méthode numérique, plutôt qu'à la rupture de la structure.

b/ La réponse post-critique de la structure ne peut pas être définie et l'on ne pourra pas avoir un aperçu sur la capacité de résistance de la structure pour de grands déplacements.

La méthode arclength été développée à l'origine par RIKS [18] et Wempner [6], qui a introduit la technique de l'équation de liaison incrémentale nécessitant une variation itérative de la charge.

BATOZ et DHATT [2] ont défini, ensuite une technique qui préserve la symétrie de la matrice de rigidité quand on utilise un algorithme de contrôle de déplacement. CRISFIELD [6] a utilisé, alors, ces contributions, et a proposé l'équation de liaison arc-length cylindrique

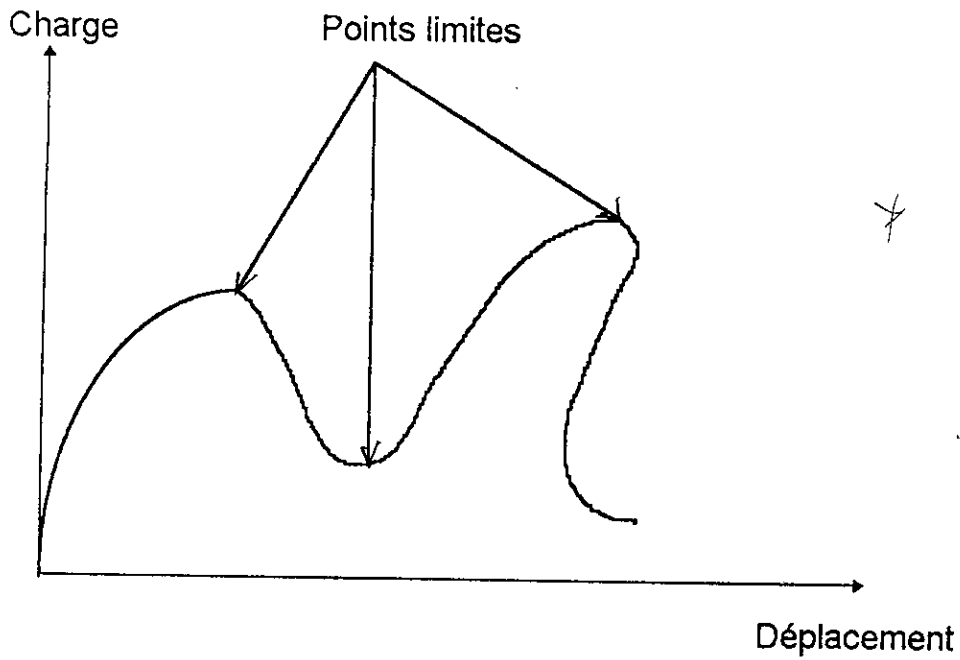


Figure 3-4 : courbe chargement déplacement non-linéaire.

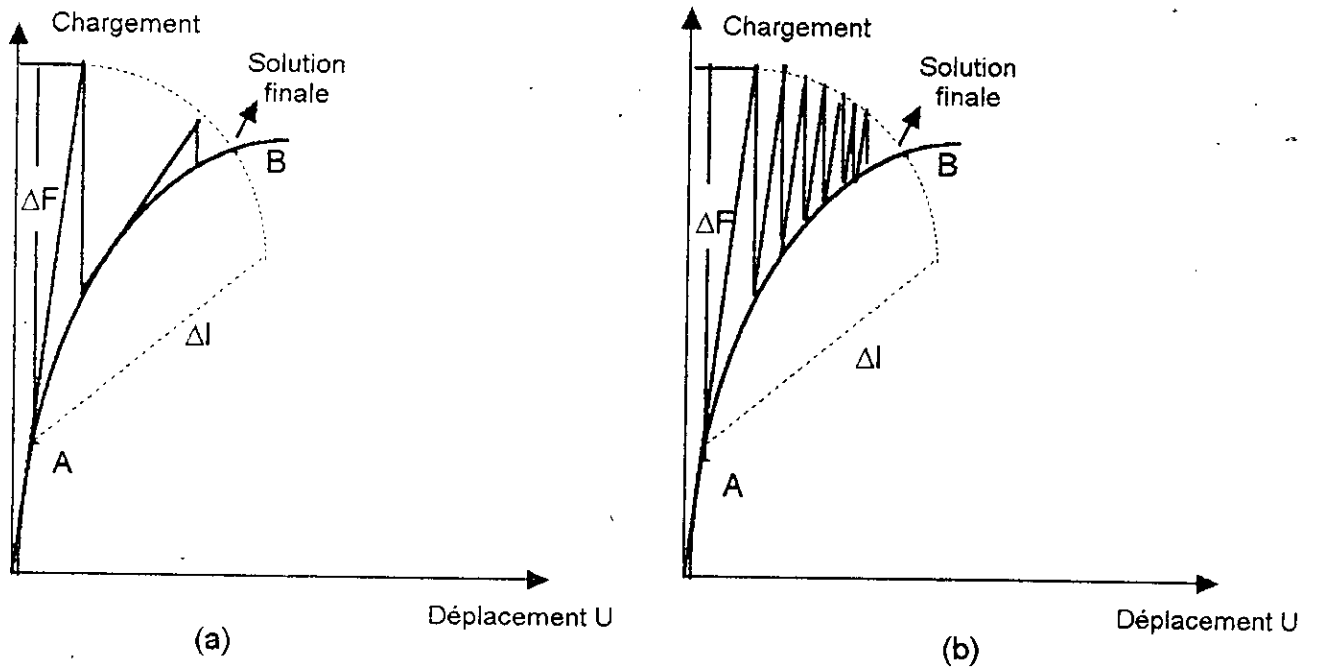


Figure (3-5) Méthode arclength

(a) avec la technique de NR

(b) avec la technique de NR modifiée

constante; une modification de l'équation de liaison plane tangente de RIKS, avec une forme appropriée pour les solutions non-linéaires en éléments finis. Plusieurs chercheurs ont accentué leurs recherches sur cette équation de liaison et sur les entités qui sont reliées à elle; c'est à dire l'incrément arclength (longueur d'arc), et la racine appropriée de l'incrément de chargement. Dans le but de rendre la méthode arclength plus stable, ces deux derniers éléments doivent être choisis judicieusement.

III-3-1 Développement de la méthode:

La figure (3-5) illustre l'application de la méthode arclength pour résoudre un problème unidimensionnel, en utilisant la technique de NR (figure 3-5 (a)), ou la technique de NR modifiée (figure 3-5 (b)).

Les équations d'équilibre en EF dans le cas non-linéaire sont

$${}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F = 0 \quad (3-1)$$

${}^{t+\Delta t} R$ = vecteur chargement extérieur appliqué à l'instant $t+\Delta t$

${}^{t+\Delta t} F$ = vecteur forces nodales (équivalentes aux contraintes élémentaires internes) à $t+\Delta t$.

En utilisant la procédure itérative de NR modifiée, et en supposant que le chargement est indépendant du déplacement, l'équation (3-1) est réécrite sous la forme incrémentale suivante :

$${}^t k \Delta U_i = {}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F_{(i-1)} \quad (3-2)$$

${}^t k$ \equiv matrice de rigidité incrémentale formée au début du pas de chargement.

ΔU_i \equiv incrément de déplacement à l'iteration (i), à ajouter au déplacement calculé à l'iteration précédente, pour avoir le déplacement actuel (cumulé); c'est à dire :

$$U_i = {}^{t+\Delta t} U_{i-1} + \Delta U_i \quad (3-3)$$

Dans la résolution incrémentale, on suppose que la structure est soumise à un chargement proportionnel. L'équation (3-2) devient :

$${}^t K \Delta U_i = {}^{t+\Delta t} \lambda R - {}^{t+\Delta t} F_{i-1} \quad (3-4)$$

Avec : ${}^{t+\Delta t} \lambda \equiv$ facteur de chargement à $t + \Delta t$, à multiplier par le vecteur chargement de référence R pour obtenir le vecteur chargement appliqué à $t + \Delta t$.

En utilisant la technique de Batoz et Dhatt, l'équation (3-4) est séparée en deux équations :

$${}^t k \Delta \bar{U}_i = {}^{t+\Delta t} \lambda_{i-1} \cdot R - {}^{t+\Delta t} F_{i-1} \quad (3-5)$$

et ${}^t k \Delta \hat{U}_i = R \quad (3-6)$

Avec : $\Delta U_i = \Delta \bar{U}_i + \Delta \lambda_i \cdot \Delta \hat{U}_i$

et : ${}^{t+\Delta t} \lambda_i = {}^{t+\Delta t} \lambda_{i-1} + \Delta \lambda_i \quad (3-7)$

où : $\Delta \bar{U}_i \equiv$ vecteur increment de déplacement $d\bar{U}$ aux forces résiduelles pour la i^{ème} itération .

$\Delta \hat{U}_i \equiv$ vecteur déplacement tangent , pour un niveau de chargement arbitraire R .

C'est le vecteur déplacement qui a été nécessaire pour la solution initiale.

Donc, le vecteur déplacement total à l'iteration (i), de l'incrément appliqué à $t + \Delta t$ est :

$${}^{t+\Delta t} U_i = {}^{t+\Delta t} U_{i-1} + \Delta \bar{U}_i + \Delta \lambda_i \cdot \Delta \hat{U}_i$$

Puisque le développement se fait pour un problème à N variables de déplacement, et vu que les équations (3-5), (3-6) et (3-7) contiennent $(N+1)$ inconnues, ΔU_i et $\Delta \lambda_i$, une equation scalaire, générale et additionnelle est utilisée pour résoudre le problème : C'est l'équation de liaison:

$$\alpha [({}^{t+\Delta t} \lambda_{i-1} - {}^t \lambda) + \Delta \lambda_i]^2 + U_i^T \times U_i = \Delta l^2 \quad (3-8)$$

où : $U_i = {}^{t+\Delta t} U_i - {}^t U$ pour $i = 1, 2, 3, \dots$

$U_i \equiv$ vecteur incrément de déplacement.

$\Delta l \equiv$ le rayon de l'arclength (ou bien rayon de la longueur d'arc)

$\alpha \equiv$ parametre d'échelle

S_p est actualisé à la fin de chaque pas de chargement. Pour un problème bidimensionnel, l'équation (3-11) représente la surface d'un ellipsoïde. D'où le nom « méthode arc length ellipsoïdale ».

III-3-3 Etude du rayon Δl :

Pour assurer l'efficacité de l'algorithme arclength, au début de chaque pas de charge, le nouveau rayon de l'arclength (Δl) doit être déterminé. Deux modifications du rayon (Δl) sont proposées:

$$a) \Delta l_{\text{new}} = \sqrt{N_2 / N_1} \Delta l_{\text{old}} \quad (3-12)$$

avec

$N_1 \equiv$ Nombre optimal d'itérations désiré

$N_2 \equiv$ Nombre d'itérations utilisées dans le pas de chargement précédent.

Après plusieurs études, l'équation (3-12) est remplacée par la relation suivante:

$$\Delta l_{\text{new}} = \sqrt[4]{N_2 / N_1} \Delta l_{\text{old}} \quad (3-13)$$

avec : $N_1 = 2$

Cette dernière relation tend à maintenir Δl_{new} proche de Δl_{old} .

$$b) \Delta l_{\text{new}} = \sqrt{N_2 / N_1} \Delta l_{\text{old}} \quad (3-14)$$

avec :

$N_1 = 5$ pour les problèmes dont le degré de liberté est inférieur à 25

$N_1 = 6$ pour les problèmes dont le degré de liberté est compris entre 25 et 250.

Cette dernière formule tend à accroître Δl dans le cas où on utilise beaucoup d'incrémentes.

Dans le cas de non-linéarité forte, Δl décroît, en utilisant cette formule.

III-3-4 Choix de la méthode à utiliser :

Les trois définitions du paramètre α , combinées avec les deux modifications du rayon Δl , définissent six cas (ou bien six méthodes).

P. X. BELLINI et A. CHULYA [3] ont montré sur plusieurs exemples que la méthode arclength cylindrique avec la condition de l'équation (3-14) est plus performante que toutes les autres méthodes .

En effet, dans tous les problèmes qu'ils ont traité, la méthode arclength obtenue par combinaison des équations (3-10) et (3-14) permet de tracer le chemin d'équilibre (courbe chargement déplacement) le plus long, pour le même nombre d'incrément de chargement.

Pour bénéficier de cet avantage, nous avons préféré utiliser cette méthode dans notre étude .

III-3-5 Calcul du facteur de chargement :

Comme indiqué auparavant , en plus des équations (3-5), (3-6)et (3-7), on doit utiliser la relation de liaison (3-10) pour déterminer la variation $\Delta\lambda_i$ du paramètre de chargement pour l'itération actuelle (i) .

Pour la première itération du j'ème pas de chargement, on a :

$${}^{t+\Delta t}U_0 = \Delta\bar{U}_0 = 0$$

Donc : ${}^{t+\Delta t}U_j = \Delta\lambda_1 \Delta\hat{U}_1$

En remplaçant dans l'équation (3-10), on obtient :

$$(\Delta\lambda_1 \Delta\hat{U}_1)^T \times (\Delta\lambda_1 \Delta\hat{U}_1) = \Delta l^2$$

Donc :

$$\Delta\lambda_1 = \frac{\Delta l}{\sqrt{\langle \Delta\hat{U}_1 \rangle \{ \Delta\hat{U}_1 \}}} \quad (3 - 15)$$

Cette équation détermine la variation du paramètre de chargement (λ) pour la première itération du j'eme pas de chargement . Pour la première itération du

premier incrément de chargement , une valeur initiale du paramètre de chargement , est choisie pour définir le rayon de la longueur d'arc initial.

Pour la seconde et les autres itérations, les équations (3-3) et (3-10) nous donnent l'équation quadratique suivante, pour définir la variation $\Delta\lambda_i$, du paramètre de chargement de la i'eme itération du j'eme pas de chargement :

$$A \times (\Delta\lambda_i)^2 + B \times \Delta\lambda_i + C = 0 \quad (3-16)$$

où :

$$\begin{cases} A = \langle \Delta \hat{U}_1 \rangle \cdot \{ \Delta \hat{U}_1 \} \\ B = 2 (\langle U_{i-1} \rangle + \langle \Delta \bar{U}_i \rangle) \cdot \{ \Delta \hat{U}_1 \} \\ C = (\langle U_{i-1} \rangle + \langle \Delta \bar{U}_i \rangle) \cdot (\{ U_{i-1} \} + \{ \Delta \bar{U}_i \}) - \Delta l^2 \end{cases} \quad (3-17)$$

La valeur appropriée de $\Delta\lambda_i$ est celle , des deux racines de l'équation (3-16) , qui maintient positif l'angle entre les vecteurs incréments déplacement original et cumulé du j'eme pas de chargement (c.a.d ΔU_{i-1} et ΔU_i) . Si les deux angles sont positifs alors la racine la plus proche de la solution linéaire ($\Delta\lambda = -C/B$) est prise en compte .

Une fois $\Delta\lambda$ déterminé, l'incrément de déplacement de l'itération en cours est calculé par équation (3-7):

$$\Delta U_i = \Delta \bar{U}_i + \Delta\lambda_i \times \Delta \hat{U}_1$$

Le déplacement cumulé de ce pas de chargement est calculé, alors, en utilisant équation (3-3):

$${}^{t+\Delta t} U_i = {}^{t+\Delta t} U_{i-1} + \Delta U_i$$

Le nouveau paramètre de chargement est :

$${}^{t+\Delta t} \lambda_i = {}^{t+\Delta t} \lambda_{i-1} + \Delta\lambda_i$$

III-4 Critères de convergence:

La définition d'un critère de convergence approprié est une condition essentielle pour qu'une résolution incrémentale soit efficace.

A la fin de chaque itération, la solution obtenue doit vérifier une certaine tolérance pour savoir si la convergence est atteinte.

Dans chaque itération, notre tâche est de trouver une solution U qui nous permet d'avoir l'équilibre défini par l'équation (3-1). Dans ce but, on définit un critère de convergence permettant d'annuler le résidu ${}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F$ entre les forces externes et les forces internes. Néanmoins, vu que dans une procédure numérique il est pratiquement impossible d'annuler le résidu, on introduit une approximation de la forme suivante :

$$\| {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F_i \| \leq \xi \| {}^{t+\Delta t}R - {}^tF \|$$

ou: $\xi \equiv$ tolérance exigée sur les forces.

Ce critère est appelé critère de convergence en forces.

D'autres critères peuvent être encore utilisés:

- Le critère de convergence en déplacement:

$$\| \Delta U_i \| \leq \xi_D \| {}^{t+\Delta t}U_i - {}^tU \|$$

-Le critère de convergence en énergie.

$$\langle \Delta U_i \rangle \cdot \left(\left\{ {}^{t+\Delta t}\{R\} - {}^{t+\Delta t}\{F_i\} \right\} \right) \leq \xi_E \langle \Delta U_i \rangle \left(\left\{ {}^{t+\Delta t}\{R\} - {}^t\{F\} \right\} \right)$$

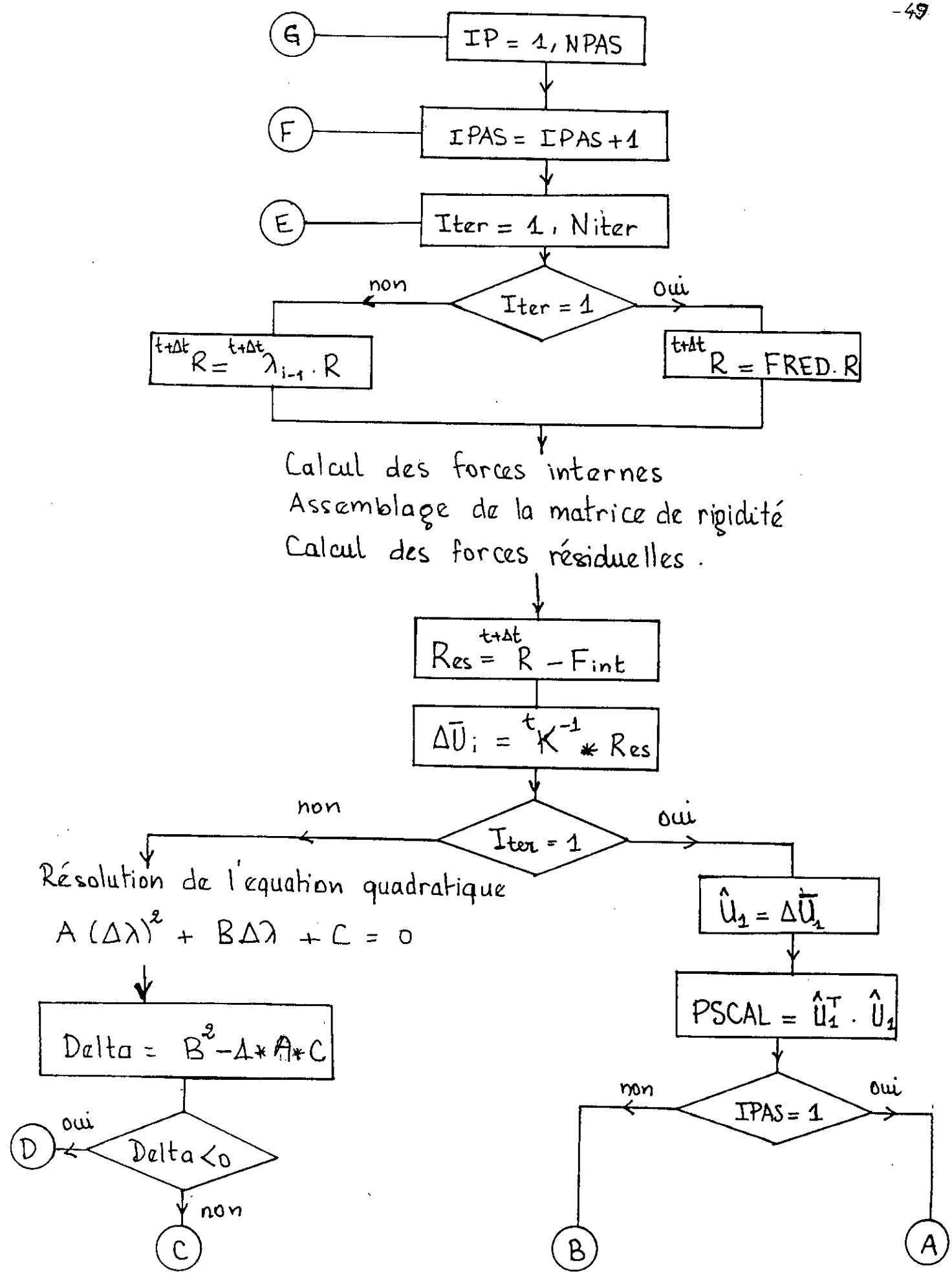


FIGURE 3-6 : Organigramme de la méthode Arclength

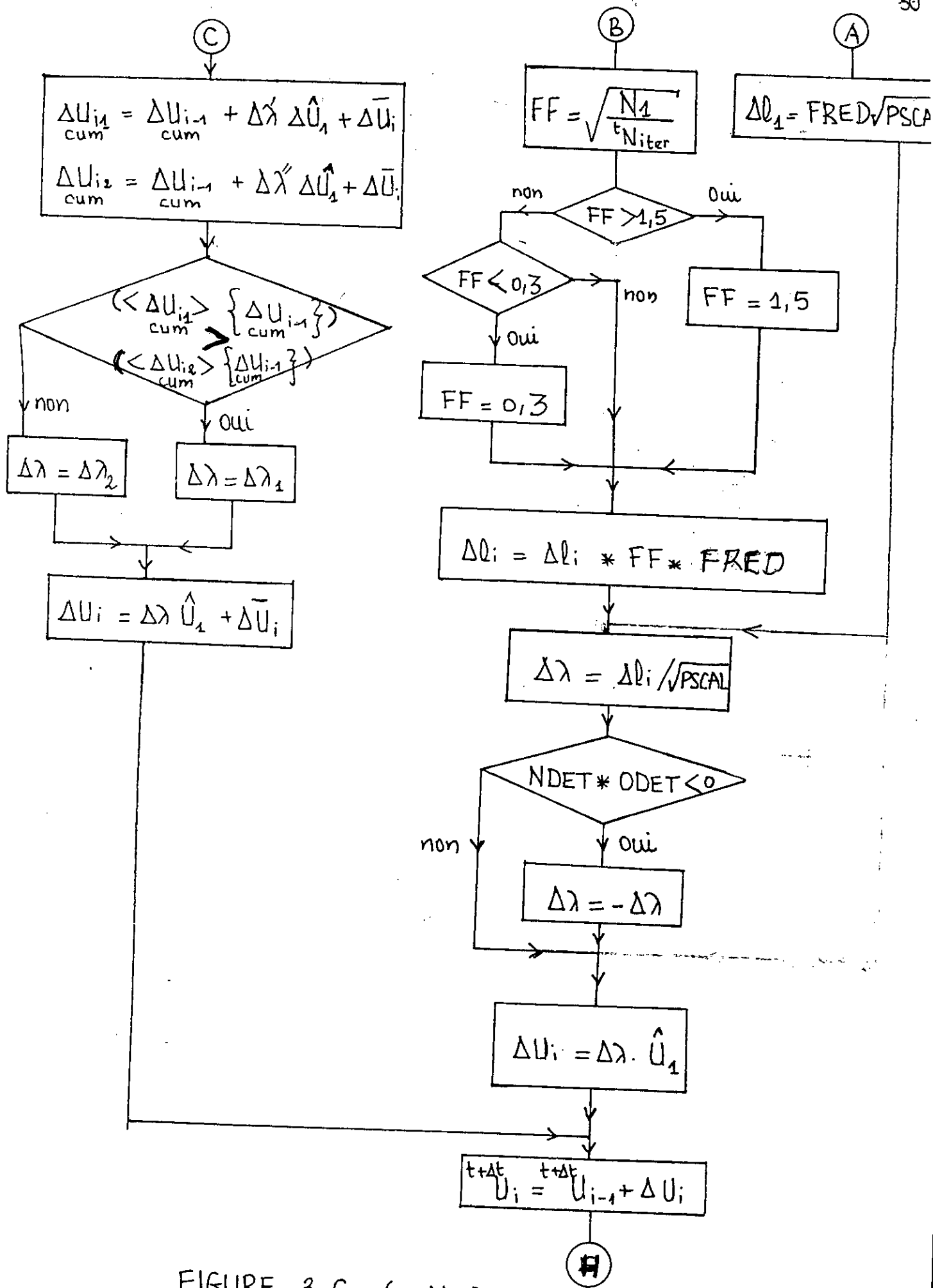


FIGURE 3-6 : (suite)

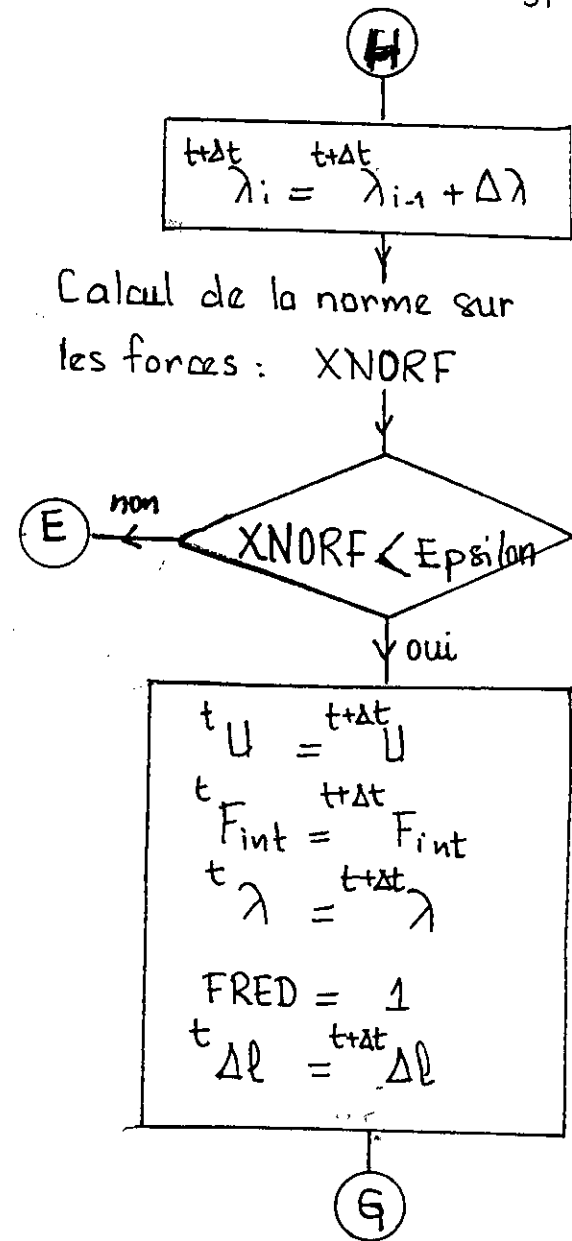
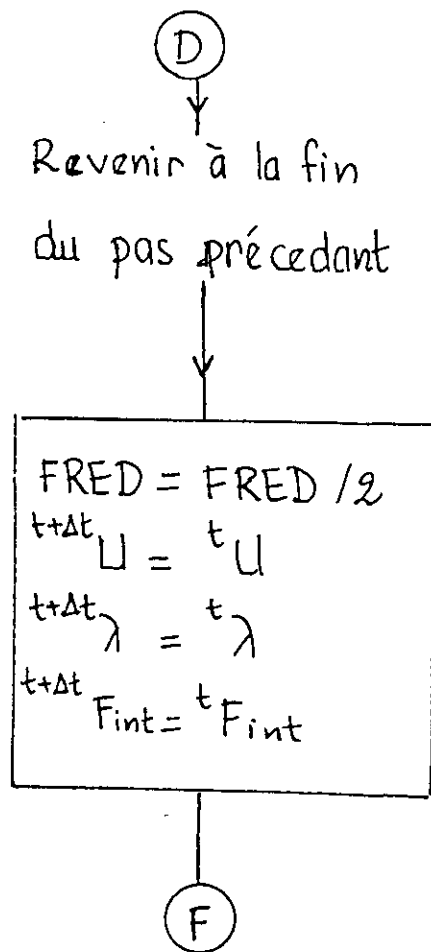


FIGURE 3-6: (suite)

Chapitre IV

IV- Présentation du programme de résolution

IV -1 Introduction

Les programmes de résolution des problèmes non linéaires consistent , comme on l'a cité auparavant , à résoudre des systèmes d'équations linéaires à chaque itération.

En apportant plusieurs modifications, relatives à notre étude, au programme MEF élaboré par G.DHATT et G. TOUZOT, nous avons développé le programme que nous allons essayer de présenter dans ce chapitre .

Ce programme de complexité moyenne, est écrit en langage FORTRAN . Il est constitué de plusieurs sous-programmes exécutés par des macro-commandes, à la demande de l'utilisateur.

L'organisation générale de ce programme est représentée sur la figure (4-1) . Cette organisation modulaire permet d'introduire , à chaque fois qu'en en a besoin ,de nouveaux sous programmes ce qui agrandit le rayon du programme .

Dans ce chapitre , nous n'allons décrire que le bloc NLIN réalisé pour traiter le comportement géométrique non linéaire par la méthode arclen^{gh}. Pour les autres blocs, on peut consulter l'ouvrage [8].

Néanmoins, avant d'entamer cette description, nous allons parler de la façon dont sont rangés les différents vecteurs et matrices.

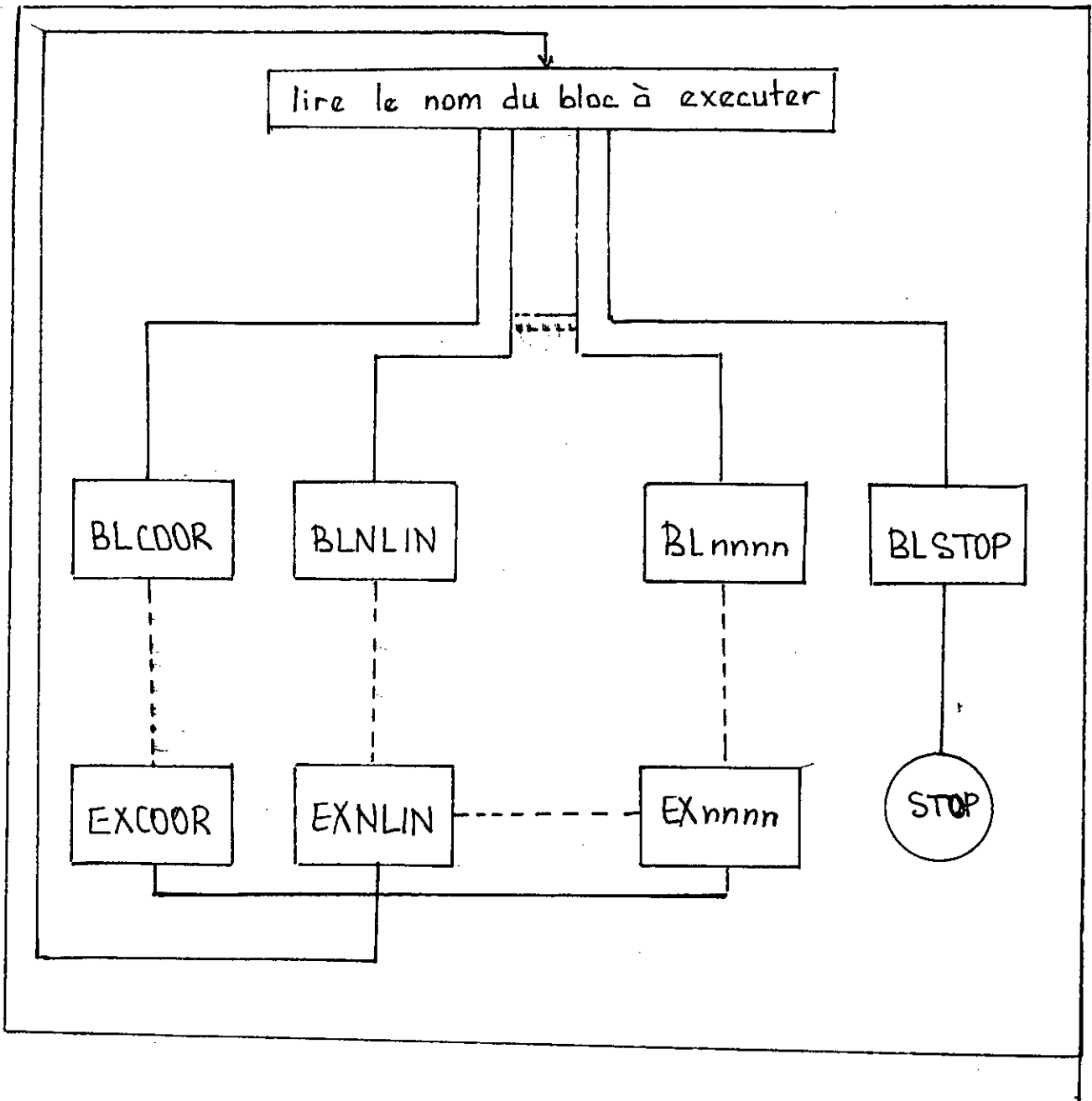


FIGURE 4-1: Organisation générale du programme MEF

4-2- Allocation pseudo-dynamique des tables :

Pour éviter de changer les dimensions des tables, et pour qu'il n'y ait aucun gaspillage au cours de la mémorisation des données, nous utilisons la technique dite d'allocation de mémoire pseudo-dynamique.

- Dimensionner les tables volumineuses comme des vecteurs et non comme des matrices.
- Placer les tables entières ou réelles séquentiellement dans un vecteur unique VA.
- repérer chaque table 'ttt' par la position 'Lttt' de son premier terme dans VA.
- limiter par la dimension du vecteur VA définie dans le programme principal sous la forme :

Common VA (2000)
NVA 2000

4-3 La méthode ligne de ciel (skyline) :

Les matrices de rigidité sont symétriques et faiblement peuplées (k_e et k_g). Il y a un grand intérêt à tirer de ces deux propriétés dans leur mémorisation ou stockage .

Ces matrices peuvent être stockées en utilisant différentes méthodes:

- Méthode "frontale"
- Méthode de stockage par "bande"
- Méthode de stockage ligne de ciel (skyline).

La méthode de stockage la plus simple et la plus performante, qui est d'ailleurs celle pour laquelle nous avons opté , est la troisième des méthodes susmentionnées (ligne de ciel). C'est une amélioration de la méthode de stockage par bande . Elle permet un gain important de place mémoire et peut réduire le

volume des calculs jusqu'à 4 % de ce qu'il serait si la matrice était stockée telle qu'elle est.

Cette méthode consiste à stocker seulement les termes d'une matrice K se trouvant sous la ligne de ciel de cette matrice, dans un vecteur V. Du fait de la symétrie de cette matrice, les termes de la partie supérieure de cette matrice (diagonale incluse) sont les seuls à être stockés.

La ligne de ciel est l'enveloppe des sommets des colonnes de hauteurs variables. Elle est définie par le vecteur des hauteurs de colonnes, h.

Nous définissons les vecteurs de stockages suivants:

VKGD : contient les termes diagonaux (n termes).

VKGS : contient les autres termes de la partie supérieure, organisés par colonnes descendantes.

Pour définir la position d'un terme k_{ij} de la matrice $k(n \times n)$ dans les vecteurs VKGD et VKGS, nous utilisons le vecteur de localisation des débuts de colonnes, KLD, de dimension $n+1$, défini par :

$$KLD(1) = 1 \quad KLD(2) = 1$$

$$KLD(l) = KLD(l-1) + h(l-1) \quad \text{pour } l = 3, n+1$$

Donc, un terme k_{ij} se trouve placé:

* si $i = j$ en VKGD (l)

* si $i < j$ en VKGS (l)

où $l = KLD(j+1) - j + i$

Les vecteurs VKGD et VKGS contiennent respectivement n et $KLD(n+1) - 1$ termes.

Exemple :

Pour la matrice de rigidité géométrique.

$$K_g = \frac{F_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

— ligne de ciel

Symétrique

$$h = \{0\ 0\ 0\ 3\ 3\ 3\}$$

$$KLD = \{1\ 1\ 1\ 4\ 7\ 10\}$$

$$VKGS = \frac{F_x}{L} \{-1\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\}$$

$$VKGD = \frac{F_x}{L} \{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\}$$

4-4 Lecture des données:

L'entrée des données se fait au moyen d'un fichier de données FICH . DAT il doit contenir .

(a) Les données relatives à la géométrie de la structure :

- Le nombre de noeuds total NNT
- Le numéro et les coordonnées (X,Y et Z) de chaque noeud.
- Le nombre d'éléments total (NELT)
- Le numéro des deux noeuds définissant chaque élément .

(b)- Les données relatives aux propriétés élémentaires :

- Module de Young , E.
- la section de chaque élément, A.

(c)-Les données relatives au chargement appliqué:

- L'intensité.
- Le noeud d'application.
- La direction d'application (suivent X, Y ou Z).

(d)-Les données nécessaires pour la résolution non-linéaire :

- Les nombre de pas de chargement maximal NPAS.
- Le nombre d'itérations désiré par pas NITERD.
- Le nombre d'itérations maximum par pas NITER
- La tolérance exigée pour la convergence RKSIT
- La méthode à combiner avec la méthode arclength (Newton-Raphson ,ou Newton-Raphson modifiée).

4-5 Description du bloc non-linéaire

Ce bloc traite le comportement géométrique non-linéaire des structures spatiales par le biais de la technique arclength.

Dans le tableau suivant, est dressée la liste des variables principales de ce bloc.

Variable	Description
NPAS	Nombre de pas de chargement maximum.
FRED	Facteur de réduction.
IMETH	Méthode utilisée (NR ou MNR).
NITER	Nombre d'itération maximum.
ITTER	Numéro de l'itération actuelle.
IPAS	Numéro du pas actuel.
DELTA	Déterminant de l'équation quadratique arclength: $DELTA = B^2 - 4 AC$.
RKSIT	Erreur admissible sur la norme des forces.
XNORF	Norme des forces {R}.
XNORM	Norme des déplacements {U}.
NITERD	Nombre d'itérations désiré.
NITERP	Nombre d'itérations durant l'incrément précédent.
NEQ	Nombre d'équation.
VDLG (NEQ)	Vecteur total de déplacement global.
VDGT (NEQ)	Vecteur incrément de déplacement tangent.
VRES(NEQ)	Vecteur des résidus.
VFG (NDLE)	Vecteur global des sollicitations.
VDLE(NDLE)	Vecteur de déplacement total élémentaire.
VFE(NDLE* (NDLE +1)/2)	Matrice de rigidité tangente.
PROT (6*6)	Matrice de rotation.
VDGI(NDLE)	Vecteur incrément de déplacement du aux forces résiduelles à l'itération actuelle.
VIND(NDLE)	Vecteur incrément de déplacement élémentaire.

DPASO	Facteur incrément de chargement initial.
DPAS	Facteur incrément de chargement durant les itérations d'équilibre (pour $i > 1$).
XPAS	Facteur chargement total.
DET	Déterminant de la matrice de rigidité.
ARCLG	Rayon de la longueur d'arc.
NELT	Nombre total d'éléments.
NDLE	Nombre de degrés de liberté.

Le bloc NLIN est constitué de plusieurs sous- programmes:

1- Le sous-programme BLNLIN :

Ce sous programme ouvre les différents fichiers de données et de résultats . Il alloue un espace mémoire dans le vecteur VA aux différents vecteurs et matrices. Il appelle ensuite le sous-programme EXNLIN.

2-Le sous-programme EXNLIN :

Il met en oeuvre l'algorithme non-linéaire. Il lit, d'abord, les variables XPASO, NPAS, NITERD, NITER, IMETH. Il appelle ensuite pour chaque pas de chargement et pour chaque itération, le sous-programme NEWTON pour la résolution de l'équation d'équilibre incrémentale.

3-Le sous-programme NEWTON :

Il appelle le sous programme ASNEW pour assembler le vecteur forces résiduelles (le résidu) ainsi que la matrice de rigidité , dans le cas de la méthode (NR), Il exécute ensuite la méthode de résolution arclength combinée à l'une des méthodes NR ou mNR . Il appelle alors le sous-programme PASINC pour le calcul du facteur incrément de chargement DPAS et du rayon de la longueur d'arc ARCLG.

4- Le sous-programme ASNEWT :

Ce programme appelle, au début, le sous-programme RDELEM pour lire les données élémentaires. Puis, il appelle le sous-programme ELEM06 pour calculer les résidus élémentaires et la matrice de rigidité dans le repère globale . Il les

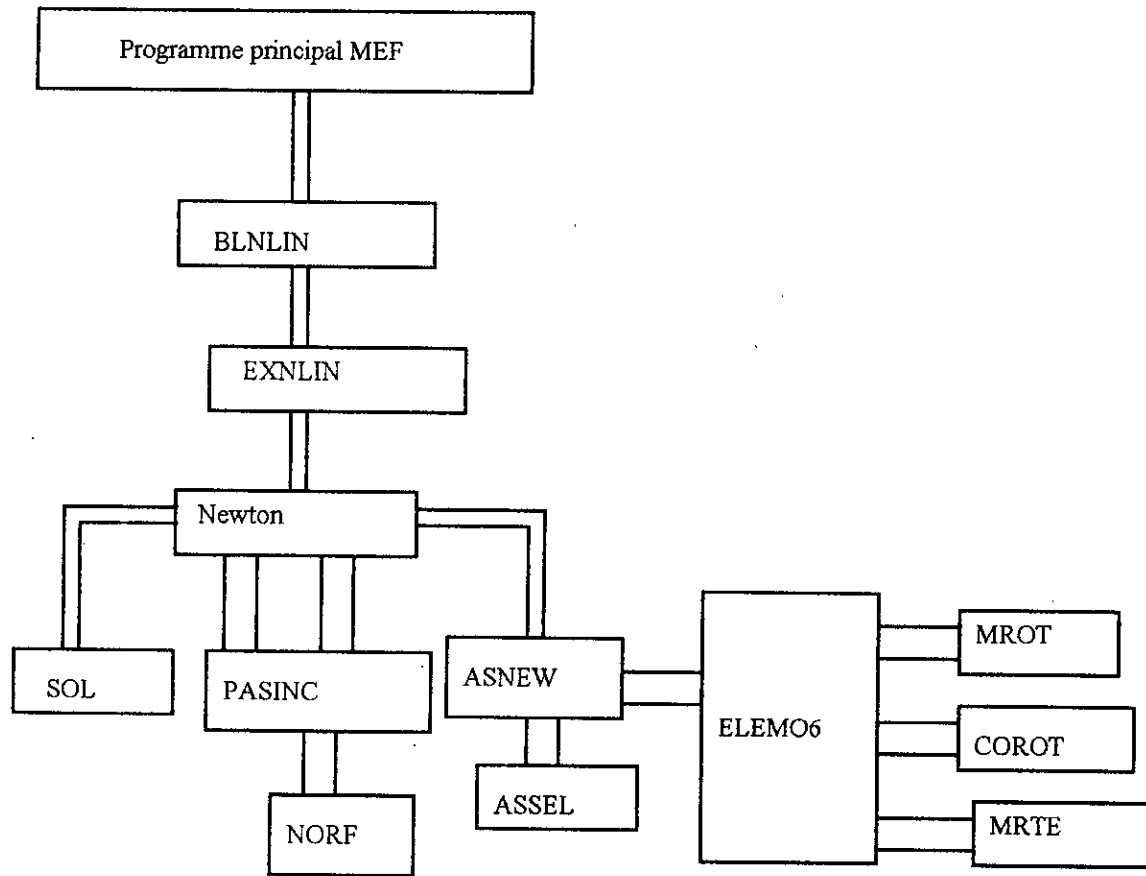


Figure 4: -2 Enchaînement des différents sous programme du bloc NLIN.

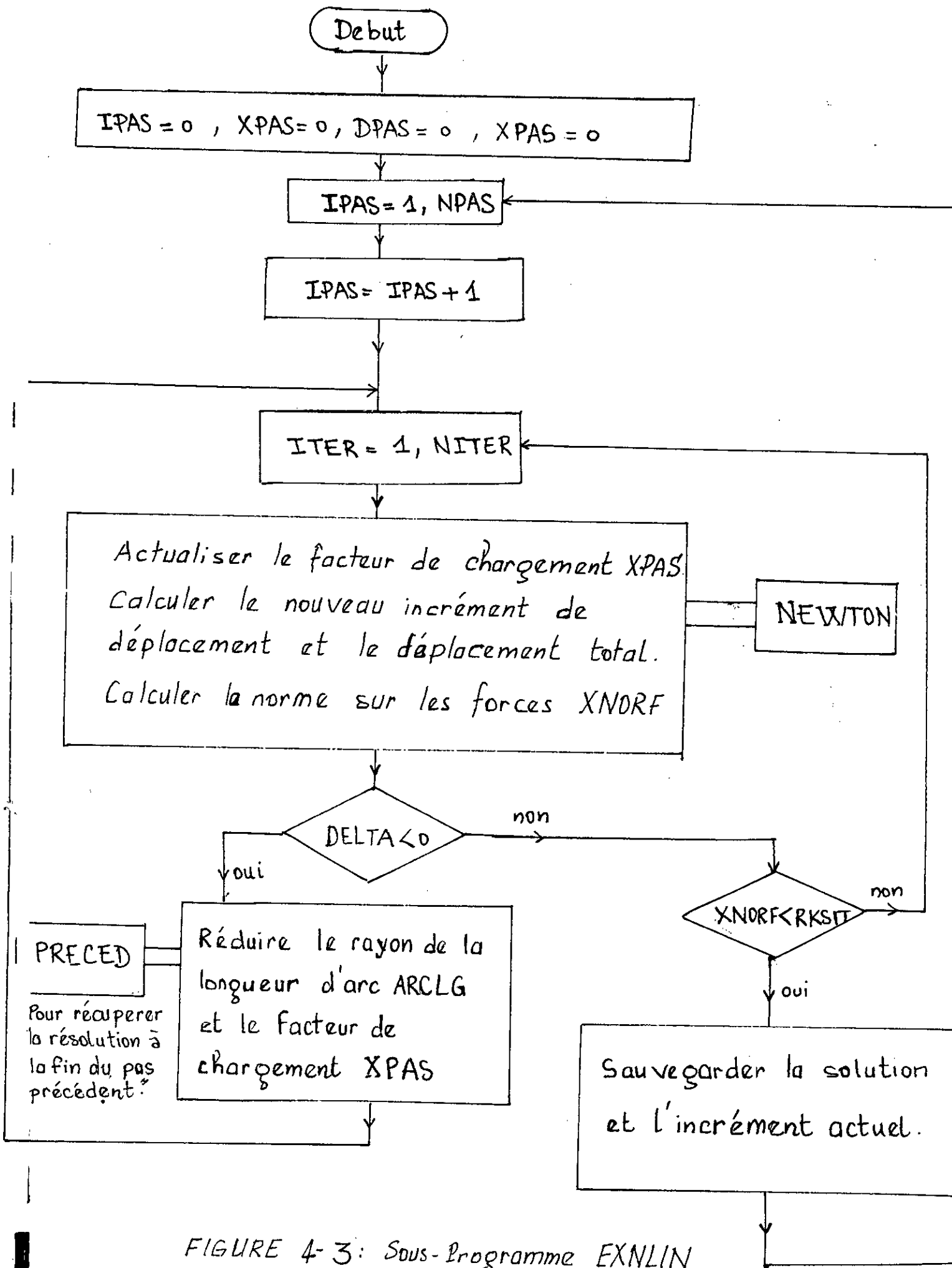


FIGURE 4-3: Sous-Programme EXNLIN

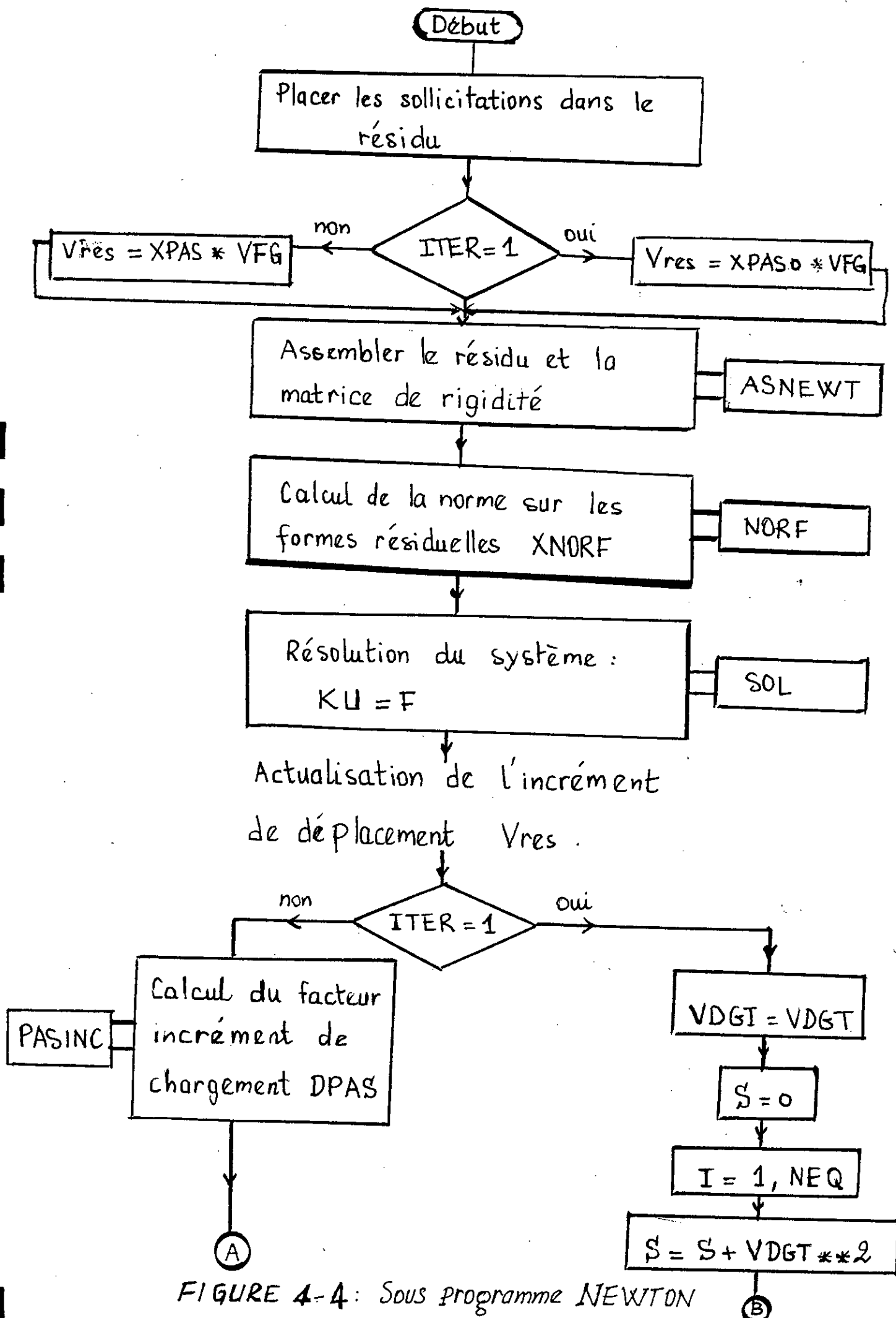


FIGURE 4-4: Sous programme NEWTON

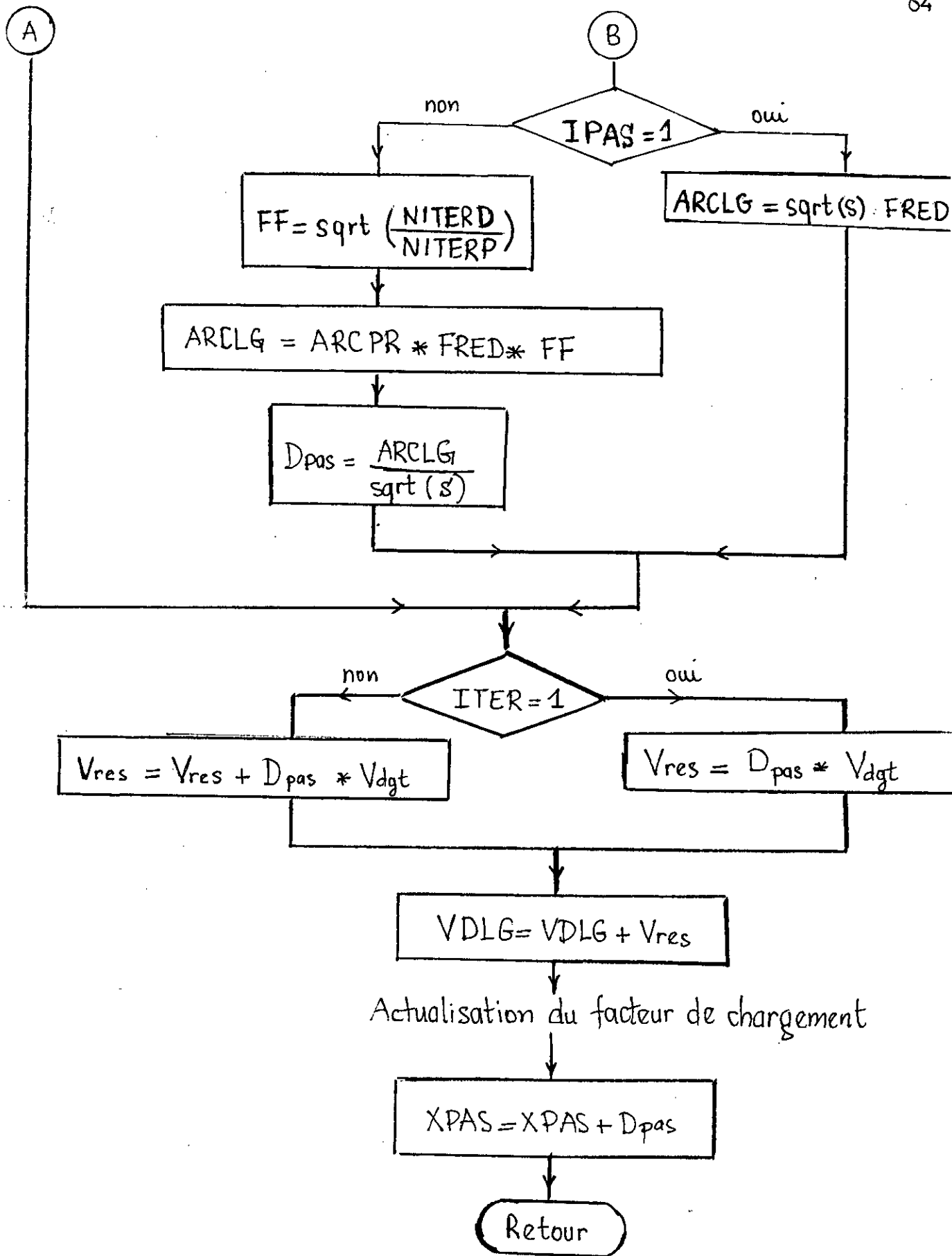


FIGURE 4-4: (suite)

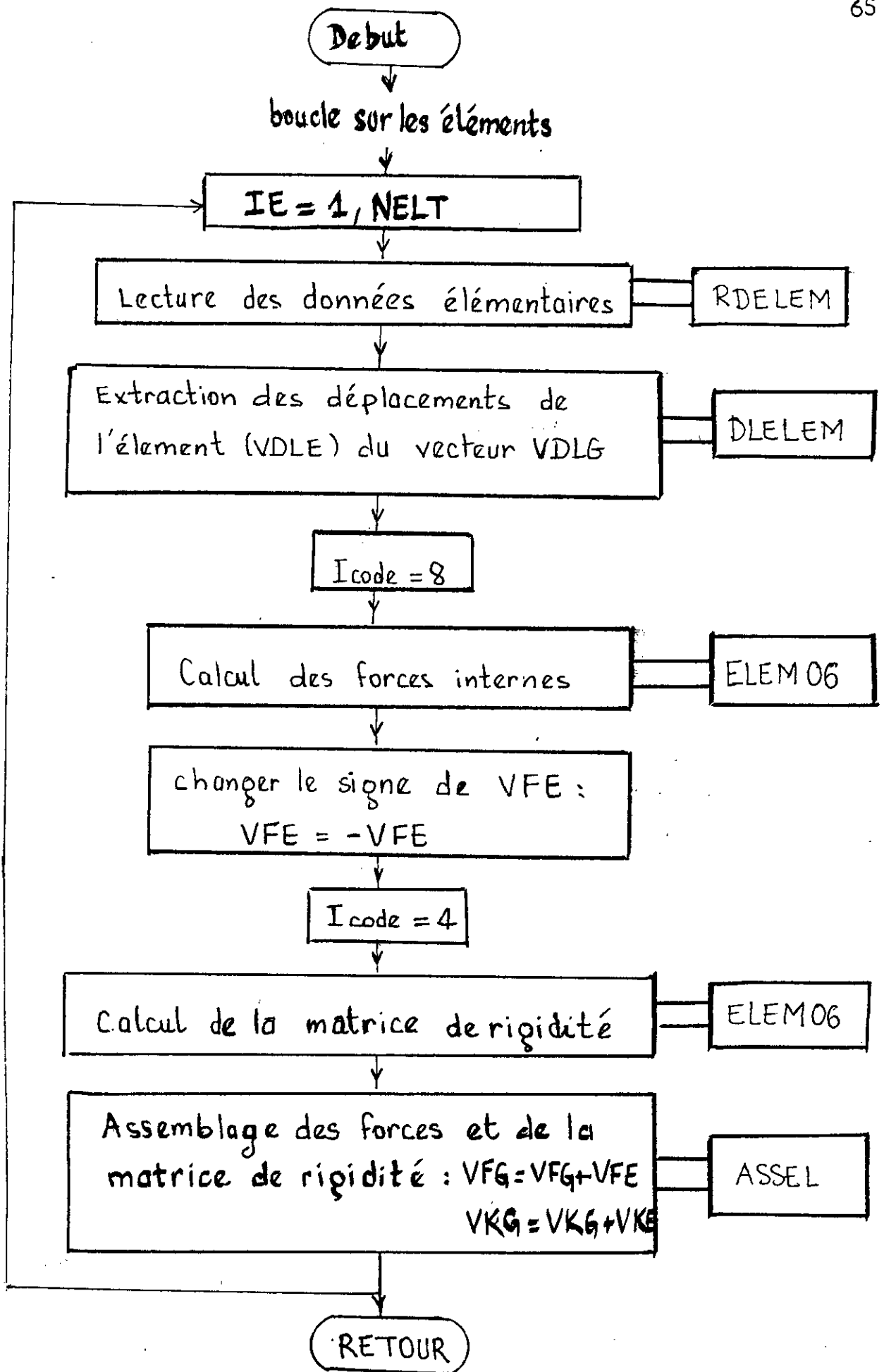


FIGURE 4-5: Sous-Programme ASNEWT

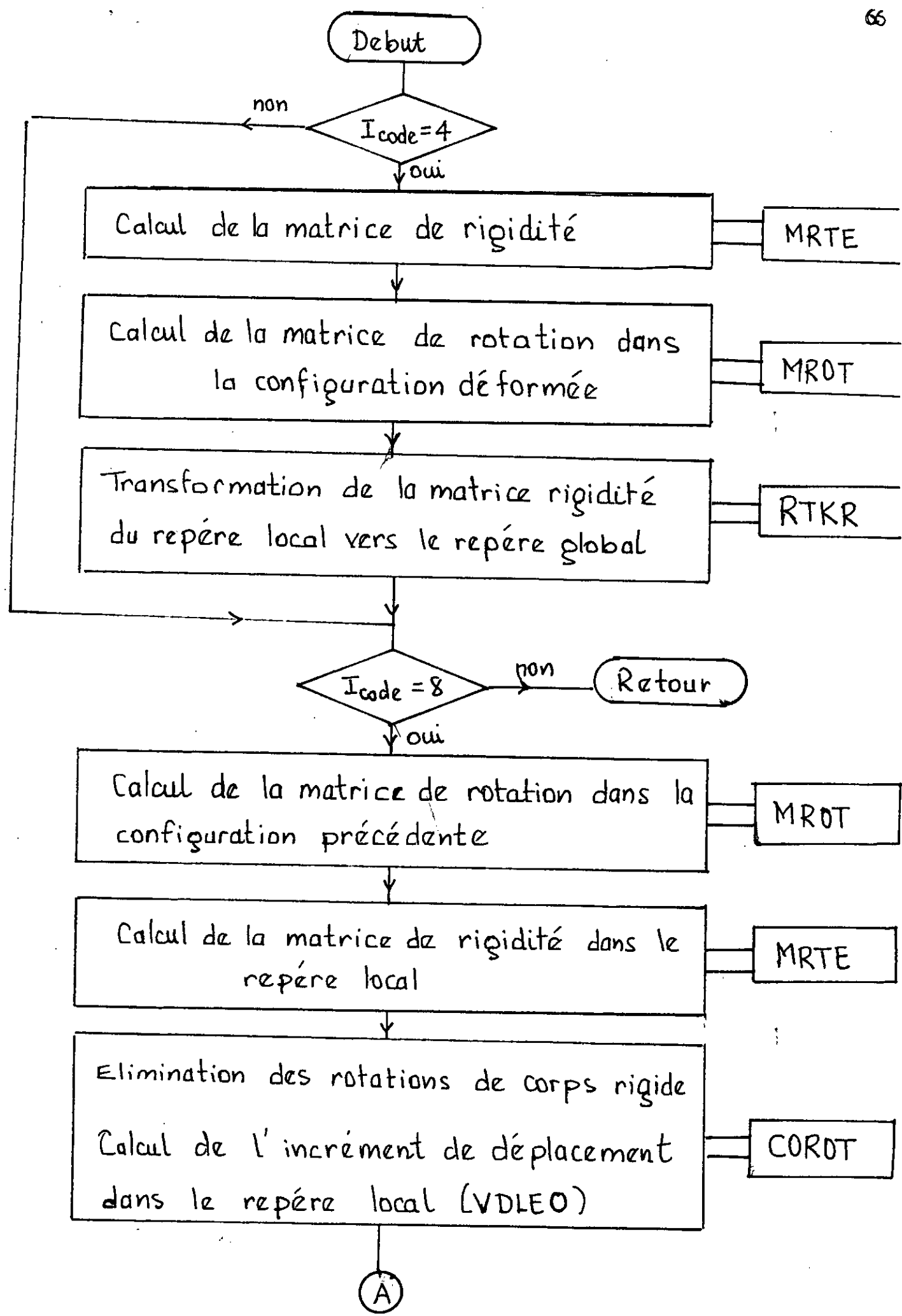


FIGURE 4-6 : Sous-Programme ELEM 06

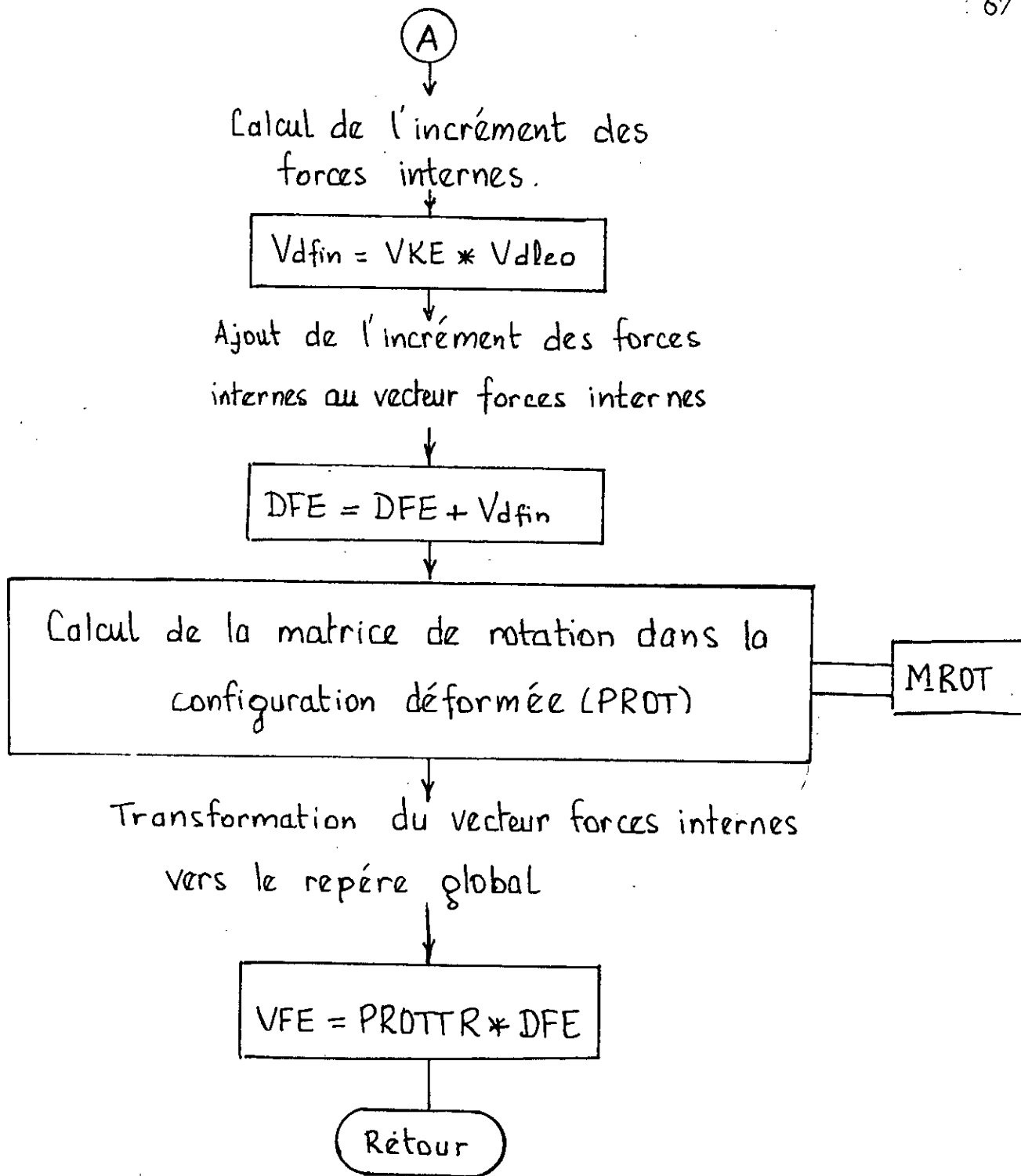


FIGURE 4-6 : (suite)

Chapitre V

V-Applications numériques.

Ce chapitre a pour but d'évaluer la performance de la procédure et du programme présentés dans les chapitres précédents. Programme qui permet l'analyse en grands déplacements des systèmes à treillis.

Application 1:

La première application est effectuée sur une structure à deux éléments. Les deux éléments ont la même section A , et le même module de Young E

On remarque bien sur la figure (5-1), qu'en utilisant la description mixte définie au chapitre II, on a obtenu des résultats qui sont en parfaite concordance avec ceux trouvés par Yang et Leu dans leur étude [21]. Ces derniers ont employé toutes les matrices de rigidité k_e , k_g , k_1 , k_2 et k_3 .

Dans une même application sur la même structure, mais en n'employant que les matrices k_e , k_g et k_2 , ils ont trouvé des résultats très différents des précédents. La diminution de la valeur de l'incrément de chargement, c'est à dire, l'augmentation du nombre de pas de chargement, leur a permis d'améliorer ces résultats, mais sans pour autant atteindre la précision de la première application.

Dans notre cas, en utilisant la description mixte, la précision reste inchangée quelque soit la grandeur de l'incrément de chargement.

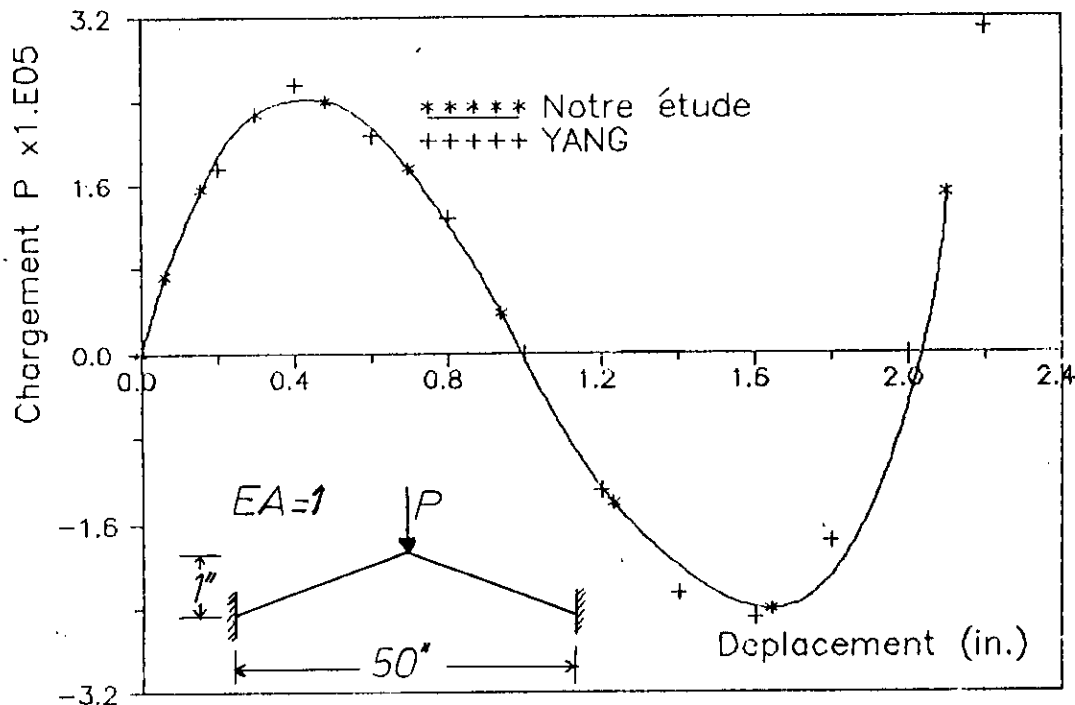


FIGURE 5-1: Déplacement du noeud 2

Application 2

Le deuxième exemple traité est celui de la coupole non-profonde à 24 éléments présentée sur la figure 5-2a.

Cette structure avait été étudiée par plusieurs chercheurs, et à l'aide de différentes méthodes de résolution: Hangai et Kawamata en 1971 [12], Jagannathan en 1975 [13]; Papadrakakis en 1981 [17] Yang et Leu en 1989 [21]

Cette coupole est constituée d'éléments ayant la même section A et, le même module de Young E.

Etant donnée la symétrie du chargement et de la structure la courbe chargement - déplacement pour le point 1 doit passer par la valeur nulle du chargement ($P=0$) pour les déplacements verticaux $U_1 = 2$ cm et $U_2 = 4$ cm. Pour cette dernière valeur, les déplacements vertical et horizontal du noeud 2 doivent être nuls.

Dans le cas de notre étude, ces conditions sont satisfaites avec une grande précision. C'est le cas aussi des études précédentes, sauf celle de Hangai et Kawamata [12] car ces dernières ont négligé certains termes de la matrice de rigidité K . (voir 2-10 du chapitre II).

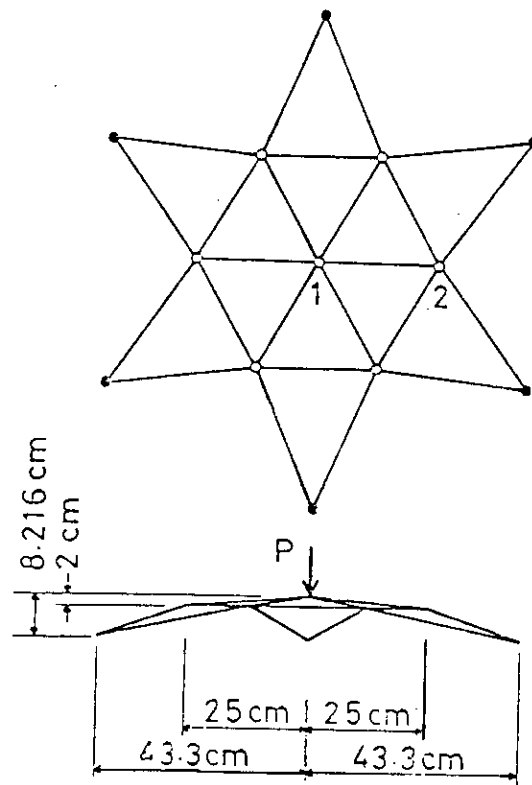


FIGURE 5-2a

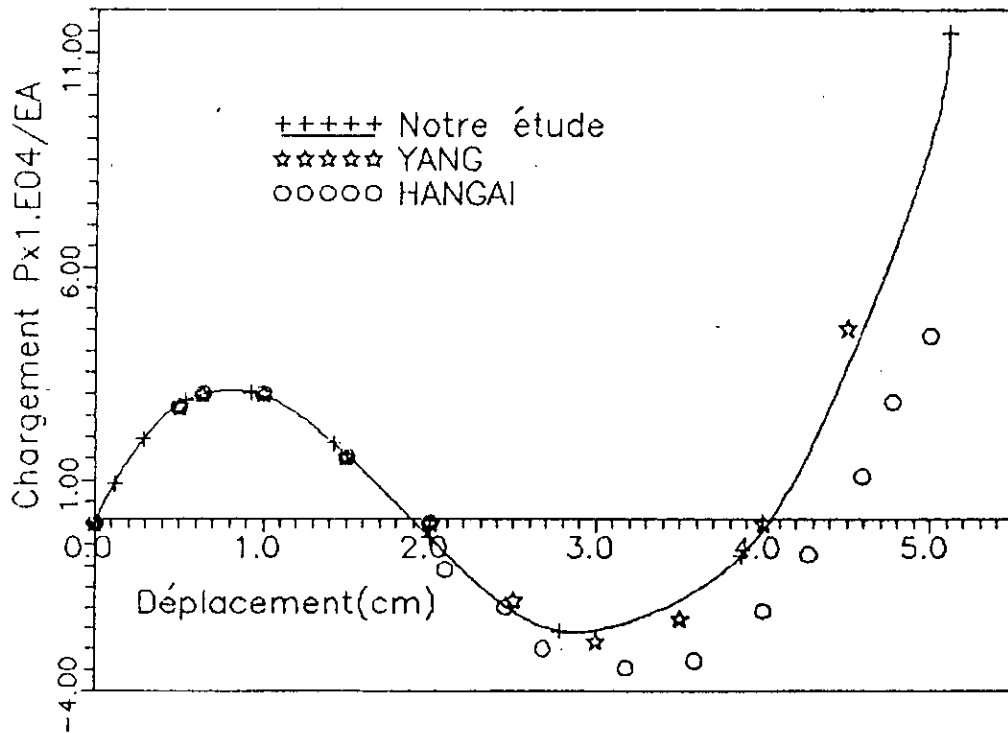


FIGURE 5-2b :Déplacement vertical du noeud 1

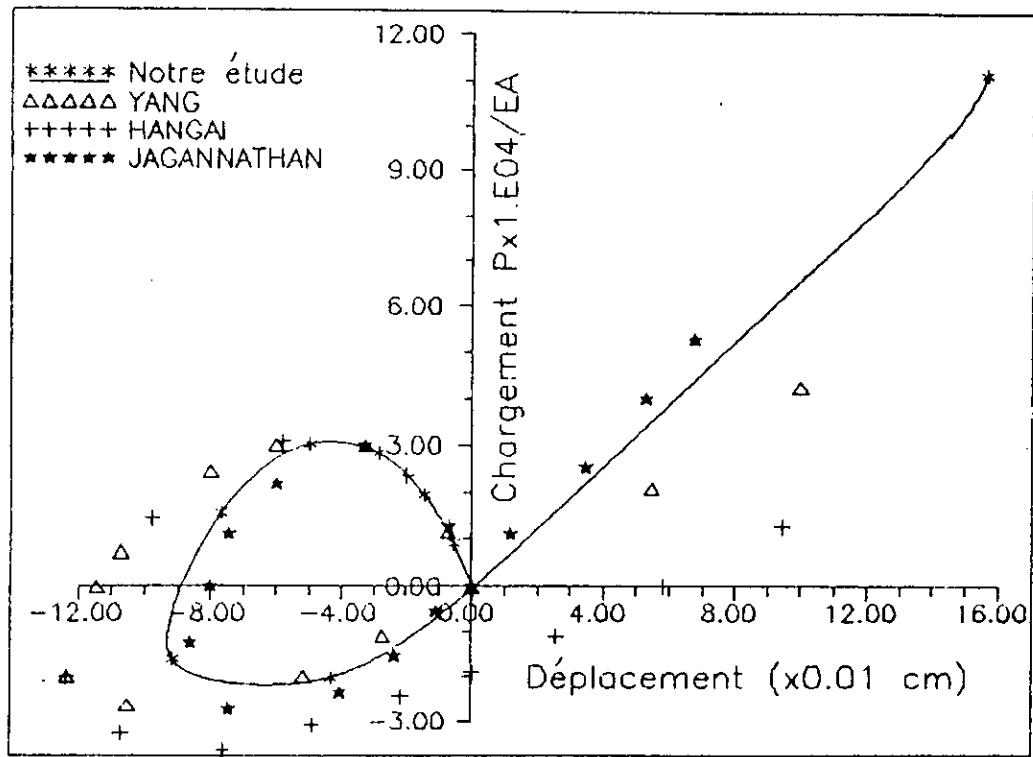


FIGURE 5-2d: Déplacement vertical du noeud 2

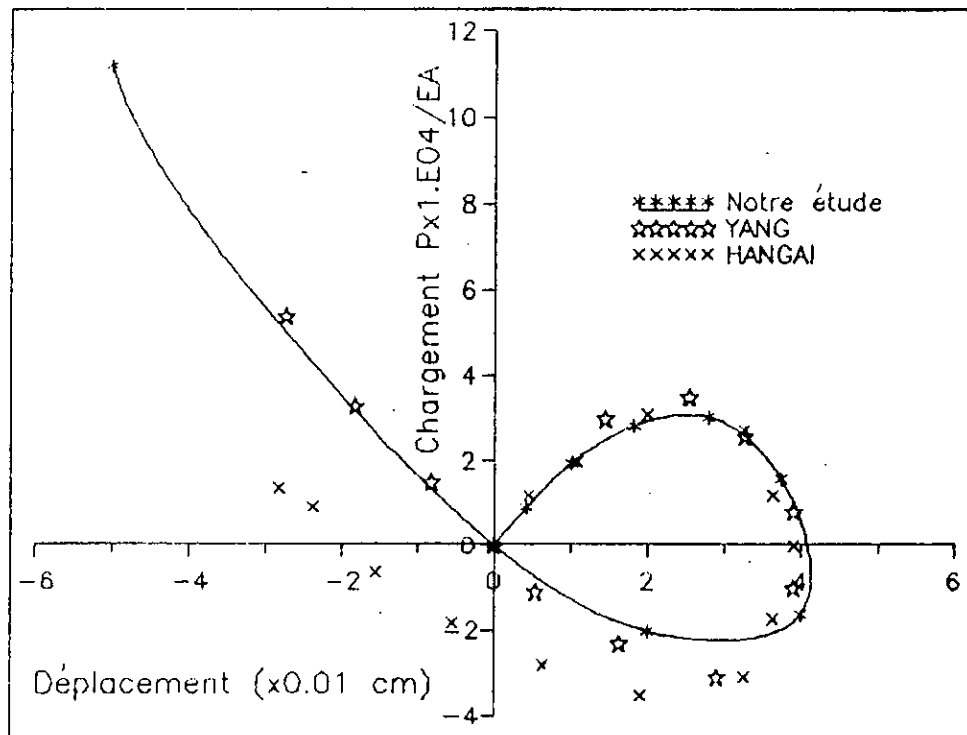


FIGURE 5-2c : Déplacement horizontal du noeud 2

Application 3:

Dans cet exemple une autre coupole peu profonde , à 30 éléments treillis est étudiée (Figure 5-3) . Toutes les barres ont le même module de Young , et la même section ($E= 30.106 \ 2109 \text{ Mpa}$, $A = 0,645 \text{ cm}^2$) .

Cette structure avait été étudiée par P.X. Bellini et A. Chulya [3]. La courbe chargement - déplacement passe par l'axe des x en trois points . Les deux premières points correspondent respectivement aux valeurs du déplacement verticale du noeud 1 :

$$U_1 = 1,5 \text{ in} = 3,81 \text{ cm}$$

$$U_2 = 3 \text{ in} = 7,62 \text{ cm}$$

Pour cette application, trois points limites ont été dépassés, et la courbe chargement déplacement obtenue est la plus longue . Les résultats obtenus en utilisant la description mixte sont très proches de ceux obtenus par les auteurs cités dessus. Ces auteurs ont utilisé toutes les matrices de rigidité k_e , k_g , k_1 , k_2 et k_3 .

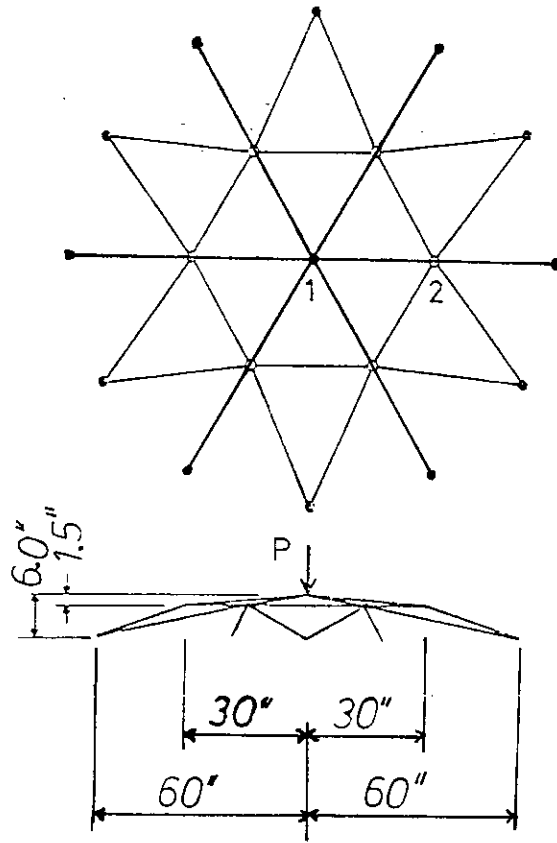


FIGURE 5-3a

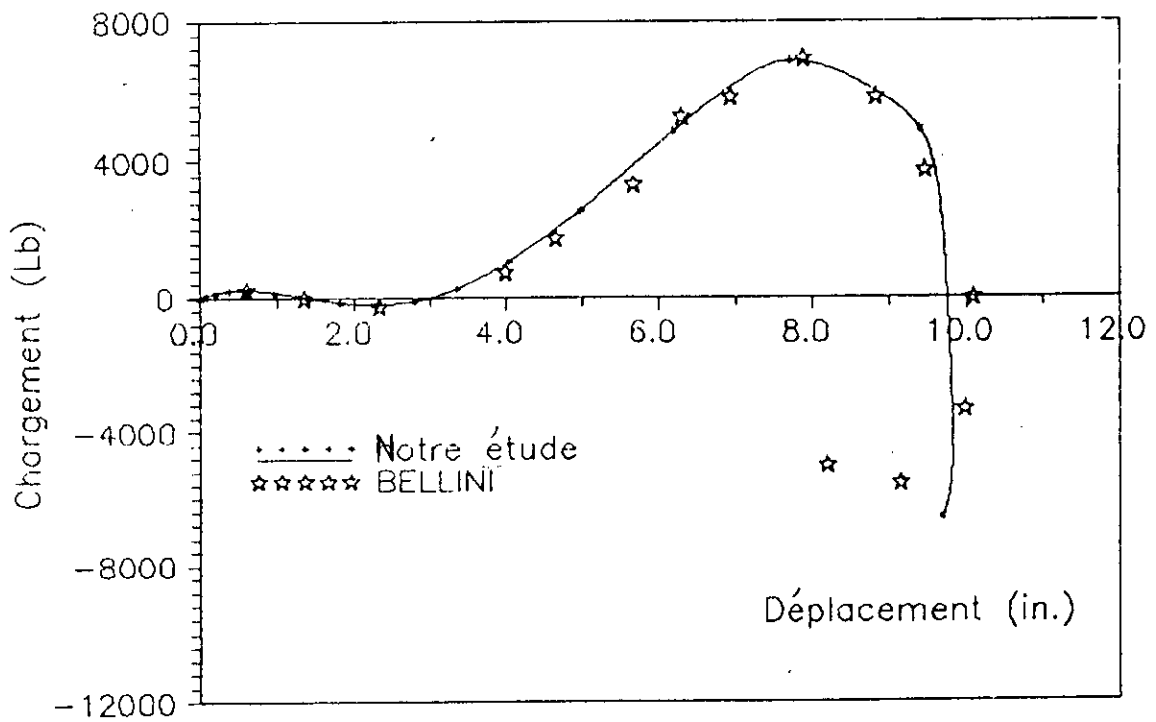


FIGURE 5-3b: Déplacement vertical du noeud 1

Application 4

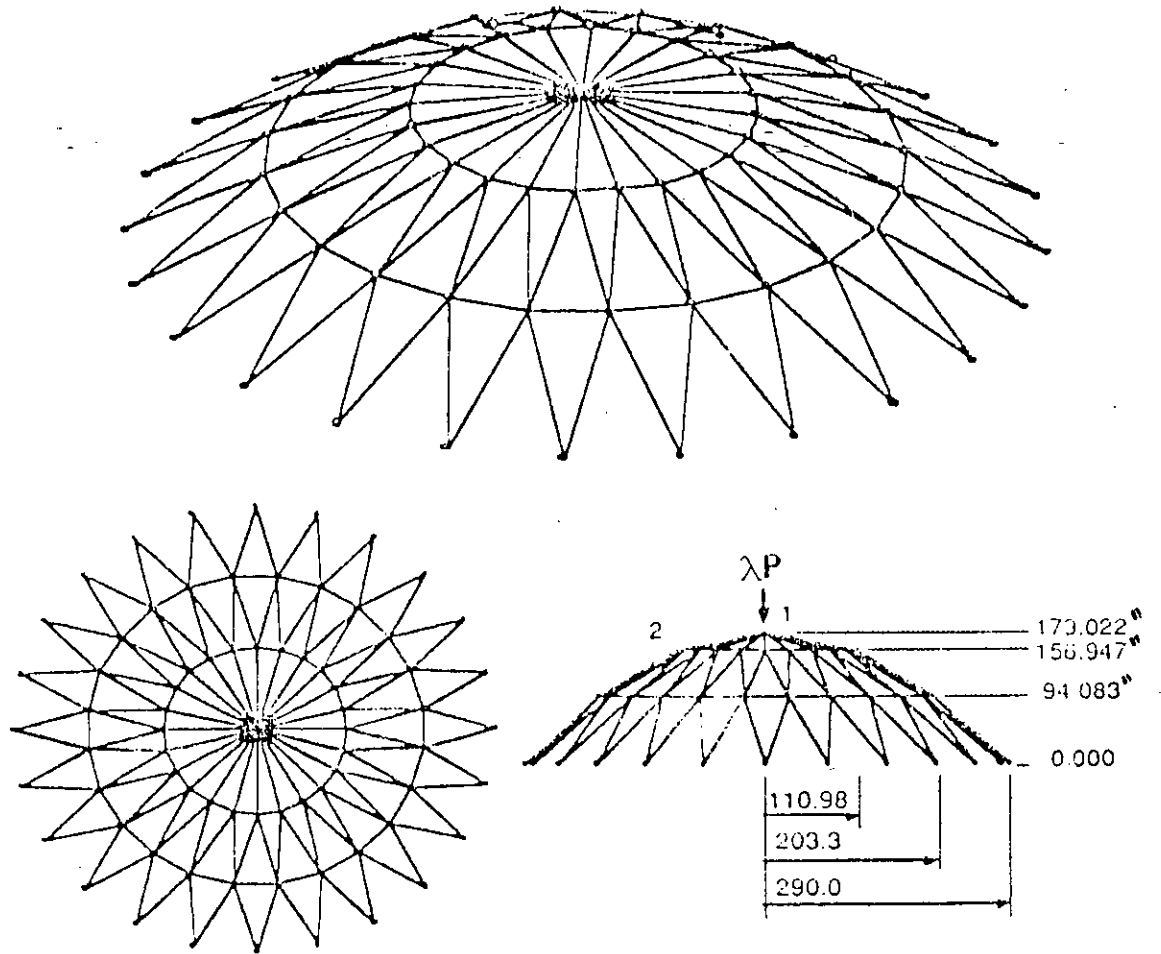
La figure (5-4 a) représente une coupole profonde de plus de 4, 5 m de hauteur et de plus de 14,6 m de diamètre . Toutes les barres ont la même section et le même module de Young ($EA=10^4$).

Les mêmes remarques de l'application 2 peuvent être observées . En effet , en appliquant les charges λP au noeud 1, il subit un déplacement vertical. Quand ce dernier atteint les valeurs : $U1 = 22 \text{ in} = 56,1 \text{ cm}$, et $U2 = 44 \text{ in} = 111,8 \text{ cm}$, la charge s'annule et, pour la deuxième valeur (c'est à dire $U2$), les déplacements vertical et horizontal du noeud 2 s'annulent aussi . Les résultats obtenus vérifient avec une grande précision ces conditions .

Forde et Steimer [9] ainsi que Papadrakakis [17], ont obtenu les mêmes résultats en utilisant plusieurs procédures différentes, mais qui impliquaient toutes les matrices k_e, k_g, k_1, k_2 et k_3 .

Dans les deux études déjà citées , ainsi que dans la notre, le même nombre de pas été nécessaire pour arriver à la solution finale.

Pour notre étude, il y a avait une moyenne de sept itérations pour chaque incrément de chargement.



$P=1 \quad E\Omega=10^4$

FIGURE 5-4a

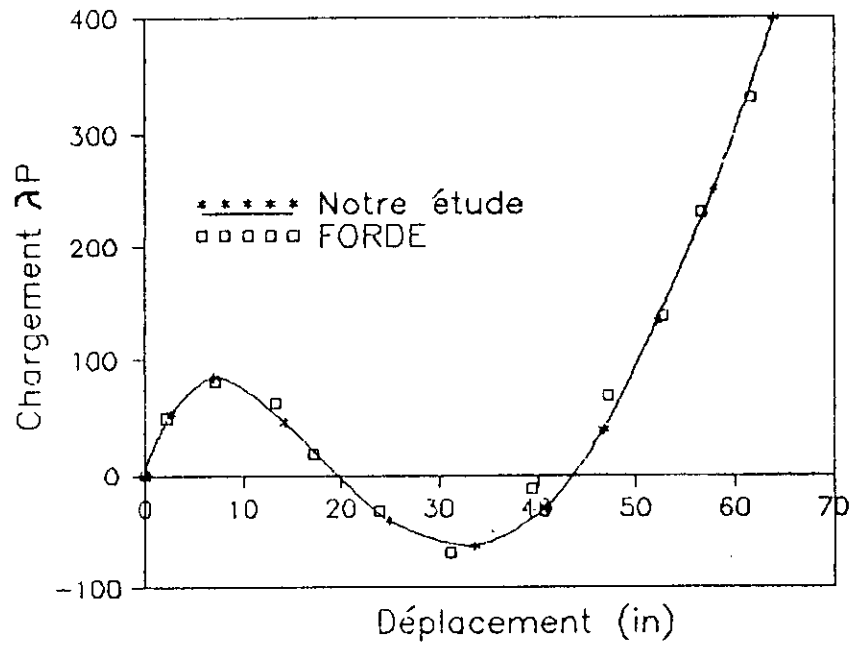


FIGURE 5-4b: Déplacement vertical du noeud 1

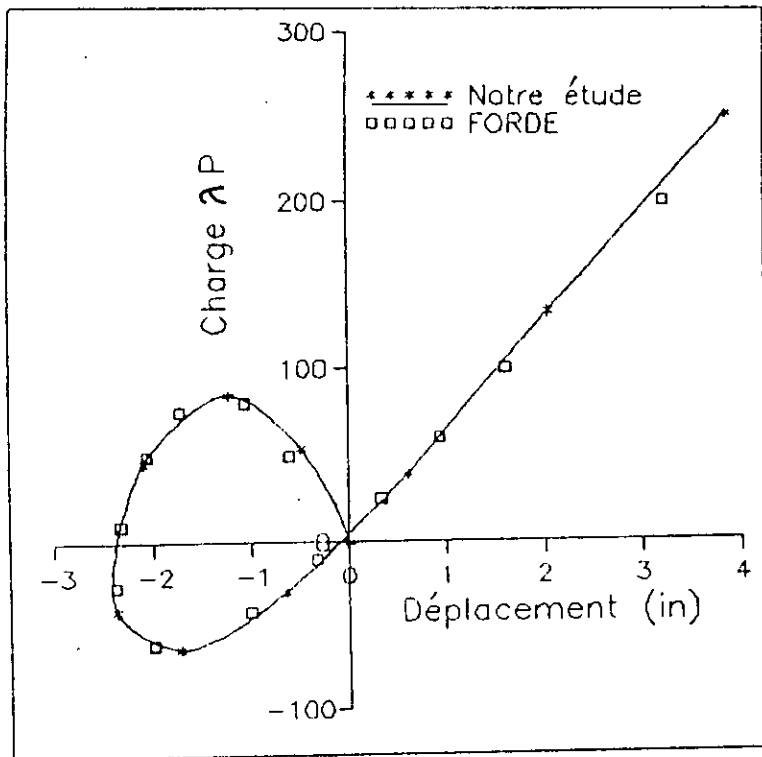


FIGURE 5-4c: Déplacement vertical du noeud 2

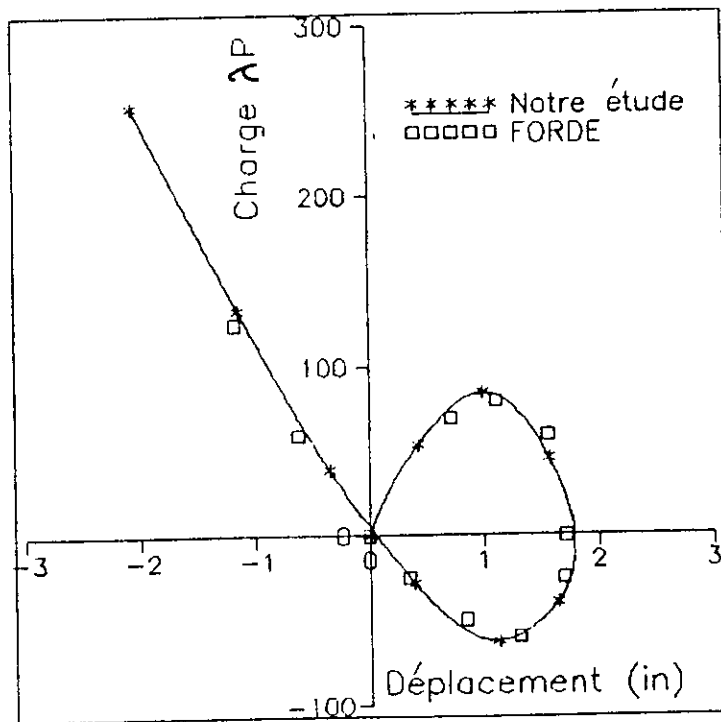


FIGURE 5-4d: Déplacement horizontal du noeud 2

Conclusion:

Une bonne concordance entre les résultats atteints en utilisant la description mixte définie au chapitre II, et ceux auxquels sont parvenus les différents chercheurs ayant utilisé des procédures de résolution impliquant toutes les matrices de rigidité k_e, k_g, k_1, k_2 et k_3 est obtenue à travers les applications précédentes.

La description mixte permet donc de tracer avec précision les comportements en grands déplacements des systèmes à treillis.

Conclusion générale

Conclusion Générale

A partir du principe des travaux virtuels, et par le biais de la formulation Lagrangienne actualisée, qui permet de mesurer les différentes variables du problème par rapport à la dernière configuration déformée connue, nous avons développé l'équation d'équilibre incrémentale pour un élément treillis. En utilisant la méthode des éléments finis, cette équation est écrite sous la forme matricielle : $[K] \{U\} = \{F\}$; la matrice $[K]$ étant la somme de cinq matrices k_e , k_g , k_1 , k_2 et k_3 définies à l'annexe.

En étudiant l'effet de la rotation rigide sur l'énergie de déformation, nous avons élaboré une technique qui permet de repérer les variables, non pas par rapport à la dernière configuration déformée connue, mais par rapport à la configuration déformée courante. Cette technique est la description mixte. Elle a pour rôle d'éliminer la rotation rigide.

En utilisant cette description, seules les matrices k_e et k_g sont employées.

Pour la résolution de l'équation d'équilibre incrémentale, la méthode arclength est utilisée.

A partir des applications effectuées sur de différentes structures à treillis, nous avons constaté l'efficacité de cette méthode à dépasser les points limites de la courbe chargement-déplacement.

Les résultats obtenus en utilisant la description mixte sont très satisfaisants. Dans le cas des poutres cette description a donné aussi, de bons résultats [16]. Il serait alors, très intéressant d'appliquer cette méthode sur d'autres éléments plus complexes tels que les plaques et coques, où l'utilisation de la description mixte est d'un grand intérêt, vu les grandes dimensions des matrices impliquées dans les calculs.

Pour avoir une meilleure estimation de la capacité réelle de chargement, il serait important de prendre en considération de l'effet élasto-plastique, ou de la non linéarité matérielle en général.

Par ailleurs , l'extension de l'étude au chargement dynamique non-linéaire serait intéressante, d'autant plus que la formulation employée dans cette étude est tout à fait adaptée à l'incorporation de cette analyse .

ANNEXE.

DEVELOPPEMENT DES MATRICES DE RIGIDITE:

1. MATRICE ELASTIQUE [K_e]:

$$\begin{aligned}\langle \delta U \rangle [K_e] \{U\} &= \int_V E e_{nn} \delta e_{nn} dV. \\ &= \int_V U_{n,n} \delta U_{n,n} dV. \\ &= \langle \delta U_n \rangle EA \int_0^l \frac{1}{e} \{n_i\} \langle n_i \rangle \frac{1}{e} di \{ \bar{U}_n \}. \\ &= \langle \delta U_n \rangle \frac{EA}{e} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \{ \bar{U}_n \} \\ &= [K_e] = \frac{EA}{e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2. MATRICE DE RIGIDITE GEOMETRIQUE [K_g]:

$$\begin{aligned}\langle \delta U \rangle [K_g] \{U\} &= \int_V \sigma_{nn} \delta h_{nn} dV \\ A+B+C &= \int_V \sigma_{nn} (U_{n,n} + \delta_{n,n}) dV + \int_V \sigma_{nn} U_{y,n} + \delta U_{y,n} dV + \int_V \sigma_{nn} U_{z,n} \delta U_{z,n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= \int_0^l \frac{F_n}{A} U_{n,n} \delta U_{n,n} A dn \\ &= \langle \delta U \rangle \frac{F_n}{e} \int_0^1 \{n_i\} \langle n_i \rangle di \{ \bar{U}_n \} \\ &= \langle \delta U_n \rangle \frac{F_n}{e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{ U_n \}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \int_0^l \frac{F_n}{A} U_{y,n} \delta U_{y,n} A dn \\ &= \langle \delta U_y \rangle \frac{F_n}{e} \int_0^1 \{n_i\} \langle n_i \rangle di \{ \bar{U}_y \} \\ &= \langle \delta U_y \rangle \frac{F_n}{e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{ \bar{U}_y \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= \int_0^l \frac{F_n}{A} U_{z,n} \delta U_{z,n} A dn \\ &= \langle \delta U_z \rangle \frac{F_n}{e} \int_0^1 \{n_i\} \langle n_i \rangle di \{ \bar{U}_z \} \\ &= \langle \delta U_z \rangle \frac{F_n}{e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{ \bar{U}_z \}.\end{aligned}$$

DOU :

$$\langle \delta U \rangle [kg] \{U\} = A+B+C$$

⇒

$$[kg] = \frac{F_m}{l}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. MATRICE DE RIGIDITE [K₁] :

$$\langle \delta U \rangle \frac{1}{2} [k_1] \{U\} = \int_V E \epsilon_{mn} \delta \epsilon_{mn} dV.$$

$$= \frac{1}{2} \int_V E (U_{1,n}^2 + U_{2,n}^2 + U_{3,n}^2) \delta U_{1,n} dV.$$

$$A+B+C = \frac{1}{2} \int_V E U_{1,n}^2 \delta U_{1,n} dV + \frac{1}{2} \int_V E U_{2,n}^2 \delta U_{2,n} dV + \frac{1}{2} \int_V E U_{3,n}^2 \delta U_{3,n} dV$$

$$\Rightarrow A = \langle \delta U_n \rangle \frac{1}{2} \frac{EA}{l^2} \begin{bmatrix} \Delta U_n & -\Delta U_n \\ -\Delta U_n & \Delta U_n \end{bmatrix} \left\{ \bar{U}_n \right\}.$$

$$B = \langle \delta U_n \rangle \frac{1}{2} \frac{EA}{l^2} \begin{bmatrix} \Delta U_y & -\Delta U_y \\ -\Delta U_y & \Delta U_y \end{bmatrix} \left\{ \bar{U}_y \right\}.$$

$$C = \langle \delta U_n \rangle \frac{1}{2} \frac{EA}{l^2} \begin{bmatrix} \Delta U_z & -\Delta U_z \\ -\Delta U_z & \Delta U_z \end{bmatrix} \left\{ \bar{U}_z \right\}.$$

DOU :

$$K_1 = \frac{EA}{l^2} \begin{bmatrix} \Delta U_n & \Delta U_y & \Delta U_z & -\Delta U_n & -\Delta U_y & -\Delta U_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta U_n & -\Delta U_y & -\Delta U_z & \Delta U_n & \Delta U_y & \Delta U_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. MATRICE DE RIGIDITE $[K_2]$:

$$\int_V E \epsilon_m \delta \eta_{mn} dV = \int_V E U_{m,n} (\delta U_{m,n} + U_{y_1,n} \delta U_{y_1,n} + U_{z_1,n} \delta U_{z_1,n}) dV.$$

$$A+B+C = \int_V E U_{m,n}^2 \delta U_{m,n} dV + \int_V E U_{m,n} U_{y_1,n} \delta U_{y_1,n} dV + \int_V E U_{m,n} U_{z_1,n} \delta U_{z_1,n} dV.$$

$$A = \langle \delta U_m \rangle \frac{EA}{l^2} \begin{bmatrix} \Delta U_m & -\Delta U_m \\ -\Delta U_m & \Delta U_m \end{bmatrix} \left\{ \bar{U}_m \right\}$$

$$B = \frac{1}{2} \int_V E U_{m,n} U_{y_1,n} \delta U_{y_1,n} dV + \frac{1}{2} \int_V E U_{m,n} U_{y_1,n} \delta U_{y_1,n} dV$$

$$B = B_1 + B_2.$$

$$B_1 = \langle \delta U_y \rangle \frac{1}{2} \frac{EA}{l^2} \begin{bmatrix} \Delta U_y & -\Delta U_y \\ -\Delta U_y & \Delta U_y \end{bmatrix} \left\{ \bar{U}_y \right\}$$

$$B_2 = \langle \delta U_y \rangle \frac{1}{2} \frac{EA}{l^2} \begin{bmatrix} \Delta U_m & -\Delta U_m \\ -\Delta U_m & \Delta U_m \end{bmatrix} \left\{ \bar{U}_y \right\}$$

$$C = \int_V E U_{m,n} U_{z_1,n} \delta U_{z_1,n} dV$$

$$= C_1 + C_2 = \frac{1}{2} \int_V E U_{m,n} U_{z_1,n} \delta U_{z_1,n} dV + \frac{1}{2} \int_V E U_{m,n} U_{z_1,n} \delta U_{z_1,n} dV$$

$$C_1 = \langle \delta U_z \rangle \frac{1}{2} \frac{EA}{l^2} \begin{bmatrix} \Delta U_m & -\Delta U_m \\ -\Delta U_m & \Delta U_m \end{bmatrix} \left\{ \bar{U}_z \right\}$$

$$C_2 = \langle \delta U_z \rangle \frac{1}{2} \frac{EA}{l^2} \begin{bmatrix} \Delta U_z & -\Delta U_z \\ -\Delta U_z & \Delta U_z \end{bmatrix} \left\{ \bar{U}_z \right\}$$

D'ou:

$$[K_2] = \frac{EA}{l^2} \begin{bmatrix} 2\Delta U_m & 0 & 0 & -2\Delta U_m & 0 & 0 \\ -\Delta U_y & \Delta U_m & 0 & -\Delta U_y & -\Delta U_m & 0 \\ \Delta U_z & 0 & \Delta U_m & -\Delta U_z & 0 & -\Delta U_m \\ -2\Delta U_m & 0 & 0 & 2\Delta U_m & 0 & 0 \\ -\Delta U_y & -\Delta U_m & 0 & \Delta U_y & \Delta U_m & 0 \\ -\Delta U_z & 0 & -\Delta U_m & \Delta U_z & 0 & \Delta U_m \end{bmatrix}$$

$$[K_3] = \frac{E \cdot A}{2l^3}$$

$$\begin{bmatrix} 3a^2+b^2+c^2 & 2a \cdot b & 2a \cdot c & -(3a^2+b^2+c^2) & -2a \cdot b & -2a \cdot c \\ & 3b^2+a^2+c^2 & 2b \cdot c & -2a \cdot b & -(3b^2+a^2+c^2) & -2b \cdot c \\ & & 3c^2+b^2+a^2 & -a \cdot c & -2b \cdot c & -(3c^2+b^2+a^2) \\ & & & 3a^2+b^2+c^2 & 2a \cdot b & 2a \cdot c \\ & & & & 3b^2+a^2+c^2 & 2b \cdot c \\ & & & & & 3c^2+b^2+a^2 \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1]: **K.J. BATH**
" Finite élément procédure in engineering analysis "
Prantice-Hall, 1982
- [2]: **J.L. BATOZ and G. DHATT**
" Incrément displacement algorithms for nonlinear problems "
Int.J. Num. Meth. Engrg. 14, 1979
- [3]: **P.X. Bellini and A. Chulyá**
" An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of
nonlinear finite element equations".
Comp. and Struc., Vol 26, n° 1/2 , 1987
- [4]: **A .CHAGES and J.E. CHURCHILL**
"Nonlinear frame analysis by finite element method "
J. Struc. Engrg. ASCE., 113(6), 1987.
- [5]: **W.F. CHEN , DJ. HAN**
"Plasticity of structural engineers"
1988.
- [6]: **M.A. CRISFIELD**
"A fast incremental/ iterative solution procedure that handles snap-through".
Comp. and Struc., vol 13; 1981.
- [7]: **D.J. DAWE**
" Matrix and finite element displacement analysis if structures"
Clarendon - Press. OXFORD , 1984.
- [8]: **G. DHATT et G. TOUZOT**
" Une présentation de la méthode des éléments finis"
Maloine S.A Editeur, 1984.

- [9]: **B.W.R. Forde and S.F. Steimer**
"Improved arclength orthogonality methods for nolinear finite element analysis"
Comp. and Struc. Vol 27 n° 5, 1987.
- [10]: **F.Fray et J. JIROUSEK**
"Calcul des structures par ordinateur"
EPFL (I.S.S) 1985.
- [11]: **J.M. Gere and W.Weaver**
"Matrix analysis of framed structures"
Van Nostand-Reinhold , New -Yok. 1968.
- [12]: **Y. HANGAI and S. KAWAMATA.**
"Nonliner analysis of space frames ans snap-through buckliag of reticulated shell structures"
Int. Assoc. for shell and spatial struct. (IASS) part II , 1981.
- [13]: **D.S. JAGANNATHAN , H.I. EPSTEIN and P. CHRISTIANS**
"Fictitious strains due to rigid body rotation"
J. Struc. Div. , ASCE,101 (ST11), 1975
- [14]: **F.JOHNS, C.T.F ROSS**
"Computer analysis of skeletal structures"
F. and F.N. SPON (G.R.B.) , 1981.
- [15]: **R.H. Mallet and P.V. Marcal**
"Finite element analysis of nonlinear structures"
J. Struc. Div. , ASCE, 94 (ST9), 1968.
- [16]: **B. MEZAZIGH**
" Analyse du comportement non-linéaire géométrique et matériel des structures spatiales en poutres".
Thèse de magistère à L'ENP . 1995.

- [17]: **M. PAPADRAKAKIS**
"Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods"
Comp. and Struc., 14,1981.
- [18]: **E. RICKS**
"An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems"
Int. J. Solids structures 15, 1979.
- [19]: **J.G. TENG and J.M. ROTTER**
" Large deflection analysis of axisymmetric shells"
Comp. and Struc. , Vol 31, n°2, 1989.
- [20] : **Y.B. YANG and H.T. CHIOU**
" Rigid body motion test for nonlinear analysis with beam elements"
J. Engrg. Mech., ASEC, 113(9), 1987.
- [21]: **Y.B. YANG and L.J. LEU**
" Effects of rigid body and stretching or nonlinear analysis of trusses"
J. Struct. Engrg., ASCE, 116(10) 1990.
- [22] : **Y.B. YANG and W. McGUIRE**
" Joint rotation and geometric nonlinear analysis"
J. Struct. Engrg., ASCE, 112(4), 1986
- [23] : **D.C.ZIENKIEWICZ and R.L. TAYLOR**
" The finite element method " Vol 2
McGraw-Hill , 1987.